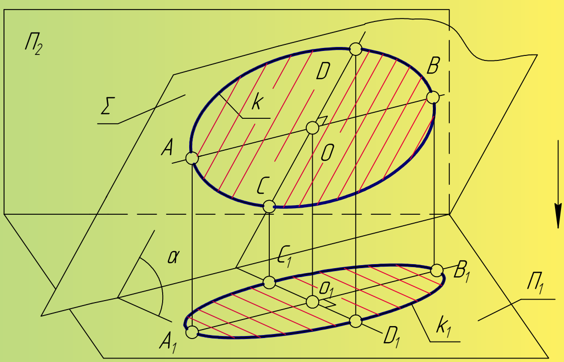
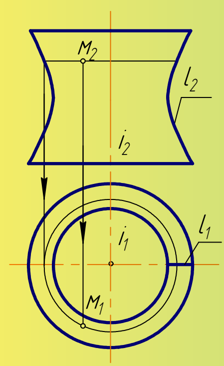
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Проектирование и эксплуатация автомобилей»

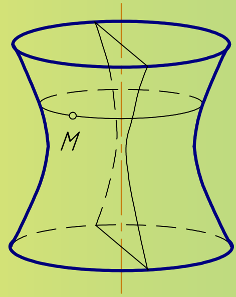
Т.А. Варенцова
Г.Н. Уполовникова

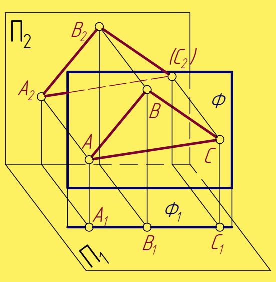
НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Электронное
учебное пособие









© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2019

ISBN 978-5-8259-1464-0

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор Волжского университета им. Татищева *С.В. Краснов*;
д-р техн. наук, профессор кафедры «Проектирование и эксплуатация автомобилей» Тольяттинского государственного университета *А.Г. Егоров*.

Варенцова, Т.А. Начертательная геометрия : электрон. учеб. пособие / Т.А. Варенцова, Г.Н. Уполовникова. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2019. – 1 оптический диск.

Учебное пособие разбито на четыре модуля. Освоить метод Монжа и научиться проецировать точку и линию студент сможет после изучения первого модуля. Второй модуль рассматривает комплексные чертежи плоскости и поверхности. Третий и четвертый модули служат для освоения способов решения соответственно позиционных и метрических задач. Текстовая часть теории сопровождается графическими алгоритмами решения геометрических задач. Каждый модуль заканчивается тестами и контрольными вопросами.

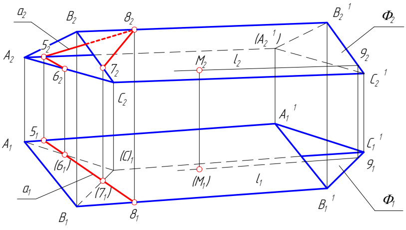
Предназначено для студентов технических направлений подготовки любой формы обучения.

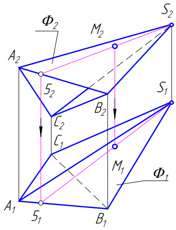
Текстовое электронное издание.

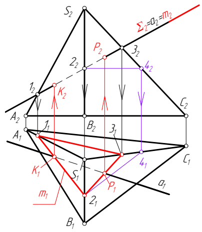
Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

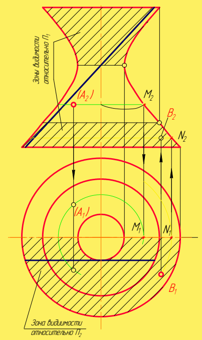
Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

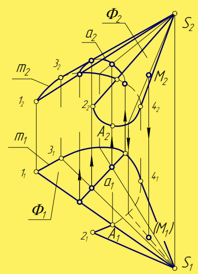
© ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», 2019











Редактор *Т.М. Воропанова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*, *И.В. Карасев*

Дата подписания к использованию 10.10.2019.
Объем издания 4,6 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-30-18.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия – часть математики, изучающая пространственные формы и отношения тел. В отличие от других естественных наук она изучает объекты реального мира в наиболее абстрактном виде, принимая во внимание только форму и размеры предметов и не учитывая их физических и иных свойств (материал, прочность, массу, цвет, шероховатость поверхностей и т. п.). Предметы, различаемые по этим свойствам, принято называть геометрическими фигурами. К ним относятся: точка, прямая, плоскость, окружность, треугольник, круг, шар, куб, параллелепипед, конус, цилиндр и другие.

Точка является результатом пересечения двух прямых, прямой и плоскости, в общем случае трех плоскостей (например, вершина тетраэдра). Точка не имеет размеров. Изображение точки дает след острия карандаша на бумаге. Прямая – простейшая линия, имеет одно измерение. Представление о прямой дает натянутая нить, кратчайшее расстояние между двумя точками, линия пересечений двух плоскостей, а изображением ее является след, который оставляет на бумаге острие карандаша, движущегося вдоль края линейки. Плоскость – простейшая поверхность, имеет два измерения. Представление о плоскости дает спокойная поверхность воды в озере, полированная поверхность стола.

Начертательная геометрия является тем разделом геометрии, который изучает теоретические основы методов построения изображений (проекций) геометрических фигур на какой-либо поверхности и способы решения различных позиционных и метрических задач, относящихся к этим фигурам, при помощи их изображений. Начертательная геометрия основывается на аксиомах и теоремах элементарной геометрии и инвариантах центрального и параллельного проецирования. Данное учебное пособие позволит освоить следующие цели и задачи.

Цель – освоение методов проецирования, т. е. овладение студентом теории изображения геометрических фигур. Развитие пространственно-образного мышления.

Задачи – построение чертежей на основе метода ортогонального проецирования. После окончания курса студент овладевает знаниями и умениями решать две главные задачи начертательной геометрии:

– моделирование пространства – умение по оригиналу построить его плоское изображение;
– реконструирование пространства – это умение по плоскому изображению восстановить оригинал.

В результате изучения дисциплины студент должен

иметь представление о роли и месте начертательной геометрии в инженерной деятельности будущего специалиста;

знать:

– основные геометрические понятия;
– методы проецирования геометрических фигур на плоскость чертежа;
– правила построения эпюра Монжа;

уметь:

– решать пространственные задачи на плоскости, т. е. определять по графическому признаку геометрических фигур их положение относительно плоскостей проекций;
– решать позиционные задачи;
– решать метрические задачи;

овладеть навыком пространственно-образного мышления, т. е. развить способность не только распознавать и создавать образы геометрических фигур, но и оперировать ими.

Дисциплина «Начертательная геометрия» является геометрическим инструментарием инженерного мышления, поэтому должна обеспечить базу для дальнейшего изучения инженерных дисциплин.

Модуль 1. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ. ЭПЮР МОНЖА. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ТОЧКИ, ПРЯМЫХ И КРИВЫХ ЛИНИЙ

Символика и обозначения

1. Точки – прописными буквами латинского алфавита (A, B, C...) или арабскими цифрами (1, 2, 3...).
2. Линии – строчными буквами латинского алфавита (a, b, c...).
3. Поверхности – прописными буквами греческого алфавита: Γ – гамма, Δ – дельта, Λ – лямбда, Σ – сигма, Φ – фи, Ψ – пси, Ω – омега...
4. Углы – $\angle ABC$, $a \wedge b$, $m \wedge AB$ или α, β, γ...
5. Параллельность – $\parallel$
6. Перпендикулярность – $\perp$
7. Касание – $\underline{\cup}$
8. Совпадение или тождество – $=$
9. Принадлежность, включение – $\subset$ или $\in$, концы знака направлены в сторону большемерной фигуры.
10. Пересечение – $\cap$
11. Вращение – ⟲
12. Логическое следствие – $\Rightarrow$
13. Фигура, проецирующая относительно... – $\perp\!\!\!\perp$
14. Скрещивающиеся прямые – $\underline{\circ}$
15. Расстояние между элементами пространства – |... | : $|AB|$ – расстояние от точки A до точки B; $|Aa|$ – расстояние от точки A до линии a; $|ab|$ – расстояние между линиями a и b; $|A\Sigma|$ – расстояние от точки A до поверхности Σ; $|\Gamma\Sigma|$ – расстояние между поверхностями.

Примеры символической записи

1. $\Sigma(a \cap b) \parallel \Gamma(A, m)$ – плоскость, заданная пересекающимися прямыми a и b, параллельна плоскости, заданной точкой A и прямой m.
2. $AB \perp \Gamma$ – отрезок AB перпендикулярен плоскости Γ.
3. $A_1 = B_1$ – проекции точек A и B совпадают.
4. $A \in a$ – точка A принадлежит прямой a.
5. $a \subset \Sigma$ – прямая a принадлежит плоскости Σ.

6. $A \in b$ – прямая b проходит через точку A.
7. $\Sigma \cup \Phi(OA)$ – плоскость Σ, касательная к сфере Φ, заданной центром O и точкой A, принадлежащей сфере.

Краткая историческая справка

Первые попытки построения проекционных изображений уходят в далекие времена. Еще в Древнем Египте при возведении сооружений применялись планы и фасады, т. е. использовались горизонтальные и фронтальные проекции предметов, но без проекционной связи.

Накопленные знания по теории и практике изображения систематизировал и обобщил французский ученый **Гаспар Монж** (1746–1818). Работа Монжа «Начертательная геометрия» была опубликована в 1795 г. как учебное пособие.

В России курс начертательной геометрии впервые начал читать в 1810 году К.И. Потье, ученик Монжа.

В 1812 г. вышел в свет первый в России оригинальный курс начертательной геометрии Я.А. Севастьянова. Большой вклад внесли в развитие начертательной геометрии проф. Н.И. Макаров, В.И. Курдюмов, Н.А. Рынин, И.И. Котов, Н.С. Кузнецов и др.

1.1. Методы проецирования. Основные свойства проецирования

В курсе элементарной геометрии изучается трехмерное пространство, названное евклидовым по имени греческого ученого Евклида, описавшего его основные свойства и закономерности. Однако положений евклидовой геометрии недостаточно для выполнения некоторых операций проецирования.

Развитие науки привело к расширению понятия пространства, так как вселенная представляется теперь состоящей из искривленных пространств. Это позволило дополнить привычное для нас евклидово пространство новыми элементами – бесконечно удаленной точкой, прямой, плоскостью. Для того, чтобы получить соответствующие элементы в тех случаях, когда их не оказывается при выполнении операции проецирования, достаточно потребовать, чтобы две параллельные прямые считались пересекающимися, при этом точку их пересечения называют несобственной точкой или бесконечно удаленной. Это понятие было введено в 1636 году французским математиком Жаном Дезаргом (графические доказательства можно посмотреть в учебнике по начертательной геометрии автора С.А. Фролова в параграфе 2 «Реконструкция евклидова пространства»).

Будем считать, что:

1) две параллельные прямые пересекаются в единственной несобственной точке (рис. 1.1):

$$m \parallel n \leftrightarrow m \cap n = M\infty;$$

2) две параллельные плоскости пересекаются по единственной несобственной прямой (рис. 1.2):

$$\Sigma \parallel \Gamma \leftrightarrow \Sigma \cap \Gamma = a\infty.$$

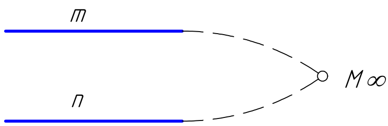


Рис. 1.1

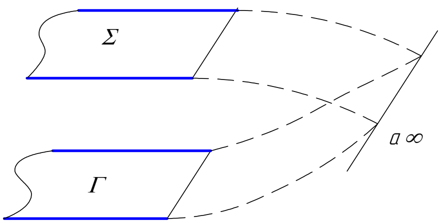


Рис. 1.2

Вывод. Несобственные элементы позволяют создать более строгую теорию метода проецирования.

Методы проецирования

В этом разделе вы освоите основной метод начертательной геометрии – проецирование. Рассмотрите центральное проецирование; параллельное проецирование; ортогональное проецирование.

Основной метод начертательной геометрии – метод проецирования

Различают:

1) центральное проецирование;

2) параллельное проецирование;

3) ортогональное проецирование.

Аппарат проецирования

$П_1$ – плоскость проекций (картинная плоскость);

S – центр проецирования;

A – точка в пространстве;

A_1 – проекция точки A на плоскость проекций;

l_A – проецирующий луч.

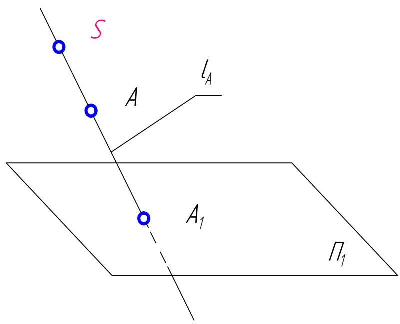


Рис. 1.3

Такой чертёж, с использованием только одной плоскости проекций, называется однокартинным (рис. 1.3).

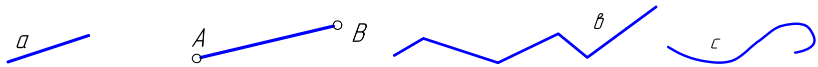
Спецификой курса начертательной геометрии является то, что изучение ведется на абстрактных геометрических фигурах: точка, линия, плоскость, поверхность. Мы будем изучать принципы построения изображений этих фигур на плоскости.

Прежде всего дадим определение простейшим геометрическим фигурам: точке и линии.

Точка – это нульмерная геометрическая фигура, неделимый элемент пространства, т. е. она не может быть определена другими более элементарными понятиями.

Обозначается *A*, *B*, *C*... – прописными буквами латинского алфавита или цифрами. Точка не имеет размеров; то, что мы показываем на чертеже точку в виде какой-то площади, пересечением двух линий или кружочком, является лишь ее условным изображением.

Линия – одномерная геометрическая фигура; обозначается строчными буквами латинского алфавита – *а*, *в*, *с*... В начертательной геометрии ***линия определяется кинематически, как траектория непрерывно движущейся точки в пространстве***, и рассматриваются следующие линии:



1. Прямая 2. Отрезок 3. Ломаная – состоящая из отрезков 4. Кривая

Центральное проецирование

Проецирование, когда проецирующий луч проходит через фиксированную точку S, называется центральным. На рис. 1.4 показано построение центральных проекций точек B, C, D и прямой:

Π_1 – плоскость проекций (картинная плоскость);

S – центр проецирования;

B, C, D – точки в пространстве;

C_1, B_1, D_1 – проекции точек на плоскость проекций Π_1;

l_B, l_C, l_D – проецирующие лучи;

Σ – плоскость, проведенная через центр проецирования S и прямую a;

a (AM) – прямая (или отрезок) в пространстве;

a_1 (A_1M_1) –проекция прямой (или отрезка) на плоскость проекций Π_1.

Через точку S (центр проецирования) и точку B проведем проецирующий луч l_B, отметим точку пересечения проецирующего луча с картинной плоскостью: $S \in l_B$, $B \in l_B$, $l_B \cap \Pi_1 = B_1$. На чертеже видно, что каждой точке пространства соответствует единственная точка на плоскости проекций.

Аналогично точке B можно построить проекцию любой точки пространства, например, точки C:

$$C_1 = l_C \cap \Pi_1, \text{ если } C \in \Pi_1, \text{ то } C = C_1.$$

Если $l_D \parallel \Pi_1$, то проекцией точки $D \to D_1$ служит несобственная точка плоскости Π_1.

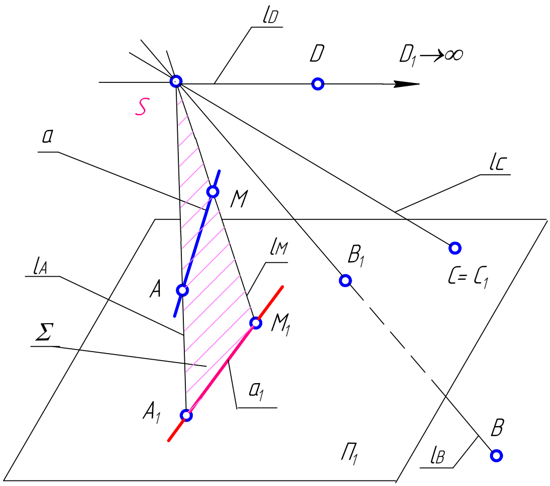


Рис. 1.4

По принципу центрального проецирования работают фото- и кинокамеры. Упрощенная схема работы человеческого глаза близка к этому виду проецирования. Изображения, построенные по принципу центрального проецирования, наиболее наглядны, и их широко используют в своей работе архитекторы, дизайнеры, геологи и др.

Описанным методом центрального проецирования может быть построена проекция любой точки геометрической фигуры, а следовательно, и проекция самой фигуры. Например, центральную проекцию отрезка AM на плоскость Π_1 можно построить как линию пересечения плоскости Σ, проведенной через центр S и прямую $a(AM)$, с плоскостью проекций. Так как две плоскости пересекаются по единственной прямой, то проекция прямой есть прямая, и притом единственная, т. е. $\Sigma \supset S, AM$; $\Sigma \cap \Pi_1 \Rightarrow A_1M_1$.

Параллельное проецирование

Проецирование называется параллельным (рис. 1.5), если центр проецирования удален в бесконечность, а все проецирующие лучи параллельны заданному направлению s.

s – направление проецирования (рис. 1.5).

Чтобы найти точку A_1 – параллельную проекцию точки A, построенную по направлению s на плоскости проекций Π_1, нужно через точку A провести проецирующий луч l_A, параллельный прямой s, и определить точку его пересечения с плоскостью Π_1:

$$l_A \supset A,\ l_A \parallel s,\ l_A \cap \Pi_1 = A_1.$$

Точка A_1 является параллельной проекцией как для точки A, так и для точек A^1 и A^2.

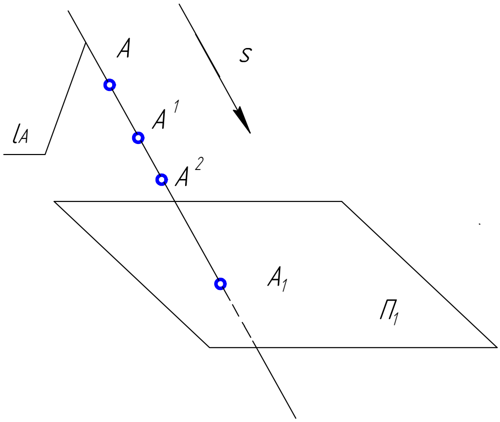


Рис. 1.5

Свойства параллельных проекций

Геометрическая фигура в общем случае проецируется на плоскость проекций с искажением, но некоторые свойства оригинала сохраняются в проекциях при любом преобразовании и называются его инвариантами (остаются неизменными).

Первое свойство. Проекция точки на плоскость проекций есть точка.

Важно не само свойство, а следствие из него.

Каждой точке пространства соответствует одна и только одна точка на плоскости проекций. Доказательством может служить то, что через точку A можно провести только одну прямую, параллельную заданному направлению проецирования, и эта прямая пересечется с плоскостью проекций только в одной точке (рис. 1.6).

$$l_A \supset A,\ l_A \parallel s,\ l_A \cap \Pi_1 = A_1.$$

Второе свойство. Проекция прямой линии в общем случае есть прямая.

$$\Gamma \cap a,\ \Gamma \cap \Pi_1 \Rightarrow a_1.$$

Если прямая параллельна направлению проецирования, то её проекция вырождается в точку (рис. 1.6).

$$l_C \supset C,\ l_C \parallel s,\ l_C \cap \Pi_1 = C_1;\ C_1 \text{ – точка.}$$

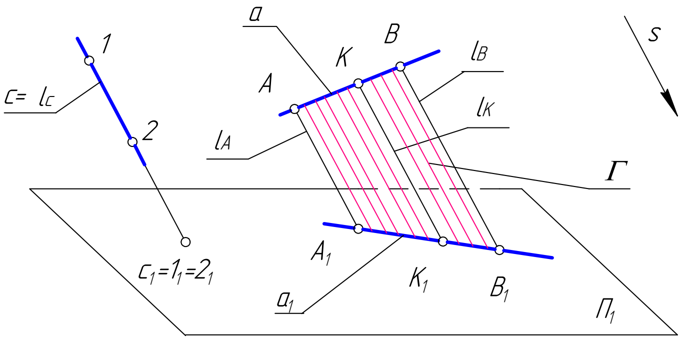


Рис. 1.6

Третье свойство – принадлежности. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой.

$$K \in a \Rightarrow K_1 \in a_1.$$

Это свойство следует из определения проекции фигуры как совокупности проекций всех ее точек (рис. 1.6).

Четвертое свойство – свойство простого соотношения трех точек. Если точка делит отрезок в некотором отношении, то проекция этой точки делит отрезок в том же отношении (рис. 1.6).

$$|AK| : |KB| = |A_1K_1| : |K_1B_1|.$$

Пятое свойство. Если прямые в пространстве параллельны, то их проекции тоже параллельны (рис. 1.7).

$$m \parallel n \Rightarrow m_1 \parallel n_1, \text{ так как } \Gamma \parallel \Sigma.$$

Шестое свойство. Отношение длин отрезков параллельных прямых равно отношению длин их проекций (рис. 1.7).

$$AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1.$$

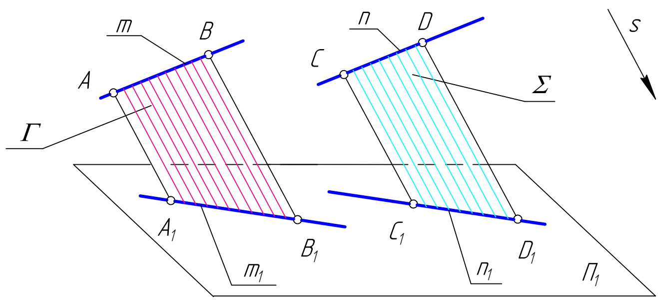


Рис. 1.7

Седьмое свойство. Проекция геометрической фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскостей проекций (рис. 1.8).

$$\Pi_1 \parallel \Pi_1^1 \Rightarrow A_1B_1C_1 = A_1^1B_1^1C_1^1.$$

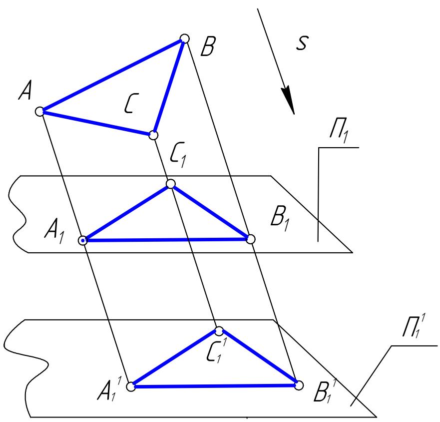


Рис. 1.8

Если $\Pi_1 \parallel \Pi_1^1$, то $A_1A_1^1 = B_1B_1^1 = C_1C_1^1$ – как параллельные отрезки, заключенные между параллельными плоскостями, следовательно, четырехугольники $A_1A_1^1B_1^1B_1$; $B_1B_1^1C_1^1C_1$ и $C_1C_1^1A_1^1A_1$ являются параллелограммами, а у параллелограммов параллельные стороны равны. Поэтому $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_1^1B_1^1C_1^1$.

Рассмотренные свойства параллельного проецирования сохраняются при любом направлении проецирования.

Ортогональное проецирование

Ортогональное (прямоугольное) проецирование является частным случаем параллельного проецирования, когда направление проецирования перпендикулярно к плоскости проекций ($s \perp П_1$). В этом случае проекции геометрических фигур называются ортогональными.

Ортогональному проецированию присущи все свойства параллельного проецирования, а также свойства, относящиеся только к ортогональному проецированию.

Свойства ортогонального проецирования

Первое свойство. В общем случае ортогональная проекция отрезка всегда меньше его натуральной длины.

Если провести $A^*B \parallel A_1B_1$, то $\angle AA^*B = 90°$. Из прямоугольного треугольника следует, что AB – гипотенуза, A^*B – катет, а гипотенуза всегда больше катета ($A^*B = AB \cdot \cos\alpha$), (рис. 1.9).

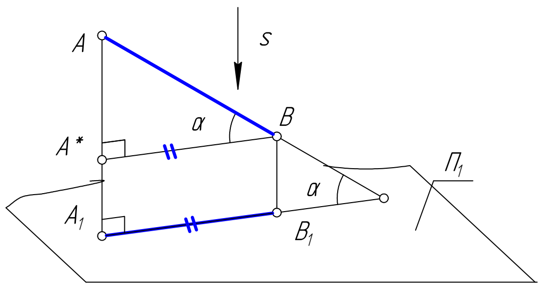


Рис. 1.9

Рассмотрим частные случаи.

Если $\alpha = 0 \Rightarrow |A_1B_1| = |AB|$, т. е. проекция равна самому отрезку.

Если $\alpha = 90° \Rightarrow A_1 = B_1$, т. е. проекция отрезка – точка.

Второе свойство. Теорема о проецировании прямого угла

Если одна сторона прямого угла параллельна какой-нибудь плоскости проекций, а вторая сторона не перпендикулярна ей, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения (рис. 1.10).

Дано: $\angle ABC = 90°$, $BC \parallel П_1$.

Доказать: $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

Доказательство:

плоскость $\Phi = AB \cap BB_1$.

плоскость $\Sigma = BC \cap BB_1$.

$BC \perp \Phi$, так как $BC \perp AB$ и $BC \perp BB_1$, но $B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow B_1C_1 \perp \Phi \Rightarrow B_1C_1 \perp A_1B_1$, значит, $\angle A_1B_1C_1$ – прямой.

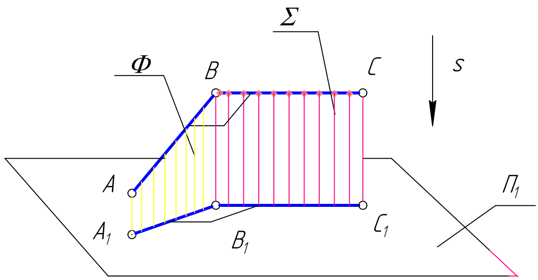


Рис. 1.10

Третье свойство. Ортогональная проекция окружности в общем случае есть эллипс (рис. 1.11).

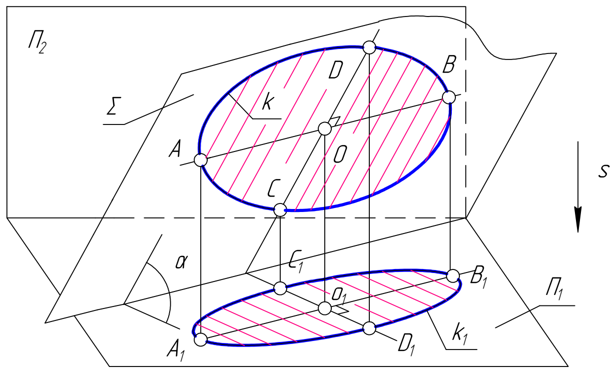


Рис. 1.11

Заключим окружность в плоскость Σ, $\Sigma \wedge \Pi_1 = \alpha$, если $0 < \alpha < 90°$, то окружность (k) – эллипс (k_1).

$AB \perp CD$ – сопряженные диаметры, пусть $AB \parallel \Pi_1$.

$A_1B_1 = AB$ – большая ось эллипса.

$C_1D_1 = CD \cdot \cos\alpha$ – малая ось эллипса.

Все хорды окружности, параллельные CD, проецируются с коэффициентом сжатия $\cos \alpha$ и делятся осью A_1B_1 пополам, т. е. ортогональная проекция окружности, в общем случае, есть замкнутая центрально симметричная кривая второго порядка, имеющая две взаимно перпендикулярные оси, т. е. эллипс.

Частные случаи:

1. Если $\Sigma \parallel \Pi_1$, то окружность k проецируется без искажения.
2. Если $\Sigma \perp \Pi_1$, т. е. $\angle\alpha = 90^\circ$, то окружность k – прямая линия, равная диаметру.

1.2. Метод Монжа

В машиностроительных чертежах используется метод прямоугольных проекций. Поэтому дальнейшее изучение курса будем вести, используя метод ортогонального проецирования.

Чтобы однозначно решить две основные задачи курса начертательной геометрии, чертежи должны удовлетворять следующим требованиям:

1) простота и наглядность;
2) обратимость чертежа.

Рассмотренные методы проецирования с использованием однокартинных чертежей позволяют решать прямую задачу (т. е. по данному оригиналу построить его проекцию). Однако обратную задачу (т. е. по проекции воспроизвести оригинал) решить однозначно невозможно. Эта задача допускает бесчисленное множество решений, так как каждую точку A_1 плоскости проекций Π_1 можно считать проекцией любой точки проецирующего луча l^A, проходящего через A_1. Таким образом, рассмотренные однокартинные чертежи не обладают свойством **обратимости**.

Для получения обратимых однокартинных чертежей их дополняют необходимыми данными. Существуют различные способы такого дополнения. Например, чертежи с числовыми отметками (рис. 1.12).

Способ заключается в том, что наряду с проекцией точки A_1 задаётся высота точки, т. е. её расстояние от плоскости проекций. Задают также масштаб. Такой способ используется в строительстве, архитектуре, геодезии и т. д. Однако он не является универсальным для создания чертежей сложных пространственных форм (рис. 1.12).

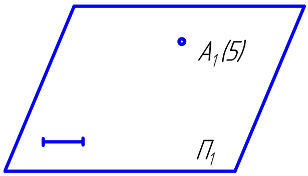


Рис. 1.12

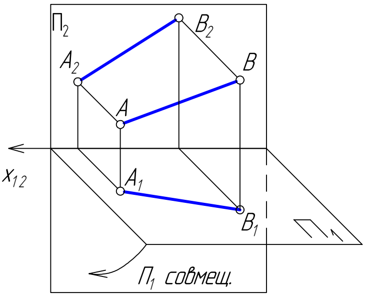


Рис. 1.13

В 1798 году французский геометр-инженер Гаспар Монж обобщил накопленные к этому времени теоретические знания и опыт и впервые дал научное обоснование общего метода построения изображений, предложив рассматривать плоский чертёж, состоящий из двух проекций, как результат совмещения двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Отсюда ведёт начало принцип построения чертежей, которым мы пользуемся и поныне.

Поставим перед собой задачу построить проекции отрезка *AB* на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций Π_1 и Π_2 (рис. 1.13).

Пространственная модель

$\Pi_1 \perp \Pi_2$; $AA_1 \perp \Pi_1$; $|AA_1|$ – расстояние от A до Π_1.

$AA_2 \perp \Pi_2$; $|AA_2|$ – расстояние от A до Π_2.

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций.

Π_2 – фронтальная плоскость проекций.

A_1B_1 – горизонтальная проекция отрезка.

A_2B_2 – фронтальная проекция отрезка.

x_{12} – линия пересечения плоскостей проекций.

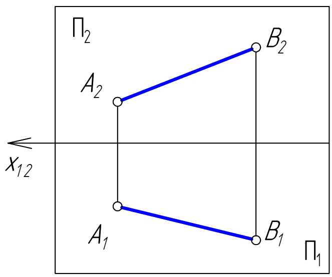


Рис. 1.14

Однако в таком виде чертёж неудобно читать. Поэтому Гаспар Монж предложил совместить эти плоскости проекций, причём Π_2 принимается за плоскость чертежа, а Π_1 поворачивается до совмещения с Π_2. Такой чертёж (рис. 1.14) называется комплексным чертежом. Это **двухкартинный** чертёж.

Плоская модель

Рассмотрим совмещение плоскостей проекций (со всем их содержимым) на плоском чертеже. Совокупность проекций множества точек пространства на Π_1 называется горизонтальным полем проекций, а на Π_2 – фронтальным полем проекций.

x_{12} – ось проекций, база отсчёта.

A_1A_2, $B_1B_2 \Rightarrow$ ***линии связи – это прямые, соединяющие две проекции точки на комплексном чертеже***. Линии связи перпендикулярны оси проекций.

Свойства комплексного чертежа Монжа

1. Две проекции точки всегда лежат на одной линии связи установленного направления.

2. Все линии связи одного установленного направления параллельны между собой.

Безосный чертёж

Если совмещённые плоскости Π_1 и Π_2 перемещать параллельно самим себе на произвольные расстояния (см. положение осей x_{12}, $x_{12}{}^1$, $x_{12}{}^{11}$ на рис. 1.15), то будут меняться расстояния от фигуры до плоскостей проекций.

Однако сами проекции фигуры (в данном случае – отрезка AB) при параллельном перемещении плоскостей проекций не меняются (согласно 7 свойству параллельного проецирования).

Из рис. 1.15 видно, что при любом положении оси x величины ΔZ – разность расстояний от концов отрезка до Π_1 и Δy – разность расстояний от концов отрезка до Π_2 остаются неизменными. Поэтому нет необходимости указывать положение оси x_{12} на комплексном чертеже и тем самым предопределять положение плоскостей проекций Π_1 и Π_2 в пространстве.

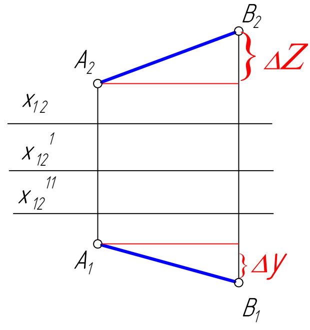


Рис. 1.15

Это обстоятельство имеет место в чертежах, применяющихся в технике, и такой чертёж называется **безосным**.

Безосный чертеж позволяет, не привязываясь к осям, располагать изображения в удобном для исполнителя положении, но с соблюдением проекционной связи, т. е. построение чертежа происходит по законам, установленным Гаспаром Монжем.

Доказательство обратимости чертежа Монжа

Если по плоскому изображению можно определить натуральную длину отрезка и его ориентацию в пространстве, значит, реконструирование пространства возможно, то есть однозначно решается вторая (обратная) задача курса начертательной геометрии.

Пространственный чертёж (рис. 1.16)

1) AB – отрезок прямой в пространстве. A_1B_1 – горизонтальная проекция отрезка.

Через точку A проведём $AB^1 \parallel A_1B_1$. Тогда получим: 1) ΔABB^1 – прямоугольный;

2) AB – гипотенуза треугольника – натуральная величина отрезка;

3) $AB^1 = A_1B_1$ – один из катетов равен проекции отрезка AB на плоскость проекций Π_1;

4) второй катет BB^1 есть разность удалений концов отрезка от плоскости проекций Π_1.

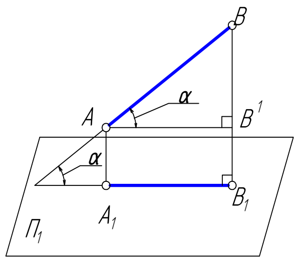


Рис. 1.16

Проведя аналогичные рассуждения для плоскости проекций Π_2, можно сделать вывод, что натуральная величина отрезка есть гипотенуза прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является одна из проекций отрезка. Другой катет есть разность удалений концов отрезка от той плоскости, проекцию на которую взяли за первый катет.

Такой метод нахождения натуральной величины отрезка общего положения называют ***методом прямоугольного треугольника****.*

Плоский чертёж

Дано: две проекции отрезка AB: A_2B_2 и A_1B_1 (рис. 1.17). Требуется определить натуральную величину этого отрезка.

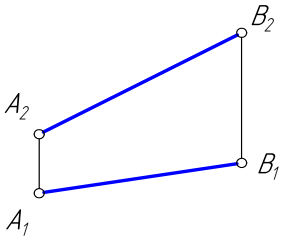


Рис. 1.17

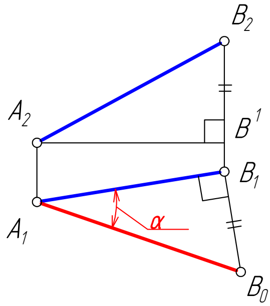


Рис. 1.18

1. Исходя из вышесказанного, A_1B_1 является одним из катетов прямоугольного треугольника.

2. Чтобы найти второй катет, проведём $A_2B^1 \perp$ линиям связи (рис. 1.18). B_2B^1 – это разность удалений концов отрезка от Π_1.

3. Откладываем расстояние $|B_2B^1|$ на перпендикуляре к A_1B_1 с любой стороны.

4. Отрезок A_1B_0 – это натуральная величина $|AB|$, а угол α – угол наклона AB к Π_1.

Аналогично можно найти угол наклона данного отрезка к Π_2, построив прямоугольный треугольник на Π_2.

Вывод: ***двухкартинный чертёж Монжа обратим.***

1.3. Трёхкартинный комплексный чертёж точки

Двухкартинный чертёж является метрически определённым чертежом, то есть он вполне определяет форму и размеры фигуры и её ориентацию в пространстве. Однако часто комплексный чертёж становится более ясным, если помимо двух основных проекций дана ещё одна проекция на третью плоскость. В качестве такой плоскости применяют профильную плоскость проекций Π_3.

Пространственный чертёж (рис. 1.19)

$\Pi_3 \perp x$, поэтому $\Pi_3 \perp \Pi_1$ и $\Pi_3 \perp \Pi_2$.

Три плоскости проекций образуют в пространстве прямоугольный трёхгранник, то есть систему трёх взаимно перпендикулярных плоскостей. Рёбра этого трёхгранника будем обозначать x, y, z.

Π_3 – профильная плоскость проекций.

A_3 – профильная проекция точки A. $|AA_3| = |3A_2| = |2A_1|$ – удаление точки A от Π_3.

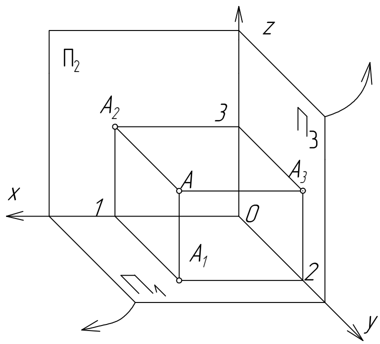


Рис. 1.19

Плоский чертёж (рис. 1.20)

Развернём плоскости Π_1 и Π_3 до совмещения с Π_2.

A_1A_2 – линия связи в системе Π_1–Π_2.

$|3A_3| = |1A_1|$.

A_2A_3 – линия связи в системе Π_2–Π_3.

$1A_2$ – высота расположения точки,

$1A_1$ – глубина расположения точки,

$3A_2$ – ширина расположения точки.

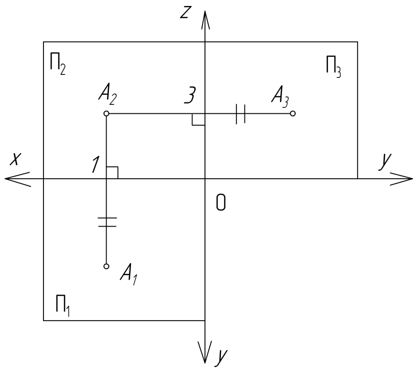


Рис. 1.20

x – абсцисса; y – ордината; z – аппликата.

Связь ортогональных проекций точки с её прямоугольными координатами

Если в точку O поместить начало декартовой прямоугольной системы координат, то линии пересечения плоскостей проекций совпадут с соответствующими осями координат, и задание точки двумя ортогональными проекциями будет равносильно заданию её тремя прямоугольными координатами.

Так, по заданным

A_1 – определяем (x, y);

A_2 – определяем (x, z).

И наоборот.

Пример. Даны координаты точки A(18, 24, 18), построить ортогональные проекции точки A(A_1, A_2). По заданным координатам задаём две проекции точки A (рис. 1.21). При необходимости можно построить A_3.

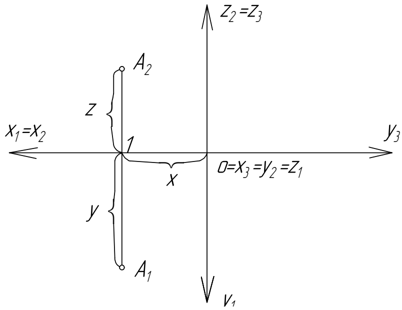


Рис. 1.21

Рассмотрим подробно трёхкартинный чертёж точки. Зададим на чертеже (рис. 1.22) точки с координатами: A(15, 20, 10); B(15, 20, 30); C(25, 10, 15); D(25, 30, 15); E(35, 20, 10); F(45, 35, 0); M(55, 0, 40); N(65, 0, 0).

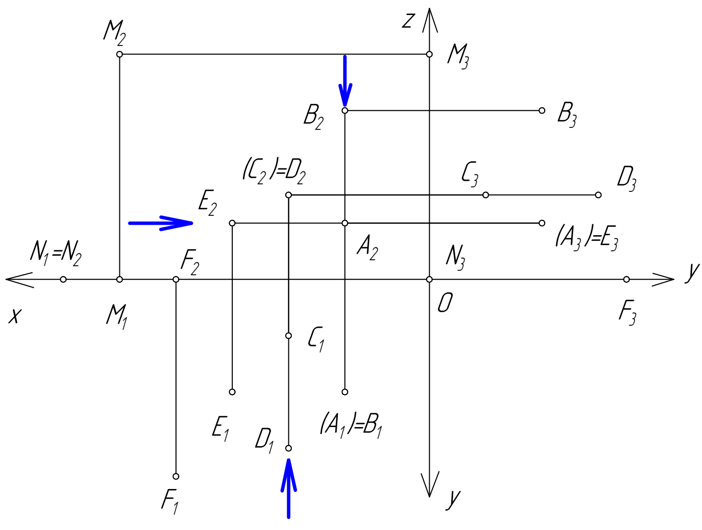


Рис. 1.22

Точки А и В, у которых совпадают горизонтальные проекции, называются ***горизонтально конкурирующими*** (рис. 1.23). Из двух точек на Π_1 видна та, что выше. Расположение точек «выше – ниже» определяют по фронтальной проекции.

Точки C и D, у которых совпадают фронтальные проекции, называются ***фронтально конкурирующими*** (рис. 1.24). Из двух точек на $П_2$ видна та, что ближе к наблюдателю. Расположение точек «ближе – дальше» определяют по горизонтальной проекции.

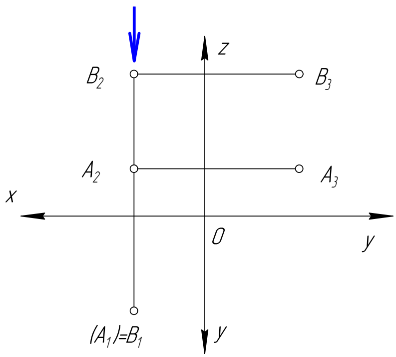


Рис. 1.23

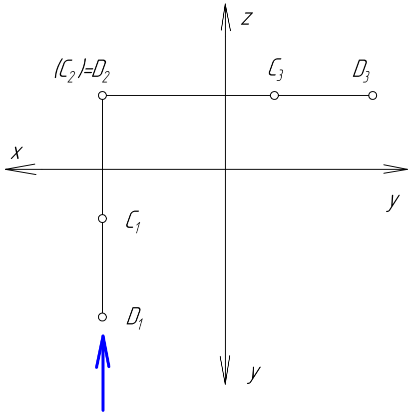


Рис. 1.24

Точки A и E (рис. 1.25), у которых совпадают профильные проекции, называются ***профильно конкурирующими***. Из двух точек на $П_3$ видна та, что левее. Расположение точек «левее – правее» определяют по фронтальной проекции.

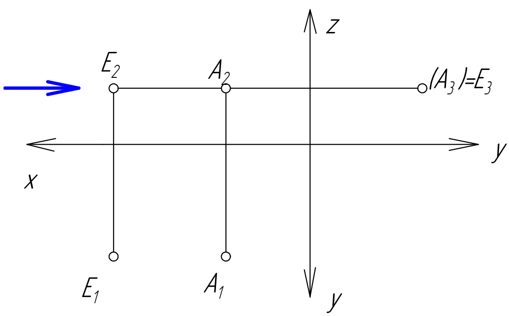


Рис. 1.25

Точки F и M (рис. 1.26), у которых по две проекции расположены на координатных осях, принадлежат одной из плоскостей проекций ($F \in \Pi_1$; $M \in \Pi_2$).

Точки, у которых две проекции расположены на координатных осях, а третья проекция совпадает с началом координат, принадлежат одной из осей координат ($N \in x$).

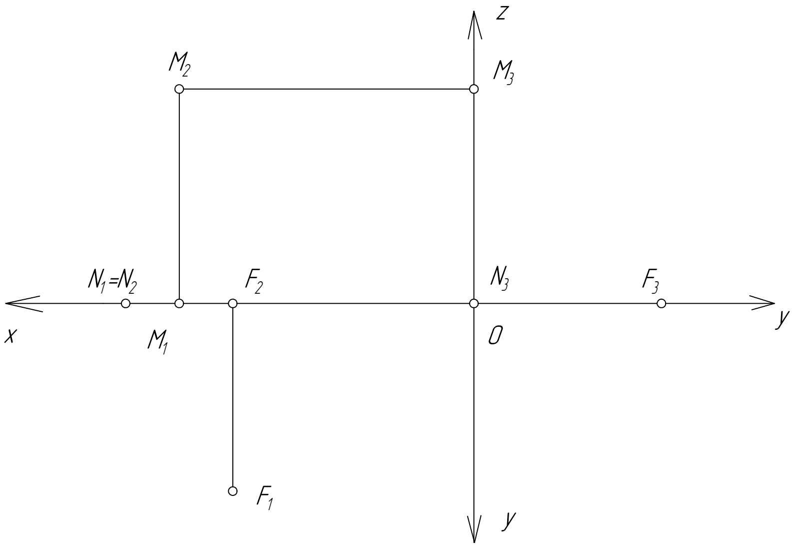


Рис. 1.26

Выводы

1. Комплексным чертежом принято называть совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций оригинала, расположенных на одной плоскости чертежа.

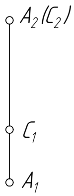
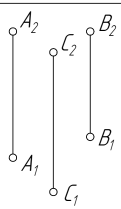
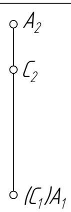
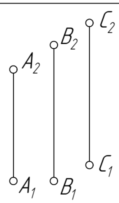
2. Двухкартинный комплексный чертёж Монжа является метрически определённым чертежом, следовательно, он обратим.

3. Имея две проекции оригинала, можно построить сколько угодно адекватных проекций данного оригинала, что широко используется в технических чертежах.

Контрольные вопросы

1. Какой вид проецирования используется при построении машиностроительных чертежей?
2. Что означает понятие «обратимость чертежа»?
3. Что называется линиями связи и как они располагаются относительно осей проекций?
4. Как найти натуральную величину отрезка общего положения?
5. Какими координатами определяется расстояние от точки до плоскостей проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$?
6. Какие точки называются конкурирующими?

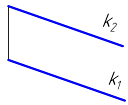
Обучающий тест 1 «Точка» (ответы на тесты – в конце модуля 1)

1	2	3	4	5	6
		A(20, 20, 0)			A(20, 0, 0)

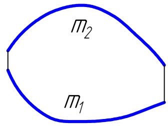
1. На каком чертеже точка *B* расположена дальше от наблюдателя, чем точки *A* и *C*?
2. В каком случае точка *A* принадлежит оси *OX*?
3. На каком чертеже точка *C* расположена выше точек *A* и *B* и дальше от наблюдателя?
4. Укажите чертёж фронтально конкурирующих точек.
5. На каком чертеже точки *A* и *B* одинаково удалены от плоскости проекций $П_2$?
6. В каком случае точка *A* принадлежит $П_1$?
7. Укажите чертёж горизонтально конкурирующих точек.
8. На каком чертеже точки *A* и *B* одинаково удалены от плоскости проекций $П_1$?

1.4. Комплексный чертеж прямых линий

Как вы думаете?

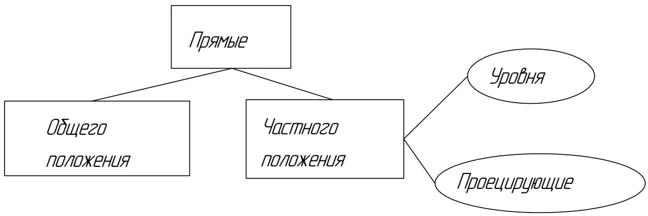


1. Как расположена прямая k в пространстве, если $k_1 \parallel k_2$?
2. Какая задана кривая на чертеже – плоская или пространственная?
3. Сколько проекций должен иметь чертеж отрезка, чтобы его можно было назвать обратимым?



Задание прямой на комплексном чертеже

Прямая в пространстве может занимать общее и частное положение.



Прямые общего положения

Прямая (отрезок), не параллельная и не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения (рис. 1.27, 1.28). На рис. 1.27 показано ее пространственное изображение, а на рис. 1.28 показано её изображение на плоскости.

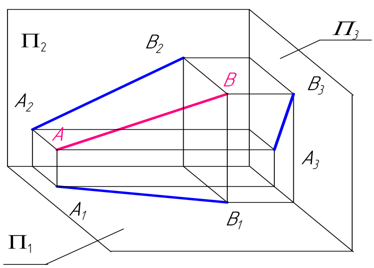


Рис. 1.27

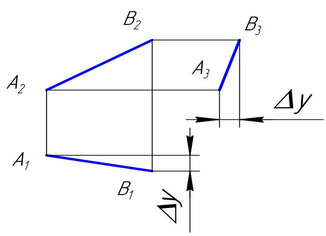


Рис. 1.28

Необходимо отметить особенности их задания на комплексном чертеже.

Так как на безосных чертежах нет очертаний плоскостей проекций, но есть линии связи, поэтому положение геометрических фигур в пространстве будем определять положением их проекций относительно линий связи.

1. Любая проекция прямой общего положения искажает натуральную длину.

2. Любая проекция прямой общего положения наклонена к линиям связи под углом $\neq 90°$, ни один из них не показывает натуральную величину углов наклона прямой к плоскостям проекций.

3. Натуральную величину прямой общего положения находят методом прямоугольного треугольника.

Примеры комплексных чертежей прямых общего положения:

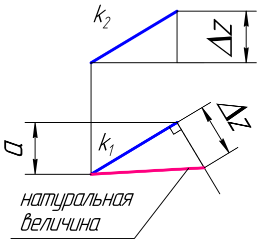


Рис. 1.29

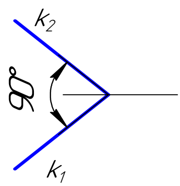


Рис. 1.30

На рис. 1.29 показана прямая общего положения. Она имеет одинаковые углы наклона к Π_1 и Π_2, если $a = \Delta Z$.

На рис. 1.30 точка пересечения проекций отрезка находится на оси X. Прямая расположена к плоскостям Π_1 и Π_2 под одинаковым углом 45°.

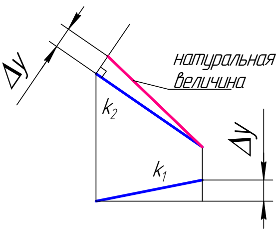


Рис. 1.31

Графический признак прямой общего положения: *ни одна из ее проекций не параллельна и не перпендикулярна линиям связи* (рис. 1.31).

Прямые уровня

Прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций, **называются прямыми уровня**.

Существует три линии уровня: горизонталь h, фронталь f, профильная прямая p.

Горизонталь – это прямая, параллельная Π_1, $\boldsymbol{h}$ $(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3) \parallel \Pi_1$.

Если взять карандаш в руки и расположить его параллельно столу, то длина карандаша спроецируется на плоскость стола без искажения. У горизонтали $|h| = |h_1|$, угол наклона к Π_2 – β проецируется без искажения (рис. 1.32).

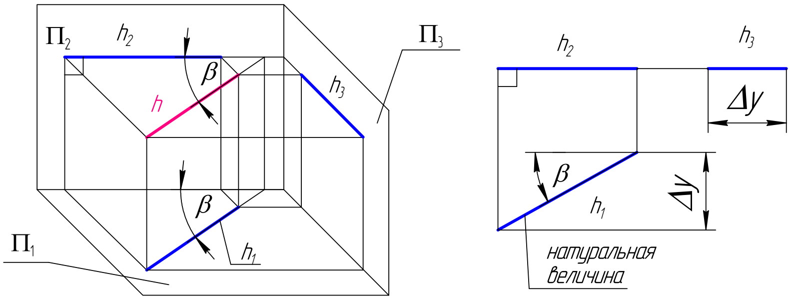


Рис. 1.32

Графический признак горизонтали – *ее фронтальная проекция перпендикулярна линиям связи* (с нее всегда начинается построение чертежа горизонтали – h).

Фронталь – это прямая, параллельная Π_2.

$f\,(f_1, f_2, f_3) \parallel \Pi_2$.

Если взять карандаш в руки и расположить его параллельно стене, находящейся перед наблюдателем, то длина карандаша спроецируется на плоскость стены без искажения. У фронтали $|f| = |f_2|$, угол наклона к Π_1 – α спроецируется без искажения (рис. 1.33).

Графический признак фронтали – *ее горизонтальная проекция перпендикулярна линиям связи* (с нее всегда начинается графическое построение фронтали – f).

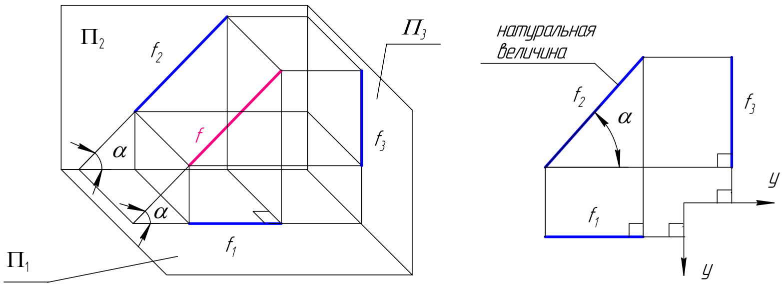


Рис. 1.33

Профильная прямая – это прямая, параллельная $П_3$.

$p\ (p_1, p_2, p_3) \parallel П_3$

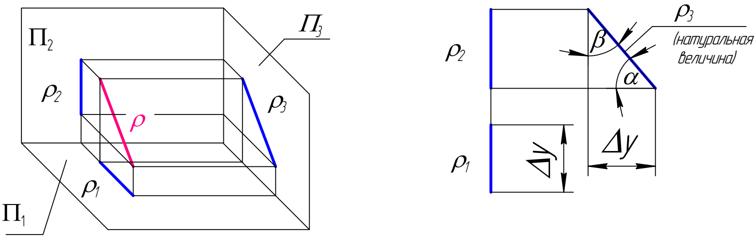


Рис. 1.34

$|p| = |p_3|$ – натуральная (истинная) величина (рис. 1.34).

Углы наклона профильной прямой к $П_1$ и $П_2$ проецируются на $П_3$ без искажения.

Графический признак профильной прямой – *ее горизонтальная и фронтальная проекции совпадают с линиями связи в системе $П_1 – П_2$.*

Рассмотренные примеры позволяют отметить особенности задания прямых уровня на комплексном чертеже:

1) одна из проекций прямых уровня перпендикулярна линиям связи установленного направления;

2) одна из проекций прямой уровня параллельна самой прямой и дает истинную величину, а также показывает без вспомогательных построений угол наклона к одной из плоскостей проекций (*h*, *f*), к двум плоскостям проекций (*p*).

Проецирующие прямые

Прямые, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций, называются проецирующими прямыми.

Горизонтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная Π_1.

$a\ (a_1, a_2, a_3) \perp \Pi_1\ (a \parallel \Pi_2$ и $\Pi_3)$

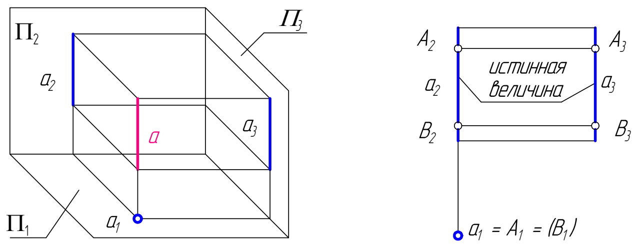


Рис. 1.35

Графический признак горизонтально проецирующей прямой – *ее горизонтальная проекция есть точка, она называется главной проекцией* (рис. 1.35).

Дадим понятие любой проецирующей геометрической фигуре, которое будем использовать и в дальнейшем.

Геометрическая фигура называется проецирующей, если одна из ее проекций есть геометрическая фигура на единицу меньшего измерения. Эта проекция называется главной и обладает так называемыми «собирательными» свойствами.

a_1 – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой, совпадет с ее горизонтальной проекцией $\Rightarrow a_1 = A_1 = B_1$.

Точки A и B – горизонтально конкурирующие. Фронтально проецирующая прямая – ***это прямая, перпендикулярная Π_2*** (рис. 1.36).

$в(в_1, в_2, в_3) \perp \Pi_2\ (в \parallel \Pi_1$ и $\Pi_3)$

Графический признак фронтально проецирующей прямой – *ее фронтальная проекция есть точка, она называется главной проекцией.*

$в_2$ – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой, совпадет с ее фронтальной проекцией $\Rightarrow в_2 = M_2 = N_2$.

Точки M и N – фронтально конкурирующие.

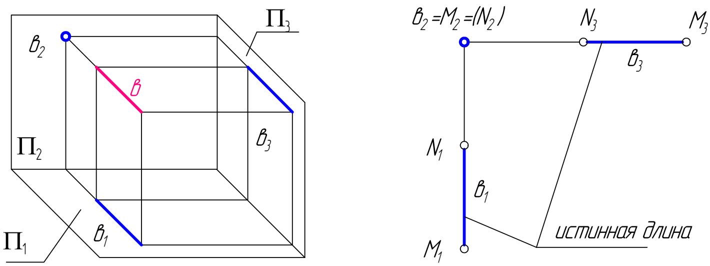


Рис. 1.36

Профильно проецирующая прямая – *это прямая, перпендикулярная $П_3$.*

$c(c_1, c_2, c_3) \perp П_3$ $(c \parallel П_1$ и $П_2)$

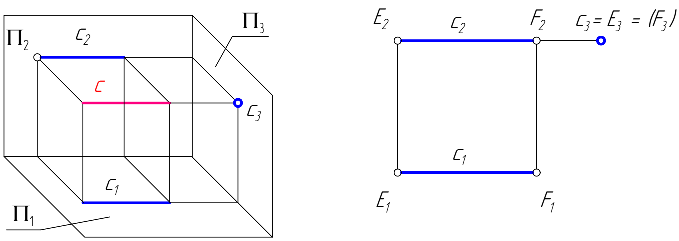


Рис. 1.37

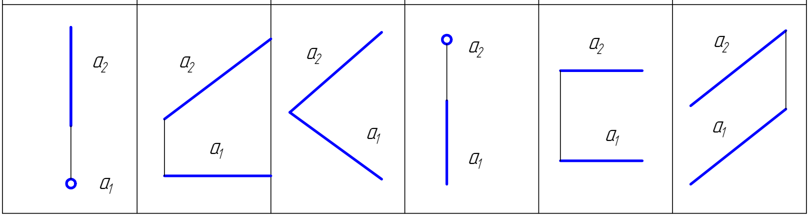
Графический признак профильно проецирующей прямой – *ее профильная проекция есть точка, она называется главной проекцией* (рис. 1.37).

c_3 – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой, совпадет с ее профильной проекцией $\Rightarrow c_3 = E_3 = F_3$.

Вывод. Отличительным признаком проецирующих прямых на комплексном чертеже является то, что одна из проекций прямой вырождается в точку.

Обучающий тест 2 «Прямая»
(ответы на тесты – в конце модуля 1)

1	2	3	4	5	6



1. Укажите чертежи прямых общего положения.
2. Укажите профильно проецирующую прямую.
3. Укажите горизонтально проецирующую прямую.
4. Укажите фронтально проецирующую прямую.
5. Укажите, в каком случае на чертеже уже есть натуральная величина угла наклона прямой к $П_1$.

Взаимное положение прямых на комплексном чертеже

Как вы думаете?

1. Могут ли проекции скрещивающихся прямых быть параллельны?
2. Могут ли проекции пересекающихся прямых быть изображенными одной линией?
3. Имеют ли скрещивающиеся прямые общую точку? А их проекции?

Две прямые в пространстве могут:

1. Пересекаться ($a \cap в$).
2. Быть параллельными ($a \parallel в$).
3. Скрещиваться ($a \,\underline{\circ}\, в$).

Пересекающиеся прямые

Прямые называются пересекающимися*, если они имеют единственную общую точку.* Такие прямые всегда лежат в одной плоскости (рис. 1.38).

Если прямые пересекаются, то существует единственная точка пересечения: $a \cap в = K$.

На основании свойства принадлежности:

$$a \cap в = K \Rightarrow a_1 \cap в_1 = K_1,\ a_2 \cap в_2 = K_2.$$

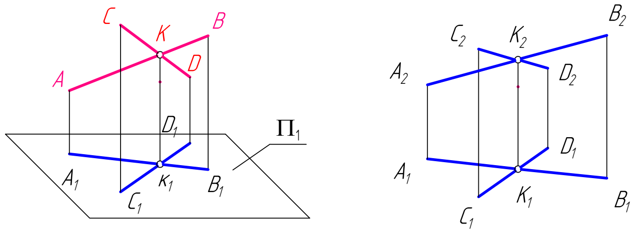


Рис. 1.38

Согласно свойству чертежа Монжа, обе проекции (K_1 и K_2) точки K лежат на одной линии связи данного установленного направления.

Графический признак $a \cap в$ – точки пересечения одноименных проекций лежат на одной линии связи установленного направления.

Параллельные прямые

Параллельными прямыми называются такие, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 1.39).

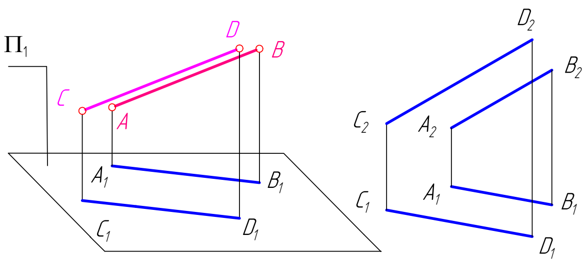


Рис. 1.39

На основании свойства параллельности прямых ($a \parallel в$) можно сформулировать их графический признак – *одноименные проекции параллельных прямых параллельны:*

$$a \parallel в \Rightarrow a_1 \parallel в_1,\ a_2 \parallel в_2.$$

Скрещивающиеся прямые

Если прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися прямыми (рис. 1.40).

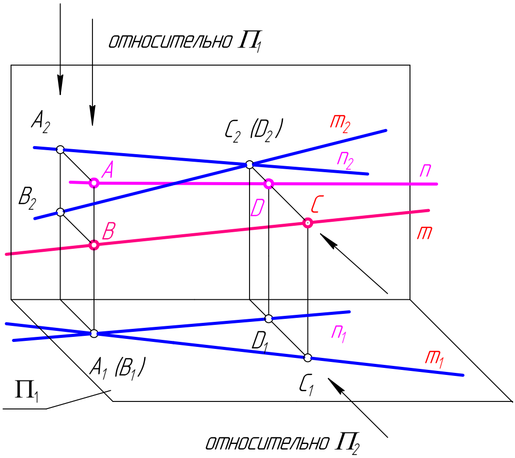
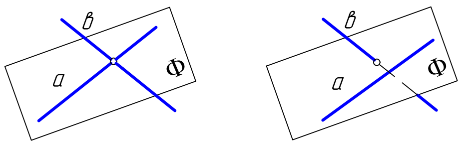


Рис. 1.40

Через скрещивающиеся прямые невозможно провести плоскость, так как если одна прямая будет принадлежать плоскости, то другая будет пересекать эту плоскость (рис. 1.41, *б*).

Сравнение: на рис. 1.43, *а* пересекающиеся прямые; на рис. 1.41, *б* – скрещивающиеся прямые.



а) *б*)

Рис. 1.41

Точки *A* и *B* (рис. 1.40–1.42) – горизонтально конкурирующие. Напоминаем, что с их помощью определяется видимость геометрических фигур относительно $П_1$ при решении задач. Из двух точек видна та, что выше.

Точки *C* и *D* – фронтально конкурирующие. С их помощью определяется видимость относительно $П_2$. Из двух точек видна та, что ближе к наблюдателю.

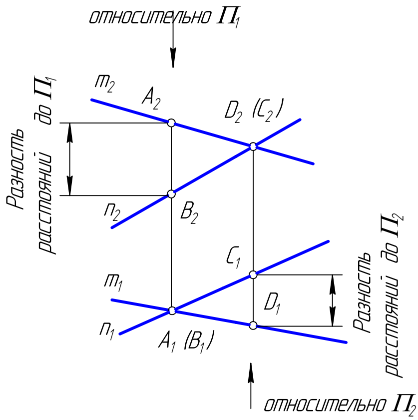
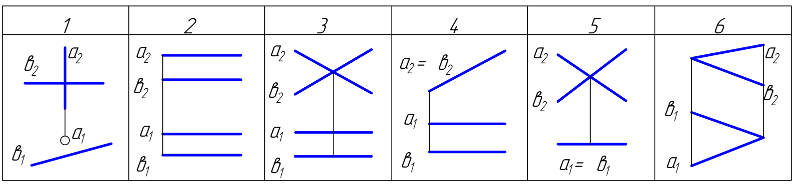


Рис. 1.42

Графический признак скрещивающихся прямых – *точки пересечения одноименных проекций прямых никогда не находятся на одной линии связи.*

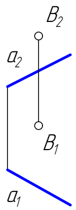
Обучающий тест 3 «Взаимное положение прямых» (ответы на тесты – в конце модуля 1)



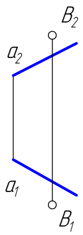
1. Укажите чертеж пересекающихся прямых.
2. Укажите чертежи параллельных прямых.
3. Укажите чертежи скрещивающихся прямых.

Справочный материал

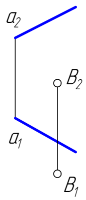
Примеры положения точки и прямой относительно плоскостей проекций



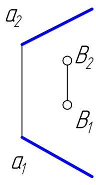
Точка *B* расположена выше прямой *a* и ближе к $П_2$, чем *a* (дальше от наблюдателя).



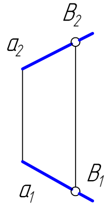
Точка *B* расположена выше прямой *a* и дальше от $П_2$, чем *a* (ближе к наблюдателю).



Точка *B* расположена ниже прямой *a* и дальше от $П_2$, чем *a* (ближе к наблюдателю).

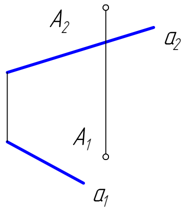


Точка *B* расположена ниже прямой *a* и ближе к $П_2$, чем *a* (дальше от наблюдателя).

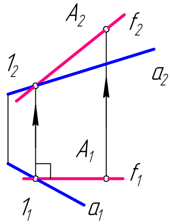


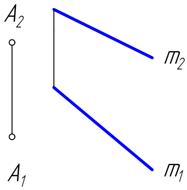
Точка *B* принадлежит прямой *a*.

Применение положений о взаимной принадлежности прямой и точки и взаимного расположения прямых при решении задач

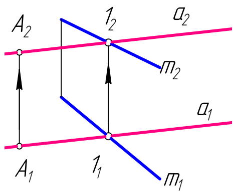


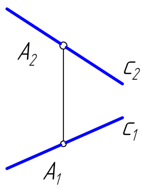
1. Через точку A провести фронталь так, чтобы она пересекла прямую общего положения.
$f \parallel \Pi_2, f \supset A, f \cap a$



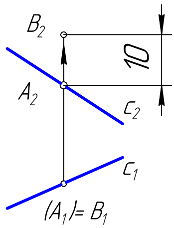


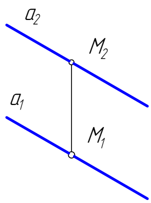
2. Провести прямую a так, чтобы:
$a \supset A, a \cap m, a \cap n$



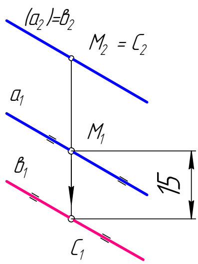


3. Построить точку B, горизонтально конкурирующую с точкой A и расположенную на 10 мм выше точки A.

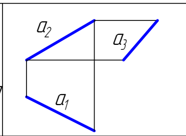
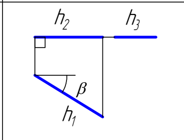
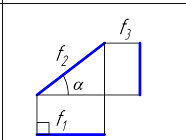
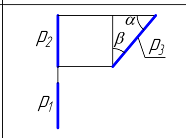
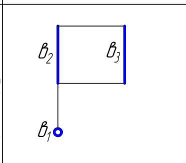
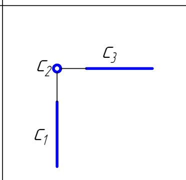
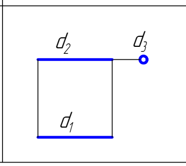




4. Построить точку C, фронтально конкурирующую с точкой M и расположенную ближе к наблюдателю на 15 мм, а через нее провести прямую $в$ параллельно заданной a.

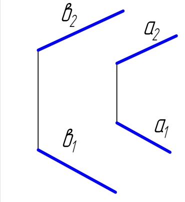


Задание прямых на комплексном чертеже

Прямая общего положения			$a_1 a_2 a_3$ – с искажением, углы наклона к $П_1, П_2, П_3$ – с искажением
Прямые уровня	Горизонталь		h_1–без искажения h_2, h_3–с искажением угол β–без искажения
	Фронталь		f_2–без искажения f_1, f_3–с искажением угол α –без искажения
	Профильная прямая		p_3–без искажения p_1, p_2–с искажением углы α, β –без искажения
Проецирующие прямые	Горизонтально проецирующая		$в_1$– точка $в_2, в_3$– без искажения
	Фронтально проецирующая		c_2– точка c_1, c_3– без искажения
	Профильно проецирующая		d_3– точка d_1, d_2– без искажения

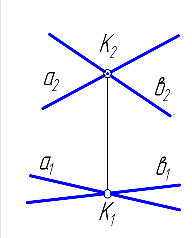
Взаимное положение прямых на комплексном чертеже

Параллельные прямые



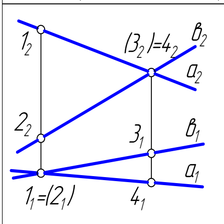
У параллельных прямых одноименные проекции параллельны

Пересекающиеся прямые



Точки пересечения проекций прямых находятся на одной линии связи

Скрещивающиеся прямые



Точки пересечения проекций прямых не лежат на одной линии связи

Точки 1 и 2 – горизонтально конкурирующие

Точки 3 и 4 – фронтально конкурирующие

1.5. Комплексный чертеж кривых линий

В начертательной геометрии кривые линии изучают по их проекциям. Кривые бывают плоские и пространственные.

Если все точки кривой расположены в одной плоскости, то такую кривую называют плоской (например, эллипс, окружность).

Если все точки кривой невозможно совместить с одной плоскостью, то такую кривую называют пространственной (винтовая линия).

Если существует математическое уравнение, описывающее движение точки, то кривую называют закономерной. Аналитически закономерные линии подразделяются на **алгебраические и трансцендентные**. Примером алгебраических кривых служат кривые второго порядка (эллипс, парабола, гипербола). К трансцендентным линиям относят графики тригонометрических функций (синусоида, косинусоида), эвольвента, циклоида.

Если кривую линию не удается выразить в аналитической форме, то ее задают графически. Графически – своим изображением – может быть задана и закономерная линия, образование которой подчинено определенным геометрическим условиям.

Алгебраический порядок кривой равен степени ее уравнения, **графический** определяется числом точек ее возможного пересечения с произвольной прямой.

Например, эллипс – кривая второго порядка (рис. 1.43).

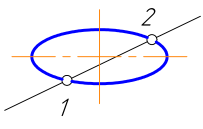


Рис. 1.43

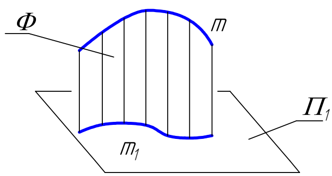


Рис. 1.44

Как спроецировать кривую на плоскость проекций? Мысленно проецируют все точки кривой на плоскость проекций, но практически же это сделать невозможно, поэтому для проецирования выбирают конечное число точек (рис. 1.44). Чем больше точек, тем точнее проекция кривой. При выполнении заданий по нашему курсу следует брать не менее 8–12 точек.

Метод хорд

По чертежу кривой линии сразу невозможно однозначно решить вопрос о характере кривой линии (плоская или пространственная).

Если на заданной кривой взять произвольные четыре точки и через них провести хорды (секущие), то возможны два варианта:

1. Если хорды пересекаются (графически это видно на рис. 1.45, когда K_1, K_2 – точки пересечения проекций хорд лежат на одной линии связи), то через пересекающиеся прямые можно провести плоскость, а это значит, что они образуют плоскость, в которой лежит заданная кривая. Значит, кривая линия – плоская.

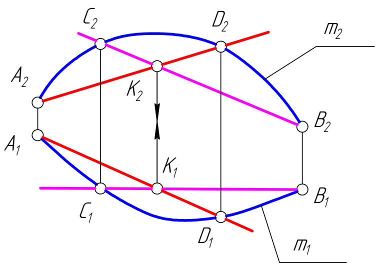


Рис. 1.45

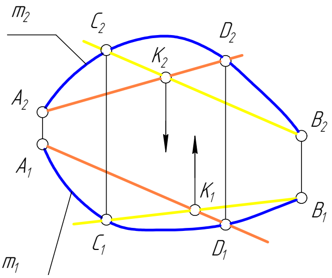


Рис. 1.46

2. Хорды не пересекаются, а скрещиваются (графически это видно на рис. 1.46, когда K_1, K_2 – точки пересечения проекций хорд не лежат на одной линии связи), значит, кривая линия – пространственная.

Касательная и нормаль к кривой

Как построить касательную к кривой?

Для построения используем прямые, называемые секущими.

Прямая, пересекающая кривую линию в двух и более точках, называется секущей (*AB* на рис. 1.47).

Чтобы через точку *A* провести касательную *t* к кривой *m*, в окрестности точки *A* (недалеко) выбирают точку *B* и проводят секущую *AB*. Приближая точку *B* к точке *A*, в пределе получают касательную *t* в данной точке.

$B \to A \Rightarrow AB \to t$

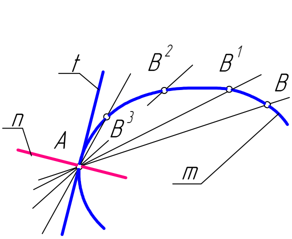


Рис. 1.47

Касательную (t в точке A) можно рассматривать как предельное положение секущей, которое занимает последняя при сближении точек пересечения A и B секущей AB до слияния их в одну точку.

n **– нормаль** кривой линии в данной точке – это прямая, перпендикулярная касательной в данной точке, $n \perp t$.

Сколько их можно провести?

К пространственной кривой можно провести $n \to \infty$, то есть к касательной можно построить плоскость, нормальную к ней. Если кривая – плоская, то к касательной можно провести только одну нормаль.

Рассмотренная точка A, у которой только одна касательная и одна нормаль, называется **обыкновенной точкой кривой**. Если вся кривая состоит из обыкновенных точек, то она называется регулярной (гладкой, плавной).

У регулярной плоской кривой (рис. 1.48) в каждой точке A, B, C, D, E к касательной можно провести только одну нормаль, поэтому все точки являются обыкновенными (монотонными). Характеристикой плавной кривой может быть и угол наклона касательных относительно оси X, который в данном случае меняется плавно.

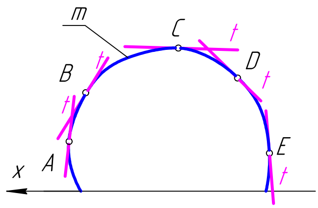


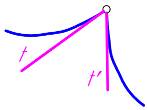
Рис. 1.48

Особые точки кривых линий

Точку кривой называют особой (нерегулярной), если положение или направление касательной в этой точке определено неоднозначно. К особым (нерегулярным) относятся (рис. 1.49):

Точки узловые (самопересечения). Точки возврата первого рода.

Точки возврата второго рода (клюв). Точки самосоприкосновения.



Точки угловые (точки излома).

Рис. 1.49

Свойства проекций кривых линий

1. Проекцией кривой линии является кривая линия (в общем случае) (рис. 1.50).
2. Касательная к кривой проецируется в касательную к ее проекции.
3. Несобственная точка кривой проецируется в несобственную точку ее проекции.
4. Порядок кривой (только для алгебраических кривых) в проекциях не изменяется.
5. Число точек пересечения кривой.

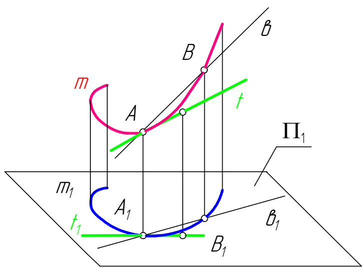


Рис. 1.50

Некоторые плоские кривые линии

Эллипс, парабола, гипербола – алгебраические кривые второго порядка определяются квадратными уравнениями (рис. 1.51).

Эллипс

$AB = 2a$ – большая ось эллипса;

$CD = 2в$ – малая ось эллипса;

O – центр эллипса;

F_1; F_2 – фокусы эллипса;
A, B, C, D – вершины эллипса;
точки M и N – любые точки эллипса.
$|MF_1| + |MF_2| = |NF_1| + |NF_2| = AB$ – const.

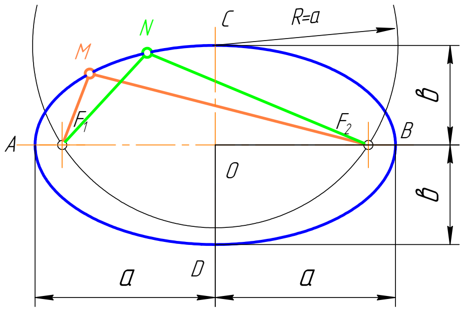


Рис. 1.51

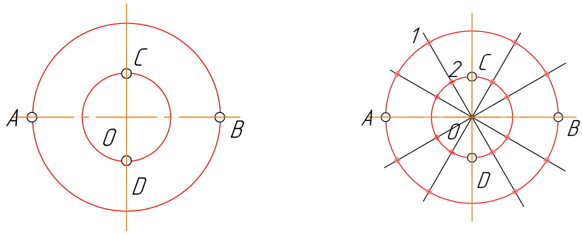
Эллипс – это все множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная 2*a*.

У эллипса все точки собственные. Кривая симметрична относительно обеих осей. Всегда можно подобрать такую пару диаметров эллипса, что хорды, параллельные одному диаметру, делятся другим диаметром пополам; такие диаметры называются сопряженными.

Графически можно построить любую точку эллипса, если заданы его оси. Эллипс на рис. 1.52 построен равномерным сжатием окружности в направлении $OC \perp OA$. На рис. 1.52 показан графический алгоритм построения эллипса. Через большую и малую ось проведены окружности, которые затем разбиты лучами на 12 равных частей.

Каждый луч пересекает обе окружности.

Из точек пересечения любого луча с окружностями провести прямые, параллельные осям эллипса: из точки 1 – параллельно CO, из точки 2 – параллельно AO. Плавной кривой соединить полученные точки.



AB – большая ось

CD – малая ось

Разделить окружности на 12 равных частей

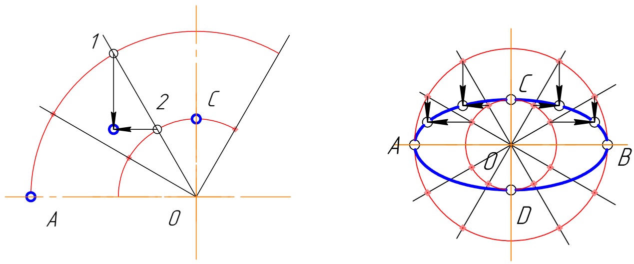


Рис. 1.52

Парабола

Парабола обладает одной осью и имеет две вершины: *O* – собственная точка и *S* ∞ – несобственная точка (парабола имеет одну несобственную точку), *F* – фокус и *P* – параметр параболы.

Парабола – это все множество точек, равноудаленных от прямой *d* (директрисы) и данной точки *F* (фокуса) (рис. 1.53).

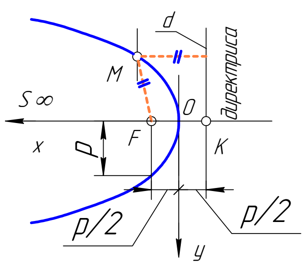


Рис. 1.53

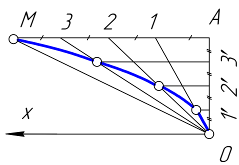


Рис. 1.54

Если требуется построить параболу по заданной вершине *O*, оси *X* и точке *M*, то строится прямоугольный треугольник – *OAM* (рис. 1.54).

Гипербола

Гипербола – разомкнутая кривая, состоящая из двух симметричных ветвей; она имеет две оси симметрии – действительную (ось x) и мнимую (ось y). Асимптоты – это прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность (рис. 1.55).

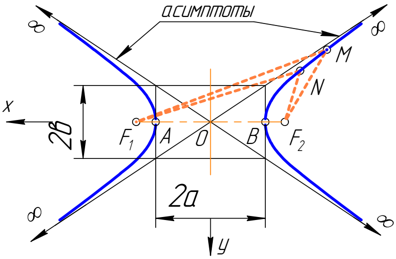


Рис. 1.55

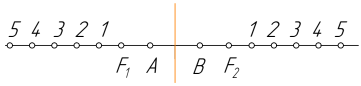


Рис. 1.56

Точки A и B – вершины гиперболы.

F_1 и F_2 – фокусы гиперболы

$$|MF_1| - |MF_2| = |NF_1| - |NF_2| = \text{const} = 2a.$$

Гипербола – это все множество точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$.

Построение гиперболы, если заданы вершины A и B и фокусы F_1 и F_2.

Точки 1, 2, 3, 4, 5 – ряд произвольно взятых точек (рис. 1.56). Из фокусов F_1 и F_2, как из центров, проводят дуги, радиусами которых служат расстояния от вершин A и B до точек 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. (рис. 1.57) $R_2 = B1, B2, B3, B4, B5$; $R_1 = A1, A2, A3, A4, A5$.

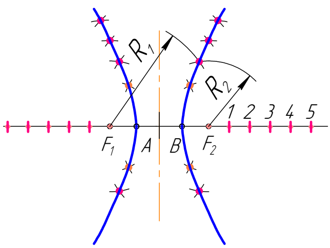


Рис. 1.57

Эвольвента

Эвольвента (развертка окружности) – эта лекальная кривая широко применяется в технике. Например, форма боковой поверхности зуба зубчатых передач, называемая профилем зуба, очерчивается по эвольвенте (рис. 1.58).

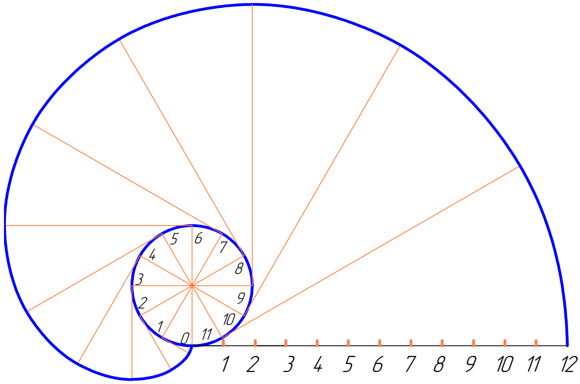


Рис. 1.58

Алгоритм построения

1. Окружность разделить на 12 частей.
2. В точках деления провести касательные к окружности, направленные в одну сторону.
3. На касательной, проведенной через последнюю точку, откладывают отрезок, равный $2\pi R$, и делят на 12 частей.
4. На первой касательной откладывают 1/12 отрезка, на второй 2/12 и т. д.

Комплексный чертеж пространственной кривой

Цилиндрическая винтовая линия

Из закономерных пространственных кривых наибольшее практическое применение находят винтовые линии: цилиндрические и конические.

Цилиндрическая винтовая линия образуется вращением точки вокруг некоторой оси с одновременным поступательным движением вдоль этой же оси. Если вращение и поступательное движение равномерны, то такая винтовая линия называется гелисой (рис. 1.59).

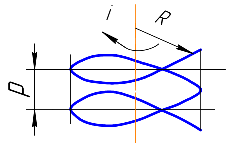


Рис. 1.59

i – ось винтовой линии;

R – радиус вращения;

P – шаг, определяет расстояние между двумя смежными витками.

Алгоритм построения (рис. 1.60)

1. Горизонтальную проекцию (окружность) делить на 12 частей.
2. Делить принятое значение шага (*P*) на 12 частей.
3. Определить нулевое положение точки $O(O_1$ и $O_2)$.
4. Фронтальные проекции точек находятся как точки пересечения одноименных горизонтальных и вертикальных прямых, проведенных через точки деления.

   m_1 – окружность,

   m_2 – синусоида.

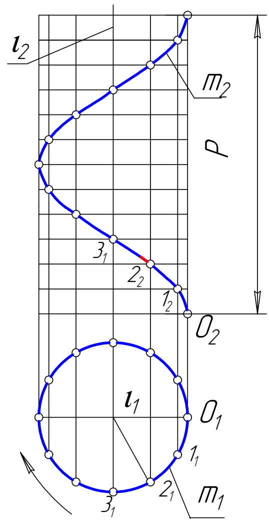


Рис. 1.60

Винтовую линию называют правой, если точка поднимается вверх и вправо по мере удаления от наблюдателя, и левой, если точка поднимается вверх и влево по мере удаления от наблюдателя.

Ответы на тесты

Тест 1: 1 – 2; 2 – 6; 3 – 5; 4 – 1; 5 – 5; 6 – 3; 7 – 4; 8 – 2.

Тест 2: 1 – 3, 6; 2 – 5; 3 – 1; 4 – 4; 5 – 2.

Тест 3: 1 – 5; 2 – 2, 4; 3 – 1, 3, 6.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается сущность метода проецирования?
2. В чем заключается сущность центрального проецирования?
3. В чем заключается сущность параллельного проецирования и каковы его основные свойства?
4. Каковы основные свойства ортогонального (прямоугольного) проецирования?
5. Как формулируется теорема о проецировании прямого угла?
6. Какие точки называются несобственными?
7. В чем заключается метод Монжа?
8. Какие точки называются конкурирующими?
9. Как обеспечить на эпюре точки условие обратимости чертежа?
10. Какая прямая называется прямой общего положения?
11. Какие прямые называются прямыми уровня?
12. Какие прямые называются проецирующими?
13. Какое взаимное положение могут занимать прямые относительно друг друга?
14. Какая кривая называется плоской?
15. Какая кривая называется пространственной?
16. Какие диаметры окружности называются сопряженными?
17. Дайте определение касательной к кривой в данной точке.
18. Как определить длину отрезка прямой общего положения методом прямоугольного треугольника?

Модуль 2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ПЛОСКОСТИ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

2.1. Задание плоскости на комплексном чертеже

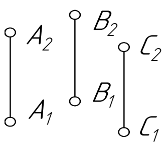
Как вы думаете?

1. Какая фигура в современном понимании имеет только длину и ширину?
2. Безразмерна ли плоскость или она имеет границы?
3. Можно ли задать плоскость пространственными линиями?

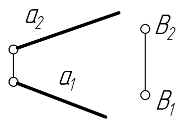
Плоскость является частным случаем поверхности – это двумерная геометрическая фигура, она имеет только длину и ширину и не имеет толщины. Обозначается прописными буквами греческого алфавита. Плоскость – это множество точек, но определяется она тремя точками (напомним, что прямую линию определяют две точки).

Плоскость можно задать на чертеже:

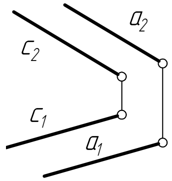
1. Тремя точками: $\Sigma(A, B, C)$



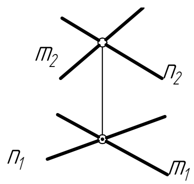
2. Прямой и точкой, не лежащей на данной прямой: $\Gamma(a, B)$



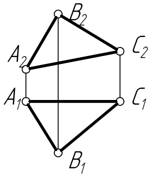
3. Двумя параллельными прямыми: $\Delta(c \parallel a)$



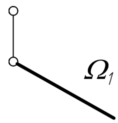
4. Двумя пересекающимися прямыми: $\Phi(m \cap n)$



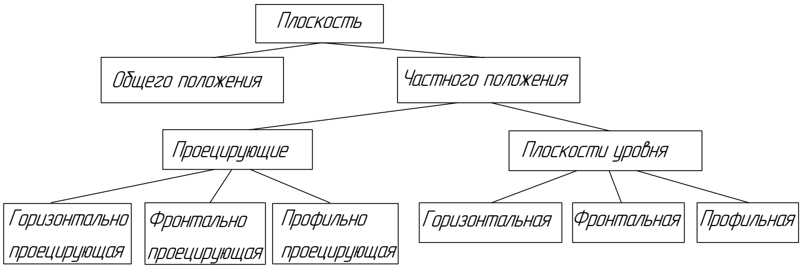
5. Любой плоской фигурой – $\Lambda(ABC)$



6. Своей главной проекцией – $\Omega(\Omega_1)$



Плоскости бывают общего и частного положения



Если плоскость не перпендикулярна, не параллельна ни одной из плоскостей проекций, то она называется плоскостью общего положения.

Примеры чертежа плоскости общего положения показаны выше (варианты 1, 2, 3, 4, 5 задания плоскости).

2.2. Взаимная принадлежность точки, прямой и плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Построение точки в плоскости сводится к двум операциям: построению в плоскости вспомогательной прямой и построению точки на этой прямой.

Задача. Плоскость Σ задана пересекающимися прямыми a и b (рис. 2.1). Точка $M(M_2)$ принадлежит плоскости.

Найти $\boldsymbol{M_1}$.

Краткая запись условия задачи: $\Sigma(a \cap b)$, $M(M_2) \in \Sigma$; $M_1 = ?$

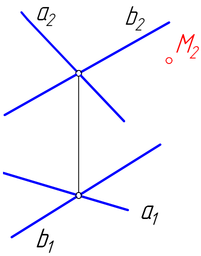


Рис. 2.1

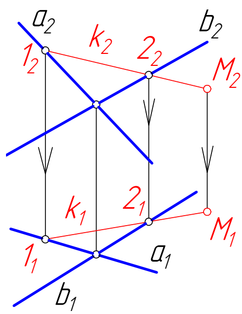


Рис. 2.2

Решение. Через точку M_2 (рис. 2.2) проводим вспомогательную прямую $k \subset \Sigma$: $k_2 \cap a_2 = 1_2$; $k_2 \cap b_2 = 2_2$; затем находим горизонтальные проекции точек 1 и 2 по условию принадлежности прямым a и b соответственно; через две точки 1_1 и 2_1 проводим прямую k_1 и на ней, с помощью линии связи, находим точку M_1. И таких прямых можно провести сколько угодно, то есть вариантов решения бесчисленное множество.

Прямая принадлежит плоскости, если она:

1) проходит через две точки плоскости;

2) проходит через одну точку плоскости и параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

В предыдущем примере мы рассмотрели, как построить прямую в плоскости по двум точкам. Для второго случая плоскость Г зададим треугольником *ABC*.

Задача. Плоскость Г задана ΔABC (рис. 2.3).

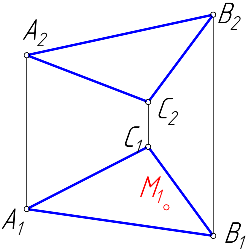


Рис. 2.3

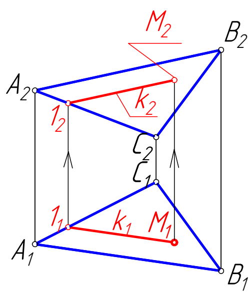


Рис. 2.4

Точка $M(M_1)$ принадлежит Г. Найти M_2.

$M(M_1) \in \Gamma(ABC)$; $M_2 = ?$

Решение. Через точку M_1 (рис. 2.4) проведём прямую k, параллельную стороне треугольника AB. Она пересечёт сторону AC в точке 1: $k_1 \parallel A_1B_1$; $k_1A_1 \cap A_1C_1 = 1_1$; с помощью линии связи найдём 1_2, проведём k_2 параллельно A_2B_2 и на ней найдём точку M_2.

Алгоритмическая запись решения

$1_1 \in A_1C_1 \Rightarrow 1_2 \in A_2C_2$; $1_2 \in k_2$; $k_2 \parallel A_2B_2$; $M_2 \in k_2$.

Как вы думаете?

Сколько решений имеет эта задача?

Плоскости частного положения

Плоскости, параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются плоскостями частного положения.

Имеется две группы таких плоскостей:

1. Проецирующие плоскости.
2. Плоскости уровня.

Проецирующие плоскости

Если плоскость перпендикулярна только одной плоскости проекций, то она называется проецирующей.

Одна из её проекций вырождается в прямую линию, называемую ***главной проекцией*** и обладающую ***собирательными*** свойствами.

Горизонтально проецирующая плоскость

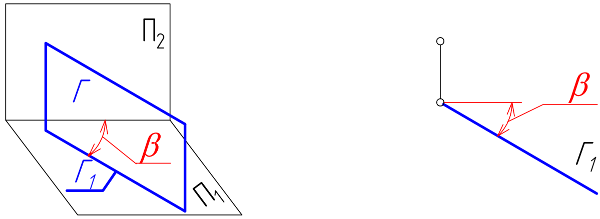
Это плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций: $\Gamma \perp\!\!\!\perp \Pi_1$. На рис. 2.5, *а* – пространственный чертеж; на рис. 2.5, *б* – плоский чертеж.

Графический признак

Горизонтальная проекция Γ_1 горизонтально проецирующей плоскости – прямая линия, не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Это **главная проекция**.

Например: $\Gamma \perp\!\!\!\perp \Pi_1$ – горизонтально проецирующая плоскость, $\Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow \Gamma_1$ – прямая линия, главная проекция.

$\angle\,\beta$ – угол наклона плоскости Г к Π_2.



а) *б*)

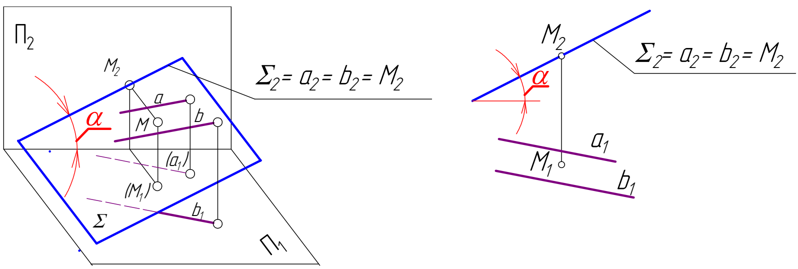
Рис. 2.5

Фронтально проецирующая плоскость

Это плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций: $\Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_2$. На рис. 2.6, *а* – пространственный чертеж; на рис. 2.6, *б* – плоский чертеж.

Графический признак

Фронтальная проекция Σ_2 фронтально проецирующей плоскости – прямая линия, не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Это **главная проекция**.



а) *б*)

Рис. 2.6

$\Sigma(a \parallel b) \perp\!\!\!\perp \Pi_2$ – фронтально проецирующая плоскость.

$\Sigma \perp \Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2$ – главная проекция.

$\angle\, \alpha$ – угол наклона плоскости Σ к Π_1. Прямые a и $b \subset \Sigma \Rightarrow a_2$, $b_2 = \Sigma_2$.

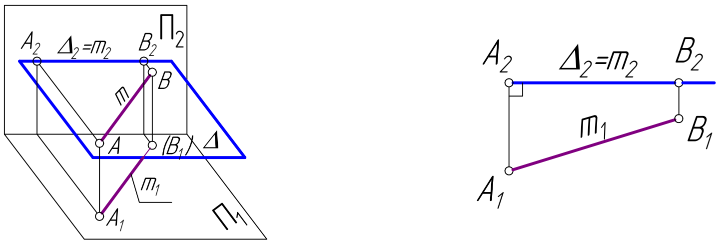
Точка $M \in \Sigma \Rightarrow M_2 = \Sigma_2$.

Плоскости уровня (дважды проецирующие)

Если плоскость перпендикулярна одновременно двум плоскостям проекций, а следовательно, параллельна третьей, то она называется плоскостью уровня.

Горизонтальная плоскость уровня

Это плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций: $\Delta \parallel \Pi_1$ (рис. 2.7, *а*, *б*). На рис. 2.7, *а* – пространственный чертеж; на рис. 2.7, *б* – плоский чертеж.



а) *б*)

Рис. 2.7

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \perp \Pi_2 \\ \Delta \perp \Pi_3\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \parallel \Pi_1$$ – горизонтальная плоскость уровня.

Δ_2 – главная проекция. $\Delta_2 \perp A_2A_1$.

$m \subset \Delta \Rightarrow m_2 = \Delta_2$;

$\Delta \parallel \Pi_1 \Rightarrow |m_1|$ – натуральная величина m.

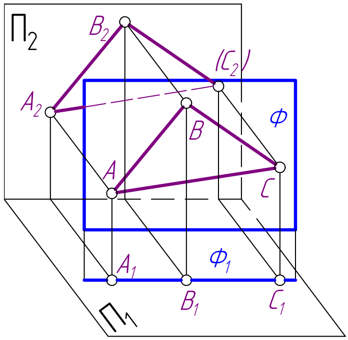
Графический признак

Фронтальная проекция Δ_2 горизонтальной плоскости уровня – прямая линия, перпендикулярная линиям связи в системе $\Pi_2 - \Pi_1$. Это **главная проекция**.

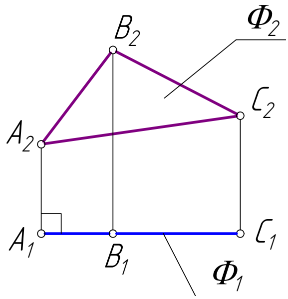
Так как каждая плоскость уровня параллельна одной из плоскостей проекций, то все плоские фигуры, расположенные в плоскости уровня, проецируются на соответствующую плоскость проекций без искажений.

Фронтальная плоскость уровня

Это плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций: Ф $\parallel \Pi_2$ (рис. 2.8, *а*, *б*). На рис. 2.8, *а* – пространственный чертеж; на рис. 2.8, *б* – плоский чертеж.



а)



б)

Рис. 2.8

Плоскость Ф задана ΔABC, Ф – фронтальная плоскость уровня.

$$\left.\begin{array}{l}\Phi \perp \Pi_1 \\ \Phi \perp \Pi_3\end{array}\right\} \Rightarrow \Phi \parallel \Pi_2;\ \Phi_1 \perp A_2A_1;\ \Delta ABC \subset \Phi \Rightarrow A_1B_1C_1 = \Phi_1;$$

$|A_2B_2C_2|$ – натуральная величина ΔABC.

Графический признак

Горизонтальная проекция Φ_1 фронтальной плоскости уровня – прямая линия, перпендикулярная линиям связи в системе $\Pi_1 - \Pi_2$. Это – **главная проекция**.

2.3. Особые линии плоскости

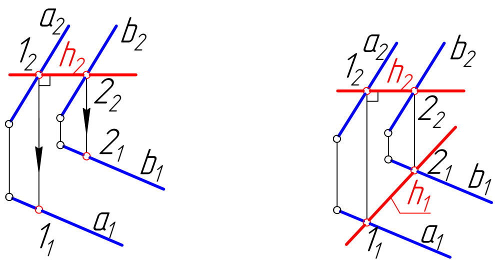
Если прямая принадлежит плоскости и занимает в ней какое-то особое положение, то она называется особой линией плоскости. К ним относятся линии уровня плоскости: горизонталь, фронталь и профильная прямая.

Горизонталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций

Γ ($a \parallel b$) Построить: $h \subset \Gamma$; $h \parallel \Pi_1$.

1. Проводим h_2 перпендикулярно линиям связи (рис. 2.9, *а*).



а)   *б*)

Рис. 2.9

2. Так как h принадлежит плоскости, то h_1 находим по двум точкам в плоскости ($1 \in a$, $2 \in b$). h_1 – натуральная величина h (рис. 2.9, *б*).

*Построение **горизонтали** в плоскости начинают с фронтальной проекции h_2: она всегда перпендикулярна линиям связи в системе Π_2 – Π_1. h_1 находят по условию принадлежности плоскости.*

Если плоскость – фронтально проецирующая, то горизонталь такой плоскости – **фронтально проецирующая прямая** (рис. 2.10).

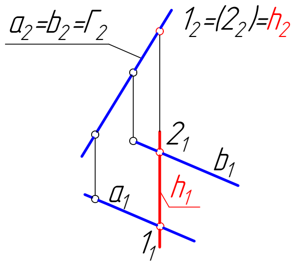


Рис. 2.10

$\Gamma(a \parallel b) \perp\!\!\!\perp \Pi_2$; $h \subset \Gamma$; $h \parallel \Pi_1$.

Так как плоскость Г – фронтально проецирующая, то единственная прямая в такой плоскости, параллельная плоскости проекций Π_1, – фронтально проецирующая прямая $\Rightarrow h \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow h_2$ – точка.

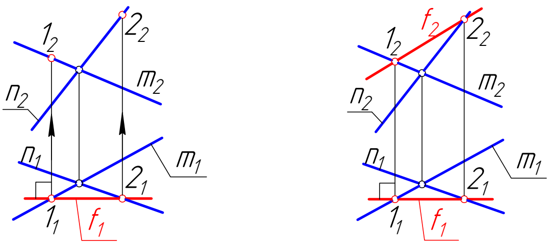
Фронталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций.

$\Sigma(m \cap n)$ Построить: $f \subset \Sigma; f \parallel \Pi_2$.

1. Проводим f_1 перпендикулярно линиям связи (рис. 2.11, *а*).

2. Так как f принадлежит плоскости, то f_2 находим по двум точкам в плоскости ($1 \in m$, $2 \in n$) (рис. 2.11, *б*).



а) *б*)

Рис. 2.11

Построение ***фронтали*** *в плоскости начинают с горизонтальной проекции* f_1*: она всегда перпендикулярна линиям связи в системе* $\Pi_2 - \Pi_1$. f_2 *находят по принадлежности плоскости. Это – натуральная величина* f.

Если плоскость – горизонтально проецирующая, то фронталь такой плоскости – **горизонтально проецирующая прямая** (рис. 2.12).

$\Sigma(m \cap n) \perp\!\!\!\perp \Pi_1; f \subset \Sigma; f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f \perp\!\!\!\perp \Pi_1; f_1$ – точка.

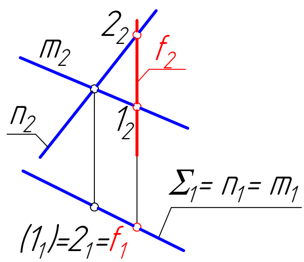


Рис. 2.12

Профильная прямая плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости и параллельная профильной плоскости проекций (рис. 2.13). $\Lambda(ABC)$; $p \subset \Lambda$; $p \,//\, \Pi_3$.

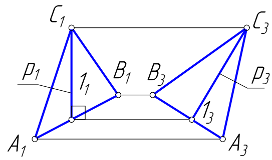


Рис. 2.13

1. Проводим p_2 перпендикулярно линиям связи в системе $\Pi_2 - \Pi_3$.
2. Так как p принадлежит плоскости Λ, то p_3 находим по двум точкам в плоскости ($1_2 \to 1_3$, $C_2 \to C_3$).

Построение ***профильной прямой*** *начинают с фронтальной или горизонтальной проекции p_2 или p_1 — эти проекции всегда совпадают с линиями связи в системе $\Pi_2 - \Pi_1$. p_3 находят по условию принадлежности плоскости, это — натуральная величина p.*

Прямая, параллельная плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача. Через точку $K(K_2, K_1)$ провести прямую $m(m_1)$, параллельную плоскости $\Sigma(a \cap b)$ (рис. 2.14).

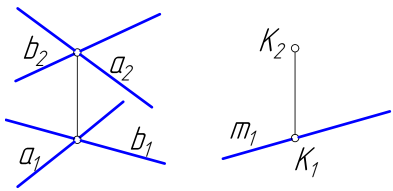


Рис. 2.14

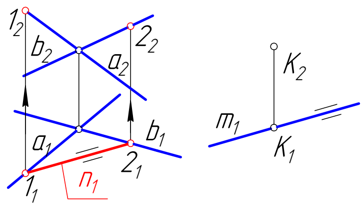


Рис. 2.15

Алгоритм

1. В плоскости Σ (рис. 2.15) проведём прямую n, параллельную m. Для этого сначала проведём $1_1 2_1 \parallel m_1$, затем найдём $1_2 2_2$ в плоскости.
2. Через $1_2 2_2$ проведем n_2 (рис. 2.16). Через точку K_2 проводим m_2 параллельно n_2.
3. Согласно пятому свойству параллельного проецирования прямая m параллельна прямой n, но $n \subset \Sigma$, следовательно, $m \parallel \Sigma$.

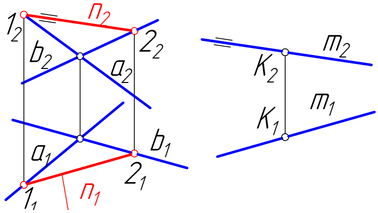


Рис. 2.16

Взаимная параллельность плоскостей

Построение двух взаимно параллельных плоскостей основано на известном положении, что две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Задача. Через точку $K(K_1\ K_2)$ (рис. 2.17) провести плоскость Δ, параллельную плоскости $\Gamma(ABC)$. Плоскость Δ задать пересекающимися прямыми.

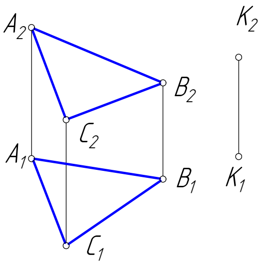


Рис. 2.17

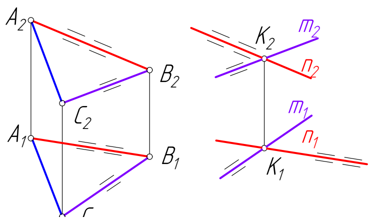


Рис. 2.18

Алгоритм

1. Плоскость Δ зададим прямыми $m \cap n = K$ (рис. 2.18).
2. Прямую m возьмём параллельно стороне CB треугольника. Если $m \parallel CB$, то $m_1 \parallel C_1B_1$, а $m_2 \parallel C_2B_2$.
3. Прямую n возьмём параллельно стороне AB треугольника. Если $n \parallel AB$, то $n_1 \parallel A_1B_1$, а $n_2 \parallel A_2B_2$.
4. Таким образом, плоскости $\Sigma(ABC)$ и $\Delta(m \cap n)$ параллельны.

Выводы

1. В общем случае плоскость определяют три точки.
2. Общий признак плоскостей частного положения – одна из проекций вырождается в прямую линию.
3. Точку в плоскости находят по принадлежности какой-нибудь прямой этой плоскости.
4. В любой плоскости можно построить прямые уровня.
5. Через точку, лежащую вне плоскости, можно провести сколько угодно прямых, параллельных данной плоскости, но только одну плоскость, параллельную заданной.

Справочный материал

Примеры изображения плоскостей общего и частного положения, заданные геометрическими фигурами.

Плоскости общего положения

Графический признак плоскости общего положения: ни одна из проекций не есть прямая линия (рис. 2.19).

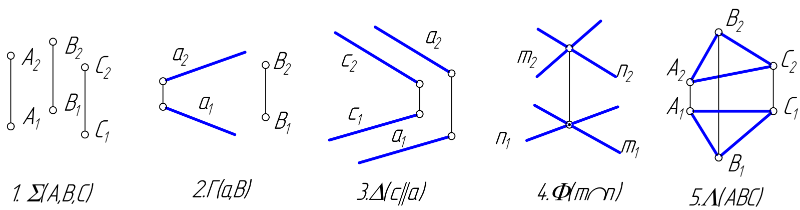


Рис. 2.19

Горизонтально проецирующие плоскости

Плоскости, горизонтальные проекции которых есть прямые линии, не || и не ⊥ линиям связи (рис. 2.20).

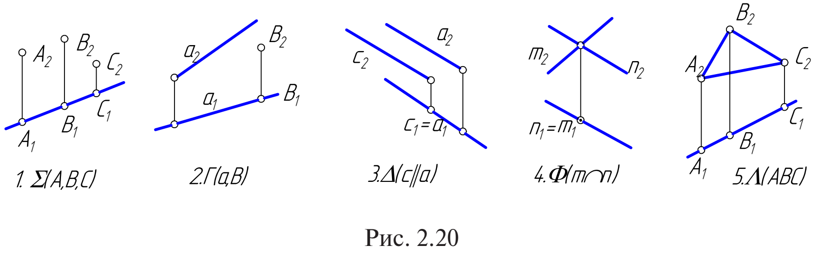


Рис. 2.20

Фронтально проецирующие плоскости

Плоскости, фронтальные проекции которых есть прямые линии, не || и не ⊥ линиям связи (рис. 2.21).

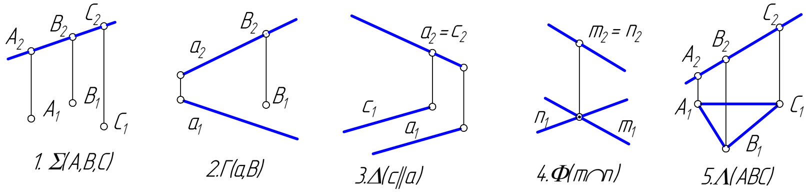


Рис. 2.21

Горизонтальные плоскости уровня

Плоскости, фронтальные проекции которых есть прямые линии, ⊥ линиям связи (рис. 2.22).

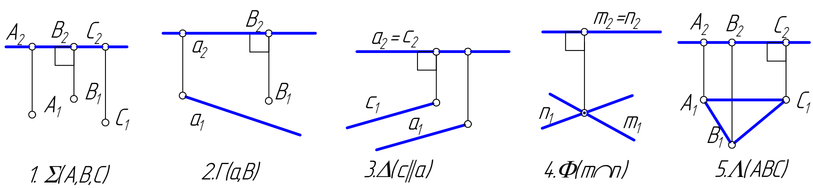


Рис. 2.22

Фронтальные плоскости уровня

Плоскости, горизонтальные проекции которых есть прямые линии, ⊥ линиям связи (рис. 2.23).

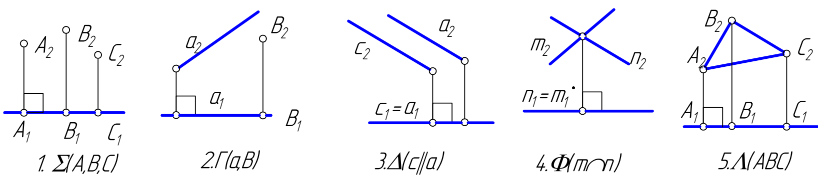
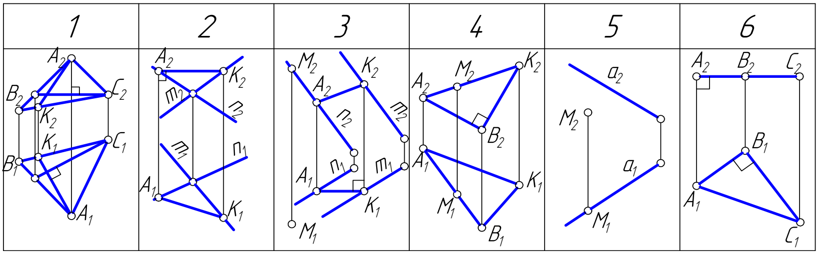


Рис. 2.23

Обучающий тест 4 «Плоскость»
(ответы – в конце модуля 2)



1. На каком чертеже точка *M* принадлежит плоскости?
2. В каком случае *AK* является фронталью плоскости?
3. На каком чертеже показан прямоугольный треугольник?
4. На каком чертеже *AK* – горизонталь плоскости?
5. Укажите чертёж плоскости уровня.
6. На каком чертеже *AK* является линией ската плоскости?
7. Укажите чертёж горизонтально проецирующей плоскости.
8. На каком чертеже имеется натуральная величина треугольника?

2.4. Задание поверхности на комплексном чертеже

Как вы думаете?

1. Какая поверхность применялась для создания прожекторов и фар автомобилей?
2. Какая поверхность использовалась для создания конструкции радиомачты на Шаболовке высотой 160 м в 1921 году?
3. Принадлежит точка *A* поверхности Σ или нет (рис. 2.24)?
4. Чем отличается сфера от шара?

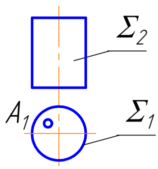


Рис. 2.24

Мы живем в мире поверхностей – многогранных и кривых, простых и сложных, созданных природой и рукой человека.

В начертательной геометрии ***поверхность определяется кинематически – как множество всех положений перемещающейся по определенному закону линии в пространстве***. Эта линия называется **образующей – *l***. Как правило, она скользит по некоторой неподвижной линии, называемой **направляющей –** ***m***; направляющих может быть одна или несколько.

Образующая *l*, скользя по неподвижной направляющей *m*, создает плотную сеть линий. Такое упорядоченное множество линий поверхности называется ее **каркасом**.

Каркасы бывают **непрерывными** – поверхность задана всем множеством образующих, или **дискретными**, когда имеется конечное число образующих.

При построении дискретного каркаса поверхности необходимо учитывать **закон каркаса**.

Закон каркаса – это закон движения образующей.

Любое тело ограничивается своей поверхностью. Тело – конечно и состоит из конкретного материала: металла, пластмассы, древесины... Поверхность является абстрактной фигурой, не имеющей толщины, т. е., образно говоря, это тонкая пленка, натянутая на каркас поверхности. Например, шар – тело, которое ограничено сферой – поверхностью.

На чертеже поверхность чаще всего задают с помощью **определителя**.

Определитель поверхности

Минимальная информация, необходимая и достаточная для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже, есть определитель (D) поверхности. Определитель состоит из двух частей: $D = G + A$.

Геометрическая часть (*G*) – устанавливает набор геометрических фигур (геометрических элементов), участвующих в образовании поверхности, например: $\Phi(m, s)$ (рис. 2.25).

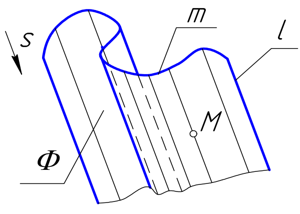


Рис. 2.25

Алгоритмическая часть (*A*) – устанавливает закон (характер) взаимодействия геометрических фигур в процессе образования поверхности, например: $l \cap m$, $l \parallel s$ (рис. 2.25). При построении чертежа поверхности алгоритмической частью определителя является закон каркаса поверхности.

Очерк проекции поверхности

На рис. 2.26, *а* показана поверхность Г, которую ортогонально проецируют на плоскость проекций Π_1 (рис. 2.26, *б*). Проецирующие прямые касаются поверхности Г и образуют цилиндрическую поверхность $\Sigma \perp \Pi_1$. Эти проецирующие прямые касаются поверхности Г в точках, образующих некоторую линию m, принадлежащую Г, называемую **контурной линией** данной поверхности. $\Sigma \cap \Pi_1 = m_1$ (рис. 2.26, *в*) – это проекция контурной линии на горизонтальную плоскость проекций (очертание, линия очерка, очерковая линия).

Проекция контурной линии на плоскость проекций называется очерком проекции поверхности. Другими словами, ***очерк проекции поверхности – это линия, ограничивающая проекцию поверхности.***

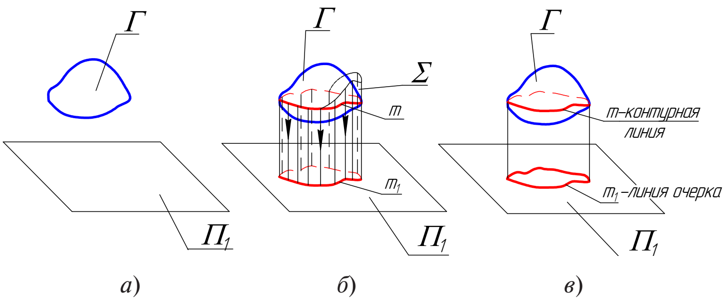


Рис. 2.26

Классификация поверхностей

Мир поверхностей велик и разнообразен. Существует много подходов к вопросу классификации поверхностей. За основу классификации чаще всего принимаются форма образующей и закон ее перемещения в пространстве.

Надо иметь в виду, что одни и те же поверхности могут быть отнесены одновременно к нескольким типам. Например, цилиндрическая поверхность вращения: как к поверхностям вращения, так и к линейчатым; прямой геликоид: как к винтовым поверхностям, так и к линейчатым (рис. 2.27).

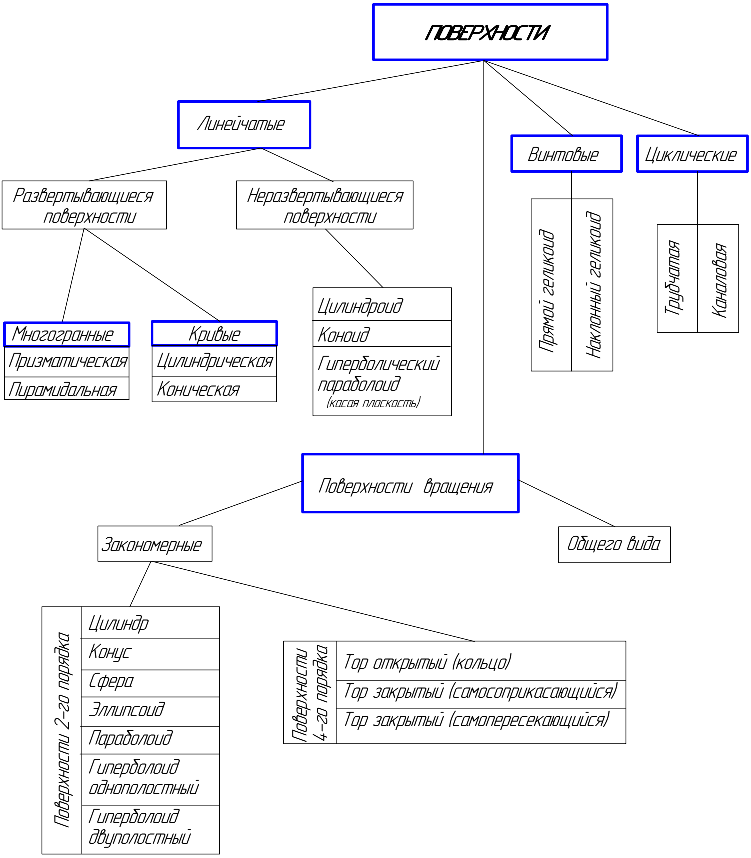


Рис. 2.27

Алгоритм конструирования поверхности

Поверхность считается графически заданной на комплексном чертеже, если можно построить любое количество принадлежащих ей точек.

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии, лежащей на поверхности. Так какую линию лучше выбрать для построения точки на поверхности? Для линейчатых поверхностей обычно выбирают образующую. Для других поверхностей выбирают графически простые линии, к которым относят прямую и окружность.

Напомним, что основными требованиями, предъявляемыми к чертежам, является их **обратимость и наглядность**. При задании поверхности только геометрической частью определителя (т. е. геометрическими элементами) можно построить, в принципе, каждую точку поверхности. Рассмотрим пример задания замкнутой треугольной призмы проекциями геометрических элементов определителя $\Sigma(ABC, S)$ (рис. 2.28).

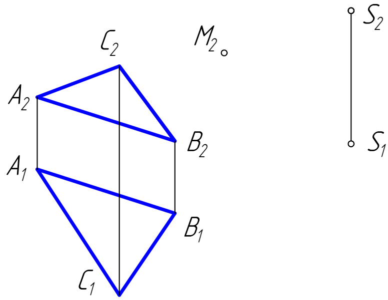


Рис. 2.28

Поверхность действительно задана, так как можно построить недостающую проекцию точки $M(M_1)$ (рис. 2.29), т. е. чертеж обратим, но не является наглядным. Следовательно, необходимо дополнить чертеж поверхности ее очертаниями.

Поэтому конструировать поверхности мы будем с помощью построения дискретного каркаса, проекции которого обеспечат обратимость и наглядность чертежа поверхности.

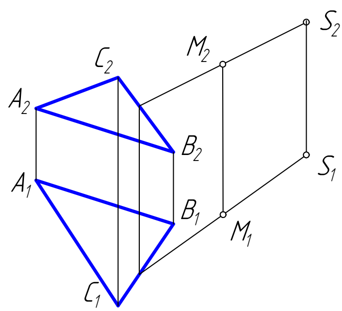


Рис. 2.29

Алгоритм (последовательность построения чертежа любой поверхности)

1. Задать проекции геометрических элементов определителя.
2. Построить проекции дискретного каркаса, состоящего из конечного числа графически простых линий.
3. Построить проекции линии обреза, которые для образования поверхности существенной роли не играют, они лишь ограничивают, обрезают поверхность.
4. Определить видимость проекций поверхности.
5. Обвести видимые линии проекций поверхности сплошной толстой основной линией, невидимые – штриховой.

2.5. Задание линейчатых поверхностей на комплексном чертеже

Развертывающиеся поверхности

Развёртывающимися называются такие поверхности, которые могут совмещаться с плоскостью без складок и разрывов. К ним относятся многогранные и кривые поверхности (цилиндрическая и коническая).

Многогранные поверхности

Многогранники – геометрические тела, поверхность которых состоит из отсеков плоскостей, ограниченных многоугольниками.

Эти многоугольники называются гранями (например: *ABS* и *BCS* на рис. 2.30, *б*); общие стороны смежных многоугольников – ребрами (например: *AS*, *BS* на рис. 2.30, *б*); вершины многогранных углов, образованных его гранями – вершинами многогранника (например, *S* на рис. 2.30, *б*); совокупность вершин и соединяющих их ребер – дискретным каркасом многогранника (рис. 2.30, *б*, *г*).

Различают два вида гранных поверхностей с одной направляющей:

1. Пирамидальная поверхность общего вида, рис. 2.30, *а* (частный случай – пирамида, рис. 2.30, *б*).

2. Призматическая поверхность общего вида, рис. 2.30, *в* (частный случай – призма, рис. 2.30, *г*).

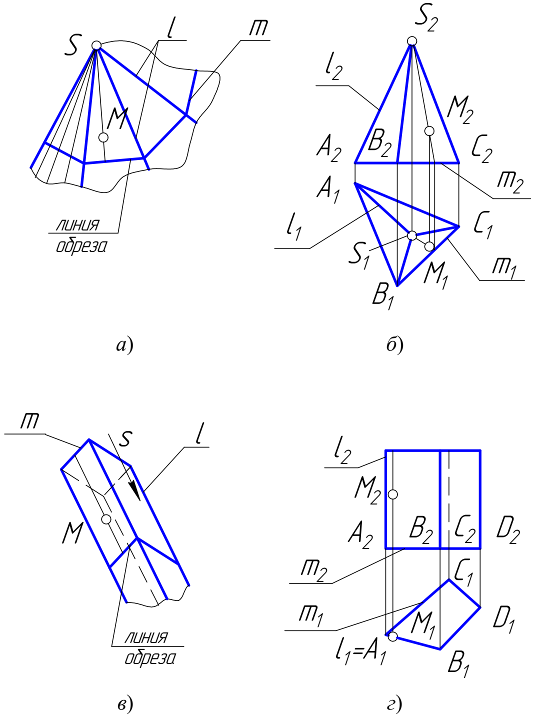


Рис. 2.30

Комплексный чертеж пирамидальной поверхности

Пирамидальная поверхность образуется в результате перемещения прямолинейной образующей l по ломаной направляющей m, причём в каждый момент движения образующая проходит через некоторую фиксированную точку S (вершину).

Задача. Сконструировать пирамидальную поверхность Ф с дискретным каркасом из трех образующих $M(M_2) \in \Phi$, $M_1 = ?$

Определитель поверхности: Ф (m, S) – геометрическая часть; $l \cap m(ABC)$, $S \in l$ – алгоритмическая часть или закон каркаса.

Алгоритм построения

1. Задать проекции элементов определителя (рис. 2.31).

2. Построить проекции поверхности (дискретный каркас) – это значит провести три образующие, соединив точки A, B, C с точкой S (рис. 2.32).

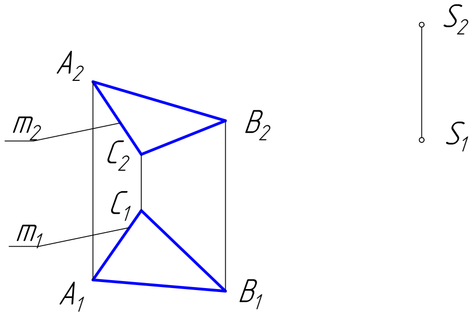


Рис. 2.31

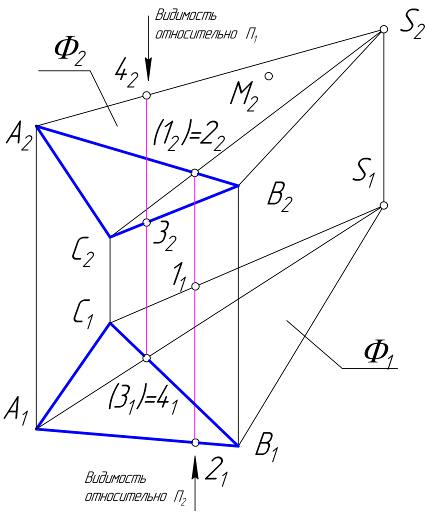


Рис. 2.32

3. Построить проекции линии обреза. В данном случае это m (ABC).

4. Определить видимость поверхности (ребер и ломаной направляющей) относительно $П_1$ и $П_2$ методом конкурирующих точек.

Точки 1 и 2 – фронтально конкурирующие, определяют видимость относительно $П_2$, следовательно, C_2S_2 – невидима (рис. 2.33). Однако в данном случае мы рассматриваем только боковую поверхность без основания, поэтому часть C_2S_2, не закрываемая проекцией грани $A_2B_2C_2$, видима.

Точки 3 и 4 – горизонтально конкурирующие, определяют видимость относительно $\Pi_1 \Rightarrow C_1S_1$ – видима.

5. Точка $M(M_2)$ принадлежит грани $ABS(A_2B_2S_2)$. Чтобы построить M_1 (рис. 2.33), нужно через точку M_2 провести какую-либо линию, принадлежащую $A_2B_2S_2$, проще всего провести образующую S_25_2 через M_2, построить ее горизонтальную проекцию $S_15_1 \rightarrow M_1$.

Точка M_1 – видима, так как на Π_1 грань $A_1B_1S_1$ – видима.

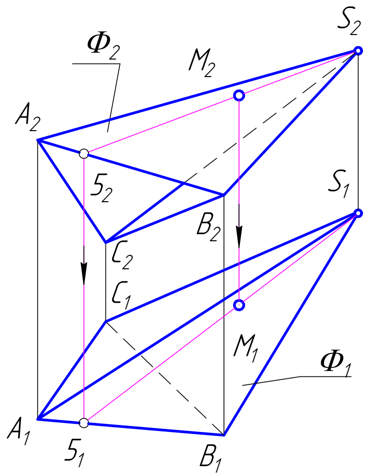


Рис. 2.33

Задача. Сконструировать пирамидальную поверхность общего вида ψ; $a(a_2) \subset \psi$; $a_1 = ?$

Определитель поверхности: ψ $(ABDC, S)$, $l \cap ABCD$, $S \in l$.

1. Задать (построить) проекции элементов определителя (рис. 2.34).

2. Построить проекции поверхности (дискретный каркас) – это значит провести четыре образующих (ребра).

3. Построить проекции линии обреза – сама направляющая является линией обреза: $m(ABCD)$ (рис. 2.35).

4. Определить видимость поверхности:

а) относительно Π_2: точки 1 и 2 – фронтально конкурирующие $\rightarrow B_2D_2$ – видимая;

б) относительно Π_1: точки 3 и 4 горизонтально конкурирующие $\rightarrow B_1S_1$ – видимая.

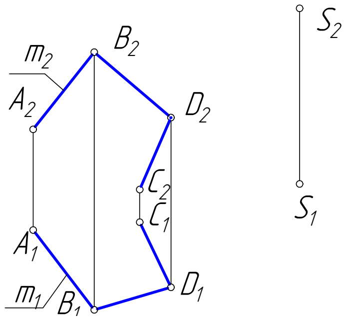


Рис. 2.34

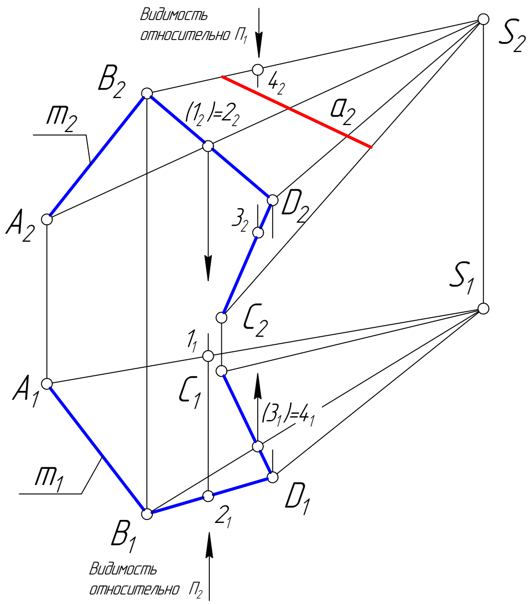


Рис. 2.35

5. $a \subset \psi$; $a_2 \supset 5_2, 6_2, 7_2, 8_2$ – точки строят по принадлежности образующим (ребрам), следовательно, $a_1 \supset 5_1, 6_1, 7_1, 8_1$; проводим a_1 с учётом видимости (рис. 2.36).

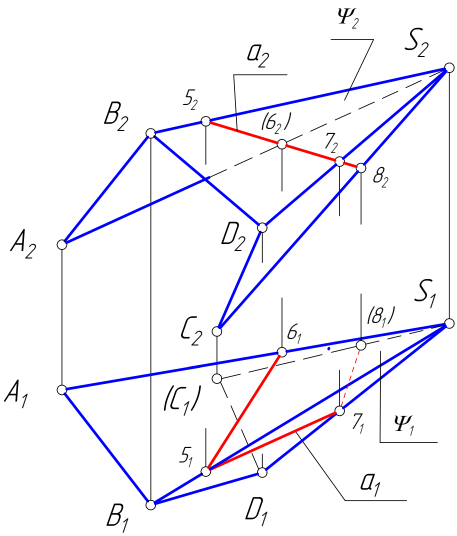


Рис. 2.36

Комплексный чертеж призматической поверхности

Призматическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей *l* по ломаной направляющей *m*, при этом всегда оставаясь параллельной некоторому направлению *s*.

Задача. Сконструировать призматическую поверхность Ф с дискретным каркасом из трех образующих, $M(M_2) \in \Phi$, $a(a_1) \subset \Phi$; $M_1 = ?$, $a_2 = ?$ Определитель поверхности: $\Phi(m, s)$; $l \cap ABC$, $l\,//\,s$.

Алгоритм построения

1. Задать проекции элементов определителя (рис. 2.37).

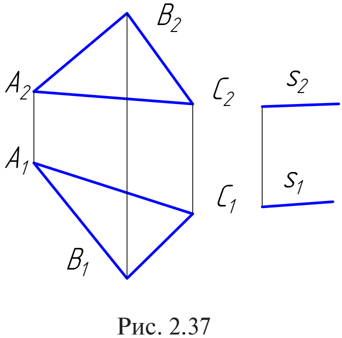


Рис. 2.37

2. Построить проекции поверхности. Длины ребер возьмем одинаковыми (рис. 2.38):

а) провести фронтальные проекции образующих из точек A_2, B_2, C_2 // s_2, отложить на них отрезки одинаковой длины: $A_2A_2^1$, $B_2B_2^1$, $C_2C_2^1$; $A_2^1B_2^1C_2^1$ – фронтальная проекция линии обреза;

б) провести горизонтальные проекции образующих из точек A_1, B_1, C_1 // s_1;

в) построить в проекционной связи $A_2^1 \to A_1^1$, $B_2^1 \to B_1^1$, $C_2^1 \to C_1^1$.

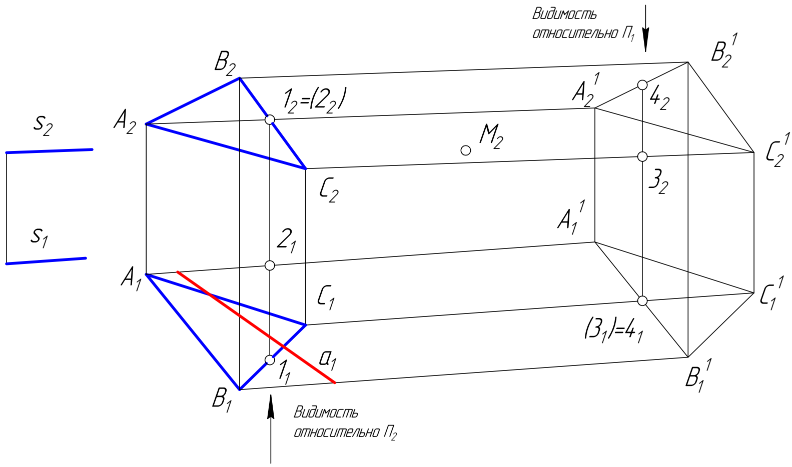


Рис. 2.38

3. $A_1^1B_1^1C_1^1$ – горизонтальная проекция линии обреза.

4. Определить видимость поверхности:

а) относительно $П_2$: точки 1 и 2 – фронтально конкурирующие $\to B_2C_2$ – видимая;

б) относительно $П_1$: точки 3 и 4 – горизонтально конкурирующие $\to A_1^1B_1^1$ – видимая.

5. Построить $M \in Ф$ (рис. 2.39). Точка M принадлежит грани BCC^1B^1, так как M_2 задана видимой. Через M_2 провести l_2 // s_2, через точку $9(9_2 \to 9_1)$ построить l_1 // s_1, из точки M_2 провести линию связи на $l_1 \to M_1$, которая невидима, так как горизонтальная проекция грани $B_1C_1C_1^1B_1^1$ – невидима.

6. Построить $a(a_2) \in Ф$; ломаную линию a строят по принадлежности ее звеньев соответствующим граням, для этого на a_1 отмечают

точки пересечения её с ребрами 5_1, 6_1, 7_1, 8_1. Из каждой точки проводят линию связи на Π_2 до пересечения с соответствующими ребрами (рис. 2.39).

Видимость a_2 определяется видимостью граней, которым принадлежат звенья ломаной линии.

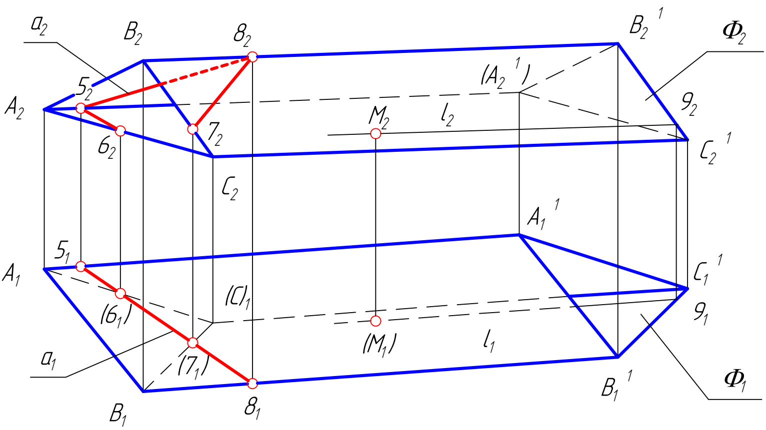


Рис. 2.39

Проецирующая призма

У призматической поверхности все ее образующие (ребра) параллельны ($l \parallel s$). Если направление s совпадает с направлением проецирования, то поверхность займет **проецирующее** положение.

При этом ее ребра на Π_1 (рис. 2.40) спроецируются в точки 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, а грани – в отрезки 1_12_1; 2_13_1; 3_14_1; 4_11_1.

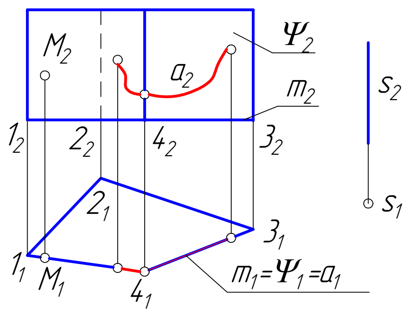


Рис. 2.40

Если $\psi \perp \Pi_1$, то ее горизонтальная проекция ψ_1 вырождается в линию, которая обладает **собирательными свойствами** и называется **главной проекцией**: $\psi \perp\!\!\!\perp \Pi_1$; $M(M_2) \in \psi$, $a(a_2) \in \psi$, значит, $M_1, a_1 = \psi_1$.

Призма может занимать горизонтально проецирующее, фронтально проецирующее и профильно проецирующее положения.

Задание кривых линейчатых поверхностей

Продолжаем изучение линейчатых поверхностей. У линейчатых кривых поверхностей образующая l также является прямой линией, а направляющая m (в отличие от ломаной у гранных) – кривая линия (рис. 2.41 – коническая поверхность общего вида; рис. 2.42 – цилиндрическая поверхность общего вида).

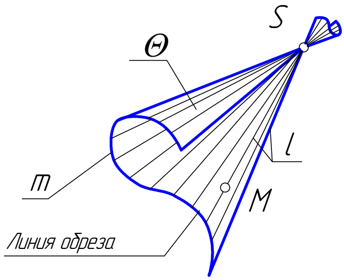


Рис. 2.41

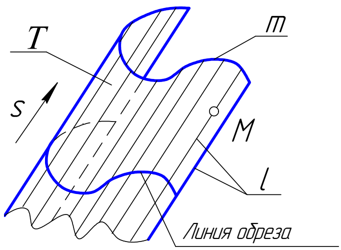


Рис. 2.42

Задание конической поверхности общего вида на комплексном чертеже

Коническая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей l по кривой направляющей m, в каждый момент движения проходя через некоторую фиксированную точку S.

Задача. Сконструировать коническую поверхность общего вида Φ; $M(M_2) \in \Phi$, $a(a_1) \subset \Phi$; $M_1, a_2 = ?$

Определитель поверхности: $\Phi(m, S)$; $l \cap m$, $l \supset S$.

1. Задать проекции элементов определителя: $\Phi(m, S)$ (рис. 2.43).

2. Построить дискретный каркас из 6 образующих на Π_1 и Π_2 (рис. 2.44):

– точками 1_1, 2_1, 4_1 обозначены точки, принадлежащие очерковым образующим на горизонтальной проекции, при этом 4_1 является точкой касания очерковой к направляющей m_1;

– точками 1_2, 2_2, 3_2, 4_2 обозначены точки, принадлежащие очерковым образующим на фронтальной проекции, при этом 3_2, 4_2 являются точками касания очерковых образующих к направляющей m_2.

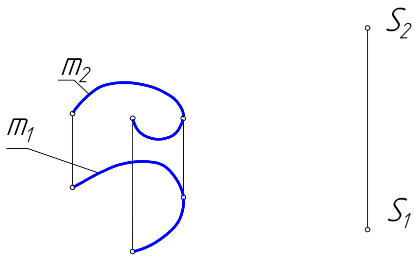


Рис. 2.43

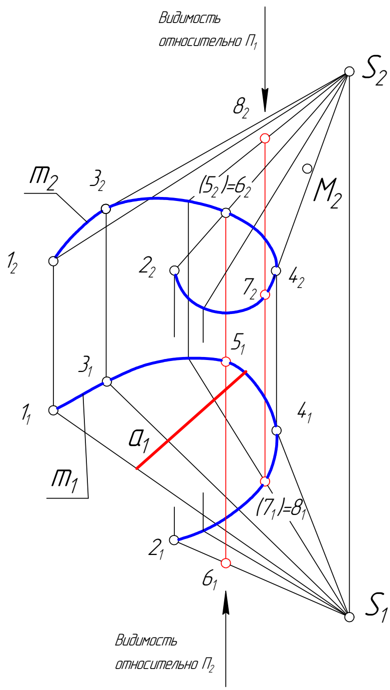


Рис. 2.44

3. Определить видимость (рис. 2.44):

а) относительно Π_2: точки 5 и 6 – фронтально конкурирующие $\Rightarrow$ видна образующая $S_2 2_2$;

б) относительно Π_1: точки 7 и 8 – горизонтально конкурирующие $\Rightarrow$ не виден участок направляющей m_1 между образующими $S_1 4_1$ и $S_1 1_1$.

4. Построить линию обреза: в данном случае сама m является линией обреза.

5. Чтобы построить M_1 (рис. 2.45), через M_2 проводят образующую и строят ее горизонтальную проекцию; так как горизонтальная проекция образующей является невидимой, то точка M_1 будет невидимой.

6. Чтобы построить a_2 (рис. 2.45), на a_1 отмечают несколько точек (чем больше, тем точнее будет построена кривая) и строят их по аналогии с точкой M, определяют видимость a_2.

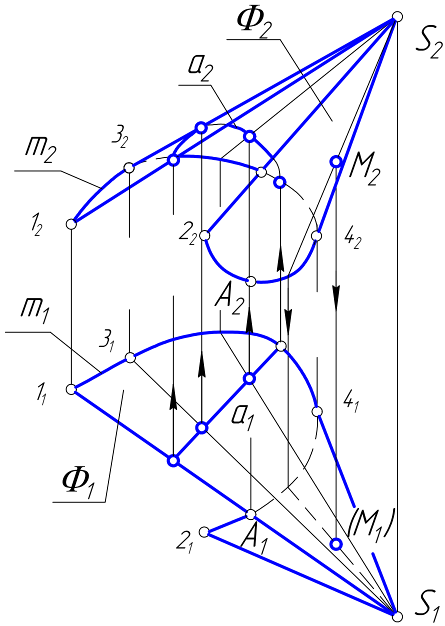


Рис. 2.45

Задание цилиндрической поверхности общего вида на комплексном чертеже

Цилиндрическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей l по кривой направляющей m, в каждый момент движения оставаясь параллельной заданному направлению s.

Задача. Сконструировать цилиндрическую поверхность общего вида Θ; $M(M_2) \in \Theta$, $a(a_1) \subset \Theta$, M_1, $a_2 = ?$

Определитель поверхности: $\Theta\ (m, s)$; $l \cap m$, $l \parallel s$.

1. Задать проекции элементов определителя: $\Theta(m, s)$ (рис. 2.46).

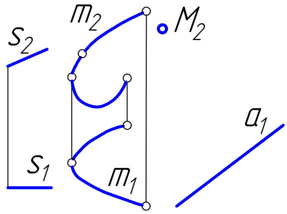


Рис. 2.46

2. Построить две проекции дискретного каркаса поверхности из пяти образующих (рис. 2.47):

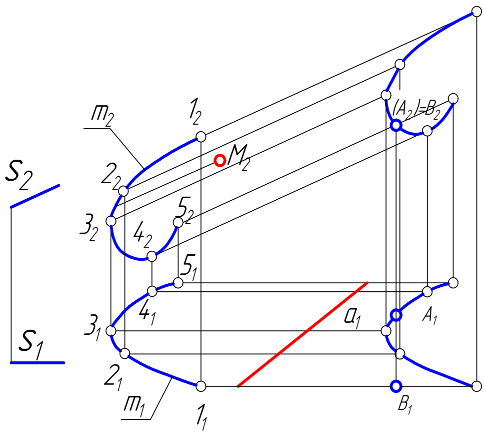


Рис. 2.47

а) прямая $s(s_1\ s_2)$, определяющая направление движения образующей, занимает положение фронтали. На фронтальной проекции направляющей m_2 берут несколько точек (1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2), положение точки 4_2 определяется образующей, касательной к m_2. Из всех точек проводят линии связи, определяющие положение горизонтальных проекций этих точек (1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1);

б) из точек (1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2) проводят образующие, параллельные s_2;

в) из точек (1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1) проводят образующие, параллельные s_1;

г) на $П_2$ строят линию обреза. Длина образующих выбирается одинаковой (можно задать в мм, например, 45 мм). Образующие на $П_2$ проецируются без искажения, как фронтали;

д) линию обреза на $П_1$ строят по точкам, в проекционной связи.

3. Определить видимость поверхности относительно $П_2$ (рис. 2.48) с помощью конкурирующих точек A и B или рассуждая о положении образующих на $П_1$ относительно $П_2$. Образующая, проходящая через точку 1_1, ближе к наблюдателю, чем образующая, проходящая через 5_1, поэтому на $П_2$ образующая 5_2 будет невидима.

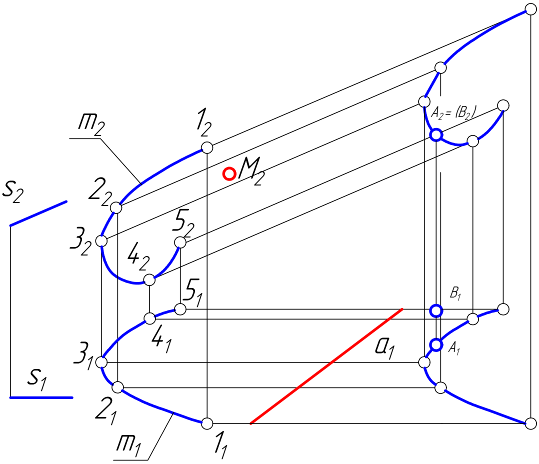


Рис. 2.48

4. Обвести поверхность с учетом видимости. Чтобы построить M_1, нужно через M_2 провести образующую и построить ее горизонтальную проекцию (рис. 2.49).

Чтобы построить a_2, нужно отметить точки пересечения a_1 с образующими поверхности, построить фронтальные проекции этих точек и соединить плавной кривой с учетом видимости.

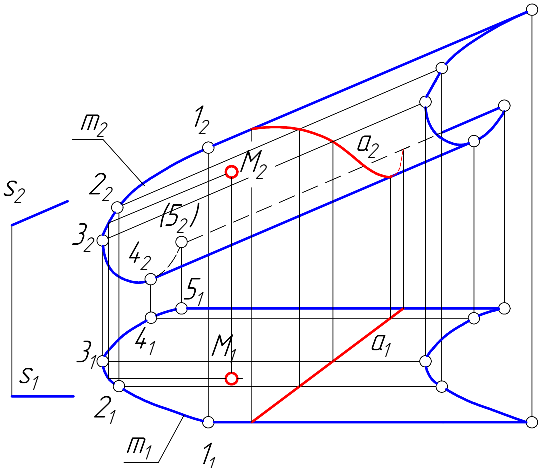


Рис. 2.49

2.6. Поверхности вращения

Поверхности вращения широко распространены в технике – это связано с простотой их обработки.

Поверхность вращения образуется в результате вращения какой-либо линии (образующей l) вокруг неподвижной оси i.

Образующая l может быть как прямая, так и кривая линия – плоская или пространственная.

Свойства поверхности вращения

Каждая точка образующей l при вращении вокруг оси опишет окружность, плоскость которой перпендикулярна оси. Эти окружности называются **параллелями**. Все параллели параллельны между собой.

Самая большая параллель называется **экватором** (рис. 2.50) – точка B максимально удалена от оси; самая малая параллель называется **горлом**, у некоторых поверхностей вращения отмечают верхнюю c и нижнюю d параллели (часто они являются линиями обреза поверхности).

Линии, которые получаются в сечении поверхности вращения плоскостями, проходящими через ось, называются **меридианами**.

Все меридианы равны между собой. Каждый меридиан рассекается этой плоскостью на два полумеридиана (правый и левый).

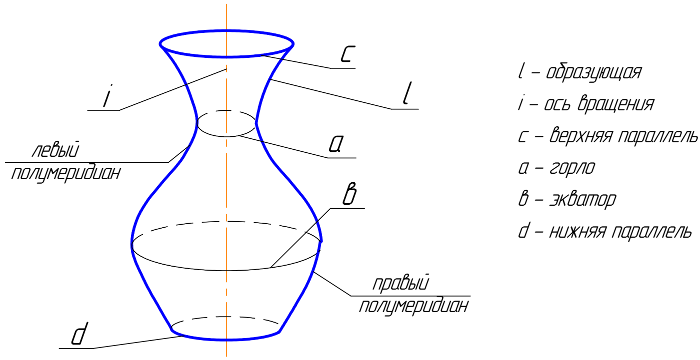


Рис. 2.50

При изображении поверхности вращения на комплексном чертеже часто поверхность располагают так, чтобы ее ось была перпендикулярна к плоскости проекций (например, $i \perp \Pi_1$). Тогда все параллели проецируются на соответствующую плоскость Π_1 без искажения, причем экватор и горло на такой поверхности, как на рис. 2.50, определяют горизонтальную проекцию поверхности.

Меридиан, расположенный во фронтальной плоскости, проецируется без искажения на плоскость Π_2. Этот меридиан называется **фронтальным**, или **главным**, он определяет очерк проекции поверхности на фронтальной плоскости проекций и границу видимости относительно Π_2.

Поверхности вращения общего вида

Поверхности вращения общего вида могут быть заданы различными способами. Рассмотрим подробно один из них.

Задача. Построить поверхность вращения общего вида, $\Phi(l, i)$; $l \circlearrowleft i$; $i \perp \Pi_1$ (рис. 2.50).

Алгоритм построения

1. Задать проекции элементов определителя, графическая часть определителя задана осью i и образующей l, которая совпадает с плоскостью фронтального меридиана (рис. 2.51).

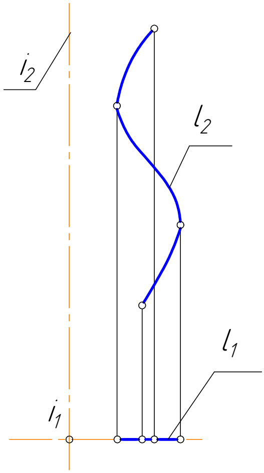


Рис. 2.51

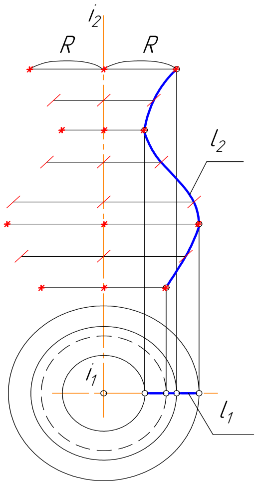


Рис. 2.52

2. Достроить фронтальную проекцию левого полумеридиана. Провести проекции параллелей в виде отрезков прямых (тонкими линиями), перпендикулярных оси *i*: горло, экватор, нижняя и верхняя; дополнительные параллели для более точного построения кривой (рис. 2.52).

3. После симметрично достроенного левого полумеридиана основной сплошной линией обвести очерк на $П_2$ – фронтальный (главный) меридиан.

4. Горизонтальная проекция поверхности вращения есть концентрично расположенные окружности – параллели, которые проецируются без искажения на $П_1$. Так как $i \perp П_1$, то i_1 – точка – центр окружностей. Экватор, верхняя параллель, горло на $П_1$ видимы, нижняя – невидима, так как расположена ниже экватора, а диаметр ее больше горла.

5 Видимость точек (рис. 2.53), принадлежащих поверхности, относительно $П_1$ определяется особыми параллелями (заштрихованные зоны на фронтальной проекции поверхности): относительно $П_2$ – главным меридианом (заштрихованная зона на горизонтальной проекции).

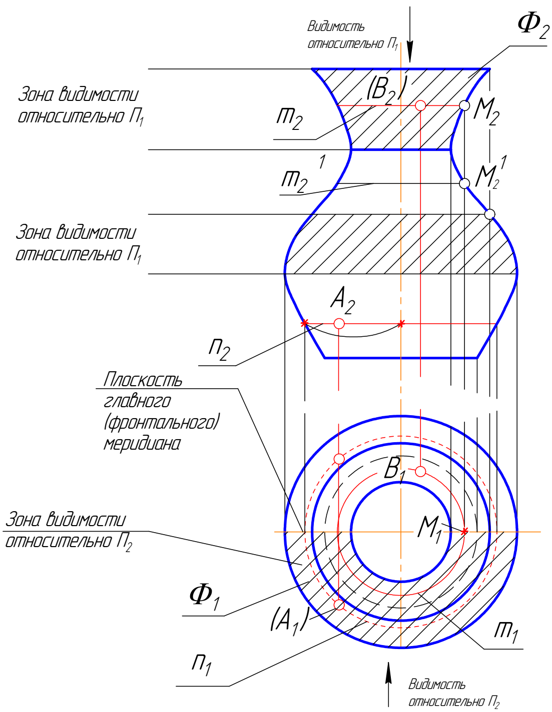


Рис. 2.53

6. Нахождение точки на любой поверхности вращения состоит из нескольких этапов. Рассмотрим это на конкретных примерах.

Пусть $A(A_2)$ и $B(B_1) \in Ф$; A_1 и $B_2 = ?$

А. Через точку A_2 проводят окружность – параллель $n_2 \rightarrow$ замеряют радиус этой параллели от оси до очерка и строят ее горизонтальную проекцию $n_1 \rightarrow$ из точки A_2 проводят линию связи на n_1, которая пересекает n_1 в двух точках, выбирают ближнюю, так как A_2 видима, т. е. точка A должна находиться перед главным меридианом $\rightarrow$ определяют видимость точки A_1 – она невидима, так как A_2 расположена ниже экватора (в незаштрихованной зоне).

Б. Через точку B_1 проводят параллель $m_1 \rightarrow$ отмечают M_1 – точку пересечения её с главным меридианом $\rightarrow$ по принадлежности ему отмечают M_2, M_2^1, выбирают M_2, так как B_1 на $П_1$ видима, т. е. ее параллель на $П_2$ должна находиться в зоне видимости относительно $П_1$

→ через M_2 проводят фронтальную проекцию этой параллели m_2 → из точки B_1 проводят линию связи до пересечения с m_2 → определяют видимость B_2 – она невидима, так как B_1 находится за главным меридианом (в незаштрихованной зоне).

Поверхности вращения второго порядка

Цилиндр вращения (прямой круговой цилиндр)

Цилиндр вращения образуется вращением образующей – l (прямой линией) вокруг параллельной ей оси (рис. 2.54).

$\Gamma(i, l)$, $a(a_2) \subset \Gamma$; a_1, a_3 = ?

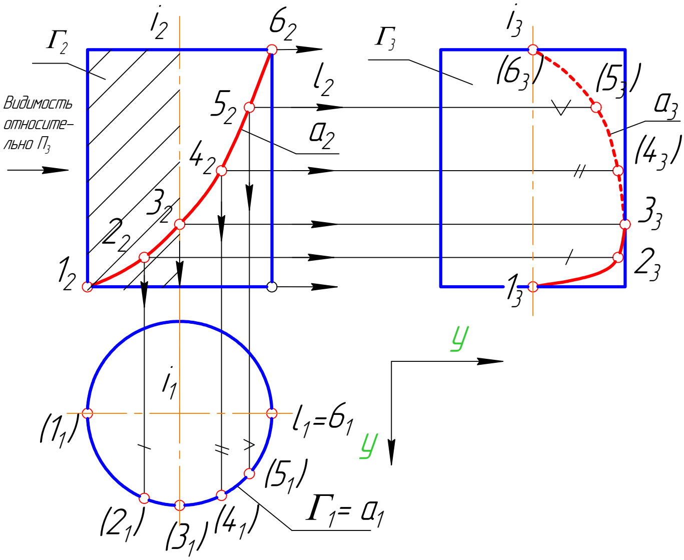


Рис. 2.54

Алгоритм построения

1\. $i \perp\!\!\!\perp \Pi_1$, $l // i$, l – горизонтально проецирующая прямая, значит, $\Gamma \perp\!\!\!\perp \Pi_1$ – цилиндр занимает проецирующее положение относительно Π_1.

2\. Γ_1 – главная проекция, которая обладает собирательными свойствами, поэтому $a_1 = \Gamma_1$, a_2 – видимая, поэтому a_1 расположена перед плоскостью фронтального меридиана.

3. a_3 строят по свойству принадлежности линии данной поверхности ($a \subset \Gamma$).

4. Точка 3 расположена на профильном меридиане, поэтому точка 3_3 является границей видимости на Π_3.

Конус вращения

Конус вращения образуется вращением прямолинейной образующей l вокруг оси, которую она пересекает.

На чертеже конус можно задавать различными способами. Рассмотрим один из них: $\Phi(i, l)$, $a(a_2) \subset \Phi$; $a_1, a_3 = ?$

$i \perp \Pi_1$, $l \cap i$; l – занимает положение прямой уровня (фронтали).

l – прямая линия, поэтому цилиндр и конус относят так же и к линейчатым поверхностям.

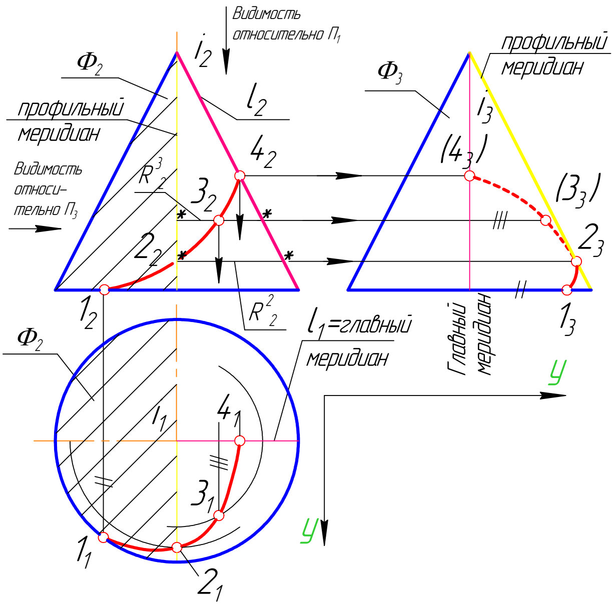


Рис. 2.55

Алгоритм построения a_1, a_3

1. Сначала отмечают на a_2 особые точки (рис. 2.55):

точка $1_2 \rightarrow 1_1 \rightarrow 1_3$ – по принадлежности окружности основания;

точка $4_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 4_3$ – по принадлежности главному меридиану.

2. Промежуточные: $3_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 3_3$ – по принадлежности параллели радиусом $R_2^{\,3}$.

3. Точка $2_2 \rightarrow 2_1$ – по принадлежности параллели $R_2^{\,2}$; $2_2 \rightarrow 2_3$ – по принадлежности профильному меридиану.

Видимость кривой *a*:

1) на $П_1$ кривая a_1 видима, так как на $П_1$ видима вся поверхность;

2) на $П_3$ границей видимости служит профильный меридиан (точка 2_3).

Сфера

Сфера образуется вращением окружности *l* вокруг оси (*ее диаметра*) *i*.

Пример 1 (рис. 2.56). $Г(i, l)$, – сфера, $i \perp П_1$ $A(A_2) \in Г$; $A_1, A_3 = ?$

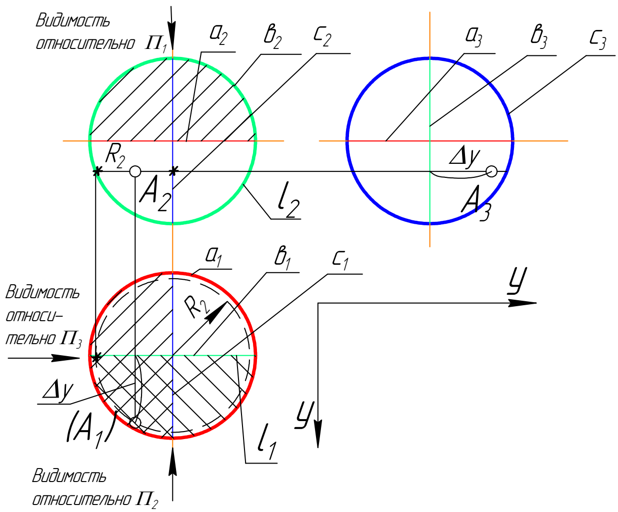


Рис. 2.56

a (a_1, a_2, a_3) – экватор, определяет видимость относительно $П_1$;

в ($в_1$, $в_2$, $в_3$) – главный (фронтальный) меридиан, определяет видимость относительно $П_2$;

c (c_1, c_2, c_3) – профильный меридиан, определяет видимость относительно $П_3$.

Алгоритм построения точки $A(A_1, A_3)$

1. Для построения A_1:

а) через точку A_2 (задана видимой) проводят параллель, замеряют радиус – R_2 (от оси до очерка), строят горизонтальную проекцию этой параллели, проводят линию связи из точки $A_2 \Rightarrow A_1$;

б) определяют видимость A_1 – невидима, так как точка $A(A_2)$ расположена ниже экватора (на Π_2 – в незаштрихованной зоне).

2. Для построения A_3:

а) из точки A_2 проводят линию связи на Π_3; на Π_1 замеряют расстояние от фронтального меридиана ($в_1$) – Δy (параллельно оси $У$), переносят на Π_3, откладывая от проекции фронтального меридиана ($в_3$) по линии связи (параллельно оси $У$) $\Rightarrow A_3$;

б) определяют видимость A_3 – она видима, так как точка $A(A_1)$ на Π_1 расположена перед профильным меридианом (на Π_1 в заштрихованной зоне).

Пример 2 (рис. 2.57). $\Phi(i, l)$, $a(a_2) \subset \Phi$, a_1, a_3 = ?

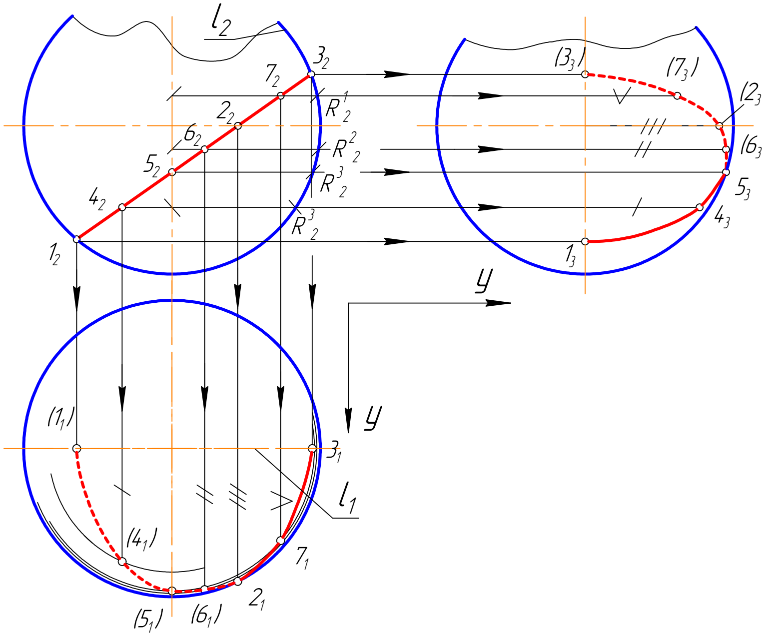


Рис. 2.57

1. Сначала отмечают особые точки:

точка $2_2 \rightarrow 2_1 \rightarrow 2_3$ – по принадлежности экватору;

точки $1_2 \rightarrow 1_1 \rightarrow 1_3$ и $3_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 3_3$ – по принадлежности главному меридиану;

точка $5_2 \rightarrow 5_3 \rightarrow 5_1$ – по принадлежности профильному меридиану.

2. Промежуточные: 4, 6, 7 находят с помощью параллелей, радиусы которых замеряют от оси до очерка на Π_2. Профильные проекции точек находят аналогично точке *A* на рис. 2.56.

Особые параллели и точки на них являются границами видимости кривой на соответствующих проекциях сферы.

Эллипсоид вращения

Образуется вращением эллипса вокруг оси (рис. 2.58).

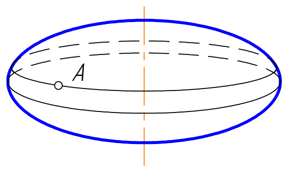


Рис. 2.58

Эллипсоид сжатый

Эллипс вращается вокруг малой оси (рис. 2.59).

Эллипсоид вытянутый

Эллипс вращается вокруг большой оси (рис. 2.60).

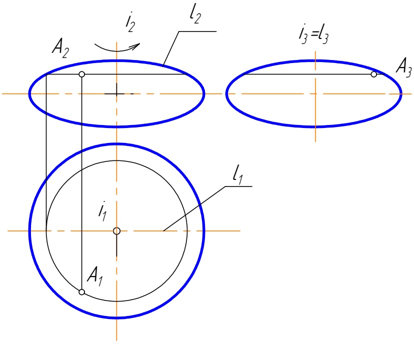


Рис. 2.59

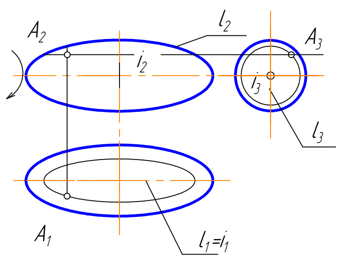


Рис. 2.60

Параболоид вращения

Образуется вращением параболы вокруг её оси (рис. 2.61).

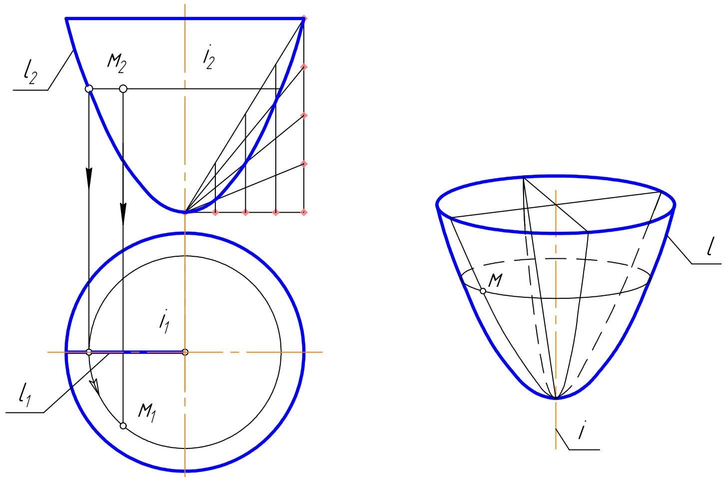


Рис. 2.61

Параболоид применяется в прожекторах и фарах автомобилей, где используются фокальные свойства параболы; если в фокусе параболы поместить источник света, то световые лучи, отражаясь от параболы, будут распространяться параллельно друг другу (рис. 2.62). На этом же свойстве основано и действие звукоуловителей и радиотелескопов.

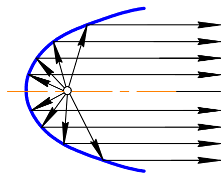


Рис. 2.62

Гиперболоид вращения однополостный

Образуется вращением гиперболы вокруг её оси (рис. 2.63).

Однополостный гиперболоид может быть образован вращением гиперболы вокруг мнимой оси, например, Σ (l, $i \perp \Pi_1$) (рис. 2.64), а может быть образован и вращением прямой линии вокруг скрещивающейся с ней оси, например, Σ (l, $i \perp \Pi_1$, $l \mathbin{\underline{\circ}} i$) (рис. 2.65). Эту поверхность относят и к линейчатым поверхностям.

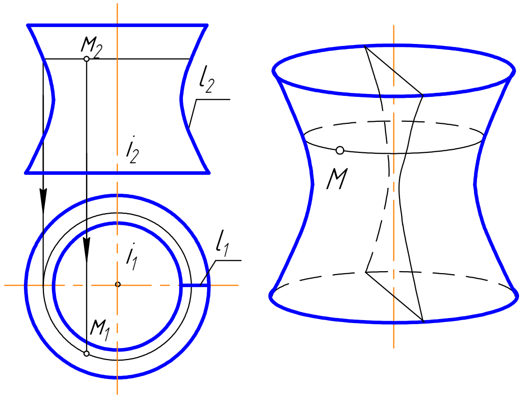


Рис. 2.63

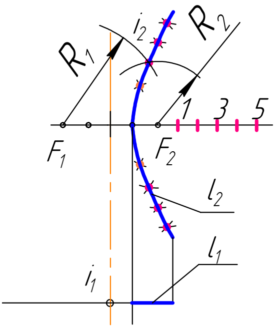


Рис. 2.64

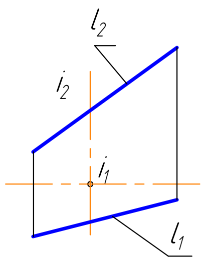


Рис. 2.65

Выдающийся русский инженер В.Г. Шухов (1921 г.) предложил использовать однополостный гиперболоид для строительства прочных и технологичных конструкций (радиомачт, водонапорных башен, маяков).

Только три поверхности вращения второго порядка имеют в качестве образующей прямую линию. В зависимости от расположения этой прямой относительно оси можно получить три вида линейчатых поверхностей вращения второго порядка: цилиндр, конус и однополостный гиперболоид вращения.

Алгоритм построения главного меридиана однополостного гиперболоида, $\Psi(i, l)$ (образующая – прямая линия).

При построении однополостного гиперболоида, как линейчатой поверхности, главный (фронтальный) меридиан строится по точкам; чем больше точек, тем точнее построения. Рассмотрим графический алгоритм построения одной точки E, взятой на образующей (рис. 2.66).

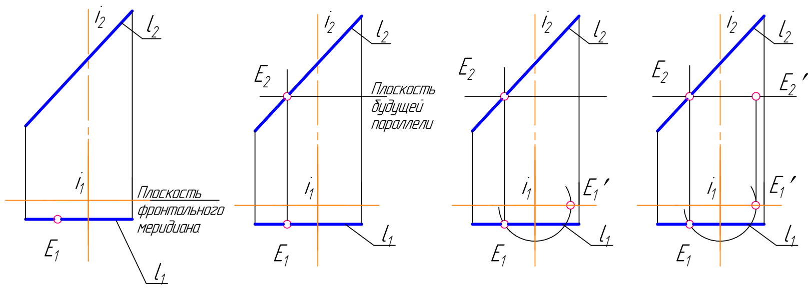


Рис. 2.66

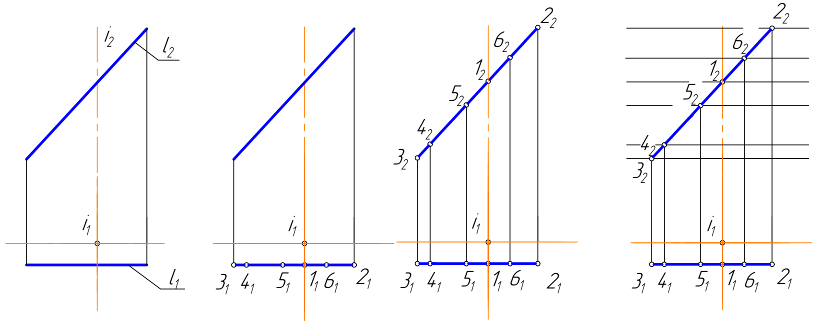


Рис. 2.67

Графический алгоритм построения поверхности следующий:

1. Задать проекции определителя $\Psi(i, l)$, $i \perp \Pi_1$ (рис. 2.67).

2. Распределить точки на l_1, которые определят положение будущих параллелей на Π_1 и Π_2:

точка $1(1_1)$ – определит положение горла (так как это ближайшая точка к оси вращения);

точка $2(2_1)$ – определит положение верхней параллели;

точка $3(3_1)$ – определит положение нижней параллели;

точки 4, 5, $6(4_1, 5_1, 6_1)$ – промежуточные точки.

3. Точки $(1_1 \dots 6_1 \rightarrow 1_2 \dots 6_2)$.

4. Далее все точки нужно ввести в плоскость фронтального меридиана (рис. 2.68), используя основное свойство поверхности вращения: каждая точка вращается вокруг оси по окружности (параллели), плоскость которой перпендикулярна оси:

точки $1_1 \dots 6_1 \rightarrow 1_1' \dots 6_1'$.

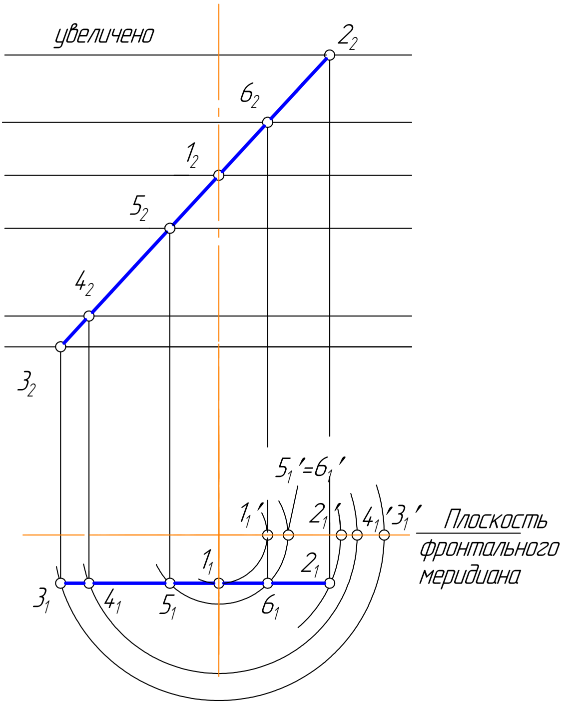


Рис. 2.68

5. Точки $1_1' \dots 6_1' \rightarrow 1_2' \dots 6_2'$ (рис. 2.69). Полученные точки соединить плавной кривой → правый полумеридиан.

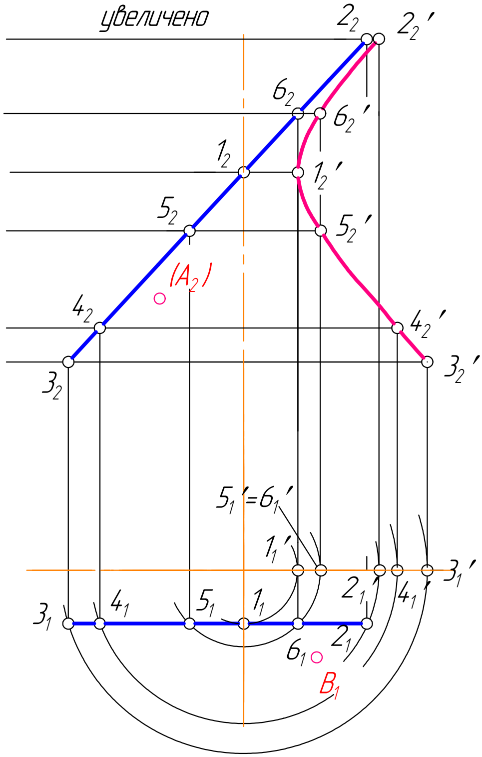


Рис. 2.69

6. Все полумеридианы поверхностей вращения равны, поэтому симметрично правому достраиваем левый (рис. 2.70).

7. Определить видимость поверхности (см. рис. 2.70).

8. $A(A_2)$ и $B(B_1) \subset \Psi$, A_1, B_2 = ?

Точки находят так же, как на любой поверхности вращения:

а) через точку A_2 проводят параллель до пересечения с главным (фронтальным) меридианом (точка M_2), $M_2 \rightarrow M_1$. Через M_1 проводят горизонтальную проекцию этой параллели или замеряют радиус этой параллели на Π_2 и проводят на Π_1.

Проводят линию связи из точки A_2, которая пересекает построенную параллель в двух точках; выбрать нужно ту, что дальше, так как точка A_2 невидимая, значит, сама точка находится за фронтальным меридианом (сзади). Точку A_1 нужно взять в скобки, так как A_2

не расположена в зоне видимости относительно Π_1 (она расположена в незаштрихованной зоне);

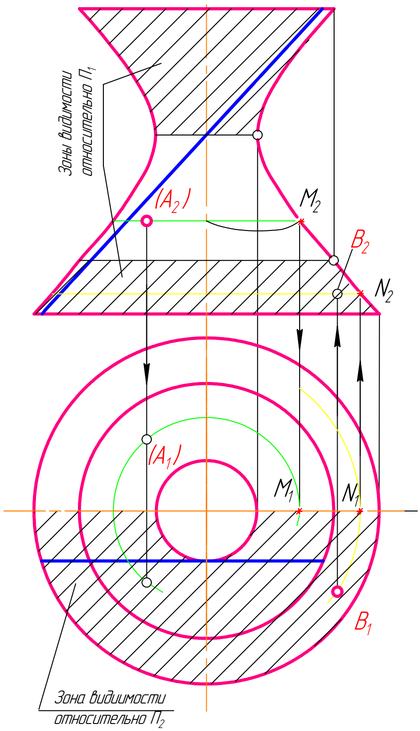


Рис. 2.70

б) через точку B_1 проводят параллель (вводят точку в плоскость фронтального меридиана $\to N_1$), $N_1 \to N_2$. Через N_2 проводят фронтальную проекцию этой параллели, из B_1 проводят линию связи $\to B_2$. Точка B_2 – видима, так как B_1 находится перед фронтальным меридианом.

Тор – поверхность вращения 4 порядка

Форму тора имеют ободы маховиков и шкивов, галтели – плавные переходы от одной поверхности изделия к другой, создаваемые с целью уменьшения напряжений в месте перехода. *Поверхность тора образуется при вращении окружности вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр* (рис. 2.71–2.75).

Определитель $\Theta\ (l, i)\ l \circlearrowleft i$.

Произвольная прямая пересекает тор в общем случае в четырех точках, следовательно, это поверхность четвертого порядка (рис. 2.71– 2.73).

Существует несколько разновидностей торов:

– открытый тор, $R < a$ (или тор-кольцо), внутренняя его часть называется глобоидом (рис. 2.71);

– закрытый тор (самосоприкасающийся), $R = a$ (рис. 2.72);

– закрытый тор (самопересекающийся), $R > a$ (тор-яблоко) (рис. 2.73);

– глобоид (рис. 2.74);

– закрытый тор (тор-лимон) (рис. 2.75).

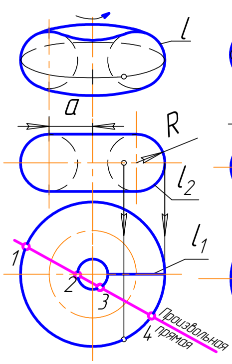


Рис. 2.71

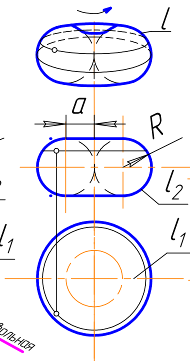


Рис. 2.72

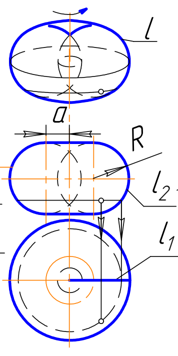


Рис. 2.73

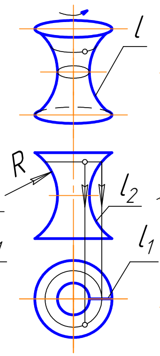


Рис. 2.74

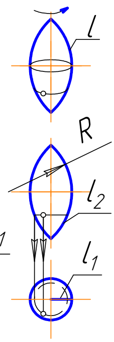


Рис. 2.75

Сконструировать поверхность: тор-кольцо $\Theta(l, i)$. Алгоритм:

1. Задать проекции элементов определителя (рис. 2.76).

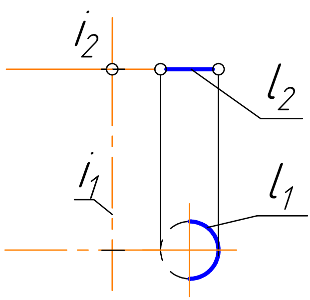


Рис. 2.76

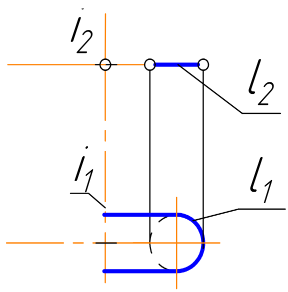


Рис. 2.77

2. Построить горизонтальную проекцию правого полумеридиана (рис. 2.77).

3. Достроить левый полумеридиан симметрично правому (рис. 2.78).

4. Фронтальная проекция – концентрично расположенные особые параллели: *a* – горло; *в* – экватор; *c* – дальняя параллель; *d* – ближняя параллель (рис. 2.78).

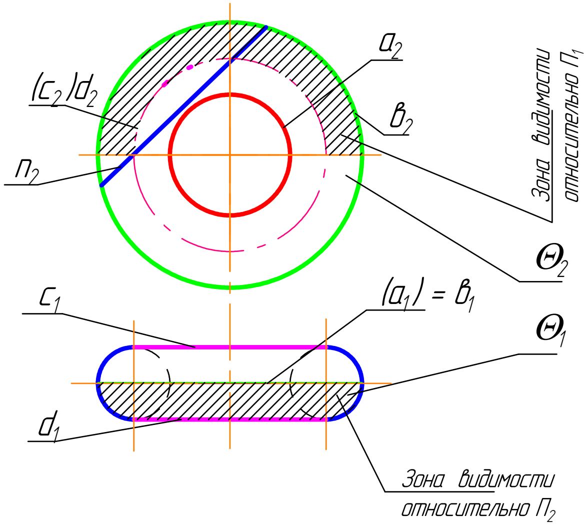


Рис. 2.78

5. Кривая $n(n_2)$ принадлежит поверхности тора-кольца. Алгоритм построения n_1 (рис. 2.79; 2.80).

Кривую n_1 строят по точкам, используя свойство принадлежности точки поверхности, проводя через точку простейшую линию. Для тора, как и для всех поверхностей вращения, простейшей является параллель (окружность):

а) сначала выбирают особые точки (рис. 2.79): $1(1_2)$ и $2(2_2) \in$ экватору, 3,4 ($3_2 = 4_2$) и 7,8 ($7_2 = 8_2$) $\in$ ближней и дальней параллелям, 5,6 ($5_2 = 6_2$) главному меридиану (или образующей l_2), 9,10 ($9_2 = 10_2$) определяют положение точек, максимально приближенных к оси (кратчайшее расстояние между ветвями кривой), т. е. эти точки будут расположены на самых малых параллелях.

Все особые точки, кроме 9, 10, находят без дополнительных построений.

Для построения точек 9, 10 проводят через $9_2(10_2)$ параллели до пересечения с главным меридианом $\rightarrow K_2(L_2)$.

Находят положение этих точек $K_1(L_1)$ на Π_1, через них проводят горизонтальные проекции параллелей, на которые проводят линии связи из соответствующих точек $9_2(10_2) \rightarrow 9_1, 10_1$;

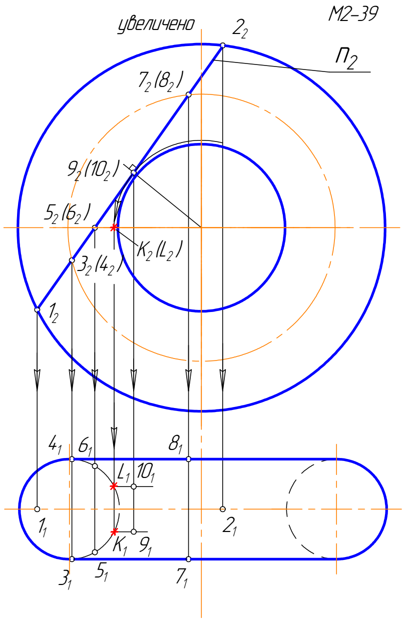


Рис. 2.79

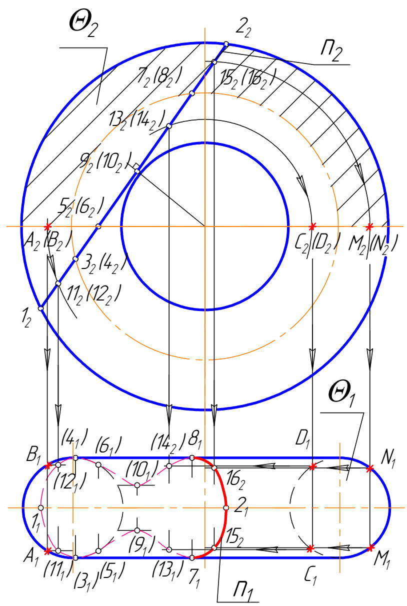


Рис. 2.80

б) промежуточные точки (рис. 2.80): 11, 12, 13, 14, 15, 16 строят по аналогии с точками 9, 10 с помощью параллелей;

в) плавной кривой соединяют все точки;

г) видимость кривой n_1 определяется ближней и дальней параллелями (точками 7 и 8), т. е. кривая n на Π_1 будет видима от точки 7_1 до точки 8_1 через 2_1.

2.7. Винтовые поверхности

Винтовые поверхности имеют широкое применение в технике, искусстве, дизайне, архитектуре: болты, винты, шнеки, сверла, пружины, прессы, домкраты, лестницы...

Винтовой называется поверхность, которая описывается какой-либо линией (образующей) при ее винтовом движении. Как уже отмечалось, что винтовое движение является сложным движением, при котором каждая точка образующей совершает одновременно два движения: вращательное и поступательное. При этом вращение происходит вокруг оси винта, а поступательное вдоль оси винта.

Если образующая – прямая линия, то поверхность называется линейчатой винтовой поверхностью, или ***геликоидом***. Геликоид является основой образования резьбы.

Геликоиды подразделяются на прямые и наклонные в зависимости от того, перпендикулярна образующая к оси геликоида или наклонена. **Шагом** винтовой поверхности называется линейное перемещение образующей за один полный оборот.

Прямой геликоид

Прямой геликоид образуется движением прямолинейной образующей l по двум направляющим, оставаясь в любой момент движения $\perp$ оси: $\Phi(i, m)$, $A(A_2) \in \Phi$, $A_1 = ?$

i – ось цилиндрической винтовой линии;

m – цилиндрическая винтовая линия.

Закон каркаса: $l \cap i$, $l \cap m$, $l \perp i$

На рис. 2.81 заданы проекции геометрической части определителя поверхности прямого геликоида; на рис. 2.82 изображены проекции поверхности прямого геликоида и построение недостающей горизонтальной проекции точки $A \to A_1$.

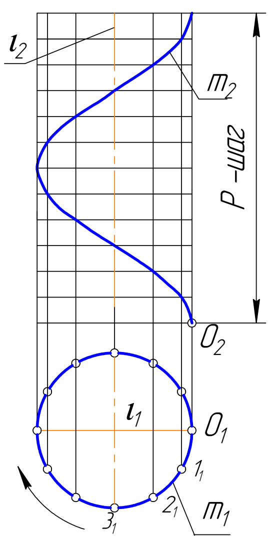


Рис. 2.81

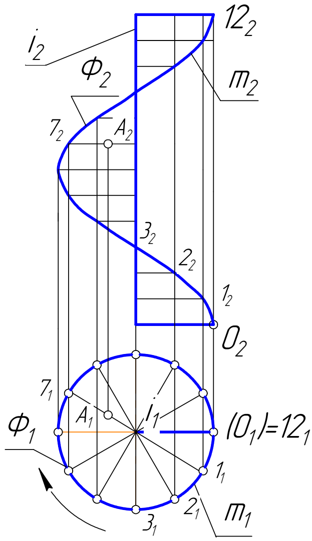


Рис. 2.82

Наклонный геликоид

Наклонный геликоид отличается от прямого тем, что его прямолинейная образующая при винтовом перемещении пересекает ось геликоида под постоянным углом, отличным от прямого.

Иначе говоря, образующая (l – прямая линия) наклонного геликоида при винтовом движении скользит по двум неподвижным направляющим (ось и цилиндрическая винтовая линия, как и у прямого), причем во всех своих положениях угол наклона образующей к оси не меняется. Поэтому можно сказать, что образующая в каждый момент движения будет параллельна соответствующим образующим некоторого конуса вращения, называемого **направляющим конусом**.

Построить наклонный геликоид $\Phi(i, m)$.

i – ось цилиндрической винтовой линии;

m – цилиндрическая винтовая линия.

Закон каркаса: $l \cap i$, $l \cap m$, l не $\perp i$, $i \perp \Pi_1$.

Алгоритм построения

1. Задать проекции элементов определителя: построить цилиндрическую винтовую линию из 12 точек (рис. 2.83);

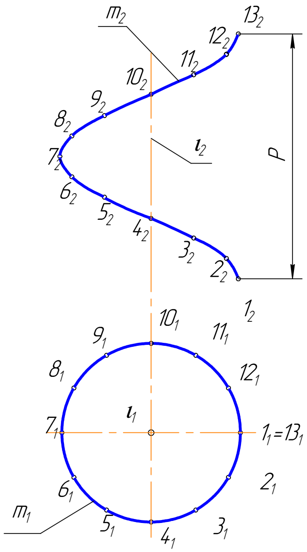


Рис. 2.83

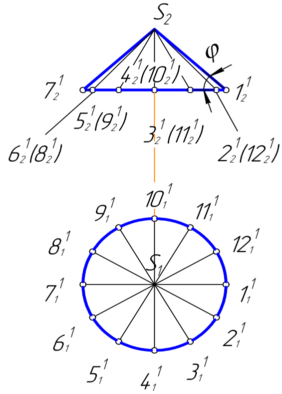


Рис. 2.84

задать проекции направляющего конуса (провести 12 образующих) (рис. 2.84), наклон образующих которого к оси определит угол наклона образующих геликоида. Углы φ у образующих конуса ($1_2^1S_2$ на рис. 2.84) и геликоида (1_2 на рис. 2.85) не искажаются, так как эти образующие занимают положение фронтали.

2. Построение геликоида начинаем с горизонтальной проекции. Из точек 1_1 и 2_1 провести образующие геликоида параллельно соответствующим образующим конуса 1_1^1 и 2_1^1 до пересечения с осью i_1 (рис. 2.85).

3. На фронтальной проекции из точек 1_2 и 2_2 провести образующие геликоида параллельно соответствующим образующим конуса 1_2^1 и 2_2^1 до пересечения с осью i_2.

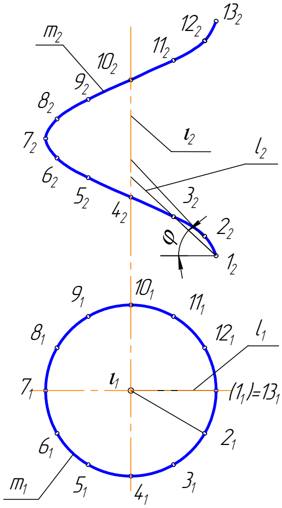


Рис. 2.85

4. Остальные образующие геликоида строить таким же образом.

Направляющий конус может быть соосным с наклонным геликоидом (рис. 2.86).

5. Определить видимость поверхности, как всегда, с помощью конкурирующих точек, например, выбрать фронтально конкурирующие $A_2 = B_2$, т. е. образующая 3_2 закрывает образующую 2_2, направляющая и образующие от точки 8_2 до точки 10_2 – невидимы.

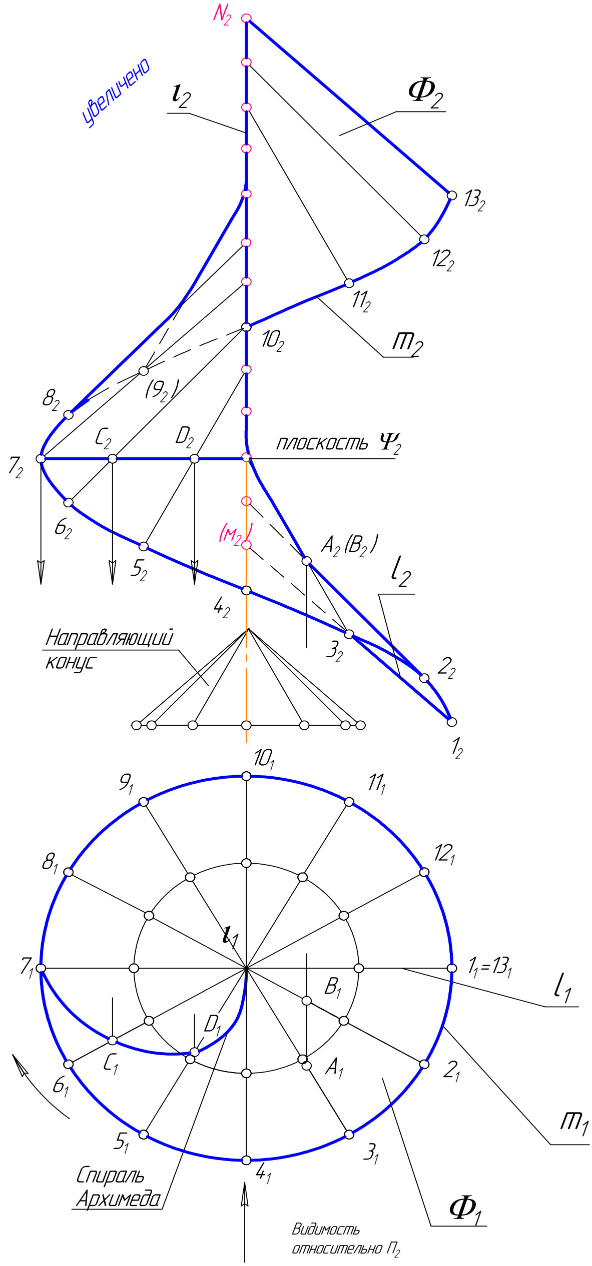
6. Обвести проекции поверхности на Π_2 с учетом видимости. Очертание геликоида на фронтальной проекции получается как огибающая семейство прямолинейных образующих.

7. В сечении геликоида плоскостью $\Psi(\Psi_2)$, перпендикулярной ее оси, получается спираль Архимеда.

Каркас образующих наклонного геликоида можно построить и без применения направляющего конуса.

Образующие $1M$ и $13N \parallel \Pi_2$, т. е. занимают положение фронталей, поэтому при заданном угле наклона образующей геликоида сразу определяют положение точек M_2 и N_2.

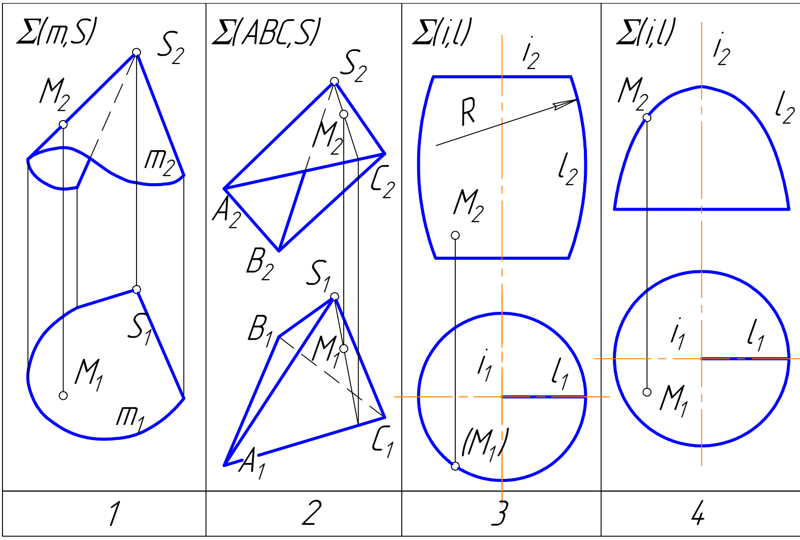
Расстояние (шаг) между этими точками делят на 12 равных частей и соединяют с соответствующими точками на цилиндрической винтовой направляющей.



увеличено
N_2
l_2
Φ_2
13_2
12_2
11_2
m_2
10_2
(9_2)
8_2
C_2
D_2
плоскость Ψ_2
7_2
6_2
(M_2)
$A_2\,(B_2)$
l_2
5_2
4_2
Направляющий
конус
3_2
2_2
1_2
10_1
9_1
11_1
8_1
12_1
l_1
7_1
$1_1=13_1$
l_1
B_1
D_1
C_1
A_1
6_1
2_1
m_1
5_1
3_1
4_1
Спираль
Архимеда
Φ_1
Видимость
относительно Π_2

Рис. 2.86

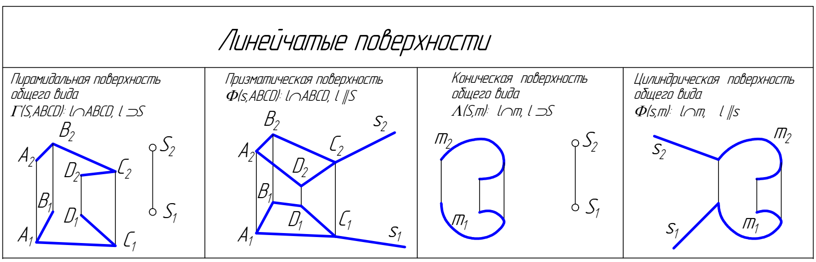
Обучающий тест 5 «Поверхность» (ответы — в конце модуля 2)

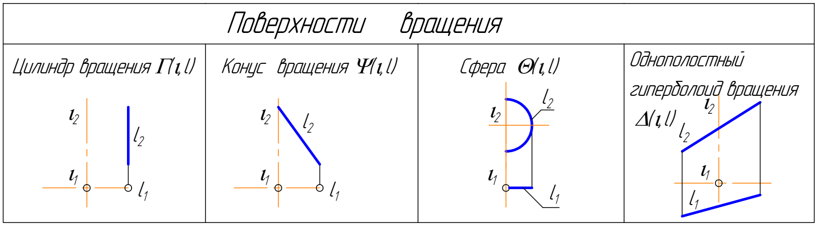


Вопросы к тесту

1. На каком чертеже изображена коническая поверхность общего вида?
2. На каком чертеже изображена поверхность вращения общего вида?
3. На каком чертеже изображена поверхность тора?
4. На каком чертеже точка *M* принадлежит данной поверхности?

Справочный материал. Геометрическая часть определителя некоторых поверхностей





Ответы на обучающие тесты. 4: 1 – 5, 2 – 3, 3 – 6, 4 – 2, 5 – 6, 6 – 1, 7 – 5, 8 – 6; **5**: 1 – 1, 2 – 4, 3 – 3, 4 – 2.

Выводы. Сконструировать поверхность – это значит построить проекции поверхности, состоящие из проекций геометрической части определителя и проекций характерных линий, к которым относятся линии контура и линии обреза.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем может быть задана плоскость на чертеже?
2. Как могут располагаться плоскости относительно плоскостей проекций?
3. Какая плоскость называется плоскостью общего положения?
4. Какая плоскость называется горизонтально проецирующей, фронтально проецирующей, профильно проецирующей?
5. Какая плоскость называется горизонтальной плоскостью уровня, фронтальной плоскостью уровня, профильной плоскостью уровня?
6. Нужны ли специальные построения при определении угла наклона проецирующих плоскостей к плоскостям проекций?
7. Сформулируйте условие взаимной принадлежности точки и прямой к плоскости.
8. Какие прямые называются особыми линиями плоскости?
9. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей.
10. Как вы понимаете «кинематический принцип образования поверхности»?
11. Что называется определителем поверхности и из каких частей он состоит?

12. Что означает «задать поверхность на комплексном чертеже»?
13. Какие поверхности называются линейчатыми?
14. Как образуется поверхность вращения?
15. Перечислите поверхности вращения второго порядка.
16. Как образуются винтовые поверхности?
17. Сформулируйте признак принадлежности точки к поверхности.
18. Проведите классификацию поверхностей, описанных в теме 2.
19. Какие поверхности могут занимать проецирующее положение?

Модуль 3. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

В технике детали большинства изделий имеют формы, представляющие собой поверхности, пересечённые либо плоскостями, либо другими поверхностями. Для того чтобы проектировать и изготавливать такие изделия, необходимо научиться строить линии пересечения различных геометрических фигур. В этом вам поможет данный раздел начертательной геометрии.

Позиционными задачами называют такие, в которых определяется взаимное расположение геометрических фигур в пространстве.

Существует три типа позиционных задач:

1. Взаимный порядок геометрических фигур.
2. Взаимная принадлежность геометрических фигур.
3. Взаимное пересечение геометрических фигур.

Первые две задачи были рассмотрены в предыдущих разделах курса. Взаимный порядок геометрических фигур – это расположение геометрических фигур относительно плоскостей проекций и наблюдателя: «ближе – дальше», «выше – ниже», «левее – правее» и т. д. Взаимная принадлежность геометрических фигур – это «точка принадлежит...», «прямая принадлежит...» и т. д.

Рассмотрим подробнее всё многообразие решений третьего типа задач.

3.1. Взаимное пересечение геометрических фигур

Две геометрические фигуры, пересекаясь, дают общий элемент:

1. Прямая с прямой – точку ($a \cap b \Rightarrow K$).
2. Прямая с плоскостью – точку ($a \cap \Sigma \Rightarrow K$).
3. Прямая с поверхностью – одну или несколько точек ($a \cap \Delta \Rightarrow K$, M...).
4. Плоскость с плоскостью – прямую линию ($\Sigma \cap \Gamma \Rightarrow a$).
5. Плоскость с поверхностью – плоскую кривую или плоскую ломаную ($\Sigma \cap \Delta \Rightarrow m$).
6. Поверхность с поверхностью – пространственную кривую или несколько пространственных кривых, которые, в свою очередь, могут состоять из плоских кривых или плоских ломаных ($\Delta \cap \Lambda \Rightarrow m$).

Из всего многообразия этих задач выделяются две общие задачи, которые называют **главными позиционными задачами**:

Первая главная позиционная задача (1 ГПЗ) – пересечение линии с поверхностью (первые три задачи).

Вторая главная позиционная задача (2 ГПЗ) – взаимное пересечение двух поверхностей (4, 5 и 6 задачи).

При этом следует помнить, что плоскость – это частный случай поверхности, поэтому условимся пересечение плоскостей или плоскости с поверхностью относить ко 2 ГПЗ.

При решении 2 ГПЗ сначала необходимо выяснить, **что** будет являться общим элементом у двух пересекающихся поверхностей. Чаще всего бывает следующее:

а) пересекаются два многогранника – общий элемент есть пространственная ломаная линия, состоящая из отдельных звеньев (каждое звено – прямая линия), как результат пересечения граней многогранников; звенья между собой соединены в точках *A*, *B*, *C*..., которые представляют собой точки пересечения рёбер первого многогранника с гранями второго и наоборот (рис. 3.1);

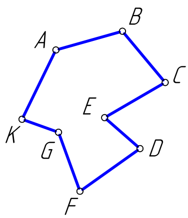


Рис. 3.1

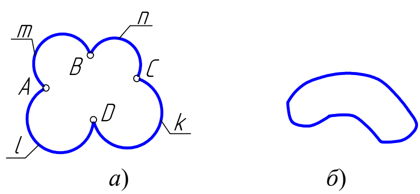


Рис. 3.2

б) пересекается многогранник с кривой поверхностью (например, тор с пирамидой). Общий элемент – пространственная кривая линия, состоящая из отдельных звеньев. Каждое звено есть результат пересечения граней многогранника с кривой поверхностью (звенья *m*, *n*, *k*... – плоские кривые). Звенья между собой соединены в точках *A*, *B*, *C*, *D*, которые представляют собой результат пересечения рёбер многогранника с кривой поверхностью (рис. 3.2, *а*);

в) пересекаются две кривые поверхности (например, сфера с конусом). Общий элемент – пространственная кривая линия (рис. 3.2, *б*).

Далее необходимо определить **количество** общих элементов пересекающихся поверхностей. Определяется оно в зависимости от **характера** пересечения поверхностей.

Характер пересечения поверхностей

Например, пересекаются конус Ф, окружность основания которого параллельна $П_1$, и фронтально проецирующий цилиндр Δ (рис. 3.3).

Такой характер пересечения, когда одна из поверхностей насквозь пронзает другую, называется **чистое проницание**. В этом случае линий пересечения две (на рис. 3.3 это *m* и *n*).

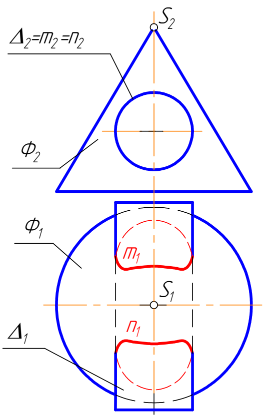


Рис. 3.3

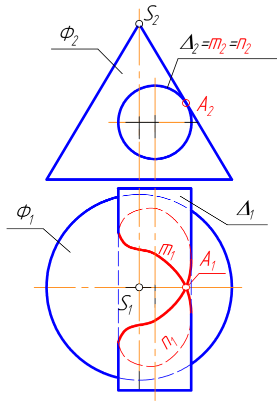


Рис. 3.4

Характер пересечения поверхностей, представленный на рис. 3.4, когда очерки поверхностей касаются в одной точке, является **частным случаем проницания**, когда линий пересечения две – *m* и *n*, но с одной общей точкой *A*.

Характер пересечения поверхностей, представленный на рис. 3.5, когда одна из поверхностей «вдавливается» в другую, называется **вмятие**. В этом случае линия пересечения одна (на рис. 3.5 это *m*).

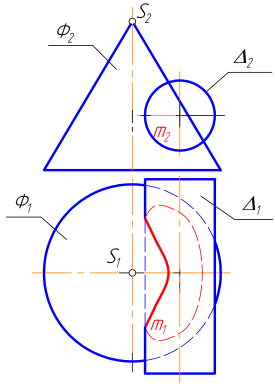


Рис. 3.5

3.2. Решение главных позиционных задач

3 случая. 3 алгоритма

Способ решения главных позиционных задач, или алгоритм решения, зависит от расположения пересекающихся геометрических фигур относительно плоскостей проекций.

Здесь имеют место 3 случая:

1) обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение. Задачи решаются по **первому алгоритму**;
2) одна из пересекающихся фигур – проецирующая, другая – непроецирующая. Задачи решаются по **второму алгоритму**;
3) обе пересекающиеся фигуры – непроецирующие. Задачи решаются по **третьему алгоритму**.

Здесь уместно вспомнить, какие фигуры могут занимать проецирующее положение. Таковыми являются: прямая, плоскость, а из всех известных нам поверхностей проецирующее положение могут занимать только призматическая поверхность (частный случай – призма) и цилиндрическая поверхность (частный случай – прямой круговой цилиндр). На рис. 3.6 показаны примеры горизонтально проецирующих фигур. Напомним, что главными проекциями у них являются: у прямой a – точка a_1, у плоскости Σ – прямая Σ_1, у призмы Δ – треугольник Δ_1 (а в общем случае – или ломаная линия, или любой многоугольник), у цилиндра Г – окружность $Г_1$ (в общем случае – замкнутая или разомкнутая кривая).

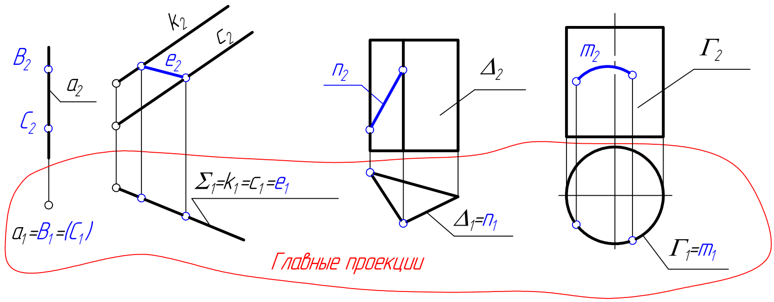


Рис. 3.6

Напомним также, что **главные проекции** проецирующих фигур обладают «собирательными» свойствами (рис. 3.6).

Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение. 1 алгоритм

Решение рассмотрим на конкретном примере.

Задача. Найти проекции точки пересечения горизонтально проецирующей плоскости $\Sigma(m \parallel n)$ с фронтально проецирующей прямой a (рис. 3.7).

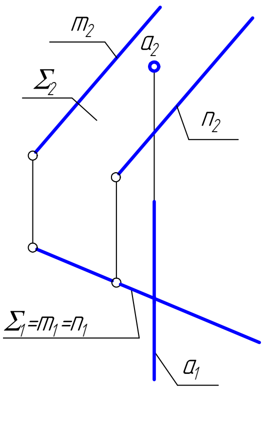


Рис. 3.7

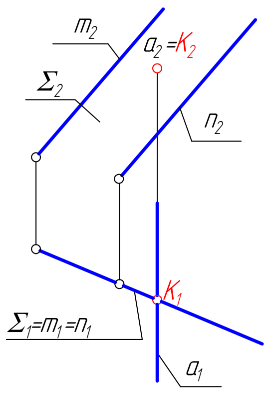


Рис. 3.8

Алгоритм. Так как в пересечении участвует прямая линия a, то это – **первая главная позиционная задача**. Обе пересекающиеся фигуры – проецирующие относительно разных плоскостей проекций. Решение начинаем с фронтальной проекции.

1. Точка K является общим элементом плоскости Σ и прямой a, следовательно, $K \in \Sigma$ и $K \in a$. Но если $K \in a$, то $K_2 \in a_2$, а поскольку a_2 – это точка (главная проекция, обладающая собирательными свойствами), то $K_2 = a_2$ (рис. 3.8).
2. Находим горизонтальную проекцию точки K. Так как плоскость Σ на Π_1 проецируется в прямую линию Σ_1, то K_1, как общий элемент Σ и a, будет располагаться на пересечении Σ_1 и a_1.

Выполним краткую алгоритмическую запись вышеизложенного:

$$\boldsymbol{\Sigma(m \,//\, n) \cap a = K}\text{; **1 ГПЗ, 1 алгоритм.**}$$

$$1.\ \boldsymbol{K \in a,\ a \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow K_2 = a_2.}$$

$$2.\ \boldsymbol{K \in a,\ K \in \Sigma,\ \Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow K_1 = \Sigma_1 \cap a_1.}$$

Таким образом, решение 1 ГПЗ по первому алгоритму заключается в следующем. *Проекции общего элемента на чертеже уже присутствуют. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Решение сводится к их нахождению и обозначению.*

Вторую главную позиционную задачу решим в соответствии с рассмотренным алгоритмом.

Задача. Найти проекции линии пересечения горизонтально проецирующего цилиндра Ф с фронтально проецирующей призмой Г (рис. 3.9).

Алгоритм. Пересекаются две поверхности, это – **2 ГПЗ**. Вначале анализируем, **что** должно получиться в результате пересечения. Так как характер пересечения – вмятие, то общим элементом должна быть одна пространственная линия – m.

Обе фигуры проецирующие относительно разных плоскостей проекций. Следовательно, согласно 1 алгоритму, проекции общего элемента должны совпадать с главными проекциями поверхностей. На фронтальной проекции m_2 должна совпадать с Γ_2. Однако из чертежа (рис. 3.9) видно, что часть главной проекции призмы Γ_2 выходит за пределы цилиндра, а это означает, что совпадение проекции линии пересечения m_2 с главной проекцией призмы $Г_2$ только частичное. Следовательно, нужно найти границы общей части.

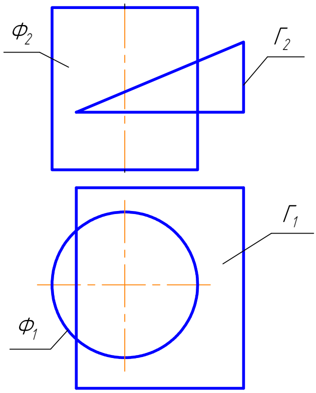


Рис. 3.9

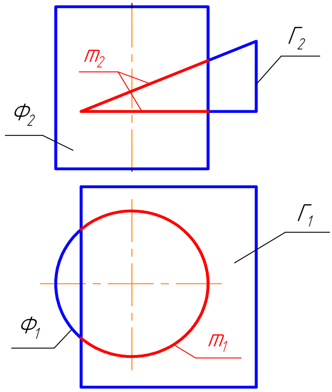


Рис. 3.10

На рис. 3.10 линия m_2, совпадающая с $Г_2$ в пределах цилиндра, выделена красным цветом – это фронтальная проекция линии пересечения поверхностей.

Аналогичные рассуждения проведём для нахождения горизонтальной проекции линии пересечения m_1. Она совпадает с главной проекцией цилиндра $Ф_1$ в пределах призмы.

Алгоритмическая запись будет выглядеть следующим образом:

$Ф \cap Г = m$; 2 ГПЗ, 1 алгоритм.

1. $m \cap Г,\ Г \perp\!\!\!\perp П_2 \Rightarrow m_2 = Г_2$.

2. $m \cap Ф,\ Ф \perp\!\!\!\perp П_1 \Rightarrow m_1 = Ф_1$.

Проанализируем, из чего состоит линия пересечения m. Как мы уже предполагали, это пространственная линия. Она состоит из двух плоских кривых a и b (рис. 3.11, 3.12), получающихся от пересечения цилиндра двумя гранями призмы, которые на рис. 3.12 обозначены плоскостями Σ и Λ.

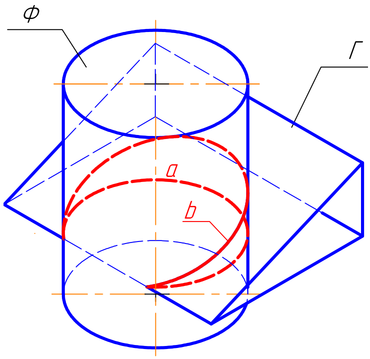


Рис. 3.11

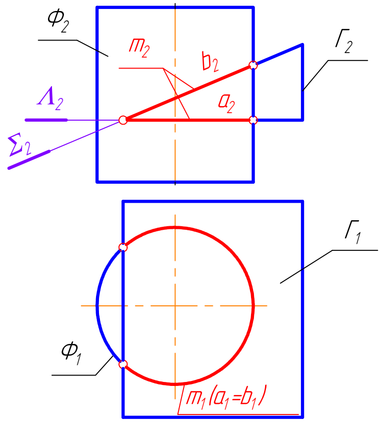


Рис. 3.12

Плоскость $\Lambda(\Lambda_2)$ – это горизонтальная плоскость уровня. Она параллельна окружности основания цилиндра, поэтому она пересечёт цилиндр Ф тоже по окружности. Тогда линия *a* есть дуга окружности, которая спроецируется на Π_2 в виде прямой a_2, а на Π_1 – в натуральную величину, т. е. в виде дуги окружности a_1.

Плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$ – фронтально проецирующая и пересечёт цилиндр Ф по эллипсу. Тогда линия *b* есть дуга эллипса, которая спроецируется на Π_2 в виде прямой b_2, а на Π_1 – в виде дуги окружности b_1.

Таким образом, линия пересечения двух заданных поверхностей есть пространственная линия, состоящая из двух плоских кривых – дуги окружности и дуги эллипса.

Скорректируем алгоритм решения позиционных задач в 1 случае.

Проекции общего элемента на чертеже уже есть. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Если совпадение только частичное, то находят границы общей части. Решение сводится к их нахождению и обозначению.

Решение задач в случае, когда одна из пересекающихся фигур проецирующая, вторая – непроецирующая. 2 алгоритм

Решение 1 ГПЗ снова рассмотрим на конкретном примере.

Задача. Найти проекции точки пересечения плоскости общего положения $\Sigma(m \parallel n)$ с фронтально проецирующей прямой *a* (рис. 3.13).

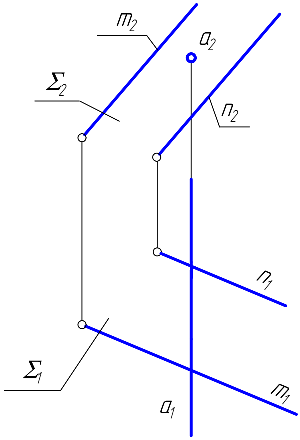


Рис. 3.13

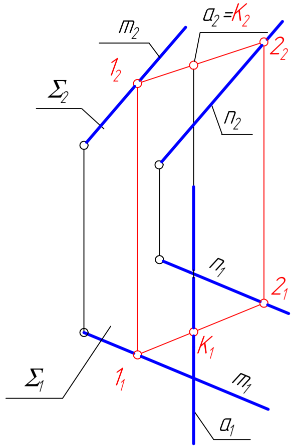


Рис. 3.14

Графическое условие этой задачи подобно условию 1 ГПЗ, показанному на рис. 3.7. Такая же фронтально проецирующая прямая *a* пересекается с плоскостью $\Sigma(m \parallel n)$. Только в данной задаче плоскость Σ – общего положения.

Алгоритм. Решение начинаем, как и в первом случае, с фронтальной проекции. Точно так же фронтальная проекция точки пересечения K_2 совпадёт с фронтальной проекцией прямой a_2, так как a_2 – точка (рис. 3.14).

Горизонтальную проекцию точки пересечения K_1 найти так однозначно, как в первом случае, уже невозможно. Поэтому будем находить её по признаку принадлежности плоскости Σ. Помним, что точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости. Возьмём в плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$ любую прямую, проходящую через точку K_2, например, $12(1_2 2_2)$, найдём её горизонтальную проекцию $1_1 2_1$ $(1 \in m,\ 2 \in n)$, и на этой прямой будет располагаться точка K_1.

Следующим этапом необходимо определить видимость прямой *a* на горизонтальной проекции. Для этого воспользуемся **методом конкурирующих точек** (рис. 3.15).

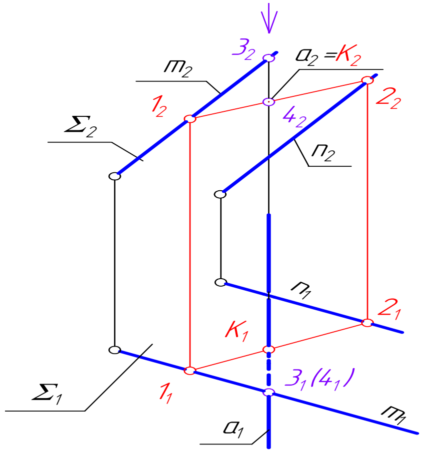


Рис. 3.15

Так как плоскость Σ имеет с прямой *a* только одну общую точку *K*, то прямые *m* и *a* – скрещивающиеся, а точки 3 и 4 на них – горизонтально конкурирующие. Пусть точка 3 принадлежит прямой *m* (то есть плоскости Σ), точка 4 принадлежит прямой *a*. Находим фронтальные проекции точек. Из чертежа рис. 3.15 видно, что точка 3_2 расположена выше, чем точка 4_2. Следовательно, на данном участке начиная от точки пересечения K_1 до прямой m_1 прямая a_1 не видна.

Выполним краткую алгоритмическую запись решения:

$\Sigma(m \parallel n) \cap a = K$; 1 ГПЗ, 2 алгоритм.

1. $\boldsymbol{K \in a,\ a \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow K_2 = a_2}$.
2. $\boldsymbol{K_1 \in \Sigma,\ K \in 12,\ 12 \subset \Sigma \Rightarrow K_1 = a_1 \cap 1_1 2_1}$.

Рассмотрим ещё одну задачу. Пересекаются прямая общего положения *a* с поверхностью горизонтально проецирующего цилиндра Г (рис. 3.16). Найти проекции точек пересечения.

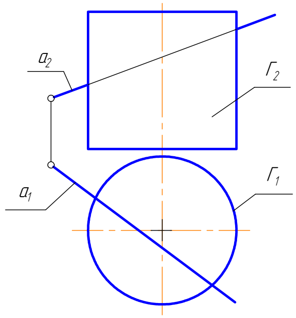


Рис. 3.16

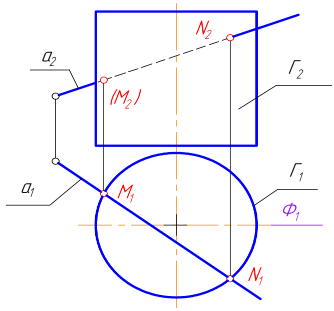


Рис. 3.17

Решение. 1 ГПЗ, 2 алгоритм. Горизонтальная проекция цилиндра – окружность $Г_1$, следовательно, в результате пересечения получаются 2 точки M и N, горизонтальные проекции которых M_1 и N_1 располагаются на пересечении $Г_1$ и a_1 (рис. 3.17).

Фронтальные проекции точек пересечения M_2 и N_2 находим по принадлежности прямой a с использованием линии связи. Видимость на $П_2$ определяем по цилиндру: точка N_1 расположена **перед** плоскостью фронтального меридиана Ф, и N_2 – видимая; M_1 расположена **за** плоскостью фронтального меридиана Ф, и M_2 – невидимая. Часть прямой a между точками M и N находится внутри цилиндра, следовательно, на $П_2$ участок прямой между точками M_2 и N_2 невидимый. Участок прямой между точкой M_2 и очерковой образующей цилиндра также невидим, так как находится **за** плоскостью фронтального меридиана. Алгоритмическая запись решения:

$Г \cap a = M, N$; 1 ГПЗ, 2 алгоритм.
1. $\boldsymbol{M, N \in Г, Г \perp\!\!\!\perp П_1 \Rightarrow M_1, N_1 = Г_1 \cap a_1}$.
2. $\boldsymbol{M, N \in a \Rightarrow M_2, N_2 \in a_2}$.

Вывод. Решение задач по 2 алгоритму сводится к следующему:

1. Выделяют из двух заданных фигур проецирующую и отмечают её главную проекцию.

2. Ставят обозначение той проекции искомого общего элемента, которая совпадает с главной проекцией проецирующей фигуры. Если совпадение только частичное, то находят границы общей части.

3. Вторую проекцию общего элемента находят по условию его принадлежности непроецирующей фигуре.

4. Определяют видимость проекций общих элементов и пересекающихся фигур.

Конические сечения

Решение **второй главной позиционной задачи** по 2 алгоритму рассмотрим на примере **конических сечений**. Ещё в Древней Греции был известен тот факт, что при пересечении конуса различными плоскостями можно получить прямые линии, кривые второго порядка и, как вырожденный случай, точку. На рис. 3.18 показана фронтальная проекция конуса Ω_2, пересечённого фронтально проецирующими плоскостями Λ_2, Γ_2, Φ_2, Δ_2, Σ_2; в сечениях получаются, соответственно, две прямые a и b, окружность c, эллипс d, парабола m и гипербола k.

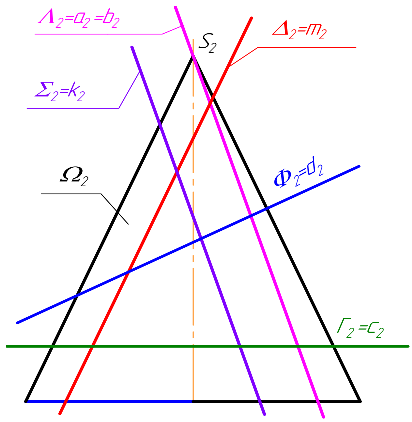


Рис. 3.18

Рассмотрим каждый случай получения конических сечений, представленных на рис. 3.18, с точки зрения решения **2 ГПЗ** по **2 алгоритму**.

Две образующие получатся в сечении, если плоскость, пересекая конус, проходит через его вершину (рис. 3.19).

Алгоритм: $\Omega \cap \Lambda = a, b$; 2 ГПЗ, 2 алгоритм.

1. $\Lambda \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow a_2, b_2 = \Lambda_2$.

2. $a_1, b_1 \subset \Omega$.

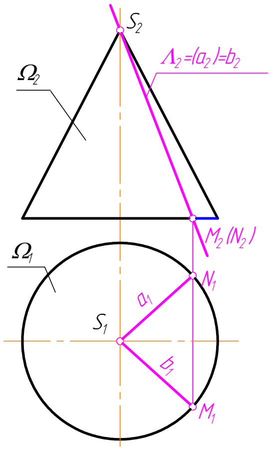


Рис. 3.19

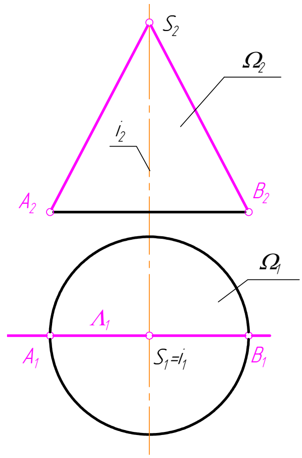


Рис. 3.20

Частным случаем такого вида пересечения конуса плоскостью является такое положение, при котором плоскость Λ проходит через ось *i* конуса (на рис. 3.20 Λ_1 совпадает с плоскостью фронтального меридиана).

Результатом пересечения являются образующие конуса с максимальным углом между ними (на рис. 3.20 это очерковые образующие конуса *SA* и *SB*).

Алгоритм: $\Omega \cap \Lambda = SA + SB$. 2 ГПЗ, 2 алгоритм.

1. $\Lambda \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow S_1A_1 + S_1B_1 = \Lambda_1$.

2. $S_2A_2 + S_2B_2 \subset \Omega$.

Окружность получится в сечении, если плоскость, пересекая конус, параллельна окружности основания *n* (рис. 3.21), а значит, перпендикулярна оси *i* конуса.

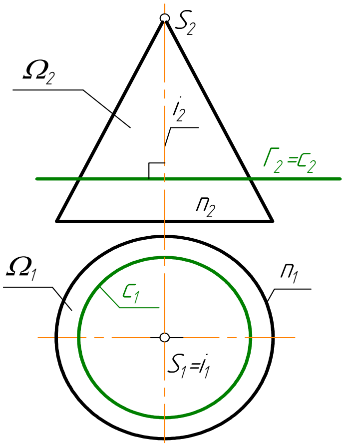


Рис. 3.21

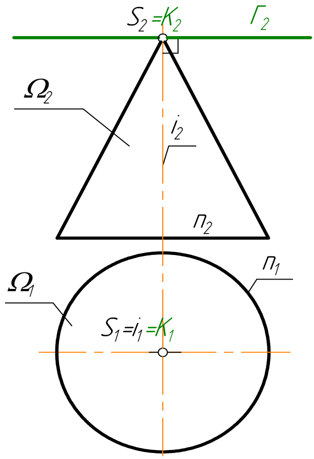


Рис. 3.22

Алгоритм: $\Gamma \cap \Omega = c$. 2 ГПЗ, 2 алгоритм.

1. $\boldsymbol{\Gamma \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow c_2 = \Gamma_2}$.
2. $\boldsymbol{c_1 \subset \Omega}$.

Вырожденный случай – плоскость $\Gamma(\Gamma_2)$ проходит через вершину S конуса Ω (рис. 3.22). Тогда эта плоскость коснётся конуса только в одной точке. $\Omega \cap \Gamma(\Gamma_2) = K$.

Эллипс получится в сечении, если плоскость не перпендикулярна оси конуса и пересекает все его образующие (рис. 3.23–3.25).

Алгоритм: $\Phi \cap \Omega = d$. 2 ГПЗ, 2 алгоритм.

1. $\boldsymbol{\Phi \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow d_2 = \Phi_2}$.
2. $\boldsymbol{d_1 \subset \Omega}$.

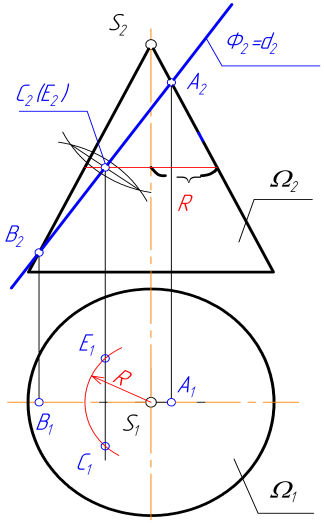


Рис. 3.23

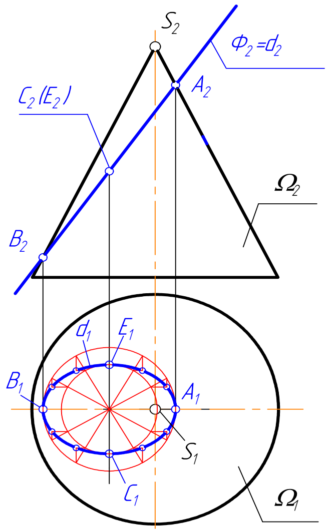


Рис. 3.24

Построение эллипса начинаем с его осей (рис. 3.23). AB – большая ось эллипса, причём A_2B_2 – её натуральная величина, A_1B_1 – её проекция. CE – малая ось эллипса, она перпендикулярна большой оси и делит её пополам. Чтобы найти CE, разделим A_2B_2 с помощью циркуля пополам, получим точки C_2, E_2. Радиусом R, равным радиусу параллели, на которой лежат точки C и E, сделаем засечки на линии связи, проведённой от точек C_2, E_2. Получим точки C_1 и E_1. Эти точки – фронтально конкурирующие, C_1 – ближе к нам, поэтому E_2 – невидимая.

Далее эллипс можно строить двояко:

– можно строить его по двум осям любым из известных способов (например, приведённым в разделе «Кривые линии»). Этот способ показан на рис. 3.24;
– можно строить эллипс по точкам, по принадлежности конусу, особенно если в какой-либо конкретной задаче эллипс получается неполным. Такое решение показано на рис. 3.25.

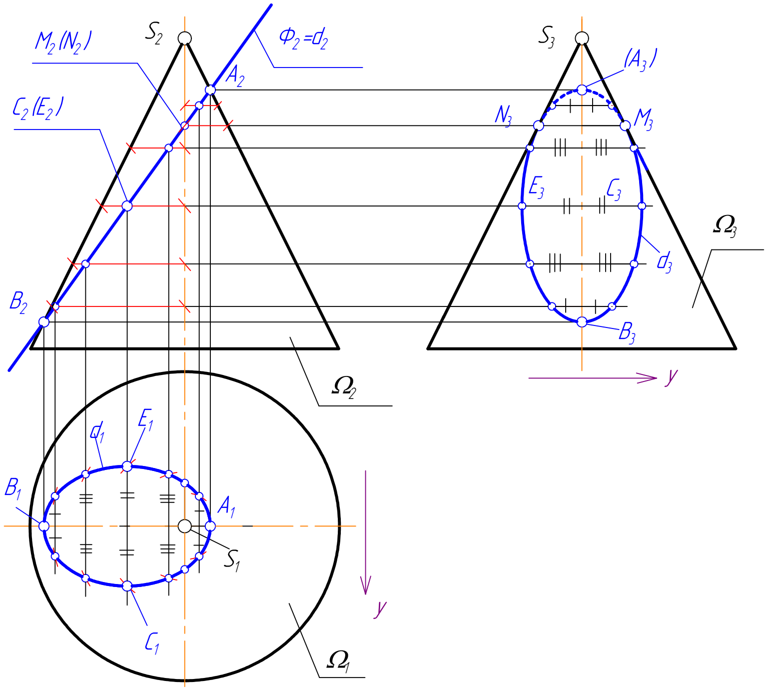


Рис. 3.25

Построим три проекции линии пересечения конуса с плоскостью Ф. Горизонтальную проекцию точек *A*, *B*, *C*, *E* строим так, как показано на рис. 3.23. Остальные, промежуточные, точки строим аналогично точкам *C* и *E*, по принадлежности параллелям конуса. Радиусом параллели, на которой расположена точка, равным расстоянию от оси до очерка конуса, **из центра S_1** делаем засечки на линиях связи от соответствующих точек. Соединяем точки с помощью лекала и получаем горизонтальную проекцию эллипса. При данном расположении конуса эллипс на $П_1$ виден весь.

Построение эллипса на $П_3$ начинаем также с характерных точек. Ими являются:

– точки *A* и *B*, которые расположены в плоскости фронтального меридиана, следовательно, на $П_2$ – на очерковых образующих, а на $П_3$ – на оси;

– точки M и N принадлежат профильным образующим, они определяют видимость эллипса относительно Π_3: часть эллипса от точки B до точек M и N расположена левее профильных образующих, следовательно, на Π_3 она видна; соответственно, часть эллипса от точек M и N до точки A на Π_3 не видна;
– промежуточные точки на Π_3 строим, откладывая координату y для каждой точки (расстояния, помеченные одной, двумя или тремя рисками) с Π_1 на Π_3. Соединяем точки с учётом видимости и получаем профильную проекцию эллипса.

Парабола получится в сечении, если плоскость, пересекая конус, проходит параллельно только одной его образующей (рис. 3.26).

Алгоритм: $\boldsymbol{\Omega \cap \Delta = m}$**.** $\boldsymbol{\Delta \parallel SK}$**. 2 ГПЗ, 2 алгоритм.**

1. $\boldsymbol{\Delta \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow m_2 = \Delta_2}$**.**
2. $\boldsymbol{m_1 \subset \Omega}$**.**

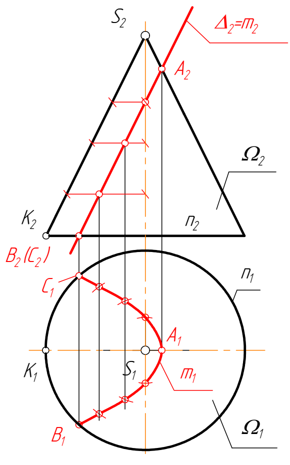


Рис. 3.26

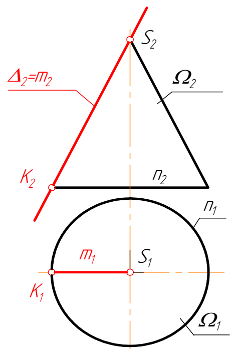


Рис. 3.27

Построение параболы начинаем с характерных точек:
– A – вершина параболы. A_2 принадлежит очерковой образующей конуса, следовательно, A расположена в плоскости фронтального меридиана $\Rightarrow A_1$;

– точки *B* и *C* – низшие точки параболы, принадлежат окружности основания *n* конуса, на Π_1 находим их с помощью линии связи тоже без дополнительных построений.

Промежуточные точки находим так же, как и в случае построения эллипса, то есть по принадлежности параллелям конуса. Соединяем точки с помощью лекала и получаем параболу.

Так как плоскость Δ параллельна только одной образующей конуса, то парабола имеет **одну несобственную точку**.

Поэтому в частном случае, когда плоскость Δ касается одной образующей *SK* конуса (рис. 3.27), получается **выражденный вид параболы – прямая *m***, совпадающая с *SK*.

Гипербола получится в сечении, если плоскость при пересечении с конусом параллельна одновременно **двум** образующим конуса (рис. 3.28).

Алгоритм: $\Omega \cap \Sigma = k$. $\Sigma \parallel SM$, $\Sigma \parallel SN$. 2 ГПЗ. 2 алгоритм.

1. $\boldsymbol{\Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow k_2 = \Sigma_2}$.

2. $\boldsymbol{k_1 \subset \Omega}$.

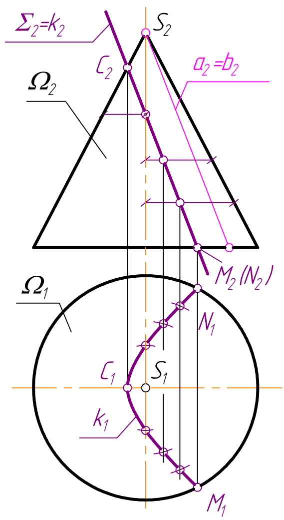


Рис. 3.28

Построение гиперболы, представленной на рис. 3.28, полностью идентично построению параболы (рис. 3.26).

Так как плоскость Σ параллельна двум образующим конуса *a* и *b*, гипербола **имеет две несобственные точки**, **и вырожденный вид гиперболы – две прямые *a* и *b*** (рис. 3.19, 3.20), когда плоскость проходит через вершину конуса.

Рассмотрим частный случай построения гиперболы, когда плоскость Σ перпендикулярна Π_1, т. е. является горизонтально проецирующей (рис. 3.29). Построим три проекции линии пересечения конуса Ω с такой плоскостью $\Sigma(\Sigma_1)$.

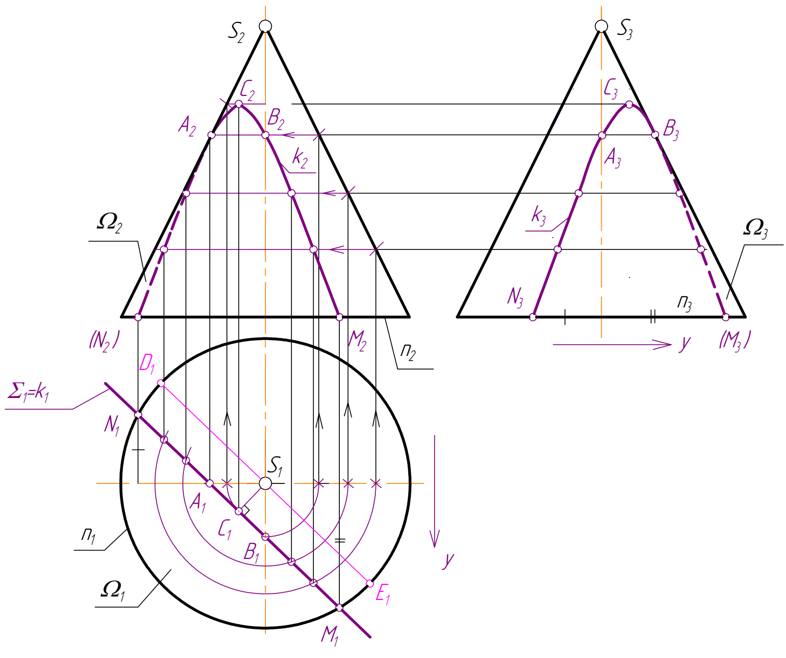


Рис. 3.29

Алгоритм: $\Omega \cap \Sigma = k$. $\Sigma \parallel SO$, $\Sigma \parallel SE$, $\Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_1$. 2 ГПЗ 2 алгоритм.
1. **$\Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow k_1 = \Sigma_1$.**
2. **$k_2 \subset \Omega_2$.**

Построение гиперболы начинаем с характерных точек.

Точки M и N принадлежат окружности основания конуса $\Rightarrow M_2$, $N_2 \subset n_2$. M_3 и N_3 находим на n_3, откладывая координату y этих точек с Π_1 (эти расстояния отмечены двумя и одной риской соответственно).

Точка A располагается в плоскости фронтального меридиана и определяет видимость гиперболы относительно Π_2: точка N_2 – невидимая. A_2 лежит на очерковой образующей конуса, а A_3 – на оси.

Точка C – вершина гиперболы. Она лежит на перпендикуляре, проведённом от S_1 к Σ_1. C_2 находим по принадлежности параллели конуса, проведённой через C_1. C_3 строим аналогично точкам M_3 и N_3.

Точка B лежит в плоскости профильного меридиана и определяет видимость гиперболы относительно Π_3. B_2 находим по принадлежности параллели, проведённой через B_1, B_3 лежит на очерковой образующей конуса. Часть гиперболы от B_3 до M_3 невидимая.

Промежуточные точки на Π_2 находим по принадлежности соответствующим параллелям, аналогично точке C, на Π_3 – по координатам y этих точек. Соединяем точки с учётом видимости с помощью лекала и получаем фронтальную и профильную проекции гиперболы.

Рассмотрим ещё одну задачу на пересечение поверхностей, из которых одна проецирующая, вторая – непроецирующая.

Задача. Построить линию пересечения сферы Σ и горизонтально проецирующей призмы Г (рис. 3.30).

Алгоритм: 2 ГПЗ, 2 алг.

1. Вначале определяем, **что** должно получиться в результате пересечения. Характер пересечения – частный случай вмятия, с одной общей точкой. Призма – трёхгранная, значит, можно рассматривать пересечение сферы тремя отдельными плоскостями: Δ, Φ и Λ. Следовательно, линией пересечения является пространственная линия, состоящая из трёх дуг окружностей: $\Sigma \cap \Phi = a$, $\Sigma \cap \Lambda = b$, $\Sigma \cap \Delta = c$.

2. Поскольку поверхность призмы – горизонтально проецирующая, то горизонтальная линия пересечения совпадает с Γ_1.

3. Фронтальную проекцию линии пересечения сферы с каждой из плоскостей строим по принадлежности сфере. $\Delta \mathbin{//} \Pi_2$, следовательно, c_2 спроецируется на Π_2 в виде окружности (рис. 3.33); a_2 и b_2 – в виде эллипсов (рис. 3.31, 3.32).

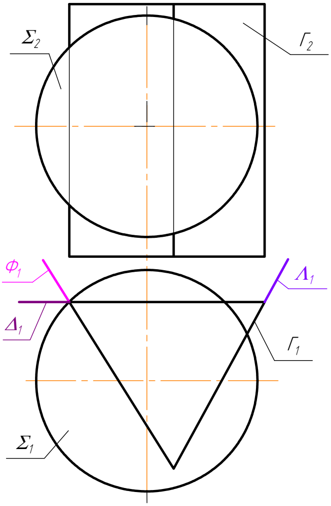


Рис. 3.30

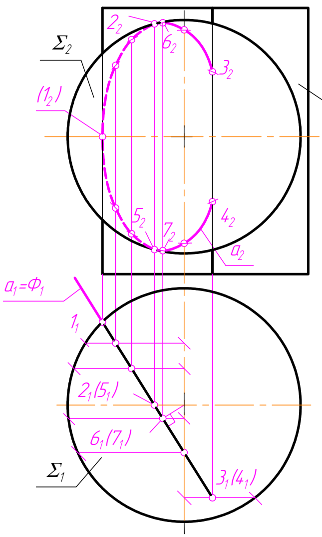


Рис. 3.31

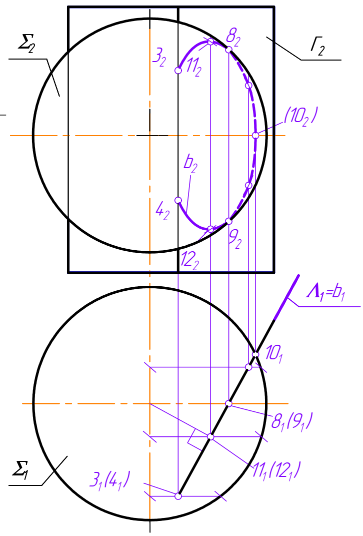


Рис. 3.32

Начнём построения с линии пересечения сферы с плоскостью Ф. Построения начинаем с характерных точек: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Точка 1 принадлежит экватору сферы $\Rightarrow 1_2$; точки 2 и 5 принадлежат фронтальному меридиану сферы и определяют видимость эллипса *a* относительно $\Pi_2 \Rightarrow 2_2$ и 5_2; точки 3 и 4 являются конечными точками дуги эллипса $a \Rightarrow 3_2$ и 4_2; точки 6 и 7 – высшая и низшая точки эллипса *a*. Промежуточные точки, так же, как точки 3, 4, 6, 7, находим по принадлежности параллелям сферы. Проводим a_2 с учётом видимости.

4. Аналогично строим линию пересечения сферы с плоскостью Λ (рис. 3.32): $b \subset \Sigma \Rightarrow b_2 \subset \Sigma_2$.

5. Результат пересечения сферы Σ с плоскостью Δ – окружность *c* (рис. 3.33) расположена за плоскостью фронтального меридиана, следовательно, $c_2 \subset \Sigma_2$ – невидимая.

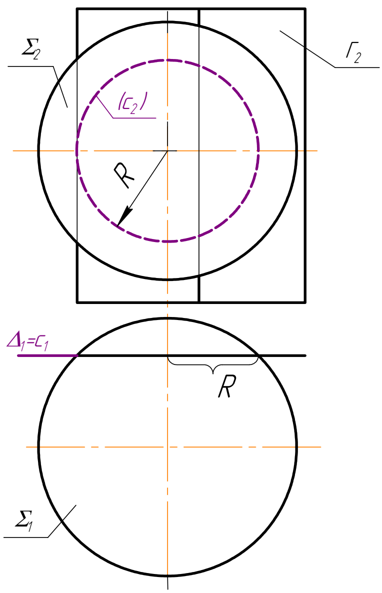


Рис. 3.33

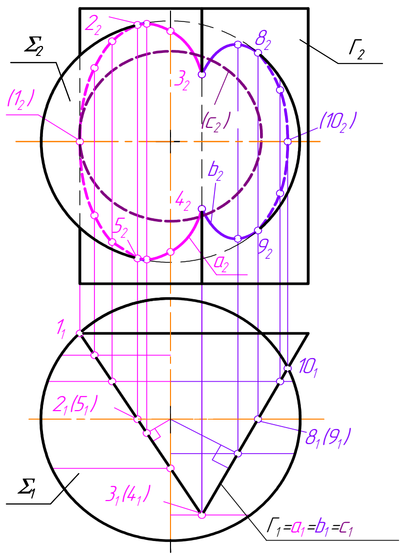


Рис. 3.34

На рис. 3.34 показан общий результат решения задачи с учётом видимости поверхностей.

Алгоритм: $\boldsymbol{\Sigma \cap \Gamma = a, b, c. \; \Gamma \parallel \Pi_1}$**. 2 ГПЗ, 2 алгоритм.**
1. $\boldsymbol{\Gamma \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow a_1, b_1, c_1 = \Gamma_1}$**.**
2. $\boldsymbol{a_2, b_2, c_2 \subset \Sigma}$**.**

Как вы думаете, верно ли расставлены на $П_2$ номера фигур сечения, соответствующие секущей плоскости Σ на $П_1$ (рис. 3.35)?

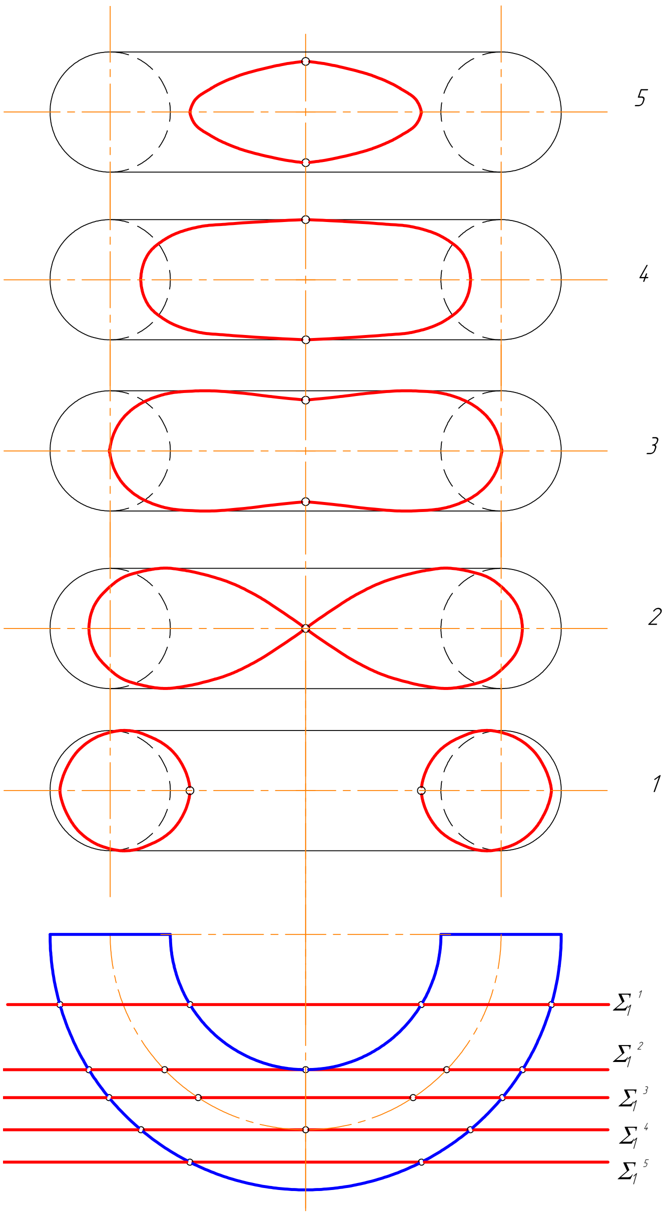


Рис. 3.35

Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры – непроецирующие. 3 алгоритм

В данном случае задача усложняется тем, что на чертеже нет **главной проекции** ни у одной из пересекающихся фигур. Поэтому для решения таких задач специально вводят **вспомогательную секущую плоскость-посредник**, которая пересекает обе фигуры, выявляя общие точки. Эту **плоскость-посредник** выбирают **проецирующей**, и тогда решение задачи можно свести ко **2 алгоритму**, или **непроецирующей**. Будем рассматривать решение только **1 ГПЗ**.

Решение 1ГПЗ. Для нахождения точек пересечения прямой с поверхностью в качестве плоскости-посредника чаще всего берут **проецирующую** плоскость, которую проводят через данную прямую. Далее находят линию пересечения этой плоскости с поверхностью, используя 2 алгоритм, и определяют точки пересечения полученной линии с данной прямой. Эти точки и будут являться точками пересечения поверхности с прямой (рис. 3.36).

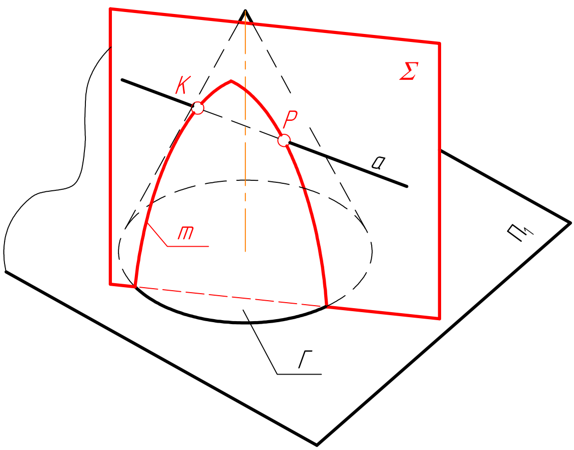


Рис. 3.36

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере.

Задача. Найти точку пересечения плоскости Г(*ABC*) с прямой *a*. Определить видимость прямой (рис. 3.37).

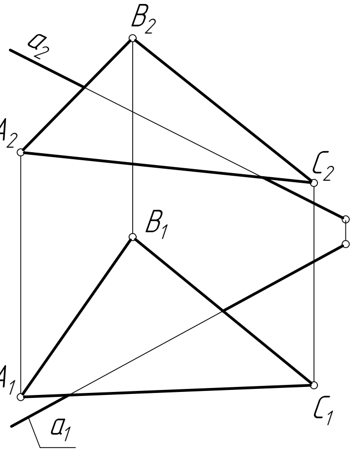


Рис. 3.37

Алгоритм

1. Возьмём **плоскость-посредник** Σ так, чтобы она включала в себя прямую a и была бы проецирующей, например, относительно $П_1$. Тогда Σ_1 совпадёт с a_1 (рис. 3.38, *а*, *б*).

2. Пересекаем проецирующую плоскость Σ с плоскостью общего положения ABC, результатом будет прямая m. Задачу решаем по **2 алгоритму**: m_2 совпадает с Σ_2, m_1 находим по принадлежности плоскости ABC. $m = 12 \Rightarrow m_2 = 1_2 2_2$.

3. m_2, пересекаясь с a_2, даёт нам точку $K_2 \rightarrow K_1$.

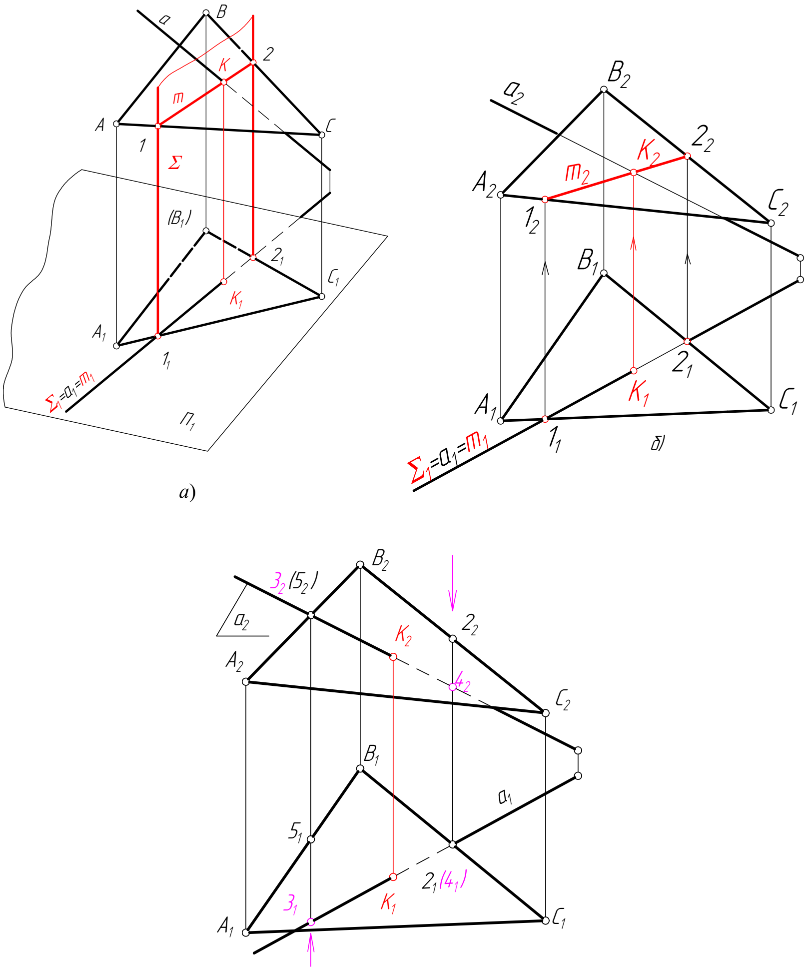
4. Видимость прямой a определяем методом **конкурирующих точек** (рис. 3.38, *в*):

Видимость относительно $П_2$:

$5 \in AB$, $3 \in a$ – фронтально конкурирующие. На $П_2$ видна точка $3 \Rightarrow$ участок прямой a слева от точки K_2 – видимый.

Видимость относительно $П_1$:

$2 \in BC$, $4 \in a$ – горизонтально конкурирующие. На $П_1$ видна точка $2 \Rightarrow$ участок прямой a справа от точки K_1 до точки 4_1 – невидимый.



а)

б)

в)

Рис. 3.38

Выполним краткую алгоритмическую запись решения задачи:

$\Gamma(ABC) \cap a = K$. 1 ГПЗ, 3 алгоритм.
1. Σ – плоскость-посредник, $\Sigma \supset a$, $\Sigma \parallel \Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1 = a_1$.
2. $\Sigma \cap \Gamma = m$. 2 ГПЗ, 2 алгоритм. $\Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 = \Sigma_1$; $m_2 \subset \Gamma$.
3. $m_2 \cap a_2 = K_2 \rightarrow K_1$.

Такой алгоритм решения приемлем для нахождения точек пересечения любой поверхности с прямой линией. Разница заключается в форме линии m, которая является результатом пересечения **плоскости-посредника** с заданной поверхностью и зависит от вида поверхности. В рассмотренном примере m – это прямая линия. Если вместо плоскости Г(ABC) возьмём, например, **сферу**, то линия m будет являться **окружностью**, которая может проецироваться на какую-либо плоскость проекций в виде **эллипса**; если с прямой пересекается **многогранник**, то m – это **плоский многоугольник** и т. д. Подробнее рассмотрим один из таких примеров, используя указанный алгоритм решения.

Задача. Найти точки пересечения **пирамиды** $\Gamma(SABC)$ с прямой a (рис. 3.39). Определить видимость прямой.

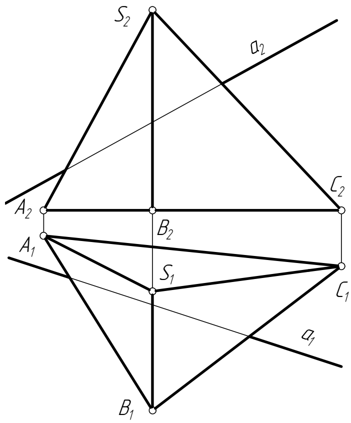


Рис. 3.39

1. Через прямую a проведём плоскость-посредник Σ, проецирующую относительно Π_2 (рис. 3.40, *а*, *б*). $\Sigma_2 = a_2$.

2. Пересекаем плоскость Σ с пирамидой. Результатом является замкнутая ломаная линия $m(1, 2, 3)$ – треугольник. Согласно **2 алгоритму**, горизонтальную проекцию треугольника строим по принадлежности пирамиде. Точки 1_1 и 3_1 находим с помощью линий связи на соответствующих рёбрах SA и SC. Точку 2_1 находим по принадлежности плоскости треугольника SBC с помощью вспомогательной прямой *24*, параллельной $BC \Rightarrow 2_1 4_1 \parallel B_1 C_1$.

3. $m_1(1_1, 2_1, 3_1)$, пересекаясь с a_1, даёт нам точки K_1 и $P_1 \rightarrow K_2$, P_2.

4. Определяем видимость прямой на обеих проекциях (рис. 3.41). Невидимый участок прямой расположен между точками *K* и *P*.

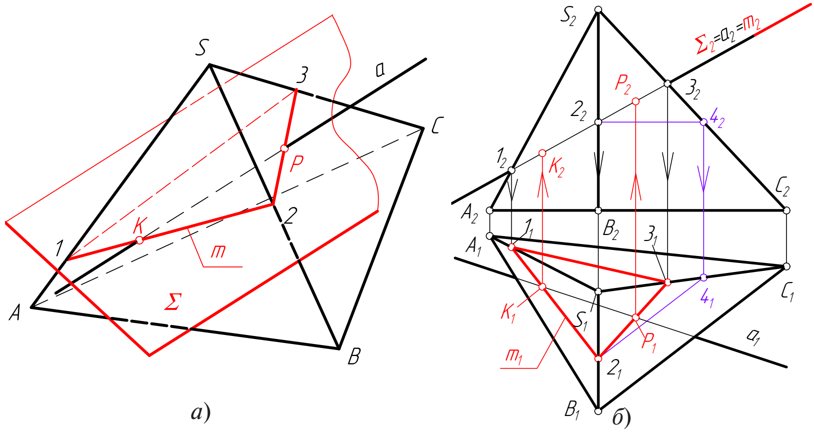


Рис. 3.40

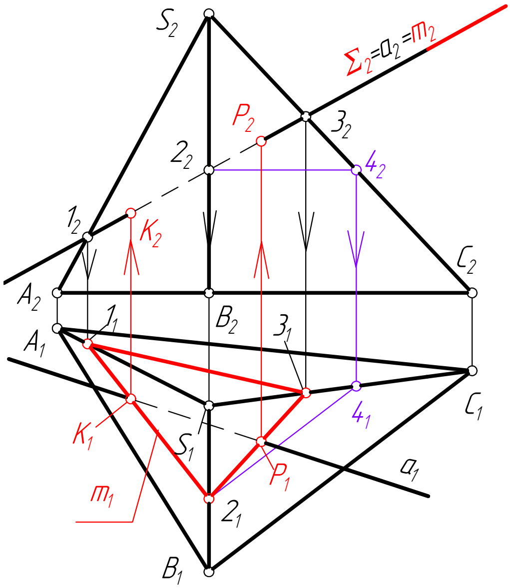


Рис. 3.41

Выполним алгоритмическую запись решения:

$\Gamma(SABC) \cap a = K, P$. 1 ГПЗ, 3 алгоритм.

1. **Σ – *плоскость-посредник,***

$\Sigma \supset a$, $\Sigma \perp\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2 = a_2$.

2. **$\Sigma \cap \Gamma = m(1, 2, 3)$. 2 ГПЗ, 2 алг.**

$\Sigma \perp\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow m_2(1_2, 2_2, 3_2) = \Sigma_2$;

$m_1(1_1, 2_1, 3_1) \subset \Gamma$.

3. **$m_1(1_1, 2_1, 3_1) \cap a_1 = K_1, P_1 \rightarrow K_2, P_2$.**

Вывод: все задачи на пересечение непроецирующей прямой с любой непроецирующей поверхностью решаются по единому – третьему алгоритму с помощью плоскости-посредника.

3.3. Частные случаи пересечения поверхностей вращения второго порядка

Пересечение соосных поверхностей вращения

Две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения: **$\Gamma \cap \Delta = m$; n** – окружности (рис. 3.42).

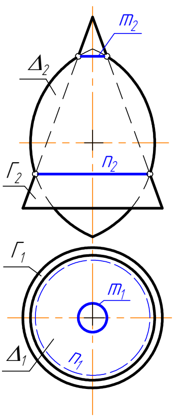


Рис. 3.42

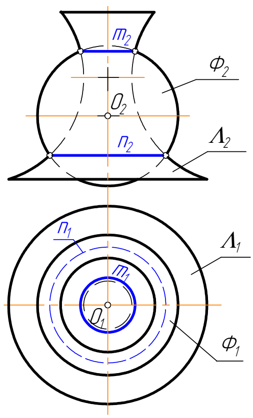


Рис. 3.43

Если центр сферы находится на оси поверхности вращения, то сфера пересечёт эту поверхность по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения: $\Phi \cap \Lambda = m$; n – окружности (рис. 3.43).

Теорема Монжа

Если две поверхности вращения второго порядка описаны около третьей поверхности вращения второго порядка, или вписаны в неё, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Причём плоскости кривых проходят через прямую, соединяющую точки двойного соприкосновения.

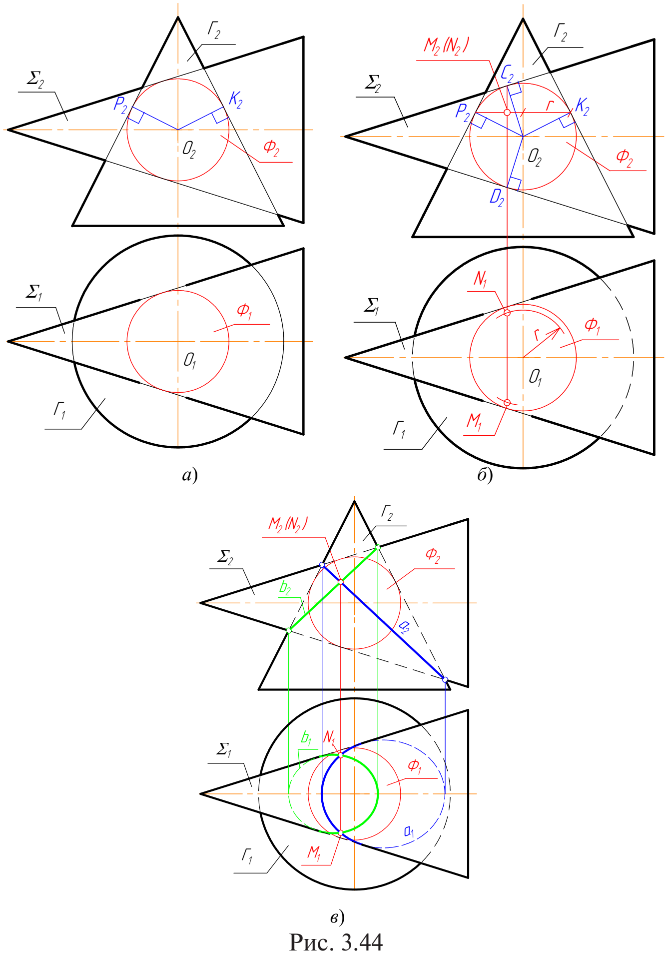


Рис. 3.44

На рис. 3.44 теорема Монжа проиллюстрирована пересечением двух конусов Σ и Г, в которые вписана сфера Ф. Чтобы вписать сферу, проводим перпендикуляры к очерковым образующим конуса $\Gamma(\Gamma_2)$ из точки O_2: $O_2P_2 = O_2K_2$ – радиус сферы (рис. 3.44, *а*). Затем проводим перпендикуляры к очерковым образующим конуса $\Sigma(\Sigma_2)$ из точки O_2: $O_2C_2 = O_2D_2$ – тоже радиус сферы. Точки *M* и *N* (рис. 3.44, *б*) – это точки, в которых касаются все три поверхности. В результате получаются два эллипса *a* и *b*, которые проходят через точки *M* и *N* (рис. 3.44, *в*). На Π_1 эти эллипсы построены по принадлежности конусу Г (построения не показаны).

Как вы думаете?

1. Всегда ли при решении позиционных задач совпадают случаи расположения геометрических фигур относительно плоскостей проекций и соответствующие алгоритмы решения?

2. По какому алгоритму вы будете решать задачу, представленную на рис. 3.45?

$\Phi \cap ABCK = ?$

$\Phi \perp\!\!\!\perp \Pi_2$; $ABCK \perp\!\!\!\perp \Pi_2$.

Проанализируйте расположение цилиндра и плоскости относительно плоскостей проекций и обоснуйте выбор алгоритма решения. Решите задачу.

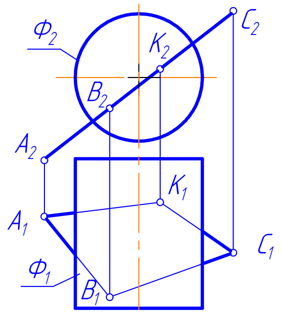


Рис. 3.45

Выводы

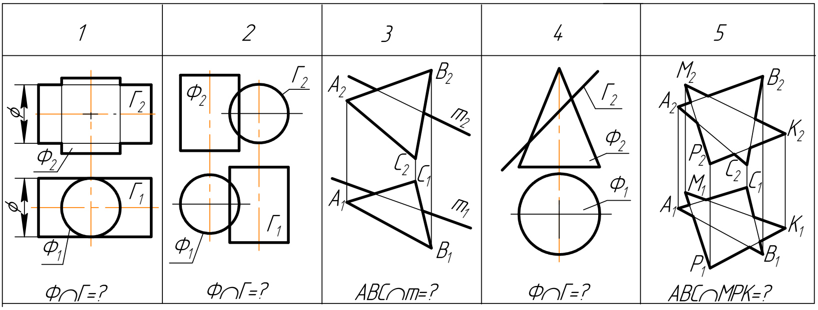
1. Все главные позиционные задачи делятся на две:
1 ГПЗ – пересечение линии с поверхностью (плоскостью);
2 ГПЗ – пересечение поверхностей (плоскостей).

2. Выбор алгоритма решения зависит от расположения фигур относительно плоскостей проекций. Существует три случая расположения пересекающихся фигур относительно плоскостей проекций:
– обе фигуры проецирующие – задача решается по 1 алгоритму;
– одна фигура проецирующая, вторая непроецирующая – задача решается по 2 алгоритму;
– обе фигуры непроецирующие – задача решается по 3 алгоритму.

3. Бывает, что случаи расположения фигур относительно плоскостей проекций и алгоритм решения не совпадают. Это случается тогда, когда обе пересекающиеся фигуры являются проецирующими, но относительно одной и той же плоскости проекций такие задачи решаются по второму алгоритму (например, рис. 3.45).

4. Решение считается выполненным тогда, когда определена видимость общих элементов и пересекающихся фигур.

Обучающий тест 6 «Позиционные задачи» (ответы — в конце модуля 3)



Ответы на обучающий тест 6

1 – 3; 2 – 1; 3 – 3; 4 – 5; 5 – 4; 6 – 1; 7 – 2; 8 – 4; 9 – 5; 10 – 2.

Ответ на задачу рис. 3.35: верно.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие задачи называются позиционными?
2. Какие задачи называются главными позиционными?
3. Какая линия в общем случае может получиться при пересечении многогранников?
4. Какая линия в общем случае может получиться при пересечении многогранника с поверхностью вращения?
5. Какая линия в общем случае может получиться при пересечении поверхностей вращения?
6. От чего зависит количество общих элементов при решении 2 ГПЗ?
7. От чего зависит выбор алгоритма решения главных позиционных задач?
8. Что может получиться при пересечении конуса различными плоскостями?
9. Сформулируйте алгоритм решения 1 ГПЗ и 2 ГПЗ в случае, когда обе пересекающиеся фигуры проецирующие.
10. Сформулируйте алгоритм решения 1 ГПЗ и 2 ГПЗ в случае, когда одна пересекающая фигура проецирующая, а другая непроецирующая.
11. Сформулируйте алгоритм решения 1 ГПЗ и 2 ГПЗ в случае, когда обе пересекающиеся фигуры непроецирующие.
12. Какие частные случаи пересечения поверхностей вращения вы знаете?
13. Как определить видимость общего элемента и фигур относительно плоскостей проекций при решении главных позиционных задач?
14. Сформулируйте теорему Монжа.

Модуль 4. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Как вы думаете?

1. Что является кратчайшим расстоянием от точки до прямой, до плоскости?
2. Что является кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми, между двумя параллельными плоскостями?
3. На чертеже (рис. 4.1) показан угол *ABC*. Присутствует ли на какой-нибудь плоскости проекций натуральная величина угла (вспомните теорему о проецировании прямого угла)?

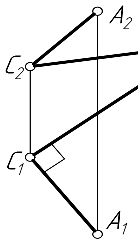


Рис. 4.1

Метрическими называются такие задачи, в условии или решении которых присутствуют геометрические фигуры или понятия, связанные с численной характеристикой.

Наиболее часто встречаются метрические задачи: на взаимную перпендикулярность геометрических фигур, на определение натуральной величины заданных отрезка или угла, на построение натурального вида плоской фигуры и т. п.

Из всего многообразия метрических задач выделяются две основные:

1. Первая основная метрическая задача – на перпендикулярность прямой и плоскости.

2. Вторая основная метрическая задача – на определение натуральной длины отрезка. Эта задача решается методом прямоугольного треугольника, который рассматривался в первой теме.

Рассмотрим подробнее первую основную метрическую задачу.

4.1. Взаимная перпендикулярность прямой и плоскости

Из элементарной геометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Задача. Через точку $K \in \Sigma(a \parallel b)$ построить прямую n, перпендикулярную плоскости Σ. Анализ решения задачи проведём на пространственном чертеже (рис. 4.2).

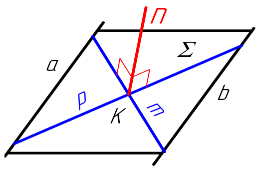


Рис. 4.2

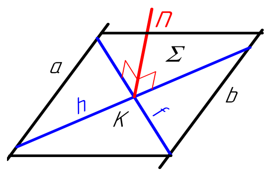


Рис. 4.3

Чтобы провести прямую $n \perp \Sigma$, нужно в этой плоскости взять две пересекающиеся прямые (на рис. 4.2 это $p \cap m = K$). Прямую n нужно строить перпендикулярно одновременно двум этим прямым.

Однако если прямые p и m будут прямыми общего положения, то прямой угол к ним ни на одной плоскости проекций не спроецируется в натуральную величину. Согласно теореме о проецировании прямого угла (см. свойство 2 ортогонального проецирования, тема 1), прямой угол спроецируется в натуральную величину на какую-нибудь плоскость проекций, если одна сторона прямого угла будет параллельной этой плоскости проекций. Поэтому в качестве прямых p и m выгодно взять горизонталь h и фронталь f (рис. 4.3). Тогда прямой угол между n и h спроецируется в натуральную величину на Π_1, а прямой угол между n и f – на Π_2.

Плоский чертёж. На рис. 4.4 плоскость Σ задана параллельными прямыми a и b. Точка $K(K_2)$ принадлежит этой плоскости. Нужно построить $n \perp \Sigma$, $n \supset K$.

Согласно приведённым выше рассуждениям, в плоскости необходимо взять горизонталь и фронталь, затем перпендикулярно каждой из них строить n. Построения начинаем с горизонтали (рис. 4.5).

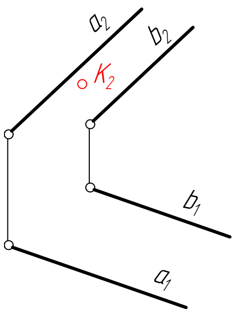


Рис. 4.4

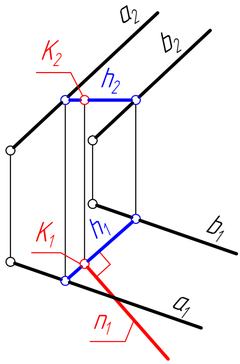


Рис. 4.5

Через точку K_2 проводим $h_2 \perp$ линиям связи, находим h_1, а на ней, с помощью линии связи, K_1. Так как $n \perp h$, то $n_1 \perp h_1$, поэтому проводим $n_1 \perp h_1$ через точку K_1.

Аналогично находим n_2 (рис. 4.6). Через точку K_1 проводим $f_1 \perp$ линиям связи, находим f_2. Так как $n \perp f$, то $n_2 \perp f_2$, поэтому проводим $n_2 \perp f_2$ через точку K_2.

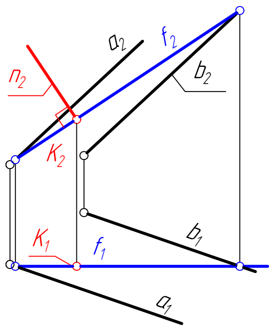


Рис. 4.6

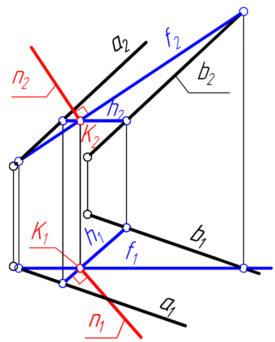


Рис. 4.7

Полностью решение задачи представлено на рис. 4.7. Видимость прямой n не учитывалась.

Алгоритмическая запись решения:

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\textbf{1. } h \subset \Sigma, f \subset \Sigma, h \cap f = K. \\
\textbf{2. } K \in n \Rightarrow K_1 \in n_1, K_2 \in n_2. \\
\textbf{3. } n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1. \\
\textbf{4. } n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2.
\end{array}
}
$$

Итак, чтобы задать на комплексном чертеже прямую n, перпендикулярную данной плоскости Σ, достаточно построить n_1 и n_2, расположив их в любом месте чертежа, чтобы $n_1 \perp h_1$, $n_2 \perp f_2$, где h и f – горизонталь и фронталь плоскости, при условии, что $h \supset f$.

Если плоскость Σ занимает проецирующее положение, то прямая, перпендикулярная ей, является линией уровня (рис. 4.8, 4.9).

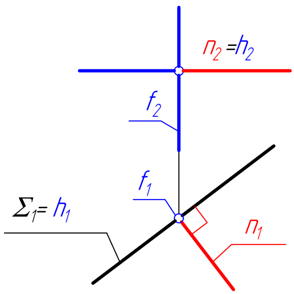


Рис. 4.8

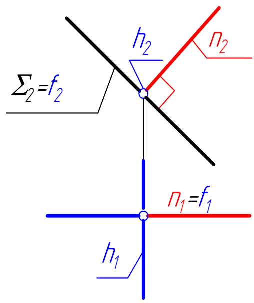


Рис. 4.9

Если Σ – горизонтально проецирующая:

$\Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow h_1 = \Sigma_1, f \perp\!\!\!\perp \Pi_1.$

$n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1; n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2; \Rightarrow n$ – горизонталь.

Если Σ – фронтально проецирующая:

$\Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow f_2 = \Sigma_2, h \perp\!\!\!\perp \Pi_2.$

$n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1; n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2; \Rightarrow n$ – фронталь.

Чтобы лучше понять данное утверждение, нужно вспомнить, какие прямые являются линиями уровня в проецирующих плоскостях. Для этого посмотрите рис. 2.10 и 2.12 в модуле 2.

Обратная задача

Чтобы задать на чертеже плоскость, перпендикулярную данной прямой n, достаточно задать проекции горизонтали и фронтали этой плоскости так, чтобы $f_2 \perp n_2$, а $h_1 \perp n_1$. При этом, очевидно, должно выполняться условие $h \cap f$ (рис. 4.10).

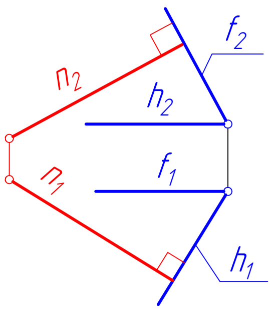


Рис. 4.10

Если прямая n является прямой уровня, то плоскость, перпендикулярная ей, занимает проецирующее положение (рис. 4.11, 4.12) и может быть задана своей главной проекцией Σ_1 или Σ_2.

Если прямая n – горизонталь (рис. 4.11), то плоскость Σ, перпендикулярная ей, является горизонтально проецирующей (Σ_1).

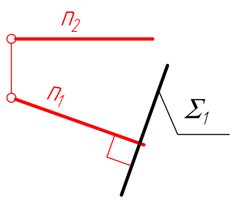


Рис. 4.11

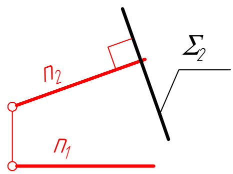


Рис. 4.12

Если прямая n – фронталь (рис. 4.12), то плоскость Σ, перпендикулярная ей, является фронтально проецирующей (Σ_2).

Если прямая n занимает проецирующее положение, то плоскость, перпендикулярная ей, является плоскостью уровня (рис. 4.13, 4.14).

Прямая n – горизонтально проецирующая (рис. 4.13), $\Sigma \perp n$ – горизонтальная плоскость уровня (Σ_2).

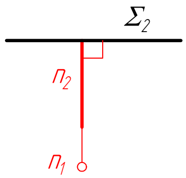


Рис. 4.13

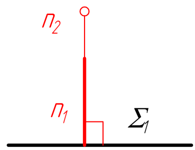


Рис. 4.14

Прямая *n* – фронтально проецирующая (рис. 4.14), $\Sigma \perp n$ – фронтальная плоскость уровня (Σ_1).

4.2. Взаимная перпендикулярность двух прямых общего положения

Задача. Через точку *K*, взятую на прямой общего положения *m*, провести прямую *n*, тоже общего положения, перпендикулярную *m* (рис. 4.15).

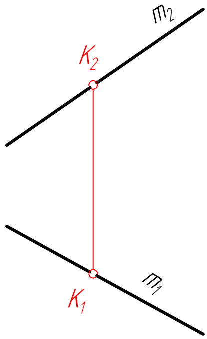


Рис. 4.15

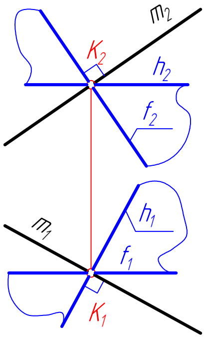


Рис. 4.16

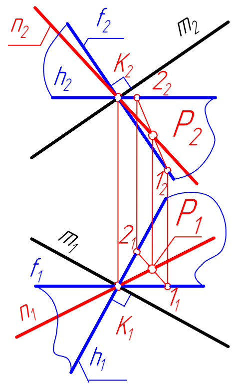


Рис. 4.17

Так как прямой угол между прямыми общего положения искажается на обеих плоскостях проекций, решение задачи на построение взаимно перпендикулярных прямых приходится сводить к задаче на построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

При этом используется известное положение, что две прямые взаимно перпендикулярны в том, и только в том случае, если через каждую из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой.

Алгоритм решения

1. Через точку K проводим плоскость Σ, перпендикулярную прямой m. Плоскость задаём пересекающимися горизонталью и фронталью (рис. 4.16), причём $h_1 \perp m_1$, а $f_2 \perp m_2$.
2. Так как плоскость $\Sigma(h \cap f) \perp m$, то в этой плоскости можно взять некоторую прямую общего положения n, проходящую через точку K (рис. 4.17). Она будет перпендикулярна m. Задаём n_1.
3. Известно, что прямую определяют две точки. На n_1, кроме K_1, возьмём ещё одну точку P_1.
4. Находим n_2 в плоскости Σ. Для этого проводим в этой плоскости прямую 1–2(1_1–2_1). Точка P_1 принадлежит этой прямой, а следовательно, плоскости Σ. Находим P_2 и проводим прямую n_2.

Алгоритмическая запись решения:

1. $\Sigma \perp m, \Sigma = h \cap f = K; h \perp m \Rightarrow h_1 \perp m_1, h_2 \perp K_2K_1; f \perp m \Rightarrow$

$\Rightarrow f_2 \perp m_2, f_1 \perp K_2K_1.$

2. $n = PK, n \subset \Sigma, n_1 = P_1K_1; P_1 \in 1_12_1 \Rightarrow P_1 \in \Sigma \Rightarrow P_2 \Rightarrow n_2.$

3. $n \subset \Sigma \Rightarrow n \perp m.$

4.3. Взаимная перпендикулярность двух плоскостей общего положения

Известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если в одной из них лежит прямая, перпендикулярная другой плоскости.

Таким образом, построение взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

Задача. Через точку K, взятую вне плоскости $\Gamma(ABC)$, провести плоскость $\Sigma \perp \Gamma$ (рис. 4.18).

Алгоритм

1. Плоскость Σ (рис. 4.19) задаём пересекающимися прямыми $m \cap n = K$. Согласно вышесказанному одна из них должна быть перпендикулярна плоскости Г. Пусть это будет n.

2. В плоскости Г берём горизонталь и фронталь.
3. Через точку K_1 проводим $n_1 \perp h_1$, а через K_2 проводим $n_2 \perp f_2$, следовательно, $n \perp Г$.
4. Прямую m, проходящую через точку K, задаём произвольно.

Таким образом, $\Sigma(n \cap m) \perp Г(ABC)$.

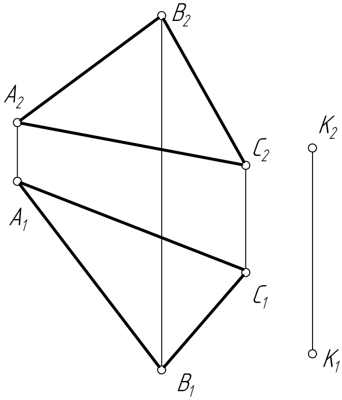


Рис. 4.18

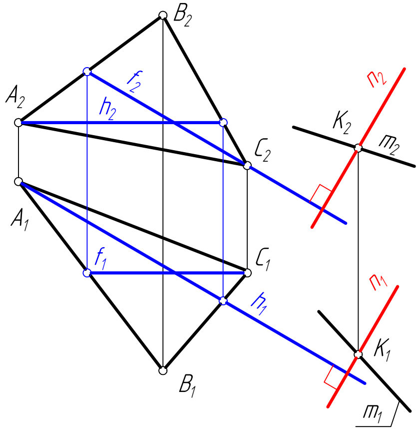


Рис. 4.19

Алгоритмическая запись решения:

1. $h \subset Г \Rightarrow h_2 \Rightarrow h_1, f \subset Г \Rightarrow f_1 \Rightarrow f_2$.
2. $\Sigma = m \cap n = K, n \perp Г \Rightarrow n_1 \perp h_1, n_2 \perp f_2$.
3. $\Sigma \perp Г$.

Построение плоскости, касательной к поверхности

Касательная плоскость – это множество всех касательных прямых, проведённых к данной кривой поверхности и проходящих через одну её точку.

На чертеже плоскость, касательную к поверхности, можно задавать, например, двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых является касательной к поверхности в данной точке. Но можно касательную плоскость задавать другими различными условиями, характер которых зависит от вида поверхности.

Например, к конусу касательную плоскость можно провести так, чтобы она проходила через точку M (рис. 4.20), расположенную вне поверхности конуса. Причём такая задача имеет два решения, так как через данную точку можно провести две плоскости, касающиеся поверхности конуса по образующим SK и SK', которые в то же время являются касательными соответственно t и t'.

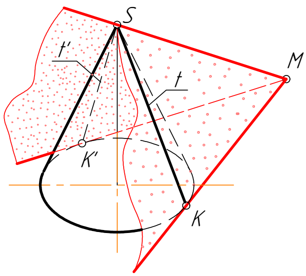


Рис. 4.20

Как вы думаете?

1. Сколько плоскостей, касательных к поверхности конуса, можно провести через его вершину без других дополнительных условий?
2. Сколько касательных плоскостей можно провести к эллипсоиду через любую точку на его поверхности?

Задача. Через точку $M(M_2)$ на сфере Г с центром в точке O провести плоскость Σ, касательную к её поверхности (рис. 4.21).

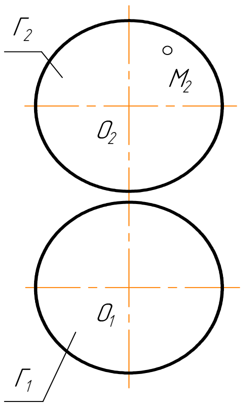


Рис. 4.21

Так как любая прямая, принадлежащая касательной плоскости к сфере, будет перпендикулярна к её радиусу, то задача сводится к построению плоскости, перпендикулярной прямой. Плоскость удобно задать двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых будет перпендикулярна радиусу сферы.

Алгоритм

1. Находим M_1 по принадлежности сфере (рис. 4.22).

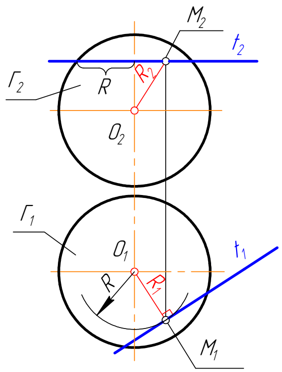


Рис. 4.22

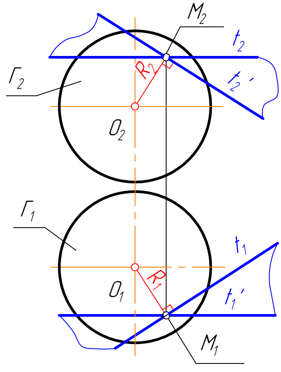


Рис. 4.23

2. Проводим R_1 и R_2 из центра сферы O_1 и O_2 к точкам M_1 и M_2.

3. Проводим $t_1 \perp R_1$ – это горизонтальная проекция прямой, перпендикулярной радиусу, а следовательно, касательной к сфере. Поскольку прямой угол на Π_1 спроецирован в натуральную величину, то прямая t – горизонталь, и её проекция на Π_2 будет перпендикулярна линиям связи $\Rightarrow t_2$.

4. Аналогично проводим построения второй касательной t', которая перпендикулярна радиусу (рис. 4.23): $t_2' \perp R_2$, $t_1' \perp$ линиям связи, то есть t' – фронталь.

5. Плоскость $\Sigma(t \cap t') \perp R \Rightarrow \Sigma$ – касательная к сфере.

Примечание. В данной задаче видимость поверхности не учитывалась.

Алгоритмическая запись решения:

1. $M \in \Gamma \Rightarrow M_1$.

2. $OM = R \Rightarrow O_1M_1 = R_1,\ O_2M_2 = R_2$.

3. $\Sigma(t \cap t') = M;\ t = h,\ t \perp R \Rightarrow t_1 \perp R_1,\ t_2 \perp M_2M_1$.

4. $t' = f,\ t' \perp R \Rightarrow t_2' \perp R_2,\ t_1' \perp M_2M_1$.

5. $\Sigma \perp R \Rightarrow \Sigma - \underline{\cup}\,\Gamma$.

Для решения этой задачи можно использовать другие рассуждения.

1. Для нахождения точки M_1 проводим параллель $a(a_2, a_1)$ на поверхности сферы (рис. 4.24).

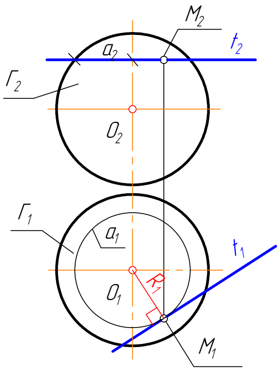


Рис. 4.24

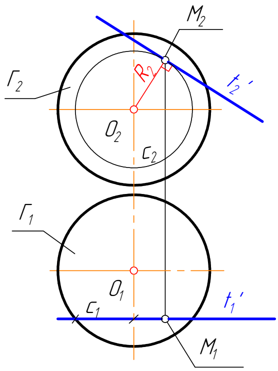


Рис. 4.25

2. Проводим t – касательную к окружности $a(a_1, a_2)$. t_1 будет перпендикулярна радиусу сферы R_1, а t_2, как касательная к a_2, совпадёт с a_2.

3. Проводим через точку M касательную прямую к окружности $c(c_1, c_2)$ (рис. 4.25). t_2’, как касательная к c_2, будет перпендикулярна радиусу R_2, а t_1’, как касательная к c_1, совпадёт с c_1.

4. Конечный результат этой задачи тот же, что и рассмотренный выше, и представлен на рис. 4.23.

4.4. Задачи на определение расстояний между геометрическими фигурами

К таким задачам относятся: задачи на определение расстояний от точки до прямой, до плоскости, до поверхности; между параллельными и скрещивающимися прямыми; между параллельными плоскостями и т. п.

Все эти задачи объединяют три обстоятельства:

во-первых, поскольку кратчайшим расстоянием между такими фигурами является перпендикуляр, то все они сводятся к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости;

во-вторых, в каждой из этих задач необходимо определять натуральную длину отрезка, то есть решать вторую основную метрическую задачу;

в-третьих, это сложные по составу задачи, они решаются в несколько этапов, и на каждом этапе решается отдельная, небольшая конкретная задача.

Рассмотрим решение одной из таких задач.

Задача. Определить расстояние от точки *M* до прямой общего положения *a* (рис. 4.26).

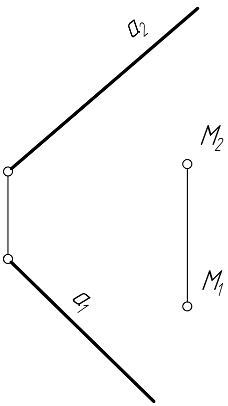


Рис. 4.26

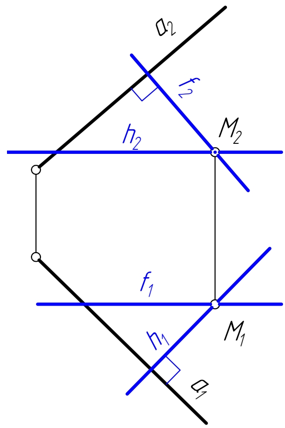


Рис. 4.27

Алгоритм

1 этап. Расстояние от точки до прямой есть перпендикуляр. Поскольку прямая *a* – общего положения, то для построения перпендикуляра к ней необходимо решать задачу, аналогичную приведённой в параграфе 4.1 данной темы, то есть вначале через точку *M* провести плоскость Σ, перпендикулярную *a*. Задаём эту плоскость, как обычно, $h \cap f$, при этом $h_1 \perp a_1$, а $f_2 \perp a_2$ (рис. 4.27).

2 этап. Для построения перпендикуляра необходимо найти для него вторую точку. Это будет точка *K*, принадлежащая прямой *a*. Для её нахождения нужно решить позиционную задачу, то есть найти точку пересечения прямой *a* с плоскостью Σ. Решаем 1 ГПЗ по третьему алгоритму (рис. 4.28):

– вводим плоскость-посредник Г, $\Gamma \,/\!/\, \Pi_1$, $\Gamma \supset a \Rightarrow \Gamma_1 = a_1$;
– $\Gamma \cap \Sigma = b$, $\Gamma \,/\!/\, \Pi_1 \Rightarrow b_1(1_1 2_1) = \Gamma_1$, $b \subset \Sigma \Rightarrow b_2(1_2 2_2) \subset \Sigma_2$;
– $b_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1$.

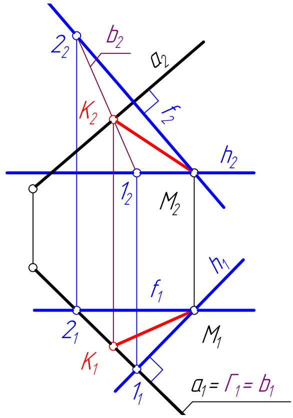


Рис. 4.28

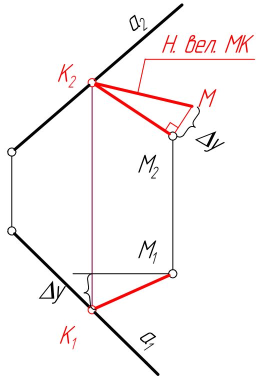


Рис. 4.29

3 этап. Находим натуральную величину MK методом прямоугольного треугольника (рис. 4.29).

Полное решение задачи показано на рис. 4.30.

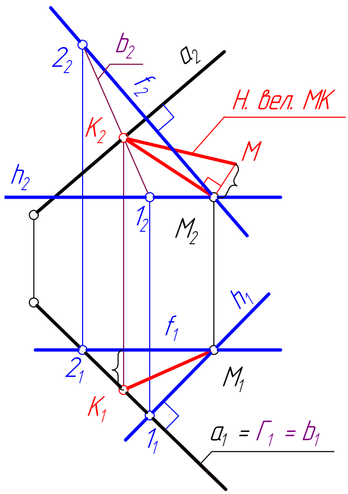


Рис. 4.30

Алгоритмическая запись решения:

1. $\Sigma \perp a$, $\Sigma = h \cap f = M$, $h_1 \perp a_1$, $f_2 \perp a_2$. **2.** Вводим плоскость-посредник Г, – $\Gamma \perp\!\!\!\perp \Pi_1$, $\Gamma \supset a \Rightarrow \Gamma_1 = a_1$; – $\Gamma \cap \Sigma = b$, $\Gamma \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow b_1(1_1 2_1) = \Gamma_1$, $b \subset \Sigma \Rightarrow b_2(1_2 2_2) \subset \Sigma_2$. – $b_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1$. **3.** Находим натуральную величину MK.

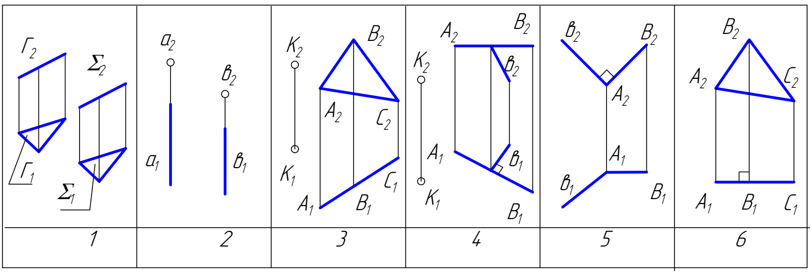
Выводы

1. Решение всех метрических задач сводится к решению первой основной метрической задачи – на взаимную перпендикулярность прямой и плоскости.

2. При определении расстояний между геометрическими фигурами всегда используется вторая основная метрическая задача – на определение натуральной величины отрезка.

3. Плоскость, касательную к поверхности в одной точке, можно задать двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых является касательной к данной поверхности.

Обучающий тест 7 «Метрические задачи» (ответы – в конце модуля 4)



1. На каком чертеже можно измерить расстояние между двумя || прямыми a и $в$ без вспомогательных построений?
2. На каких чертежах можно измерить длину отрезка AB без вспомогательных построений?
3. В каком случае прямая $в \perp AB$?

4. На каком чертеже можно определить истинный вид треугольника *ABC* без дополнительных построений?
5. На каком чертеже можно определить расстояние от точки *K* до плоскости без вспомогательных построений?
6. На каком чертеже можно определить расстояние между двумя параллельными плоскостями (Г || Σ) без вспомогательных построений?

4.5. Способ замены плоскостей проекций

Как вы думаете?

На каком из чертежей проще всего найти натуральную величину расстояния от точки *M* до прямой *a*?

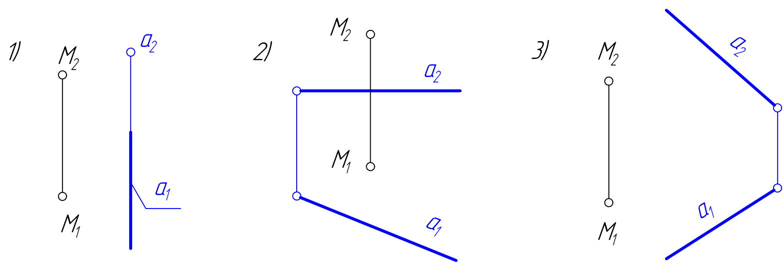


Рис. 4.31

Решение многих пространственных задач на комплексном чертеже часто бывает слишком сложным из-за того, что заданные геометрические фигуры расположены произвольно относительно плоскостей проекций и, следовательно, проецируются на эти плоскости в **искажённом** виде.

В то же время задачи решаются значительно проще в случае **частного** положения геометрических фигур относительно плоскостей проекций. При этом **наиболее выгодным частным** положением проецируемой фигуры следует считать:

а) положение, перпендикулярное плоскости проекций;

б) положение, параллельное плоскости проекций.

Переход от **общего** положения геометрической фигуры к **частному** можно осуществить за счёт изменения взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций.

Этого можно достичь, например, перемещением **плоскостей проекций** в новое положение, по отношению к которому проецируемая фигура, которая при этом не меняет своего положения в пространстве, окажется в **частном** положении. Этот путь лежит в основе **способа замены плоскостей проекций**.

Существуют и другие способы преобразования.

Вообще, всякое построение на комплексном чертеже, отображающее определённые построения в пространстве и приводящее к образованию новых полей проекций, называется преобразованием комплексного чертежа.

Рассмотрим подробно один из способов преобразования комплексного чертежа.

Сущность способа состоит в том, что одна из плоскостей проекций (Π_1 или Π_2) (рис. 4.32) заменяется новой плоскостью проекций так, чтобы геометрическая фигура, занимая общее положение в системе плоскостей проекций $\Pi_1 - \Pi_2$ в новой системе плоскостей проекций (например, $\Pi_1 - \Pi_4$), оказалась бы в частном положении (т. е. меняем Π_2 на Π_4). При этом не должен нарушаться принцип метода Монжа, то есть новая плоскость проекций, например, Π_4, должна быть перпендикулярна остающейся плоскости проекций Π_1.

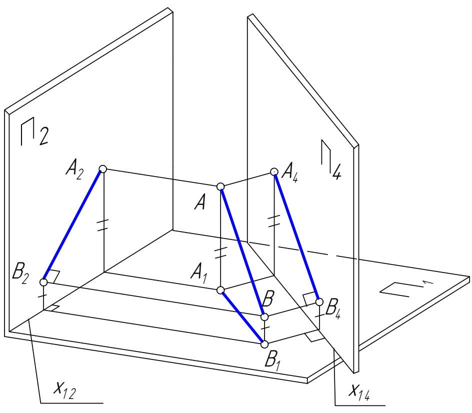


Рис. 4.32

При построении проекции геометрической фигуры на новую плоскость проекций $П_4$ расстояние от фигуры до остающейся плоскости проекций $П_1$ сохраняется неизменным.

Рассмотрим построение точки на новую плоскость проекций.

В системе $П_1 - П_2$ задана точка A (рис. 4.33). Ввести новую плоскость проекций $П_4$ взамен $П_2$ и построить проекцию точки A на $П_4$.

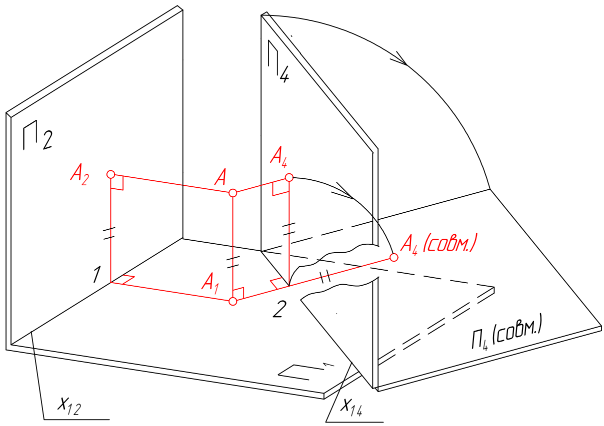


Рис. 4.33

Алгоритм

1. Имеем систему плоскостей проекций $П_1 - П_2$ – база отсчёта x_{12}.
2. Меняем $П_2$ на $П_4$; $П_4 \perp П_1$. В системе $П_1 - П_4$ база отсчёта x_{14}. Проводим $AA_4 \perp П_4$; но $П_4 \perp П_1$, следовательно $AA_4 \parallel П_1$, значит, $AA_4 = A_1 2$ и $A_1 2 \perp x_{14}$; тогда $A_4 2 \parallel A_1 A$ и $2A_4 = 1A_2$.
3. Далее, используя метод Монжа, поворачиваем $П_4$ вправо до совмещения её с $П_1$. Получаем $П_4$ (совм.). Точка A_4 займёт положение A_4 (совм.). Расстояние $2A_4 = 2A_4$ (совм.).

Плоский чертёж

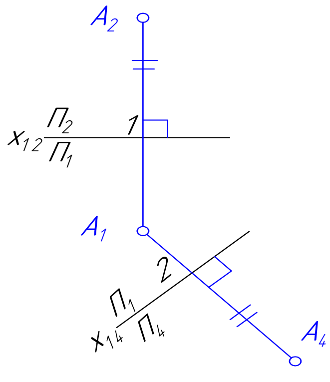


Рис. 4.34

Алгоритм

1. Фиксируем имеющуюся систему плоскостей проекций (рис. 4.34), то есть проводим базу отсчёта x_{12}; $x_{12} \perp A_1A_2$ (линиям связи).
2. Меняем $П_2$ на $П_4$, проводим новую базу отсчёта x_{14}. Так как у нас пока нет конкретной цели преобразования, то новую базу отсчёта x_{14} выбираем произвольно, например, аналогично той, что на пространственном чертеже.
3. Фиксируем новую систему плоскостей проекций $П_1 - П_4$.
4. Проводим в новой системе линию связи $A_1A_4 \perp x_{14}$.
5. Откладываем расстояние $2A_4 = 1A_2$.

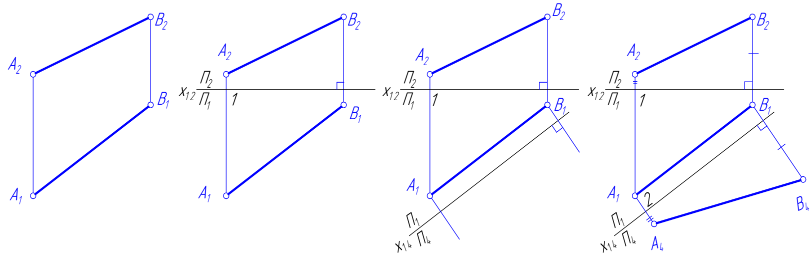
Построение других фигур на новую плоскость проекций сводится к аналогичному построению стольких точек, сколько определяет данную фигуру. Например, для прямой строим 2 точки, для плоскости – 3 точки и т. д.

Всё многообразие задач, решаемых с помощью преобразования комплексного чертежа, сводится к четырём основным.

Первая основная задача преобразования комплексного чертежа

Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала бы прямой уровня (рис. 4.32).

Для иллюстрации этой задачи возьмём отрезок общего положения *AB* (рис. 4.35, *а*).



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 4.35

Алгоритм

1. Фиксируем систему плоскостей проекций $П_1 - П_2$, т. е. проводим базу отсчёта x_{12} (рис. 4.35, *б*).
2. Меняем $П_2$ на $П_4$. Новую плоскость проекций $П_4$ выбираем так, чтобы отрезок AB был бы параллелен ей, т. е. $П_4 \perp П_1$ и $AB \parallel П_4$.
3. Новую базу отсчёта x_{14} проводим параллельно A_1B_1, таким образом фиксируем систему $П_1 - П_4$ (рис. 4.35, *в*). От точек A_1 и B_1 проводим линии связи, перпендикулярные x_{14}.
4. Откладываем расстояния: $2A_4 = 1A_2$ и $x_{14}B_4 = x_{12}B_2$ (рис. 4.35, *г*).
5. В системе $П_1 - П_4$ отрезок AB – прямая уровня, а её проекция A_4B_4 – натуральная величина AB.

Алгоритмическая запись решения:

1. $x_{12} \perp A_2A_1$.

2. $П_2 \to П_4$.

$П_4 \perp П_1$; $П_4 \parallel AB \Rightarrow x_{14} \parallel A_1B_1$.

3. Расстояние $2A_4 = 1A_2$; $x_{14}B_4 = x_{12}B_2$.

4. $A_4B_4 = |AB|$.

Вторая основная задача преобразования комплексного чертежа

Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала бы проецирующей (рис. 4.36).

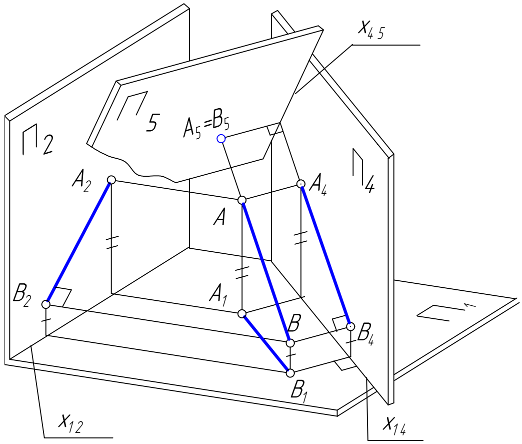


Рис. 4.36

Вторая задача решается после того, как решена первая. Поэтому одним преобразованием нельзя прямую общего положения поставить в проецирующее положение.

Алгоритм

1. Решаем первую основную задачу преобразования комплексного чертежа на примере отрезка *AB* (рис. 4.37).

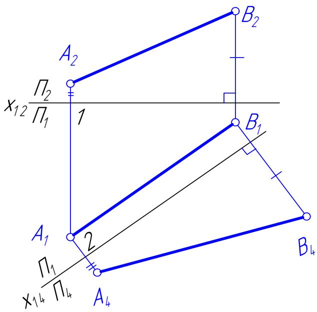


Рис. 4.37

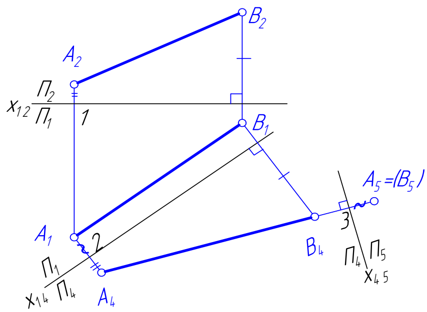


Рис. 4.38

2. Меняем плоскость $П_1$ на $П_5$. Новую плоскость проекций $П_5$ выбираем так, чтобы отрезок *AB* был перпендикулярен ей, при этом $П_5$ должна быть перпендикулярна $П_4$ (остающейся плоскости проекций).

3. Так как отрезок AB в новой системе плоскостей проекций $\Pi_4 - \Pi_5$ должен быть проецирующим, то новую базу отсчёта x_{45} выбираем перпендикулярно A_4B_4 (рис. 4.38). Проводим линию связи.
4. Откладываем расстояния: $3A_5 = 2A_1$, $x_{45}B_5 = x_{14}B_1$. Поскольку $x_{14} \parallel A_1B_1$, то эти расстояния равны и точки A_5 и B_5 совпадут.
5. Отрезок AB в системе $\Pi_4 - \Pi_5$ – проецирующий, а его проекция A_5B_5 – точка.

Алгоритмическая запись решения:

1. $x_{12} \perp A_2A_1$.

2. $\Pi_2 \rightarrow \Pi_4$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$; $\Pi_4 \parallel AB \Rightarrow x_{14} \parallel A_1B_1$.

3. Расстояние $2A_4 = 1A_2$; $x_{14}B_4 = x_{12}B_2$.

4. $\Pi_1 \rightarrow \Pi_5$; $\Pi_5 \perp \Pi_4$; $\Pi_5 \perp AB \Rightarrow x_{45} \perp A_4B_4$.

5. Расстояние $3A_5 = 2A_1$; $x_{45}B_5 = x_{14}B_1$.

6. $A_5 = B_5$ – точка.

Третья основная задача преобразования комплексного чертежа

Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала бы проецирующей (рис. 4.39).

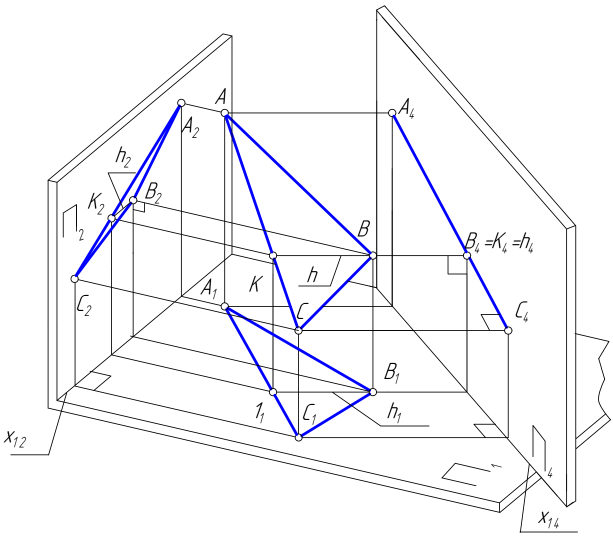


Рис. 4.39

Алгоритм

1. Зададим плоскость треугольником *ABC* (рис. 4.40, *а*).

2. Фиксируем систему плоскостей проекций $П_1 - П_2$, то есть проводим базу отсчёта x_{12} (рис. 4.40, *б*).

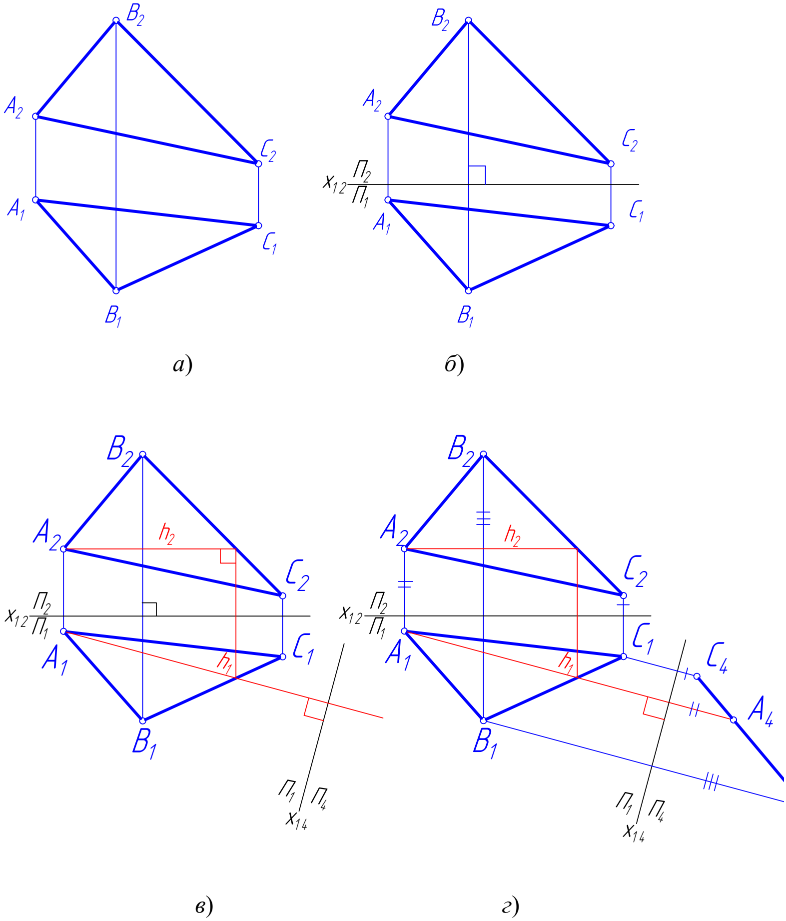


Рис. 4.40

3. Меняем $П_2$ на $П_4$, $П_4 \perp П_1$.

4. Так как, исходя из условий задачи, плоскость *ABC* на новую плоскость проекций $П_4$ должна спроецироваться в прямую линию $A_4B_4C_4$ (рис. 4.39), то одна из линий уровня этой плоскости (*h* или *f*) спроецируется на эту линию в точку (см. модуль 2, рис. 2.10, 2.12).

Если мы заменяем $П_2$ на $П_4$, то это будет горизонталь; если меняем $П_1$ на $П_4$, то это будет фронталь. Таким образом, мы должны в плоскости *ABC* взять горизонталь *h*, $П_4$, выбрать перпендикулярно этой горизонтали, следовательно, новую базу отсчёта x_{14} проводим перпендикулярно h_1 (рис. 4.40, *в*), тем самым фиксируем систему $П_1 – П_4$.

5. Откладываем расстояния: $x_{14}A_4 = x_{12}A_2, x_{14}B_4 = x_{12}B_2, x_{14}C_4 = x_{12}C_2$.

6. В новой системе $П_1 – П_4$ плоскость *ABC* – проецирующая, а её главная проекция $A_4B_4C_4$ – прямая линия (рис. 4.40, *г*).

Алгоритмическая запись решения:

> **1.** $x_{12} \perp A_2A_1$.
>
> **2.** $П_2 \rightarrow П_4$; $П_4 \perp П_1$; $П_4 \perp ABC$; $П_4 \perp h \Rightarrow x_{14} \perp h_1$.
>
> **3.** Расстояние $x_{14}A_4 = x_{12}A_2$, $x_{14}B_4 = x_{12}B_2$, $x_{14}C_4 = x_{12}C_2$.

Четвёртая основная задача преобразования комплексного чертежа

Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала бы плоскостью уровня.

Алгоритм

1. Четвёртая задача одной заменой не решается, вначале нужно решить третью задачу (рис. 4.41, *а*).

2. Вводим новую плоскость проекций $П_5$, то есть меняем $П_1$ на $П_5$. $П_5$ должна быть перпендикулярной остающейся плоскости проекций, то есть $П_4$.

3. Относительно плоскости *ABC* плоскость $П_5$ выбираем так, чтобы она была параллельна ей, то есть в системе $П_4 – П_5$ плоскость *ABC* должна стать плоскостью уровня.

4. Базу отсчёта x_{45} проводим параллельно $A_4B_4C_4$.

5. Проводим в новой системе линии связи перпендикулярно x_{45} от точек A_4, B_4, C_4.

6. Откладываем расстояния: $x_{45}A_5 = x_{14}A_1, x_{45}B_5 = x_{14}B_1, x_{45}C_5 = x_{14}C_1$ (рис. 4.41, *б*).

7. В системе $П_4 – П_5$ плоскость *ABC* есть плоскость уровня, а её проекция $A_5B_5C_5$ – натуральная величина треугольника *ABC*.

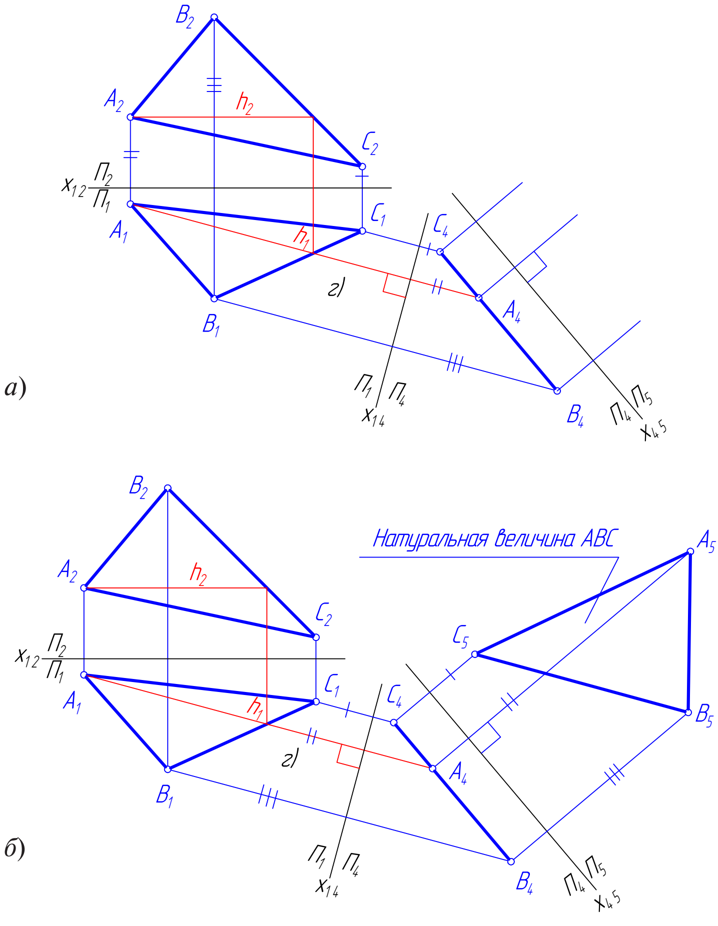


Рис. 4.41

Алгоритмическая запись решения:

1. $x_{12} \perp A_2A_1$.

2. $\Pi_2 \rightarrow \Pi_4$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$; $\Pi_4 \perp ABC$; $\Pi_4 \perp h \Rightarrow x_{14} \perp h_1$.

3. Расстояние $x_{14}A_4 = x_{12}A_2$, $x_{14}B_4 = x_{12}B_2$, $x_{14}C_4 = x_{12}C_2$.

4. $\Pi_1 \rightarrow \Pi_5$, $\Pi_5 \perp \Pi_4$; $\Pi_5 \parallel ABC \Rightarrow x_{45} \parallel A_4B_4C_4$.

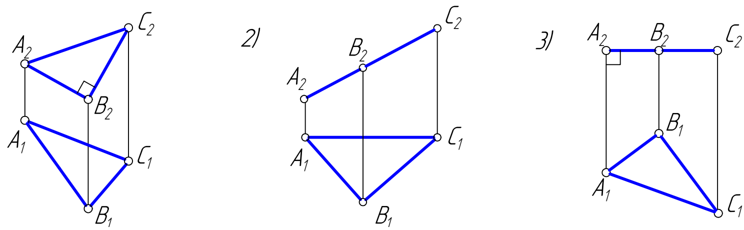
5. Расстояние $x_{45}A_5 = x_{14}A_1$, $x_{45}B_5 = x_{14}B_1$, $x_{45}C_5 = x_{14}C_1$.

6. $A_5B_5C_5 = |ABC|$.

4.6. Решение метрических задач с помощью преобразования комплексного чертежа

Как вы думаете?

На каком из представленных чертежей уже присутствует натуральная величина треугольника *ABC*?



Преобразование комплексного чертежа часто используется при решении **метрических задач**. В этом случае конечной целью преобразования чертежа является получение такой проекции оригинала, на которой можно было бы видеть в натуральную величину геометрический элемент, связанный с **искомой метрической характеристикой**.

Такое положение оригинала относительно некоторой плоскости проекций, при котором по проекции можно непосредственно определить нужную метрическую характеристику, называется ***решающим положением оригинала***.

1. Например: заданы две параллельные фронтали *a* и *b* (рис. 4.42). Требуется определить расстояние между ними.

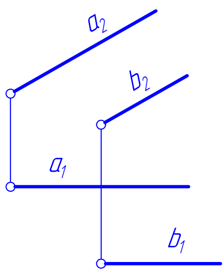


Рис. 4.42

В этом случае решающим положением параллельных прямых будет их проецирующее положение. Так как прямые *a* и *b* являются фронталями, то, чтобы поставить их в проецирующее положение, потребуется только одна замена (то есть нужно решить вторую задачу преобразования комплексного чертежа). Для решения выбираем способ замены плоскостей проекций.

Алгоритм решения (рис. 4.43):

1. $\Pi_1 \rightarrow \Pi_4$.
$\Pi_4 \perp \Pi_2$; $\Pi_4 \perp a, b \Rightarrow x_{24} \perp a_2b_2$.
2. Расстояние $x_{24}a_4 = x_{12}a_1$; $x_{24}b_4 = x_{12}b_1$.
3. a_4, b_4 – точки.
4. $a_4\ b_4$ – расстояние между параллельными прямыми.

Таким образом, прямые *a* и *b* на Π_4 проецируются в точки, и расстояние между a_4 и b_4 определяет расстояние между прямыми *a* и *b*. Возвращаем это расстояние в систему $\Pi_2 - \Pi_1$ ($1_2 2_2 \rightarrow 1_1 2_1$).

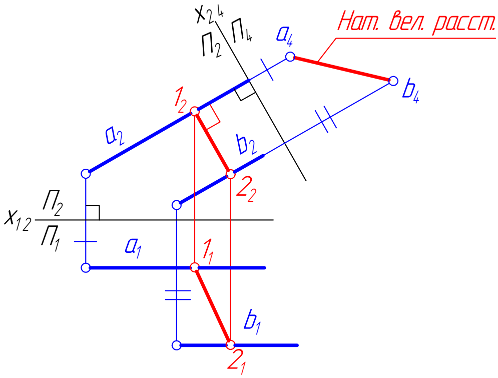
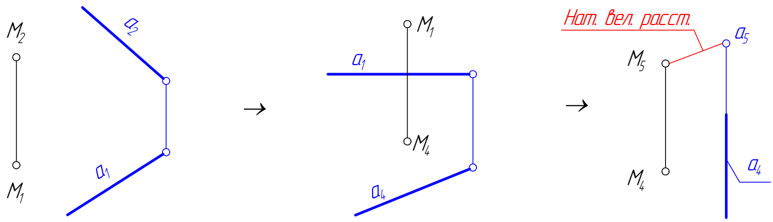


Рис. 4.43

2. Например: для нахождения натурального вида плоской фигуры решающим положением является такое, при котором плоскость, в которой расположена эта фигура, параллельна какой-нибудь плоскости проекций (см. четвёртую задачу преобразования комплексного чертежа, рис. 4.41, *б*).

Следует отметить, что для решения ряда задач данный оригинал может иметь несколько решающих положений. Так, например, в задаче на определение расстояния от точки до прямой легко можно увидеть два решающих положения:

– когда данная прямая будет перпендикулярна какой-нибудь плоскости проекций (решается вторая основная задача преобразования комплексного чертежа) (рис. 4.44);

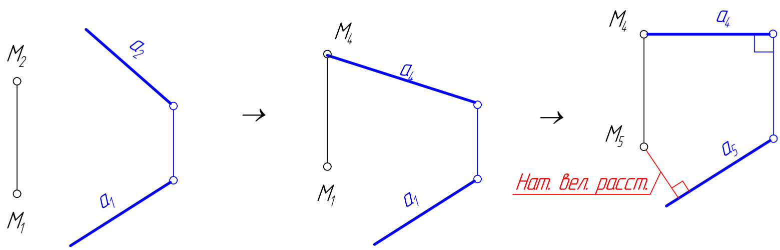


а) *б*) *в*)

Рис. 4.44

– когда плоскость, определяемая заданными прямой и точкой, займёт положение, параллельное какой-нибудь плоскости проекций (решается четвёртая задача преобразования комплексного чертежа) (рис. 4.45).

Несмотря на огромное разнообразие метрических задач, можно записать единый алгоритм их решения с использованием преобразования комплексного чертежа:



а) *б*) *в*)

Рис. 4.45

Алгоритм решения метрических задач

1. Устанавливают наличие метрической характеристики в задаче.

2. Определяют носителя этой метрической характеристики.

3. Выбирают «решающее положение» оригинала, при котором по проекции можно сразу определить натуральную величину геометрического элемента, связанного с метрической характеристикой. Решающее положение оригинала определяется выбором одной из четырёх задач преобразования комплексного чертежа.

4. Выбирают рациональный способ преобразования.

Всё вышеизложенное рассмотрим на примере конкретной конструктивной задачи.

Задача. Построить проекции равностороннего треугольника *ABC*, принадлежащего плоскости $\Gamma(h \cap f)$, если его сторона *AB* задана (рис. 4.46).

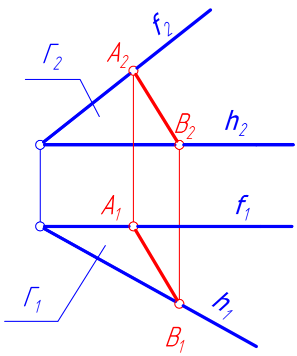


Рис. 4.46

Алгоритм

1. Чтобы построить проекции треугольника *ABC*, необходимо сначала определить его истинный вид. В этом случае решающим положением оригинала (ΔABC) является то, при котором плоскость треугольника параллельна плоскости проекций. Для этого плоскость $\Gamma(h \cap f)$ нужно поставить в положение плоскости уровня.

2. Чтобы плоскость Г поставить в положение плоскости уровня, требуется решить четвёртую задачу преобразования комплексного чертежа способом замены плоскостей проекций. Для решения четвёртой задачи требуется выполнить две замены.

3. Фиксируем систему $\Pi_1 - \Pi_2$, то есть, проводим x_{12} (рис. 4.47).

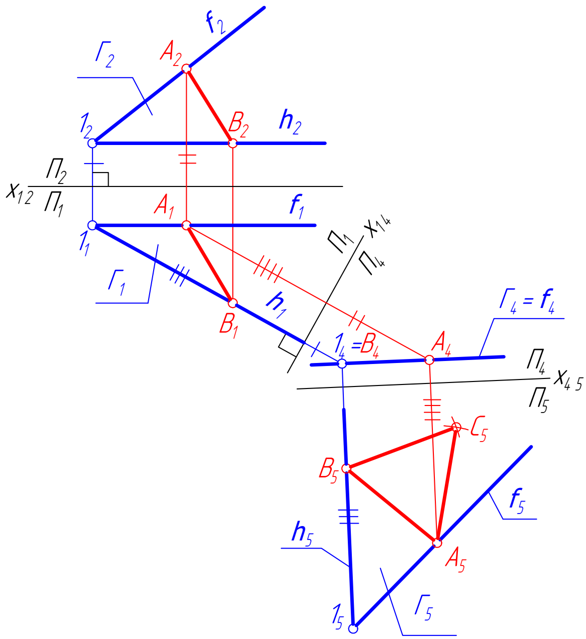


Рис. 4.47

4. Меняем Π_2 на Π_4.

$\Pi_4 \perp \Pi_1$; $\Pi_4 \perp \Gamma$; $\Pi_4 \perp h \Rightarrow x_{14} \perp h_1$.

Так как плоскость Г на Π_4 спроецируется в прямую линию, то для её построения требуется всего 2 точки: расстояние $x_{14}1_4 = x_{12}1_2$, $x_{14}A_4 = x_{12}A_2$. Γ_4 – главная проекция.

5. Меняем Π_1 на Π_5.

$\Pi_5 \perp \Pi_4$; $\Pi_5 // \Gamma \Rightarrow x_{45} // \Gamma_4$.

Расстояние $x_{45}1_5 = x_{14}1_1$, $x_{45}A_5 = x_{14}A_1$.

6. В системе $\Pi_4 - \Pi_5$ плоскость Г – плоскость уровня, поэтому отрезок A_5B_5 – натуральная величина AB, и треугольник ABC спроецируется на Π_5 в натуральную величину. Для его построения из точек A_5 и B_5 откладываем отрезки, равные A_5B_5, и получаем точку C_5. Проекция $A_5B_5C_5$ – натуральная величина равностороннего треугольника ABC.

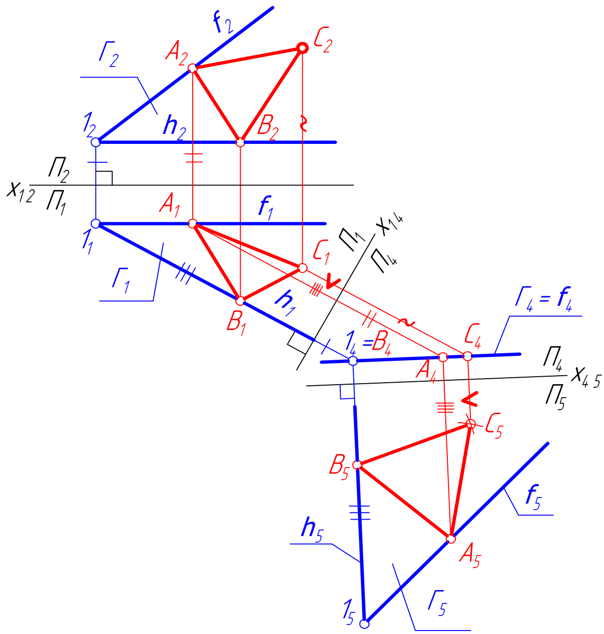


Рис. 4.48

7. Возвращаем точку C в систему $П_1 - П_2$ в обратном порядке (рис. 4.48).

Сначала находим C_4 на $Г_4$, проведя линию связи от C_5 перпендикулярно x_{45}.

8. От C_4 проводим линию связи в системе $П_1 - П_4$ и откладываем расстояние $x_{14}C_1 = x_{45}C_5$.

9. От C_1 проводим линию связи в системе $П_1 - П_2$ и откладываем расстояние $x_{12}C_2 = x_{14}C_4$.

10. Мы построили проекции равностороннего ΔABC, принадлежащего плоскости $\Gamma(h \cap f)$.

Общая схема решения показана на рис. 4.49:

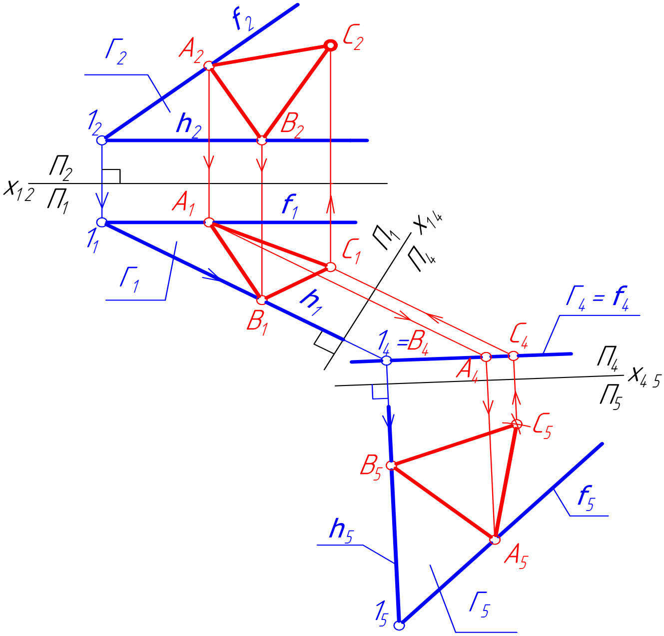
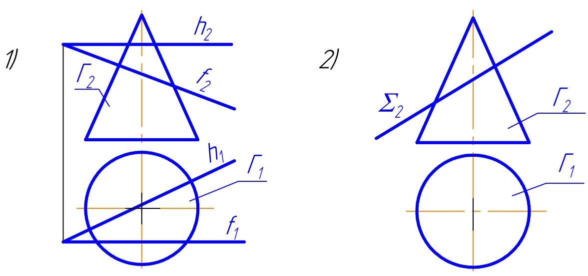


Рис. 4.49

4.7. Решение позиционных задач с помощью преобразования комплексного чертежа

Как вы думаете?

В каком случае проще решается задача на пересечение конуса Г с плоскостью?



Многие позиционные задачи, главным образом задачи на пересечение поверхностей с прямыми или плоскостями общего положения, удобно решать с помощью преобразования комплексного чертежа. В этом случае конечной целью преобразования является получение такой проекции оригинала, при которой участвующие в пересечении прямая или плоскость находятся в частном положении. Тогда в новом положении решение задачи значительно упрощается. При необходимости проекции общего элемента возвращают в исходный чертёж в обратном порядке.

Рассмотрим вышесказанное на конкретном примере.

Задача. Найти точки пересечения сферы с прямой *a* (рис. 4.50).

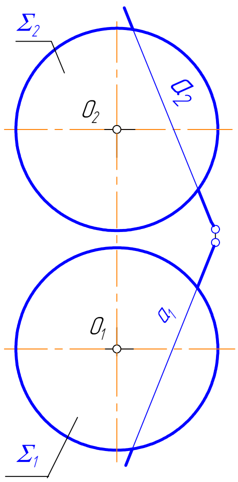


Рис. 4.50

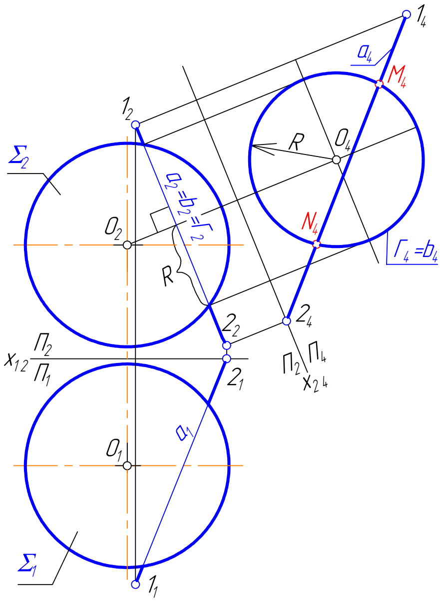


Рис. 4.51

Алгоритм

1. Выбираем решающее положение оригинала. Оно должно быть таким, чтобы прямая *a* и окружность *b* на сфере Σ (рис. 4.51), лежащие в одной плоскости, оказались бы в натуральную величину. Для этого плоскость окружности Γ должна быть плоскостью уровня. Задачу решаем способом замены плоскостей проекций.

2. Так как плоскость Г – проецирующая, то требуется одна замена.
3. Решаем четвёртую задачу преобразования комплексного чертежа. Фиксируем систему $\Pi_1 - \Pi_2$, проводим базу x_{12}.
4. Меняем Π_1 на Π_4. $\Pi_4 \perp \Pi_2$, $\Pi_4 \,//\, \Gamma \supset x_{24} \,//\, \Gamma_2$.
5. От точки O_2 проводим линию связи в системе $\Pi_2 - \Pi_4$ перпендикулярно Γ_2 и откладываем расстояние $x_{24}O_4 = x_{12}O_1$. Получили центр окружности b, и проводим окружность b_4 радиусом R.
6. Проецируем прямую a на Π_4. Для этого на ней отметим точки 1 и 2 и откладываем расстояния: $x_{24}1_4 = x_{12}1_1$, $x_{24}2_4 = x_{12}2_1$. Получили a_4.
7. Там, где a_4 пересечётся с b_4, будут точки M_4 и N_4.
8. Возвращаем точки M и N в систему $\Pi_2 - \Pi_1$ в обратном порядке по принадлежности прямой a (рис. 4.52).

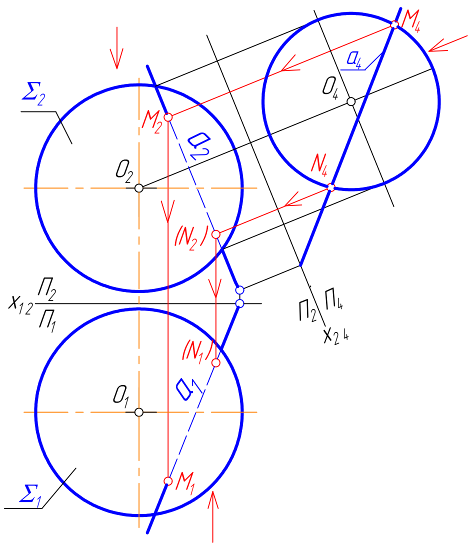


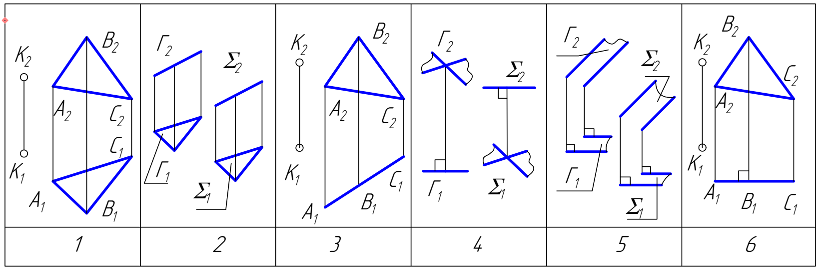
Рис. 4.52

9. Видимость точек можно определить, например, так, как обычно определяют её на сфере: точка M_2 расположена выше экватора $\Rightarrow M_1$ – видимая, точка N_2 – ниже экватора $\Rightarrow N_2$ – невидимая. Точка M_1 расположена ближе плоскости фронтального меридиана $\Rightarrow M_2$ – видимая, точка N_1 – дальше плоскости фронтального меридиана $\Rightarrow N_2$ – невидимая.

Выводы

1. Преобразование комплексного чертежа значительно упрощает решение метрических и позиционных задач.
2. При решении конструктивных задач важным моментом является выбор решающего положения оригинала.
3. Несмотря на разнообразие конструктивных задач, существует единый алгоритм их решения.

Обучающий тест 8 «Преобразование комплексного чертежа» (ответы — в конце модуля 4)



1. На каком чертеже нужно сделать две замены плоскостей проекций, чтобы определить истинный вид треугольника *ABC*?

2. На каком чертеже можно определить расстояние между двумя параллельными плоскостями ($\Gamma \parallel \Sigma$) при помощи одной замены плоскостей проекций?

3. В каком случае для определения расстояния между точкой *K* и плоскостью *ABC* нужно выполнить одну замену плоскостей проекций?

4. В каком случае плоскости Г и Σ не параллельны?

5. В каком случае для определения расстояния между точкой *K* и прямой *AB* нужно выполнить две замены плоскостей проекций?

6. В каком случае расстояние между точкой *K* и прямой *AB* можно определить при помощи одной замены плоскостей проекций?

Ответы на тест 7: 1 – 2; 2 – 4, 5, 6; 3 – 4, 5; 4 – 6; 5 – 3; 6 – 1.

Ответы на тест 8: 1 – 1; 2 – 5; 3 – 1; 4 – 4; 5 – 3; 6 – 6.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие задачи называются метрическими?
2. Какие две основные метрические задачи вы знаете?
3. Как провести перпендикуляр к плоскости общего положения на комплексном чертеже?
4. Как провести перпендикуляр к прямой общего положения на комплексном чертеже?
5. Чем выгоднее задать плоскость, перпендикулярную прямой общего положения?
6. Как называется плоскость, перпендикулярная одной из линий уровня?
7. Как называется плоскость, перпендикулярная одной из проецирующих прямых?
8. Как задать плоскость, касательную к поверхности?
9. В чем состоит сущность преобразования ортогональных проекций способом замены плоскостей проекций?
10. Почему задачи 1–2, 3–4 решаются на одном чертеже? Как можно это прокомментировать?
11. Как выбирают новую плоскость проекций относительно остающейся?
12. Как преобразовать прямую общего положения в прямую уровня?
13. Как преобразовать прямую общего положения в проецирующую?
14. Как преобразовать плоскость общего положения в проецирующую?
15. Как преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня?
16. Что дает первая задача преобразования комплексного чертежа?
17. Что дает вторая задача преобразования комплексного чертежа?
18. Что дает треть задача преобразования комплексного чертежа?
19. Что дает четвертая задача преобразования комплексного чертежа?
20. Что называется «решающим» положением оригинала?

Рекомендуемая литература

Основная

1. Бурова, Н.М. Начертательная геометрия [Электронный ресурс] : курс лекций / Н.М. Бурова. – М. : МГСУ : ЭБС АСВ, 2014. – 77 с. – Режим доступа : http://www.iprbookshop.ru/25721.html.

Дополнительная

2. Начертательная геометрия : сборник учеб.-метод. материалов / Т.А. Варенцова, [и др.]. – Тольятти : ТГУ, 2009. – 291 с.
3. Павлова, А.А. Начертательная геометрия / А.А. Павлова. – М. : Астрель. АСТ, 2007. – 302 с.
4. Локтев, О.В. Краткий курс начертательной геометрии / О.В. Локтев. – М. : Высшая школа, 2004. – 136 с.
5. Локтев, О.В. Задачник по начертательной геометрии / О.В. Локтев, П.А. Числов. – М. : Высшая школа, 2006. – 86 с.

Интернет-ресурсы

1. http://graph.power.nstu.ru/ – сайт Новосибирского государственного университета.
2. http://traffic.spb.ru/geom/begin/info.htm l- – сайт Санкт-Петербургского государственного университета.
3. http://www.propro.ru/graphbook/ – Электронные лекции для студентов архитектурно-строительных университетов. Вольхин Константин Анатольевич.
4. http://www.twirpx.com/files/special/nig/ – Курс лекций по начертательной геометрии на базе учебника А.Д. Посвянского «Краткий курс начертательной геометрии».
5. http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.75.31 – сайт «Образование в области техники и технологии». Начертательная геометрия, инженерная графика.
6. http://wwwcdl.bmstu.ru/rk1/Vol1/DescriptiveGeometry/index.html – Московский государственный технический университет им. Баумана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бурова, Н.М. Начертательная геометрия [Электронный ресурс] : курс лекций / Н.М. Бурова. – М. : МГСУ : ЭБС АСВ, 2014. – 77 с. – Режим доступа : http://www.iprbookshop.ru/25721.html.
2. Грачева, С.В. Увлекательная начертательная геометрия : электрон. учеб. пособие / С.В. Грачева, И.А. Живоглядова. – Тольятти : ТГУ, 2015. – 260 с. – 1 CD.
3. Начертательная геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.В. Корниенко [и др.]. – Изд. 4-е, испр. и доп. – СПб. : Лань, 2013. – 192 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

ГЛОССАРИЙ

Алгоритм решения позиционных задач в 1 случае: проекции общего элемента на чертеже уже есть. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Решение сводится к их нахождению и обозначению.

Алгоритм решения позиционных задач во 2 случае:

1. Выделяют из двух заданных фигур проецирующую и отмечают её главную проекцию.
2. Вторую проекцию общего элемента находят по условию его принадлежности непроецирующей фигуре.
3. Определяют видимость проекций общих элементов и пересекающихся фигур.

Алгоритм решения позиционных задач в 3 случае: задачи решаются по третьему алгоритму. Для решения таких задач специально вводят вспомогательную секущую плоскость-посредник, которая пересекает обе фигуры, выявляя общие точки.

Алгоритмическая часть определителя (*А*) – устанавливает закон (характер) взаимодействия геометрических фигур в процессе образования поверхности.

Взаимная параллельность плоскостей – две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Взаимная перпендикулярность двух плоскостей общего положения. Плоскости перпендикулярны, если в одной из них лежит прямая, перпендикулярная другой плоскости.

Взаимная принадлежность прямой и плоскости – прямая принадлежит плоскости, если она:

1) проходит через две точки плоскости;
2) проходит через одну точку плоскости и параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Взаимная принадлежность точки и плоскости – точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Винтовая поверхность (геликоид) образуется какой-либо линией (образующей) при ее винтовом движении.

Вторая главная позиционная задача (2 ГПЗ) – взаимное пересечение двух поверхностей.

Геометрическая часть определителя (*G*) – устанавливает набор геометрических фигур (геометрических элементов), участвующих в образовании поверхности.

Гиперболоид вращения образуется вращением гиперболы вокруг её оси.

Горизонталь плоскости – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций.

Две основные метрические задачи:

1. Первая основная метрическая задача – на перпендикулярность прямой и плоскости.

2. Вторая основная метрическая задача – на определение натуральной длины отрезка; задача решается методом прямоугольного треугольника.

Касательная плоскость – это множество всех касательных прямых, проведённых к данной кривой поверхности и проходящих через одну её точку.

Комплексный чертеж (эпюр Монжа) – совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций оригинала, расположенных на одной плоскости чертежа.

Коническая поверхность общего вида образуется перемещением прямолинейной образующей l по кривой направляющей m, в каждый момент движения l проходит через некоторую фиксированную точку.

Конкурирующие точки – точки, у которых равны две одноименные координаты. Конкурирующие точки расположены на одной проецирующей прямой. Различают горизонтально конкурирующие точки, фронтально конкурирующие точки, профильно конкурирующие точки.

Конус вращения образуется вращением образующей (прямой линии) вокруг оси, которую она пересекает.

Линия – одномерная геометрическая фигура. В начертательной геометрии линия определяется кинематически, как траектория непрерывно движущейся точки в пространстве.

Метрические задачи – это задачи, в условии или решении которых присутствуют геометрические фигуры или понятия, связанные с численной характеристикой.

Несобственные элементы – бесконечно удаленные элементы (например, предположим, что две параллельные прямые пересекаются в единственной несобственной точке).

Обратимость чертежа – когда по плоскому изображению можно восстановить оригинал, т. е. обратимость изображения дает возможность восстанавливать (реконструировать) предмет в пространстве с точностью до всех его позиционных и метрических свойств.

Определитель поверхности (*D*) – минимальная информация, необходимая и достаточная для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже. Определитель состоит из двух частей: $D = G + A$.

Особые линии плоскости – прямые, принадлежащие плоскости и занимающие в ней какое-то особое положение. К ним относятся линии уровня плоскости: горизонталь, фронталь и профильная прямая.

Параболоид вращения образуется вращением параболы вокруг её оси.

Параллельное проецирование – все проецирующие лучи параллельны заданному направлению s (s – направление проецирования).

Первая главная позиционная задача (1 ГПЗ) – пересечение линии с поверхностью.

Пирамидальная поверхность образуется в результате перемещения прямолинейной образующей l по ломаной направляющей m, в каждый момент движения l проходит через некоторую фиксированную точку S (вершину).

Плоскость уровня (дважды проецирующая) – плоскость перпендикулярна одновременно двум плоскостям проекций, а следовательно, параллельна третьей. Различают горизонтальную, фронтальную, профильную плоскости уровня.

Плоскость общего положения – плоскость, не перпендикулярная и не параллельная ни одной из плоскостей проекций.

Плоскости частного положения – плоскости, параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций.

Поверхности вращения второго порядка образуются вращением кривой второго порядка вокруг оси, лежащей в плоскости симметрии кривой.

Поверхность вращения образуется при вращении какой-либо линии (образующей) вокруг неподвижной оси i.

Поверхность считается графически заданной на комплексном чертеже, если можно построить любую точку на поверхности.

Позиционными задачами называют такие, в которых определяется взаимное расположение геометрических фигур в пространстве.

Пересекающиеся прямые – прямые, имеющие единственную общую точку. Они всегда лежат в одной плоскости.

Призматическая поверхность образуется в результате перемещения прямолинейной образующей l, которая скользит по ломаной направляющей m, в каждый момент движения оставаясь параллельной заданному направлению проецирования.

Проецирующая геометрическая фигура – это фигура, у которой одна из ее проекций есть геометрическая фигура на единицу меньшего измерения; она называется главной проекцией и обладает собирательными свойствами.

Проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная только одной плоскости проекций. Различают горизонтально проецирующую плоскость, фронтально проецирующую плоскость, профильно проецирующую плоскость.

Проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций. Различают горизонтально проецирующую прямую, фронтально проецирующую прямую, профильно проецирующую прямую.

Прямая общего положения – прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости (на чертеже: $n \perp \Sigma$, если $n_1 \perp h_1$, $n_2 \perp f_2$).

Прямая, параллельная плоскости – прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Прямые уровня – прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций. Различают три линии уровня: горизонталь, фронталь, профильная прямая.

Свойства двухкартинного комплексного чертежа Монжа:

1) две проекции точки всегда лежат на одной линии связи установленного направления;
2) все линии связи одного установленного направления параллельны между собой.

Свойство поверхности вращения – каждая точка образующей l при вращении вокруг оси опишет окружность с центром на оси, плоскость которой перпендикулярна оси. Эти окружности называются параллелями.

Скрещивающиеся прямые – прямые не параллельные и не пересекающиеся. Через скрещивающиеся прямые невозможно провести плоскость, так как если одна прямая будет принадлежать плоскости, то другая будет пересекать эту плоскость.

Способ замены плоскостей проекций для преобразования комплексного чертежа – одна из плоскостей проекций заменяется новой плоскостью проекций так, чтобы геометрическая фигура, занимая общее положение, в новой системе плоскостей проекций оказалась бы в частном положении.

Сфера образуется вращением окружности вокруг оси (ее диаметра).

Теорема Монжа – если две поверхности вращения второго порядка описаны около третьей поверхности вращения второго порядка, или вписаны в неё, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Причём плоскости кривых проходят через прямую, соединяющую точки двойного соприкосновения.

Тор образуется вращением окружности вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр (поверхность вращения 4 порядка).

Точка – это нульмерная геометрическая фигура, неделимый элемент пространства; она не имеет измерений и не может быть определена другими, более элементарными фигурами.

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, лежащей на поверхности.

Фронталь плоскости – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций.

Центральное проецирование – если все проецирующие лучи проходят через некоторую фиксированную точку S (S – центр проецирования).

Цилиндр вращения образуется вращением образующей (прямой линии) вокруг параллельной ей оси.

Цилиндрическая поверхность общего вида образуется перемещением прямолинейной образующей l по кривой направляющей m, в каждый момент движения l остается параллельной заданному направлению s.

Частный случай пересечения – две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения.

Четыре основные задачи преобразования комплексного чертежа:
1) первая основная задача – преобразовать комплексный чертёж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала бы прямой уровня;
2) вторая основная задача – преобразовать комплексный чертёж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала бы проецирующей;
3) третья основная задача – преобразовать комплексный чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала бы проецирующей;
4) четвёртая основная задача – преобразовать комплексный чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала бы плоскостью уровня.