

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Архитектурно-строительный институт

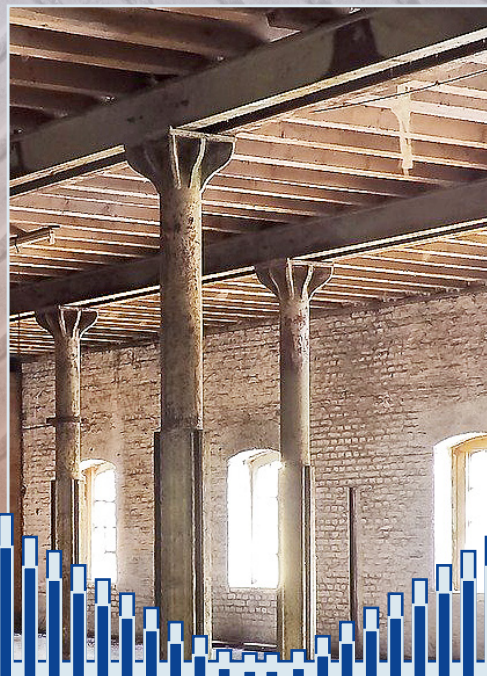
Э.Р. Ефименко

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Электронное
учебно-методическое пособие

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2020

ISBN 978-5-8259-1472-5



УДК 624.041.2

ББК 38.112

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор, завкафедрой ТОСП АСИ Самарского государственного технического университета *В.П. Попов*;
канд. техн. наук, доцент Тольяттинского государственного университета *И.К. Родионов*.

Ефименко, Э.Р. Статически определяемые системы : электронное учебно-методическое пособие / Э.Р. Ефименко. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2020. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1472-5.

В пособии дан краткий теоретический материал для расчета статически определяемых систем и кинематического анализа систем, примеры расчета статически определяемой арки, фермы, балки.

Пособие является частью курса «Строительная механика». Предназначено для студентов всех форм обучения по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» (профили «Городское строительство и хозяйство», «Промышленное и гражданское строительство»).

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2020

Редактор *О.И. Елисева*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания к использованию 28.02.2020.

Объем издания 21,3 Мб.

Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.

Заказ № 1-54-17.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	6
1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ	7
2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ	11
2.1. Образование многопролетных шарнирно-разрезных балок	11
2.2. Построение эпюр внутренних усилий в многопролетных балках	14
2.3. Построение линий влияния в балках	15
2.4. Определение усилий по линиям влияния	19
2.5. Порядок расчета статически определимой балки (многопролетной шарнирно-разрезной балки) на подвижную и неподвижную нагрузку	22
2.6. Пример расчета многопролетной шарнирно-разрезной балки	22
3. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ	43
3.1. Основные понятия, определения и классификация ферм. Кинематический анализ ферм	43
3.2. Определение опорных реакций и внутренних усилий в стержнях ферм	46
3.3. Аналитические способы определения внутренних усилий	47
3.4. Признаки нулевых и ненулевых стержней	50
3.5. Графический способ определения внутренних усилий в стержнях простейших ферм. Построения диаграммы Максвелла – Кремоны	51
3.6. Построение линий влияния опорных реакций и внутренних усилий стержней ферм	52
3.7. Определение опорных реакций и внутренних усилий ферм по линиям влияния	54
3.8. Порядок расчета статически определимой фермы	55
3.9. Пример расчета статически неопределимой фермы	55

4. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ АРКИ	69
4.1. Трехшарнирные системы	69
4.2. Определение опорных реакций в трехшарнирной арке	73
4.3. Определение внутренних усилий в сечениях арки	78
4.4. Расчет трехшарнирной арки на подвижную нагрузку	86
4.5. Определение усилий по линиям влияния	95
4.6. Порядок расчета трехшарнирной арки на подвижную и неподвижную нагрузки	96
4.7. Пример расчета трехшарнирной арки на подвижную и неподвижную нагрузки	97
Библиографический список	114
Приложение А	115
Приложение Б	116

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика — это наука о расчете сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Проектирование, реконструкция и возведение любого сооружения связано с расчетом на надежность и долговечность, следовательно, строительная механика дает необходимую подготовку для проектирования строительных конструкций, зданий и сооружений, мостов и дорог.

Целью расчётов, проводимых методами строительной механики, является определение усилий в элементах сооружения (изгибающих моментов, поперечных и продольных сил) и перемещений точек сооружения (прогибов, смещений, отклонений) от действующих на сооружение нагрузок и других внешних воздействий.

При изучении строительной механики ставится цель вооружить будущего специалиста знанием основных принципов и методов расчёта строительных конструкций и сооружений, привить ему навыки решения задач строительной механики.

Данное учебно-методическое пособие имеет целью помочь студентам в выработке практических навыков решения задач при выполнении контрольных и расчетно-графических работ по строительной механике.

1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Кинематический анализ — это исследование расчётной схемы сооружения (системы), выполняемое до начала расчёта, с целью определения кинематического качества системы (геометрической неизменяемости, мгновенной изменяемости или геометрической изменяемости), а в случае геометрической неизменяемости системы — также для выявления ее статической определимости или неопределимости.

Геометрически неизменяемой (ГНС) называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов. Простейшей геометрически неизменяемой системой является шарнирный треугольник (рис. 1.1, а).

Геометрически изменяемой (ГИС) называется система, в которой возможны конечные перемещения без деформации элементов (рис. 1.1, б).

Мгновенно изменяемой называется система (МИС), в которой могут возникать бесконечно малые перемещения без деформации её элементов (рис. 1.1, в).

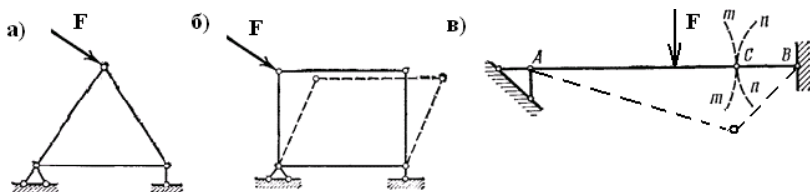


Рис. 1.1

Степени свободы — независимые геометрические параметры, полностью определяющие положение всех точек диска или системы в целом при их возможных перемещениях.

Диск — часть системы (один или несколько соединённых друг с другом элементов), форма и размеры которой могут изменяться только вследствие деформации материала.

Каждый жесткий диск в плоскости имеет три степени свободы, т. е. его положение в плоскости определяется тремя независимыми координатами: двумя поступательными перемещениями по направлению осей Ox и Oy и поворотом в плоскости xOy .

Связи (механические) – ограничения на перемещения (линейные и/или угловые) точек или сечений элементов системы, а также устройства, технически реализующие эти ограничения. К таким связям относят шарниры и опоры.

Каждая элементарная связь отнимает одну степень свободы. Каждый простой шарнир снимает две степени свободы взаимной подвижности связанных им дисков. Простой шарнир соединяет два диска (рис. 1.2, *а*). Сложный шарнир образуется при шарнирном соединении в одной точке более чем двух дисков (рис. 1.2, *б*). Он эквивалентен нескольким ($\tilde{m} - 1$) простым шарнирам, где \tilde{m} – число соединяемых им дисков. На рис. 1.1, *б*, кратный шарнир можно заменить четырьмя одиночными шарнирами (соединены пять дисков).

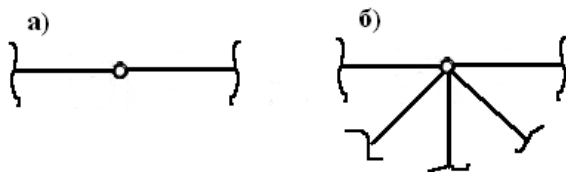


Рис. 1.2

Шарнирно-подвижная опора (рис. 1.3, *а–в*) эквивалентна одной связи и дает одну опорную реакцию. Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.3, *г–ж*) эквивалентна двум связям и дает две опорные реакции. Жесткая заделка или защемляющая связь (рис. 1.3, *з*) эквивалентна трем связям и дает три опорные реакции. Скользящая заделка (рис. 1.3, *и*) эквивалентна двум связям и дает две опорные реакции.

Согласно вышесказанному можно сделать вывод, что степень свободы системы будет определяться по формуле (1.1):

$$W = 3D - 2Ш - C_{\text{оп}}, \quad (1.1)$$

где D – количество дисков; $Ш$ – количество одиночных шарниров; $C_{\text{оп}}$ – количество опорных связей.

Для системы, изображенной на рис. 1.4, *а*, степень свободы $W = 1$ ($D = 3$, $Ш = 2$, $C_{\text{оп}} = 4$), на рис. 1.4, *б*, степень свободы $W = 0$ ($D = 9$, $Ш = 12$, $C_{\text{оп}} = 3$), на рис. 1.4, *в*, степень свободы $W = -3$ ($D = 1$, $Ш = 0$, $C_{\text{оп}} = 6$).

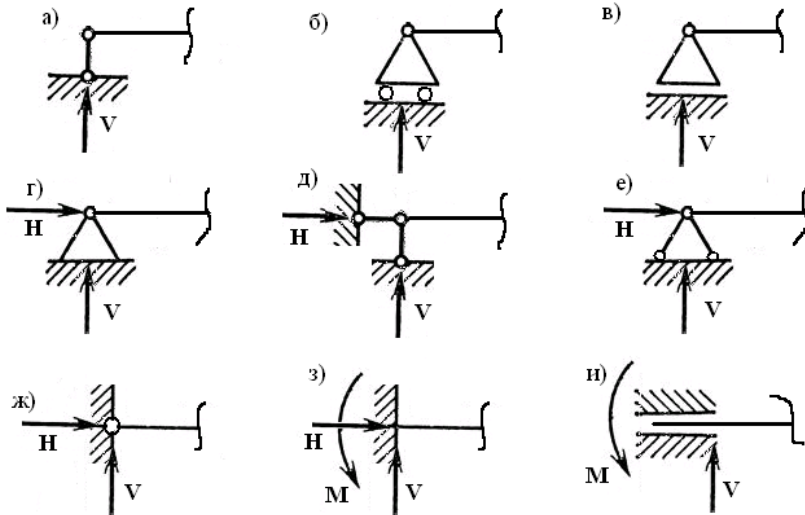


Рис. 1.3. Схемы опирания: *а–в* – шарнирно-подвижные опоры; *г–ж* – шарнирно-неподвижные опоры; *з* – жесткая заделка (зашемляющая связь); *и* – скользящая заделка

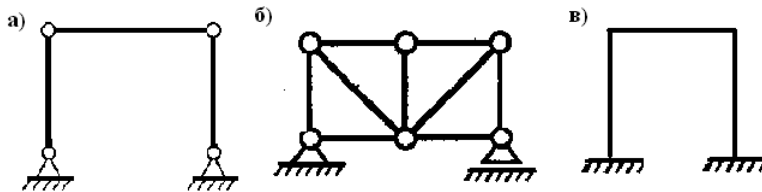


Рис. 1.4

При определении степени свободы системы возможны три качественно различных результата:

- 1) $W < 0$ – система геометрически неизменяема и статически неопределима;
- 2) $W = 0$ – система геометрически неизменяема и статически определима;
- 3) $W > 0$ – система геометрически изменяема, является механизмом и ее нельзя использовать в качестве сооружения.

Условие $W \geq 0$ является необходимым, но недостаточным для геометрической неизменяемости балки. Для обеспечения геометри-

ческой неизменяемости системы должно выполняться необходимое и достаточное условие. Достаточным условием является правильное формирование структурно неизменяемой системы. Для этого существуют основные принципы структурообразования геометрически неизменяемых систем:

- 1) присоединение к диску двухстержневого звена не изменит степени свободы системы (рис. 1.5, а);
- 2) к диску можно геометрически неизменяемо присоединить другой диск с помощью общего для обоих диска шарнира и стержня, направление которого не должно проходить через этот шарнир (рис. 1.5, б);
- 3) три диска можно соединить тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рис. 1.5, в);
- 4) два диска образуют геометрически неизменяемую систему, если они связаны между собой с помощью трех стержней, оси которых не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу (рис. 1.5, г).

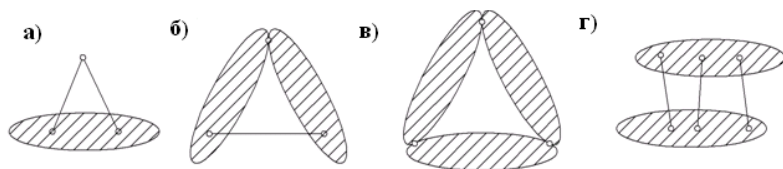


Рис. 1.5

Итак, утверждать что система геометрически неизменяема можно, если выполнены необходимое и достаточное условие геометрической неизменяемости.

2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

2.1. Образование многопролётных шарнирно-разрезных балок

Многопролётной шарнирно-разрезной балкой (МШРБ) называется статически определимая, геометрически неизменяемая система, состоящая из ряда однопролётных балок с консолями и без консолей, соединённых между собой промежуточными шарнирами. По сравнению с отдельными однопролётными балками, многопролётные статически определимые балки во многих случаях позволяют уменьшить величину изгибающего момента, поэтому их применение оказывается более экономичными. Эпюры изгибающих моментов для однопролётных балок показана на рис. 2.1, а, а эпюра для многопролётной балки на рис. 2.1, б.

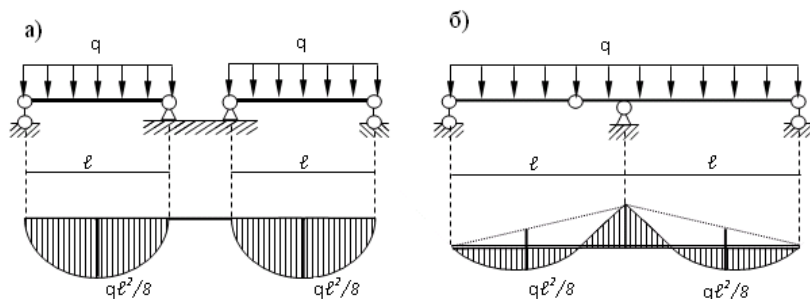


Рис. 2.1

МШРБ состоят из отдельных сравнительно коротких элементов, удобных для массового производства. Усилия в них статически определимы и не зависят от осадки опор.

Шарнирно-разрезную многопролётную балку можно получить из неразрезной, то есть статически неопределимой балки, включив в неё ряд промежуточных шарниров, число которых равно степени статической неопределимости неразрезной балки. Шарниры в балке должны быть распределены таким образом, чтобы система во всех своих частях была статически определимой и геометрически неизменяемой.

Пятипролётная неразрезная балка прикреплена к основанию при помощи семи опорных связей (рис. 2.2, б). Для определения усилий в связях можно составить только три независимых уравнения статики. Степень статической неопределимости, или число лишних неизвестных, определяется по формуле

$$n_{\text{ст}} = C_{\text{оп}} - 3, \quad (2.1)$$

где $C_{\text{оп}}$ — число опорных связей (опорных реакций).

Каждый шарнир, установленный в пролёте или на опоре неразрезной балки, позволит составить одно дополнительное уравнение статики — условие равенства нулю суммы моментов относительно шарнира всех правых или левых сил. Следовательно, чтобы заданную неразрезную (статически неопределимую) балку обратить в статически определимую, необходимо в балку ввести четыре шарнира согласно формуле (2.1) ($n_{\text{ст}} = C_{\text{оп}} - 3 = 7 - 3 = 4$).

При этом шарниры в балке должны быть расположены таким образом, чтобы система во всех своих частях была статически определимой и геометрически неизменяемой.

Условие $W \geq 0$ ($W = 3D - 2Ш - C_{\text{оп}} = 0$ для балки на рис. 2.2, а) является необходимым, но недостаточным для геометрической неизменяемости балки. Для обеспечения неизменяемости балки размещение шарниров в пролётах должно подчиняться следующим правилам:

- 1) в каждом пролёте должно быть не более двух шарниров;
- 2) пролёты с двумя шарнирами должны чередоваться с пролётами без шарниров (за исключением балок с защемленными концами);
- 3) пролёты с одним шарниром могут следовать один за другим при условии, что один пролёт останется без шарнира (за исключением балок с защемленными концами);
- 4) крайний пролет балки не должен иметь два шарнира (за исключением балок с защемленными концами).

Для решения вопроса о неизменяемости МШРБ, а также для более наглядного представления о ее работе следует изображать схему взаимодействия отдельных элементов балки. Такая схема называется поэтажной схемой балки. Правильно построенная поэтажная схема балки является достаточным условием геометрической неизменяемости данной балки.

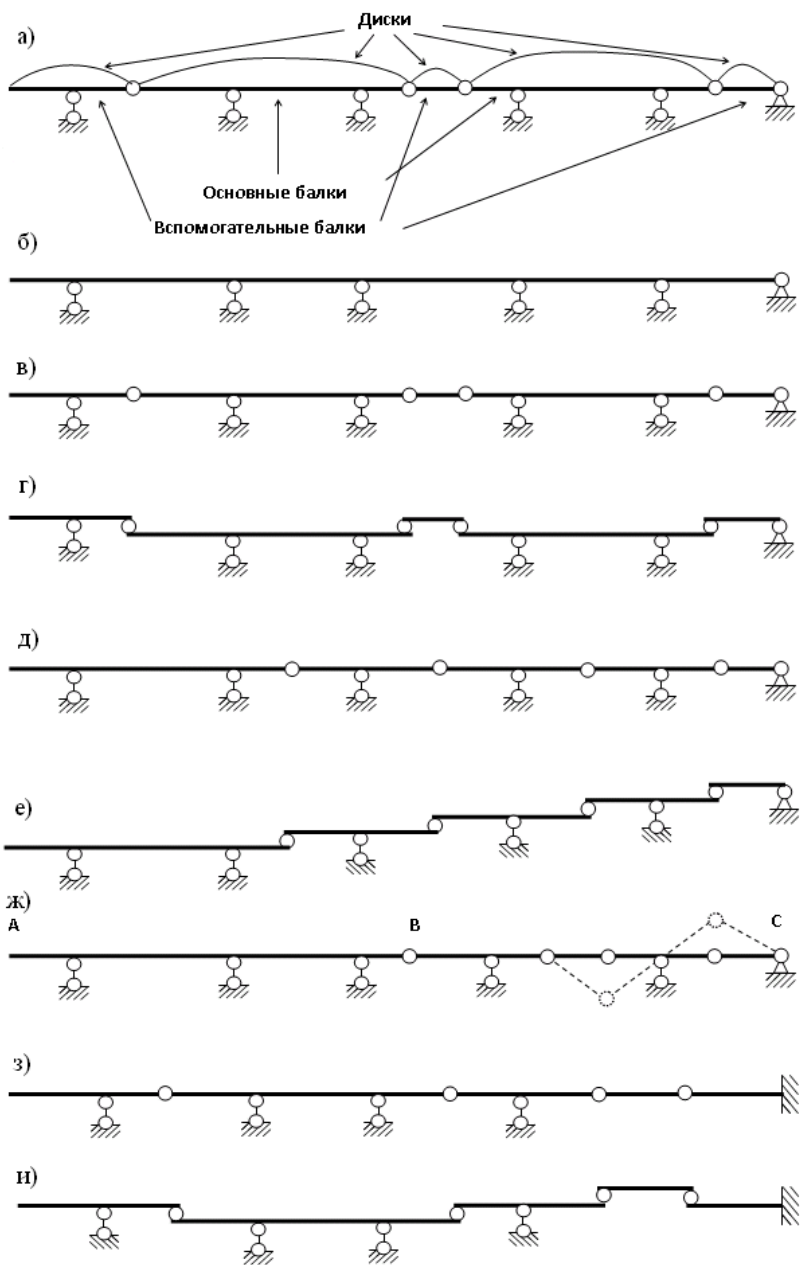


Рис. 2.2

Для построения поэтажной схемы балку делят на отдельные звенья между шарнирами — диски (балки) (рис. 2.2, *а*). Среди балок выделяют основные (несущие) и вспомогательные (подвесные) балки. К основным балкам относятся консольные участки с защемленной опорой и участки балки на двух опорах. Вспомогательные балки опираются на основные и расположены «этажом» выше основной балки, также они могут опираться на нижележащие вспомогательные балки. Основных балок в системе может быть несколько, при этом они могут располагаться на разных уровнях.

Различные схемы расположения шарниров (рис. 2.2, *в, д, ж, з*) позволяют неразрезную балку превратить в шарнирно-разрезную многопролётную. На рис. 2.2, *г, е, и*, представлены их поэтажные схемы. Хотя общее число поставленных шарниров равно числу лишних неизвестных, но шарниры могут быть расставлены неправильно (рис. 2.2, *ж*). Ошибка заключается в том, что часть балки *AB* получилась статически неопределимой, а часть *BC* — геометрически изменяемой. Возможные перемещения в этой части балки показаны штриховой линией.

На рис. 2.2, *з*, приведён пример расстановки шарниров в МШРБ с одним защемленным концом. В поэтажной схеме данной балки (рис. 2.2, *и*) видно, что шарниры расставлены как исключения из правил.

2.2. Построение эпюр внутренних усилий в многопролетных балках

Расчет балок сводится к определению опорных реакций и построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Расчет многопролетной балки начинается с кинематического анализа системы. При расчёте (определении внутренних усилий) многопролётной шарнирно-разрезной балки удобно пользоваться ее поэтажной схемой.

Расчёт МШРБ начинают с самых верхних балок поэтажной схемы, а затем переходят на нижние балки, с учётом опорных давлений от вышележащих балок, равных реакциям последних, но имеющих обратное направление. Для каждой балки поэтажной схемы стро-

ются эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M , начиная с определения реакций каждой из опор, для чего используются три уравнения статики.

Поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (в том числе и реакций), действующих по одну сторону от этого сечения, на ось, перпендикулярную оси балки:

$$Q = \Sigma Q^{\text{л}} = -\Sigma Q^{\text{п}}. \quad (2.2)$$

Изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения относительно его центра тяжести:

$$M = \Sigma M^{\text{л}} = -\Sigma M^{\text{п}}. \quad (2.3)$$

Правила знаков эпюр применяются те же, что и в сопротивлении материалов. Изгибающий момент считается положительным, если он растягивает верхние волокна. Поперечная сила считается положительной, если она создает момент по часовой стрелке.

Совмещая построенные эпюры в одну линию, получают окончательные эпюры Q и M для всей балки в целом.

2.3. Построение линий влияния в балках

Расчет МШРБ на подвижную нагрузку удобнее всего производить с помощью линий влияния.

Линией влияния называется график, показывающий зависимость какого-либо внутреннего силового фактора от положения движущейся силы $F = 1$.

Существует два способа построения линий влияния в многопролетных шарнирно-разрезных балках: статический и кинематический. Для МШРБ наиболее эффективным является кинематический способ.

Статический способ

При построении линии влияния опорной реакции из уравнений равновесия составляют функциональную зависимость величины реакции от положения груза $F = 1$ на линии загрузки и

строят график её изменения с учетом движения груза по всей длине балки ($V = f(x)$).

Линию влияния изгибающего момента или поперечной силы в каком-либо сечении балки строят статическим способом в такой последовательности:

- а) разбивают балку на отдельные участки-звенья слева и справа от заданного сечения;
- б) составляют уравнения линий влияния по участкам при положении единичного груза слева и справа от данного сечения ($Q = f(x)$; $M = f(x)$);
- в) строят график линий влияния по этим уравнениям на каждом участке.

Ординаты линий влияния момента имеют размерность длины, а ординаты линий влияния реакций опор и поперечных сил – величины безразмерные и задаются удобным для построения масштабом.

Статический способ не очень удобен тем, что приходится составлять достаточно большое количество функциональных зависимостей и строить графики функций на многочисленных участках.

Кинематический способ



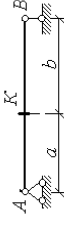

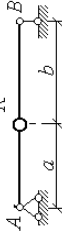

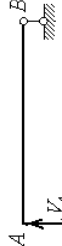
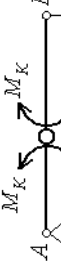
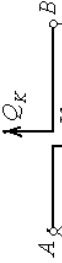
Наиболее эффективным способом построения линий влияния в многопролетных шарнирно-разрезных балках является кинематический способ.

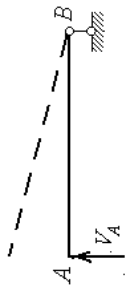

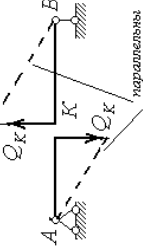
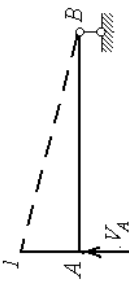
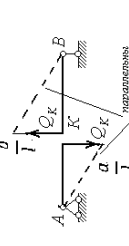
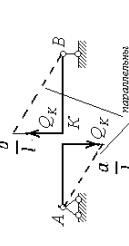
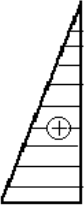
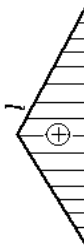
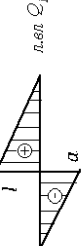
Кинематический способ построения линий влияния основан на использовании принципа возможных перемещений. Возможные перемещения – бесконечно малые перемещения, допускаемые связями системы.

Линии влияния опорной реакции, изгибающего момента и поперечной силы кинематическим способом строят в соответствии с алгоритмом для однопролетной шарнирно-разрезной балки (табл. 1). Этот алгоритм можно использовать для построения линий влияния в однопролетной консольной балке, а также в однопролетных балках с консолями.

Таблица 1

Построение линий влияния в однопролетных балках

Линия влияния опорной реакции V_A	Линия влияния изгибающего момента M_K	Линия влияния поперечной силы Q_K
<p>исходная система</p> 	<p>исходная система</p> 	<p>исходная система</p> 
<p>1. Удаляют опорную реакцию, то есть показывают схему балки без соответствующей опоры.</p> 	<p>1. Удаляют связь, отвечающую заданному искомому усилию: изгибающему моменту, то есть в заданном сечении на схеме балки показывают условный шарнир.</p> 	<p>поперечной силе, то есть на схеме балки условно показывают разрез в данном сечении.</p> 
<p>2. Взамен удалённой связи в положительную реакцию, направленную вертикально вверх.</p> 	<p>в заданном направлении прикладывают реакцию изгибающий момент, отвечающий растяжению нижних волокон балки.</p> 	<p>соответственно: поперечную силу, отвечающую повороту левой и правой частей балки по часовой стрелке.</p> 

<p>Линия влияния опорной реакции V_A</p>		<p>Линия влияния изгибающего момента M_K</p>		<p>Линия влияния поперечной силы Q_K</p>	
<p>4. Масштаб для измерения перемещений выбирают таким образом, чтобы перемещение, отвечающее устранённой связи, было равно 1:</p>					
<p>для опорной реакции – под соответствующей опорой принимают отрезок, равный единице.</p>		<p>для поперечной силы – в данном сечении принимают суммарный сдвиг оси балки на единицу.</p>	<p>для изгибающего момента – в данном сечении показывают перелом оси балки на условный единичный угол.</p>		
<p>5. Полученное очертание (график) и есть линия влияния соответствующего усилия.</p>					
 <p>$л.сл V_A$</p>	 <p>$л.сл M_K$</p>	 <p>$л.сл Q_K$</p>			

Для построения линий влияния в многопролетных шарнирно-разрезных балках используют поэтажную схему. Сначала строят линию влияния в однопролетной балке на том этаже, на котором расположена искомая опорная реакция, поперечная сила или изгибающий момент, используя алгоритм построения (табл. 1). Потом определяют влияние полученного изменения оси балки данного этажа на другие этажи балки (дают возможные перемещения на других этажах).

2.4. Определение усилий по линиям влияния

Если на балку действует неподвижный сосредоточенный груз F , то искомое усилие равно произведению величины данного груза F на ординату y линии влияния искомого усилия, взятую под этим грузом (2.4–2.6):

$$V = F \cdot y_{(V)}; \quad (2.4)$$

$$M = F \cdot y_{(M)}; \quad (2.5)$$

$$Q = F \cdot y_{(Q)}. \quad (2.6)$$

Если на балку действуют несколько неподвижных сосредоточенных грузов F_i , то искомое усилие равно алгебраической сумме произведений величины каждого груза F_i на ординату y_i линии влияния искомого усилия под этим грузом (2.7–2.9):

$$V = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{(V)}; \quad (2.7)$$

$$M = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{(M)}; \quad (2.8)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{(Q)}, \quad (2.9)$$

где n – количество сосредоточенных грузов.

Если на балку действует равномерно распределённая нагрузка, то искомое усилие будет равно произведению интенсивности этой нагрузки q на площадь ω линии влияния в пределах участка загрузки (2.10–2.12):

$$V = q \cdot \omega_{(V)}; \quad (2.10)$$

$$M = q \cdot \omega_{(M)}; \quad (2.11)$$

$$Q = q \cdot \omega_{(Q)}. \quad (2.12)$$

Если на балку действует несколько равномерно распределённых нагрузок, то искомое усилие будет равно алгебраической сумме произведений интенсивностей этих нагрузок q_i на площади ω_i линии влияния в пределах участка загрузки данной нагрузкой (2.13–2.15):

$$V = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(V)}; \quad (2.13)$$

$$M = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(M)}; \quad (2.14)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(Q)}. \quad (2.15)$$

где n – количество равномерно распределённых нагрузок.

Усилие, отвечающее действию одного сосредоточенного момента M , равно произведению величины этого момента M на тангенс угла наклона линии влияния искомого усилия относительно горизонтальной оси под этим сосредоточенным моментом (2.16–2.18):

$$V = M \cdot \operatorname{tg} \alpha_{(V)}; \quad (2.16)$$

$$M = M \cdot \operatorname{tg} \alpha_{(M)}; \quad (2.17)$$

$$Q = M \cdot \operatorname{tg} \alpha_{(Q)}. \quad (2.18)$$

Усилие, отвечающее действию нескольких сосредоточенных моментов M_i , равно алгебраической сумме произведений величин этих моментов на тангенс углов наклона линии влияния искомого усилия под этими сосредоточенными моментами (2.19–2.21):

$$V = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(V)}; \quad (2.19)$$

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(M)}; \quad (2.20)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(Q)}. \quad (2.21)$$

где n – количество сосредоточенных моментов.

Если на балку одновременно действуют несколько сосредоточенных грузов, несколько равномерно распределённых нагрузок

и несколько сосредоточенных моментов, то искомое усилие будет равно алгебраической сумме усилий, подсчитанных от каждого вида нагрузок (2.22–2.24):

$$V = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(V)} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(V)} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(V)}; \quad (2.22)$$

$$M = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(M)} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(M)} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(M)}; \quad (2.23)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(Q)} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(Q)} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(Q)}. \quad (2.24)$$

Правило знаков для слагаемых с изгибающим моментом:

1) перед слагаемым ставится плюс, если момент направлен:

- по часовой стрелке и ординаты линии влияния на участке приложения момента возрастают;
- против часовой стрелки и ординаты линии влияния на участке приложения момента убывают;

2) перед слагаемым ставится минус, если момент направлен:

- по часовой стрелке и ординаты линии влияния на участке приложения момента убывают;
- против часовой стрелки и ординаты линии влияния на участке приложения момента возрастают.

Опорную реакцию V_A от действия внешней нагрузки (рис. 2.3) можно вычислить по линии влияния (2.25):

$$V_A = F \cdot y - M \cdot \operatorname{tg} \alpha + q \cdot (-\omega). \quad (2.25)$$

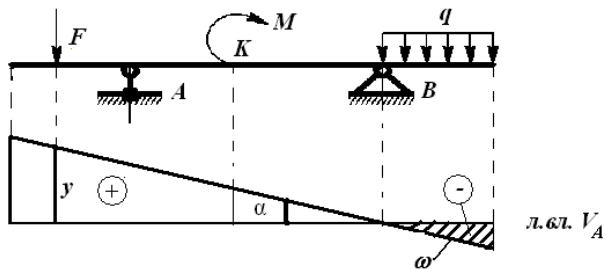


Рис. 2.3

По данной линии влияния можно вычислить только опорную реакцию V_A , но от различных нагружений. Чтобы определить другие усилия, необходимо построить соответствующие линии влияния.

2.5. Порядок расчета статически определимой балки (многопролетной шарнирно-разрезной балки) на подвижную и неподвижную нагрузку

1. Вычертить в масштабе заданную схему балки.
2. Проверить геометрическую неизменяемость системы по формуле (2.2), проверить статическую определимость балки, провести анализ структурообразования системы (необходимое и достаточное условия).
3. Построить эпюры M и Q (поэтажно и в целом).
4. Построить кинематическим способом линии влияния для всех опорных реакций при перемещении по балке груза $F = 1$.
5. Построить кинематическим способом линии влияния для M и Q в заданных сечениях.
6. По линиям влияния определить опорные реакции балки, поперечную силу и изгибающий момент в заданных сечениях.
7. Сравнить результаты с аналитическим расчетом.

2.6. Пример расчета многопролетной шарнирно-разрезной балки

Задание. Рассчитать заданную балку (рис. 2.4) на подвижную и неподвижную нагрузки.

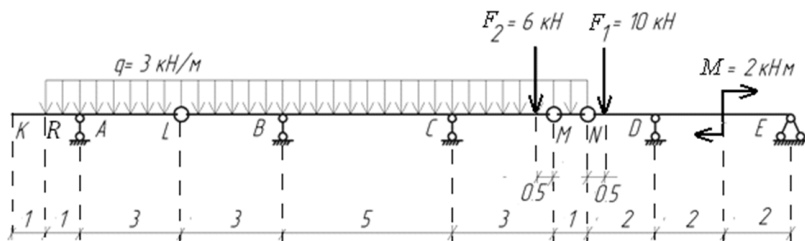


Рис. 2.4

Вначале проверяем выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости и статической определимости балки по формуле (2.2).

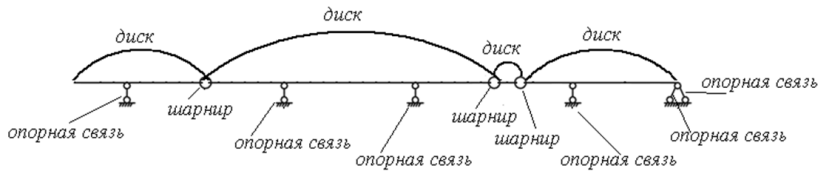


Рис. 2.5

В заданной системе 4 диска, 3 шарнира и 6 опорных связей (рис. 2.5):

$$W = 3D - 2Ш - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Необходимое условие выполнено.

Затем составим поэтажную схему взаимодействия элементов балки для проверки достаточного условия геометрической неизменяемости системы (рис. 2.6). Из схемы видно, что шарниры расположены правильно, следовательно, каждый этаж балки в этой схеме представляет собой статически определимую и геометрически неизменяемую систему. Таким образом, выполнено и достаточное условие геометрической неизменяемости.

Так как выполнены и необходимое, и достаточное условия геометрической неизменяемости, то заданная система является геометрически неизменяемой системой.

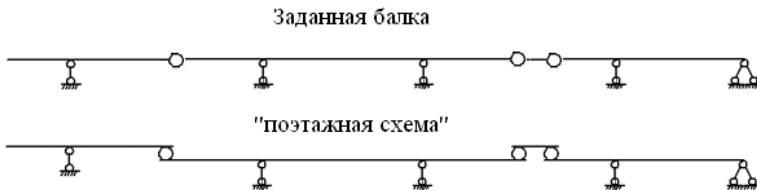


Рис. 2.6

Расчет многопролетной балки производим с помощью поэтажной схемы (рис. 2.7), начиная с самых верхних этажей, постепенно переходя на нижние этажи, учитывая при этом давление верхних этажей.

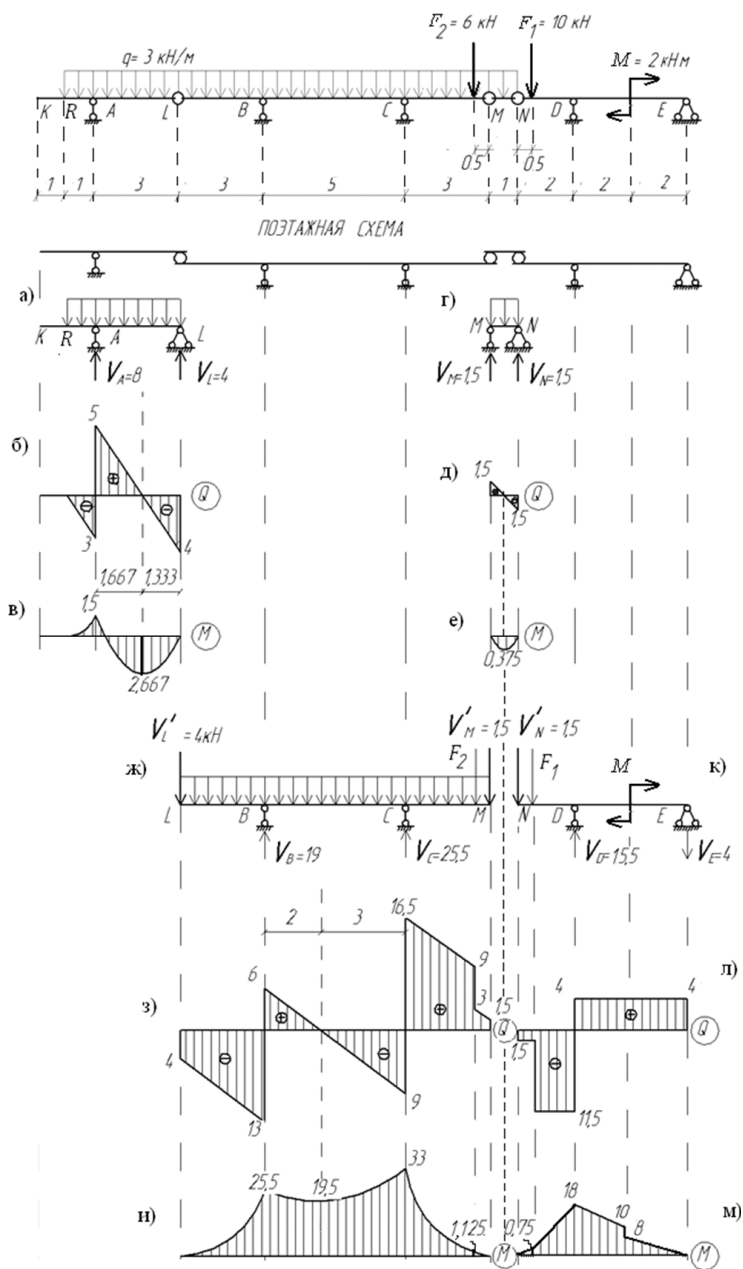


Рис. 2.7

Расчет начинаем с балок KL и MN .

Расчет балки KL (рис. 2.7, а)

1. Определение опорных реакций:

$$\sum M_L = 0; -q \cdot \frac{4^2}{2} + V_A \cdot 3 = 0$$

$$V_A = \frac{(q \cdot 4^2/2)}{3} = \frac{(3 \cdot 4^2/2)}{3} = 8 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0; -q \cdot \frac{1^2}{2} + q \cdot \frac{3^2}{2} - V_L \cdot 3 = 0$$

$$V_L = \frac{(q \cdot 3^2/2) - (q \cdot 1^2/2)}{3} = \frac{(3 \cdot 3^2/2) - (3 \cdot 1^2/2)}{3} = 4 \text{ кН.}$$

2. Определение поперечных сил в характерных точках:

$$Q_K = 0;$$

$$Q_R = 0;$$

$$Q_A^{\text{лев}} = -q \cdot 1 = -3 \cdot 1 = -3 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{прав}} = Q_A^{\text{лев}} + V_A = -3 + 8 = 5 \text{ кН};$$

$$Q_C = Q_A^{\text{прав}} - q \cdot 3 = 5 - 9 = -4 \text{ кН.}$$

Из уравнения определим точку, в которой поперечная сила равна нулю:

$$Q_A^{\text{прав}} - q \cdot x = 0,$$

откуда $x = \frac{Q_A^{\text{прав}}}{q} = \frac{5}{3} = 1,667 \text{ м.}$

По полученным данным строим эпюру поперечных сил Q (рис. 2.7, б).

3. Определяем изгибающие моменты в характерных точках:

$$M_K = 0$$

$$M_R = 0$$

$$M_C = 0$$

$$M_A = -q \cdot \frac{1^2}{2} = -1,5 \text{ кНм.}$$

В сечении, где $Q = 0$, на эпюре моментов будет экстремум ($x = 1,667 \text{ м}$):

$$M_{\text{экс}} = V_A \cdot 1,667 - q \cdot \frac{1,667^2}{2} = 8 \cdot 1,667 - 3 \cdot \frac{1,667^2}{2} = 2,667 \text{ кНм.}$$

По полученным данным строим эпюру моментов M (рис. 2.7, в).

Расчет балки MN (рис. 2.7, з)

1. Определение опорных реакций:

$$\sum M_M = 0; q \cdot \frac{1^2}{2} - V_N \cdot 1 = 0;$$

$$V_N = \frac{(q \cdot 1^2/2)}{1} = \frac{(3 \cdot 1^2/2)}{1} = 1,5 \text{ кН;}$$

$$\sum M_N = 0; -q \cdot \frac{1^2}{2} + V_M \cdot 1 = 0;$$

$$V_M = \frac{(q \cdot 1^2/2)}{1} = \frac{(3 \cdot 1^2/2)}{1} = 1,5 \text{ кН.}$$

2. Определение поперечных сил в характерных точках:

$$Q_M = V_M = 1,5 \text{ кН;}$$

$$Q_N = V_M - q \cdot 3 = 1,5 - 3 = -1,5 \text{ кН.}$$

Поперечная сила равна нулю на середине участка.

По полученным данным строим эпюру Q (рис. 2.7, д).

3. Определение изгибающих моментов в характерных точках:

$$M_M = 0,$$

$$M_N = 0.$$

Максимальный момент будет в точке, где поперечная сила равна нулю ($x = 0,5$ м):

$$M_{\text{экс}} = V_M \cdot 0,5 - q \cdot \frac{1^2}{2} = 1,5 \cdot 0,5 - 3 \cdot \frac{1^2}{2} = 0,375 \text{ кНм.}$$

По полученным данным строим эпюру M (рис. 2.7, е).

Расчитываем балки нижележащих этажей с учетом опорных реакций опирающихся на них балок.

Расчет балки LM (рис. 2.7, жс)

К рассматриваемой балке, помимо заданной нагрузки q и F_2 , в точке L прикладывается сила V'_L и в точке M прикладывается сила V'_M .

V'_L представляет давление верхнего этажа KL на нижележащий этаж LM . Оно по величине равно опорной реакции вышележащей

балки KL в точке опирания L , по направлению – противоположно этой реакции.

V'_M представляет давление верхнего этажа MN на нижележащий этаж LM . По величине оно равно опорной реакции вышележащей балки MN в точке опирания M и имеет направление, противоположное этой реакции.

1. Определение опорных реакций:

$$\sum M_C = 0; -V'_L \cdot 8 + V_B \cdot 5 + V'_M \cdot 3 + F_2 \cdot 2,5 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - q \cdot 8 \cdot 4 = 0;$$

$$V_B = \frac{V'_L \cdot 8 - V'_M \cdot 3 - F_2 \cdot 2,5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 8 \cdot 4}{5} =$$

$$= \frac{4 \cdot 8 - 1,5 \cdot 3 - 6 \cdot 2,5 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 + 3 \cdot 8 \cdot 4}{5} = 19 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -V'_L \cdot 3 - V_C \cdot 5 + V'_M \cdot 8 + F_2 \cdot 7,5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 8 \cdot 4 = 0;$$

$$V_C = \frac{-V'_L \cdot 3 + V'_M \cdot 8 + F_2 \cdot 7,5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 8 \cdot 4}{5} =$$

$$= \frac{-4 \cdot 3 + 1,5 \cdot 8 + 6 \cdot 7,5 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 + 3 \cdot 8 \cdot 4}{5} = 25,5 \text{ кН}.$$

2. Определение поперечных сил в характерных точках балки, кН:

$$Q_L = -4$$

$$Q_B^{\text{лев}} = -4 - q \cdot 3 = -4 - 9 = -13$$

$$Q_B^{\text{пп}} = Q_B^{\text{лев}} + V_B = -13 + 19 = 6$$

$$Q_C^{\text{лев}} = Q_B^{\text{пп}} - q \cdot 5 = 6 - 3 \cdot 5 = -9$$

$$Q_C^{\text{пп}} = Q_C^{\text{лев}} + V_C = -9 + 25,5 = 16,5$$

$$Q_{F_2}^{\text{лев}} = +16,5 - q \cdot 2,5 = 16,5 - 3 \cdot 2,5 = 9$$

$$Q_{F_2}^{\text{пп}} = Q_{F_2}^{\text{лев}} - F_2 = 9 - 6 = 3$$

$$Q_M = Q_{F_2}^{\text{пп}} - q \cdot 0,5 = 3 - 3 \cdot 0,5 = 1,5$$

Из уравнения определим точку, в которой поперечная сила равна нулю:

$$Q_B^{\text{пп}} - q \cdot x = 0,$$

$$\text{откуда } x = \frac{Q_B^{\text{пп}}}{q} = \frac{6}{3} = 2 \text{ м}.$$

По полученным данным строим эпюру Q (рис. 2.7, з).

3. Определение изгибающих моментов в характерных точках, кНм:

$$M_L = 0$$

$$M_B = -V'_L \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = -4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 = -25,5$$

$$M_C = -V'_M \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - F_2 \cdot 2,5 = -1,5 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2,5 = -33$$

$$M_{F_2} = -V'_M \cdot 0,5 - q \cdot 0,5 \cdot 0,25 = -1,5 \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = -1,125$$

$$M_M = 0$$

Максимальный момент будет в точке, где поперечная сила равна нулю ($x = 2$ м):

$$\begin{aligned} M_{\text{экс}} &= -V'_L \cdot 5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + V_B \cdot 2 = -4 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2,5 + 19 \cdot 2 = \\ &= -20 - 37,5 + 38 = -19,5 \text{ кНм} \end{aligned}$$

По полученным данным строим эпюру M (рис. 2.7, u).

Расчет балки NE (рис. 2.7, κ)

К рассматриваемой балке, помимо заданной нагрузки M и F_1 , в точке N прикладывается сила V'_N . Это давление верхнего этажа MN на нижележащий этаж NE , равное по величине опорной реакции V_N вышележащей балки MN в точке опирания N и противоположное по направлению этой реакции.

1. Определение опорных реакций:

$$\sum M_D = 0; -V'_N \cdot 2 + V_E \cdot 4 - F_1 \cdot 1,5 + M = 0;$$

$$V_E = \frac{V'_N \cdot 2 + F_1 \cdot 1,5 - M}{4} = \frac{1,5 \cdot 2 + 10 \cdot 1,5 - 2}{4} = 4,0 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 0; -V'_N \cdot 6 + V_D \cdot 4 - F_1 \cdot 5,5 + M = 0$$

$$V_D = \frac{V'_N \cdot 6 + F_1 \cdot 5,5 - M}{4} = \frac{1,5 \cdot 6 + 10 \cdot 5,5 - 2}{4} = 15,5 \text{ кН}.$$

2. Определение поперечных сил в характерных точках балки, кН:

$$Q_N = -1,5$$

$$Q_{F_1}^{\text{лев}} = Q_N = -1,5$$

$$Q_{F_1}^{\text{пр}} = Q_{F_1}^{\text{лев}} - F_1 = -1,5 - 10 = -11,5$$

$$Q_D^{\text{лев}} = Q_{F_1}^{\text{пр}} = -11,5$$

$$Q_D^{\text{лев}} = Q_D^{\text{лев}} + V_D = -11,5 + 15,5 = 4,0$$

$$Q_E = 4$$

По полученным данным строим эпюру Q (рис. 2.7, л).

3. Определение изгибающих моментов в характерных точках, кНм:

$$M_N = 0$$

$$M_{F_1} = -V'_N \cdot 0,5 = -1,5 \cdot 0,5 = -0,75$$

$$M_D = -V'_N \cdot 2 - F_1 \cdot 1,5 = -1,5 \cdot 2 - 10 \cdot 1,5 = -18$$

$$M_M^{лев} = -V'_N \cdot 4 - F_1 \cdot 3,5 + V_D \cdot 2 = -1,5 \cdot 4 - 10 \cdot 3,5 + 15,5 \cdot 2 = -10$$

$$M_M^{прав} = -V'_N \cdot 4 - F_1 \cdot 3,5 + V_D \cdot 2 + M = -1,5 \cdot 4 - 10 \cdot 3,5 + 15,5 \cdot 2 + 2 = -8$$

$$M_E = 0$$

По полученным данным строим эпюру M (рис. 2.7, м).

Для того чтобы получить эпюру поперечных сил Q для балки в целом, полученные участки поперечных сил со всех этажей собираем на одну линию (рис. 2.8, а). Для того чтобы получить эпюру изгибающих моментов M для балки в целом, полученные участки изгибающих моментов со всех этажей собираем на одну линию (рис. 2.8, б).

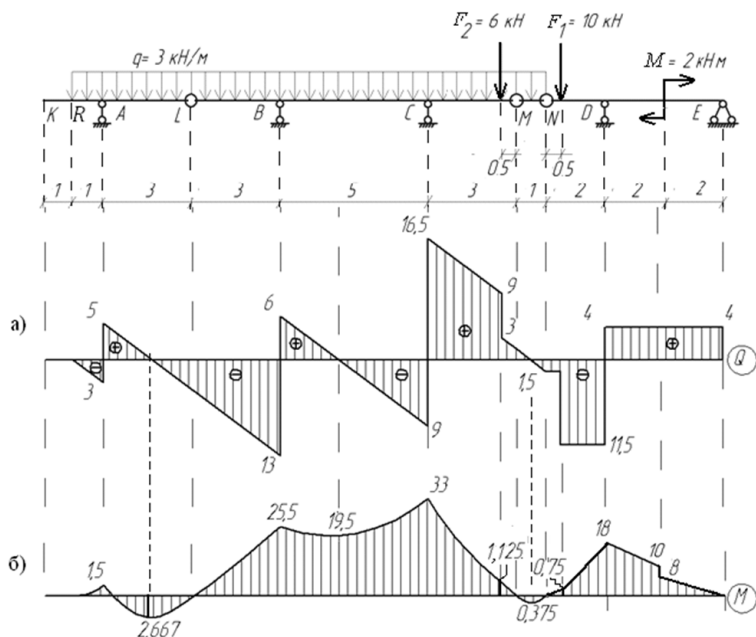


Рис. 2.8

Построение линии влияния опорных реакций кинематическим способом

1. Для построения линии влияния V_A рассмотрим этаж (участок KL), где находится опора A (рис. 2.9).

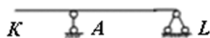


Рис. 2.9

Сначала по алгоритму (см. табл. 1) выполняется построение только на выбранном этаже:

1) удалить вертикальную связь опоры A (рис. 2.10);



Рис. 2.10

2) взамен удаленной связи приложить опорную реакцию V_A (вверх) (рис. 2.11);

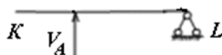


Рис. 2.11

3) сообщить возможное перемещение балки в направлении опорной реакции V_A (рис. 2.12);

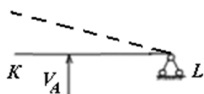


Рис. 2.12

4) выбрать масштаб, приняв ординату линии влияния над опорой A равной единице (рис. 2.13).

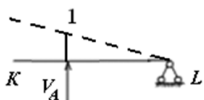


Рис. 2.13

Далее показываем влияние перемещений балки KL на участок справа, но так как в точке L перемещения не будет, следовательно, не будет перемещаться и вся правая часть балки.

Полученное очертание и есть линия влияния опорной реакции V_A (рис. 2.14, а).

Остальные ординаты линии влияния могут быть найдены из отношений подобия соответствующих треугольников.

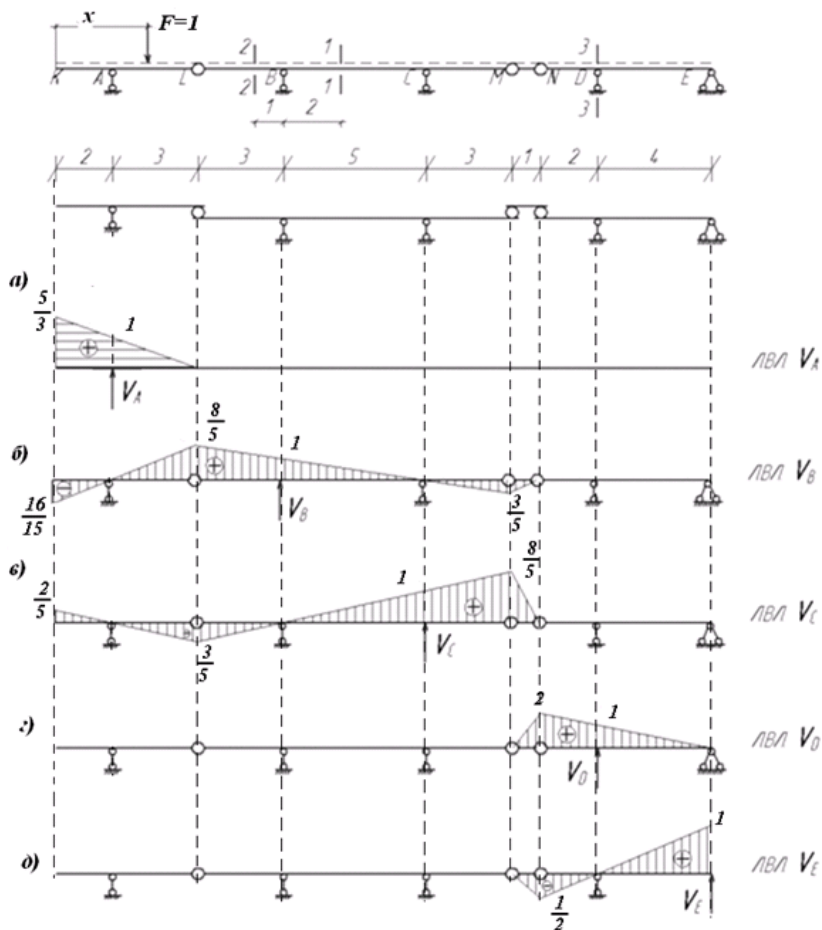


Рис. 2.14

2. Линии влияния опорных реакций V_B, V_C, V_D, V_E строятся аналогично (рис. 2.14, б-д).

**Построение линий влияния поперечной силы Q
для заданных сечений**

1. Построение линии влияния Q_1 .

Для этого рассмотрим этаж (участок LM), где находится сечение 1 (рис. 2.15).

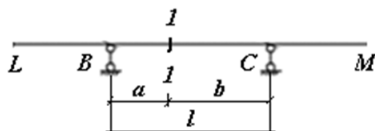


Рис. 2.15

Сначала по алгоритму (см. табл. 1) выполняется построение только на выбранном этаже:

1) устранить связь по нормальному направлению к оси балки в сечении, т. е. разрезать её в сечении 1-1 (рис. 2.16);

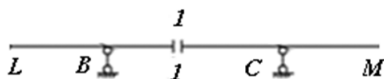


Рис. 2.16

2) взамен удалённой связи приложить поперечную силу Q_1 к левой и правой частям в положительном направлении: слева – вниз, справа – вверх (рис. 2.17);

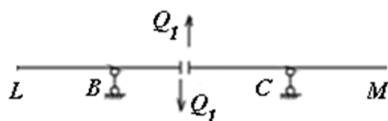


Рис. 2.17

3) сообщить возможные перемещения элементам балки в направлении приложенных сил, при этом части балки перемещаются параллельно друг другу (рис. 2.18);

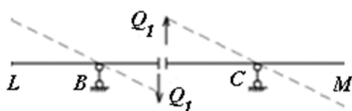


Рис. 2.18

4) на графике перемещений полный сдвиг оси балки в сечении 1-1 должен быть равен единице (рис. 2.19);

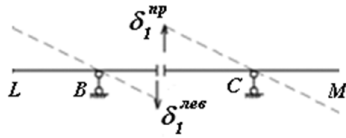


Рис. 2.19

$$\delta_1^{\text{лев}} = \frac{a}{l} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\delta_1^{\text{сп}} = \frac{b}{l} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\delta_1^{\text{лев}} + \delta_1^{\text{сп}} = 0,4 + 0,6 = 1$$

5) ординаты ломаной линии, отсчитываемые по вертикали от начального положения оси балки, образуют линию влияния Q_1 на участке.

Далее показываем влияние перемещения балки LM на участки справа и слева. Так как в точке L шарнир переместился вверх, то он потянет за собой участок KL , а в точке M шарнир опустился, значит, он потянет за собой участок MN . Справа шарнир N не перемещается, следовательно, и остальная часть балки справа тоже не будет перемещаться (рис. 2.20).

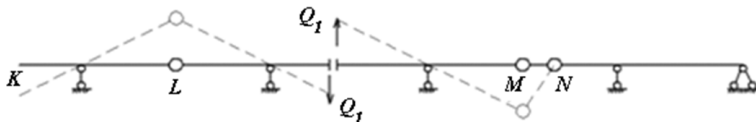


Рис. 2.20

Полученное очертание и есть линия влияния поперечной силы Q_1 (рис. 2.27, а). Остальные ординаты линии влияния могут быть найдены из отношений подобия соответствующих треугольников.

2. Построение линии влияния Q_2 ведётся по тому же алгоритму, что и построение линии влияния Q_1 . Обратите внимание на то, что сечение 2-2 находится не в пролёте элемента балки LM , а на её консольной части. Поэтому после приложения поперечных сил в сечении 2-2 правая часть балки остаётся неподвижной (рис. 2.28, а), а левая опу-

скается на единицу. Далее показываем влияние перемещений балки LM на участки справа и слева. Полученная ломаная линия и есть линия влияния Q_2 (рис. 2.28, б).

3. При построении линии влияния Q_3 нужно обратить внимание на положение сечения 3-3: оно находится над опорой D (рис. 2.27). Поэтому необходимо строить две линии влияния: $Q_3^{\text{лев}}$ и $Q_3^{\text{пр}}$.

Для построения $Q_3^{\text{лев}}$ согласно приведённому выше алгоритму разрежем балку чуть левее опоры D и дадим возможные перемещения оси балки в направлении приложенных поперечных сил (рис. 2.27, д). Пунктиром показана система после перемещения. Правая часть балки остаётся неподвижной, а левая опускается на единицу. Далее показываем влияние балки NE на участки слева. Полученное очертание и есть линия влияния $Q_3^{\text{лев}}$ (рис. 2.28, е).

Для построения линии влияния $Q_3^{\text{пр}}$ согласно приведенному выше алгоритму разрежем балку чуть правее опоры D и дадим возможные перемещения оси балки в направлении приложенных поперечных сил (рис. 2.28, ж). Полный сдвиг оси балки справа от опоры в сечении 3-3 равен единице. Левее опоры D балка перемещается параллельно правой части балки, поэтому ордината точки N находится из подобия соответствующих треугольников, расположенных по правую и левую стороны от опоры D . Далее показываем влияние балки NE на участки слева. Полученное очертание и есть линия влияния $Q_3^{\text{пр}}$ (рис. 2.28, з).

Построение линий влияния изгибающего момента M для заданных сечений

1. Для построения линии влияния M_1 рассмотрим этаж (участок LM), где находится сечение 1 (рис. 2.21).

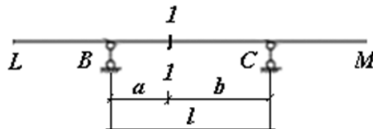


Рис. 2.21

Сначала по алгоритму (см. табл. 1) выполняется построение только на выбранном этаже, для этого необходимо:

1) устранить связь, отвечающую изгибающему моменту M_1 , т. е. в сечении 1-1 ввести условный шарнир (рис. 2.22);

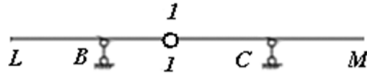


Рис. 2.22

2) взамен удалённой связи приложить изгибающий момент M_1 к левой и правой частям в положительном направлении (слева и справа), чтобы момент растягивал нижние волокна (рис. 2.23);

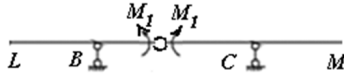


Рис. 2.23

3) сообщить возможные перемещения элементам балки в направлении приложенных моментов, при этом балка в шарнире не разрывается, а части диска LM повернутся относительно врезанного шарнира вокруг опор B и C (рис. 2.24).

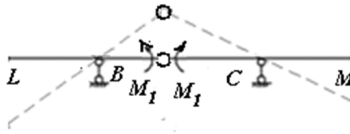


Рис. 2.24

На графике перемещений суммарный угол поворота оси балки в сечении 1-1 (рис. 2.25) должен быть равен единице ($\alpha + \beta = 1$).

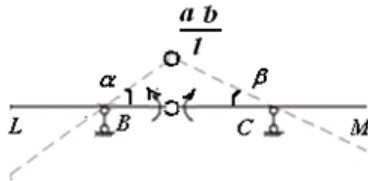


Рис. 2.25

При этом перемещение в сечении 1-1 будет определяться из геометрических соображений по формуле

$$\frac{a \cdot b}{l} = \frac{2 \cdot 3}{5} = 1,2.$$

Полученная ломаная линия образует линию влияния M_1 на участке. Далее, показываем влияние балки LM на участки справа и слева. Так как в точке L шарнир переместился вниз, то он потянет за собой участок KL . В точке M шарнир тоже опустился, и он потянет за собой участок MN . Справа шарнир N не перемещается, следовательно, и остальная часть балки справа тоже не будет перемещаться (рис. 2.26).

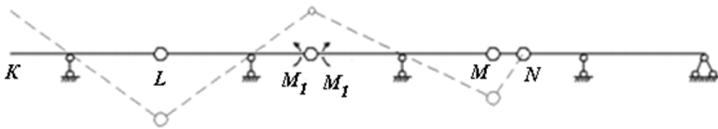


Рис. 2.26

Полученное очертание и есть линия влияния изгибающего момента M_1 (рис. 2.27, б).

Остальные ординаты линии влияния могут быть найдены из отношений подобия соответствующих треугольников.

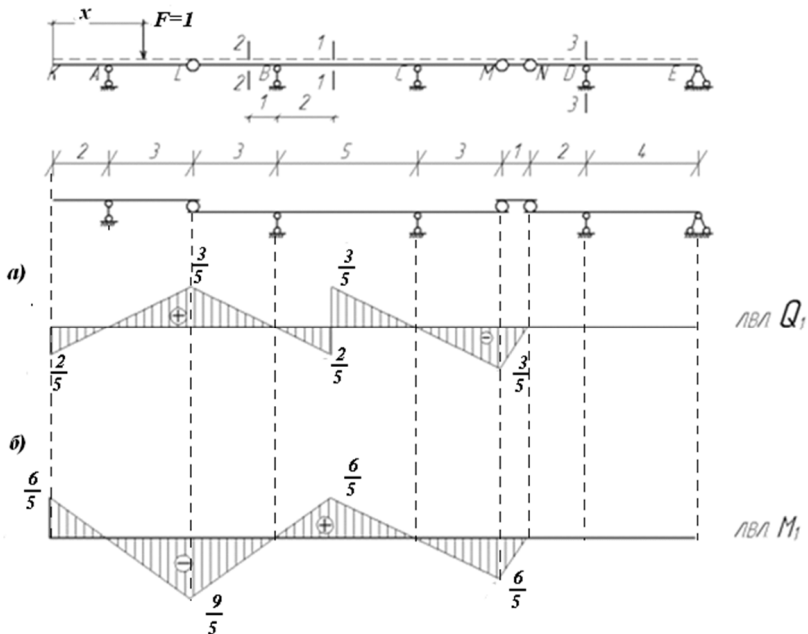


Рис. 2.27

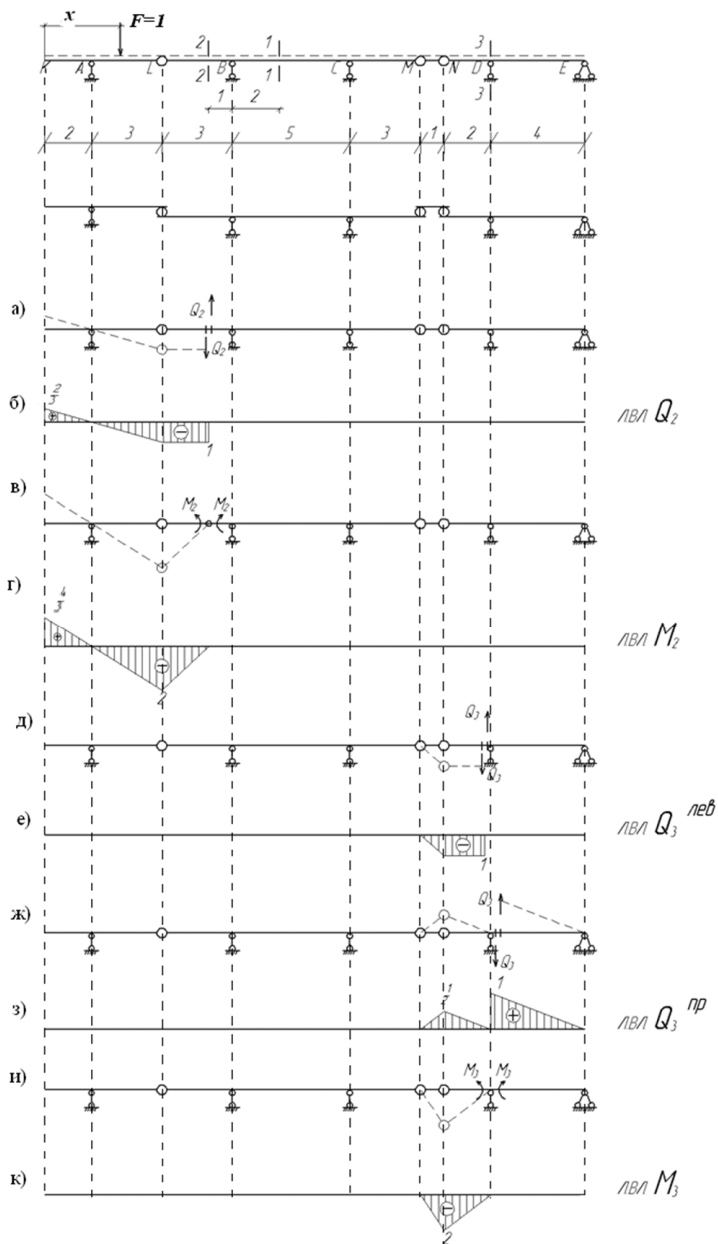


Рис. 2.28

2. Построение линии влияния M_2 проводится аналогично построению линии M_1 . Так как сечение 2-2 находится на консольной части элемента балки LM , то под воздействием приложенных моментов M_2 перемещаться будет только левая часть балки (рис. 2.28, в). Шарнир L опустится на величину, численно равную длине повернутой части балки от сечения 2-2 до шарнира L (суммарный угол поворота оси балки должен составлять единицу, но так как поворачивается только одна часть балки, то угол поворота этой части будет равен 1). Далее показываем влияние балки LM на участки справа и слева (рис. 2.28, в).

Полученное очертание и есть линия влияния изгибающего момента M_2 (рис. 2.28, з).

3. Для построения линии влияния M_3 необходимо ввести шарнир в опорное сечение D балки и приложить моменты M_3 в положительном направлении (рис. 2.28, и). Консоль DN повернётся вокруг опоры D , а правая часть DE будет закреплена на двух опорах D и E , поэтому перемещаться не будет. Суммарный угол поворота оси балки должен составлять единицу, но так как поворачивается только одна часть балки — DN , то ордината отклонения точки N будет равна длине консоли DN , т. е. 2 метрам. Далее показываем влияние балки DE на участки балки слева (рис. 2.28, к).

Полученное очертание и есть линия влияния изгибающего момента M_3 (рис. 2.28, и).

Вычисление значений опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов по линиям влияния от неподвижной нагрузки

Используя формулы (2.22–2.24) и учитывая правило знаков, определяем значения опорных реакций по линиям влияния (рис. 2.29), кН:

$$V_A = q \cdot \omega + F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot 0,5 \cdot 1,333 \cdot 4 = 8,$$

$$V_B = q \cdot (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) + F_2 \cdot (-y) + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 = \\ = 3 \cdot (-0,5 \cdot 0,533 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1,6 \cdot 11 - 0,5 \cdot 0,6 \cdot 4) + 6 \cdot (-0,5) = 19,$$

$$V_C = q \cdot (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) + F_2 \cdot y + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 = \\ = 3 \cdot (0,5 \cdot 0,2 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,6 \cdot 6 + 0,5 \cdot 1,6 \cdot 9) + 6 \cdot 1,5 = 25,5,$$

$$V_D = q \cdot \omega + F_1 \cdot y + F_2 \cdot 0 - M \cdot \operatorname{tg} \alpha = 3 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 1 + 10 \cdot 1,375 - \\ - 2 \cdot 0,25 = 15,5,$$

$$V_E = q \cdot (-\omega) + F_1 \cdot (-y) + F_2 \cdot 0 + M \cdot \text{tg } \alpha =$$

$$= 3 \cdot (-0,5 \cdot 0,5 \cdot 1) + 10 \cdot (-0,375) + 2 \cdot 0,25 = -4.$$

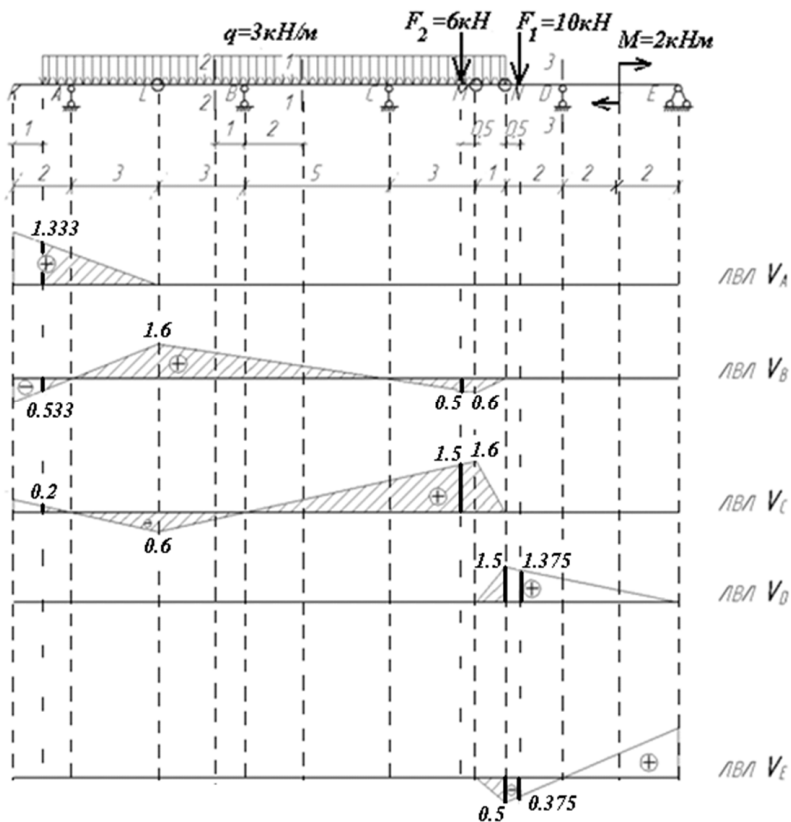


Рис. 2.29

С учетом формул (2.22–2.24) и правила знаков определяем значения поперечных сил и изгибающих моментов в заданных сечениях по линиям влияния (рис. 2.30), кН:

$$Q_1 = q \cdot (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) + F_2 \cdot (-y) + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 =$$

$$= 3(-0,5 \cdot 0,2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 6 - 0,5 \cdot 0,4 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 3 -$$

$$- 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,4) + 6 \cdot (-0,5) = 0,$$

$$Q_2 = q \cdot (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + F_2 \cdot 0 + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 =$$

$$= 3 \cdot (0,5 \cdot 0,333 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = -10,$$

$$Q_3^{\text{ЛЭВ}} = q \cdot (-\omega_1) + F_1 \cdot (-y) + F_2 \cdot 0 + M \cdot 0 =$$

$$= 3 \cdot (-0,5 \cdot 1 \cdot 1) + 10 \cdot (-1) = -11,5,$$

$$Q_3^{\text{НП}} = q \cdot \omega_1 + F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot y + M \cdot \text{tg } \alpha =$$

$$= 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1 + 10 \cdot 0,375 + 10 \cdot 1 - 2 \cdot 0,25 = 4,$$

$$M_1 = q \cdot (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + F_2 \cdot (-y) + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 =$$

$$= 3 \cdot (0,5 \cdot 0,6 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1,8 \cdot 6 + 0,5 \cdot 1,2 \cdot 5 - 0,5 \cdot 1,2 \cdot 4) +$$

$$+ 6 \cdot (-1) = -19,5,$$

$$M_2 = q \cdot (\omega_1 - \omega_2) + F_2 \cdot 0 + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 =$$

$$= 3 \cdot (0,5 \cdot 0,667 \cdot 1 - 0,5 \cdot 2 \cdot 5) = -14,$$

$$M_3 = q \cdot (-\omega_1) + F_1 \cdot (-y) + F_2 \cdot 0 + M \cdot 0 =$$

$$= 3 \cdot (-0,5 \cdot 2 \cdot 1) + 10 \cdot (-1,5) = -18.$$

Сравнивая результаты, полученные при расчете аналитическим способом и при определении усилий по линиям влияния, можно увидеть, что результаты совпадают с допустимой относительной погрешностью 3 %.

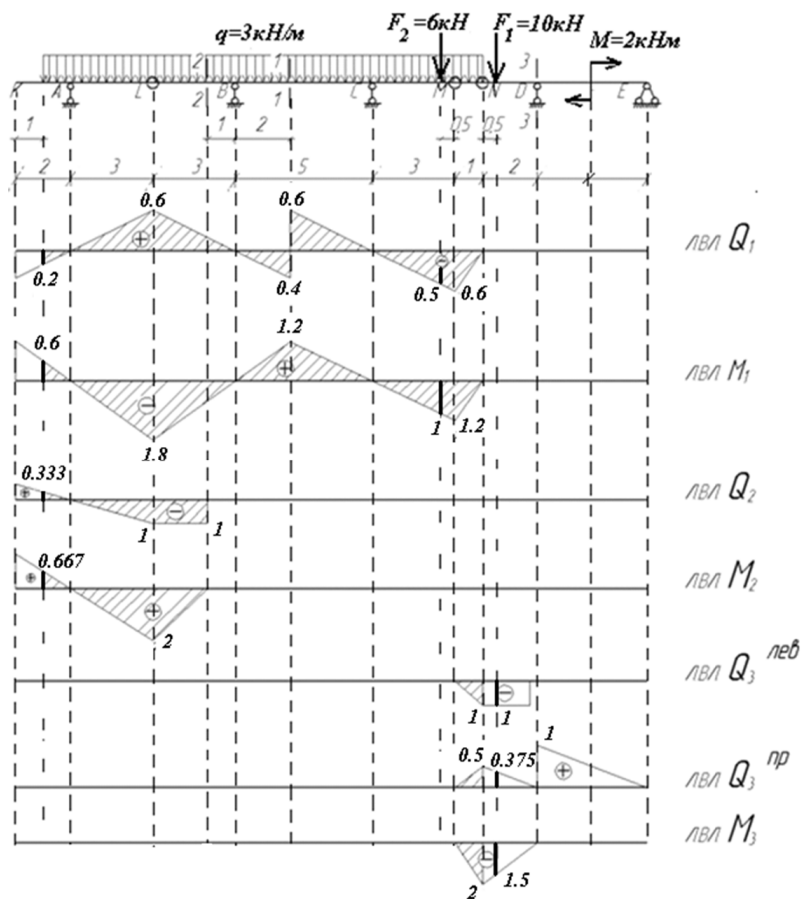


Рис. 2.30

Вопросы для самоконтроля

1. Определение многопролетной балки.
2. Необходимое условие геометрической неизменяемости системы.
3. Достаточное условие геометрической неизменяемости. Основные правила правильной расстановки шарниров.
4. Правило построения поэтажной схемы балки.
5. Порядок расчета многопролетной шарнирно-разрезной балки.
6. Определение линии влияния.
7. Алгоритм построения линий влияния изгибающего момента.
8. Алгоритм построения линий влияния опорной реакции.
9. Алгоритм построения линий влияния поперечной силы.
10. Правила определения усилий по линиям влияния.

3. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

3.1. Основные понятия, определения и классификация ферм. Кинематический анализ ферм

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными. Фермы по существу имеют такое же назначение, как и балки сплошного сечения, но применяются для перекрытия значительных пролетов.

Расстояние между осями опор фермы называется *пролетом* фермы и обозначается l (рис. 3.1). Стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются *поясами* и образуют пояса. Стержни, соединяющие пояса, образуют решетку фермы и называются *стойками* (вертикальные) и *раскосами* (наклонные). Расстояние d между соседними узлами любого пояса фермы называется *панелью*.

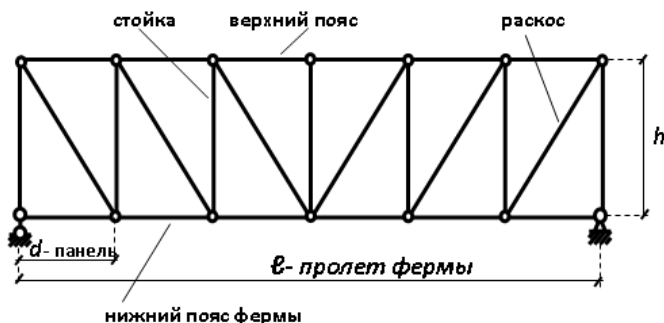


Рис. 3.1

Фермы подразделяют на пространственные и плоские. Плоскими называются фермы, у которых оси всех стержней расположены в одной плоскости, а пространственные фермы — это фермы, оси стержней которых не лежат в одной плоскости. Фермы, образованные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой, называются простейшими фермами.

Классификация ферм производится по пяти признакам.

1. По типу опирания различают:

- а) фермы, закрепленные у обоих концов:
 - 1) балочные (рис. 3.2, *а*);
 - 2) арочные (рис. 3.2, *д, е*);
- б) фермы, закрепленные у одного конца, — консольные (рис. 3.2, *з*);
- в) балочно-консольные фермы (рис. 3.2, *б, в*).

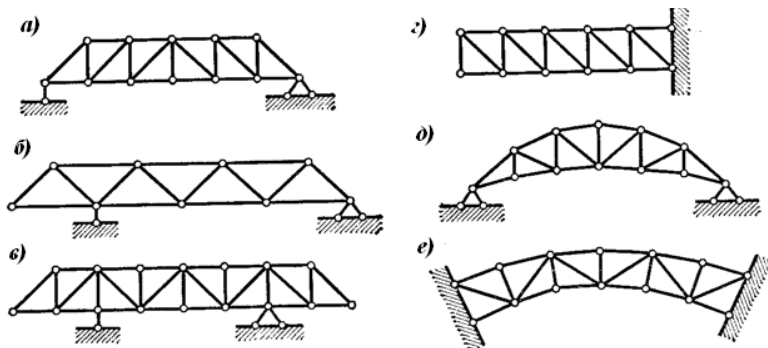


Рис. 3.2

2. По характеру очертания различают фермы

- а) с параллельными поясами (рис. 3.3, *а*);
- б) с ломаным, или полигональным, расположением пояса (рис. 3.3, *б*).

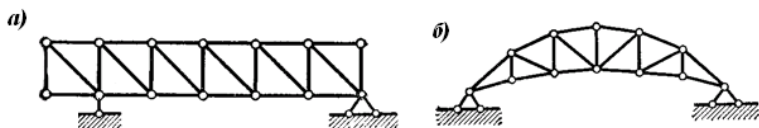


Рис. 3.3

3. По назначению различают:

- а) стропильные фермы;
- б) крановые фермы;
- в) мостовые фермы;
- г) башенные фермы.

4. По типу решетки различают:

- а) фермы с треугольной решеткой (рис. 3.4, *а*);
- б) фермы с раскосной решеткой (рис. 3.4, *б*);

- в) фермы с полураскосной решеткой (рис. 3.4, в);
- г) фермы с двураскосной решеткой (рис. 3.4, з);
- д) фермы с ромбической решеткой (рис. 3.4, д);
- е) двухрешётчатые фермы (рис. 3.4, е);
- ж) многорешётчатые фермы (рис. 3.4, ж).

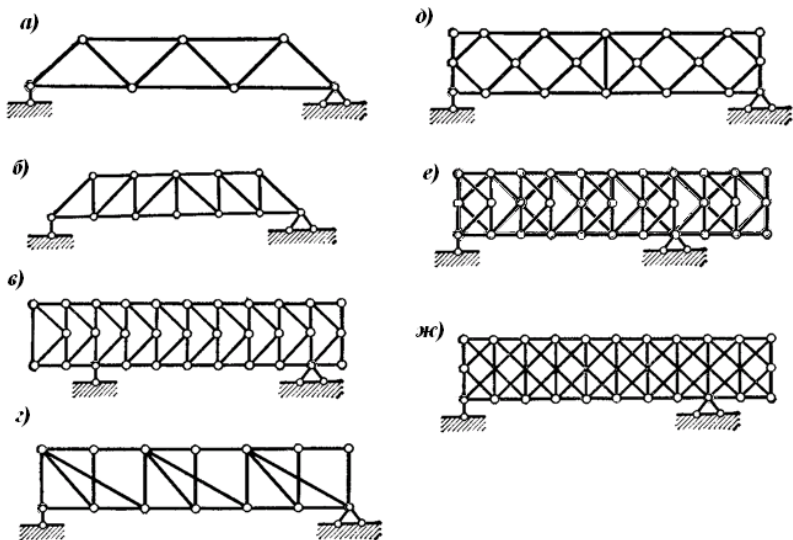


Рис. 3.4

5. По уровню езды различают (уровень езды определяется по поясу, к которому прикладывается нагрузка) фермы:

- а) с ездой понизу;
- б) с ездой поверху;
- в) с ездой посередине.

Фермы – это системы, которые строятся на основании шарнирного треугольника путем присоединения к нему двухстержневого звена. Из раздела 1 мы знаем, что системы, образованные таким способом, являются геометрически неизменяемыми системами.

На рис. 3.5, б–е, приведен полный кинематический анализ системы для фермы, изображенной на рис. 3.5, а.

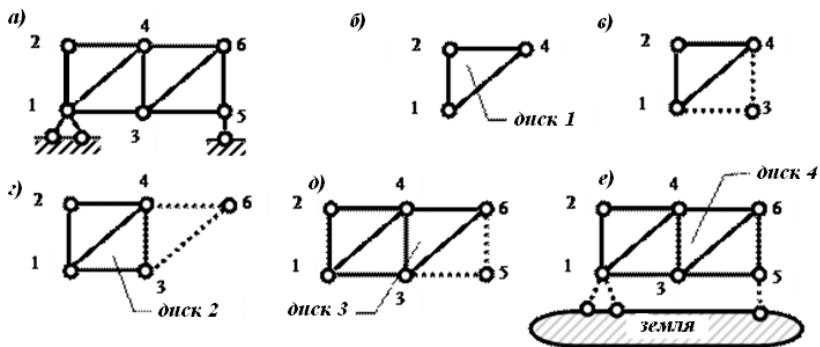


Рис. 3.5

3.2. Определение опорных реакций и внутренних усилий в стержнях ферм

Фермы — это системы, работающие преимущественно на сжатие (растяжение). Поэтому из внутренних усилий в фермах определяются только продольные усилия. А остальные усилия (M , Q) настолько малы, что ими в расчетах можно пренебречь.

В первую очередь определяются опорные реакции. Для определения опорных реакций ферм используются уравнения статики. Составляются три уравнения равновесия для всей фермы в целом:

$$\Sigma M_A = 0; \quad (3.1)$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad (3.2)$$

$$\Sigma X = 0. \quad (3.3)$$

Для определения внутренних усилий следует выделять сечениями узлы или отдельные части ферм и рассматривать условия их равновесия под действием внешних нагрузок и усилий в рассеченных стержнях (метод сечений).

Выделение частей или узлов фермы необходимо производить так, чтобы усилия в элементах определялись наиболее просто.

Различают следующие способы определения внутренних усилий в стержнях ферм:

- а) аналитические способы:
- 1) способ моментной точки;
 - 2) способ вырезания узлов;
 - 3) способ проекций;
 - 4) по признакам нулевых и ненулевых стержней;
- б) графический способ (диаграмма Максвелла – Кремоны);
- в) способ определения внутренних усилий по линиям влияния.

3.3. Аналитические способы определения внутренних усилий

Способ моментной точки (СМТ). СМТ применяется в тех случаях, когда удастся рассечь ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке (рис. 3.6). Направления осей трех таких перерезанных стержней пересекаются попарно в трех точках, не лежащих на одной прямой. Такие точки будут являться моментными точками для соответствующих стержней. *Моментной точкой* O_1 для стержня N_1 будет являться точка пересечения двух оставшихся стержней N_2 и N_3 , попавших в сечение (точкой O_2 для стержня N_2 будет являться точка пересечения двух остальных стержней N_1 и N_3 , O_3 для стержня N_3 будет являться точка пересечения двух остальных стержней N_1 и N_2).

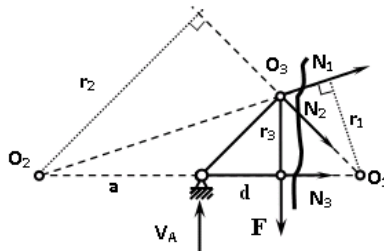


Рис. 3.6

Составляя и решая последовательно уравнения моментов всех внешних и внутренних сил (формулы (3.4)–(3.6)), действующих на отсеченную часть фермы относительно этих моментных точек, получим усилия в рассеченных стержнях N_1 , N_2 , N_3 :

$$\Sigma M_{O1} = 0, V_A \cdot (d + d) + N_1 \cdot r_1 - F \cdot d = 0; \quad (3.4)$$

$$\Sigma M_{O2} = 0, -V_A \cdot a + N_2 \cdot r_2 + F \cdot (a + d) = 0; \quad (3.5)$$

$$\Sigma M_{O3} = 0, V_A \cdot d - N_3 \cdot r_3 = 0. \quad (3.6)$$

СМТ удобно пользоваться при расчете ферм, когда можно провести разрез, пересекающий кроме стержня, в котором определяется усилие, любое число стержней, сходящихся в одной общей точке, не лежащей на направлении оси данного стержня.

СМТ удобен также и в случаях, когда разрез пересекает более трех стержней, не сходящихся в одной точке, если усилия во всех стержнях, кроме трех, уже известны.

СМТ применим для расчета таких ферм, в которых возможно провести разрезы, пересекающие любое число стержней более трех, если при этом каждый добавочный стержень пересекается дважды.

Способ вырезания узлов (СВУ). СВУ применяется при рассмотрении равновесия вырезанных узлов (рис. 3.7). Определение усилий СВУ начинается с вырезания узла, в котором сходятся не более двух стержней. При этом условии статического равновесия составляется в виде проекций всех сил и усилий на оси.

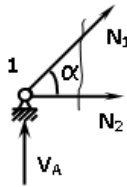


Рис. 3.7

$$\Sigma Y = 0, V_A + N_1 \cdot \sin \alpha = 0; \quad (3.7)$$

$$\Sigma X = 0, N_2 + N_1 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (3.8)$$

Также можно определить внутренние усилия в стержнях ферм СВУ, вырезая узел, в котором сходятся более двух стержней. При этом все усилия в узле, кроме двух, должны быть уже известны.

Способ проекций (СП). СП применяется при рассмотрении равновесия части фермы, как и в СМТ, когда два из трех рассеченных стержней параллельны друг другу, т. е. когда для стержня невозможно найти моментную точку (рис. 3.8). Для стержня N_2 невозможно

найти моментную точку (точка находится в бесконечности), так как два параллельных стержня 1 и 3 не пересекаются. Поэтому в этом случае составляется условие равновесия отсеченной части фермы в виде суммы проекций всех действующих на отсеченную часть сил и усилий на ось, перпендикулярную параллельным стержням, в данном случае — на ось Y :

$$\sum Y = 0, V_A - F_1 - F_2 + N_2 \sin \alpha = 0. \quad (3.9)$$

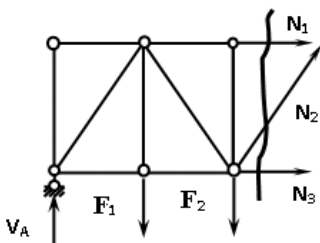


Рис. 3.8

Каждый из способов имеет свои достоинства и недостатки.

Достоинства:

- способом вырезания узлов можно рассчитать всю ферму целиком;
- при расчете ферм СМТ и СП каждое усилие определяется из уравнения с одним неизвестным, в которое входят только внешняя нагрузка и одно определяемое усилие. Поэтому неправильное определение других усилий не повлияет на величину искомого усилия. Также при этом не происходит нарастания погрешности (за счет предыдущих округлений).

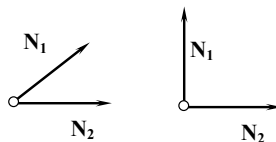
Недостатки:

- СМТ и СП невозможно рассчитать всю ферму целиком;
- при вычислениях СВУ используются значения предыдущих усилий, которые могут быть определены неправильно, поэтому возможно нарастание погрешности или возникновение ошибки.

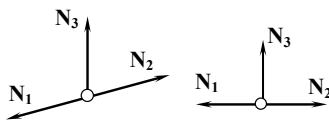
3.4. Признаки нулевых и ненулевых стержней

Кроме трех способов определения внутренних усилий в стержнях ферм также используются признаки нулевых и ненулевых стержней для быстрого определения усилий.

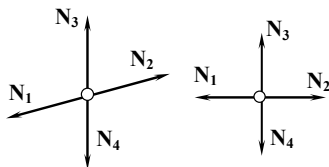
1. Если в узле сходятся два стержня и к этому узлу не приложена внешняя нагрузка, то усилия в этих стержнях равны нулю: $N_1 = 0$; $N_2 = 0$.



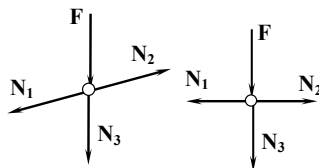
2. Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, и к этому узлу не приложена внешняя нагрузка, то усилия в этих двух стержнях будут равны по величинам и знакам, а третий равен нулю: $N_1 = N_2$; $N_3 = 0$.



3. Если в узле сходятся четыре стержня, попарно лежащие на одной прямой, и к этому узлу не приложена внешняя нагрузка, то усилия в этих парных стержнях будут равны по величинам и знакам: $N_1 = N_2$; $N_3 = N_4$.



4. Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, и к этому узлу приложена внешняя нагрузка F , лежащая на одной прямой с третьим стержнем, то усилия в первых стержнях будут равны по величинам и знакам, а усилие в третьем будет равно по величине силе F и противоположно ей по знаку: $N_1 = N_2$; $N_3 = -F$.



3.5. Графический способ определения внутренних усилий в стержнях простейших ферм. Построение диаграммы Максвелла – Кремоны

Графический расчет состоит в применении графического условия равновесия сил, сходящихся в одной точке, в данном случае — в узле фермы, а также в построении для каждого узла замкнутого силового многоугольника. При известных направлениях сил, сходящихся в узле, графически определяются два неизвестных усилия, для каждого узла.

Совмещенная диаграмма, содержащая замкнутые силовые многоугольники для всех узлов фермы, получила название *диаграммы Максвелла – Кремоны*.

При построении диаграммы условимся обходить внешний контур фермы и вырезанные узлы по часовой стрелке, т. е. в положительном направлении. Условимся внешние поля фермы обозначать цифрами, а внутренние — буквами. Внутренние поля образуются внутри, решеткой фермы. Внешние поля образуются по внешнему контуру фермы, от одной силы до другой силы.

Построение диаграммы Максвелла — Кремоны заключается в последовательном вырезании узлов фермы и построении для них замкнутых силовых многоугольников, совмещенных на одном чертеже, в котором каждое усилие встречается один раз, т. е. не повторяется. При этом необходимо соблюдать такую последовательность вырезания узлов, при которой в каждом следующем узле неизвестные усилия были бы не более чем в двух стержнях. Поэтому вырезание надо начинать с узла, в котором сходятся два стержня. Узлы обходим начиная с известных сил, оставшиеся два неизвестных усилия в узле определяются точкой пересечения двух направлений этих усилий.

Каждому полю фермы на силовом многоугольнике соответствует точка. Длины соответствующих отрезков, измеренные на диаграмме в масштабе сил, дадут абсолютные численные значения величин усилий в соответствующих стержнях.

Для определения знака соответствующего усилия на схеме фермы обходим каждый узел по часовой стрелке и устанавливаем направление усилий в стержнях ферм. Направление усилия мысленно переносится с диаграммы на ферму в соответствующий узел, тот,

который обходится. Если оно направлено в узел, то усилие является сжимающим и имеет знак минус. Если направлено из узла, то усилие является растягивающим и имеет знак плюс.

Для получения более точных результатов графический расчет, т. е. построение диаграммы Максвелла – Кремоны, выполняется на масштабнo-координатной чертежной бумаге (миллиметровке).

3.6. Построение линий влияния опорных реакций и внутренних усилий стержней ферм

Линии влияния в фермах могут быть построены двумя способами: кинематическим или статическим. Наиболее эффективный способ – статический.

Статический способ построения линий влияния состоит в том, что груз $F = 1$ устанавливается в произвольном узле и для определения усилий составляется уравнение статики, которое является аналитическим выражением линии влияния.

Линии влияния опорных реакций в простейших фермах аналогичны линиям влияния однопролетной балки (строятся статическим способом).

Передача нагрузки на ферму производится в узлах (случай узловой передачи нагрузки), поэтому построение линий влияния в ферме аналогично построению линий влияния в балках. При статическом построении линий влияния необходимо вывести функциональные зависимости внутреннего усилия от местоположения подвижного единичного груза $F = 1$, при этом предполагается, что груз устанавливается последовательно в узлах нижнего или верхнего пояса фермы (в зависимости от уровня езды). Исходя из способа получения такой функциональной зависимости, различают следующие приемы построения линий внутренних усилий в стержнях ферм:

- 1) способ вырезания узлов – когда аналитическое выражение получается из условия статического равновесия вырезанного узла;
- 2) способ моментной точки – когда аналитическое выражение получается из условия статического равновесия отсеченной части фермы, составленного в виде уравнения моментов относительно моментной точки;

3) способ проекций — когда аналитическое выражение получается из условия статического равновесия отсеченной части фермы, составленного в виде уравнения проекций на ось.

Так как статический способ достаточно объемный, то на его основе разработаны алгоритмы построения линий влияния внутренних усилий, которые упрощают построение линий влияния.

Алгоритм построения линии влияния внутреннего усилия способом моментной точки в шарнирно опёртой ферме

1. На нулевую линию сносятся точки A и B .
2. Для построения первой правой прямой на левой опорной вертикали от точки A вверх или вниз (в зависимости от знака) откладывается величина $\frac{a}{h}$ (получаем точку A_1), где a — расстояние от моментной точки до левой опорной вертикали, h — плечо искомого усилия относительно моментной точки.
3. Полученную вершину A_1 соединяем с нулем на правой опорной вертикали, т. е. с точкой B .
4. На полученную прямую сносим только правые узлы фермы (расположены справа от заданного сечения). Получаем первую правую прямую.
5. Находим пересечение первой правой и первой левой прямой, для этого сносим на первую правую прямую моментную точку.
6. Полученную вершину соединяем с нулем на левой опорной вертикали, т. е. с точкой A .
7. На полученную прямую сносим только левые узлы фермы (расположены слева от заданного сечения). Получаем первую левую прямую.
8. Вершины первой левой и первой правой прямой по рассеченной панели соединяем передаточной прямой.

Полученное очертание и есть линия влияния искомого усилия.

Алгоритм построения линии влияния внутреннего усилия способом проекций в шарнирно опёртой ферме

1. На нулевую линию сносятся точки A и B .
2. Для построения первой правой прямой на левой опорной вертикали от точки A вверх или вниз (в зависимости от знака) откладывается величина $\frac{1}{\sin \alpha}$ (получаем точку A_1), где α — угол наклона искомого усилия относительно горизонтальной оси x .
3. Полученную вершину A_1 соединяем с нулем на правой опорной вертикали, т. е. с точкой B .
4. На полученную прямую сносим только правые узлы фермы (расположены справа от заданного сечения). Получаем первую правую прямую.
5. Полученную первую правую прямую переносим параллельно в нуль на левой опорной вертикали, т. е. в точку A .
6. На полученную прямую сносим только левые узлы фермы (расположены слева от заданного сечения). Получаем первую левую прямую.
7. Вершины первой левой и первой правой прямой по рассеченной панели соединяем передаточной прямой.
Полученное очертание и есть линия влияния искомого усилия.

3.7. Определение опорных реакций и внутренних усилий ферм по линиям влияния

Опорные реакции и внутренние усилия (продольные усилия) в стержнях ферм по линиям влияния определяются аналогично определению усилий по линиям влияния в балках.

Если на ферму одновременно действуют несколько сосредоточенных грузов, несколько равномерно распределенных нагрузок и несколько сосредоточенных моментов, то искомое усилие будет равно алгебраической сумме усилий, подсчитанных от каждого вида нагрузок:

$$V = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(V)} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(V)} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(V)}; \quad (3.10)$$

$$N = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(N)} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(N)} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(N)}. \quad (3.11)$$

Но так как ферма – это система, работающая в основном на узловую нагрузку (вся нагрузка приводится к узловой нагрузке), то формулы для определения усилий по линиям влияния будут выглядеть следующим образом:

$$V = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(V)}; \quad (3.12)$$

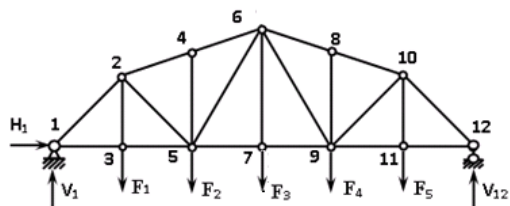
$$N = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(N)}. \quad (3.13)$$

3.8. Порядок расчета статически определимой фермы

1. Вычертить в масштабе заданную схему фермы.
2. Загрузить ферму в узлах от заданной нагрузки.
3. Определить аналитически усилия во всех стержнях фермы (рационально).
4. Составить таблицу значений.
5. Определить графически усилия во всех стержнях фермы.
6. Составить таблицу (диаграмма Максвелла – Кремоны).
7. Построить линии влияния опорных реакций и внутренних усилий в элементах указанного сечения.
8. По линиям влияния определить опорные реакции и усилия в стержнях указанного сечения.
9. Сравнить результаты с аналитическим расчетом.

3.9. Пример расчета статически неопределимой фермы

Заданная расчетная схема



Исходные данные

$$F_1 = 3 \text{ кН}$$

$$F_2 = 5 \text{ кН}$$

$$F_3 = 4 \text{ кН}$$

$$F_4 = 5 \text{ кН}$$

$$F_5 = 3 \text{ кН}$$

$$l = 18 \text{ м}$$

$$h_1 = 3 \text{ м}$$

$$h_2 = 5 \text{ м}$$

1. Определяем опорные реакции:

$$\Sigma X = 0, H_1 = 0;$$

$$\Sigma M_1 = 0, F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6 + F_3 \cdot 9 + F_4 \cdot 12 + F_5 \cdot 15 - V_{12} \cdot 18 = 0, V_{12} = 10 \text{ кН}$$

$$\Sigma M_{12} = 0, V_1 \cdot 18 - F_5 \cdot 3 - F_4 \cdot 6 - F_3 \cdot 9 - F_2 \cdot 12 - F_1 \cdot 15 = 0, V_1 = 10 \text{ кН}$$

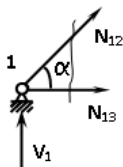
Выполним проверку найденных реакций:

$$\Sigma Y = 0, V_1 + V_{12} - F_5 - F_4 - F_3 - F_2 - F_1 = 0; 0 = 0.$$

Статическое равновесие сохранено, значит, реакции найдены верно.

2. Определяем внутренние усилия во всех стержнях фермы:

$$\cos \alpha = \frac{l_{13}}{l_{12}} = 0,707; \sin \alpha = \frac{l_{23}}{l_{12}} = 0,707;$$

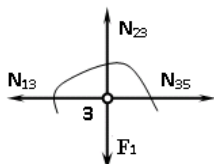


(способ вырезания узлов)

$$\Sigma Y = 0, V_1 + N_{12} \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_{12} = -V_1 / \sin \alpha$$

$$N_{12} = -10 / 0,707 = -14,142 \text{ кН};$$



(способ вырезания узлов)

$$\Sigma X = 0, N_{13} + N_{12} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_{13} = -N_{12} \cdot \cos \alpha$$

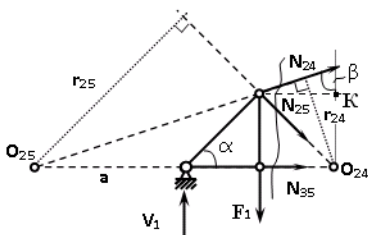
$$N_{13} = 14,142 \cdot 0,707 = 10 \text{ кН};$$

(по признакам)

$$N_{35} = N_{13}, N_{35} = 10 \text{ кН}$$

$$N_{23} = F_1, N_{23} = 3 \text{ кН};$$

$$\cos \beta = \frac{l_{4K}}{l_{24}} = 0,316; \sin \beta = \frac{l_{2K}}{l_{24}} = 0,949;$$



(способ моментной точки)

$$\Sigma M_{O24} = 0,$$

$$V_1 \cdot 6 + N_{24} \cdot r_{24} - F_1 \cdot 3 = 0$$

$$N_{24} = (F_1 \cdot 3 - V_1 \cdot 6) / r_{24}$$

$$r_{24} = \sin \beta \cdot l_{45} = 3,795 \text{ м}$$

$$N_{24} = -0,5 \cdot 6 / 3,795 = -0,791 \text{ кН};$$

(способ моментной точки)

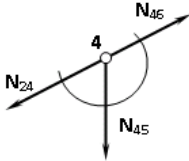
$$\Sigma M_{O_{25}} = 0,$$

$$-V_1 \cdot a + N_{25} \cdot r_{25} + F_1 \cdot (a + 3) = 0$$

$$N_{25} = (V_1 \cdot a - F_1 \cdot (a + 3)) / r_{25},$$

$$a = 6 \text{ м}, r_{25} = \cos \alpha \cdot (a + 6) = 8,485 \text{ м}$$

$$N_{25} = (10 \cdot 6 - 3 \cdot 9) / 8,485 = 3,889 \text{ кН};$$

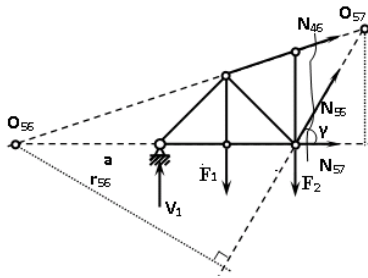


(по признаку 3)

$$N_{46} = N_{24}, N_{46} = -13,44 \text{ кН},$$

$$N_{45} = 0;$$

$$\sin \gamma = \frac{l_{67}}{l_{56}} = 0,587$$



(способ моментной точки)

$$\Sigma M_{O_{57}} = 0;$$

$$V_1 \cdot 9 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 3 - N_{57} \cdot 5 = 0;$$

$$N_{57} = (V_1 \cdot 9 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 3) / 5;$$

$$N_{57} = (10 \cdot 9 - 3 \cdot 6 - 5 \cdot 3) / 5 = 11,4 \text{ кН};$$

(способ моментной точки)

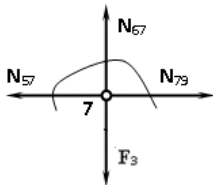
$$\Sigma M_{O_{56}} = 0,$$

$$F_1 \cdot (3 + a) - V_1 \cdot a - F_2 \cdot (6 + a) - N_{56} \cdot r_{56} = 0,$$

$$r_{56} = \sin \gamma \cdot (a + 6) = 10,29 \text{ м}$$

$$N_{56} = (P_1 \cdot (3 + a) - V_1 \cdot a + P_2 \cdot (6 + a)) / r_{56}$$

$$N_{56} = (3 \cdot 9 - 10 \cdot 6 + 5 \cdot 12) / 10,29 = 2,624 \text{ кН};$$



(по признаку 3)

$$N_{79} = N_{57}, N_{79} = 11,4 \text{ кН};$$

$$N_{67} = 4.$$

Так как ферма симметричная и нагрузка также симметричная, то усилия в симметричных стержнях будут равны. Следовательно, рассчитываем только половину фермы, а остальные усилия запишем по аналогии (см. табл. 2).

Аналитический расчет

Номер стержня	Усилие N_i , кН	Деформация	Номер стержня	Усилие N_i , кН	Деформация
1–2	–14,142	Сжатие	7–9	11,4	Растяжение
1–3	10	Растяжение	6–9	2,624	Растяжение
2–4	–13,44	Сжатие	8–9	0	–
2–3	3	Растяжение	6–8	–13,44	Сжатие
2–5	3,889	Растяжение	9–11	10	Растяжение
3–5	10	Растяжение	9–10	3,889	Растяжение
4–6	–13,44	Сжатие	10–11	3	Растяжение
4–5	0	–	8–10	–13,44	Сжатие
5–6	2,624	Растяжение	11–12	10	Растяжение
5–7	11,4	Растяжение	10–12	–14,142	Сжатие
6–7	4	Растяжение			

3. Построение диаграммы Максвелла – Кремоны.

3.1. Вычерчиваем ферму в масштабе, прикладывая внешние силы, реакции опор.

3.2. Обозначаем внешние поля цифрами от 1 до 7 и внутренние поля буквами от a до k . При этом будем обходить ферму строго по часовой стрелке.

3.3. Аналитическим способом определяем реакции: $V_1 = 10$ кН, $V_{12} = 10$ кН.

3.4. В принятом масштабе сил $1 \text{ см} = 1 \text{ кН}$ (масштаб можно выбирать любой, но чем он крупнее, тем точнее расчет), обходя ферму по часовой стрелке, строим из заданных (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) и реактивных (V_1, V_{12}) сил замкнутый силовой многоугольник (силовую линию) 1-2-3-4-5-6-7-1. Из точки 1 откладываем вверх V_{12} (рис. 3.9), получаем точку 2 (по ходу часовой стрелки за полем 1 идет сила V_{12}). Потом из полученной точки 2 вниз (направление силы) откладываем F_5 (по ходу часовой стрелки за полем 2 идет сила F_5), получаем точку 3. Далее 3 – F_4 (вниз) – 4 – F_3 (вниз) – 5 – F_2 (вниз) – 6 – F_1 (вниз) – 7 – V_1 (вверх) – 1.

3.5. Для нахождения точки a из точки I проводим прямую, параллельную стержню aI , а через точку 7 — прямую, параллельную стержню $a7$. Точка пересечения прямых aI и $a7$ — точка a .

Далее через полученную точку a проводим прямую, параллельную стержню ab , а через точку $б$ — прямую, параллельную стержню $бб$. На пересечении прямых ab и $бб$ получим точку $б$.

Затем через полученную точку $б$ проводим прямую, параллельную стержню $бв$, а через точку I — прямую, параллельную стержню $вI$. На пересечении прямых $бв$ и $вI$ получим точку $в$.

Теперь через полученную точку $в$ проводим прямую, параллельную стержню $вг$, а через точку I — прямую, параллельную стержню $гI$. На пересечении прямых $вг$ и $гI$ получим точку $г$ (точки $в$ и $г$ совпали).

Далее через полученную точку $г$ проводим прямую, параллельную стержню $гд$, а через точку 5 — прямую, параллельную стержню $д5$. На пересечении прямых $гд$ и $д5$ получим точку $д$.

Через полученную точку $д$ проводим прямую, параллельную стержню $де$, а через точку 4 — прямую, параллельную стержню $е4$. На пересечении прямых $де$ и $е4$ получим точку $е$.

Далее через полученную точку $е$ проводим прямую, параллельную стержню $еж$, а через точку I — прямую, параллельную стержню $жI$. На пересечении прямых $еж$ и $жI$ получим точку $ж$.

Через полученную точку $ж$ проводим прямую, параллельную стержню $жз$, а через точку I — прямую, параллельную стержню $зI$. На пересечении прямых $жз$ и $зI$ получим точку $з$ (точки $ж$ и $з$ совпали).

Далее через полученную точку $з$ проводим прямую, параллельную стержню $зи$, а через точку 3 — прямую, параллельную стержню $и3$. На пересечении прямых $зи$ и $и3$ получим точку $и$.

Далее через полученную точку $и$ проводим прямую, параллельную стержню $ик$, а через точку I — прямую, параллельную стержню $кI$. На пересечении прямых $ик$ и $кI$ получим точку $к$ (прямая, параллельная стержню $к2$, также должна пройти через точку $к$).

3.6. Измеряем длину отрезка aI на диаграмме (рис. 3.9) в масштабе сил. Полученная длина будет являться величиной усилия в стержне aI . Длина отрезка $a7$ — величина усилия в стержне $a7$, длина

отрезка ab – величина усилия в стержне ab и т. д. На диаграмме точки v и z совпали, значит длина отрезка vg равна 0, а следовательно, усилие в стержне vg равно 0 (аналогично усилие в стержне $жз$ равно 0).

3.7. На схеме фермы обходим по часовой стрелке узел, в котором сходятся стержни $a1$ и $a7$, устанавливая при этом название каждого из стержней. Получаем $1a$ (так как по часовой стрелке сначала идет поле 1 , а потом поле a). Движение на диаграмме должно идти от точки 1 к точке a , мысленно переносим это направление на схему фермы в заданный узел. Получается, что усилие направлено в узел, а следовательно, оно сжимающее и имеет знак минус. Для стержня – $a7$ (сначала поле a , потом поле 7). Так как движение на диаграмме должно идти от точки a к точке 7 , мысленно переносим это направление на схему фермы в заданный узел. Получается, что усилие направлено из узла, следовательно, оно растягивающее и имеет знак плюс.

Таким образом, обходя каждый узел фермы по часовой стрелке, определяем знаки усилий во всех стержнях фермы.

3.8. Полученные результаты графического расчета также сведем в таблицу (табл. 3).

Таблица 3

Графический расчет

Номер стержня	Усилие N_i , кН	Деформация	Номер стержня	Усилие N_i , кН	Деформация
$a1$	-14,2	Сжатие	$e4$	11,5	Растяжение
$a7$	10	Растяжение	$еж$	2,6	Растяжение
$b1$	-13,4	Сжатие	$жз$	0	–
ab	3	Растяжение	$ж1$	-13,4	Сжатие
$bв$	3,9	Растяжение	$и3$	10	Растяжение
$бб$	10	Растяжение	$из$	3,9	Растяжение
$z1$	-13,4	Сжатие	$ик$	3	Растяжение
$вг$	0	–	$з1$	-13,4	Сжатие
$гд$	2,6	Растяжение	$к2$	10	Растяжение
$д5$	11,5	Растяжение	$к1$	-14,2	Сжатие
$де$	4	Растяжение			

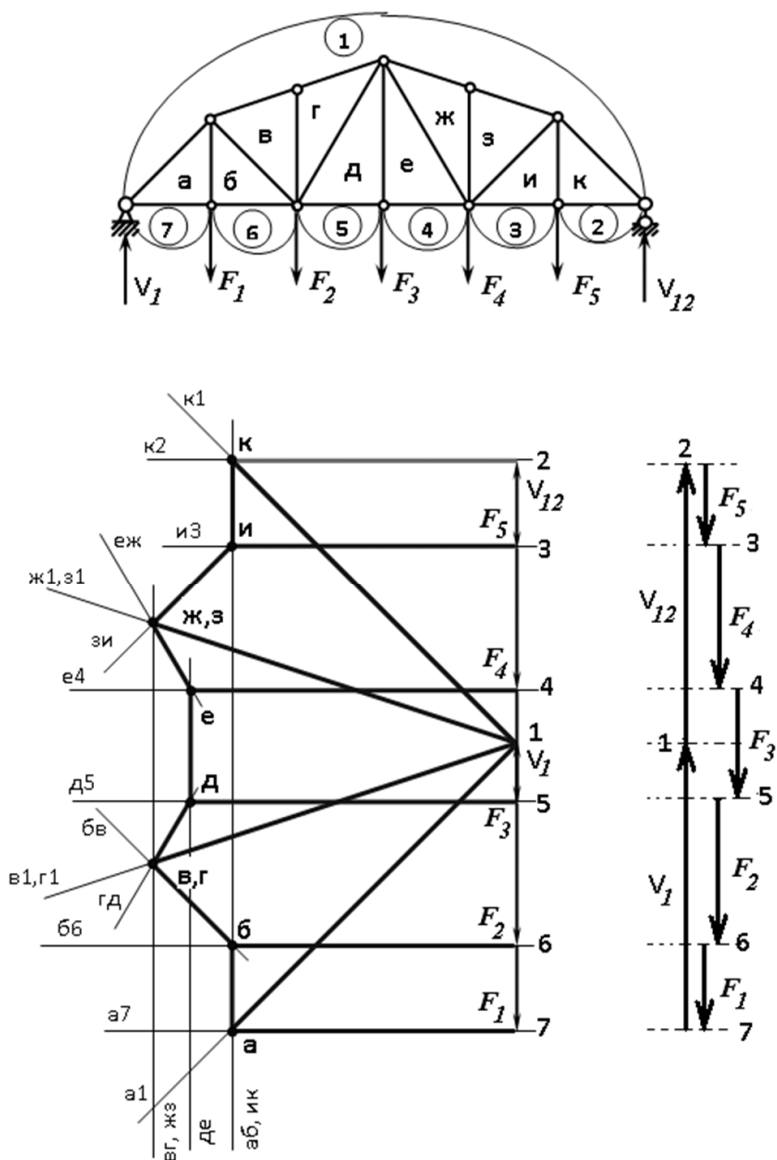


Рис. 3.9. Диаграмма Максвелла – Кремоны

Сравнивая результаты аналитического и графического расчетов, видим, что результаты получились аналогичными с допустимой относительной погрешностью не более 3 %.

4. Построение линий влияния

4.1. Линия влияния V_1 находится по формуле

$$\Sigma M_{12} = 0, -\bar{F} \cdot (l - x) + V_1 \cdot l = 0, V_1 = \frac{\bar{F} \cdot (l - x)}{l} = \frac{(l - x)}{l}.$$

Так как зависимость линейная, то достаточно двух точек:

$$x = 0 \rightarrow V_1 = 1, \quad x = l \rightarrow V_1 = 0.$$

Итак, под узлом I на левой опорной вертикали откладываем l (F находится в узле I), а под узлом 12 на правой опорной вертикали – нуль (F находится в узле 12). Полученные точки соединяем прямой линией.

Полученное очертание является линией влияния опорной реакции V_1 (рис. 3.10).

4.2. Линия влияния V_{12} рассчитывается следующим образом.

$$\Sigma M_1 = 0, \bar{F} \cdot x - V_{12} \cdot l = 0, V_{12} = \frac{\bar{F} \cdot x}{l} = \frac{x}{l}.$$

Так как зависимость линейная, то достаточно двух точек:

$$x = 0 \rightarrow V_{12} = 0, \quad x = l \rightarrow V_{12} = 1.$$

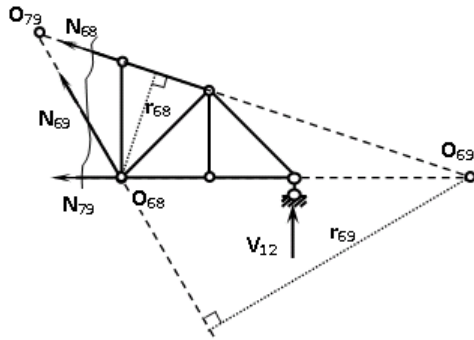
Итак, под узлом I на левой опорной вертикали откладываем нуль (F находится в узле I), а под узлом 12 на правой опорной вертикали – l (F находится в узле 12). Полученные точки соединяем прямой линией.

Полученное очертание является линией влияния опорной реакции V_{12} (рис. 3.10).

4.3. Линии влияния усилий N_{68} , N_{69} , N_{79} находим способом моментной точки.

Так как ферма с ездой понизу, следовательно, подвижный единственный груз будем перемещать по нижнему поясу фермы. Выведем функциональные зависимости для заданных усилий, попавших в сечение:

а) F находится левее сечения (F в узлах 1, 3, 5, 7). Рассматриваем равновесие правой отсеченной части фермы:



1) линия влияния N_{68} :

$$\Sigma M_{O_{68}} = 0, -V_{12} \cdot 6 - N_{68} \cdot r_{68} = 0, N_{68} = -\frac{V_{12} \cdot 6}{r_{68}}$$

$$r_{68} = r_{24} = 3,795 \text{ м}$$

$$N_{68} = -\frac{V_{12} \cdot 6}{3,795} = -1,581 V_{12};$$

2) линия влияния N_{69} :

$$\Sigma M_{O_{69}} = 0, V_{12} \cdot 6 + N_{69} \cdot r_{69} = 0, N_{69} = -\frac{V_{12} \cdot 6}{r_{69}}$$

$$r_{69} = r_{56} = 10,29 \text{ м}$$

$$N_{69} = -\frac{V_{12} \cdot 6}{10,29} = -0,583 V_{12};$$

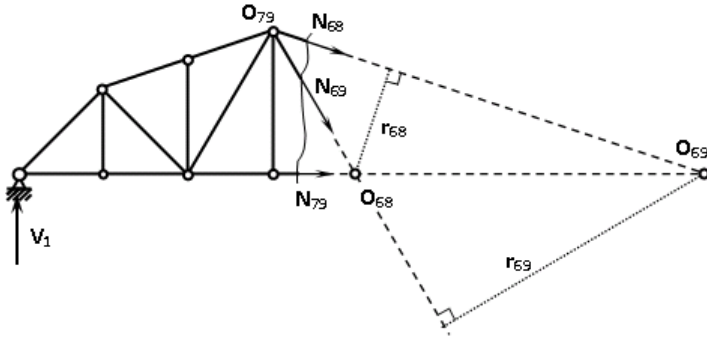
3) линия влияния N_{79} :

$$\Sigma M_{O_{79}} = 0, -V_{12} \cdot 9 + N_{79} \cdot r_{79} = 0, N_{79} = \frac{V_{12} \cdot 9}{r_{79}}$$

$$r_{79} = 5 \text{ м}$$

$$N_{79} = \frac{V_{12} \cdot 9}{5} = 1,8 V_{12};$$

б) F находится правее сечения (F в узлах 9, 11, 12). Рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы:



1) линия влияния N_{68} :

$$\Sigma M_{O_{68}} = 0, V_1 \cdot 12 + N_{68} \cdot r_{68} = 0, N_{68} = -\frac{V_1 \cdot 12}{r_{68}}$$

$$r_{68} = r_{24} = 3,795 \text{ м}$$

$$N_{68} = -\frac{V_1 \cdot 12}{3,795} = -3,162 V_1;$$

2) линия влияния N_{69} :

$$\Sigma M_{O_{69}} = 0, V_1 \cdot 24 - N_{69} \cdot r_{69} = 0, N_{69} = \frac{V_1 \cdot 24}{r_{69}}$$

$$r_{69} = r_{56} = 10,29 \text{ м}$$

$$N_{69} = \frac{V_1 \cdot 24}{10,29} = 2,332 V_1;$$

3) линия влияния N_{79} :

$$\Sigma M_{O_{79}} = 0, V_1 \cdot 9 - N_{79} \cdot r_{79} = 0, N_{79} = \frac{V_1 \cdot 9}{r_{79}}$$

$$r_{79} = 5 \text{ м}$$

$$N_{79} = \frac{V_1 \cdot 9}{5} = 1,8 V_1;$$

в) построение линии влияния N_{68} :

1) строим линию $N_{68} = -3,162 V_1$ так же, как линию влияния V_1 , только все ее значения умножены на коэффициент $(-3,162)$, т. е. переворачиваем линию вниз. На эту линию сносим узлы 9, 11, 12 – получаем 1-ю правую прямую;

- 2) строим линию $N_{68} = -1,581V_{12}$ так же, как линию влияния V_{12} , только все ее значения умножены на коэффициент $(-1,581)$ (перевернута вниз). На эту линию сносим узлы $1, 3, 5, 7$ — получаем 1-ю левую прямую;
- 3) полученные вершины первой правой и первой левой прямой соединяем передаточной прямой (вершины под узлами 7 и 9). Полученное очертание и есть линия влияния N_{68} (рис. 3.10);
 - г) построение линии влияния N_{69} :
 - 1) строим линию $N_{69} = 2,332V_1$ так же, как линию влияния V_1 , только все ее значения умножены на коэффициент $2,332$. На эту линию сносим узлы $9, 11, 12$ — получаем 1-ю правую прямую;
 - 2) строим линию $N_{69} = -0,583V_{12}$ так же, как линию влияния V_{12} , только все ее значения умножены на коэффициент $(-0,583)$ (перевернута вниз). На эту линию сносим узлы $1, 3, 5, 7$ — получаем 1-ю левую прямую;
 - 3) полученные вершины первой правой и первой левой прямой соединяем передаточной прямой (вершины под узлами 7 и 9). Полученное очертание и есть линия влияния N_{69} (рис. 3.10);
 - д) построение линии влияния N_{79} :
 - 1) строим линию $N_{79} = 1,8V_1$ так же, как линию влияния V_1 , только все ее значения умножены на коэффициент $1,8$. На эту линию сносим узлы $9, 11, 12$ — получаем 1-ю правую прямую;
 - 2) строим линию $N_{79} = 1,8V_{12}$ так же, как линию влияния V_{12} , только все ее значения умножены на коэффициент $1,8$. На эту линию сносим узлы $1, 3, 5, 7$ — получаем 1-ю левую прямую;
 - 3) полученные вершины первой правой и первой левой прямой соединяем передаточной прямой (вершины под узлами 7 и 9). Полученное очертание и есть линия влияния N_{79} (рис. 3.10).

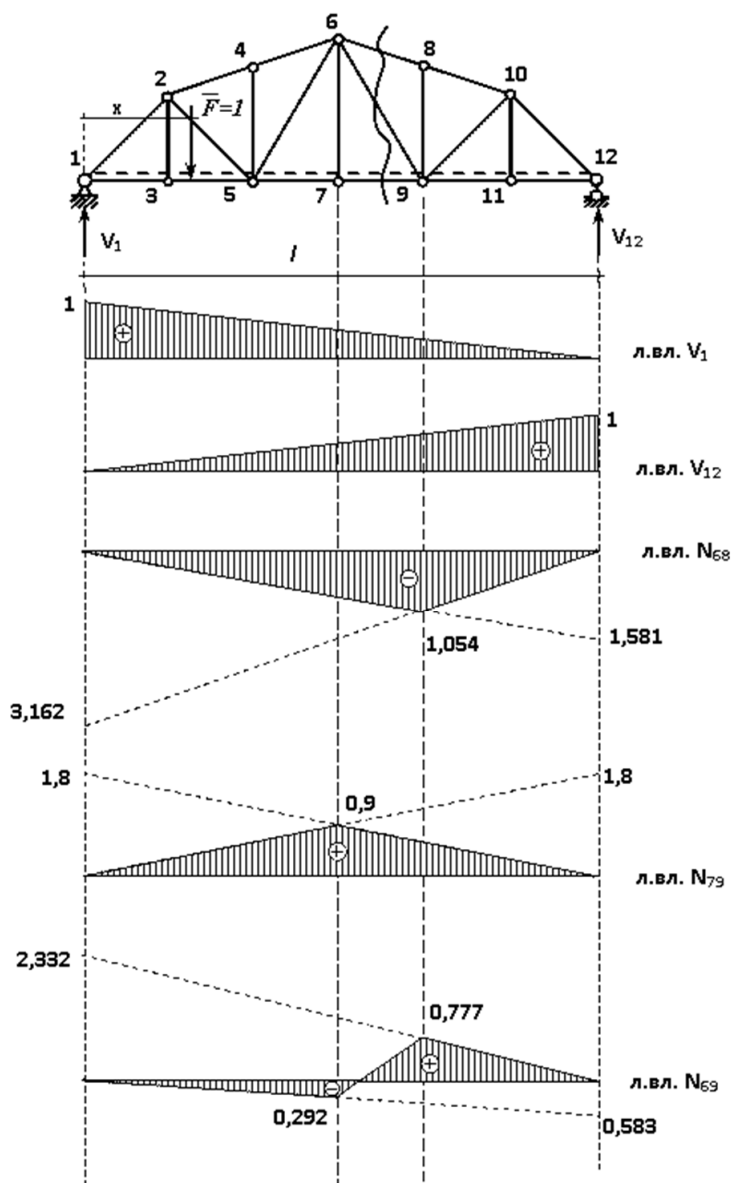
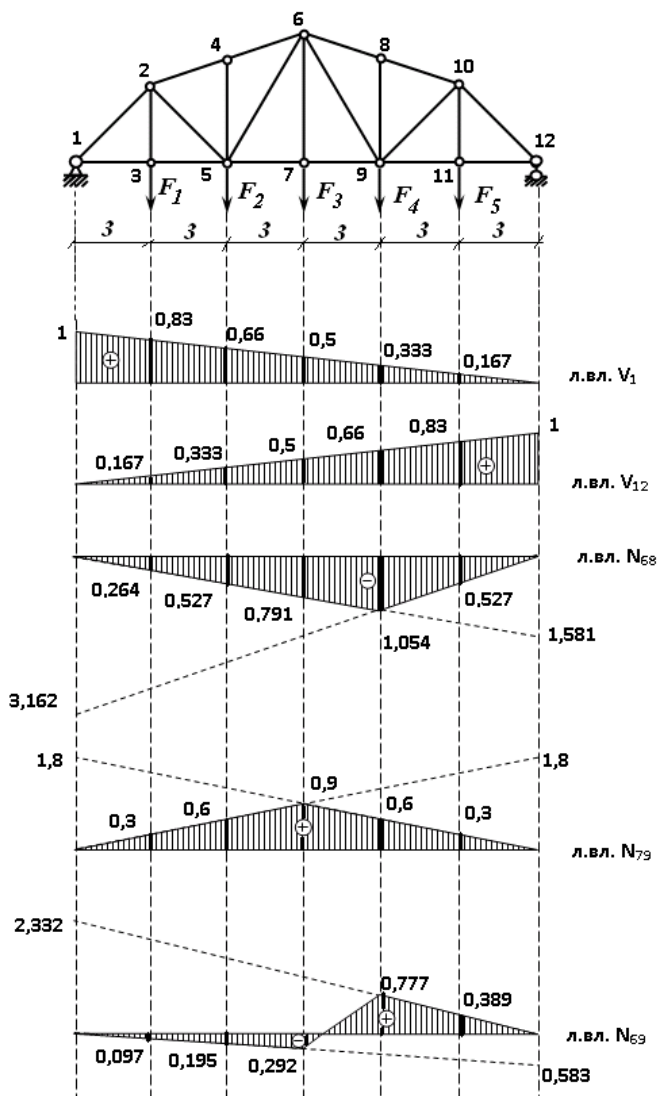


Рис. 3.10. Линии влияния опорных реакций и внутренних усилий

5. Определение опорных реакций и внутренних усилий по линиям влияния



$$\begin{aligned}
V_1 &= F_1 \cdot 0,833 + F_2 \cdot 0,667 + F_3 \cdot 0,5 + F_4 \cdot 0,333 + F_5 \cdot 0,167 = \\
&= 3 \cdot 0,833 + 5 \cdot 0,667 + 4 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,333 + 3 \cdot 0,167 = 10 \text{ кН} \\
V_{12} &= F_1 \cdot 0,167 + F_2 \cdot 0,333 + F_3 \cdot 0,5 + F_4 \cdot 0,667 + F_5 \cdot 0,833 = \\
&= 3 \cdot 0,167 + 5 \cdot 0,333 + 4 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,667 + 3 \cdot 0,833 = 10 \text{ кН} \\
N_{68} &= -F_1 \cdot 0,264 - F_2 \cdot 0,527 - F_3 \cdot 0,791 - F_4 \cdot 1,054 - F_5 \cdot 0,527 = \\
&= -3 \cdot 0,264 - 5 \cdot 0,527 - 4 \cdot 0,791 - 5 \cdot 1,054 - 3 \cdot 0,527 = -13,442 \text{ кН} \\
N_{69} &= -F_1 \cdot 0,097 - F_2 \cdot 0,194 - F_3 \cdot 0,292 + F_4 \cdot 0,777 + F_5 \cdot 0,389 = \\
&= -3 \cdot 0,097 - 5 \cdot 0,194 - 4 \cdot 0,292 + 5 \cdot 0,777 + 3 \cdot 0,389 = 2,623 \text{ кН} \\
N_{79} &= F_1 \cdot 0,3 + F_2 \cdot 0,6 + F_3 \cdot 0,9 + F_4 \cdot 0,6 + F_5 \cdot 0,3 = \\
&= 3 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,9 + 5 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,3 = 11,4 \text{ кН}.
\end{aligned}$$

Вывод: полученные результаты аналитического и графического расчетов и определение усилий по линиям влияния совпадают с точностью допустимой погрешности (не более 3 %).

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение статически определимой фермы.
2. Дать определения основным понятиям: пролет фермы, пояс фермы, стойка, панель, раскос, решетка.
3. Классификация ферм по 5 признакам (с примерами).
4. Сформулировать и пояснить способ моментной точки. Его достоинства и недостатки.
5. Сформулировать и пояснить способ вырезания узлов. Его достоинства и недостатки.
6. Сформулировать и пояснить способ проекций. Его достоинства и недостатки.
7. Графический способ определения усилий в стержнях ферм. Алгоритм построения диаграммы Максвелла — Кремоны.
8. Способы построения линий влияния усилий в стержнях ферм.
9. Определение усилий в стержнях ферм по линиям влияния.

4. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ АРКИ

4.1. Трехшарнирные системы

Трехшарнирная система — это система, состоящая из двух дисков D_1 и D_2 , соединенных с помощью одного шарнира C друг с другом и двумя шарнирами A и B с землей (рис. 4.1). Земля может рассматриваться как третий диск, следовательно, трехшарнирная система представляет собой соединение трех дисков с помощью трех шарниров, не расположенных на одной прямой. Такое соединение, как известно, является геометрически неизменяемым (признак 2).

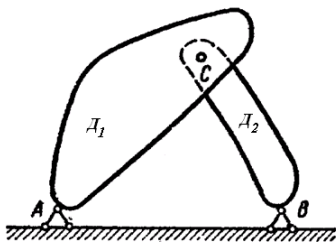


Рис. 4.1

Если диски D_1 и D_2 представляют собой стержни с криволинейной осью, то трехшарнирная система называется трехшарнирной аркой (рис. 4.2, а); если дисками D_1 и D_2 являются прямолинейные или ломаные стержни, то система называется трехшарнирной рамой (рис. 4.2, б, в); наконец, в случае когда диски D_1 и D_2 являются сквозными конструкциями (фермами), то система называется трехшарнирной арочной фермой (рис. 4.2, г).

Трехшарнирная система может быть симметричной и несимметричной относительно вертикальной оси (рис. 4.3). В симметричной системе средний шарнир C расположен на оси симметрии, а опорные шарниры A и B — на одном уровне. Так, на рис. 4.3, а, показана симметричная система: опоры A и B на одном уровне, шарнир C лежит на оси симметрии. На рис. 4.3, б, показана несимметричная система: опоры A и B на одном уровне, шарнир C не лежит на оси симметрии. На рис. 4.3, в, показана несимметричная систе-

ма: опоры A и B на разных уровнях уровне, шарнир C лежит на оси симметрии. На рис. 4.3, z , показана несимметричная система: опоры A и B на разных уровнях, шарнир C не лежит на оси симметрии.

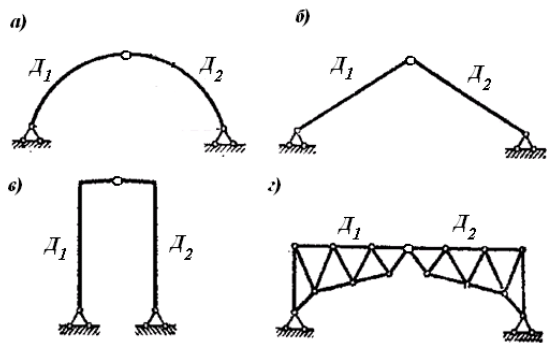


Рис. 4.2

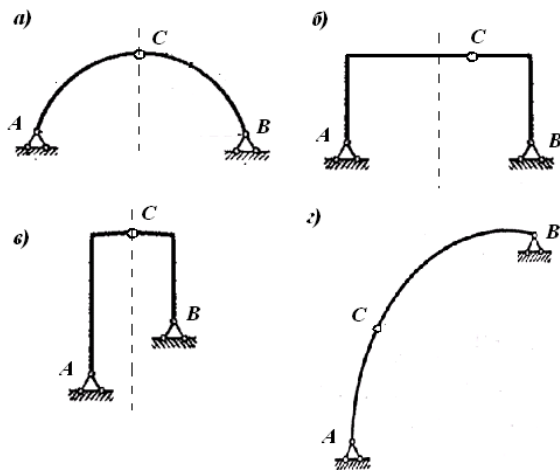


Рис. 4.3

Обе опоры каждой из рассмотренных трехшарнирных систем неподвижны в направлении прямой, соединяющей шарниры A и B — в горизонтальном направлении (рис. 4.3). В практике же часто встречаются трехшарнирные системы, у каждой из которых

конструкция одной из опор допускает перемещение опорного шарнира в указанном направлении (рис. 4.4). Геометрическая неизменяемость такой системы обеспечивается с помощью затяжек, соединяющих опорные или более высокие сечения дисков D_1 и D_2 . На рис. 4.4 показаны трехшарнирные системы, допускающие перемещение опорного шарнира: *трехшарнирные арки*: *а* — с затяжкой; *б* — с повышенной затяжкой; *трехшарнирные рамы*: *в* — с затяжкой; *г* — с повышенной затяжкой

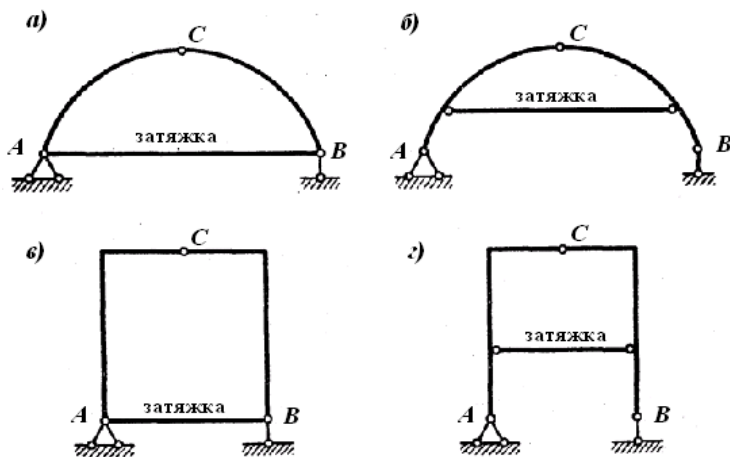


Рис. 4.4

Реакции R_A и R_B опор трехшарнирной системы характеризуются каждая двумя параметрами: величиной и направлением, или величинами горизонтальной H и вертикальной V составляющих полных реакций R . Следовательно, опорные реакции трехшарнирной системы характеризуются четырьмя параметрами: величинами H_A , H_B , V_A и V_B (рис. 4.5). То есть можно сказать, что в трехшарнирных системах возникают четыре опорные реакции. Они могут быть определены из трех уравнений статического равновесия всех сил, действующих на систему, включая и опорные реакции (формулы (4.1)–(4.3)), и четвертого уравнения статики, выражающего равенство нулю момента всех сил, действующих на левую или правую часть системы относительно шарнира C (формула (4.4)). Следовательно, трехшарнирная система является статически определимой.

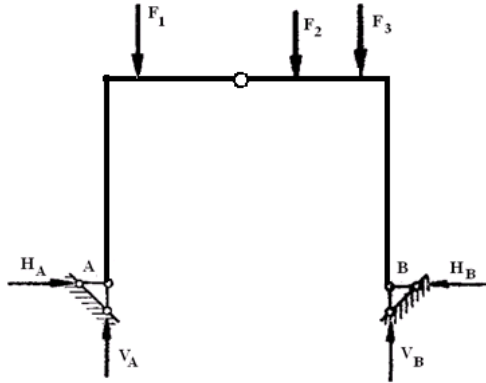


Рис. 4.5

$$\sum M_B = 0; \quad (4.1)$$

$$\sum M_A = 0; \quad (4.2)$$

$$\sum X = 0; \quad (4.3)$$

$$\sum M_C^{cl} = 0 \quad (\sum M_C^{спп} = 0). \quad (4.4)$$

При действии на трехшарнирную систему только вертикальной нагрузки горизонтальные составляющие H_A и H_B реакций опор A и B , называемые распором, не равны нулю; в связи с этим трехшарнирные системы относят к распорным.

Изгибающие моменты, поперечные силы, возникающие в поперечных сечениях трехшарнирной арки, и напряжения в ней, как будет далее показано, значительно меньше усилий и напряжений, возникающих от той же нагрузки в балке такого же пролета. В связи с этим трехшарнирные арки при перекрытии больших пролетов более экономичны, чем балки. При малых пролетах трехшарнирные арки могут оказаться менее экономичными, так как они сложнее в изготовлении, чем балки, требуют устройства среднего шарнира и применения более сложных опорных частей.

Чаще всего в строительных конструкциях используют симметричные трехшарнирные арки. Поэтому в дальнейшем будет рассмотрен расчет только трехшарнирной арки.

Расстояние L между центрами опорных шарниров трехшарнирной арки называется пролетом арки, а расстояние f от средне-

го шарнира до прямой, соединяющей опорные шарниры – стрелой подъема арки (рис. 4.6). Опору арки принято также называть пятой арки, центральный шарнир C – замком арки. Ключ арки – место, в котором сечение, перпендикулярное к оси арки, является осью симметрии. Ось арки – средняя линия, проходящая через центры тяжести сечений арки.

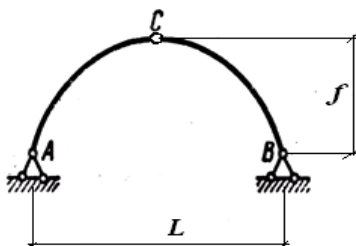


Рис. 4.6

4.2. Определение опорных реакций в трехшарнирной арке

Трехшарнирная арка является геометрически неизменяемой и статически определимой системой. В отличие от других систем в трехшарнирных арках определяют все внутренние усилия M , N , Q . И, как во всех системах, расчет арок начинается с определения опорных реакций. Опорные реакции в арке могут быть определены аналитическим или графическим способом, а также по линиям влияния.

4.2.1. Аналитический способ определения опорных реакций в арке

При действии внешней нагрузки (рис. 4.7) в каждой опоре трехшарнирной арки возникает по две реакции – горизонтальные и вертикальные; всего имеется четыре опорные реакции. Вертикальные составляющие полных реакций R обозначим V_A и V_B , а горизонтальные – H_A и H_B (рис. 4.7).

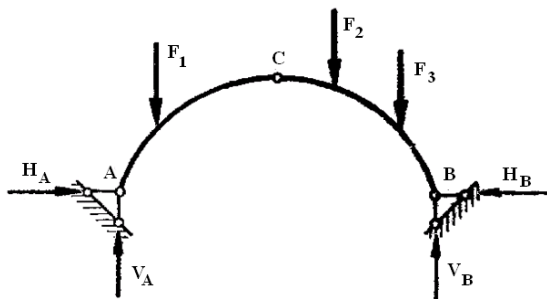


Рис. 4.7

Для определения опорных реакций в трехшарнирной арке лучше всего использовать уравнения вида (4.5)–(4.8), а уравнения вида (4.9), (4.10) лучше использовать для проверки найденных реакций:

$$\sum M_B = 0; \quad (4.5)$$

$$\sum M_A = 0; \quad (4.6)$$

$$\sum M_C^{\text{сл}} = 0; \quad (4.7)$$

$$\sum M_C^{\text{снр}} = 0; \quad (4.8)$$

$$\sum X = 0; \quad (4.9)$$

$$\sum Y = 0. \quad (4.10)$$

Из полученных четырех уравнений статики могут быть определены все опорные реакции. Из уравнения (4.5) определяется реакция \$V_A\$, из уравнения (4.6) – реакция \$V_B\$, из уравнения (4.7) – реакция \$H_A\$, из уравнения (4.8) – реакция \$H_B\$.

Если опоры арки расположены на разных уровнях, то полные реакции \$R_A\$ и \$R_B\$ опор арки раскладываются не на вертикальные \$V_A\$ и \$V_B\$ и горизонтальные \$H_A\$ и \$H_B\$ составляющие (рис. 4.8, а), а на вертикальные составляющие \$H'_A\$ и \$H'_B\$, и составляющие \$V'_A\$ и \$V'_B\$, направленные по прямой, соединяющей опорные шарниры \$A\$ и \$B\$ (рис. 4.8, б).

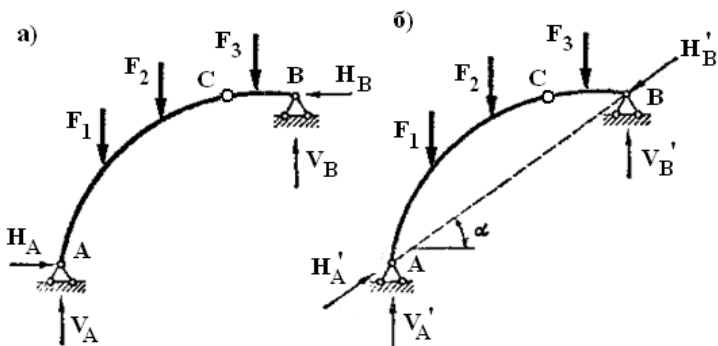


Рис. 4.8

Так как с горизонтальными и вертикальными составляющими полных реакций работать проще (меньше вычислений), то после определения значений V'_A и V'_B и составляющих H'_A и H'_B могут быть найдены величины вертикальных и горизонтальных составляющих опорных реакций:

$$V_A = V'_A + H'_A \sin \alpha; \quad (4.11)$$

$$V_B = V'_B - H'_B \sin \alpha; \quad (4.12)$$

$$H_A = H'_A \cos \alpha; \quad (4.13)$$

$$H_B = H'_B \cos \alpha. \quad (4.14)$$

4.2.2. Графический способ определения опорных реакций

При графическом способе определения опорных реакций предварительно находят положения и величины сил R_1 и R_2 , являющихся равнодействующими внешней нагрузки, приложенной соответственно к левой и правой частям арки. Опорные реакции определяют сначала отдельно от действия силы R_1 и от действия силы R_2 на основании принципа независимости действия сил, затем — уже от их совместного действия.

Найдем сначала опорные реакции от действия на арку равнодействующей силы R_1 . В этом случае правая опорная реакция B_1 должна пройти через правый опорный шарнир и шарнир C (рис. 4.9, *a*); в противном случае правая часть арки, на которую действуют две силы — опорная реакция B_1 и реакция шарнира C — не может находиться

в статическом равновесии. Из курса теоретической механики известно, что три действующие на диск и находящиеся в равновесии силы обязательно пересекаются в одной точке. Применив эту теорему к данному случаю, легко определим направление опорной реакции A_1 . Поэтому на левой опоре арки возникает реакция A_1 , проходящая через точку пересечения реакции B_1 и силы R_1 (m_1) и через опору A (рис. 4.9, *a*). Таким образом, вся арка в целом находится в равновесии под действием трех сил: A_1, B_1, R_1 .

Затем построением силового многоугольника для трех сил R_1, A_1 и B_1 (рис. 4.9, *б*) найдем величины опорных реакций A_1 и B_1 .

Аналогично определим реакции A_2 и B_2 , возникающие от равнодействующей силы R_2 , действующей на правую половину арки (рис. 4.9, *a*).

На основании принципа независимости действия сил, сложив геометрически найденные силы A_1 и A_2, B_1 и B_2 (формулы (4.15), (4.16)), получим полные реакции R_A и R_B , возникающие на опорах A и B трехшарнирной арки от действия сил R_1 и R_2 одновременно:

$$\overline{R_A} = \overline{A_1} + \overline{A_2}; \quad (4.15)$$

$$\overline{R_B} = \overline{B_1} + \overline{B_2}. \quad (4.16)$$

Для этого параллельно перенесем A_2 в начало A_1 , а B_1 параллельно перенесем в конец B_2 (рис. 4.9, *б*). Сложив полученные A_2 и A_1 по правилу сложения векторов, найдем величину полной реакции R_A левой опоры; аналогично производится определение полной реакции R_B правой опоры. Вертикальная и горизонтальная проекции реакции R_A равны соответственно V_A и H_A , а реакции $R_B - V_B$ и H_B .

На рис. 4.10 показано графическое определение опорных реакций при действии на каждую часть арки нескольких сил. Предварительно для сил, приложенных к каждой части арки (рис. 4.10, *a*), с помощью силового многоугольника (рис. 4.10, *б*) и веревочного многоугольника определяют равнодействующие R_1 и R_2 . Дальнейшие построения не отличаются от приведенных на рис. 4.9.

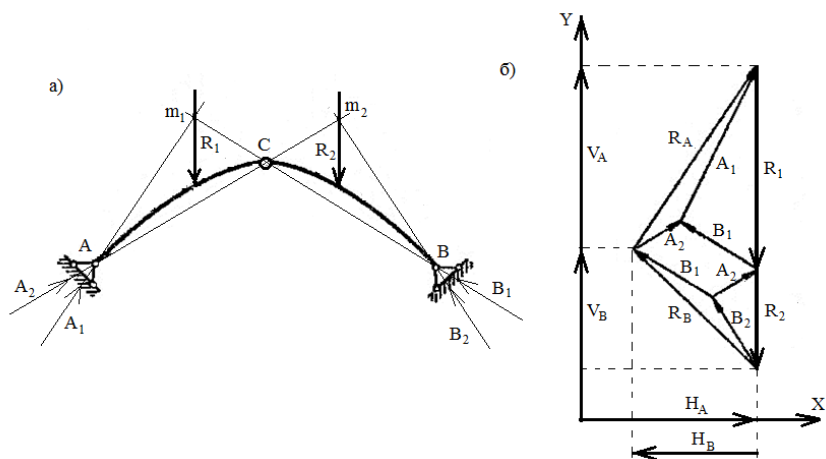


Рис. 4.9

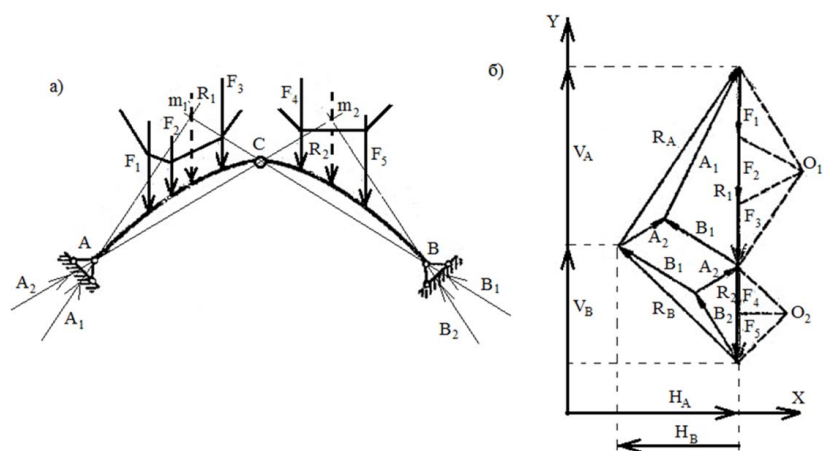


Рис. 4.10

4.3. Определение внутренних усилий в сечениях арки

4.3.1. Аналитический расчет

Внутренними усилиями, возникающими в поперечных сечениях арки, являются изгибающие моменты M , поперечные силы Q и продольные силы N . Их определяют по нагрузкам, действующим на арку левее или правее рассматриваемого сечения.

При определении внутренних усилий и построении эпюр этих усилий используют то же правило знаков, что и для других систем, за исключением знака продольной силы, которая в арках считается положительной при сжатии. В дальнейшем, чтобы не путаться со знаками для продольной силы, приведем формулу к такому виду, из которой знак будет определяться по обычным правилам.

При расчете арок вместо осей X и Y целесообразно выбирать другие координатные оси. Одна ось совпадает с касательной к оси арки в рассматриваемом сечении – ось U , а другая – перпендикулярная ей ось V (рис. 4.11). Тогда усилия в сечениях арки будут определяться по формулам:

$$Q = \sum_{\text{лев}} V = -\sum_{\text{пр}} V; \quad (4.17)$$

$$N = \sum_{\text{лев}} U = -\sum_{\text{пр}} U; \quad (4.18)$$

$$M = \sum_{\text{лев}} M = -\sum_{\text{пр}} M. \quad (4.19)$$

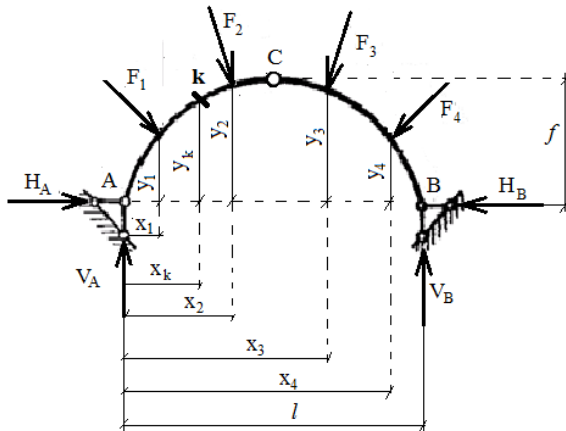


Рис. 4.11

В этих выражениях входящие под знаки сумм моменты внешних сил положительны при вращении по часовой стрелке, проекции V — когда направлены снизу вверх, а проекции U — когда направлены слева направо.

Определим с помощью формул (4.17)–(4.19) внутренние усилия в произвольном поперечном сечении k арки:

$$Q_k = \sum_{\text{лев}} V = V_a \cdot \cos \varphi_k - H_a \cdot \sin \varphi_k - \sum_{\text{лев}} F_y \cdot \cos \varphi_k - \sum_{\text{лев}} F_x \cdot \sin \varphi_k; \quad (4.20)$$

$$N_k = \sum_{\text{лев}} U = V_a \cdot \sin \varphi_k + H_a \cdot \cos \varphi_k - \sum_{\text{лев}} F_y \cdot \sin \varphi_k - \sum_{\text{лев}} F_x \cdot \cos \varphi_k; \quad (4.21)$$

$$M_k = \sum_{\text{лев}} M = V_a \cdot x_k - H_a \cdot y_k - \sum_{\text{лев}} F_x \cdot (y_k - y_F) - \sum_{\text{лев}} F_y \cdot (x_k - x_F), \quad (4.22)$$

где x_k и y_k — координаты точки k оси арки; φ_k — угол наклона касательной к оси арки в точке k по отношению к горизонтальной оси; F_y и F_x — соответственно вертикальная и горизонтальная проекции силы F ; x_F и y_F — координаты точки приложения силы F .

В выражениях (4.20)–(4.22) под знаки сумм входят проекции F_y и F_x всех сил F , приложенных к арке левее сечения k . Для сечения k (рис. 4.12) под знак каждой суммы входит лишь одна проекция F или F_{ix} . Аналогичным путем усилия Q , M и N могут быть выражены и через все правые силы.

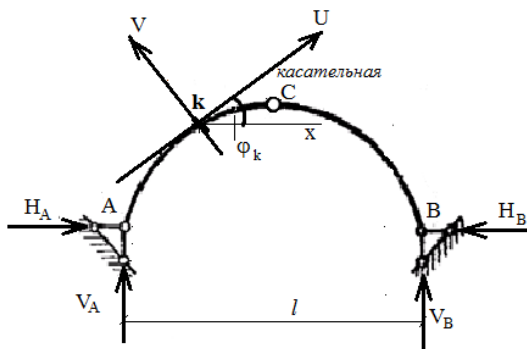


Рис. 4.12

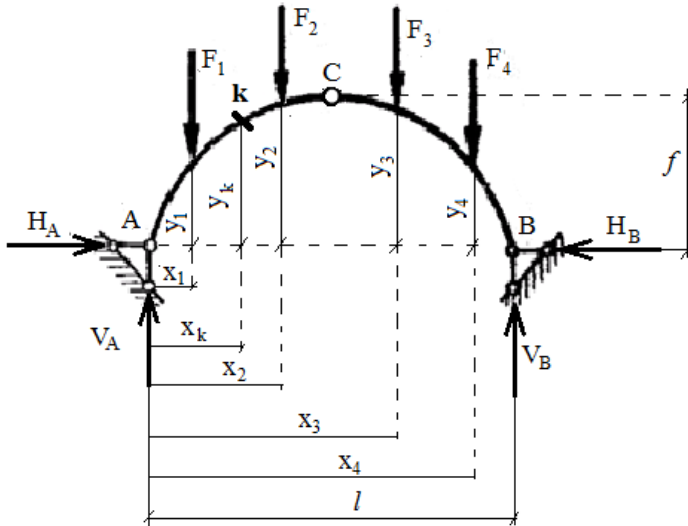


Рис. 4.13

В случае действия на арку только вертикальной нагрузки (рис. 4.13) горизонтальные проекции F_y равны нулю, проекции F_x равны F , а распор $H_A = H_B = H$; поэтому выражения (4.20)–(4.22) принимают вид

$$Q_k = \sum_{\text{лев}} V = V_a \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k - \sum_{\text{лев}} F \cdot \cos \varphi_k; \quad (4.23)$$

$$N_k = \sum_{\text{лев}} U = V_a \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k - \sum_{\text{лев}} F \cdot \sin \varphi_k; \quad (4.24)$$

$$M_k = \sum_{\text{лев}} M = V_a \cdot x_k - H \cdot y_k - \sum_{\text{лев}} F \cdot (x_k - x_F). \quad (4.25)$$

Преобразуем формулы (4.23)–(4.25), приведя их к виду (4.26)–(4.28):

$$Q_k = (V_a - \sum_{\text{лев}} F) \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k; \quad (4.26)$$

$$N_k = (V_a - \sum_{\text{лев}} F) \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k; \quad (4.27)$$

$$M_k = V_a \cdot x_k - \sum_{\text{лев}} F \cdot (x_k - x_F) - H \cdot y_k. \quad (4.28)$$

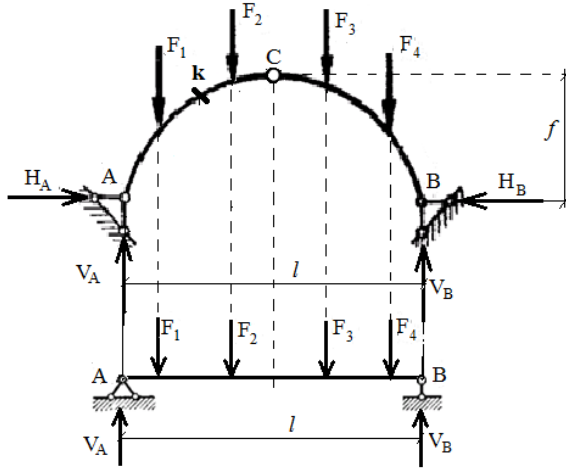


Рис. 4.14

Выражение $(V_a - \sum_{\text{лев}} F)$ представляет собой поперечную силу Q_k^0 в сечении k простой двухопорной балки того же пролета, что и арка, загруженной заданными силами (рис. 4.14). Q_k^0 называется *балочной поперечной силой*. Выражение $(V_a \cdot x_k - \sum_{\text{лев}} F \cdot (x_k - x_F))$ представляет собой изгибающий момент M_k^0 в сечении k простой двухопорной балки того же пролета, что и арка, загруженной заданными силами (рис. 4.14). M_k^0 называется *балочным изгибающим моментом*. И еще изменим знак в формуле (4.27) для продольного усилия, чтобы в дальнейшем при определении продольного усилия знак минус соответствовал сжатию, а плюс — растяжению, как и во всех системах. С учетом этого формулы (4.26)–(4.28) принимают вид

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k; \quad (4.29)$$

$$N_k = -(Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k); \quad (4.30)$$

$$M_k = M_k^0 - H \cdot y_k. \quad (4.31)$$

Определив с помощью приведенных выражений значения усилий Q , M и N в различных сечениях на различных участках арки (при действии только вертикальной нагрузки — с помощью выражений (4.29)–(4.31), а в остальных случаях — с помощью выражений (4.23)–(4.25)), можно по полученным значениям построить эпюры этих усилий. При действии только вертикальной нагрузки каждую

из эпюр Q , M и N , как видно из выражений (4.29)–(4.31), можно получить путем суммирования двух эпюр, например, эпюру M – путем сложения эпюры M^0 для простой двухопорной балки с эпюрой y (ордината оси арки), умноженной на $(-H)$. Отметим, что выражение (4.31) наглядно показывает уменьшение изгибающего момента в арке по сравнению с балкой. Это означает, что арки более экономичны по сравнению с балкой того же пролета.

4.3.2. Графический расчет

Графическое определение внутренних усилий Q , M и N в поперечных сечениях трехшарнирной арки производится путем построения многоугольника давления. На рис. 4.15, а, показана трехшарнирная арка, нагруженная силами F_1 и F_2 . В данном случае слева и справа от шарнира C действует по одной силе, а потому не требуется определять равнодействующую нагрузки, приложенной к каждой части арки.

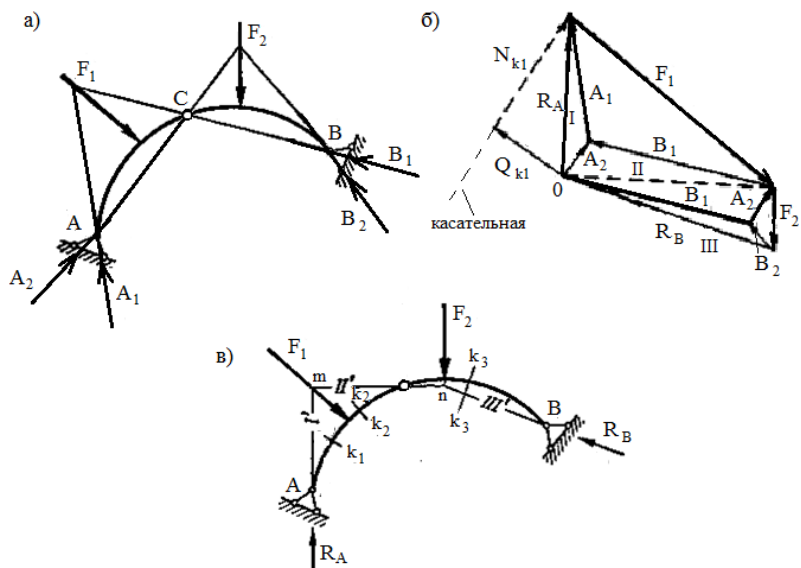


Рис. 4.15

На рис. 4.15, б, построением силового многоугольника графически определены опорные реакции R_A и R_B . Теперь построим вервочный многоугольник (рис. 4.15, в), соответствующий силовому

многоугольнику (рис. 4.15, б). Продолжим левую опорную реакцию R_A (рис. 4.15, в) до пересечения с силой F_1 . Таким образом, проведен луч I' , параллельный лучу I силового многоугольника (луч I является равнодействующей левых сил, т. е. R_A). Затем через точку их пересечения m проведем луч II' , параллельный лучу II силового многоугольника (луч II является равнодействующей сил R_A и F_1). Далее через точку n пересечения луча II' и силы F_2 проведем луч III' , параллельный лучу III , который является равнодействующей сил R_A , F_1 и F_2 .

При правильном построении луч II' (отрезок mn), представляющий собой линию действия равнодействующей сил R_A и F_1 , должен пройти через шарнир C , а луч III' , совпадающий с линией действия опорной реакции R_B , пройдет через правый опорный шарнир B . Построенный таким образом веревочный многоугольник $I'-II'-III'$ (рис. 4.15, в) называют многоугольником давления. Многоугольник давления — это многоугольник, каждый луч которого совпадает с линией давления, передаваемого с одной части арки на другую. Любая из сторон многоугольника давления совпадает с линией действия равнодействующей всех левых (или правых) сил в арке. В самом деле, левее сечения k_1-k_1 (рис. 4.15, в) действует только опорная реакция R_A , следовательно, луч I' веревочного многоугольника, совпадающий с направлением силы R_A , и есть линия действия равнодействующей левых сил для данного сечения. Левее сечения k_2-k_2 действуют реакция R_A и сила F_1 , равнодействующая которых проходит через точку их пересечения и совпадает с лучом II' силового многоугольника. Слева от сечения k_3-k_3 арки действуют силы R_A , F_1 и F_2 , равнодействующая которых проходит через точку пересечения луча II' с силой F_2 (так как луч II' является линией действия равнодействующей сил R_A и F_1) и совпадает с лучом III' .

Таким образом, действительно, любая из сторон многоугольника давления представляет собой линию действия равнодействующей всех сил, расположенных левее (или правее) данного сечения. Величина этой равнодействующей в каждом сечении определяется при помощи силового многоугольника (рис. 4.15, б); например, величина равнодействующей сил R_A и F_1 равна лучу II' , измеренному в масштабе сил.

При помощи силового многоугольника и многоугольника давления можно определить все внутренние усилия в любом сечении арки. Так, изгибающий момент может быть найден умножением равнодействующей (левых или правых сил) на ее плечо относительно центра тяжести данного сечения. Изгибающий момент в сечении k_1-k_1 (рис. 4.15, в) будет определяться по формуле

$$M_{k_1} = R_A \cdot e, \quad (4.32)$$

где e — плечо, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения (рис. 4.15, в) на направление равнодействующей левых сил, в данном случае — на направление опорной реакции R_A .

Для определения продольной и поперечной сил, действующих в сечении k_1-k_1 , необходимо разложить равнодействующую левых сил (луч I'), т. е. реакцию R_A , на две составляющие: параллельную касательной к оси арки в этом сечении и нормальную к касательной (рис. 4.15, б). Составляющая, нормальная к касательной, дает поперечную силу Q в сечении k_1-k_1 арки, а составляющая, параллельная касательной к оси арки, — продольную силу N в сечении k_1-k_1 арки.

Многоугольник давления дает наглядное представление о работе арки. Так, из рис. 4.15, в, видно, что в рассматриваемом примере правая половина арки (где равнодействующая для каждого сечения проходит ниже оси) изгибается выпуклостью вверх, т. е. еще больше искривляется; в левой же половине, наоборот, выпуклость от изгиба обращена книзу, т. е. происходит распрямление оси арки.

В случае действия на арку системы сосредоточенных сил F_1 , F_2 , F_3 и т. д. построение многоугольника давления производится в следующем порядке:

- 1) находят равнодействующую R_1 всех внешних активных сил (без опорных реакций), действующих на левую половину арки;
- 2) находят равнодействующую R_2 всех внешних активных сил (без опорных реакций), действующих на правую половину арки;
- 3) определяют опорные реакции R_A и R_B (от сил R_1 и R_2);
- 4) строят силовой многоугольник и многоугольник давления (с учетом всех сил F).

При действии на арку только вертикальных сил горизонтальная составляющая любой из равнодействующих левых или правых сил равняется распору H . Поэтому если через какую-либо точку k оси арки (рис. 4.16, б) провести вертикальную прямую $k-n$ до пересечения с многоугольником давления и в полученной точке n разложить равнодействующую левых сил (в данном случае II) на вертикальную и горизонтальную составляющие S и H соответственно, то изгибающий момент в сечении k будет равен произведению распора H на вертикальный отрезок $k-n$ между осью арки и стороной многоугольника давления, так как вертикальная составляющая S дает относительно точки k момент, равный нулю (рис. 4.16, а). Следовательно, при вертикальной нагрузке все вертикальные отрезки, заключенные между многоугольником давления и осью арки, являются ординатами эпюры изгибающих моментов, измеренными в определенном, постоянном для всех сечений арки масштабе. Построенная таким способом эпюра изгибающих моментов для арки изображена на рис. 4.16, б; она при этом получается построенной со стороны сжатых волокон. Отсюда можно сделать вывод, что при действии на арку вертикальной нагрузки многоугольник давления является эпюрой изгибающих моментов, построенной на сжатых волокнах и уменьшенной в H (распор) раз.

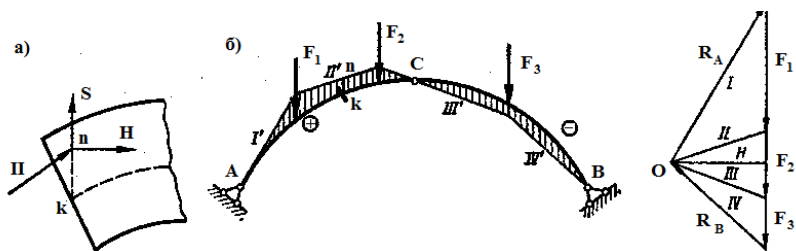


Рис. 4.16

Каждой нагрузке, действующей на данную трехшарнирную арку, соответствует только один многоугольник давления. При действии на арку распределенной нагрузки многоугольник давления превращается в кривую давления. Если арке дать очертание, при котором ее ось будет совпадать с многоугольником давления от заданной на-

грузки, то в арке не возникнут ни изгибающие моменты, ни поперечные силы. В этом случае арка будет работать исключительно на сжатие, что весьма выгодно, в особенности для каменных и бетонных сооружений. Такое очертание называется рациональным очертанием оси арки.

4.4. Расчет трехшарнирной арки на подвижную нагрузку

Расчет трехшарнирных арок на подвижную нагрузку производится с помощью построения линий влияния. Линии влияния в трехшарнирных арках могут быть построены статическим, кинематическим и графическим способом.

Наиболее эффективными в арках являются статический и графический способ. Статическим способом удобнее строить линии влияния опорных реакций, а графическим — линии влияния внутренних усилий.

4.4.1. Статический способ построения линий влияния

Этот способ наиболее удобен для построения *линий влияния опорных реакций*.

Расположим на трехшарнирной арке вертикальную подвижную силу $F = 1$ на расстоянии x от левой опоры (рис. 4.17).

1. Составим уравнение моментов всех сил относительно опорного шарнира B :

$$\sum M_B = V_A \cdot l - F \cdot (l - x) = 0. \quad (4.33)$$

Из уравнения (4.33) найдем функциональную зависимость для V_A :

$$V_A = \frac{F \cdot (l - x)}{l} = \frac{(l - x)}{l}. \quad (4.34)$$

Так как зависимость линейная, то достаточно двух точек для построения линии:

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow V_A = 1, \\ x = l &\rightarrow V_A = 0. \end{aligned}$$

Итак, на левой опорной вертикали откладываем 1 (F находится в опоре A), а на правой опорной вертикали — нуль (F находится в опоре B). Полученные точки соединяем прямой линией. Полученное очертание есть линия влияния опорной реакции V_A (рис. 4.17, a).

2. Составим уравнения моментов всех сил относительно опорного шарнира A :

$$\sum M_A = -V_B \cdot l + F \cdot x = 0. \quad (4.35)$$

Из уравнения (4.35) найдем функциональную зависимость для V_B :

$$V_B = \frac{F \cdot x}{l} = \frac{x}{l}. \quad (4.36)$$

Так как зависимость линейная, то достаточно двух точек для построения линии:

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow V_B = 0, \\ x = l &\rightarrow V_B = 1. \end{aligned}$$

Итак, на левой опорной вертикали откладываем нуль (F находится в опоре A), а на правой опорной вертикали — 1 (F находится в опоре B). Полученные точки соединяем прямой линией. Полученное очертание есть линия влияния опорной реакции V_B (рис. 4.17, б).

Исходя из зависимостей (4.34) и (4.36) можно сделать вывод, что линии влияния V_A и V_B ничем не отличаются от линий влияния опорных реакций простой балки на двух опорах. Выражения V_A и V_B совпадают с выражениями опорных реакций для простой балки.

3. Распор H определяется уравнением $H = \frac{M_C^0}{f}$, из которого следует, что линия влияния H имеет такой же вид, как и линия влияния балочного момента M_C^0 , и отличается от нее лишь постоянным множителем $1/f$ (рис. 4.17, в) в частном случае, когда $l_1 = l_2 = l/2$, ее ордината под шарниром C равна $l/(4f)$.

Для получения функциональных зависимостей линии влияния H составим уравнения:

— при расположении силы F справа от сечения рассмотрим равновесие левой части:

$$\sum M_C^{\text{сп}} = 0, V_A \cdot l_1 - H \cdot f = 0; \quad (4.37)$$

— при расположении силы F слева от сечения рассмотрим равновесие правой части:

$$\sum M_C^{\text{спр}} = 0, -V_B \cdot l_2 + H \cdot f = 0. \quad (4.38)$$

Выразив H из формул (4.37) и (4.38), получим функциональные зависимости для H :

$$H = \frac{V_A \cdot l_1}{f}; \quad (4.39)$$

$$H = \frac{V_B \cdot l_2}{f} = \frac{x \cdot l_2}{l \cdot f}. \quad (4.40)$$

Данные зависимости также линейные, поэтому для каждой из них достаточно двух точек:

– при расположении силы F слева от сечения

$$x = 0 \rightarrow \underline{H} = 0,$$

$$x = l_1 \rightarrow \frac{l_1 \cdot l_2}{l \cdot f};$$

– при расположении силы F справа от сечения

$$x = l \rightarrow \frac{l_1 \cdot l_2}{l \cdot f},$$

$$x = l \rightarrow H = 0.$$

По полученным значениям строят линию влияния распора H (рис. 4.17, в).

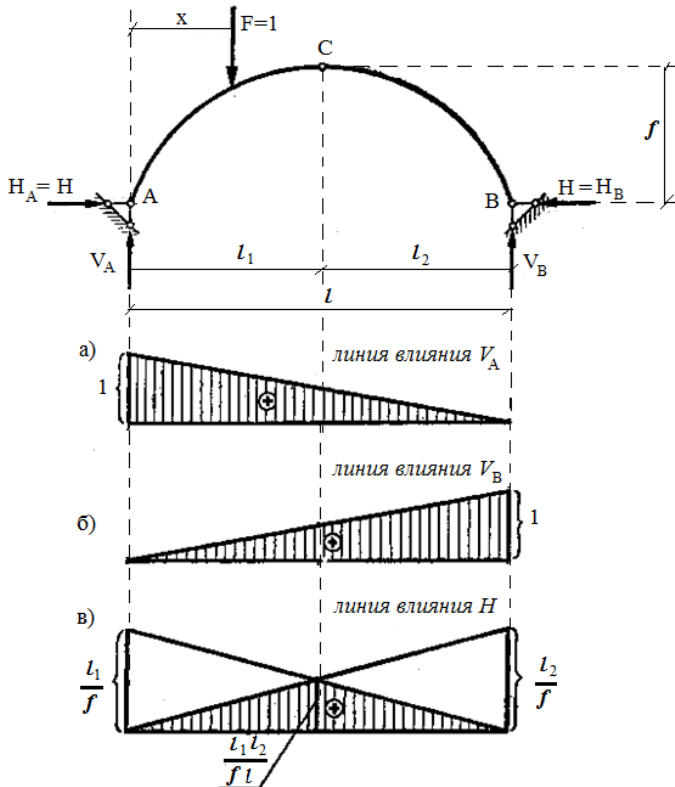


Рис. 4.17

4.4.2. Графический способ построения линий влияния

Графическим способом лучше всего строить линии влияния внутренних усилий. Этот способ еще называют способом *нулевых точек*.

Рассмотрим предварительно способы отыскания таких положений вертикального груза F на арке, при которых в исследуемом сечении k момент или поперечная сила, или продольная сила равны нулю, т. е. рассмотрим способы отыскания положений точек, которым соответствуют нулевые ординаты линий влияния M_k , Q_k и N_k . Такие точки называются нулевыми точками. К точкам, для которых ординаты линий влияния M_k , Q_k и N_k равны нулю, относятся, в частности, опорные шарниры арки A и B . Кроме них имеются и другие нулевые точки.

Так, при положении груза F в точке O_M арки (рис. 4.18) изгибающий момент в сечении k равен нулю, так как в этом случае равнодействующая левых сил (опорная реакция R_A) проходит через сечение k , а равнодействующая правых сил — через шарниры B и C (условие равенства нулю момента в шарнире). Точка O_M определяет положение нулевой точки для изгибающего момента в сечении k . Точка O_M лежит на одной вертикали с точкой пересечения прямых Ak и BC .

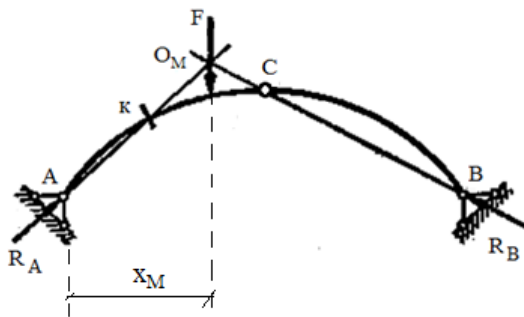


Рис. 4.18

Обозначим через x_M абсциссу нулевой точки для изгибающего момента в сечении k , т. е. точки O_M (рис. 4.18).

Из геометрических соображений, определяя данную абсциссу, получим следующее выражение:

$$x_M = \frac{l \cdot f \cdot x_k}{y_k \cdot l_2 + f \cdot x_k}. \quad (4.41)$$

Полученная формула (4.41) дает возможность аналитически найти абсциссу x_M нулевой точки линии влияния изгибающего момента M_k .

Чтобы определить нулевую точку линии влияния поперечной силы Q_k (рис. 4.19), проводим из левого опорного шарнира A прямую, параллельную касательной к оси арки в сечении k , до пересечения в точке O_Q с направлением BC . Если груз F приложить теперь в точке, лежащей на одной вертикали с точкой O_Q , то Q_k обратится в нуль, потому что слева от сечения k будет действовать одна лишь опорная реакция R_A , параллельная оси арки в точке k . Равнодействующая правых сил будет проходить через шарниры B и C (условие равенства нулю момента в шарнире). Точка O_Q определяет положение нулевой точки для поперечной силы в сечении k . Точка O_Q может располагаться над аркой, на самой арке или под аркой.

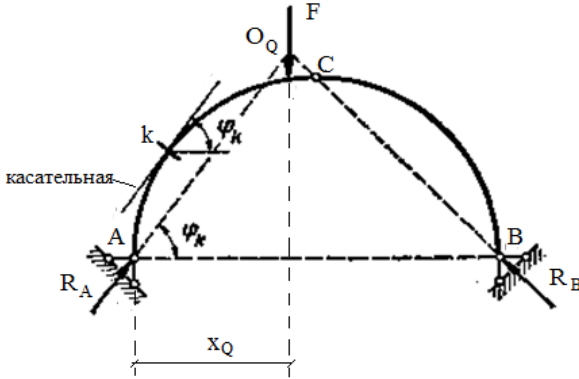


Рис. 4.19

Обозначим через x_Q абсциссу нулевой точки для поперечной силы в сечении k , т. е. точки O_Q (рис. 4.19). Из геометрических соображений, определяя данную абсциссу, получим следующее выражение:

$$x_Q = \frac{f \cdot l}{l_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_k + f}. \quad (4.42)$$

Полученная формула позволяет аналитически определять абсциссу нулевой точки линии влияния поперечной силы Q_k .

Продольная сила в сечении k равна нулю при грузе F , расположенном на мнимой консоли в точке O_N (рис. 4.20). Положение точки O_N определяется пересечением направления, перпендикулярного касательной к оси балки, проходящего через опорный шарнир A , с направлением BC . Если груз F приложить теперь в точке, лежащей на одной вертикали с точкой O_N , то N_k обратится в нуль, потому что слева от сечения k будет действовать одна лишь опорная реакция R_A , перпендикулярная оси арки в точке k . Равнодействующая правых сил будет проходить через шарниры B и C (условие равенства нулю момента в шарнире). Точка O_N определяет положение нулевой точки для продольной силы в сечении k . Точка O_N может располагаться над аркой (над опорой) или за аркой (на мнимой консоли).

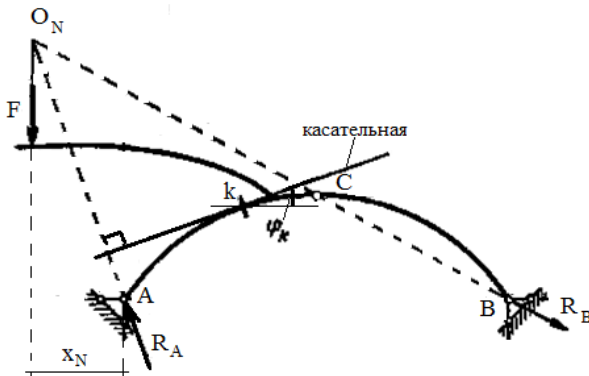


Рис. 4.20

Обозначим через x_N абсциссу нулевой точки для продольной силы в сечении k , т. е. точки O_N (рис. 4.20). Из геометрических соображений, определяя данную абсциссу, получим следующее выражение:

$$x_N = \frac{f \cdot l}{l_2 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_k - f}. \quad (4.43)$$

Последняя формула аналитически определяет абсциссу нулевой точки линии влияния продольной силы N_k .

Если абсцисса, подсчитанная по формулам (4.41)–(4.43), получается отрицательной, то это означает, что нулевая точка рассматриваемой линии влияния расположена левее опоры A (для N – правее).

Линии влияния внутренних усилий могут быть построены графическим суммированием соответствующих составляющих линий влияния (формулы (4.29)–(4.31)). Если при построении линий влияния M_k , Q_k и N_k заранее определить нулевые точки, то можно не производить графического суммирования составляющих линий влияния, а строить их сразу, с ординатами, отложенными от оси абсцисс. Такой прием построения линий влияния носит название способа нулевой точки.

Алгоритм построения линии влияния M_k способом нулевой точки

Для построения линии влияния выполним следующие действия (рис. 4.21):

- 1) на нулевую линию снести точки A, B, C, k, O_M ;
- 2) на левой опорной вертикали (если сечение k принадлежит левой половине арки, т. е. слева от шарнира C) отложить вверх от нулевой линии, от точки A , абсциссу сечения k , т. е. отрезок x_k , получим точку A_1 ;
- 3) соединить вершину A_1 опорной ординаты x_k с нулевой точкой O_M на оси абсцисс (нулевая линия);
- 4) на полученную прямую A_1O_M спроецировать (снести по вертикали) точки k и C , получим соответственно k_1 и C_1 ; k_1C_1 – первая правая прямая;
- 5) соединить точку k_1 с «нулем» на левой опоре, т. е. с точкой A ; Ak_1 – первая левая прямая;
- 6) соединить точку C_1 с «нулем» на правой опоре, т. е. с точкой B ; C_1B – вторая правая прямая.

Полученное очертание есть линия влияния M_k .

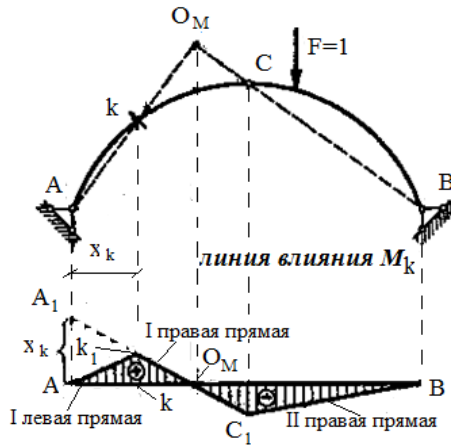


Рис. 4.21

Алгоритм построения линии влияния Q_k способом нулевой точки

Для построения линии влияния выполним следующие действия (рис. 4.22):

- 1) на нулевую линию снести точки A, B, C, k, O_0 ;
- 2) на левой опорной вертикали (если сечение k принадлежит левой половине арки, т. е. слева от шарнира C) отложить вверх от нулевой линии, от точки A , величину $\cos \varphi_k$, получим точку A_1 (если сечение k расположено справа от шарнира C , то $\cos \varphi_k$ откладывается вниз от точки B);
- 3) соединить вершину A_1 опорной ординаты с нулевой точкой O_0 на оси абсцисс (нулевая линия);
- 4) на полученную прямую A_1O_0 спроецировать (снести по вертикали) точки k и C , получим соответственно k_1 и C_1 ; k_1C_1 – первая правая прямая;
- 5) параллельно перенести первую правую прямую k_1C_1 в нуль на левой опорной вертикали, т. е. в точку A ;
- 6) на полученную прямую снести точку k , получим k_2 ; Ak_2 – первая левая прямая;
- 7) соединить точку C_1 с «нулем» на правой опоре, т. е. с точкой B ; C_1B – вторая правая прямая;
- 8) полученные вершины k_1 и k_2 соединить передаточной прямой.

Полученное очертание есть линия влияния Q_k .

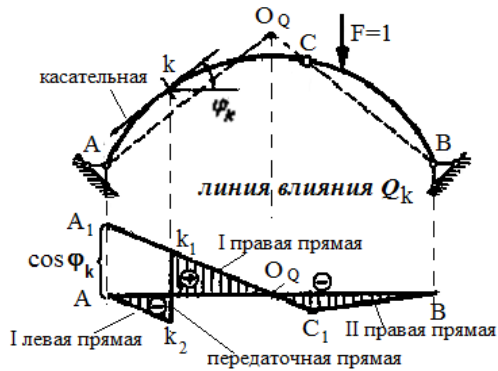


Рис. 4.22

Алгоритм построения линии влияния N_k способом нулевой точки

Для построения линии влияния выполним следующие действия (рис. 4.23):

- 1) на нулевую линию снести точки A, B, C, k, O_N ;
- 2) на левой опорной вертикали (если сечение k принадлежит левой половине арки, т. е. слева от шарнира C) отложить вниз от нулевой линии, от точки A , величину $\sin \varphi_k$, получим точку A_1 (если сечение k расположено справа от шарнира C , то $\sin \varphi_k$ откладывается вниз от точки B);
- 3) соединить вершину A_1 опорной ординаты с нулевой точкой O_N на оси абсцисс (нулевая линия);
- 4) на полученную прямую A_1O_N спроецировать (снести по вертикали) точки k и C , получим соответственно k_1 и C_1 ; k_1C_1 – первая правая прямая;
- 5) параллельно перенести первую правую прямую k_1C_1 в нуль на левой опорной вертикали, т. е. в точку A ;
- 6) на полученную прямую снести точку k , получим k_2 ; Ak_2 – первая левая прямая;
- 7) соединить точку C_1 с «нулем» на правой опоре, т. е. с точкой B ; C_1B – вторая правая прямая;
- 8) полученные вершины k_1 и k_2 соединить передаточной прямой.

Полученное очертание есть линия влияния N_k .

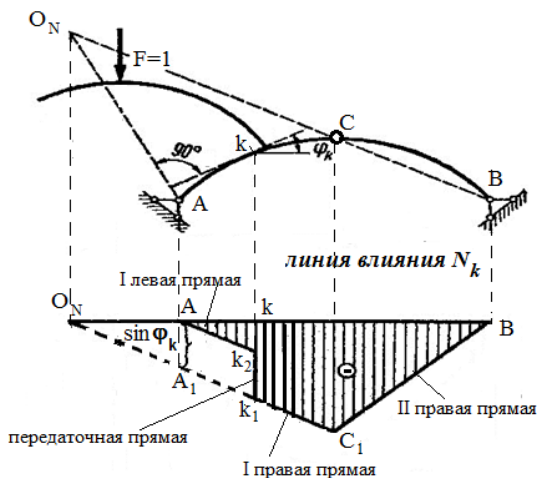


Рис. 4.23

4.5. Определение усилий по линиям влияния

Усилия по линиям влияния определяются в арке так же, как и в балке.

Если на арку одновременно действуют несколько сосредоточенных грузов, несколько равномерно распределенных нагрузок и несколько сосредоточенных моментов, то искомое усилие будет равно алгебраической сумме усилий, подсчитанных от каждого вида нагрузок (формулы (2.22)–(2.24)):

$$V = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(V)} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(V)} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(V)};$$

$$M = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(M)} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(M)} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(M)};$$

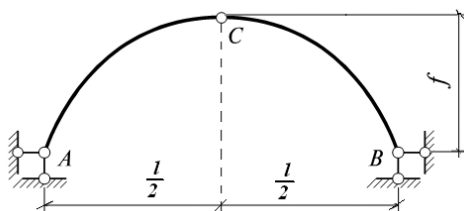
$$Q = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{i(Q)} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{i(Q)} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i(Q)}.$$

4.6. Порядок расчета трехшарнирной арки на подвижную и неподвижную нагрузку

1. Вычертить арку в масштабе. Для этого по заданной форме очертания арки просчитать не менее 20 точек (не включая характерные точки).
2. Загрузить арку постоянной внешней нагрузкой.
3. Определить опорные реакции арки аналитически.
4. Определить опорные реакции арки графически. Построить силовой многоугольник.
5. Построить эпюру балочной поперечной силы Q^0 .
6. Построить эпюру балочного изгибающего момента M^0 .
7. Определить внутренние усилия в арке аналитически. Вычисления провести в табличной форме.
8. По полученным результатам вычислений внутренних усилий (таблица) построить эпюры внутренних усилий M , Q , N .
9. Определить внутренние усилия в заданном сечении арки графически. Построить многоугольник давления.
10. Построить в арке линии влияния опорных реакций статическим способом.
11. Построить в арке линии влияния внутренних усилий аналитическим способом.
12. Построить в арке линии влияния внутренних усилий способом нулевых точек.
13. Определить опорные реакции и внутренние усилия в арке по линиям влияния.
14. Сравнить результаты аналитического и графического расчетов с результатами вычислений по линиям влияния. Сделать вывод.

4.7. Пример расчета трехшарнирной арки на подвижную и неподвижную нагрузки

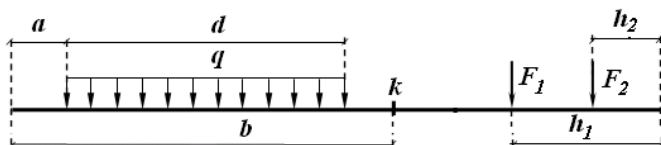
Рассчитать заданную трехшарнирную арку (определить внутренние усилия) на действие неподвижной (постоянной) и подвижной (временной) нагрузок.



Очертание оси арки принять по формуле

$$y = \frac{4f}{l^2} \cdot x \cdot (l - x).$$

Схема нагружения арки имеет вид



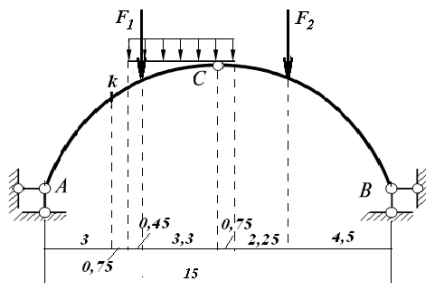
Исходные данные:

l , м	f , м	a , м	b , м	d , м	h_1 , м	h_2 , м	F_1 , кН	F_2 , кН	q , кН/м
15	5,25	3,75	3	4,5	10,8	4,5	62	66	16

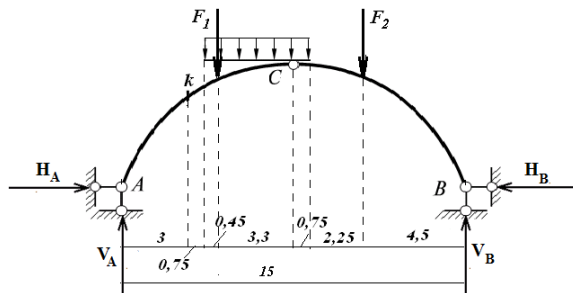
1. Вычертим арку в масштабе. Для этого по заданной форме очертания арки просчитаем не менее 20 точек с шагом $n = 0,7$ м, а также просчитаем значения ординат для характерных точек, к которым относятся точки приложения сил, точки начала и конца равномерно распределенной нагрузки, центральный шарнир C и опорные шарниры. Для этого выбранные значения x подставим в формулу и определим величины ординат y . Вычисления приведем в табличной форме.

	т. А					т. k	$q_{\text{нач}}$		F_1
x	0	0,7	1,4	2,1	2,8	3	3,5	3,75	4,2
y	0	0,934	1,777	2,528	3,188	3,36	3,757	3,938	4,234
						т. C	$q_{\text{кон}}$		
x	4,9	5,6	6,3	7	7,5	8	8,25	8,7	9,4
y	4,619	4,913	5,116	5,227	5,25	5,227	5,198	5,116	4,913
		F_2							т. B
x	10,1	10,5	10,8	11,5	12,2	12,9	13,6	14,3	15
y	4,619	4,41	4,234	3,757	3,188	2,528	1,777	0,934	0

2. По полученным результатам построим арку в масштабе и приложим к ней заданную внешнюю нагрузку.



3. Определим опорные реакции в арке аналитически, используя формулы (4.5)–(4.10), кН:



$$\Sigma M_A = 0, -V_B \cdot 15 + F_2 \cdot 10,5 + q \cdot 4,5 \cdot 6 + F_1 \cdot 4,2 = 0$$

$$V_B = \frac{F_2 \cdot 10,5 + q \cdot 4,5 \cdot 6 + F_1 \cdot 4,2}{15} =$$

$$= \frac{66 \cdot 10,5 + 16 \cdot 4,5 \cdot 6 + 62 \cdot 4,2}{15} = 92,36;$$

$$\Sigma M_B = 0, -V_A \cdot 15 - F_2 \cdot 4,5 - q \cdot 4,5 \cdot 9 - F_1 \cdot 10,8 = 0$$

$$V_A = \frac{F_2 \cdot 4,5 + q \cdot 4,5 \cdot 9 + F_1 \cdot 10,8}{15} =$$

$$= \frac{66 \cdot 4,5 + 16 \cdot 4,5 \cdot 9 + 62 \cdot 10,8}{15} = 107,64;$$

$$\Sigma M_C^{cl} = 0, V_A \cdot 7,5 - H_A \cdot 5,25 - q \cdot 3,75 \cdot 1,875 - F_1 \cdot 3,3 = 0$$

$$H_A = \frac{V_A \cdot 7,5 - q \cdot 3,75 \cdot 1,875 - F_1 \cdot 3,3}{5,25} =$$

$$= \frac{107,64 \cdot 7,5 - 16 \cdot 3,75 \cdot 1,875 - 62 \cdot 3,3}{5,25} = 93,371;$$

$$\Sigma M_C^{cnp} = 0, -V_B \cdot 7,5 + H_B \cdot 5,25 + q \cdot 0,75 \cdot 0,375 + F_2 \cdot 3 = 0;$$

$$H_B = \frac{V_B \cdot 7,5 - q \cdot 0,75 \cdot 0,375 - F_2 \cdot 3}{5,25} =$$

$$= \frac{92,36 \cdot 7,5 - 16 \cdot 0,75 \cdot 0,375 - 66 \cdot 3}{5,25} = 93,371.$$

Выполним проверку найденных реакций:

$$\Sigma X = 0, H_A - H_B = 0; \quad 93,371 - 93,371 = 0, \quad 0 = 0$$

$$\Sigma Y = 0, V_A + V_B - F_1 - F_2 - q \cdot 4,5 = 0,$$

$$107,64 + 92,36 - 62 - 66 - 16 \cdot 4,5 = 0, \quad 0 = 0$$

Следовательно, реакции найдены верно.

4. Определим опорные реакции в арке графически (рис. 4.24). Для этого сначала определим величины и положения равнодействующих R_1 и R_2 левой и правой полуарок.

Для определения величин равнодействующих достаточно просуммировать все силы, расположенные слева или справа от шарнира С:

$$R_1 = \Sigma F_{\text{слева}} = F_1 + q \cdot 3,75 = 62 + 16 \cdot 3,75 = 122 \text{ кН};$$

$$R_2 = \Sigma F_{\text{справа}} = F_2 + q \cdot 0,75 = 66 + 16 \cdot 0,75 = 78 \text{ кН}.$$

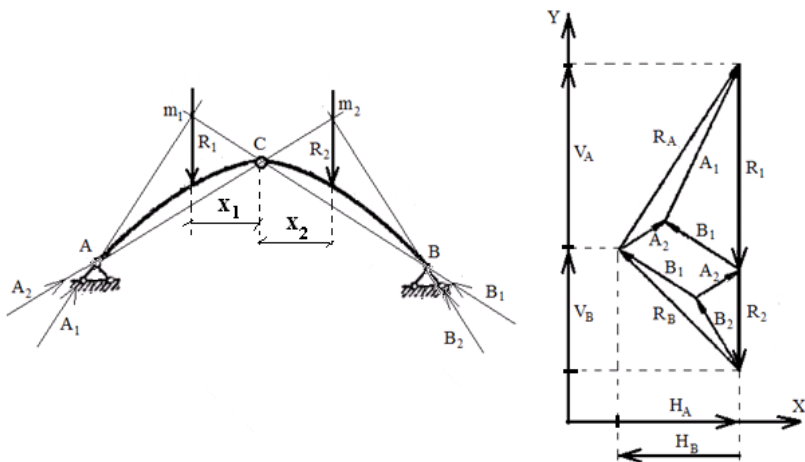


Рис. 4.24

Для определения положения левой равнодействующей на арке составим уравнения равновесия для левой полуарки сначала с заданной внешней нагрузкой, а потом заменим всю заданную внешнюю нагрузку в уравнении равнодействующей левых сил R_1 :

$$\Sigma M_C^{сл} = 0, V_A \cdot 7,5 - H_A \cdot 5,25 - q \cdot 3,75 \cdot 1,875 - F_1 \cdot 3,3 = 0;$$

$$\Sigma M_C^{сп} = 0, V_A \cdot 7,5 - H_A \cdot 5,25 - R_1 \cdot x_1 = 0.$$

Приравняем левые части полученных уравнений.

$$V_A \cdot 7,5 - H_A \cdot 5,25 - q \cdot 3,75 \cdot 1,875 - F_1 \cdot 3,3 =$$

$$= V_A \cdot 7,5 - H_A \cdot 5,25 - R_1 \cdot x_1;$$

$$-q \cdot 3,75 \cdot 1,875 - F_1 \cdot 3,3 = -R_1 \cdot x_1;$$

$$x_1 = \frac{q \cdot 3,75 \cdot 1,875 + F_1 \cdot 3,3}{R_1} = \frac{16 \cdot 3,75 \cdot 1,875 + 62 \cdot 3,3}{122} = 2,599 \text{ м.}$$

Для определения положения правой равнодействующей на арке составим уравнения равновесия для правой полуарки сначала с заданной внешней нагрузкой, а потом заменим всю заданную внешнюю нагрузку в уравнении равнодействующей правых сил R_2 :

$$\Sigma M_C^{сп} = 0, H_B \cdot 5,25 - V_B \cdot 7,5 + q \cdot 0,75 \cdot 0,375 + F_2 \cdot 3 = 0;$$

$$\Sigma M_C^{сл} = 0, H_B \cdot 5,25 - V_B \cdot 7,5 + R_2 \cdot x_2 = 0.$$

Приравняем левые части полученных уравнений.

$$H_B \cdot 5,25 - V_B \cdot 7,5 + q \cdot 0,75 \cdot 0,375 + F_2 \cdot 3 =$$

$$= H_B \cdot 5,25 - V_B \cdot 7,5 + R_2 \cdot x_2;$$

$$q \cdot 0,75 \cdot 0,375 + F_2 \cdot 3 = R_2 \cdot x_2;$$

$$x_2 = \frac{q \cdot 0,75 \cdot 0,375 + F_2 \cdot 3}{R_2} = \frac{16 \cdot 0,75 \cdot 0,375 + 66 \cdot 3}{78} = 2,596 \text{ м.}$$

Итак, мы получили положение равнодействующих сил относительно центрального шарнира C .

Графический расчет удобнее всего выполнять на миллиметровой бумаге. Вычерчиваем арку в масштабе. Прикладываем к арке равнодействующие левых и правых сил R_1 и R_2 . Далее действуем по алгоритму, приведенному в п. 4.2.2.

Опорные реакции определяют сначала отдельно от действия силы R_1 и от действия силы R_2 на основании принципа независимости действия сил, затем — уже от их совместного действия.

Найдем сначала опорные реакции от действия на арку равнодействующей силы R_1 . Для этого проводим линию BC до пересечения с силой R_1 , после чего полученную точку пересечения m_1 соединяем с опорным шарниром A . Таким образом на левой опоре арки возникает реакция A_1 , проходящая через точку m_1 и опорный шарнир A , а на правой опоре арки возникает реакция B_1 , проходящая через точку m_1 , центральный шарнир C и опорный шарнир B .

Теперь найдем опорные реакции от действия на арку равнодействующей силы R_2 . Для этого проводим линию AC до пересечения с силой R_2 , после чего полученную точку пересечения m_2 соединяем с опорным шарниром B . Таким образом на левой опоре арки возникает реакция A_2 , проходящая через точку m_2 , центральный шарнир C и опорный шарнир A , а на правой опоре арки возникает реакция B_2 , проходящая через точку m_2 и опорный шарнир B .

Вся арка в целом находится в равновесии под действием трех сил: A_2 , B_2 , R_2 .

Затем построением силового многоугольника для трех сил — R_1 , A_1 и B_1 — найдем величины опорных реакций A_1 и B_1 . Построив силовой многоугольник для трех сил R_2 , A_2 и B_2 , найдем величины опорных реакций A_2 и B_2 . Для построения силового многоугольника зададим-

ся силовым масштабом $1_d = 40$ кН (масштаб можно выбирать произвольно, но чем он крупнее, тем точнее получаются результаты).

На основании принципа независимости действия сил, сложив геометрически найденные силы A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , получим полные реакции R_A и R_B , возникающие на опорах A и B трехшарнирной арки от действия сил R_1 и R_2 одновременно:

$$\overline{R_A} = \overline{A_1} + \overline{A_2}$$

$$\overline{R_B} = \overline{B_1} + \overline{B_2}.$$

Для этого параллельно перенесем A_2 в начало A_1 , а B_1 параллельно перенесем в конец B_2 . Сложив полученные A_2 и A_1 по правилу сложения векторов, найдем величину полной реакции R_A левой опоры; аналогично производится определение полной реакции R_B правой опоры. Для получения вертикальных и горизонтальных составляющих полных реакций R_A и R_B спроецируем полученные реакции на оси Y и X соответственно.

Измеряя полученные отрезки R_A , R_B , V_A , V_B , H_A и H_B на силовом многоугольнике, с учетом масштаба сил получим следующие результаты, кН:

$$V_A = 2,69 \cdot 40 = 107,6;$$

$$V_B = 2,31 \cdot 40 = 92,4;$$

$$H_A = 2,33 \cdot 40 = 93,2;$$

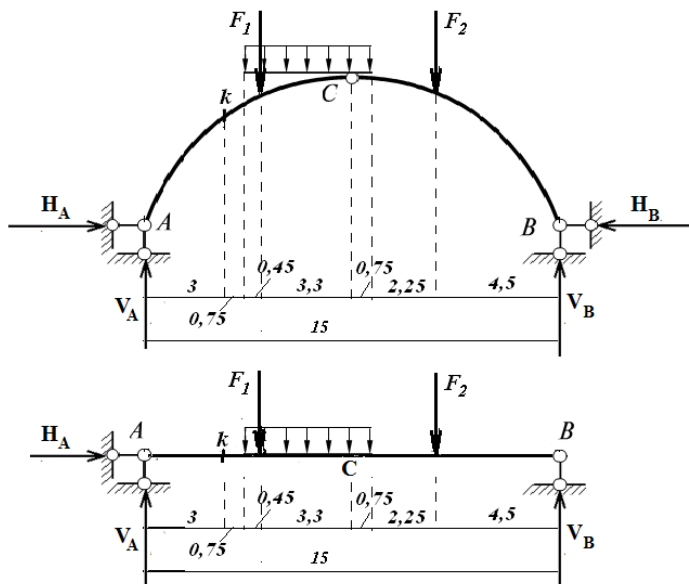
$$H_B = 2,33 \cdot 40 = 93,2;$$

$$R_A = 3,56 \cdot 40 = 142,4;$$

$$R_B = 3,28 \cdot 40 = 131,2.$$

5. При определении внутренних усилий в сечениях арки аналитическим способом необходимо сначала рассчитать и построить эпюру балочной поперечной силы и эпюру балочного изгибающего момента. Для этого вычертим балку того же пролета, что и арка, с той же нагрузкой. После этого построим эпюры в однопролетной статически определимой балке по общим правилам построения эпюр.

Вычислим значения поперечных сил и изгибающих моментов во всех расчетных и характерных точках.



Определяем поперечные силы, кН:

$$Q_{0,7} = V_A = 107,64;$$

$$Q_{1,4} = V_A = 107,64;$$

$$Q_{2,1} = V_A = 107,64;$$

$$Q_{2,8} = V_A = 107,64;$$

$$Q_3 = V_A = 107,64;$$

$$Q_{3,5} = V_A = 107,64;$$

$$Q_{3,75} = V_A = 107,64;$$

$$Q_{4,2}^{\text{лев}} = V_A - q \cdot 0,45 = 107,64 - 16 \cdot 0,45 = 100,44;$$

$$Q_{4,2}^{\text{пр}} = V_A - q \cdot 0,45 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 0,45 - 62 = 38,44;$$

$$Q_{4,9} = V_A - q \cdot 1,15 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 1,15 - 62 = 27,24;$$

$$Q_{5,6} = V_A - q \cdot 1,85 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 1,85 - 62 = 16,04;$$

$$Q_{6,3} = V_A - q \cdot 2,55 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 2,55 - 62 = 4,84;$$

$$Q_{7,0} = V_A - q \cdot 3,25 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 3,25 - 62 = -6,36;$$

$$Q_{7,5} = V_A - q \cdot 3,75 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 3,75 - 62 = -14,36;$$

$$\begin{aligned}
Q_8 &= V_A - q \cdot 4,25 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 4,25 - 62 = -22,36; \\
Q_{8,25} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 = -26,36; \\
Q_{8,7} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 = -26,36; \\
Q_{9,4} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 = -26,36; \\
Q_{10,1} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 = -26,36; \\
Q_{10,5}^{\text{неб}} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 = -26,36; \\
Q_{10,5}^{\text{нп}} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 - F_2 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 - 66 = -92,36; \\
Q_{10,8} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 - F_2 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 - 66 = -92,36; \\
Q_{11,5} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 - F_2 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 - 66 = -92,36; \\
Q_{12,2} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 - F_2 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 - 66 = -92,36; \\
Q_{12,9} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 - F_2 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 - 66 = -92,36; \\
Q_{13,6} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 - F_2 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 - 66 = -92,36; \\
Q_{14,3} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 - F_2 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 - 66 = -92,36; \\
Q_{15} &= V_A - q \cdot 4,5 - F_1 - F_2 = 107,64 - 16 \cdot 4,5 - 62 - 66 = -92,36.
\end{aligned}$$

Определяем изгибающие моменты, кНм:

$$\begin{aligned}
M_{0,7} &= V_A \cdot 0,7 = 107,64 \cdot 0,7 = 75,348; \\
M_{1,4} &= V_A \cdot 1,4 = 107,64 \cdot 1,4 = 150,696; \\
M_{2,1} &= V_A \cdot 2,1 = 107,64 \cdot 2,1 = 226,044; \\
M_{2,8} &= V_A \cdot 2,8 = 107,64 \cdot 2,8 = 301,392; \\
M_3 &= V_A \cdot 3 = 107,64 \cdot 3 = 322,92; \\
M_{3,5} &= V_A \cdot 3,5 = 107,64 \cdot 3,5 = 376,740; \\
M_{3,75} &= V_A \cdot 3,75 = 107,64 \cdot 3,75 = 403,650; \\
M_{4,2} &= V_A \cdot 4,2 - q \cdot 0,45 \cdot 0,225 = 107,64 \cdot 4,2 - \\
&\quad - 16 \cdot 0,45 \cdot 0,225 = 450,468; \\
M_{4,9} &= V_A \cdot 4,9 - q \cdot 1,15 \cdot 0,575 - F_1 \cdot 0,7 = \\
&= 107,64 \cdot 4,9 - 16 \cdot 1,15 \cdot 0,575 - 62 \cdot 0,7 = 488,604; \\
M_{5,6} &= V_A \cdot 5,6 - q \cdot 1,85 \cdot 0,925 - F_1 \cdot 1,4 = \\
&= 107,64 \cdot 5,6 - 16 \cdot 1,8 \cdot 0,925 - 62 \cdot 1,4 = 495,912;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{6,3} &= V_A \cdot 6,3 - q \cdot 2,55 \cdot 1,275 - F_1 \cdot 2,1 = \\
&= 107,64 \cdot 6,3 - 16 \cdot 2,55 \cdot 1,275 - 62 \cdot 2,1 = 496,644; \\
M_{7,0} &= V_A \cdot 7 - q \cdot 3,25 \cdot 1,625 - F_1 \cdot 2,8 = \\
&= 107,64 \cdot 7 - 16 \cdot 3,25 \cdot 1,625 - 62 \cdot 2,8 = 495,38; \\
M_{7,5} &= V_A \cdot 7,5 - q \cdot 3,75 \cdot 1,875 - F_1 \cdot 3,3 = \\
&= 107,64 \cdot 7,5 - 16 \cdot 3,75 \cdot 1,875 - 62 \cdot 3,3 = 490,2; \\
M_8 &= V_A \cdot 8 - q \cdot 4,25 \cdot 2,125 - F_1 \cdot 3,8 = 107,64 \cdot 8 - \\
&- 16 \cdot 4,25 \cdot 2,125 - 62 \cdot 3,8 = 481,02; \\
M_{8,25} &= V_A \cdot 8,25 - q \cdot 4,5 \cdot 2,25 - F_1 \cdot 4,05 = \\
&= 107,64 \cdot 8,25 - 16 \cdot 4,5 \cdot 2,25 - 62 \cdot 4,05 = 474,93; \\
M_{8,7} &= V_A \cdot 8,7 - q \cdot 4,5 \cdot 2,7 - F_1 \cdot 4,5 = \\
&= 107,64 \cdot 8,7 - 16 \cdot 4,5 \cdot 2,7 - 62 \cdot 4,5 = 463,068; \\
M_{9,4} &= V_A \cdot 9,4 - q \cdot 4,5 \cdot 3,4 - F_1 \cdot 5,2 = 107,64 \cdot 9,4 - \\
&- 16 \cdot 4,5 \cdot 3,4 - 62 \cdot 5,2 = 44,616; \\
M_{10,1} &= V_A \cdot 10,1 - q \cdot 4,5 \cdot 4,1 - F_1 \cdot 5,9 = \\
&= 107,64 \cdot 10,1 - 16 \cdot 4,5 \cdot 4,1 - 62 \cdot 5,9 = 426,164; \\
M_{10,5} &= V_A \cdot 10,5 - q \cdot 4,5 \cdot 4,5 - F_1 \cdot 6,3 = \\
&= 107,64 \cdot 10,5 - 16 \cdot 4,5 \cdot 4,5 - 62 \cdot 6,3 = 415,620; \\
M_{10,8} &= V_A \cdot 10,8 - q \cdot 4,5 \cdot 4,8 - F_1 \cdot 6,6 - F_2 \cdot 0,3 = \\
&= 107,64 \cdot 10,8 - 16 \cdot 4,5 \cdot 4,8 - 62 \cdot 6,6 - 66 \cdot 0,3 = 387,912; \\
M_{11,5} &= V_A \cdot 11,5 - q \cdot 4,5 \cdot 5,5 - F_1 \cdot 7,3 - F_2 \cdot 1 = \\
&= 107,64 \cdot 11,5 - 16 \cdot 4,5 \cdot 5,5 - 62 \cdot 7,3 - 66 \cdot 1 = 323,26; \\
M_{12,2} &= V_A \cdot 12,2 - q \cdot 4,5 \cdot 6,2 - F_1 \cdot 8 - F_2 \cdot 1,7 = \\
&= 107,64 \cdot 12,2 - 16 \cdot 4,5 \cdot 6,2 - 62 \cdot 8 - 66 \cdot 1,7 = 258,608; \\
M_{12,9} &= V_A \cdot 12,9 - q \cdot 4,5 \cdot 6,9 - F_1 \cdot 8,7 - F_2 \cdot 2,4 = \\
&= 107,64 \cdot 12,9 - 16 \cdot 4,5 \cdot 6,9 - 62 \cdot 8,7 - 66 \cdot 2,4 = 193,956; \\
M_{13,6} &= V_A \cdot 13,6 - q \cdot 4,5 \cdot 7,6 - F_1 \cdot 9,4 - F_2 \cdot 3,1 = \\
&= 107,64 \cdot 13,6 - 16 \cdot 4,5 \cdot 7,6 - 62 \cdot 9,4 - 66 \cdot 3,1 = 129,304;
\end{aligned}$$

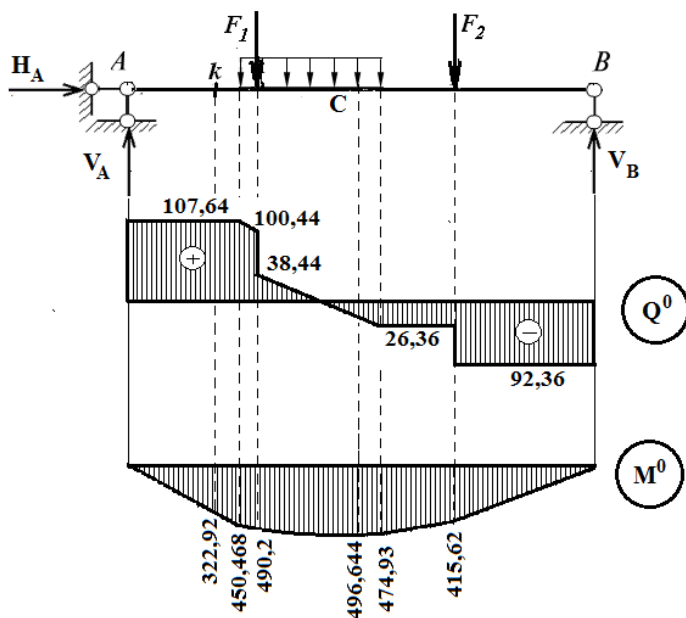
$$M_{14,3} = V_A \cdot 14,3 - q \cdot 4,5 \cdot 8,3 - F_1 \cdot 10,1 - F_2 \cdot 3,8 =$$

$$= 107,64 \cdot 14,3 - 16 \cdot 4,5 \cdot 8,3 - 62 \cdot 10,1 - 66 \cdot 3,8 = 64,652;$$

$$M_{15} = V_A \cdot 15 - q \cdot 4,5 \cdot 9 - F_1 \cdot 10,8 - F_2 \cdot 4,5 =$$

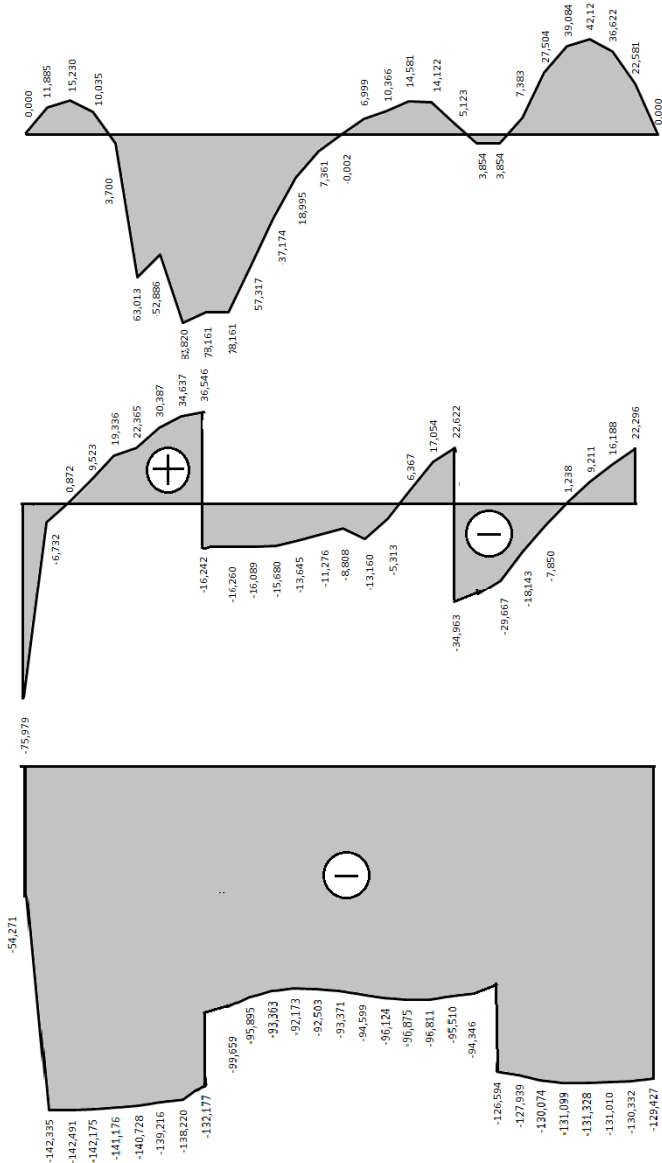
$$= 107,64 \cdot 15 - 16 \cdot 4,5 \cdot 9 - 62 \cdot 10,8 - 66 \cdot 4,5 = 0.$$

По полученным результатам построим соответствующие эпюры.



6. Дальнейшие вычисления внутренних усилий в сечениях арки будем производить в табличной форме (табл. 4), используя для этого формулы (4.29)–(4.31).

По полученным табличным результатам построим эпюры внутренних усилий M_k , Q_k , N_k в арке.



M

Q

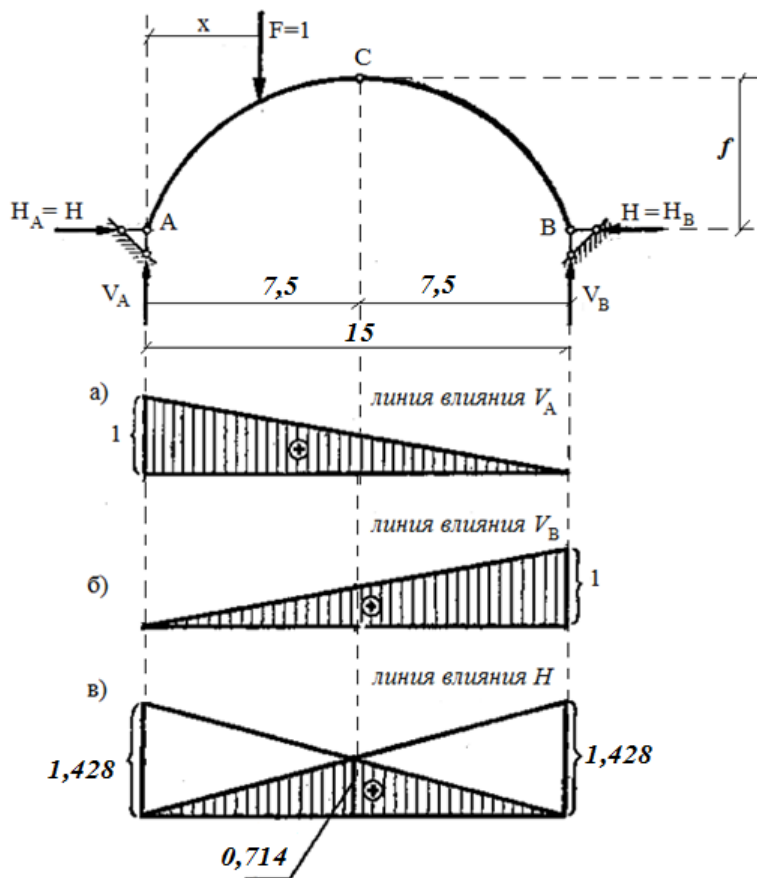
N

Таблица 4

Определение внутренних усилий

елись	x _h	y _h	M _h ⁰	Q _h ⁰	tg φ _h	φ _h	радиан	градус	φ _h	sin φ _h	cos φ _h	H sin φ _h	H cos φ _h	QK ⁰ sin φ _h	QK ⁰ cos φ _h	H y _h	M _h	Q _h	N _h
А	0,000	0,000	0,000	0,000	1,400	0,951	54,462	0,814	0,581	0,619	75,979	54,271	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-75,979	-54,271
	0,700	0,934	75,348	107,640	1,269	0,904	51,768	0,786	0,619	0,734	70,344	57,782	84,353	66,612	87,233	-11,885	11,209	-142,335	-142,335
	1,400	1,777	150,696	107,640	1,139	0,850	48,710	0,751	0,660	0,619	70,137	61,613	80,878	71,029	165,926	-15,230	10,721	-142,491	-142,491
К	2,100	2,528	22,604	107,640	1,008	0,789	45,228	0,710	0,704	0,660	66,286	65,760	76,416	75,809	236,079	-10,035	10,130	-142,175	-142,175
	2,800	3,188	301,392	107,640	0,877	0,720	41,262	0,659	0,752	0,619	70,188	70,988	80,914	80,914	297,692	3,700	9,410	-141,176	-141,176
	3,000	3,360	376,740	107,640	0,840	0,699	40,030	0,643	0,766	0,605	71,495	69,233	82,420	82,420	313,727	63,013	9,178	-140,728	-140,728
G _h	3,500	3,757	403,650	107,640	0,747	0,641	36,747	0,598	0,801	0,585	85,863	74,816	64,400	86,250	350,764	52,886	8,537	-139,216	-139,216
	3,750	3,938	450,468	107,640	0,700	0,611	34,992	0,573	0,819	0,545	83,545	76,493	61,727	88,182	367,648	82,820	8,183	-138,220	-138,220
	4,200	4,234	473,456	38,400	0,616	0,552	31,633	0,524	0,851	0,487	84,971	79,498	52,679	85,517	395,295	78,161	3,708	-132,177	-132,177
F ₁	4,200	4,234	473,456	38,400	0,616	0,552	31,633	0,524	0,851	0,487	84,971	79,498	20,140	32,695	395,295	78,161	-28,831	-99,638	-99,638
	4,900	4,619	488,604	27,242	0,485	0,452	25,889	0,437	0,900	0,407	84,768	84,001	11,895	24,508	431,287	57,317	-28,874	-93,363	-93,363
	5,600	4,913	495,912	16,045	0,355	0,341	19,528	0,334	0,942	0,312	88,000	88,000	5,363	15,122	458,738	37,174	-25,847	-92,173	-92,173
С	6,300	5,116	496,644	4,847	0,224	0,220	12,626	0,219	0,976	0,204	91,113	1,059	4,730	477,649	488,019	18,995	-19,350	-92,173	-92,173
	7,000	5,227	495,380	-4,990	0,093	0,093	5,332	0,093	0,996	8,677	92,967	-0,464	-4,968	488,019	488,019	7,361	-9,141	-92,503	-92,503
	7,500	5,250	490,200	-11,276	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	93,371	0,000	-11,276	490,198	490,198	0,002	0,000	-93,371	-93,371
φ _h	8,000	5,227	481,020	-17,561	-0,093	-0,093	-5,332	-0,093	0,996	-8,677	92,967	1,632	-17,485	488,019	-6,999	-6,999	10,309	-94,599	-94,599
	8,250	5,198	474,930	-26,360	-0,140	-0,139	-7,970	-0,139	0,990	-12,946	92,469	3,655	-26,105	485,296	-10,366	-10,366	16,600	-96,124	-96,124
	8,700	5,116	463,068	-26,360	-0,224	-0,220	-12,626	-0,219	0,976	-20,409	91,113	5,762	-25,723	477,649	-14,581	-14,581	26,171	-96,875	-96,875
F ₂	9,400	4,913	444,616	-26,360	-0,355	-0,341	-19,528	-0,334	0,942	-31,211	88,000	8,811	-24,844	458,738	-14,122	-14,122	40,022	-96,811	-96,811
	10,100	4,619	426,164	-26,360	-0,485	-0,452	-25,889	-0,437	0,900	-40,768	84,001	11,509	-23,715	431,287	-5,123	-5,123	52,278	-95,510	-95,510
	10,500	4,410	415,620	-26,360	-0,560	-0,510	-29,249	-0,489	0,873	-45,621	81,467	12,880	-22,999	411,766	-3,854	-3,854	58,501	-94,346	-94,346
В	10,500	4,410	415,620	-92,360	-0,560	-0,510	-29,249	-0,489	0,873	-45,621	81,467	45,127	-80,585	411,766	3,854	3,854	90,749	-126,594	-126,594
	10,800	4,234	387,912	-92,360	-0,616	-0,552	-31,633	-0,524	0,851	-48,971	79,498	48,441	-78,638	395,295	-7,383	-7,383	97,412	-130,974	-130,974
	11,500	3,757	323,260	-92,360	-0,747	-0,641	-36,747	-0,598	0,801	-55,863	74,816	55,258	-74,006	350,764	-27,504	-27,504	111,121	-130,074	-130,074
В	12,900	3,188	258,608	-92,360	-0,877	-0,720	-41,262	-0,659	0,752	-61,578	70,188	60,911	-69,428	297,692	-39,084	-39,084	122,489	-131,099	-131,099
	12,900	2,528	193,956	-92,360	-1,008	-0,789	-45,228	-0,710	0,704	-66,286	65,760	65,568	-65,048	236,079	-42,123	-42,123	131,854	-131,328	-131,328
	13,600	1,777	129,304	-92,360	-1,139	-0,850	-48,710	-0,751	0,660	-70,137	61,613	69,397	-60,946	165,926	-36,622	-36,622	139,554	-131,010	-131,010
В	14,300	0,934	64,652	-92,360	-1,269	-0,904	-51,768	-0,786	0,619	-73,344	57,782	72,550	-57,156	87,233	-22,581	-22,581	145,895	-130,332	-130,332
	15,000	0,000	0,000	-92,360	-1,400	-0,951	-54,462	-0,814	0,581	-75,979	54,271	75,156	-53,683	0,000	0,000	0,000	151,136	-129,427	-129,427

7. Линии влияния опорных реакций в арке будут совпадать с линиями влияния, приведенными в п. 4.2.2. Поэтому вычислим только ординаты на линиях влияния.



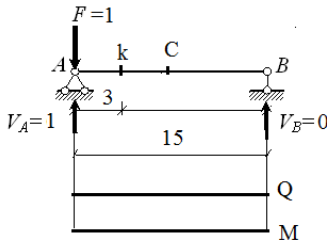
8. Построим линии влияния внутренних усилий в арке аналитическим способом, при этом воспользуемся формулами (4.29)–(4.31). Рассмотрим различные схемы загрузки однопролетной балки того же пролета, что и арка, подвижным единичным грузом. Определим значения на линиях влияния внутренних усилий в характерных точках и по ним построим соответствующие линии влияния.

Исходные данные:

$$x_k = 3 \text{ м}, y_k = 3,36 \text{ м}, \cos \varphi_k = 0,766, \sin \varphi_k = 0,643, f = 5,25 \text{ м}, l = 15 \text{ м}.$$

Рассмотрим 4 варианта расположения груза $F = 1$:

а) груз $F = 1$ находится в точке A :



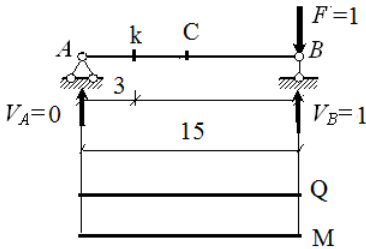
$$\begin{aligned} V_A &= 1 & V_B &= 0 \\ Q_k^0 &= 0 & M_k^0 &= 0 \\ M_C^0 &= 0 \\ H &= \frac{M_C^0}{f} = 0 \end{aligned}$$

$$M_k = 0$$

$$Q_k = 0$$

$$N_k = 0;$$

б) груз $F = 1$ находится в точке B :



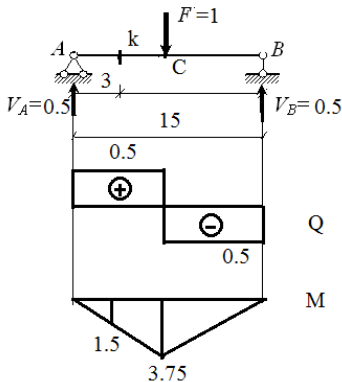
$$\begin{aligned} V_A &= 0 & V_B &= 1 \\ Q_k^0 &= 0 & M_k^0 &= 0 \\ M_C^0 &= 0 \\ H &= \frac{M_C^0}{f} = 0 \end{aligned}$$

$$M_k = 0$$

$$Q_k = 0$$

$$N_k = 0;$$

в) груз $F = 1$ находится в точке C :



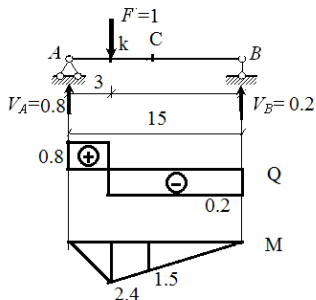
$$\begin{aligned} V_A &= 0,5 & V_B &= 0,5 \\ Q_k^0 &= 0,5 & M_k^0 &= 1,5 \\ M_C^0 &= 3,75 \\ H &= \frac{M_C^0}{f} = \frac{3,75}{5,25} = 0,714 \end{aligned}$$

$$M_k = M_k^0 - H \cdot y_k = 1,5 - 0,714 \cdot 3,36 = -0,9$$

$$Q_k = Q_k^0 \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k = 0,5 \cdot 0,766 - 0,714 \cdot 0,643 = -0,076$$

$$N_k = -(Q_k^0 \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k) = -(0,5 \cdot 0,643 + 0,714 \cdot 0,766) = -0,868;$$

г) груз $F = 1$ находится в точке k :



$$V_A = 0,8 \quad V_B = 0,2$$

$$Q_{\text{клев}}^0 = 0,8 \quad Q_{\text{кправ}}^0 = -0,2$$

$$M_C^0 = 1,5 \quad M_k^0 = 2,4$$

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{1,5}{5,25} = 0,286$$

$$M_k = M_k^0 - H \cdot y_k = 2,4 - 0,286 \cdot 3,36 = 1,439$$

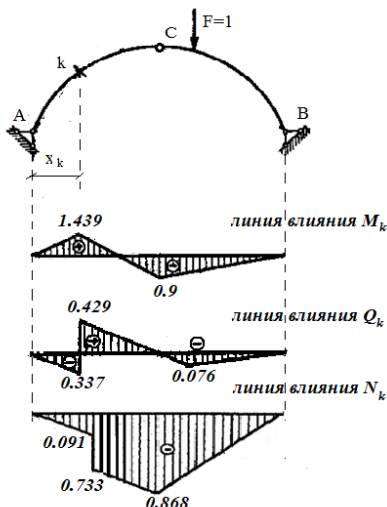
$$Q_{\text{клев}} = Q_k^0 \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k = -0,2 \cdot 0,766 - 0,286 \cdot 0,643 = -0,337$$

$$Q_{\text{кправ}} = Q_k^0 \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k = 0,8 \cdot 0,766 - 0,286 \cdot 0,643 = 0,429$$

$$N_{\text{клев}} = -(Q_k^0 \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k) = -(-0,2 \cdot 0,643 + 0,286 \cdot 0,766) = -0,091$$

$$N_{\text{кправ}} = -(Q_k^0 \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k) = -(0,8 \cdot 0,643 + 0,286 \cdot 0,766) = -0,733.$$

Теперь по полученным значениям для характерных точек построим соответствующие линии влияния.



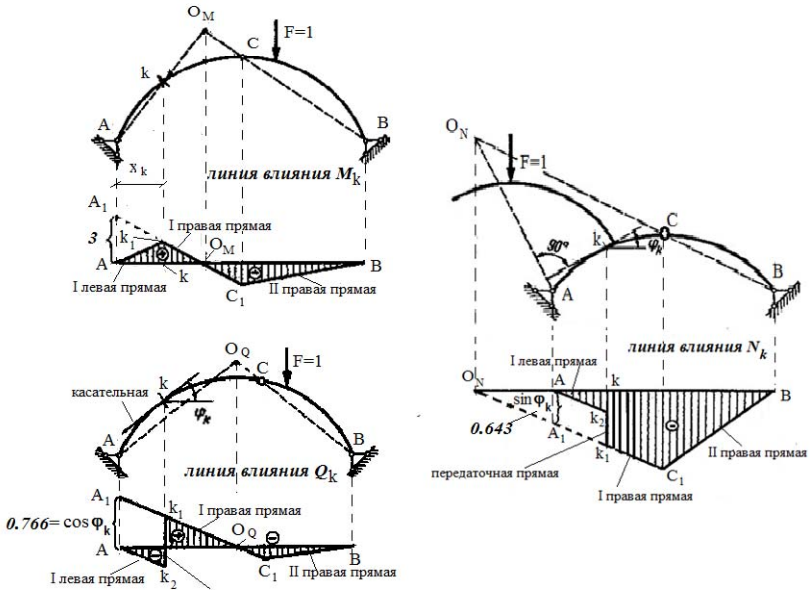
9. Определим усилия по линиям влияния:

$$M_k = F_1 \cdot 0,815 - F_2 \cdot 0,54 + q(0,5 \cdot 1,049 \cdot 2,018 - 0,5 \cdot 0,9 \cdot 1,732 - 0,5 \cdot (0,81 + 0,8) \cdot 0,75) = 9,095 \text{ кНм};$$

$$Q_k = F_1 \cdot 0,249 - F_2 \cdot 0,046 + q(0,5 \cdot 3,078 \cdot 0,344 - 0,5 \cdot 0,076 \cdot 0,672 - 0,5 \cdot 0,75 \cdot (0,781 + 0,868)) = 22,376 \text{ кН};$$

$$N_k = -F_1 \cdot 0,769 - F_2 \cdot 0,521 + q(-0,5 \cdot 3,375 \cdot (0,756 + 0,868)) - 0,5 \cdot 0,75 \cdot (0,781 + 0,868)) = -140,678 \text{ кН}.$$

10. Построим линии влияния внутренних усилий в арке графическим способом, при этом воспользуемся алгоритмами, рассмотренными в п. 4.2.2. Порядок построения показан на рисунке ниже.



Вывод. Полученные результаты аналитического и графического расчетов и определение усилий по линиям влияния совпадают с точностью допустимой погрешности (не более 3 %).

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать понятие трехшарнирной системы.
2. Сформулировать понятие трехшарнирной арки.
3. Указать отличия несимметричных трехшарнирных систем от симметричных.
4. Указать способы, которыми можно определить опорные реакции в трехшарнирной арке.
5. Указать способы, которыми можно определить внутренние усилия в трехшарнирной арке.
6. Указать способы, которыми можно построить линии влияния опорных реакций в трехшарнирной арке.
7. Указать способы, которыми можно построить линии влияния внутренних усилий в трехшарнирной арке.
8. Сформулировать понятие «балочный изгибающий момент».
9. Сформулировать понятие «балочная поперечная сила».
10. Сформулировать понятие «многоугольник давления». Указать порядок построения.
11. Записать формулы для определения внутренних усилий в произвольном сечении k при действии вертикальной нагрузки.
12. Сформулировать алгоритм построения силового многоугольника.
13. Сформулировать понятие «нулевая точка».
14. Указать порядок получения нулевой точки для линий влияния M_k , Q_k , N_k .
15. Сформулировать алгоритм построения линии влияния изгибающего момента способом нулевых точек.
16. Сформулировать алгоритм построения линии влияния поперечной силы способом нулевых точек.
17. Сформулировать алгоритм построения линии влияния продольной силы способом нулевых точек.
18. Сформулировать алгоритм определения внутренних усилий и опорных реакций по линиям влияния.

Библиографический список

1. Дарков, А.В. Строительная механика : учебник / А.В. Дарков, В.А. Шапошников. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 656 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Шапошников, Н.Н. Строительная механика : учебник / Н.Н. Шапошников, Р.Е. Кристалинский, А.В. Дарков ; под общ. ред. Н.Н. Шапошникова. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань-Пресс, 2018. – 704 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
3. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах : учебное пособие для вузов. Ч. 1. Статически определимые системы / Н.Н. Анохин. – 2-е изд., доп. и перераб. – Москва : АСВ, 2007. – 336 с.
4. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах : учебное пособие для вузов. Ч. 2. Статически неопределимые системы / Н.Н. Анохин. – 2-е изд., доп. и перераб. – Москва : АСВ, 2017. – 464 с.

Эпюры статически определимых однопролетных балок

Шарнирно-опертая по концам балка	Консольная балка
<p> $V_A = F \frac{b}{l}$ $V_B = F \frac{a}{l}$ $M_{max} = F \frac{ab}{l}$ $Q_{left} = F$ $Q_{right} = -F \frac{b}{l}$ </p>	<p> $V_A = F$ $M_A = F a$ $M_{max} = F a$ $Q = F$ </p>
<p> $V_A = \frac{ql}{2}$ $V_B = \frac{ql}{2}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$ $Q_{left} = \frac{ql}{2}$ $Q_{right} = -\frac{ql}{2}$ </p>	<p> $V_A = ql$ $M_A = \frac{ql^2}{2}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{2}$ $Q_{left} = ql$ </p>
<p> $V_A = \frac{M}{l}$ $V_B = \frac{M}{l}$ $M_{left} = \frac{M a}{l}$ $M_{right} = \frac{M b}{l}$ $Q = \frac{M}{l}$ параллельные </p>	<p> $V_A = 0$ $M_A = M$ $M_{max} = M$ $Q = 0$ </p>

Общие указания по оформлению расчетно-графических работ

1. Расчетно-графическая работа (РГР) должна быть выполнена на стандартных листах бумаги формата А4 (210×297 мм).
2. Все записи и расчеты производятся чернилами на одной стороне листа, рисунки выполняются карандашом.
3. Расчеты должны содержать решения в общем (буквенном) виде числовое решение.
4. Все вычисления производятся с точностью до 0,001.
5. Титульный лист оформляется согласно схеме, приведенной ниже.
6. Полностью выполненная и оформленная РГР сшивается (скоросшиватель) и сдается в указанные сроки.

<p>ФГБОУ ВО ТОЛЬЯТТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ Архитектурно-строительный институт Центр архитектурных, конструктивных решений и организации строительства</p> <p>Расчетно-графическая работа № 1</p> <p>«Статически определимые системы»</p> <p>Студент Иванов И.И. Группа ПГСз-431 Вариант 4/5 Проверил Ефименко Э.Р.</p> <p>Тольятти 2018</p>
--

На всех листах выполняется рамка:

- отступ слева 2 см;
- отступ справа 0,5 см;
- отступ сверху 0,5 см;
- отступ снизу 0,5 см.