Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Гуманитарно-педагогический институт

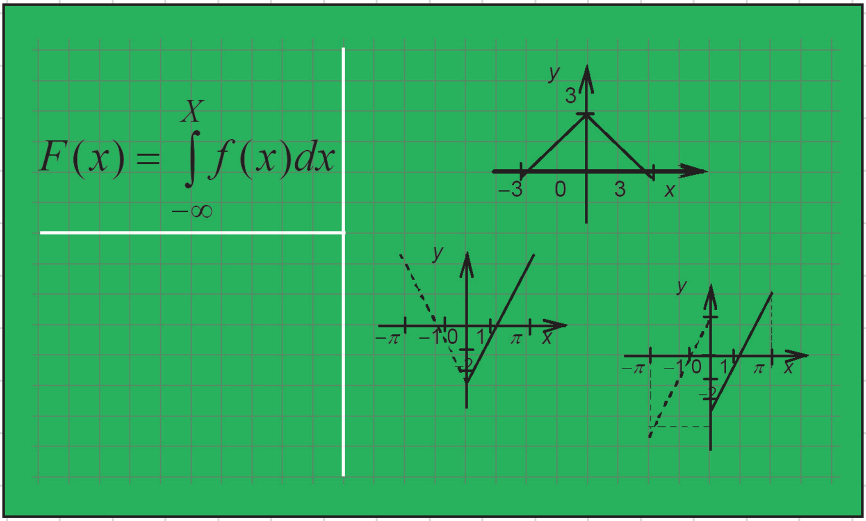
Г.В. Ахметжанова
Е.С. Павлова
Н.Н. Кошелева

МАТЕМАТИКА

Электронное учебное пособие

В трёх частях

Часть 3



ISBN 978-5-8259-1497-8

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73

Рецензенты:
канд. пед. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Поволжского государственного университета сервиса *Г.А. Киричек*;
д-р пед. наук, профессор кафедры «Педагогика и методики преподавания» Тольяттинского государственного университета *И.В. Руденко*.

Ахметжанова, Г.В. Математика : электронное учебное пособие. В 3 частях. Часть 3 / Г.В. Ахметжанова, Е.С. Павлова, Н.Н. Кошелева. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2020. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1497-8.

Первая часть учебного пособия издана в 2018 году, вторая – в 2019 году. Третья часть учебного пособия содержит весь необходимый материал для изучения таких разделов, как «Ряды», «Элементы теории вероятности» и «Элементы математической статистики». В каждом разделе представлен теоретический материал, примеры для практических заданий и самостоятельного решения, теоретический и практический тест для проверки уровня знаний студентов.

Предназначено для изучения дисциплины «Высшая математика» студентами всех специальностей бакалавриата.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *О.И. Елисеева*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию 20.01.2020.
Объем издания 8,9 Мб.
Комплектация издания:
компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-52-18.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 6

Условные обозначения 8

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ 9
    1.1. Основные понятия 9
    1.2. Свойства числовых рядов 10
    1.3. Ряды с положительными членами 11
    1.4. Признаки сходимости 12
    1.5. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды 18
    1.6. Признак Лейбница 19
    Теоретический тест 21
    Практический тест 24

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ 27
    2.1. Основные понятия 27
    2.2. Сходимость степенных рядов 27
    2.3. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена 31
    2.4. Простейшие разложения в ряд Маклорена 31

3. РЯДЫ ФУРЬЕ 34
    3.1. Тригонометрический ряд Фурье 34
    3.2. Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2π 37
    3.3. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций 38
    3.4. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом $T = 2l$ 40
    Теоретический тест 42
    Практический тест 45
    Межпредметные связи 47

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ 49
    4.1. Основные понятия теории вероятности 49
    4.2. Формулы комбинаторики 53
    4.3. Понятие вероятности события 54
    4.4. Статистическое определение вероятности 55
    4.5. Классическое определение вероятности 55

4.6. Геометрическое определение вероятности 56
4.7. Основные теоремы и формулы теории вероятности 57
4.8. Формула полной вероятности 59
4.9. Формула Бейеса 60
4.10. Формула Бернулли 60
4.11. Формула Пуассона 61
4.12. Локальная теорема Лапласа 62
4.13. Интегральная теорема Муавра – Лапласа 63
Теоретический тест 63
Практический тест 65

5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ 69
5.1. Случайные величины, законы их распределения 69
5.2. Дискретная случайная величина 69
5.3. Непрерывная случайная величина 71
5.4. Основные характеристики (параметры распределения) случайной величины 74
5.5. Некоторые частные распределения 77
Теоретический тест 79
Практический тест 80

Библиографический список 84

Глоссарий 86

Ответы к тестам 87

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Математика. Часть 3» по своей структуре и содержанию соответствует ФГОС ВО и программе курса высшей математики.

Цель учебного пособия – оказать студентам помощь в овладении теоретическим материалом с наименьшей затратой времени, привить им навыки самостоятельного изучения литературы, научить решать задачи.

В пособии доступно излагаются основные понятия и методы теории вероятностей (ТВ) и математической статистики (МС). Разделы пособия согласованно и соразмерно наполнены учебной информацией, содержательная сложность отвечает современным требованиям. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров, а также заданиями для самостоятельного решения.

Учебное пособие может быть успешно использовано и начинающими педагогическую деятельность в области преподавания высшей математики ассистентами, и старшими преподавателями вузов для организации аудиторных практических занятий по математике.

В пособии представлен материал, в результате изучения которого студент должен сформировать и продемонстрировать компетенции, представленные в ФГОС ВО.

Студенты направления подготовки бакалавра 04.03.01 «Химия» должны сформировать способность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности (ОПК-3).

Студенты направления подготовки бакалавра 08.03.01 «Строительство» могут продемонстрировать:

– способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий (ОПК-6);

– владение эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией (ОПК-4);

– способность выявить естественно-научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-2);

– способность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-1).

Студенты направления подготовки бакалавра 39.03.01 «Социология» должны обладать:

– способностью использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-6);

– умением обрабатывать и анализировать данные для подготовки аналитических решений, экспертных заключений и рекомендаций (ПК-4);

– способностью использовать методы социологического анализа в процессах разработки и принятия управленческих решений, в оценке их практической эффективности (ПК-13).

Студенты направления подготовки бакалавра 44.03.01 «Педагогика» должны продемонстрировать:

– способность использовать естественно-научные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве (ОК-3);

– готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11).

Студенты направления подготовки бакалавра 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» должны получить способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики (ОПК-1).

Условные обозначения

⇨	запомнить
$\underline{\mathfrak{T}}$	теорема
?	вопросы
✍	выполните самостоятельно
$\Re$	задача, пример
•	начало и окончание решения задачи или доказательства теоремы
$\wp$	важно

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Основные понятия

⇨ **Определение.** Пусть дана числовая последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...

Выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ называется *числовым рядом* и обозначается сокращённо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. При этом числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... называются *членами ряда*.

Ряд считается заданным, если известен общий член ряда a_n, выраженный как функция его номера n: $a_n = \varphi(n)$ – которая называется *n-м членом ряда*.

ℜ Запишите общий член числового ряда

$$\cos 1 + \cos\frac{1}{4} + \cos\frac{1}{9} + \cos\frac{1}{16} + \ldots.$$

Решение. Замечаем, что в числителе 1, а в знаменателе квадраты натуральных чисел, поэтому имеем общий член ряда

$$\cos 1 + \cos\frac{1}{4} + \cos\frac{1}{9} + \cos\frac{1}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}.$$

ℜ Найти члены a_1, a_3, a_{n+1} ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{10^n+1}$.

Решение. Подставляя в формулу общего члена вместо n номера 1, 3, $n + 1$, получаем соответственно

$$a_1 = \frac{1+2}{10^1+1} = \frac{3}{11},\ a_3 = \frac{3^2+2}{10^3+1} = \frac{11}{1001},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+2}{10^{n+1}+1} = \frac{n^2+2n+3}{10^{n+1}+1}.$$

✍

1. Найти члены a_2, a_5, a_{n-1} ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}$.

2. Последовательность задана формулой $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Какое из указанных чисел не является членом этой последовательности?

1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{17}$; 4) $\frac{1}{18}$.

3. Последовательность задана формулой $c_n = n^2 - 1$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?
1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

4. Является ли число $-\frac{2}{15}$ членом ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n}{n(n+1)}$?

5. Запишите общий член числового ряда $\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{9}{16}+\ldots$.

⇨ **Определение.** *Частичной суммой S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сумма n его первых членов*.

Например: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

⇨ **Определение**. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм, равный S, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется *сходящимся*, а число S называется *суммой ряда*. Если $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ (или не существует), то ряд называется *расходящимся*, такой ряд суммы не имеет.

1.2. Свойства числовых рядов

1. Если у сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ отбросить конечное число первых членов или присоединить в его начале несколько новых членов, это не повлияет на сходимость ряда.

2. Если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число c, то его сходимость не нарушится (а сумма лишь умножится на число c). Если члены расходящегося ряда умножить на одно и то же число $c \neq 0$, то он по-прежнему будет расходиться.

3. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют суммы соответственно S_a и S_b. Тогда ряд, полученный почленным сложением (или вычитанием) этих рядов, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ или $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$, также сходится и имеет сумму $S_a + S_b$ или $S_a - S_b$.

$\mathfrak{R}$

1. Ряд 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + ... + ... сходится, так как его сумма равна 0.
2. Ряд 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ ... + ... расходится, так как $S_n = \infty$ при $n \to \infty$.

✍

1. Дан ряд 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + ... Все члены данного ряда надо умножить на 30. Что можно сказать о сходимости данного ряда?

2. Дан ряд 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + ... Четные и нечетные члены ряда поменяли местами. Что можно сказать о сходимости данного ряда?

1.3. Ряды с положительными членами

⇨ **Определение.** Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, все члены которого неотрицательны, называется *знакоположительным*.

⇨ **Критерий сходимости знакоположительных рядов.** Для того чтобы знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы были ограничены сверху (в совокупности), т. е. $\exists M, \forall n, S_n \le M$.

$\Re$ $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\ldots$ – знакоположительный ряд, так как все члены положительны.

✍

1. Какой из предложенных рядов является знакоположительным?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n^3}}{n\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\ell^{-nx}$;

д) $\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\cos nx+\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$.

2. Установите соответствия между рядами и названиями.

Ряд	Название
1. $-\frac{3}{7}-\frac{24}{42}-\frac{81}{137}-\ldots-\frac{3n^3}{5n^3+2}-\ldots$	А) ряд с переменными членами
2. $\frac{2}{4}+\frac{3}{7}-\frac{4}{10}+\ldots-\frac{n+1}{3n+1}+\ldots$	Б) знакоположительный
3. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$	В) знакоотрицательный

1.4. Признаки сходимости

1.4.1. Необходимый признак сходимости числового ряда

Нахождение частичной суммы ряда и ее предела для многих рядов является непростой задачей, поэтому для выяснения сходимости устанавливают специальные признаки сходимости.

Первым из них является *необходимый признак сходимости*.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Замечание (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или предел не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

$\Re$ Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2n}$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{2n} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) = 1 \neq 0$. Необходимое условие сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

✍ 1. Какие из предложенных рядов расходятся по необходимому признаку?

а) $\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{10}+\ldots+\dfrac{n+1}{3n+1}+\ldots$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{1}{n^2+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$;

г) $\dfrac{2}{11}+\dfrac{4}{21}+\dfrac{6}{31}+\ldots+\dfrac{2n}{10n+1}+\ldots$.

2. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для рядов.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{3n^2}{n^2+1}}$;

б) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{9}{16}+\ldots+\dfrac{n^2}{(n+1)^2}+\ldots$;

в) $\ln\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{6}{11}+\ln\dfrac{9}{16}+\ldots+\ln\dfrac{3n}{5n+1}+\ldots$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)^n$.

3. Можно ли исследовать данные ряды на сходимость по необходимому признаку?

а) $\sum\limits_{n+1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$;

б) $\dfrac{2}{11}+\dfrac{4}{21}+\dfrac{6}{31}+\ldots+\dfrac{2n}{10n+1}+\ldots$.

1.4.2. Гармонический ряд

⇨ Гармонический ряд – это ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$.

Гармонический ряд расходится (хотя $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

1.4.3. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Необходимый признак не дает возможности судить о том, сходится ряд или нет. Сходимость ряда можно установить с помощью достаточных признаков сходимости.

Признак сравнения рядов

Пусть имеется два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2), где $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ для всех номеров n.

⇨ **Признак сравнения.** Если начиная с некоторого номера (скажем, для $n > N$) выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

⇨ **Предельный признак сравнения.** Пусть имеется два знакоположительных ряда (1) и (2). Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=k\neq 0$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Рассмотрим некоторые эталонные ряды:

Общий вид	Название	Сходимость или расходимость
$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$	Геометрическая прогрессия	$\lvert q\rvert < 1$ сходится $\lvert q\rvert \geq 1$ расходится
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$	Ряд Дирихле, или обобщенно-гармонический	$p > 1$ сходится $p \leq 1$ расходится
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	Гармонический ряд	расходится
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+k},\ k\geq 1$	Остаток гармонического ряда	расходится

Некоторые полезные неравенства:

$\operatorname{tg} x \geq x \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right);$

$\sin x < x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right);$

$\ln x < x \ (x > 0);$

$e^x > x \ (x \geq 0).$

$\mathfrak{R}$ Установить сходимость (или расходимость) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)3^n}$.

Решение. Сравним наш ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$, используя предельный признак сравнения: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{n}{(n+1)3^n}}{\dfrac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, следовательно, данный ряд сходится.

✍ 1. Установить сходимость (или расходимость) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n^3+3}$.

Указание. Сравним ряд по предельному признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

2. Какой из предложенных рядов сходится по признаку сравнения?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n^2+1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. Какой из предложенных рядов расходится по признаку сравнения?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

Признак Даламбера

⇨ **Признак Даламбера.** Пусть для знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Тогда:

- если $l < 1$, ряд сходится;
- если $l > 1$, ряд расходится;
- если $l = 1$, вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида *n!* или a^n.

$\mathfrak{R}$ Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$a_n=\frac{n+1}{2^n(n-1)!},\ a_{n+1}=\frac{n+2}{2^{n+1}n!},$$

где $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n,\ (n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1);$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)2^n(n-1)!}{2^{n+1}n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0,\ 0\ <\ 1,$$

ряд сходится.

✍ 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3^n}$.

2. Какой из предложенных рядов сходится по признаку Даламбера?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n+1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$; г) $\sum\limits_{n+1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$.

3. Какой из предложенных рядов расходится по признаку Даламбера?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n 2n!}{(2n!)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5(2n-1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

Радикальный признак Коши

⇨ **Признак Коши.** Пусть для знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

Тогда:

- если $l<1$, ряд сходится;
- если $l>1$, ряд расходится;
- если $l=1$, вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

$\mathfrak{R}$ Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n+3}\right)^n$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n+1}{2n+3}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\dfrac{3}{2}>1,$

ряд расходится.

✍1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

2. Какой из предложенных рядов сходится по признаку Коши?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

3. Какой из предложенных рядов расходится по признаку Коши?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln 2n}$.

Интегральный признак Коши

⇨ **Интегральный признак Коши.** Пусть имеем знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, члены которого стремятся к нулю, монотонно убывая, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $a_n>a_{n+1}$.

Пусть далее, на промежутке $[1,\infty)$ функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)\geq 0$,
2) $f(x)$ непрерывна,
3) $f(x)$ монотонно убывает,
4) $f(n)=a_n$, для целочисленных значений аргумента $x=n=1, 2, 3, \ldots$.

Тогда:

- если несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ сходится, то и ряд сходится;
- если несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ расходится, то и ряд расходится.

ℜ Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Проверим выполнение условий теоремы Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2}=0$, члены ряда $a_n=\frac{n}{n^2+2}$ монотонно убывают.

Вывод: $f(x)$ при $x \in [1, \infty)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x) \geq 0$,
2) $f(x)$ непрерывна,
3) $f(x)$ монотонно убывает,
4) $f(n) = \dfrac{n}{n^2+2}$, если $x = n$.

Все условия теоремы выполнены. Вычисляем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{xdx}{x^2+2} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+2)\Big|_1^A = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(A^2+2\right) - \ln 3\right) = \infty.$$

Вывод: интеграл, а следовательно, и ряд расходятся.

✍1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{4n^2-9}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

2. Какой из предложенных рядов сходится по интегральному признаку Коши?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln^2 n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$.

3. Какой из предложенных рядов расходится по интегральному признаку Коши?

а) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)\ln(n-3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)^2}$;

в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+3)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{1}{2^n}$.

4. Установите соответствие между рядом и признаком, по которому нужно определять сходимость этого ряда.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$	необходимый признак
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{n+1}\right)^{2n-1}$	признак сравнения
$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$	признак Даламбера

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$	радикальный признак Коши
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$	интегральный признак Коши

5. Какие признаки целесообразно применить, чтобы определить сходимость предложенных рядов? Исследуйте на сходимость предложенные ряды:

а) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{4}{11}+\frac{9}{26}+\frac{16}{47}+...+\frac{n^2}{3n^2-1}+...$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2n+3}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2^n}$.

1.5. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

⇨ **Определение.** Знакопеременные ряды $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ – это ряды, у которых бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

⇨ **Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.** Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$, составленный из абсолютных величин, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$, причём абсолютно.

⇨ **Определение.** Ряд называется *знакочередующимся*, если его положительные и отрицательные члены строго чередуются.

Не нарушая общности, будем считать, что первый член ряда положительный. Тогда знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,$$

где $a_n>0$, $n=1, 2, ...$.

$\mathfrak{R}$ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ – ряд знакочередующийся, так как его положительные и отрицательные члены строго чередуются.

✍ 1. Выберите из нижеперечисленных знакопеременный ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n^3}}{n\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\ell^{-nx}$; д) $\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\cos nx+\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$.

2. Установите соответствие между рядами и их видами.

$\ln\frac{3}{5}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{9}{13}+\ln\frac{12}{17}+\ldots+\ln\frac{3n}{4n+1}+\ldots$	знакочередующийся ряд
$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n n}{n+1}+\ldots$	знакопеременный ряд
$\frac{2}{3}+1-\frac{6}{5}+\ldots+\frac{2n}{n+2}+\ldots$	знакоположительный ряд

3. К какому типу относится данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{n}}$?

а) знакочередующийся ряд

б) знакоположительный ряд

в) функциональный ряд

г) степенной ряд

д) ряд Фурье

1.6. Признак Лейбница

$\mathfrak{T}$ Теорема Лейбница (признак сходимости знакочередующихся рядов). Если члены знакочередующегося ряда начиная с некоторого номера

1) монотонно убывают по абсолютной величине $a_n > a_{n+1}$;
2) стремятся к нулю $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд сходится условно, причём его сумма меньше первого члена ряда.

$\mathfrak{R}$ Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Получили гармонический ряд, который расходится.

Проверим выполнение условий теоремы Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

2) $a_n > a_{n+1}$, так как $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ (при равных числителях знаменатель правой дроби больше). Условия теоремы выполняются, следовательно, ряд сходится условно.

✍

1. Какой из предложенных рядов сходится абсолютно?

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^{n/2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi}{n^2}$.

2. Какой из предложенных рядов сходится условно?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$; г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

3. Какой из предложенных рядов расходится?

а) $\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+...+\cos n\pi$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n-1}{3n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n-1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$.

4. Установите соответствие между рядом и его сходимостью.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$	сходится условно
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$	сходится абсолютно
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$	расходится

5. Исследуйте на сходимость предложенные ряды:

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

Теоретический тест

1. Числовым рядом называется выражение вида...

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

3) $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x)$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$

2. Выберите из нижеперечисленных достаточный признак расходимости ряда.

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$; 3) $S_n(x) = \infty$; 4) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

3. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите признак Даламбера.

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n = B$, $U_m \leq V_n$, если B сходится, то A сходится; если A расходится, то и B расходится;

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n = f(x)$, если $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то сходится (расходится) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \lambda$.

4. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

1) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$;

2) $U_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n > \ldots$;

3) если сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд;

4) если ряд, составленный из модулей членов данного ряда, расходится, то сам ряд сходится.

5. Выберите из нижеперечисленных признаков сходимости необходимый признак сходимости ряда.

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; 2) $S_n = \infty$; 3) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$; 4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите признак сравнения.

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = B$, $U_n \le V_n$, если B сходится, то A сходится; если A расходится, то и B расходится;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n = f(x)$, если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то сходится (расходится) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

7. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если

1) сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится;

2) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$;

3) ряд, полученный перестановкой его членов, сходится;

4) ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

8. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите достаточные признаки сходимости ряда.

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$; 4) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

9. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите радикальный признак Коши.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n = f(x)$, если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то сходится (расходится) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = B$, $U_n \le V_n$, если B сходится, то A сходится; если A расходится, то и B расходится;

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;

4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$.

10. Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если
1) ряд, составленный из модулей его членов, сходится;
2) $|U_1| > |U_2| > |U_3| > \ldots > U_n > \ldots$;
3) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$;
4) сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

11. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите достаточные признаки расходимости ряда.
1) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$; 4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

12. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите интегральный признак Коши.
1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n = f(x)$: если $\int_1^{\infty} f(x)dx = 0$, то ряд сходится, если $\int_1^{\infty} f(x)dx \neq 0$, то ряд расходится;
3) если $U_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n > \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot U_n$ сходится;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n = f(x)$: если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится (расходится).

13. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите признак Лейбница.
1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;
2) если $U_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n > \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot U_n$ сходится;
3) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n = f(x)$, если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то сходится (расходится) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

14. Ряд называется ______________________, если его положительные и отрицательные члены строго чередуются.

1) знакопеременным

2) знакочередующимся

15. Из нижеперечисленных выберите гармонический ряд.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$.

Практический тест

1. Пользуясь признаком сходимости, ответить на вопрос о сходимости или расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$.

1) ряд расходится

2) ряд сходится

3) вопрос о сходимости остается открытым

4) сходится условно

2. Исследовать на сходимость ряд $1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}+\ldots$.

1) расходится

2) сходится

3) вопрос о сходимости остается открытым

4) сходится условно

3. Пользуясь признаком сходимости, ответить на вопрос о сходимости или расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-2}{n+2}$.

1) ряд сходится

2) ряд расходится

3) вопрос о сходимости остается открытым

4) сходится условно

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$.

1) ряд расходится

2) вопрос о сходимости остается открытым

3) ряд сходится абсолютно

4) ряд сходится условно

5. Исследовать на сходимость ряд
$\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2+\ldots.$
1) ряд расходится
2) вопрос о сходимости остается открытым
3) ряд сходится условно
4) ряд сходится абсолютно

6. Числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{\alpha}}$ сходится при наименьшем целом α, равном ___________.

7. Даны числовые ряды: A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+5}}$; B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^3+1}$. Верно утверждение
1) ряд A сходится условно, ряд B сходится абсолютно
2) ряд A сходится условно, ряд B сходится условно
3) ряд A расходится, ряд B сходится абсолютно
4) ряд A расходится, ряд B сходится условно

8. Даны числовые ряды: A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$; B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5n-1}\right)$. Верно утверждение
1) ряд A сходится, ряд B расходится
2) ряд A расходится, ряд B расходится
3) ряд A сходится, ряд B сходится
4) ряд A расходится, ряд B сходится

9. Даны числовые ряды: A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n}{4n+1}$. Верно утверждение
1) ряд A расходится, ряд B расходится
2) ряд A сходится, ряд B расходится
3) ряд A сходится, ряд B сходится
4) ряд A расходится, ряд B сходится

10. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+7}\right)^n$.
1) ряд расходится
2) вопрос о сходимости остается открытым
3) ряд сходится абсолютно
4) ряд сходится

11. Общий член ряда $\frac{2}{4}+\frac{3}{7}+\frac{4}{10}+\ldots+\ldots$ имеет вид

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n+1}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3n+1}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n}$

12. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-n+1}{n^2+1}$.

1) ряд расходится

2) вопрос о сходимости остается открытым

3) ряд сходится абсолютно

4) ряд сходится условно

13. Общий член ряда $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots$ имеет вид

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n+1}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2-1}$

14. Является ли число $\frac{6}{31}$ членом числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{10n+1}$?

1) да

2) нет

15. Какое из предложенных чисел является членом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$?

1) $\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{4}$ 4) $\frac{1}{2}$

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Основные понятия

⇨ **Определение.** Выражение $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *функциональным рядом* относительно переменной x.

Придавая в выражении $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ переменной x некоторые значения x_1, x_2, ... и т. д., мы будем получать числовые ряды

$$u_1(x_1) + u_2(x_1) + u_3(x_1) + \cdots + u_n(x_1) + \cdots$$

$$u_1(x_2) + u_2(x_2) + u_3(x_2) + \cdots + u_n(x_2) + \cdots$$

В зависимости от значения, принимаемого переменной x, числовые ряды могут оказаться сходящимися или расходящимися.

⇨ **Определение.** Совокупность всех значений переменной x, для которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости данного функционального ряда.

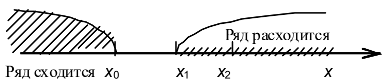
⇨ **Определение**. Если ряд сходится в интервале (a, b), то для всех x из (a, b) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, где $S_n(x)$ – частичная сумма, $S(x)$ – сумма ряда.

2.2. Сходимость степенных рядов

⇨ **Определение.** Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$, где a_0, a_1, ..., a_n, ... – постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*, которые вычисляются по формуле $a_n = \varphi(n)$.

Т Теорема (Абеля). Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x| > |x_0|$.

Если ряд расходится при некотором значении x_1, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_1|$.



⇨ **Определение.** Если на оси Ox существует точка $x = R > 0$ (см. рис.), такая, что:

- ряд сходится для всех x: $|x| < R$,
- ряд расходится для всех x: $|x| > R$,

то интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости ряда*, а число R называется *радиусом сходимости ряда*. Точка $x = 0$ при этом называется *центром сходимости*.

На концах промежутка в точках $|x| = |R|$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для определения радиуса, а значит, и интервала сходимости используют уже известные нам признаки Даламбера и Коши.

⇨ **Признак Даламбера**. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = z\cdot|x|,$$

то есть по теореме Даламбера

$$\begin{cases} z\cdot|x| < 1 - \text{ряд сходится,} \\ z\cdot|x| > 1 - \text{ряд расходится,} \\ z\cdot|x| = 1 - \text{ответа нет.} \end{cases}$$

Пусть $z \cdot |x| < 1$. Тогда степенной ряд сходится для всех x: $|x| < \frac{1}{z}$, т. е. на интервале $\left(-\frac{1}{z}, \frac{1}{z}\right)$. Но для всех x: $|x| \cdot z > 1$, т. е. для $|x| > \frac{1}{z}$ ряд расходится, значит, $\frac{1}{z} = R$, где R — радиус сходимости, и найти его можно, вычислив предел: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

⇨ **Признак Коши**. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = |x|\cdot z$, т. е. степенной ряд сходится для всех x: $|x| < \frac{1}{z}$ и расходится, если $|x| > \frac{1}{z}$, а радиус находится по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Частные случаи:

1) $R = 0$, степенной ряд сходится в единственной точке $x = 0$ и расходится на обеих полуосях оси Ox;

2) $R = \infty$, ряд сходится в любой точке оси Ox: $x \in (-\infty, \infty)$.

ℜ Найти радиус и интервал сходимости степенных рядов. Выяснить сходимость на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение

1. Используем признак Даламбера и найдем радиус сходимости:

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 2^n},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}};$$

соответственно радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to}\frac{\frac{1}{n\cdot 2^n}}{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}{n\cdot 2^n} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2.$$

Следовательно, данный ряд сходится при $x \in (-2, 2)$.

2. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x = 2$ наш ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, это гармонический ряд, он расходится. Следовательно, точка $x = 2$ не входит в область сходимости ряда.

3. При $x = -2$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n};$$

это знакочередующийся ряд, он сходится условно, так как выполняются условия теоремы Лейбница:

– $a_{n+1} < a_n,\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$;

– $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Значит, точка $x = 2$ принадлежит области сходимости степенного ряда.

Ряд сходится для всех $x \in [-2, 2)$.

✍

1. Установите соответствие между степенным рядом и его радиусом сходимости.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\cdot 2^n}$	$R=0$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\cdot 2^n}$	$R=\infty$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}\cdot 2^n}{(n+1)}$	$R=2$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n}$	$R=1/2$

2. Установите соответствие между степенным рядом и его интервалом сходимости.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$	$[-2, 2)$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n\cdot 2^n}$	$(-2, 2)$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$	$[-2, 2]$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$	$(-2, 2]$

3. Найдите радиус и интервал сходимости степенных рядов. Выясните его поведение на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

2.3. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена

Сумма всякого сходящегося степенного ряда является некоторой функцией, определённой внутри интервала сходимости этого ряда (возможно, ещё и на его концах). В связи с этим возникают две задачи. Во-первых, можно по заданному ряду искать функцию, равную сумме ряда в интервале его сходимости. Эта задача называется суммированием сходящегося ряда. Во-вторых, можно по заданной функции искать сходящийся ряд, сумма которого в интервале сходимости равнялась бы заданной функции. Эта задача называется *разложением функции* в ряд.

⇨ **Определение.** Представление функции $f(x)$ в виде ряда

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(x)}{1!}(x-c) + \frac{f''(x)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^n(x)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

называется *разложением* этой функции *в ряд Тейлора*.

В частности, при $c = 0$ разложение в ряд Тейлора называется разложением в *ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{/}(0)}{1!}(x) + \frac{f^{//}(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n + \cdots$$

Не всякую функцию, даже если она неограниченное число раз дифференцируема, можно разложить в ряд Тейлора. Однако если разложение функции в какой-либо степенной ряд вообще возможно, то оно является разложением именно в ряд Тейлора.

2.4. Простейшие разложения в ряд Маклорена

Правила разложения функции в ряд Маклорена:

1) найти все производные функции, найдя выражения для n-й производной;
2) вычислить все производные в рассматриваемой точке $x = 0$;
3) написать ряд для заданной функции и найти его интервал сходимости;
4) оценить остаточный член, проверив выполнение условия $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

ℜ Разложить в ряд Маклорена функцию $y = e^x$.

Решение. Необходимо получить ряд вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n + \cdots$$

1. Найдём все производные функции $f(x) = e^x$:

$$f' = e^x, f'' = e^x, \dots, f^{(n)} = e^x.$$

2. Вычислим функцию и производные при $x = 0$:

$$f'^{(0)} = e^0 = 1, f''(0) = e^0 = 1, \dots, f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

3. Получаем ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

℘ Простейшие разложения функций в ряд Маклорена:

а) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;\ (-\infty < x < \infty);$

б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;\ (-\infty < x < \infty);$

в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots;\ (-\infty < x < \infty);$

г) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots;\ (-1 < x \le 1);$

д) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots;\ (-1 \le x \le 1);$

е) $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots;\ (-1 < x < 1);$

ж) $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right);\ (-1 < x < 1);$

з) $\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots;\ (-1 < x < 1);$

и) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots;\ (-1 < x < 1).$

ℜ Разложить функцию $y = \sin 3x$ в ряд Маклорена.

Решение. Имеем эталонный ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Заменим в нем функцию x на $3x$ и получим

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

✍

1. В ряд Маклорена $x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots$ разложена функция

а) $y = e^x$

б) $y = e^{2x}$

в) $y = x \cdot e^x$

г) $y = \frac{1}{x} e^x$

2. Укажите ряд Маклорена для представленной функции $y = \sin 5x$.

а) $\sin 5x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

б) $\sin 5x = \frac{5x}{1} - \frac{5x^3}{3!} + \frac{5x^5}{5!} - \frac{5x^7}{7!} + \cdots$

в) $\sin 5x = \frac{x}{1} - \frac{5x^3}{3!} + \frac{5x^5}{5!} - \frac{5x^7}{7!} + \cdots$

г) $\sin 5x = \frac{5x}{1} - \frac{(5x)^3}{3!} + \frac{(5x)^5}{5!} - \frac{(5x)^7}{7!} + \cdots$

3. Разложить функции в ряд Маклорена:

а) $f(x) = \sqrt{x} \cos 5x$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{x} e^{2x}$;

в) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

3. РЯДЫ ФУРЬЕ

3.1. Тригонометрический ряд Фурье

⇨ **Определение.** *Тригонометрический ряд Фурье* – это функциональный ряд вида $\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots$ или сокращенно $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$, где a_0, a_n, b_n называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, и являются функциями дискретного аргумента $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Запишем формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx.$$

Формулы, которые нужны для дальнейшего решения:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\begin{cases}\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}=0\ (n\neq 0)\\ \left.x\right|_{-\pi}^{\pi}=2\pi\ (n=0)\end{cases}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=0 \text{ при любом } n.$$

ℜ Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на $[-\pi, \pi]$.

Решение. По определению модуля

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{если } x\geq 0\\ -x, & \text{если } x<0\end{cases}.$$

Следовательно, $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\in[0,\pi]\\ -x, & x\in[-\pi,0]\end{cases}$.

Вычислим коэффициенты:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}xdx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{0}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right)=\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}x\cos nx dx+\int_{0}^{\pi}x\cos nx dx\right)=\left|\begin{array}{l}\int udv=uv-\int vdu\\ u=x,\ du=dx\\ dv=\cos nx dx,\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin n\pi=0\\ \cos n\pi=(-1)^n\end{matrix}\right|=-\frac{1}{\pi n^2}\left(\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi n^2}\left(-2+2(-1)^n\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{если } n=2k-1\\ 0, & \text{если } n=2k\end{cases};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{-\pi}^{0}x\sin nxdx+\int\limits_{0}^{\pi}x\sin nxdx\right)=\left|\begin{matrix}u=x, \; du=dx\\ dv=\sin nxdx, \; v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{0}\cos nxdx-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=0.$$

В итоге:

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \;\; x\in[-\pi,\pi].$$

✍

1. Выполняются ли условия Дирихле для функции $f(x) = 3x$ на интервале $(-\pi, -\pi)$?

2. Разложить в ряд Фурье на заданном интервале функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{при}\ldots-\pi<x<0\\ 1, \text{при}\ldots 0\le x<\pi\end{cases}.$$

Теорема Дирихле

Пусть на отрезке $[-\pi, \pi]$ задана ограниченная функция $f(x)$, удовлетворяющая на этом отрезке следующим двум условиям:

1) функция $f(x)$ непрерывна или кусочно-непрерывна, т. е. имеет на этом отрезке лишь конечное число точек разрыва, причём только первого рода;
2) функция $f(x)$ монотонна или кусочно-монотонна, т. е. этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция $f(x)$ монотонно возрастает или убывает либо остаётся постоянной.

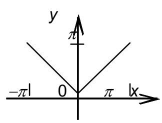
Тогда такая функция $f(x)$ разлагается в соответствующий ей тригонометрический ряд Фурье, который сходится на этом отрезке, причём:

1) в каждой точке $x = x_0$ непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в этой точке:
$$S(x_0) = f(x_0);$$
2) в каждой точке $x = x_0$ разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому односторонних пределов функции в этой точке:
$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$
3) в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на границах отрезка) сумма ряда равна среднему арифметическому правого предела $f(x)$ в точке $x = -\pi$ и левого предела $f(x)$ в точке $x = \pi$:
$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2};$$
4) на всяком конечном отрезке, свободном от точек разрыва функции $f(x)$, ряд равномерно сходится к $f(x)$.

Теорема Дирихле даёт достаточные условия разложимости функции $f(x)$ в тригонометрический ряд. Условия 1 и 2 теоремы называются у*словиями Дирихле*.

ℜ Проверим выполнение условий теоремы Дирихле для функции $y = |x|$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Решение



1. Построим график и убедимся, что функция непрерывна и кусочно-монотонна.

2. Вычислим значения суммы ряда в конечных точках отрезка $[-\pi, \pi]$: $S(\pm\pi) = \dfrac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \pi = f(\pm\pi)$, т. е. на концах отрезка *значения* суммы ряда и функции *одинаковы*.

3. В точках непрерывности функции сумма ряда и значения функции должны совпадать.

Ранее было получено:
$$|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\ x \in [-\pi, \pi].$$

Проверим это утверждение, например, для точки $x = \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left[(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}0,$$

т. е. утверждение теоремы действительно выполняется: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Построим частичные суммы ряда:

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad S_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\cos x;$$

последнюю сумму строим методом суперпозиций: $y_1 = \cos x$, $y_2 = -\frac{4}{\pi}y_1 = -\frac{4}{\pi}\cos x$, $y_3 = y_1 + y_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x$, $S_1(\pm\pi) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}$ — ориентировочные точки.

5. Используем ещё раз утверждение теоремы Дирихле ($S(x_0) = f(x_0)$, если x_0 – точка непрерывности функции), подсчитаем значение функции и суммы ряда в точке $x = 0$. В силу их равенства получаем

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Поскольку числовой ряд в правой части равенства сходящийся, его сумма конечна и равна $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

✍1. Выполняются ли условия теоремы Дирихле, если функция имеет точку разрыва второго рода?

2. Выполняются ли условия Дирихле для функции $f(x) = 2x$ на интервале $(0, \pi)$?

3.2. Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2π

Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0, 2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение, где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx.$$

ℜ. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на $[0, 2\pi]$.

Решение. Найдем коэффициенты по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi^2}{2} = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nxdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nxdx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nxdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nxdx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\frac{-x\cos nx}{n}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}) = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n} = -\frac{2}{n}.$$

Имеем ряд Фурье: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$. Следовательно,

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n}\sin nx.$$

✍ 1. Выполняются ли условия Дирихле для функции $f(x) = \frac{x}{2}$ на интервале $(0, 2\pi)$?

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x - 1$ в интервале $(0, 2\pi)$.

3.3. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если разлагаемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье функция $f(x)$ является четной или нечетной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье, их вычисление упрощается, и ряд становится неполным или рядом по косинусам или по синусам.

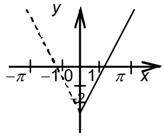
1. Пусть $y = f(x)$ – чётная функция, т. е. $f(x) = f(-x)$, тогда ряд Фурье имеет вид $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$, где коэффициенты находятся по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ b_n = 0.$$

2. Пусть $f(x)$ – нечётная функция $-f(x) = f(-x)$, тогда ряд Фурье имеет вид $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где коэффициенты находятся по формулам $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$, $a_0 = 0$, $a_n = 0$.

$\mathfrak{R}$ Разложить функцию $f(x) = 2x - 2$, $[0, \pi]$ в ряд Фурье, продолжив её чётным образом; нечётным образом.

Решение



1. Продолжим функцию $f(x)$ на интервал $[-\pi, 0]$ ***чётным образом***, построив чётную функцию:

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x-2, & 0 \le x \le \pi \\ -2x-2, & -\pi \le x < 0\end{cases}.$$

Ряд Фурье для чётной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Ищем коэффициенты Фурье для функции $\varphi(x)$:

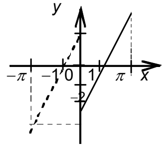
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-2)dx = \frac{2}{\pi}\left(x^2-2x\right)\Big|_0^{\pi} = 2\pi - 4;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-2)\cos nx dx = \begin{vmatrix} x-1=u,\ dx=du, \\ v=\int \cos nx dx = \dfrac{\sin nx}{n}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{x-1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{4}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases}-\dfrac{8}{\pi n^2}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k\end{cases}.$$

Коэффициенты найдены. Составляем ряд:

$$f(x)=\pi-2-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n^2}\cos nx = \pi-2-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$



2. Продолжим функцию $f(x)$ на интервал $[-\pi, 0]$ ***нечётным образом***, построив нечётную функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x-2, & 0 \le x \le \pi \\ 2x+2, & -\pi \le x < 0\end{cases}.$$

Ряд Фурье для нечётной функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (2x-2)\sin nx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{x-1}{n}\cos nx + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1-\pi}{n}\cos n\pi - \frac{1}{n}\right).$$

Составляем ряд:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\pi)\left((-1)^n - 1\right)}{n}\sin nx.$$

✍

1. Разложить функцию $y = \frac{x^2}{2}$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд по косинусам.
2. Разложить функцию $f(x) = x^2$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд по синусам.
3. Можно ли разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд синусов на интервале $(-\pi, \pi)$?
4. Можно ли разложить функцию $f(x) = \sin x$ в ряд косинусов на интервале $(-\pi, \pi)$?

3.4. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом T = 2*l*

Разлагать в ряд Фурье можно и периодические функции с периодом отличным от 2π.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l; l]$ и имеет период $2l$, где l – произвольное положительное число, и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Ряд Фурье в данном случае имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{xn\pi}{l} + b_n \sin\frac{xn\pi}{l}\right),$$

а коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

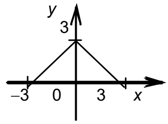
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{xn\pi}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{xn\pi}{l}dx.$$

$\mathfrak{R}$ Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 3|x|$ на интервале $[-3, 3]$.

Решение. Перепишем функцию в виде

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{если } 0 \le x < 3 \\ 3 + x, & \text{если } -3 \le x < 0 \end{cases}.$$



Построим её график.

Проверим условия теоремы Дирихле:

1) $f(x)$ непрерывна на $[-3, 3]$;

2) $f(x)$ кусочно-монотонна на $(-3, 0)$ и $(0, 3)$;

3) $S(\pm 3) = \dfrac{f(-3+0) + f(3-0)}{2} = 0 = f(\pm 3)$.

Запишем ряд Фурье для чётной функции, используя формулы при $l = 3$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{xn\pi}{3}.$$

Найдём коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)dx = -\frac{2}{3}\frac{(3-x)^2}{2}\Bigg|_0^3 = 3,$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \left| \begin{array}{l} \text{интегрируем по частям} \\ 3 - x = u,\ du = -dx, \\ v = \int \cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{3}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\left[(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3} - \frac{3}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3 = \frac{6}{(\pi n)^2}(1 - \cos\pi n) = \begin{cases} \dfrac{12}{(\pi n)^2}, & \text{если } n = 2k-1 \\ 0, & \text{если } n = 2k \end{cases}.$$

Коэффициенты найдены, составляем ряд:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{xn\pi}{3}.$$

✍

1. Выполняется ли условие теоремы Дирихле для функции $f(x) = x$ на интервале $(-1, 1)$?
2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -2, \text{при...} -1 \le x < 0 \\ 3, \text{при...} 0 \le x \le 1 \end{cases}$ на заданном интервале.

Теоретический тест

1. Числовым рядом называется выражение вида

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

3) $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x)$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$

2. В ряд Фурье разлагаются функции, описывающие ... процессы.

1) любые
2) периодические
3) математические
4) непериодические

3. Рядом Фурье называется выражение вида...

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$

2) $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x)$

3) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

4) $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$

4. Выберите достаточные признаки сходимости ряда.

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

4) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

5. Ряды применяются для...

1) приближенного вычисления значения функции
2) нахождения экстремумов функции
3) приближенного решения дифференциальных уравнений
4) приближенного вычисления определенных интегралов

6. Выберите формулу, по которой вычисляется коэффициент b_n для ряда Фурье с периодом 2π.

1) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$

2) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$

3) $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

4) $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$

7. Ряд Тейлора имеет вид

1) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x + x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x + x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x + x_0)^n$

2) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$

3) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n$

4) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)^n}{n!} + R_n$

8. Выберите формулу радиуса сходимости ряда.

1) $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

2) $R = \lim_{n\to\infty} a_n$

3) $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$

4) $R = \lim_{n\to 0}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

9. Если раскладываемая в ряд Фурье функция является функцией общего вида, то коэффициент a_n равен

1) 0

2) π

3) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$

4) $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx$

10. Из нижеперечисленных признаков сходимости выберите признак Даламбера:

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = B$, $U_n \le V_n$, если B сходится, то A сходится; если A расходится, то и B расходится;

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lambda$, ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n = f(x)$, если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то сходится (расходится) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ell^{-nx}$.

11. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ell^{-nx}$ – это ... ряд.

1) знакопеременный
2) знакоположительный
3) функциональный
4) степенной

12. Выполняются ли условия Дирихле для функции $f(x) = x^2 + 2$ на интервале (–2, 2)?

Ответ:________________.

13. Можно ли разложить функцию $y = 3x$ в ряд синусов на интервале $(-\pi, \pi)$?

Ответ:________________.

14. Можно ли разложить функцию $y = x + 1$ в ряд косинусов на интервале $(-\pi, \pi)$?

Ответ:________________.

15. Выполняются ли условия Дирихле для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{при}...0 < x < \pi \\ 0, \text{при}... -\pi < x \le 0 \end{cases}?$$

Ответ:________________.

Практический тест

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$ – это ... ряд.

1) знакопеременный
2) знакоположительный
3) функциональный
4) степенной

2. Определить интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $(0; +\infty)$ 3) $[0; +\infty)$ 4) $(-\infty; 0)$

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

1) $(-4; 0)$ 2) $[-2; 2]$ 3) $[-4; 0]$ 4) $[-4; 0)$

4. Определить радиус сходимости ряда $\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{x^{3n}}{8^n}$.

Ответ: _____.

5. Определить интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n x^n$.

1) $\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$ 2) $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$ 3) $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ 4) $\left[-\frac{1}{10}, 0\right)$

6. Определить радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n}(x+3)^n$.

Ответ: _____.

7. Ряд Тейлора для функции $f(x) = x\ln(1 + x^2)$ по степеням x.

1) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$

2) $x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+...$

3) $1+x+x^2+...+x^n+...$

4) $x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{n}+...$

8. Ряд Фурье для функции $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

2) $\frac{2}{n}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{4}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx$

9. Ряд Маклорена для функции $f(x)=\frac{2}{3-x}$.

1) $1+\frac{\ell n 3}{1!}x+\frac{\ell n^2 3}{2!}x^2+\frac{\ell n^3 3}{3!}x^3+\dots$

2) $1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$

3) $\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\dots\right)$

4) $\frac{2}{3}\left(1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots\right)$

10. Ряд Тейлора для функции $y=\ln x$ в окрестности $x_0=1$.

1) $x(x+2)+x^3(x+2)^2+x^5(x+2)^3+\dots$

2) $1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$

3) $(x-1)-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{1}{4}(x-1)^3-\frac{1}{5}(x-1)^4+\dots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\dots$

4) $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\dots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\dots$

11. Найти интервал сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$.

1) $(-1;\ 1)$ 2) $[-1;\ 1]$ 3) $(-1;\ 1]$ 4) $[-1;\ 1)$

12. Определить радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Ответ: ________.

13. Ряд Маклорена для функции $y=\cos 3x$.

1) $\cos 3x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

2) $\cos 3x = 1-\frac{3x^2}{2!}+\frac{3x^4}{4!}-\frac{3x^6}{6!}+\cdots$

3) $\cos 3x = 1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\frac{(3x)^6}{6!}+\cdots$

4) $\cos 3x = 3x-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\frac{(3x)^6}{6!}+\cdots$

14. Определить, какой функции соответствует ряд Маклорена $2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \cdots$

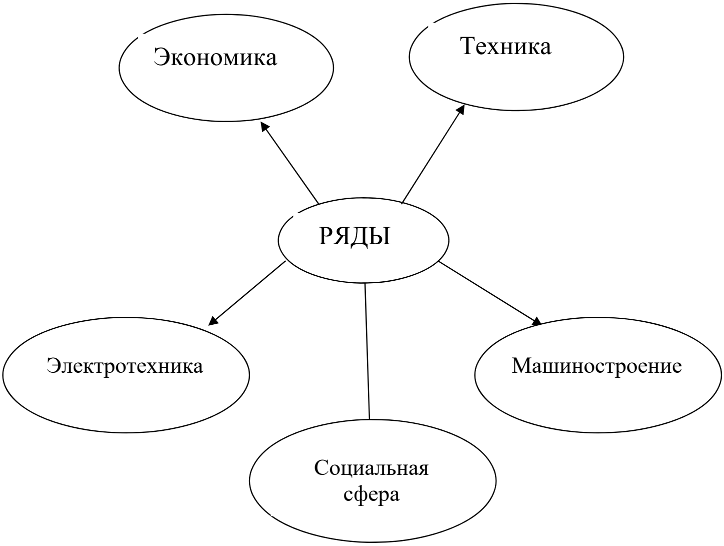
1) $\ln(x+1)$
2) $\ln(2x+1)$
3) $\ln(x+2)$
4) $\ln(x^2+1)$

15. Определить радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{4}$.
Ответ:_______________.

Межпредметные связи

Дисциплина «Математика» тесно связана с другими науками. Некоторые задачи из различных предметных областей невозможно решить без математических знаний.

Разделы модуля «Ряды» широко применяются при решении задач в различных науках: экономике, физике, электротехнике, технике, социальной сфере и др.



Предмет	Литература
Экономика	1. Афанасьев, В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование : учебник / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев. – Москва : Финансы и статистика, 2012. – 320 с. 2. Корольков, Д.А. Анализ финансово-экономических временных рядов : учебное пособие / Д.А. Корольков. – Санкт-Петербург : ИЭО СПбУТУиЭ, 2012. – 279 с.
Техника	Хорошев, А.Н. Введение в управление проектированием механических систем : учебное пособие / А.Н. Хорошев. – Белгород : БГТА,1999. – 372 с.
Электротехника	Гевелюк, И.В. Ряды Фурье и их практическое применение в электротехнике / И.В. Гевелюк, Г.Ю. Дмух // Научное сообщество студентов XXI столетия. Технические науки : сб. ст. по мат. XXII Междунар. студ. науч.-практ. конф. № 7(22).
Машиностроение	Математика в инженерном образовании: теория функций нескольких переменных, дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды : учебное пособие / И.Ю. Пильщикова [и др.]. – Пенза : ПензГТУ, 2012. – 151 с.
Социальная сфера (педагогика, психология, социология)	1. Ахметжанова, Г.В. Применение методов математической статистики в психолого-педагогических исследованиях: электрон. учеб. пособие / Г.В. Ахметжанова, И.В. Антонова ; ТГУ ; Гуманит.-пед. ин-т ; каф. «Педагогика и методики преподавания». – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2016. – 147 с. 2. Садовникова, Н.А. Анализ временных рядов и прогнозирование : учебник / Н.А. Садовникова, Р.А. Шмойлова. – Москва : Синергия, 2016. – 152 с. 3. Федорова, Е.И. Математика в примерах и задачах для студентов-социологов. В 2 ч. Ч. 2. Функции нескольких переменных. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальные уравнения. Ряды : учебное пособие / Е.И. Федорова, А.С. Котюргина. – Омск : ОмГУ, 2017. – 260 с. 4. Ильясов, Ф.Н. Типы шкал и анализ распределений в социологии /Ф.Н. Ильясов // Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены. – 2014. – № 4. – С. 24–40.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

4.1. Основные понятия теории вероятности

⇨ **Определение**. *Теория вероятностей* — это математическая наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях и позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных какимлибо образом между собой.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Основные понятия теории вероятности — это испытание и случайное событие.

⇨ **Определение.** Осуществление каждого отдельного наблюдения, опыта или измерения при изучении эксперимента называют *испытанием*.

⇨ **Определение.** Результат испытания называется *событием*.

ℜ Студент пишет контрольную работу. Описать все возможные события этого испытания.

Здесь испытание — это написание контрольной, а событие — студент написал контрольную на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

✍ Сформулируйте задачу и определите, что является испытанием, а что событием.

Различают следующие случайные события: достоверные и невозможные.

⇨ **Определение.** *Достоверное событие* — это такое событие, которое обязательно произойдет в результате данного опыта. Вероятность достоверного события равна 1.

ℜ Примеры достоверных событий:

1) ученик, закончивший школу, получает аттестат;

2) мы работаем и получаем вознаграждение в виде заработной платы;

3) школьники сдали хорошо экзамены, прошли конкурс, за это получили вознаграждение в виде поступления в учебное заведение.

Такие события являются достоверными, так как если выполняются все необходимые условия, то обязательно будет получен ожидаемый результат.

✍ Приведите примеры достоверных событий.

⇨ **Определение.** *Невозможное событие* – событие, которое никогда не наступает в результате данного эксперимента. Вероятность невозможного события равна 0.

ℜ Примеры невозможных событий:

1) вода замерзла при температуре плюс десять градусов;
2) зимой на улице зацвели пионы;
3) наступило 35 июля.

✍ Из нижеперечисленных выберите невозможное событие:

- студент не посещал занятия, но сдал сессию на «отлично»;
- студент не явился на экзамены и сдал сессию на «отлично»;
- студент не посещал занятия и не сдал сессию;
- студент посещал все занятия, но не сдал сессию.

⇨ **Определение.** Событие, которое при воспроизведении опыта может наступить, а может и не наступить, называют *случайным событием*.

ℜ Примеры случайных событий:

1) получение отметки от 2 до 5 при сдаче экзамена;
2) выпадение числа от 1 до 6 при бросании игральной кости.

✍ Приведите примеры случайных событий.

Бросание монеты – это опыт, или испытание, выпадение орла – это событие. Вытягивание шара из мешка вслепую – испытание; попался красный шар – это событие и т. д.

События обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, ..., невозможное событие – $\varnothing$, достоверное событие – Ω.

⇨ **Определение.** Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B, называется *суммой* (объединением) *событий* A и B и обозначается $A + B$ или $A \cup B$.

𝕽 Два студента сдают экзамен. Событие A – первый студент сдал экзамен, событие B – второй студент сдал экзамен. Событие $A + B$ – первый или второй студент сдал экзамен.

✍ Сформулируйте примеры суммы событий.

⇨ **Определение.** Событие, состоящее в наступлении обоих событий (и A, и B), называется *произведением* (пересечением) событий A и B и обозначается $A \cdot B$ или $A \cap B$.

𝕽 Два студента сдают экзамен. Событие A – первый студент сдал экзамен, событие B – второй студент сдал экзамен. Событие $A \cdot B$ – оба студента сдали экзамен.

✍ Сформулируйте примеры произведения событий.

⇨ **Определение.** Событие, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит, называется *разностью событий* A и B и обозначается $A \setminus B$ или $A - B$.

𝕽 Два студента сдают экзамен. Событие A – первый студент сдал экзамен, событие B – второй студент сдал экзамен. Событие $A \setminus B$ – первый студент сдал экзамен, а второй не сдал.

✍ Сформулируйте примеры разности событий.

⇨ **Определение.** Событие, обозначаемое через $\overline{A}$, называется *противоположным* событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит.

𝕽 Студент сдает экзамен. Событие A – студент сдал экзамен, событие $\overline{A}$ – студент не сдал экзамен.

✍ Из нижеперечисленных выберите противоположные события:
- студент сдал сессию и студент сдал сессию на «отлично»;
- студент не явился на экзамен и сдал экзамен на «отлично»;
- студент не посещал занятия и не сдал сессию;
- студент не сдал экзамен и студент сдал экзамен на «отлично».

⇨ **Определение.** Если наступление события A делает невозможным наступление события B (и наоборот), то событие A и B называются *несовместными* или непересекающимися, в этом случае $A \cap B = \varnothing$. Для совместных событий $A \cap B \neq \varnothing$.

𝕽 Ученик пишет контрольную работу. Событие A – ученик получил оценку 2; событие B – ученик получил оценку 4. A и B – несовместные события, так как при написании одной контрольной работы ученик не может получить одновременно 2 и 4.

✍ Приведите примеры несовместных событий.

⇨ **Определение.** События $A_1, A_2, \ldots, A_k$ образуют *полную группу* событий, если они являются всеми возможными итогами одного испытания и выполняется условие: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Попарно несовместные события ($A_i \cdot A_j = \varnothing, \forall\, i \neq j$), образующие полную группу событий называют гипотезами.

𝕽 Примеры гипотез и попарно несовместных событий:

1) школьник подает заявку в МДЦ «Артек». События «заявка будет одобрена» и «заявка будет отклонена» составляют полную группу;
2) бросается игральная кость. События «выпадет 1», «выпадет 2», «выпадет 3», «выпадет 4», «выпадет 5», «выпадет 6» – попарно несовместны, образуют полную группу и являются гипотезами.

✍

1. Прочитайте текст задачи. Какими являются перечисленные в задаче события? Образуют ли перечисленные в задаче события полную группу?

Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал».

2. Приведите примеры:

– суммы событий;
– разности событий;
– произведения событий;
– противоположных событий;
– совместных событий;
– несовместных событий;
– полной группы событий.

3. Бросается игральный кубик. Событие A – при бросании игрального кубика выпадет четное число. Назовите событие, противоположное событию A.

4.2. Формулы комбинаторики

При решении задач по теории вероятности необходимо знать некоторые формулы комбинаторики.

⇨ **Определение**. *Формула для числа перестановок* применяется в задачах о перестановках в различных комбинациях нескольких разных объектов, причем в каждой комбинации должны присутствовать все объекты строго по одному разу.

Число таких различных комбинаций (*перестановок без повторения элементов*) определяется формулой $P_n = n!$

Если происходит перестановка и элементы в ней повторяются, то $P(k_1, ..., k_n) = \frac{(k_1 + ... + k_n)!}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!}$.

ℜ Сколько существует способов составления расписания на понедельник из 6 разных предметов?

Решение. $\mathrm{P}_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

✍ Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 2, 3 переставляя эти цифры местами?

⇨ **Определение.** *Формула для числа сочетаний* из n элементов по k: если в выборках из n объектов выбирается по k объектов и порядок их следования по условию задачи не имеет значения, то количество таких выборок $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний без повторений; число сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

ℜ Сколькими способами можно сформировать профсоюз студентов из трех человек, имея пять разных кандидатур?

Решение.

$$\mathrm{C}_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10.$$

⇨ **Определение.** *Формула размещения*: если из n разных объектов выбирается по k разных объектов, то с учетом порядка следования полное число разных выборок будет определять формула $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ – *число размещений без повторений.*

Если из n разных объектов выбирается по k объектов, то полное число таких различных выборок может быть определено по формуле $\widetilde{A}_n^k = n^k$, при условии что выборки отличаются порядком следования объектов и допускается повторение одного и того же объекта.

ℜ Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. $\mathrm{A}_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2} = 3\cdot4\cdot5 = 60$.

✍ Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трёх горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов – белого, синего, красного. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны – свой флаг?

4.3. Понятие вероятности события

Сравнивать случайные события (то есть события, которые могут наступить или не наступить) можно по степени возможности их наступления. С этой целью вводится числовая характеристика этой степени возможности (случайности), называемая вероятностью события. Для события A вероятность принято обозначать $P(A)$.

Большинство определений математической вероятности может быть разделено на следующие: статистическое, классическое и геометрическое.

4.4. Статистическое определение вероятности

⇨ **Определение**. *Относительной частотой* $P^*(A)$ события A в данной серии испытаний называется отношение m^* (числа испытаний, в которых появилось событие A) к n^* (общему числу проведенных испытаний), то есть $P^*(A)=\frac{m^*}{n^*}$.

Из данного определения следует, что относительная частота случайного события всегда заключена между нулем и единицей: $0 \le P^*(A) \le 1$.

⇨ **Определение**. *Статистической вероятностью* $P(A)$ события A называется предел, к которому стремится относительная частота $P^*(A)$ при неограниченном увеличении числа испытаний, то есть

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} P^*(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m^*}{n^*}.$$

ℜ Обучаясь в школе, ученик писал контрольную работу 100 раз. Из них на положительную оценку 89 раз. Чему равна относительная частота написания контрольных работ на положительную оценку?

Решение. $P^*=\frac{89}{100}$.

✍ По данным приемной комиссии в 2017 году в университет поступило 1408 юношей и 1156 девушек. Определить относительную частоту поступления в университет юношей.

4.5. Классическое определение вероятности

⇨ **Определение.** Вероятность события определяется равенством $P(A) = m/n$, где m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A; n – общее число возможных элементарных исходов испытания. Предполагается, что элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны.

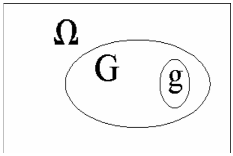
ℜ Бросается игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет не более четырех очков.

Решение. Общее число элементарных исходов $n = 6$ (могут выпасть 1, 2, 3, 4, 5, 6). Среди этих исходов благоприятствуют событию A (выпадет не более четырех очков) только четыре исхода: $m = 4$. Следовательно искомая вероятность $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

✍ 1. В группе 12 студентов, среди них 8 отличников. По списку отобрано 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 5 отличников.

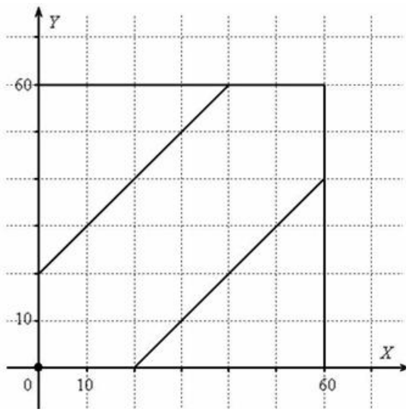
2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях четная.

4.6. Геометрическое определение вероятности



⇨ **Определение.** Пусть пространство элементарных событий состоит из бесконечного числа событий (точек), заполняющих некоторую область G, а событию A соответствует область g, содержащаяся в G и состоящая из событий (точек), благоприятствующих A. Тогда вероятностью $P(A)$ события A называется число, вычисляемое по формуле $P(A)=\frac{mes g}{mes G}$. В этой формуле под символом $mes\, G$ ($mes\, g$) понимают длину отрезка, площадь фигуры или объема тела в зависимости от того, где расположена область G (g): на прямой, в плоскости или в пространстве. Тогда вероятность $P(A)$ есть отношение геометрических размеров (мер – *mes*) областей, то есть длин отрезков, площадей, объемов.

ℜ Двое студентов – Коля и Оля – случайным образом приходят в столовую с 14:00 до 15:00, при этом обед каждого из них занимает примерно 20 минут. Найти вероятность того, что встреча студентов не состоится.



Решение. Оля и Коля могут встретиться в течение 60 минут. Выполним чертёж.

Площадь квадрата $S = 60^2 = 3600$ ед^2 соответствует общему числу исходов.

Рассмотрим противоположные события:

1) A – Оля и Коля встретятся во время обеда;

2) $\bar{A}$ – данная встреча не состоится.

Вычислим суммарную площадь двух треугольников, кв. ед.:

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40 + \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40 = 800 + 800 = 1600$$

– данное значение благоприятствует событию $\bar{A}$.

По геометрическому определению вероятности

$$P(\bar{A}) = \frac{S_{\text{тр}}}{S} = \frac{1600\text{ ед}^2}{3600\text{ ед}^2} = \frac{4}{9}.$$

✍ Двое студентов случайным образом приходят в столовую с 14:00 до 15:00, при этом обед каждого из них занимает примерно 20 минут. Найти вероятность того, что Коля встретится с Олей во время обеда.

Замечание. Воспользуйтесь тем, что противоположные события образуют полную группу.

4.7. Основные теоремы и формулы теории вероятности

4.7.1. Теорема сложения вероятностей

$\mathfrak{T}$ Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

В частном случае для несовместных событий A и B, т. е. когда $A \cdot B = \varnothing$ и $P(A \cdot B) = P(\varnothing) = 0$, теорема сложения имеет вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

$\mathfrak{R}$ В группе СОЦб-1101 обучаются 10 человек, в СОЦб-1102 – 15 человек, в СОЦб-1103 – 20 и в СОЦб-1104 – 25 человек. Случайным образом выбрали одного студента. Найти вероятность того, что выбранный студент – ученик группы СОЦб-1101; ученик группы СОЦб-1102; ученик группы СОЦб-1101 или СОЦб-1102.

Решение.

$$P(\text{ученик группы СОЦб-1101}) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7};$$

$$P(\text{ученик группы СОЦб-1102}) = \frac{15}{70};$$

$$P(\text{ученик группы СОЦб-1101 или СОЦб-1102}) = \frac{10+15}{70} = \frac{25}{70}.$$

✍ В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар синий; красный; синий или красный; белый, черный или синий.

Условная вероятность

⇨ **Определение.** Вероятность события A, вычисленная при условии того, что имело место другое событие B, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A/B)$ или $P_B(A)$.

События A и B *независимы*, если справедливо равенство

$$P(A/B) = P(A).$$

4.7.2. Теорема умножения вероятностей

𝔗 Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

В частности, для независимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A),$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

ℜ Три выпускника школ независимо друг от друга поступают в один и тот же вуз. Вероятность поступления для первого абитуриента равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три выпускника одновременно поступят в вуз.

Решение. Так как события независимы, то

$$P = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54.$$

✍ В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

4.8. Формула полной вероятности

ℑ **Теорема.** Вероятность события A, которое может наступить лишь при проявлении одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, ..., B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(\mathrm{B}_1) + P_{B1}(A) + P(B_2) + P_{B2}(A) + ...+ P(B_n) \cdot P_{Bn}(A),$$

где $P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n) = 1$.

ℜ Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь окажется отличного качества.

Решение. Событие A – деталь отличного качества.

B_1 – деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(B_1) = \frac{2}{3}$.

B_2 – деталь произведена вторым автоматом, причем $P(B_2) = \frac{1}{3}$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P_{B1}(A) = 0{,}6$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, $P_{B2}(A) = 0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1) + P_{B1}(A) + P(B_2) + P_{B2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

✍ На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех машинах. Первая машина изготавливает 25 %, вторая 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4, 2 %. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным?

4.9. Формула Бейеса

𝔍 **Теорема.** Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, ..., B_n, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ℜ Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности (п. 4.8) равна

$$P(A) = P(B_1) + P_{B1}(A) + P(B_2) + P_{B2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Бейеса равна

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

✍ В специализированную больницу поступают в среднем 50 % больных с заболеванием K, 30 % – с заболеванием L, 20 % – с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

4.10. Формула Бернулли

Часто встречаются задачи, в которых один и тот же опыт повторяется неоднократно. В результате каждого опыта может появиться или не появиться некоторое событие A с вероятностью $P(A) = p$. Нас будет интересовать не результат отдельного опыта, а общее число наступлений события A в серии n опытов (испытаний).

⇨ **Определение.** Вероятность того, что событие A появится ровно m раз в n испытаниях, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

ℜ Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять из восьми?

Решение. Так как противники равносильные, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы:

$$p = q = 1/2;$$

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = C_4^1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4};$$

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^3 = C_8^3 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}.$$

Так как $\dfrac{1}{4} > \dfrac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

✍ В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика равна 0,51.

4.11. Формула Пуассона

В случае, когда n велико, а p мало (обычно $p < 0{,}1$; $npq \le 9$), вместо сложной формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \ \lambda = np.$$

Формула Пуассона используется в задачах, относящихся к редким событиям.

ℜ На факультете насчитывается 1000 студентов. Вероятность того, что 1 сентября является днем рождения любого студента, равна 0,004. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно пяти студентов факультета?

Решение. Из условий задачи имеем $n = 1000$, $p = 0{,}004$, $k = 5$. По формуле Пуассона имеем $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4 < 10$. По таблице функции Пуассона при $k = 5$ получаем $P_{1000}(5) \approx 0{,}1563$.

✍ Станок штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь бракованная, равна 0,02. Какова вероятность того, что среди 200 деталей окажется 5 бракованных?

4.12. Локальная теорема Лапласа

𝔗 Теорема. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$; $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в любом учебнике по теории вероятности; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей. Функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

𝔎 Вероятность сдачи экзамена по философии на «отлично» у юношей равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 человек, сдавших философию на «отлично», окажется 50 юношей.

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n = 100$ (количество новорожденных), $p = 0{,}51$ (вероятность рождения мальчика), $q = 1 - p = 0{,}49$, $k = 50$. Так как $n = 100$ достаточно велико, используем локальную теорему Лапласа:

$$P_{100}(50) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49}}\varphi\left(\frac{50 - 100 \cdot 0{,}51}{\sqrt{100 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49}}\right) = 0{,}0782.$$

✍ Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

4.13. Интегральная теорема Муавра – Лапласа

𝕿 **Теорема.** Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 \le p \le 1)$, событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, приблизительно равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \cong \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$; $x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для функции Лапласа имеются таблицы, которые приведены в любом учебнике по теории вероятности. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

𝕽 Для преподавателя вероятность найти все ошибки в работе студента равна 0,75. За неделю он проверил 400 работ. Найти вероятность того, что в 280 работах выявлены все ошибки.

Решение. По условию $n = 400$, $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $k = 280$. Тогда $t = \frac{280 - 300}{\sqrt{75}} = -2{,}31$. По таблицам найдем $\varphi(-2{,}31) = \varphi(2{,}31) = 0{,}0277$. Искомая вероятность

$$P_{400}(280) = \frac{0{,}0277}{\sqrt{75}} = 0{,}0032.$$

✍ Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз.

Теоретический тест

1. Что является предметом теории вероятности?

2. Для чего применяются формулы комбинаторики?

3. В чём отличие применения формулы сочетаний от формулы размещений?

4. В чём отличие применения формулы сочетаний от формулы перестановок?

5. В чём отличие применения формулы перестановок от формулы размещений?

6. В каких случаях применяют формулу сложения вероятностей, а в каких – формулу умножения?

7. Для нахождения вероятности того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, применяется
1) локальная теорема Лапласа
2) формула Пуассона
3) интегральная теорема Муавра – Лапласа
4) формула Бернулли

8. Для нахождения вероятности того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз, применяется
1) локальная теорема Лапласа
2) формула Пуассона
3) интегральная теорема Муавра – Лапласа
4) формула Бернулли

9. Для нахождения вероятности редкого события, когда n велико, а p мало, применяется
1) локальная теорема Лапласа
2) формула Пуассона
3) интегральная теорема Муавра – Лапласа
4) формула Бернулли

10. Для нахождения вероятности того, что событие A появится ровно m раз в n испытаниях, применяется
1) локальная теорема Лапласа
2) формула Пуассона
3) интегральная теорема Муавра – Лапласа
4) формула Бернулли

11. В каких случаях целесообразно применять формулу Бейеса, а в каких – формулу полной вероятности?

12. Вероятность случайного события может принимать значение
1) 1,5
2) –1
3) 2
4) 0

13. Вероятность невозможного события может принимать значение
1) 1,5
2) −1
3) 2
4) 0

14. Вероятность достоверного события может принимать значение
1) 1,5
2) −1
3) 2
4) 0

15. Образуют ли события «вода находится в жидком состоянии» и «вода находится в твердом состоянии» полную группу?

Практический тест

1. В почтовом отделении продаются открытки пяти видов в неограниченном количестве. Сколькими способами можно купить шесть открыток?
1) 6
2) 36
3) 210
4) 30

2. Сколькими способами три награды могут быть распределены между десятью участниками соревнования?
1) 120
2) 720
3) 100
4) 30

3. Имеется 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами можно распределить уроки в день?
1) 252
2) 50
3) 500
4) 654

4. В группе МТМп в среду 4 пары: математика, информатика, русский язык, английский язык. Сколько можно составить вариантов расписания на среду?
1) 35
2) 44
3) 16
4) 24

5. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8?
1) 20
2) 800
3) 160
4) 40

6. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4 при условии, что цифры в числе не повторяются?
1) 24
2) 6
3) 36
4) 100

7. Компания из пяти человек собралась на пикник. Сколькими способами друзья могут сесть в автомобиль, если только один из них имеет водительские права?
1) 25
2) 120
3) 24
4) 18

8. В группе 30 студентов. Необходимо выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколько существует способов это сделать?
1) 90
2) 10000
3) 360
4) 24360

9. На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил три из них. Какова вероятность того, что ему попадется выученный вопрос?
1) 0,3
2) 0,5
3) 0,8
4) 0,95

10. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в семи из них встречается вопрос о производной. Вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не встретится вопрос о производной, равна
1) 0,35
2) 0,25
3) 0,65
4) 0,4

11. Два студента сдают экзамен по высшей математике. Вероятность сдачи экзамена у первого студента 0,6, у второго – 0,7. Найдите вероятность того, что экзамен сдадут оба студента.
1) 0,42
2) 0,4
3) 0,3
4) 0,58

12. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на 1-й и 2-й вопросы равна 0,9, на 3-й вопрос – 0,8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса.
1) 0,876
2) 0,954

3) 0,999
4) 0,785

13. Вероятность сдачи экзамена по лингвистике у группы ТМп равна 0,8. Найдите вероятность того, что из восьми студентов, сдающих этот предмет, семь человек получат положительные оценки. Ответ округлите до сотых.
1) 0,64
2) 0,2
3) 0,71
4) 0,29

14. Число грузовых машин, проезжающих мимо бензоколонки, относится к числу легковых машин, как 3:2. Известно, что в среднем одна из 30 грузовых и одна из 25 легковых машин останавливается для заправки. Найдите вероятность того, что проезжающая грузовая машина будет заправляться. Ответ округлите до тысячных.
1) 0,556
2) 0,445
3) 0,972
4) 0,664

15. На экзамен по истории пришли студенты трех групп, причем студенты первой группы составляют 20 % от всех присутствующих, второй – 46 %, третьей – 34 %. Известно, что средний процент неуспевающих студентов для первой группы равен 3 %, для второй – 2 %, для третьей – 1 %. Найдите вероятность того, что наудачу выбранный студент, не сдавший историю, окажется из второй группы. Ответ округлите до тысячных.
1) 0,365
2) 0,697
3) 0,584
4) 0,679

5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

5.1. Случайные величины, законы их распределения

⇨ **Определение.** *Случайной величиной* X называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение x_i. Выпадение некоторого значения случайной величины X есть случайное событие: $X = x_i$. Среди случайных величин выделяют прерывные (дискретные) и непрерывные случайные величины (номер повстречавшегося автомобиля, рост случайного попутчика).

5.2. Дискретная случайная величина

⇨ **Определение.** *Дискретной* называют случайную величину, которая может принимать отдельные изолированные значения с определенными вероятностями.

ℜ Рассмотрим дискретную случайную величину (ДСВ) – число появлений герба при трех бросаниях монеты. Возможные значения: 0, 1, 2, 3. Их вероятности равны соответственно

$$P(0)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8};\ P(1)=\frac{3}{8};\ P(2)=\frac{3}{8};\ P(3)=\frac{1}{8}.$$

Дискретная случайная величина X может быть задана рядом распределения или функцией распределения (интегральным законом распределения).

⇨ **Определение.** *Рядом распределения* называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$. Ряд распределения может быть задан в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

При этом вероятности p_i удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, потому что

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X = x_i\right) = \Omega,$$

где число возможных значений n может быть конечным или бесконечным.

ℜ В группе из восьми студентов три отличника. Наудачу отобрали двух студентов. Составить ряд распределения для ДСВ X – числа отличников среди двух отобранных студентов.

Решение. Среди двух отобранных студентов могут быть два, один или ни одного отличника. Вычислим вероятность наступления этих событий.

$P(2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$ — вероятность того, что оба студента отличники.

$P(1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot 2=\frac{30}{56}$ — вероятность того, что один отличник.

$P(0)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$ — вероятность того, что нет отличников.

Проверим соотношение $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$: $\sum=\frac{6}{56}+\frac{30}{56}+\frac{20}{56}=\frac{56}{56}=1$.

Поэтому имеем ряд распределения:

x_i	2	1	0
p_i	$\frac{6}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{20}{56}$

✍ Имеются четыре заготовки для детали. Вероятность изготовления качественной детали равна 0,8. Составить ряд распределения для ДСВ X – числа использованных заготовок, если детали изготавливают до первой бракованной.

⇨ **Определение.** Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольником распределения*. Для его построения возможные значения случайной величины x_i откладываются по оси абсцисс, а вероятности p_i – по оси ординат; точки A_i с координатами (x_i, p_i) соединяются ломаными линиями.

⇨ **Определение.** *Функцией распределения* случайной величины X называется функция $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности того, что случайная величина X будет меньше этого значения x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция $F(x)$ для дискретной случайной величины вычисляется по формуле $F(x)=\sum_{x_i<x} p_i$, где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

ℜ Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Найти функцию распределения вероятности F(x) этой случайной величины и построить ее.

Решение.

Если $x \le 10$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;
если $10 < x \le 20$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}2$;
если $20 < x \le 30$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$;
если $30 < x \le 40$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}35 = 0{,}85$;
если $40 < x \le 50$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}1 = 0{,}95$;
если $x > 50$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}1 + 0{,}05 = 1$.

✍ Постройте многоугольник распределения и полученную функцию распределения вероятности для предыдущего примера.

5.3. Непрерывная случайная величина

⇨ **Определение.** *Непрерывной* называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторые конечные или бесконечные промежутки.

ℜ Непрерывная случайная величина (НСВ) может обозначать момент выхода прибора из строя.

✍ Приведите пример непрерывной случайной величины.

Случайная величина называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любых x равенству

$$F(x)=\int_{-\infty}^{X} f(x)dx.$$

⇨ **Определение.** Функция $f(x)$ называется *плотностью вероятности*.

Непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения $F(x)$ (интегральным законом распределения), либо плотностью вероятности $f(x)$ (дифференциальным законом распределения).

⇨ **Определение.** *Функция распределения* $F(x) = P(X < x)$, где x – произвольное действительное число, дает вероятность того, что случайная величина меньше.

Функция распределения $F(x)$ имеет следующие *свойства*:

1) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;
2) $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$;
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Плотность вероятности $f(x)$ (дифференциальный закон распределения) обладает следующими основными *свойствами*:

1) $f(x) \ge 0$. Геометрически это означает, что вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;
2) $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x)$;
3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Геометрически это означает, что полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице;
4) $P(a \le X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Геометрически вероятность попадания величины X на участок (a, b) равна площади кривой распределения, опирающейся на этот участок.

$\mathfrak{R}$ Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\cos x, & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Требуется:

1) найти коэффициент A;

2) построить график плотности распределения $f(x)$;

3) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

4) найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Решение.

1. Для определения коэффициента A воспользуемся свойством $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ плотности распределения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos x dx = 2A = 1, \text{ откуда } A = \frac{1}{2}.$$

График плотности $f(x)$ постройте самостоятельно.

2. $F(x) = \int\limits_{-\pi/2}^{x} f(t)dt$. Получаем выражение функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

График функции $F(x)$ постройте самостоятельно.

3. $P(0 \le X < \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

✍ Задана функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ Ax, \text{ если } 0 < x \le 2 \\ A(2-x), \text{ если } 1 < x \le 2 \\ 0, \text{ если } x > 2 \end{cases}.$$

Найдите A и постройте график функции $f(x)$.

Напишите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график.

5.4. Основные характеристики (параметры распределения) случайной величины

Свойства случайной величины могут характеризоваться различными параметрами. Важнейшие из них – *математическое ожидание* случайной величины, которое обозначается через $M(X)$, *дисперсия* $D(X) = \sigma^2(X)$, корень квадратный из которой $\sigma(X)$ называют *среднеквадратичным отклонением* или стандартом, а также *мода Мо*.

5.4.1. Математическое ожидание

⇨ **Определение.** *Математическим ожиданием* $M(X)$ (средним по распределению) *дискретной* (прерывной) случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Эта запись позволяет дать механическую интерпретацию математического ожидания: $M(X)$ – абсцисса центра тяжести системы точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы, помещенные в эти точки, равны соответствующим вероятностям.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл: $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, причем предполагается, что интеграл сходится абсолютно; здесь $f(x)$ – плотность вероятности распределения случайной величины X.

Математическое ожидание $M(X)$ можно понимать как «теоретическое среднее значение случайной величины».

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

2. Математическое ожидание может быть как положительным, так и отрицательным числом.

3. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной, т. е. $M(C) = C$.

4. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т. е. $M(X+Y+...+W) = M(X) + M(Y) + ... + M(W)$.

5. Математическое ожидание произведения двух или нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин, т. е. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

6. Математическое ожидание произведения случайной величины X на постоянную C равно произведению постоянной C и математического ожидания случайной величины X: $M(CX) = C \cdot M(X)$.

$\mathfrak{R}$ Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале (0, 1). Найти математическое ожидание величины x.

Решение.

$$M(X) = 2\int_0^1 x \cdot x dx = 2\int_0^1 x^2 \cdot dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

✍ Найти математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X, заданной законом распределения.

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

5.4.2. Дисперсия

Если математическое ожидание случайной величины дает нам её среднее значение или точку на координатной прямой, вокруг которой разбросаны значения рассматриваемой случайной величины, то дисперсия характеризует степень разброса значений случайной величины около ее среднего.

⇨ **Определение.** *Дисперсией* $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания, т. е. $D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}$.

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Для *непрерывной* случайной величины X

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - M(X)\}^2 f(x)dx.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины.

2. Дисперсия постоянной величины всегда равна нулю: $D(C) = 0$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$.

4. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

5.4.3. Среднеквадратичное отклонение

⇨ **Определение.** Положительный корень из дисперсии называется среднеквадратичным отклонением и обозначается $\sigma = +\sqrt{D(X)}$.

ℜ Найти дисперсию $D(X)$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X, заданной законом распределения.

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Дисперсию можно вычислить по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

$M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3.$

$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$

ℜ Найти дисперсию непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}.$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-2}^{2} xf(x)dx = \int_{-2}^{2} x\frac{1}{4}dx = 0.$$

Значит, дисперсия равна

$$D(X) = \int_{-2}^{2} \{x - M(X)\}^2 f(x)dx = \int_{-2}^{2} x^2 \frac{1}{4}dx = \frac{2}{4}\int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

✍ Задана функция плотности вероятности случайной величины x.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0\\ (4-x^2), \text{ если } 0<x\le 2\\ 0, \text{ если } x>2\end{cases}.$$

Найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

5.4.4. Мода

⇨ **Определение.** *Мода* $Mo(X)$ – наиболее вероятное значение случайной величины X, для которого вероятность p_i или плотность вероятности $f(x)$ достигает максимума.

ℜ Найти моду ДСВ, заданной рядом распределения.

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. $Mo(X) = -5$ (так как $p = 0,4$ – максимальная).

✍ Найти моду ДСВ, заданной рядом распределения.

X	2	4	6	8
p	0,1	0,3	0,2	0,4

5.5. Некоторые частные распределения

5.5.1. Биномиальное распределение

⇨ **Определение.** Дискретная случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью $P_n(X=m)=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, где m = 0,1, ..., n, $0\le p\le 1$; $q=1-p$, называется *распределенной по биномиальному закону*.

Основные характеристики биномиального распределения:

$$M(X)=np,\ D(X)=npq.$$

5.5.2. Распределение Пуассона

⇨ **Определение.** Случайная величина X называется *распределенной по закону Пуассона* с параметром $a > 0$, если ее возможные значения равны 0, 1, ..., а соответствующие вероятности определяются формулой $P_m \approx \dfrac{a^m e^{-a}}{m!}$.

Основные характеристики распределения Пуассона:

$$M(X) = D(X) = a.$$

5.5.3. Геометрическое распределение

⇨ **Определение.** Дискретная случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью $P(X = m) = P_m = p \cdot q^m$, где $m = 0, 1, \ldots, n$; $0 \le p \le 1$; $q = 1 - p$, называется *распределенной по геометрическому закону.*

Основные характеристики геометрического распределения:

$$M(X) = \frac{1-p}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

5.5.4. Равномерное распределение

⇨ **Определение.** Непрерывная случайная величина X называется *распределенной равномерно* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases}.$$

Основные характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5.5.5. Экспоненциальное (показательное) распределение

⇨ **Определение.** Случайная величина X *распределена по экспоненциальному закону* с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}.$$

Основные характеристики показательного распределения:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

5.5.6. Нормальное распределение ($N(a, \sigma)$)

⇨ **Определение.** Непрерывная случайная величина имеет *нормальное распределение* с параметрами $a \in R$ и $\sigma > 0$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty < x < \infty,$$

где a – математическое ожидание; σ – среднее квадратическое отклонение X.

Основные характеристики нормального распределения:

$$a=M[X],\quad \sigma=+\sqrt{D[X]}.$$

Теоретический тест

1. Что называют случайной величиной?

2. Чем отличаются дискретная и непрерывная случайные величины?

3. Что характеризует математическое ожидание?

4. Что характеризует дисперсия?

5. Что собой представляет ряд распределения дискретной случайной величины?

6. Графическим изображением чего является многоугольник распределения дискретной случайной величины?

7. Чем задается непрерывная случайная величина?

8. Перечислите основные параметры распределения случайной величины.

9. Что называется стандартом случайной величины и как его находят?

10. Что является модой случайной величины?

11. Перечислите известные вам законы распределения.

12. По какому закону распределена непрерывная случайная величина X, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty.$$

13. По какому закону распределена случайная величина X, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}?$$

14. По какому закону распределена непрерывная случайная величина X, если ее плотность распределения вероятностей постоянна на отрезке $[a, b]$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\end{cases}?$$

15. По какому закону распределена дискретная случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью $P(X=m)=P_m=pq^m$?

Практический тест

1. Случайная величина X принимает значения 7, –2, 1, –5, 3 с равными вероятностями. Найти математическое ожидание.
1) 0,6
2) 0,7
3) 0,8
4) 0,9

2. $M(X)=5$, $M(Y)=2$. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X-3Y)$.
1) 6
2) 10
3) 3
4) 4

3. X и Y независимы. $D(X) = 5$, $D(Y) = 2$. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X + 3Y)$.
1) 38
2) 16
3) 26
4) 30

4. $D(\text{X}) = 1{,}5$. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X + 5)$.
1) 4
2) 6
3) 8
4) 10

5. Возможные значения случайной величины X таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности: $p(X = 2) = 0{,}4$; $p(X = 5) = 0{,}15$. Найти вероятность $p(X = 8)$.
1) 0,25
2) 0,35
3) 0,45
4) 0,55

6. Дан закон распределения ДСВ. Найти математическое ожидание.

x	–1	0	1
p	0,2	0,5	0,3

1) 0,1
3) 0,2
3) 0,3
4) 0,4

7. Дан закон распределения ДСВ. Найти дисперсию.

x	–1	0	1
p	0,2	0,5	0,3

1) 0,55
2) 0,73
3) 0,45
4) 0,49

8. Дан закон распределения ДСВ. Найти среднеквадратичное отклонение.

x	–1	0	1
p	0,2	0,5	0,3

1) 0,3
2) 0,7
3) 0,8
4) 0,6

9. В таблице статистического распределения, построенного по выборке, на одно число попала клякса:

x_j	10	20	30	40
p_j	0,1	0,2	##	0,5

Найти это число.
1) 0,5
2) 0,3
3) 0,2
4) 0,4

10. В таблице статистического распределения, построенного по выборке, одна цифра написана неразборчиво:

x_j	1	2	3	4
n_j	0,13	0,27	0,2#	0,35

Найти эту цифру.
1) 5
2) 4
3) 3
4) 2

11. Дан закон распределения дискретной случайной величины:

x	0	1	2
p	0,1	0,4	0,4

Найти математическое ожидание.
1) 0,7
2) 1
3) 1,1
4) 1,2

12. Задана таблица распределения случайной величины:

X	0	1	2	3	4
p	0,25	0,125	0,25	0,125	0,25

Найти вероятность $p(x < 3)$.

1) 0,5
2) 0,625
3) 0,782
4) 0,55

13. Задана таблица распределения случайной величины:

x	0	1	2	3
p	C	0,4	0,5	0,1

Найти величину C.

1) 0,1
2) 0,2
3) 0,3
4) 0,4

14. Куплено 1000 лотерейных билетов. На 80 из них выпал выигрыш по 100 руб., на 20 – по 500 руб., на 10 – по 1000 руб. Выберите таблицу, которая описывает закон распределения выигрыша.

1)

X	0	1	5	10
p	0,87	0,08	0,02	0,01

2)

X	0	1	5	10
p	0,89	0,08	0,02	0,01

3)

X	0	1	5	10
p	0,91	0,08	0,02	0,01

4)

X	0	1	5	10
p	0,8	0,08	0,02	0,01

15. $M(X) = 1{,}5$. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X + 5)$.

1) 8
2) 11
3) 12
4) 6

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аникин, А.Ю. Ряды Фурье: методические указания к выполнению типового расчета : учебно-методическое пособие / А.Ю. Аникин, А.С. Савин, В.Я. Томашпольский. – Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 32 с.
2. Апарина, Л.В. Числовые и функциональные ряды : учебное пособие / Л.В. Апарина. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Лань, 2012. – 160 с. – ISBN 978-5-8114-1341-6. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. – URL: https://e.lanbook.com/book/3798 (дата обращения: 12.08.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Боровков, А.А. Математическая статистика : учебник / А.А. Боровков. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 704 с. – (Классическая учебная литература по математике). – ISBN 978-5-8114-1013.
4. Буре, В.М. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В.М. Буре, Е.М. Парилина. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 416 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – ISBN 978-5-8114-1508-3.
5. Буре, В.М. Методы прикладной статистики в R и Excel : учебное пособие / В.М. Буре, Е.М. Парилина, А.А. Седаков. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 152 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – ISBN 978-5-8114-2229-6.
6. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды : учебник / Л.Д. Кудрявцев. – Москва : Физматлит, 2015. – 444 с.
7. Математика в инженерном образовании: теория функций нескольких переменных, дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды : учебное пособие / И.Ю. Пильщикова, Н.К. Земцова, Е.А. Немкова, В.М. Федосеев ; под редакцией В.М. Федосеева. – Пенза : ПензГТУ, 2012. – 151 с. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. – URL: https://e.lanbook.com/book/62453 (дата обращения: 12.08.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

8. Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты) : учебное пособие / В.А. Болотюк, Л.А. Болотюк, А.Г. Гринь, И.П. Гринь. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 288 с. – ISBN 978-5-8114-0974-7. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. – URL: https://e.lanbook.com/book/534 (дата обращения: 12.08.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
9. Свешников, А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций : учебное пособие / А.А. Свешников ; под общей редакцией А.А. Свешникова. – Изд. 5-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 446 с. – (Классическая учебная литература по математике). – ISBN 978-5-8114-0708-8.
10. Тарабан, М.В. Высшая математика. Числовые и функциональные ряды, ряды Фурье : учебное пособие / М.В. Тарабан, С.И. Затенко. – Санкт-Петербург : СПбГЛТУ, 2017. – 84 с. – ISBN 978-5-9239-0931-9. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. – URL: https://e.lanbook.com/book/92884 (дата обращения: 12.08.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
11. Шипачев, В.С. Высшая математика: базовый курс : учебное пособие для студентов вузов / В.С. Шипачев ; под редакцией А.Н. Тихонова. – 8-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2011. – 447 с.
12. Яновский, А.А. Ряды : учебное пособие / А.А. Яновский. – Ставрополь : СтГАУ, 2015. – 43 с.
13. Изучение математики онлайн. – URL: http://ru.onlinemschool.com/

Глоссарий

Логический символ	обозначает
$\exists$	существует
$\forall$	для любого, для каждого
$\in$	принадлежит
$\notin$	не принадлежит
N	множество натуральных чисел
Z	множество целых чисел
R	множество рациональных чисел
$\Rightarrow$	следует
ε	бесконечно малая величина
∞	бесконечность
$\cup$	объединение
$\cap$	пересечение
$\rightarrow$	стремится
$D(x)$	область определения функции
$E(y)$	множество значений функции
$\lvert à \rvert$	модуль числа
(a, b)	интервал
$[a, b)$ $(a, b]$	полуинтервал
$[a, b]$	отрезок
$\int$	неопределенный интеграл
$\int_{à}^{b}$	определенный интеграл
$(\ )^{l}$	производная

Ответы к тестам

Теоретический тест к теме «Числовые ряды»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	4	2	3	3	4	3	4	1,3	4	2,3	1,3,4	4	1	2	1

Практический тест к теме «Числовые ряды»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	4	2	2	4	1	2	2	1	2	5	1	1	3	1	1

Теоретический тест к теме «Функциональные ряды»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	4	2	3	1,3	1,3,4	2	2	3	3	3	3	да	да	нет	да

Практический тест к теме «Функциональные ряды»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	4	1	4	2	1	3	4	4	1	4	4	3	3	2	0

Практический тест к теме «Элементы теории вероятности»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	3	2	1	4	1	2	3	4	4	3	1	2	4	1	2

Практический тест к теме «Элементы математической статистики»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	3	4	1	2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	2	1