МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математическое образование»
(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»**

Студент С.А. Теребинова _________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель Р.А. Утеева _________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель программы д.п.н., профессор, Р.А. Утеева _____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________ 2019 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева _____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________ 2019 г.

Тольятти 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальностьисследования. Обучение математике является важнейшей составляющей среднего (полного) общего образования и призвано развивать логическое мышление и математическую интуицию учащихся, обеспечить овладение учащимися умениями в решении различных практических и межпредметных задач. Математика входит в предметную область «Математика и информатика».

Изучение курса математики 10-11 классов в соответствии с Федеральным образовательным стандартом среднего (полного) общего образования должно обеспечить сформированность: «представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики; основ логического, алгоритмического и математического мышления; умений применять полученные знания при решении различных задач; представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления»[29].

«Предметные результаты изучения предметной области «Математика и информатика» должны отражать овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально – графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей» [46, С 15].

Методическим аспектам обучения учащихся решению математических задач на нахождение области определения и множества значений функции в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа посвящены исследования С.А. Гомонова [1], Б.А. Горлач [2], Г.И. Запорожца [7], Т.А. Ивановой [8], В.П. Покровского [37], В. В. Сильвестрова[42].

Тема «Логарифмическая функция» является одной из традиционных тем школьного курса математики.

При изучении этой темы основное внимание обращается на решение логарифмических уравнений и неравенств.

Как показывает опыт работы в старших классах, большинство учащихся испытывают затруднения при решении задач на нахождение множества значений логарифмических функций.

В настоящее время задачи на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций в явной или неявной форме входят в содержание заданий профильного уровня ЕГЭ по математике.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени *противоречием между необходимостью* обучения старшеклассников решению задач на нахождение области определения и множества значений функций в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа и фактическим состоянием методики обучения на практике.

Указанное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования:** каковы методические особенности обучения старшеклассников решению задач на нахождение области определения и множества значений функций в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа?

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения старшеклассников решению задач на нахождение области определения и множества значений функций в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения старшеклассников решению задач на нахождение области определения и множества значений функций в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа и разработке методических материалов по теме исследования.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что разработанные методические материалы, включающиеся в себя определенную систему задач на нахождение области определения и множества значений функций в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа, могут повысить качество математической подготовки обучающихся.

Задачи исследования:

1. Раскрыть методику введения понятий области определения и множеств значений функций.

2.Рассмотреть методические особенности обучения старшеклассников решению задач на нахождение области определения и множества значений функций в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа.

3.Представить методические рекомендации по обучению решения задач на нахождение области определения и множества значений функций в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

4.Разработать систему задач по теме исследования для учащихся 10-11 классов.

5.Представить результаты педагогического эксперимента.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; тестирование школьников; констатирующий и поисковый этапы эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2017/18уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных и вузовских учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2017/18уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2018/19 уч.г.): разработка системы задач по теме исследования для учащихся 10-11 классов.

4 семестр (2018/19 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в нём представлены методические материалы по обучению учащихся 10-11 классов решению задач на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций, которые могут быть использованы учителями при обучении учащихся.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению решения задач на нахождение области определения и множества значений логарифмической функции.

2. Разработка систем задач на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций.

Апробация результатов исследования осуществлялась путем выступлений на: научно-исследовательском семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры; научной студенческой конференции «Дни науки» Тольяттинского государственного университета; V Международной научной конференции «Математическое образование: современное состояние и перспективы» (20-21 февраля 2019 г., г. Могилев, Беларусь), Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество»: (Тольятти, 5 декабря 2018 года).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических разработок и рекомендацийосуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик, а также в период работы учителем математики в школе № 79 г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в 2-х публикациях [43], [44].

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы и Приложений.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам методики нахождения области определения и множества значений функций в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа.

Глава II посвящена методическим основам обучения решению задач на нахождение области определения и множества значений логарифмической функции.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Объем работы составляет 71 страницу.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДИКИ НАХОЖДЕНИЯ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§1. Анализ содержания, основные цели и задачи изучения функциональной линии в школьном курсе математики

В методической литературе отмечается, что «пройдя путь от арифметики до высших разделов единой математики, можно заметить, что функциональная линия является их основным стержнем и группирует вокруг себя всю современную школьную алгебру и начала анализа. После реформы математического образования в 70-е гг. XX в. существующие примерные программы значительно увеличили объём сведений функционального содержания. На это событие оказали своё влияние такие педагоги – математики как Ф. Клейн, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, А.И. Маркушевич, А.Г. Мордкович и другие, уверенные в ведущей роли понятия функции в математике – науке и в обучении математике. Функция, как математическая модель многих реальных ситуаций, позволяет описывать и изучать разнообразные зависимости между величинами, познавать окружающий мир. Здесь ясно просматривается важность знакомства учащихся с функциональным материалом, который позволяет осуществлять внитрипредметные и межпредметные связи, реализовывать прикладную направленность школьного курса математики» [37].

«Идея единства математической науки, составляющая основное ядро исследований Н.Бурбаки, по существу была высказана ещё Ф.Клейном, который считал понятие функции центральным понятием всей математики.

С точки зрения Ф. Клейна, всякое научное знание не может быть усвоено школьниками без обращения к наглядности. Поэтому трактовка понятия функции с помощью геометрических образов является, по мнению Ф. Клейна, наиболее целесообразной в школьном обучении.

Действующая школьная программа по математике, основой которой является теоретико – множественная концепция позволяет широко трактовать все основные математические понятия, в том числе и понятие функции. Кроме того, теоретико – множественный подход даёт возможность излагать его на достаточно высоком уровне строгости» [36, С 112-113].

Автором отмечается, что функцией называется всякое много–однозначное или взаимно однозначное соответствие.

«Наряду с известными обозначениями функции применяются также символы:

1) f = (C; A; B); 2) функция f с областью определения A и значениями из B может обозначаться символом $A^{f}\to B$ или с помощью переменных x и y: $x \quad ^{f} \quad y,\ x \in A,\ y \in B$.

В этом случае говорят :f – функция аргумента x или переменной x». при этом элемент x_0 называют значением аргумента, элемент y_0 – значением функции.

Область определения функции называют также *областью значений аргумента*» [36, С 122].

«Отношение R, определённое на паре множеств A и B, называется функциональным (или функцией), если имеет место $\forall\ x, y, z \in C_R: [\ xRy \quad (xRz)] \to (y = z)$.

Множество X ⊂ A, состоящее из элементов x∈ X таких, что имеет место xRy, для некоторых y∈ B называется областью определения функции.

Так как $\forall\, x \in X, \exists!\, y \in B \mid xRy^1$, то имеется возможность использовать обычное функциональное обозначение y=f(x) вместо xRy.

Множество У ⊂ В, состоящее из элементов у ∈ У таких, что y=f(x) для всех х ∈ X, называется областью значений функции» [36, С 127].

Таким образом, в Таблице 1 представлена последовательность изучения функциональной линии в школьном курсе математики.

Таблица 1

Последовательность изучения функциональной линии в школьном курсе математики

Класс	Наименование функции	Общая формула
7	Прямая пропорциональность	$y = kx$
	Линейная функция	$y = kx + b$
		$y = x^2$
		$y = x^3$
8	Обратная пропорциональность	$y = \frac{k}{x}$,
	Другие функции	$y = \|x\|$, $y = [x]$, $y = \{x\}$
		$y = \sqrt{x}$
		$y = ax^2$, $y = a(x - x_0)^2 + y_0$
9	Квадратичная функция	$y = ax^2 + bx + c$
	Степенная функция	$y = x^n$
10	Тригонометрические функции	y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx
11	Показательная функция	$y = a^x$
	Логарифмическая функция	$y = \log_a x$

В Таблицах 2-3 представлен анализ учебников 7-9 классов, в которых рассматривается изучение функций.

Таблица 2

Учебники, в которых рассматривается изучение функций

Автор	7 класс	8 класс	9 класс
Мордкович А.Г.	Линейная функция $y = kx$(5 ч); функция вида $y = x^2$, $y = x^3$(3 ч)	Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ (3 ч); $y = \sqrt{x}$ (2 ч); квадратичная функция $y=x^2$ (2 ч)	Функция вида $y=x^n$ (4 ч); функция вида $y=x^{-n}$ (3 ч); функция вида $y = \sqrt[3]{x}$ (3ч)
Макарычев Ю.Н.	Прямая пропорциональность	Обратная пропорциональность	Квадратичная функция $y = ax^2$; $y = ax^2 + n$ и

	y= kx (3 ч); Линейная функция y= kx+ b (5 ч); функции вида $y= x^2$, $y= x^3$ (2 ч)	$y = \frac{k}{x}$ (2 ч); $y = \sqrt{x}$ (1ч)	$y = a(x-n)^2$ (8 ч) Степенная функция $y = x^n$(2 ч)

Таблица 3

Учебники 7-9 классов, в которых рассматривается изучение функций

Автор	7 класс	8 класс	9 класс
Дорофеев Г.В.	-	Линейная функция y= kx+ b (3 ч); Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ (2 ч)	Квадратичная функция $y= ax^2+ bx+ c$ (12 ч)
Колягин Ю.М.	Прямая пропорциональность y= kx (3 ч); Линейная функция y= kx+ b (3 ч)	Квадратичная функция $y= ax^2+ bx+ c$ (15 ч)	Функция вида $y = \sqrt{x}$ (3 ч); функции вида $y= x^2$, $y= x^3$ (2 ч). Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ (3 ч);
Никольский С.М.	-	Функция вида y=x (2 ч); функция вида $y=x^2$ (3 х); функция вида $y = \frac{1}{x}$ (3 ч); прямая пропорциональность y=kx (2 ч); линейная функция y=kx+ b (2 ч); функция вида y=|x|; квадратичная функция $y=ax^2$ (4 ч); функция вида $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ (3 ч); обратная пропорциональность (2 ч)	Степенная функция $y=x^n$, $y = \sqrt[n]{x}$ (4 ч);

В Таблице 4 представлен анализ учебников 10-11 классов, в которых рассматривается изучение функций.

Таблица 4

Учебники 10-11 классов, рассматривающие изучение функций

Автор	10 класс	11 класс
Колягин Ю.М.	Степенная функция $y=x^p$ (3 ч); показательная функция $y=a^x$ (2 ч)	Тригонометрические функции y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx (9 ч)
Муравин Г.К.	Степенная функция $y=x^n$ (2 ч); показательная функция $y=a^x$ (2 ч);логарифмическая функция$y = \log_a x$ (1 ч); тригонометрические функции y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx (7 ч)	-
Никольский С.М.	Степенная функция $y=x^n$ (2 ч); логарифмическая функция$y = \log_a x$ (1 ч);	-

	тригонометрические функции y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx (8 ч)	

«Изучение понятия функции это не только одна из важнейших целей преподавания математики в школе, но и средство которое даёт возможность связать общей идеей разные курсы математики, установить связь с другими предметами (физикой, химией)» [18].

Шмигирилова И.Б. в своём учебно-методическом пособии, «общей целью изучения функциональной линии видит осознание учащимися понятия функции как одной из основных математических моделей, позволяющей описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами и овладение методами исследования функций» [49, С. 22].

Цели изучения функциональной линии в курсе математики средней школы представлены в Таблице 5.

Таблица 5

Цели изучения функциональной линии

Категории целей	Примеры обобщающих типов целей		
	1 уровень	2 уровень	3 уровень
Знание	Функциональная терминология, формулы и графики основных элементарных функций, приёмы	Определения функциональных понятий и их свойств, частные приёмы исследования и способы записи свойств	Доказательства свойств функций, дополнительные и обобщенные приёмы исследования функций, правила и приёмы
Знание	исследования с помощью графика, интуитивное понятие производной и интеграла функции, таблицы производных и первообразных функций	функций, формулы и правила дифференцирования и интегрирования, основные области их применения и частные приёмы решения прикладных задач	дифференцирования и интегрирования, различные области их приложений, методы и обобщённые приёмы решения прикладных задач. Приёмы переноса методов
Понимание	Ученик правильно воспроизводит термины, формулы, алгоритмы решения простейших функциональных задач; приводит примеры,	Ученик интерпретирует свойства функций и методы их исследования при любом способе задания и при их сравнении; приводит контр	Ученик владеет представлением о функции, как о важнейшей математической модели; переходит от одного языка описания к

		примеры,	другому;

Продолжение таблицы 5

Понимание	объясняет смысл свойств функций и их графическую интерпретацию, геометрический и механический смысл производной, первообразной и интеграла	подводит задачную ситуацию под прием решения; выделяет главное в частных и специальных приёмах их решения и проверки	обосновывает эквивалентность формулировок на разных языках; выделяет идеи обобщенных методов и приёмов исследования и связь между ними; перестраивает известные и находит новые приёмы функциональных и прикладных задач
Умения и навыки	Умения определять значение функции по значению аргумента, по формуле и по графику и решать обратную	Умения определять значение функции по значению аргумента и область определения функции при любом	Умения доказывать свойства функций, исследовать расположение графиков в координатной
Умения и навыки	задачу; изображать графики основных элементарных функций, описывать свойства функций по графику; найти производные основных функций и вычислять простейшие интегралы, используя алгоритмы, по образцу или с помощью извне	способе задания функции; исследовать свойства функций элементарными средствами; использовать свойства функций для сравнения и оценки их значений; решать типовые и прикладные задачи в стандартных ситуациях; самостоятельно выбирать и использовать формулы, алгоритмы, частные и специальные приёмы решения; выражать в функциональной форме зависимости между величинами	плоскости в зависимости от значений параметров, входящих в формулу; решать типовые функциональные и прикладные задачи в нестандартных ситуациях, самостоятельно использовать обобщённые приёмы работы с функциями и их графиками; моделировать с помощью функций процессы и явления, составлять задачи

Рабочие программы [30] 5-9 классов основного общего образования указывают, что «в разделе «Функции» важной задачей является получение школьниками конкретных знаний о функциях как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов, для формирования у учащихся представлений о роли математики в развитии цивилизации. Изучение этого материала способствует освоению символическим и графическим языками, умению работать с таблицами».

Рабочие программы для 10-11 классов на базовом и углубленном уровнях включают раздел «Предел и непрерывность функции», который составляет базу изучения всего раздела математического анализа. Идеи предела и непрерывности находят применение в решении неравенств методом интервалов, в исследовании графиков функций на нахождение области определения и множества значений и др.

В примерной основной образовательной программе образовательного учреждения говорится о том, что «целью изучения функциональной линии являются следующие умения обучающихся:

1. «Понимать и использовать функциональные понятия и язык (термины, символические обозначения).

2. Строить графики элементарных функций. Исследовать свойства числовых функций на основе изучения поведения их графиков.

3. Понимать функцию как важнейшую математическую модель для описания процессов и явлений окружающего мира, применять функциональный язык для описания и исследования зависимостей между физическими величинами» [40].

Так же обучающиеся получать возможность научиться:

1. «Проводить исследования, вязанные с изучением свойств функций, в том числе с использованием компьютера.

2. На основе графиков изученных функций строить более сложные графики (кусочно-заданные, с «выколотыми точками» и т.п.).

3. Использовать функциональные представления и свойства функций для решения математических задач из различных разделов курса» [40, С. 91-92].

Таким образом, функциональная линия является одной из основных и традиционных линий школьного курса алгебры и начал математического анализа.

§2. Анализ изложения темы «Нахождение области определения и множества значений функций» в различных учебниках

В учебнике алгебры [15] под редакцией Макарычева Ю.Н. для 7 класса *областью определения функции*называют такую область, которая состоит из всех значений, принимаемых независимой переменной.

Рассматривается **пример**, выражающий функциональную зависимость: *площадь квадрата зависит от длины его стороны.*

Пусть сторона квадрата равна а см, а его площадь равна S см^2. Функциональную зависимость площади квадрата от его стороны можно задать формулой $S=a^2$.

Для каждого значения переменной а можно найти соответствующее ему значение переменной S.

Тогда *область определения функции* из этого примера состоит из множества положительных чисел ($a>0$).

«Если функция задана формулой и *область определения функции* не указывается, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл» [15, С. 60].

Далее обучающиеся знакомятся с понятием *прямой пропорциональности* и её графиком $y=kx$, где k – число не равное нулю, которое называют коэффициентом прямой пропорциональности, x – независимая переменная.

В качестве примера рассматривают функцию $y=0,5x$, выполняют построение графика данной функции. Выясняют, что *область определения функции*$y=0,5x$ – множество всех чисел.

Составляют таблицу соответственных значений переменных x и y, выполняют построение графика функции.

Изучая тему «Линейная функция и её график» знакомятся с определением линейной функции, как функции вида $y=kx+b$, где x – независимая переменная, ak и b – некоторые числа.

Обучающимся сообщается, «что прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. Действительно, при b=0 формула $y=kx+b$ принимает вид $y=kx$, а этой формулой, при $k\neq0$ задаётся прямая пропорциональность» [15, С. 75].

Задачи на нахождение области определения в данной теме обучающиеся не решают.

В параграфе «Одночлены» обучающиеся знакомятся с функциями вида $y=x^2$b$y=x^3$ и их графиками. Решают задачи на выявление принадлежности точки данному графику функции, по координатам данной точки строят графики данных функций, по данному значению аргумента находят значения функции и наоборот. Понятие области определения на данном этапе не возникает.

В учебниках [10] и [19] для 7 класса обучающиеся знакомятся с понятием функции, знакомятся с прямой пропорциональностью, линейной функцией, строят их графики, но понятия области определения функции автором не рассматривается.

В учебнике [16] и [5] для 8 класса, обучающих знакомят с ещё одним видом функциональной зависимости – обратная пропорциональность $y=\frac{k}{x}$, даётся определение обратной пропорциональности.

При этом оговаривают следующее, «областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ является множество всех чисел, отличных от нуля. Это следует из того, что выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$» [16, С. 44].

Далее, в параграфе «Арифметический квадратный корень» обучающиеся изучают функцию вида $y = \sqrt{x}$, рассматривают некоторые свойства данной функциональной зависимости, строят график.

«Так как выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл при $x \geq 0$, то областью определения функции $y = \sqrt{x}$ служит множество неотрицательных чисел» [16, С. 85].

Рассматривая в учебнике [32] главу первую «Простейшие функции. Квадратные корни», авторы знакомят обучающихся с понятием функции на примере зависимости объёма куба от длины его ребра. Приводится общее определение функции.

«Путь М есть некоторое множество чисел и пусть каждому числу x из М в силу некоторого (вполне определённого) закона приведено в соответствие единственное число y, тогда говорят, что y есть функция от x, определённая на множестве М, x называют независимой переменной или аргументом, а y – зависимой переменной или функцией от x, множество М – областью определения функции» [32, С. 23].

Например, функция, заданная формулой $y = \frac{1}{x^2}$, определена (задана) на множестве всех действительных чисел, кроме числа нуль; функция, заданная формулой $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^2}$, определена на множестве всех действительных чисел, кроме чисел 1и 2.

Например, для функции y=2x пишут: y(1)=2, y(2)=4, y(-3)=-6 или f(1)=2, f(2)=4, f(-2)=-6.

При этом говорят, например, что значение данной функции в точке 1 равно 2, или «игрек от 1 равен 2», или «эф от 1 равен 2» и т.д. [32, С. 24].

«Если для каждого x из области определения функции найти её значение, то все такие значения функции составят множество, которое называют *областью значений функции*» [32, С. 24].

Далее, изучая функцию y=x, автор учебника [32] указывает, что данная функция «определена для любых действительных x, т.е. *область определения* этой функции есть промежуток $(-\infty;\ +\infty)$. *Область значений* этой функции есть промежуток $(-\infty;\ +\infty)$» [32, С. 32].

Функция y=x^2 определена для любых действительных x, т.е. область определения этой функции есть промежуток $(-\infty;\ +\infty)$. Про область значений этой функции автор ничего не пишет. Только указывает, при рассмотрении свойств функции y=x^2, следующее: если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y > 0$.

Функция y=$\frac{1}{x}$ определена для любых действительных x за исключением x=0, т.е. область определения функции y=$\frac{1}{x}$ есть множество всех действительных чисел, кроме нуля. Про область значений данной функции автор так же не указывает, только отмечает следующее, рассматривая свойства: если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$; [32, С. 39-43].

Рассматривая прямую пропорциональность y=kx и линейную функцию y=kx+b, автор учебника [32] указывает, что областью определения данных видов функций является множество всех действительных чисел **R**.

Изучая функцию $y = |x|$ и её свойства, автор отмечает, что область определения – промежуток $(-\infty;\ +\infty)$, область значений - промежуток [0;+∞) [32, С. 146].

Так же автором рассматриваются, в качестве дополнительного материала, функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$, «область определения данных функций – множество всех действительных чисел R» [32].

При изучении функций $y = ax^2$ (при a> 0, при a$\neq 0$), $y = a(x - x_0)^2 + +y_0$, квадратичной функции y=ax^2+bx+c автор сообщает, что областью определения данных функций является множество всех действительных чисел R.

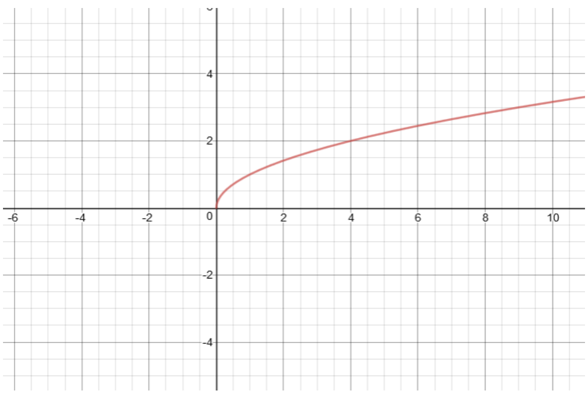
Далее автором учебника [32] рассматривается функциональная зависимость вида y=$\frac{k}{x}$, которую называют обратной пропорциональной зависимостью или коротко – обратной пропорциональностью, k – данное неравное нулю число, эта функция определена для всех действительных чисел x, кроме x=0 [32, С. 167].

В учебнике алгебры 8 класса [20] под редакцией Мордковича А.Г. с областью определения обучающиеся сталкиваются изучая функцию y= $\sqrt{x}$. Сначала автор предлагает построить график данной функции, потом, на основе данной геометрической модели начинает описывать свойства данной функциональной зависимости, таким образом заключается, что область определения функции – луч [0; +∞).

Далее автором сообщается следующее: «функция y=f(x), где f(x)= $\sqrt{x}$ принимает любые неотрицательные значения.

В самом деле, какое бы конкретное значение y≥ 0 ни задать, всегда найдется такое x, что выполняется равенство f(x)=y, т.е. $\sqrt{x}$= y; для этого достаточно положить $x=y^2$.

Множество всех значений функции называют обычно областью значений функции. Для функции y= $\sqrt{x}$ областью значений является луч [0; +∞) (Рис. 1)» [20, С. 61].

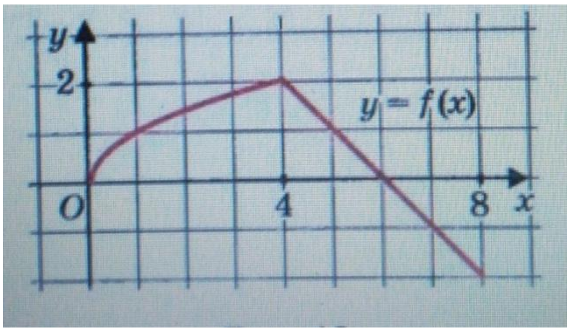


Так же автором учебника [20] вводится понятие «прочитать график», т.е. перечислить свойства функции, которые иллюстрирует построенный график. Обязательным пунктом данного перечисления (чтение графика) является нахождение области определения **Рис. 1** и области значений функции.

На рассмотрение учащимся предлагается следующий **пример:** построить и прочитать график функции y=f(x), где $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{если } 0 \le x \le 4; \\ 6 - x, \text{если } 4 < x < 8. \end{cases}$

В решении указывается (Рис. 2): область определения функции – отрезок [0;8], область значения функции – отрезок [-2;2] [20, С. 65-66].

В продолжение знакомства с функциями, учащиеся знакомятся с функциональной зависимостью $y=kx^2$, где k – действительное число, отличное от нуля [20], строят график, изучая свойства функции.



При k>0 автор указывает, «так как для любого значения x по формуле $y=kx^2$ можно вычислить соответствующее значение y, то функция определена в любой точке x (при любом значении аргумента x), короче это записывают так: область определения функции есть $(-\infty; +\infty)$, т.е. вся числовая прямая» [20, С. 88]. Область значений функции $y=kx^2$ (k>0) – луч [0; +∞).

У функции $y=kx^2$ (k<0) область определения $(-\infty; +\infty)$, область значения (-∞; 0]. **Рис. 2**

Рассматривается **пример:** дана функция y=f(x), где

$$f\ x = \begin{cases} -0{,}5x^2, \text{если} -4 \le \mathrm{x} \le 0; \\ \mathrm{x}+1, \text{если } 0 < \mathrm{x} \le 1; \\ 2\mathrm{x}^2, \text{если } 1 < \mathrm{x} \le 2. \end{cases}$$

Требуется с помощью графика перечислить свойства функции.

Решение следующее: сначала данную функцию разбивают на кусочки, строят три графика далее объединяют кусочки (Рис. 3-6) :

1. Область определения функции – [-4; 2].

2. Область значений функции состоит из отрезка [-8; 0] и полуинтервала (1; 8]. В подобных случая можно использовать символ ∪- знак объединения. Тогда можно сказать так: область значений функции - объединение двух числовых промежутков: [-8; 0] ∪(1; 8] [20, С. 93-96].

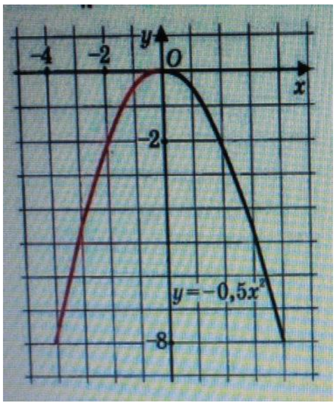


Рис. 3

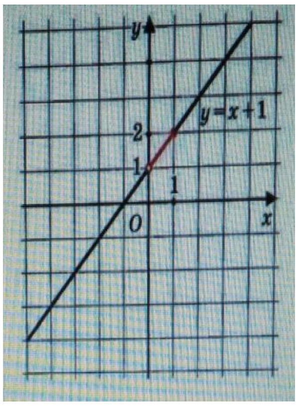


Рис. 4

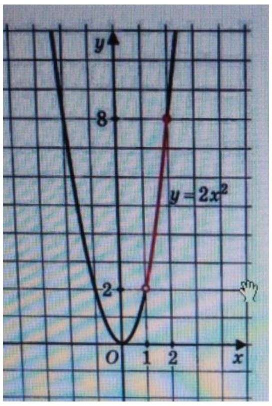


Рис. 5

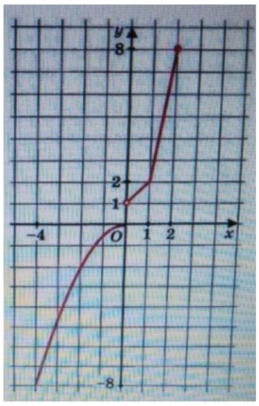


Рис. 6

На примере функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=\frac{2}{x}$ учащиеся знакомятся с гиперболой, строят графики данных функциональных зависимостей, так же сообщается, что общий вид гиперболы $y=\frac{k}{x}$, где k может принимать любые значения, кроме k=0.

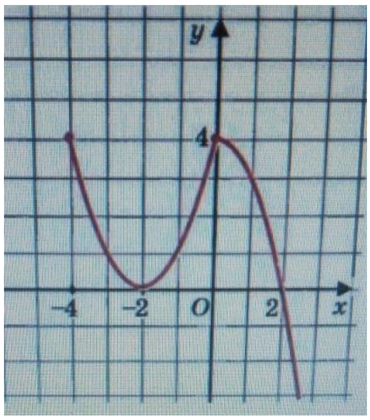
На этапе изучения свойств данных функций автор указывает (для k>0 и $k<0$), что область определения функции состоит из множества всех чисел, кроме x=0; область значений функции – объединение двух открытых лучей $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Так же автором учебника [20] рассматриваются различные варианты построения квадратичной функции, типа y=f(x+l), y=f(x)+m, y=f(x+l)+m, если известен график функции y=f(x).

Приводится следующий **пример:** построить и прочитать график функции y=f(x), где $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2, \text{если} -4\le x\le 0;\\ 4-x^2, \text{если } x>0.\end{cases}$.

В решении автором указывается, после построения графикаданной функции (Рис. 7), что область определения функции – луч [-4; +∞). Область значений функции- луч (-∞; 4].

Рассмотрим изложение темы нахождения области определения и множества значении функции в учебниках 9 класса. Если нахождение области определения и области значений



квадратичной функции, в учебниках под редакцией Мордковича А.Г., изучаютучащиеся

в 8 классе, то эту же тему в учебниках алгебры под

редакцией Макарычева Ю.Н. учащиеся проходят**Рис. 7**

в 9 классе. Так автором учебника сообщается, что «областью определения квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$является множество всех чисел» [17, С. 28].

При знакомстве учащихся со степенной функцией $y=x^n$ (x- независимая переменная, n- натуральное число), авторами учебников: [17] под редакцией Макарычева Ю.Н., [33] под редакцией Никольского С.М, сообщается, что «областью определения степенной функции с натуральным показателем является множество всех действительных чисел».

Область значений степенной функции зависит от показателя n, т.е. если n – чётное число, то область значений степенной функции есть множество неотрицательных чисел. например: $y=x^2$, $y=x^4$; если n – нечётное число, то областью значений является множество всех действительных чисел.

Например:$y=x^3$, $y=x^5$.

Рассматривая функцию $y=\overline{x}$ из учебника [33], можно отметить, что данная функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$, следовательно областью значений является промежуток $[0; +\infty)$.

В учебнике [6] под редакцией Дорофеева Г.В. учащиеся, на примере квадратичной функции $y=x^2-2x-3$, после построения графика, определяют следующее: «все значения которые принимает функция, образуют область значений функции. Из сказанного ясно, что областью значений рассмотренной функции является промежуток $[-4; +\infty]$.

Областью определения любой квадратичной функции служит множество всех действительных чисел» [6, С. 71].

Рассматривая частный случай квадратичной функции $y=ax^2$ учебника [15] и её свойства, автор указывает, что область определения данного вида функции (a>0) [0; +∞). На промежутке (-∞; 0] функция убывает, на промежутке [0; +∞) функция возрастает. Так же автор учебника предлагает учащимся самостоятельно сформулировать свойства данной функции при a<0.

Рассматривая главу 3 «Числовые функции», учебника [21] алгебры для 9 класса, автор сообщает, что запись вида «функция y=f(x) с областью определения X» в дальнейшем будет записываться следующим образом: y=f(x), x∊X. Для области определения функции y=f(x), x∊X принято использовать обозначение D(f).

«Множество всех значений функции y=f(x), x∊X называют областью значений функции и обозначают E(f)» [21, С.88].

Например: для функции y= $\overline{x}$, x≥0 имеем: D(f)= [0;+∞); E(f)= [0;+∞) (Рис. 8);для функции y= $\overline{x}$, x∊ [0; 4], имеем E(f)= [0; 2] (Рис. 9);

для функции y=f(x), имеем D(f)= (-∞; +∞); E(f)= [0;+∞) (Рис 10)

[21, С. 87-89].

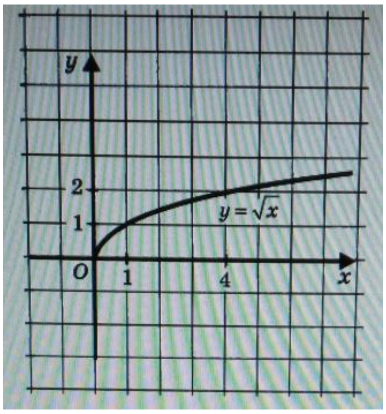


Рис. 8

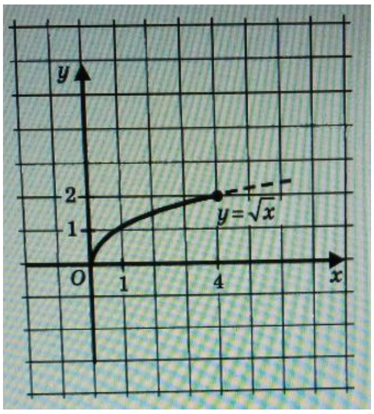


Рис. 9

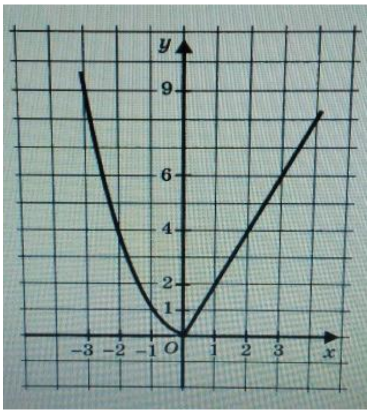


Рис. 10

Рассмотрим изложение темы «Область определения и множества значений функции» в учебниках алгебры и начала математического анализа за курс 10 класса.

В учебнике [12] под редакцией Колягина Ю.М., в первой главе повторения алгебры 7-9 классов, встречается понятие области определения и множества значений функции в рассмотрении таких тем как «Линейная функция» и «Квадратичная функция».

В учебнике [31], [34] под редакцией Муравина Г. К. и Никольского С.М. соответственно изучается понятие функции. Даётся определение и форма записи функции: y=f(x), переменную x называют аргументом функции y.

Областью определения функции называют множество допустимых значений аргумента и обозначают D(f) или D(y).

«Множество, которое составляет все значения функции, называют областью значений функции и обозначают E(f) или E(y)» [31, С. 9].

Например: найти область определения функции $y = \frac{4}{x}$.

Решение: на аргумент x формула $y = \frac{4}{x}$ накладывает единственное ограничение: x≠0, поэтому областью определения данной функции является объединение двух числовых промежутков (интервалов): $D\ y\ = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, [31, С. 9].

Помимо этого автором учебника сообщается, в примечании № 1, что тот способ задания функции, который дан в примере ($y = \frac{4}{x}$), называют аналитическим. Множество значений аргумента, при которых имеет смысл выражение, задающее функцию, называют *естественной областью определения функции.* Другая ситуация с областью определения возникает, если, например, буквами x и y обозначить длины сторон в сантиметрах прямоугольника, имеющего площадь 4 см^2. Тогда в силу положительности длин область определения функции $y = \frac{4}{x}$ представит собой числовой интервал $(0; +\infty)$ [31, С. 10].

В учебниках [31] под редакцией МуравинаГ.К. [34], под редакцией Никольского С.М. [12], под редакцией Колягина Ю.М., методика рассмотрения понятия области определения и множеств значений степенной функции $y=x^n$ аналогична методике, рассмотренной нами в учебниках [17] и [33] алгебры за курс 9 класса.

Рассматривая свойства, которыми обладает показательная функция $y=a^x$,где a – заданное число, такое, что $a > 0$, $a \neq 1$, автор учебника [12] сообщает: «Область определения показательной функции – множество R всех действительных чисел. Множество значений показательной функции – множество всех положительных чисел» [12, С. 210-211]; автор учебника [31] сообщает: "Данная функция определена и непрерывна на множестве всех действительных чисел. Область значений функции – множество всех положительных чисел» [31, С. 74].

Пример. Найти область определения функции $y = \sqrt[4]{0{,}25^{x-1} - 9 \cdot 0{,}5^{x} + 2}$. Решение: выражение, стоящее под знаком корня чётной степени, должно быть неотрицательно: $0{,}25^{x-1} - 9 \cdot 0{,}5^{x} + 2 \geq 0$.

Введём вспомогательную переменную t: $t=0{,}5^x$ и найдём положительные решения неравенства $0{,}25^{-1} \cdot t^2 - 9t + 2 \geq 0$:

$\begin{cases} 4t^2 - 9t + 2 \geq 0, \\ t > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} t \leq \frac{1}{4} \text{ или } t \geq 2, \\ t > 0, \end{cases}$ $0 < t \leq \frac{1}{4}$ или $t \geq 2$ (Рис. 11).

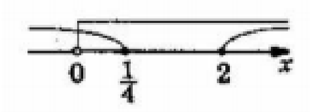


Рис. 11

Вернёмся к переменной x. $0 < 0{,}5^x \leq \frac{1}{4}$ или $0{,}5^x \geq 2$.

Поскольку $0 < 0{,}5^x$ при всех значениях x, имеем:

$0.5^x \leq 0{,}5^2$ или $0{,}5^x \geq 0{,}5^{-1}$.

Показательная функция с основанием 0,5 является убывающей, поэтому большему её значению соответствует меньшее значение аргумента, значит: $x \geq 2$ или $x \leq -1$.

Ответ: D(y)= $-\infty; -1 \cup \{2; +\infty)$ [31, С. 75-76].

На примере показательной функции $y=2^x$, автор учебника [26] указывает на то, что областью определения показательной функции является множество Q рациональных чисел и вводится соответствующая запись

D(f) = (-∞; +∞).

Областью значений показательной функции является множество всех положительных чисел и вводится соответствующая запись E(f) = (0; +∞). «Строгие доказательства перечисленных свойств функции $y=2^x$ приводят в курсе высшей математики» [26].

Изучая тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x$(Рис. 12, Рис.13) и их свойства автор учебника [24] сообщает, что область определения – множество Rдействительных чисел; областьзначений данных функций – отрезок [-1; 1]. В дальнейшем записывают

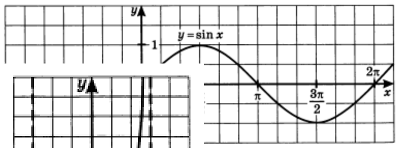
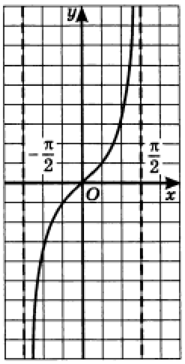


Рис. 12



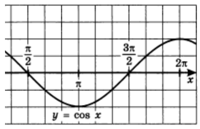
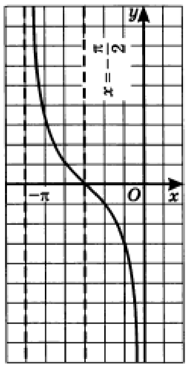


Рис. 13

D(f) = (-∞; $+\infty$) и E(f) = [-1; 1].

Изучая тригонометрические функции $y = tg\,x$ (Рис. 14)$, y = \mathrm{ctg}\,x$(Рис.15) и их свойства автор учебника [24] сообщает, что областьопределения–множество Rдействительных чиселза исключением числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \epsilon Z$; область значений данных функций интервал E(f) =(-∞;+∞). **Рис. 14** **Рис. 15**



Для обратных тригонометрических функций справедливы следующие утверждения:

для функции y= arcsinxD(f) = [-1; 1], E(f) = [- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$];

для функции y= arccosxD(f) = [-1; 1], E(f) = [0; π];

для функции y= arctgxD(f) = (-∞; +∞), E(f) = [- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$];

для функции y= arcctgxD(f) = (-∞; +∞) , E(f) = [0; π] [23].

Задачный материал по теме нахождения области определения и множества значений функций в учебниках 9-11 классов Г.В. Дорофеева[6], А.Н. Колмогорова [9], Ю.М. Колягина [11], [12], [13], Ю.Н. Макарычева [17], А.Г. Мордковича [22], [24], [26], Г.К. Муравина [31], С.М. Никольского [34], [35]представлен в таблицах 6-8 соответственно.

Таблица 6

Задачный материал в учебниках 9 класса

Авторы	Г. В.	Ю.М.	Ю.Н.	А.Г. Мордкович и

Типы задач	Дорофеев и др. [6]	Колягин и др. [11]	Макарычев и др. [12]	др. [22]
На нахождение области определения функции	213, 327, 339	98, 99, 101, 148, 156	9, 11, 14, 15, 17, 19, 20. 42, 200, 213, 262	8.1 – 8.18; 8.25 – 8.32; 13.19; 13.20
На нахождение множества значений функции	271, 275, 327	-	15, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 93, 94, 95, 213, 244	10.16; 10.17; 10.26; 13.2 – 13.4; 13.12 – 13.14; 13.19; 13.20

Таблица 7

Задачный материал в учебниках 10 класса

Авторы / Типы задач	Ю.М. Колягин и др. [12]	А.Г. Мордкович и др. [24]	Г.К. Муравин и др. [31]	С.М. Никольский и др. [34]
На нахождение области определения функции	120, 183, 211, 355, 361, 365, 392, 396, 423, 963, 969, 999, 1007; 1009, 1028	1.4 – 1.6; 1.7 – 1.13; 1.18; 1.19; 34.14 – 34.18; 39.28; 42.18; 42.23	10, 11, 46, 57. 160, 172	3.2; 3.8; 3.87; 3.95; 5.28; 5.45
На нахождение множества значений функции	133, 184, 211, 964, 968. 971, 1010, 1026	1.7 – 1.13; 1.18; 1.19; 15.9; 16.11; 34.19 – 34.20; 39.40-39.41; 42.24	-	3.11; 3.91

Таблица 8

Задачный материал в учебниках 11 класса

Авторы / Типы задач	Ю.М. Колягин и др. [13]	А.Г. Мордкович и др. [26]	С.М. Никольский и др. [35]	А.Н. Колмогоров и др. [9]
На нахождение области определения функции	1, 3, 4, 5, 6, 101, 108, 122	5.10 – 5.18; 15.7 – 15.9	1.5; 1.8; 1.9; 1.55 – 1.57	43, 44, 45, 46, 53, 54, 101, 110, 499. 500, 505,
На нахождение множества значений функции	2, 7, 8, 9, 109, 131	5.22 – 5.25; 15.24 – 15.28	1.10; 1.55 – 1.57	45, 46, 54, 101, 111, 454,

Итак, анализ изложения темы в учебниках алгебры 7-11 классов показал, что теоретического и задачного материала на нахождение области определения и множества значений функций для базового уровня знаний и умений достаточно.

Однако, для подготовки обучающихся к итоговой аттестации по математике на профильном (углубленном) уровне необходимо дополнить систему упражнений в школьных учебниках задачи повышенного уровня сложности.

Решение таких задач может быть осуществлено в рамках дополнительных занятий, либо элективного курса.

Нами разработан такой элективный курс [42], программа которого направлена на систематизацию и обобщение знаний и умений старшеклассников по теме «Логарифмические функции». Для её реализации достаточно знаний и умений по математике, полученных на базовом уровне.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1. Несмотря на то, что решение логарифмических уравнений и неравенств, а также изучение основных свойств логарифмической функции –традиционный материал базового уровня школьного курса математики, на решение задач повышенного уровня сложности времени на уроках не остаётся.

2.Задачи на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций в явной или неявной форме входят в содержание заданий профильного уровня ЕГЭ по математике.

3. Задачи на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций представляют затруднения для многих обучающихся 11 классов.

Цели изучения предлагаемого элективного курса: формирование у обучающихся универсальных учебных действий и обобщенных приемов и методов решения задач повышенной сложности на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций.

Программа элективного курса рассчитана на 17 ч. и включает следующие темы:

1. Вводное занятие. Определение логарифмической функции. Историческая справка о происхождении логарифмической функции. Основные свойства и график логарифмической функции - 2 ч.

2. Область определения и множества значений логарифмической функции (определение, типовые примеры) - 2 ч.

3. Задачи на нахождение области определения логарифмической функции
(с модулем, параметрами, от различных функций) -5 ч.

4. Задачи на нахождение множества значений логарифмической функции (на основе использования свойств непрерывности и монотонности функций; использования производной; оценки наибольшего и наименьшего значений функции; графического метода и др.) -5 ч.

5. Контрольная итоговая работа -2 ч.

6. Защита проектов -1 ч.

Выводы по первой главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по первой главе:

В результате анализа методической литературы выявили, что «изучение понятия функции – это не только одна из важнейших целей преподавания математики в школе, но и средство которое даёт возможность связать общей идеей разные курсы математики, установить связь с другими предметами (физикой, химией)» [18].

Целью изучения функциональной линии являются следующие умения обучающихся:

– «понимать и использовать функциональные понятия и язык (термины, символические обозначения);

– строить графики элементарных функций, исследовать свойства числовых функций на основе изучения поведения их графиков;

– понимать функцию, как важнейшую математическую модель для описания процессов и явлений окружающего мира, применять функциональный язык для описания и исследования зависимостей между физическими величинами» [40].

Так же проанализированы действующие учебники по алгебре и началам математического анализа основной школы, выявлено: что изучение понятия «область определения» вводится с 7 класса при изучении функциональной зависимости.

Областью определения называют такую область, которая состоит из всех значений, принимаемых независимой переменной.

Понятие «множества значений» функции вводится в курсе алгебры 8 класса при изучении линейной функции.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВА ЗАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

§ 3. Разработка системы задач по теме «Нахождение области определения логарифмических функций»

Рассмотрим более детально следующее свойство функции – её область определения.

«При отыскании области определения функции, часто случается так, что она совпадает с областью определения самого выражения, задающего функцию. Говорят, что это естественная область определения. Но зачастую бывают случаи, когда условия задачи накладывают особые ограничения: например: естественная область определения функции -10 до 10, но аргумент этой функции – скорость. Понятно, что скорость есть величина положительная и отрицательной быть не может. Тогда естественная область определения такой функции сужается до промежутка от 0 до 10» [38].

Так же при нахождении области определения функции надо помнить о следующих ограничениях:

1. Если функция содержит корень чётной степени, то подкоренное выражение должно быть не отрицательным или хотя бы равняться нулю;

2. Знаменатель дроби не может быть равным нулю т.к. на нуль делить нельзя;

3. Выражение, стоящее под знаком логарифма не может быть отрицательным или равняться нулю;

4. Выражение, стоящее под знаком арксинуса или арккосинуса не может превышать 1 по модулю.

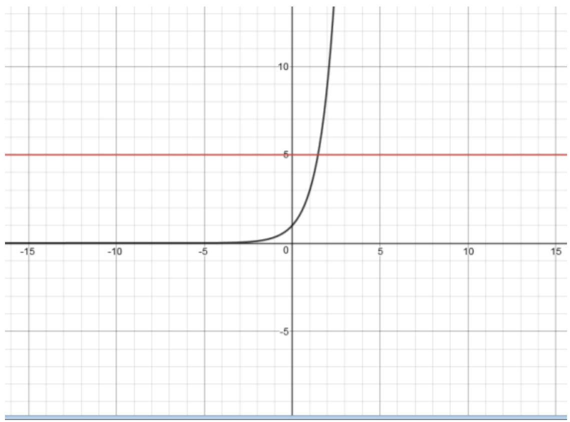
Так же нужно помнить, что область определения всегда нужно искать для исходной функции, до каких либо преобразований.

Рассмотрим методику нахождения области определения *на примере логарифмической функции.* Вспомним, что называют логарифмической функцией.

Рассмотрим пример, при решении уравнения $3^{x} = \frac{1}{27}^{\frac{3}{5}}$мы заменяем $\frac{1}{27}^{\frac{3}{5}}$ степенью $3^{\frac{-9}{5}}$ и из равенства степеней с одинаковыми основаниями $3^{x} = 3^{\frac{-9}{5}}$делаем вывод о равенстве показателей: x=- $\frac{9}{5}$.

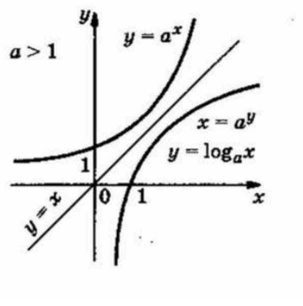
Рассмотрим уравнение вида $3^x=5$, на вид более простое, нежели предыдущее уравнение, но для решения второго уравнения мы понимаем, что имеющихся знаний у нас не достаточно. Дело в том, что число 5 нельзя представить в виде с степени с основанием 3 и рациональным показателем.

С другой стороны, график непрерывной функции $y=3^x$ пересекается с прямой y=5 (Рис. 16), а это значит, что уравнение $3^x=5$ имеет корень.



Как записать корень уравнения $3^x=5$

Ответ на этот вопрос мы сформулируем в виде **определения:**«Показатель степени, в которую нужно возвести число a (a$> 0, a \neq 0$), **Рис. 16**
чтобы получить число b, называется логарифмом b по основанию a и обозначается $\log_a b$.» [31, С. 82].



Согласно данному определению, корень уравнения $3^x=5$ имеет вид: x= $\log_3 5$.

«Равенства: $a^{x} = b$и$x = \log_a b$, в которых a$> 0, a \neq 1$, $b > 0$, x – любое число, подставив второе равенство вместо x, в первое, получим основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b}$=b. **Рис. 17**

Выразим x из равенства $y = \log_a x$, получим $x=a^y$. последнее равенство задаёт функцию $x=a^y$, график которой симметричен графику показательной функции $y=a^x$ относительной прямой y=x» (Рис 17), (Рис. 18) [31, С. 82-83].

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y=a^x$ являются взаимно обратными.

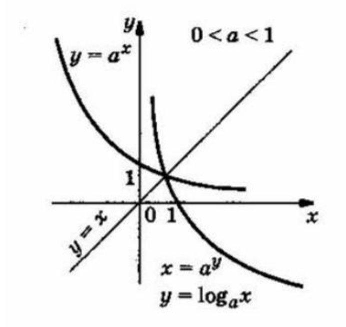


Рис. 18

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

1. «Функция $y = \log_a x$ непрерывна и определена на множестве положительных чисел.

2. Область значений функции $y = \log_a x$ – множество действительных чисел.

3. При $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ является убывающей; при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является возрастающей.

4. График функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0).

5. Ось ординат – вертикальная асимптота графика функции $y = \log_a x$» [31, С. 83].

Условимся область определения функции y=f(x) обозначать так D(y), а область значений функции так E(y).

Для логарифмической функции $y = \log_a x$, с основанием a областью определения является любое действительное положительное числоR_+ , то есть $D(y) = (0; +\infty)$.

Система задач на тему «Нахождение области определения логарифмической функции»

Тема «Логарифмическая функция» является одной из традиционных тем школьного курса математики. При изучении этой темы основное внимание обращается на решение логарифмических уравнений и неравенств.

Как показывает опыт работы в старших классах, большинство учащихся испытывают затруднения при решении задач на нахождение множества значений логарифмических функций.

В настоящее время задачи на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций в явной или неявной форме входят в содержание заданий профильного уровня ЕГЭ по математике.

Поэтому мы считаем актуальной разработку системы упражнений на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций.

Ниже представлена система задач *базового уровня* сложности (таблица 9), а так же решения Приложение 1.

В систему включены задания на отработку умения находить область определения логарифмической функции с разными основаниями.

Обучающиеся должны четко понимать, что логарифмическая функция независимо от числового основания (натуральное, целое, отличное от нуля и 1 число, рациональное или иррациональное) определена только для положительных значений аргумента.

Предлагаемая система упражнений может быть использована на уроках математики, при организации самостоятельных работ и выполнена учащимися в качестве повторения и подготовки к базовому уровню ЕГЭ по математике.

Таблица 9

Система задач на тему «Нахождение области определения логарифмической функции»

1	$y = \log_{\frac{1}{3}}(5 - x)$	20	$y = \log_{0,2} \frac{x}{3x - 1}$	39	$y = \log_2(3\kappa^2 - 7\kappa + 4)$
2	$y = \log_{\frac{1}{2}}(3 - x)$	21	$y = \log_{0,6} \frac{x}{3x + 1}$	40	$y = \log_{\overline{3}}(5\kappa^2 - 8\kappa + 3)$
3	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 4)$	22	$y = \log_{11} \frac{3 - x}{4x}$	41	$y = \log_4(-3\kappa^2 + 13\kappa - -14)$
4	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 5)$	23	$y = \log_9 \frac{5 + x}{4x}$	42	$y = \log_{\overline{5}}(2d^2 - 9d + +10)$
5	$y = \log_{0,3}(7 - x)$	24	$y = \log_6(x^2 - 9)$	43	$y = \log_3(\log_{0,2} x)$
6	$y = \log_{0,3}(x + 8)$	25	$y = \log_7(x^2 - 0{,}49)$	44	$y = \log_4(\log_{0,3} x)$
7	$y = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2)$	26	$y = \log_6(16 - x^2)$	45	$y = \log_3 \sin x$
8	$y = \log_{0,4}(-x^2)$	27	$y = \log_{\overline{8}}(x^2 - 0{,}25)$	46	$y = \log_{0,4} \cos x$
9	$y = \log_{\pi}(10 + 5x)$	28	$y = \log_{0,6}(x^2 - 36)$	47	$y = \log_{\overline{7}}(5s^2 - 6s + 1)$
10	$y = \log_{\pi}(8x + 9)$	29	$y = \log_4(0{,}81 - x^2)$	48	$y = \log_{\pi}(4d^2 + d - 33)$
11	$y = \log_{\pi}(4x - 1)$	30	$y = \log_{\overline{5}}(x^2 - 0{,}01)$	49	$y = \log_{\frac{1}{2}}(\kappa^2 - 10\kappa - 24)$
12	$y = \log_{0,4}(-2x^3)$	31	$y = \log_9(121 - x^2)$	50	$y = \log_{\frac{1}{3}}(\kappa^2 + \kappa - 90)$
13	$y = \log_{0,5}(4x^5)$	32	$y = \log_{0,7}(x^2 + 9)$	51	$y = \log_2(4^x - 1)$
14	$y = \log_4 \frac{1}{1 - 4x}$	33	$y = \log_{0,4} \frac{x^2 - 16}{x + 3}$	52	$y = \log_5(1 - 5^x)$
15	$y = \log_5 \frac{2}{4x + 1}$	34	$y = \log_{\frac{1}{7}} \frac{x - 5}{x^2 + 5}$	53	$y = \log_7(1{,}2^x - 1)$
16	$y = \log_{0,5} \frac{2 + 5x}{6 - 3x}$	35	$y = \log_2(x^2 - 4x)$	54	$y = \log_{10}(1 - 0{,}7^x)$
17	$y = \log_8 \frac{2 + 7x}{8 - 5x}$	36	$y = \log_{\overline{2}}(x^2 + 0{,}5x)$	55	$y = \log_{5,1}(3^{5x^2 - 11x + 3} - 3)$
18	$y = \log_4 \frac{3x + 7}{x - 2}$	37	$y = \log_3(1{,}2x - x^2)$	56	$y = \log_{7,1}(3^{x^2 - 3x + 3} - 3)$
19	$y = \log_{\overline{7}} \frac{2x + 11}{x - 7}$	38	$y = \log_{\pi}(x^2 - 4x)$	57	$y = \log_{0,5}(\frac{3^{x^2 - 3x + 3} - 3}{x})$

Для обучающихся математического профиля и для тех, кто выбрал в качестве ЕГЭ профильный уровень, предлагаем систему задач *повышенного уровня* сложности (таблица 10).

Таблица 10

Система задач на тему «Нахождение области определения логарифмической функции»

58	$y = \sqrt{\log_3(5x^2 - 6x + 1)}$	79	$y = \log_2 \lvert 5 - x\rvert - \log_2 \lvert x^2 - 4\rvert$
59	$y = \sqrt{\log_4(5x^2 - 8x + 3)}$	80	$y = \log_{0,5} \sqrt{x+1} + \log_{0,6}(1 - 125x^3)$
60	$y = \sqrt{\log_{10} x + \log_{10}(x+3)}$	81	$y = \sqrt{\log_2 sin\pi x} + \sqrt{\log_{0,5} secx}$
61	$y = \sqrt{\log_{10}(x-2) + \log_{10}(x+2)}$	82	$y = \sqrt{\log_2 cos\pi x} + \sqrt{\log_{0,5} cosecx}$
62	$y = \sqrt{(9 - x^2)\log_2(x+7)}$	83	$y = \log_x(4x - 2)$
63	$y = \sqrt{(x^2 - 4)\log_{\frac{1}{2}}(5 - x)}$	84	$y = \log_x(5 - 10x)$
64	$y = \log_{10}(\frac{\log_6 x^2}{\log_{10}(x+4)})$	85	$y = \log_{x-1}(x+2)$
65	$y = \log_8(\frac{\log_4(x+6)}{\log_6(x^5)})$	86	$y = \log_{x+1}(0{,}7x - 14)$
66	$y = \lvert \log_4 x \rvert$	87	$y = \log_{(x+3)} \lvert x - 5\rvert$
67	$y = \log_4 \lvert x\rvert$	88	$y = \log_{(3x-5)} \lvert x + 12\rvert$
68	$y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\log_7(2 - x)}$	89	$y = \log_{\lvert x+1\rvert}(3 - x)$
69	$y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\log_8(x - 3)}$	90	$y = \log_{\lvert 3-x\rvert}(7 - 2x)$
70	$y = \log_4 \lvert 5 - x\rvert$	91	$y = \log_3\ x + 3\ \ + 2\log_3\ 1 - x^3$
71	$y = \lvert 1 - \log_3 x\rvert$	92	$y = \log_5\ 4 - x\ \ + 3\log_5\ 25 - x^2$
72	$y = \log_{0,2} \lvert 6x - x^2\rvert$	93	$y = 4\log_2\ 64 - x^2\ \ + \log_2\ 9 - x$
73	$y = \log_8(3.5x^2 - 4\ x\ \ - 5)$	94	y=$\log_{0,3}(4^{2x-1} - 2^{3x})$
74	$y = \log_{0,6}\ x\ \ - \log_{0,6}(9 - x^2)$	95	y=$\log_{0,7}(25^{6x-3} - 5^{10x})$
75	$y = \log_5\ x\ \ + \log_5(36 - x^2)$	96	y=$\log_{1,3}(3^{2x} - 27^{3x-7})$
76	$y = \log_4\ \sqrt{x^2 - 49} + \log_3 \lvert x - 9\rvert$	97	y=$\frac{\lg\ x+3\ -\ \sqrt{x^2-x-6}}{25-x^2} \cdot arccos\frac{1}{7}\ \ x - 1$
77	$y = \log_5\ x - 6\ \ - \log_4\ \sqrt{x^3 - 8}$	98	y=$\frac{\lg\ x+4\ +\ \sqrt{4x^2+x-33}}{36-x^2} \cdot arccos\frac{1}{8}\ \ x - 1$
78	$y = \log_2\ x + 5\ \ + 4\log_3(8 - x^3)$	99	y=$\frac{\log_3(x+6) - \sqrt{x^2-10x-24}}{49-x^2} \cdot arcsin\frac{1}{14}\ \ x - 1$

В данной системе собраны разнообразные задачи, включающие в себя «сложную» логарифмическую функцию, содержащую модуль, как в основании логарифма, так и в аргументе.

§ 4. Разработка системы задач по теме «Нахождение множества значений логарифмических функций»

Многие задачи приводят нас к поиску множества значений функции на некотором отрезке или на всей области определения. К таким задачам можно отнести различные оценки выражений, решение неравенств.

Множеством значений функции y = f(x) на интервале *X* называют множество всех значений функции, которые она принимает при переборе всех $x \in X$.

Областью значений функции y = f(x) называется множество всех значений функции, которые она принимает при переборе всех x из области определения $x \in D(f)$.

Область значений функции обозначают как *E(f)*.

Область значений функции и множество значений функции - это не одно и то же. Эти понятия будем считать эквивалентными, если интервал *X* при нахождении множества значений функции *y = f(x)* совпадает с областью определения функции.

Рассмотрим более детально следующее свойство функции – множество её значений, на примере логарифмической функции.

Для логарифмической функции $y = \log_a x$**,** с основанием a(где a > 0, a ≠ 1) областью значений является множество**R** всех действительных чисел.

Это следует из того, что для любого действительного числа y существует такое положительное число x, что $y = \log_a x$, т.е. $y = \log_a x$ имеет корень. Его корень равен $x=a^y$. Итак, область значений логарифмической функции E(y)=$(-\infty; +\infty)$.

Разрабатываемая нами система задач по теме включает задачи базового и углубленного уровней, а также задачи на различные способы нахождения множества значений функций:

– последовательное нахождение значений сложных аргументов функции;

– метод оценок/границ;

– использование свойств непрерывности и монотонности функции;

– использование производной;

– использование наибольшего и наименьшего значений функции;

- графический метод;

– метод введения параметра;

– метод обратной функции;

– комбинированные методы.

Метод оценки, а так же использование свойств непрерывности и монотонности функции

Метод решения уравнений (неравенств), при котором сравниваются множества значений функций, стоящих в левой и правой частях уравнения (неравенства), называют методом оценки.

Свойство монотонности сложной функции.

Докажем, что если функция $t=g(x)$ – непрерывна и убывает на некотором промежутке J, а функция $y=f(t)$ также непрерывна и убывает на некотором промежутке J_1, причём из того, что $x\in J$, следует, что $t\in J_1$, то сложная функция $y=f(g(x))$ есть функция возрастающая на J.

Доказательство. Так как функция $t=g(x)$ и $y=f(t)$ - убывающие, то каждое своё значение они принимают ровно один раз и большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. А тогда для любых x_1 и x_2 из J и для $t_1=g(x_1)$ и $t_2=g(x_2)$ из J_1 имеем:

для $g(x)$: $(x_1<x_2\to g(x_1)>g(x_2)) \leftrightarrow (x_1<x_2 \to t_1>t_2)$,

для $f(t)$: $t_1>t_2 \to f(t_1)<f(t_2)$.

Видим, что для любых x_1 и x_2 из J ($x_1<x_2 \to f(t_1) < f(t_2)$ $\leftrightarrow U$ ($x_1<x_2 \to f(g(x_1)) > f(g(x_2))$)).

То есть функция возрастает на J, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать, что

1. Композиция двух возрастающих функций – функция возрастающая;

2. Композиция двух функций, различных монотонностей – убывающая функция.

Пример 1.Найдите множество значений функции$y = \log_5 (\text{arcctg}x)$ на J, если а) J= $[-1; 4]$; б) на всей области определения.

Решение.

Вначале исследуем данную функцию на монотонность.

Функция t= arcctgx непрерывная и убывающая на R и множество её значений $(0; \pi)$. Функция $y = \log_5 t$ определена на промежутке $(0; \pi)$, непрерывна и возрастает на нём. И она, как композиция двух непрерывных функций, будет непрерывна на R.

а) так как функция непрерывна на всей числовой оси, то она непрерывна и на любой её части, в частности, на данной отрезке. А тогда она на этом отрезке имеет наименьшее и наибольшее значения и принимает все значения между ними: $f(-1) = \log_5 (\text{arcctg}(-1)) = \log_5 \frac{3\pi}{4}$, $f(4) = \log_5 (\text{arcctg}4)$.

Определим, какое из полученных значений больше, для этого воспользуемся таблицами Брадиса.

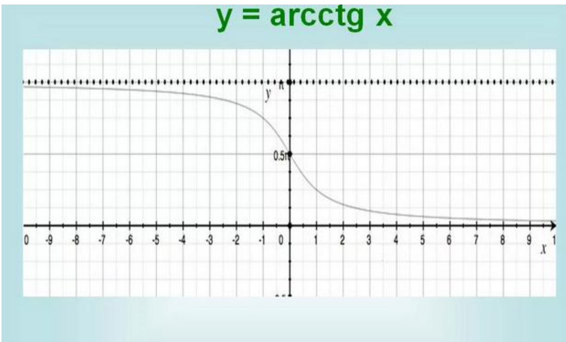
Следовательно $E(y) = [\log_5 (\text{arcctg}4); \log_5 \frac{3\pi}{4}]$.

б) $\lim_{x\to-\infty}(\log_5 arcctgx)) = \lim_{t\to\pi}(\log_5 t) = \log_5 \pi$,(Рис. 19),

$$\lim_{x\to+\infty}(\log_5 arcctgx)) = \lim_{t\to 0}(\log_5 t) = -\infty.$$

Следовательно $E(y) = (-\infty; \log_5 \pi)$ на всей области определения.

Пример 2. Найдите множество значений функции $y = \log_4(\sin x)$ на промежутке $[\frac{1}{2}; 1]$.



Решение. Вначале исследуем данную функцию на монотонность. Функция t= sinx непрерывная и возрастающая на $[\frac{1}{2}; 1]$ и множество её значений (-1;1). Функция $y = \log_5 t$**Рис. 19**
определена на промежутке (-1;1), непрерывна и возрастает на нём. И она, как композиция двух непрерывных функций, будет непрерывна на (-1;1). Композиция двух возрастающих функций – функция возрастающая.

Так как функция непрерывна на всей числовой оси, то она непрерывна и на любой её части, в частности, на данной отрезке. А тогда она на этом отрезке имеет наименьшее и наибольшее значения и принимает все значения между ними: $f(\frac{1}{2}) = \log_4 (\sin (\frac{1}{2})) = \log_5 \frac{\pi}{6}$, $f(1) = \log_4 (\sin 1) = \log_5 \frac{\pi}{2}$.

Определим, какое из полученных значений больше, для этого воспользуемся табличными значениями тригонометрических функций.

Следовательно $E(y) = [\log_5 \frac{\pi}{6}; \log_5 \frac{\pi}{2}]$.

Пример 3. Найдите множество значений функции $y = \log_3(\cos x)$ на промежутке [0; -1].

Решение.

Вначале исследуем данную функцию на монотонность. Функция t= cosx непрерывная и убывающая на [0; -1] и множество её значений (-1;1). Функция $y = \log_3 t$ определена на промежутке (-1;1), непрерывна и возрастает на нём. И она, как композиция двух непрерывных функций, будет непрерывна на (-1;1). Композиция двух функций, различных монотонностей – убывающая функция.

Так как функция непрерывна на всей числовой оси, то она непрерывна и на любой её части, в частности, на данной отрезке. А тогда она на этом отрезке имеет наименьшее и наибольшее значения и принимает все значения между ними: $f(0) = \log_3 (\cos (0)) = \log_3 \frac{\pi}{2}$, $f(-1) = \log_3 (\cos (-1)) = \log_3 \pi$.

Определим, какое из полученных значений больше, для этого воспользуемся табличными значениями тригонометрических функций.

Следовательно, E(y) = $[\log_3 \frac{\pi}{2}; \log_3 \pi]$.

Пример 4. Найдите множество значений функции $y = \log_{3,5}(\cos x)$ на промежутке [-1; 1].

Решение.

Вначале исследуем данную функцию на монотонность.

Функция t= cosx непрерывная и возрастающая на [-1; 1] и множество её значений (-1;1). Функция $y = \log_{3,5} t$ определена на промежутке (-1;1), непрерывна и возрастает на нём. И она, как композиция двух непрерывных функций, будет непрерывна на (-1;1). Композиция двух возрастающих функций – функция возрастающая.

Так как функция непрерывна на всей числовой оси, то она непрерывна и на любой её части, в частности, на данной отрезке. А тогда она на этом отрезке имеет наименьшее и наибольшее значения и принимает все значения между ними: $f(-1) = \log_{3,5} (\cos(-1)) = \log_{3,5} \pi$, $f(1) = \log_{3,5} (\cos 1) = \log_{3,5} 2\pi$.

Определим, какое из полученных значений больше, для этого воспользуемся табличными значениями тригонометрических функций.

Следовательно, E(y) = $[\log_{3,5} \pi; \log_{3,5} 2\pi]$.

Метод последовательного нахождения значений

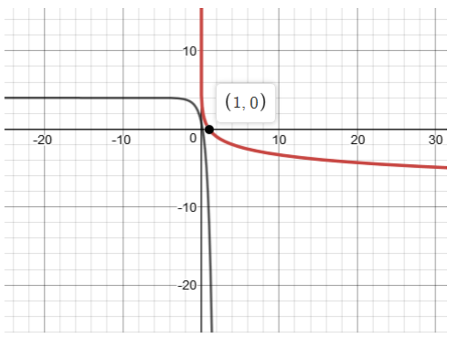
сложных аргументов функций

Пример 5. Найдите область значений логарифмической функции

$y = \log_{0,5}(4 – 2\cdot 3^x – 9^x)$.

Решение.

Решим этот пример методом последовательного нахождения значений сложных аргументов функции. Выделив полный квадрат под логарифмом, преобразуем функцию $y = \log_{0,5}(5 – (1 + 2\cdot 3^x – 3^{2x})) = \log_{0,5}(5 – (3^x + 1)^2)$ и последовательно найдём множества значений её сложных аргументов:



$E(3^x) = (0;+\infty)$, $E(3^x + 1) = (1;+\infty)$, $E(-(3^x + 1)^2 = (-\infty;-1)$, $E(5 – (3^x+1)^2) = (-\infty;4)$.

Обозначим $t = 5 – (3^x+1)^2$, где $-\infty \le t \le 4$*(Ри* $y = 5 - (3^x + 1)^2$ *и* самым задача сводится к **Рис. 20**

нахождению множества значений функции $y = \log_{0,5}t$ на луче *(-∞;4)*. Так как функция $y = \log_{0,5}t$ определена лишь при $t>0$, то её множество значений на луче (-∞;4) совпадает с множеством значений функции на интервале (0;4), $y = \log_{0,5}(x)$ представляющем собойпересечение луча (-∞;4) с областью определения (0;+∞) логарифмической функции. На интервале (0;4) эта функция непрерывна и убывает. При $t > 0$ она стремится к +∞, а при $t = 4$ принимает значение -2, поэтому*E(y)* = (-2, +∞).

Пример 6.Найдите область значений логарифмической функции

$y = \log_2(4^x + 2^{x+1} - 24)$.

Решение.

Решим этот пример методом последовательного нахождения значений сложных аргументов функции.

Выделив полный квадрат под логарифмом, преобразуем функцию

$4^x + 2^{x+1} - 24 = 2^{2x} + 2\cdot 2^x - 24 = (2^x + 1)^2 - 25$.

$y = \log_2(4^x + 2^{x+1} - 24) = \log_2(2^x + 1)^2 - 25$.

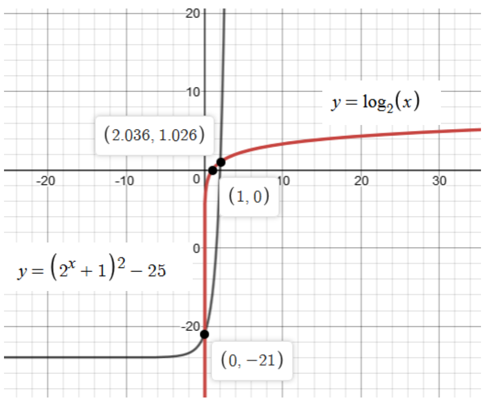
И последовательно найдём множества значений её сложных аргументов:

$E(2^x) = (0;+\infty)$, $E(2^x + 1) = (1;+\infty)$, $E((2^x + 1)^2) = (1;+\infty;)$, $E((2^x+1)^2-25) =$

$= (-24;+-\infty)$.

Обозначим $t = (2^x + 1)^2 - 25$, где $-24 \le t \le +\infty$.

Тем самым задача сводится к нахождению множества значений функции $y = \log_2 t$ на луче (-24;+-∞).



Так как функция $y = \log_2 t$ определена лишь при $t>0$, возрастает на промежутке (0;+∞), то её множество значений на луче(-

24;+-∞) совпадает с множеством значений функции на луче (0;+∞), представляющем
собой пересечение интервала (-∞;+∞) с**Рис. 21**
 областью определения (0;+∞) логарифмической функции. На луче (0;+∞) эта функция непрерывна и возрастает. При *t* > 0 она стремится к +∞, поэтому *E(y)* = (0, +∞) (Рис.21).

Пример 7. $y = \log_{0,5} \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$.

Решение. Найдём область значений функции z(x)= $\frac{1+x^2}{1+x+x^2} = \frac{1}{1+\frac{x}{x^2+1}}$.

Рассмотрим $\frac{x}{x^2+1}$ и обратную величину $\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{x} + x.\frac{1}{x} + x \geq 2$при $x > 0$ и $\frac{1}{x} + x \leq 2$ при x< 0. Значит:

$$-2 \leq \frac{x^2+1}{x} \leq 2;$$

$\frac{-1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$;

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1}{1+\frac{x}{x^2+1}} \leq 2;$$

$$\frac{2}{3} \leq z(x) \leq 2.$$

Тогда область значений функции $y = \log_{0,5} \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$ имеет вид

E(y)= [$\log_{0,5} \frac{2}{3};\ \log_{0,5} 2$]= [$\log_2 \frac{3}{2};\ -1$].

Пример 8. $y = \log_{0,8} \frac{4+x^4}{4+x+x^4}$.

Решение.

Найдём область значений функции z(x)= $\frac{4+x^4}{4+x+x^4}$= $\frac{1}{1+\frac{x}{x^4+4}}$. Рассмотрим $\frac{x}{x^4+4}$ и обратную величину $\frac{x^4+4}{x} = \frac{4}{x} + x^3.\frac{4}{x} + x^3 \geq 5$при $x > 0$ и $\frac{4}{x} + x^3 \leq -5$ при x< 0.

Значит:

$-5 \leq \frac{x^4+4}{x} \leq 5;$

$-\frac{1}{5} \leq \frac{x}{x^4+4} \leq \frac{1}{5};$

$\frac{4}{5} \leq 1 + \frac{x}{x^4+4} \leq \frac{6}{5};$

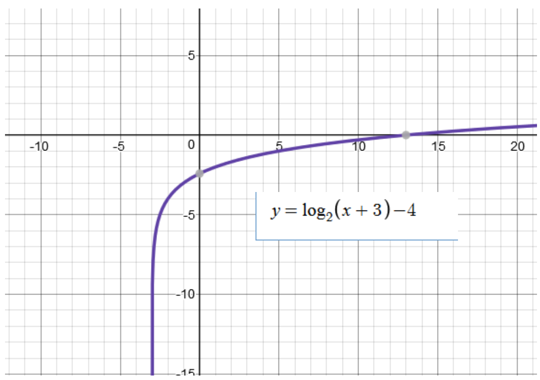
$\frac{5}{6} \leq \frac{1}{1+\frac{x}{x^4+4}} \leq \frac{5}{4};$

Тогда область значений функции $y = \log_{0,8}\frac{4+x^4}{4+x+x^4}$ имеет вид

E(y) = $\log_{0,8}\frac{5}{6};\ \log_{0,8}\frac{5}{4}\ = [\log_{0,8}\frac{5}{6};\ -1].$

Графический метод

Пример 9. Найти множества значений E(f) логарифмической функции, используя графический метод.



а) $y = \log_2\ x+3\ \ -4;$

б) $y = \log_3(-x);$

в) $y = -2\log_2\frac{x}{3};$

г) $y = \log_c c;$

д) $y = 3^{\log_3 x};$

е) $y = x^{\log_x 3};$ **Рис. 22**

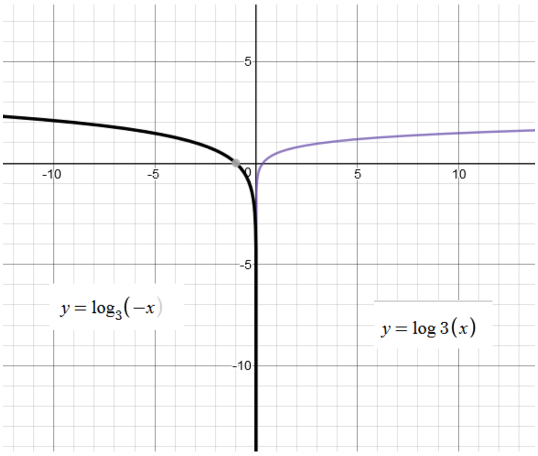
ж) $y = \log_{0,2}\ x-3\ \ +2.$

Решение.

В этом примере нужно выполнит различные преобразования графика функции $y = \log_2 x$.

а) Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке (-3; -4) (пунктирные прямые x= -3 и y= -4. «Привяжем» график функции $y = \log_2 x$ к новой системе координат – это и будет требуемый график (Рис. 22).E(f) $\in \ -\infty; +\infty$.

б) Напомним, что график функции y=f(-x) симметричен графику функции y= f (x) относительно оси y. Учтя это, строим график функции $y = \log_3 x$ (Рис. 23), а затем подвергнув его преобразованию симметрии относительно оси y, получаем график функции $y = \log_3(-x)$.

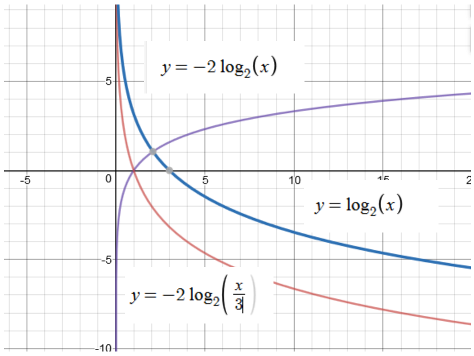


E(f) $\in \ -\infty; +\infty$.

в) Построение графика функции $y = -2\log_2\frac{x}{3}$ осуществим в несколько шагов. **Рис.23**

1) Построим график функции $y = \log_2 x$.

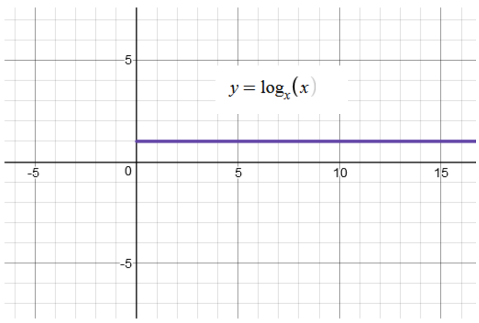
2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 2 и симметрию «растянутого» графика относительно оси x. Получим график функции $y = -2\log_2 x$.



3) Осуществим сжатие построенного графика к оси y с коэффициентом $\frac{1}{3}$ (т.е. растяжение графика от оси y с коэффициентом 3. Получим график (Рис. 24) функции $y = -2\log_2\frac{x}{3}$. E(f) $\in \ -\infty; +\infty$.

г) Мы знаем, что $\log_c c$=1, но при этом **Рис. 24**

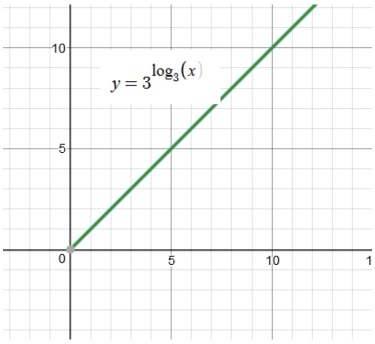
следует учесть, что с- основание логарифма , а потому $c > 0$ и $c \neq 1$. Значит, р условиями речь идёт о построении графика функции y=1,



область определения которой задаётся условиями $c > 0$ и $c \neq 1$ (Рис. 25). $E(f) = 1$.

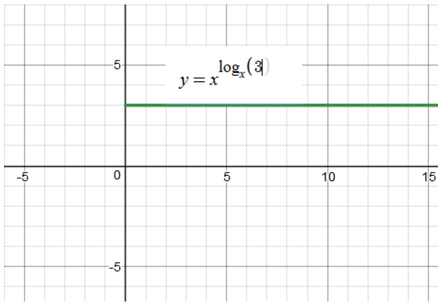
д) Мы знаем, что $3^{\log_3 x} = x$, но при**Рис. 25**

этом следует учесть, что x – логарифмируемое число, а потому x>0. Значит, речь идёт о построении графика функции y = x, область определения которой задаётся условием x>0. (Рис. 26). $E(f) \in (0;\ +\infty)$.



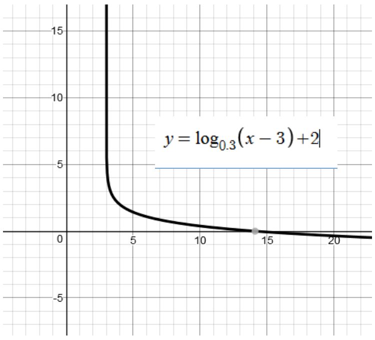
е) Мы знаем, что $x^{\log_x 3} = 3$, но при этом следует учесть, что x – основание логарифма, а потому $x > 0$ и $x \neq 1$. Значит, речь идёт о построении графика функции y = 3, область определения которой задаётся условиями $x > 0$ и $x \neq 1$ (Рис. 27).$E(f) = 3$.

ж) Перейдём к вспомогательной системе**Рис. 26**



координат с началом в точке (3; 2) (пунктирные прямые x= 3 и y= 2. «Привяжем» график функции $y = \log_{0,2} x$ к новой системе координат это и будет требуемый график.   (Рис. 28). $E(f) \in -\infty; +\infty$.

Рис. 27



Задачи углубленного уровня

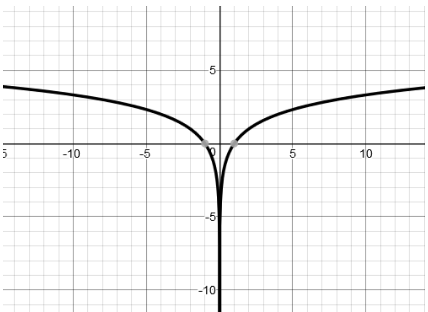
Пример 10. Найти множества значений E(f) логарифмической функции, используя графический метод.

а) $y = \log_3 |x|$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(1 + x)$;

в) $y = |\log_{0,5}\ 2 + x\ |$;**Рис. 28**

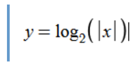
г) $y = |\log_4\ x - 1\ |$;



Решение. а) Заметим, что замена x на |x| делает функцию чётной:

f(|-x|)=f(|x|). Поэтому

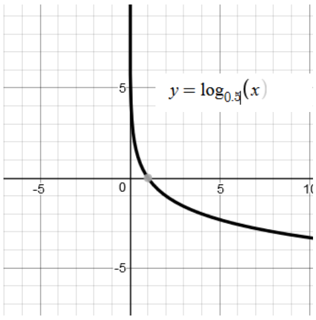
график данной функции получим из графика функции $y = \log_3(x)$, отразив его симметрично относительно координатной оси Оу. (Рис. 29).

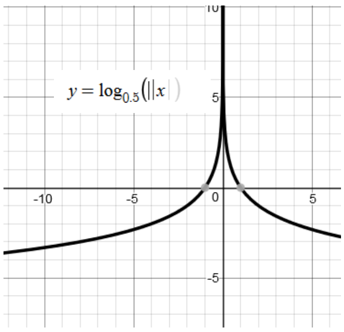


$E(f) \in \ -\infty;\ +\infty\ $.

б) Построим график данной функции, **Рис. 29**

последовательно строя графики функций $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\ y = \log_{\frac{1}{2}} \ x\ $, $y = \log_{\frac{1}{2}}(1 + \ x\ )$(Рис. 30, Рис. 31, Рис. 32).





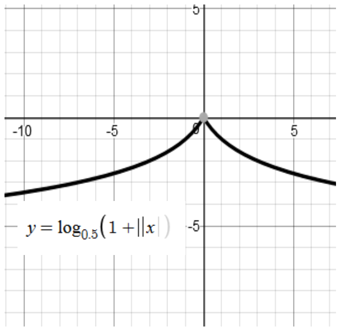
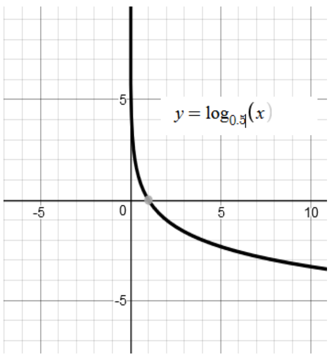
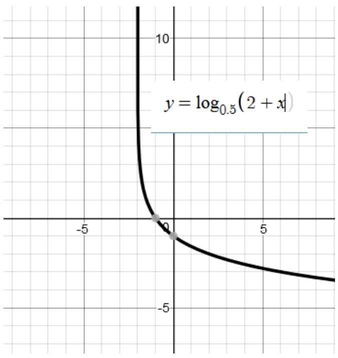


Рис. 30 **Рис. 31** **Рис. 32**

$E(f) \in (-\infty; 0]$.

в) Построим график данной функции, последовательно строя графики функций $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\ y = \log_{\frac{1}{2}}(2 + x)$, $y = |\log_{\frac{1}{2}}\ 2 + x\ |$ (Рис. 33, Рис. 34, Рис. 35).





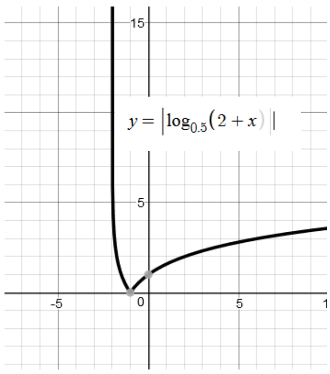


Рис. 33 **Рис. 34** **Рис. 35**

$E(f) \in [0; +\infty)$.

г) Построим график данной функции, последовательно строя графики функций $y = \log_4 x$, $y = \log_4 |x|$, $y = \log_4\ x - 1$, $y = |\log_4\ x - 1\ |$(Рис. 36, Рис. 37, Рис. 38, Рис. 39).

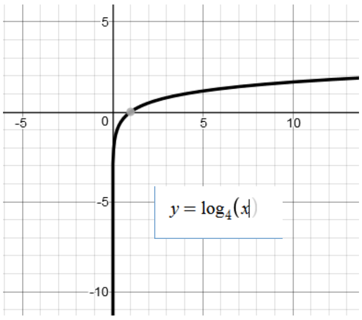


Рис. 36

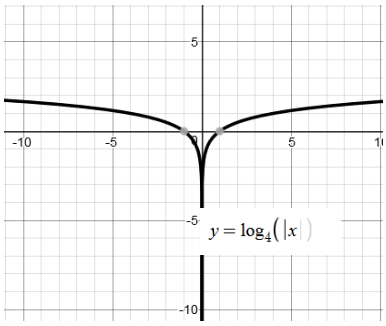


Рис. 37

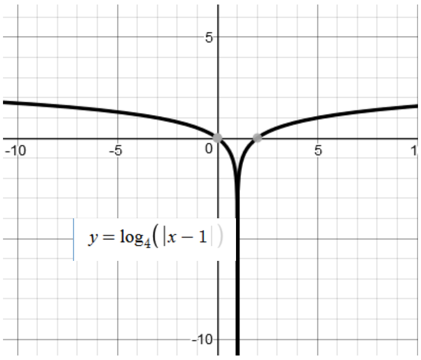


Рис. 38

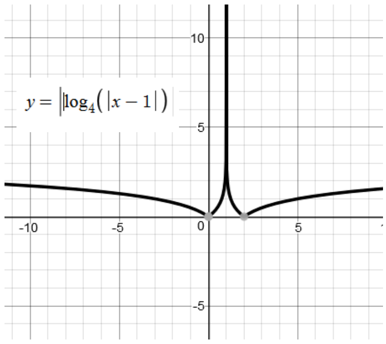


Рис. 39

$E(f) \in [0; +\infty)$.

Пример 11. Найти множества значений $E(f)$ логарифмической функции, используя графический метод.

а) $f(x) = \log_3\ x + 4\ + \log_3(8 - x)$;

Решение. ОДЗ: $\begin{matrix} x + 4 > 0 \\ 8 - x > 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} x > -4 \\ x < 8 \end{matrix} \to x \in\ -4; 8\ .$

Используя свойство логарифма имеем: $f(x) = \log_3\ x + 4\ + \log_3(8 - x) = \log_3\ \ x + 4\ \cdot\ 8 - x\ \ = \log_3\ -x^2 + 4x + 32$.У$=-x^2 + 4x + 32$ – квадратичная функция, графиком которой является парабола, ветви которой направлены вниз об этом указывает отрицательный коэффициент перед x^2 (Рис. 41). Построим график функции $y = -x^2 + 4x + 32$ (Рис. 40).

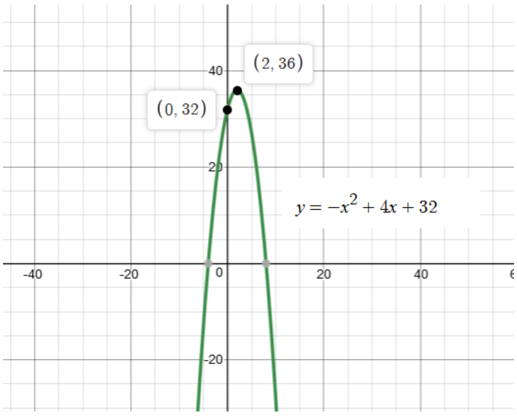


Рис. 40

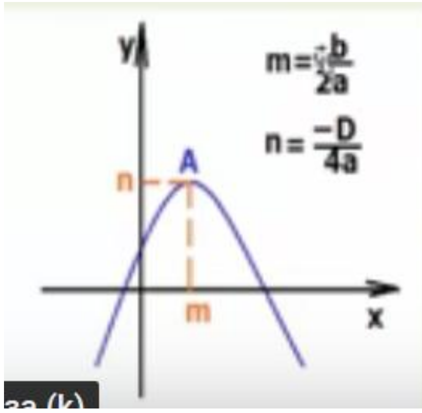


Рис. 41

В точке А, парабола имеет наибольшее значение, наименьшего значения парабола не имеет. Логарифмическая функция, так же будет иметь наибольшее значение в точке А. Найдём это значение.

$-x^2 + 4x + 32 = 0, D = 144,$ отсюда $n = \frac{-144}{4\cdot\ -1} = 36.$ $y_{наиб.} = 36, f\ \ x\ \ = \log_3 36 = \ \log_3 6^2 = 2\log_3 6\,.$

$E(f(x)) = (-\infty; 2\log_3 6].$

б) $y = \log_{0,8}\ \ 7 - 2x^2\ \ .$

Решение.

$f(x)$=$7 - 2x^2$ – квадратичная функция, графиком которой является парабола, ветви которой направлены вниз об этом указывает отрицательный коэффициент перед x^2 . Построим график функции $f(x) = 7 - 2x^2$. (Рис. 42).

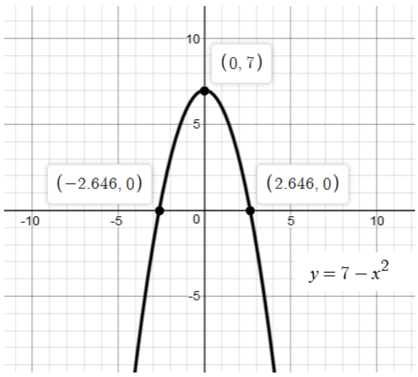


Рис. 42

$$-2x^2 + 0\cdot x + 7 = 0, D = -4\cdot\ \ -2\ \ \cdot 7 = 56, n = \frac{-D}{4a} = \frac{-\ \ \overline{56}}{4\cdot\ \ -2} = \frac{\overline{14}}{4}.$$

$n = \frac{\overline{14}}{4}$ – ордината вершины параболы. Это наибольшее значение данной квадратичной функции, наименьшего значения квадратичная функция не имеет. Данные значения совпадают со значениями функции

$f(x) = \log_{0,8}\ 7 - 2x^2\ .y_{наиб} = \frac{\overline{14}}{4}, f\ \ x\ \ =$ $\log_{0,8}\frac{\overline{14}}{4}. E\ \ f\ \ x\ \ \ = (-\infty;\ \log_{0,8}\frac{\overline{14}}{4}]$.

в) $y = \log_{3,5}(x^3 + 1)$.

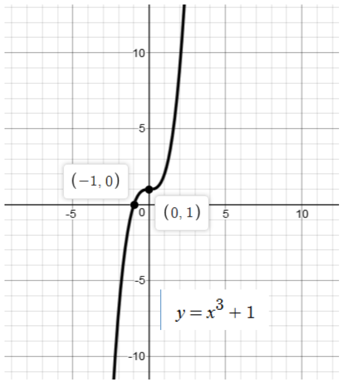


Рис. 43

Решение. $x^3 + 1 = 0$ – не имеет вершин, всюду возрастает, не имеет разрывов. Область значений функции у= $x^3 + 1$ совпадает с областью значений функции $y = \log_{3,5}(x^3 + 1)$. (Рис. 43).

Следовательно $E\ \ y\ \ = (-\infty; +\infty)$.

г) $f\ \ x\ \ = \log_6\ x^2 + 3x + 7\ $.

Решение.

$$x^2 + 3x + 7 = 0, D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -19, n = \frac{-D}{4 \cdot a} = \frac{-\ -19}{4 \cdot 1} = \frac{19}{4} = 4{,}75.$$

Графиком функции У=$x^2 + 3x + 7$ – является парабола, ветви которой направлены вверх. В вершине парабола достигает наименьшее значение, ордината которой $n = 4,75$. Наибольшего значения парабола не имеет. Наименьшее значение параболы совпадает с наименьшим значением логарифмической функции $f\ \ x\ \ = \log_6\ x^2 + 3x + 7\ $. (Рис. 44).

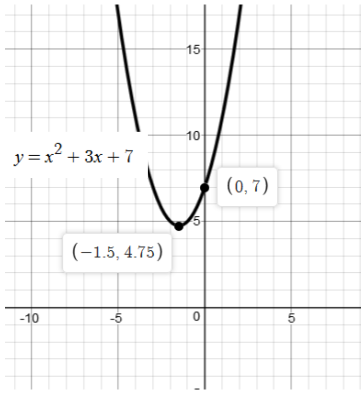


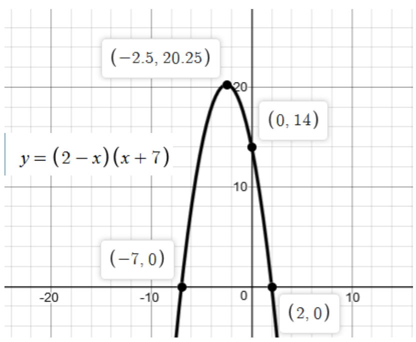
Рис.44

$y_{наим} = 4{,}75. f_{наим} = \log_6 4{,}75. E\ \ f\ \ x\ \ \ = [\log_6 4{,}75;\ +\infty)$.

д) $f\ \ x\ \ = \log_3\ \ 2 - x\ \ \ x + 7\ \ $.

Решение.Преобразуем подлогарифмическое выражение $2 - x\ \ \ x + 7\ \ = -x^2 - 5x + 14. -x^2 - 5x + 14 = 0, D = 81, n = \frac{-D}{4 \cdot a} = \frac{-81}{4 \cdot\ -1} = \frac{81}{4}$.

Графиком функции У=$-x^2 - 5x + 14$ – является парабола, ветви которой направлены вниз. В вершине парабола достигает наибольшее



значение, ордината которой $n = \frac{81}{4}$. Наименьшего значения парабола не имеет. Наибольшее значение параболы совпадает с наибольшим значением

Рис. 45

логарифмической функции $f(x) = \log_3((2-x)(x+7))$.(Рис. 45).

$$у_{наиб} = \frac{81}{4}.\, f_{наиб} = \log_6 \frac{81}{4} = \log_3 \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 2\log_3\frac{9}{2}.\, E(f(x)) = \left(-\infty;\ 2\log_3\frac{9}{2}\right].$$

§ 5. Результаты педагогического эксперимента

Экспериментальная работа по теме исследования была проведена на базе МБУ «Школа№ 79» г.о. Тольятти, в период прохождения преддипломной практики. Она включала в себя констатирующий и поисковый этапы эксперимента.

В эксперименте участвовало 29 учеников 10 класса. Ученики учатся по учебному пособию А.Г. Мордковича.

Цель констатирующего эксперимента – это выявить у учащихся уровень умения решать задачи по теме «Область определения и множества значений логарифмической функции».

Для этого была составлена контрольная работа, в двух вариантах, которая была предложена учащимся, где представлены следующие *типы задач:*

-на нахождение области определения логарифмической функции (задачи базового и профильного уровней);

-на нахождение множества значений логарифмической функции (графическим методом; задания базового и профильного уровней).

Ниже представлены варианты контрольной работы.

1вариант

Задание 1. Найдите область определения функции:

а)$y = \log_{\pi}(21 + 5x)$; б) $y = \log_4 \frac{1}{1-3x}$; в)$y = \log_8 \frac{2-5x}{8+4x}$; г) $y = \log_6(x^2 - 0,16)$; д); $y = \log_{0,4}(\frac{x^2-16}{x+7})$; е) $y = \log_3(\log_{0,2} x)$.; ж) $y=\log_{0,5}(\frac{3^{x^2-3x+3}-3}{x})$.

Задание 2.Найти множества значений E(f) логарифмической функции $f(x) = \log_3\ x + 4\ + \log_3(8 - x)$, используя графический метод.

Задание 3. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{(9 - x^2)\log_2(x + 7)}$; б) $y = \log_4 |x|$.

В таблице 11 приведены результаты контрольной работы.

2вариант

Задание 1.Найдите область определения функции:

а) $y = \log_{0,5}(-8x^3 + 1)$; б)$y = \log_7 \frac{2}{4x+1}$; в) $y = \log_9 \frac{5-x}{7x^2}$; г) $y = \log_{0,7}(x^2 + 10)$; д) $y = \log_2(3\kappa^2 - 4\kappa + 4)$; е) $y=\log_{0,5}(\frac{3^{5x^2-6x+1}-3}{x})$; ж) $y = \log_4(\log_{0,1} x)$.

Задание 2. Найти множества значений E(f) логарифмической функции $f(x) = \log_3\ -x - 3\ + \log_3(x + 2)$, используя графический метод.

Задание 3. Найдите область определения функции: а) $y = \sqrt{\log_{10} x + \log_{10}(x + 4)}$; б) $y = |\log_4 x|$.

Таблица11

Результаты контрольной работы

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили не верно	Не приступили к заданию
1	86% (25)	10% (3)	4% (1)
2	69% (20)	21% (6)	10% (3)
3	66% (19)	17% (5)	17% (5)

По таблице видно, что затруднения у учащихся связаны с заданиями на нахождение множества значений логарифмической функции графическим методом, а так же на нахождение области определения логарифмической функции повышенного уровня сложности (в задании нужно применить знания, находясь в нестандартной ситуации).

Так же следует отметить, что задание на нахождение области определения логарифмической функции умеют решать достаточно высокий процент учащихся;

задание на нахождение множества значений умеют решать – 69%;

задание на нахождение области определения логарифмической функции (повышенный уровень сложности) – 66%.

В результате были выявлены следующие виды ошибок у учащихся таблица12.

В. А. Гусев предлагает принять расчёт коэффициента усвоения учебного материала, для того, чтобы глубже оценить знания и умения учащихся.

Если правильный ответ на вопрос оценить в 1 балл, а неправильный – 0, то коэффициент усвоения учебного материала (К) считается по формуле:

$$K = \frac{\text{Суммаверныхответов}}{4 \ \text{Общеечислответов}}.$$

«При К, равном от 1,00 до 0,90 (или от 100% до 90% правильных ответов), - оценка – «5»; при К от 0,80 до 0,70 (или от 80% до 70%), - оценка – «4»; при К от 0,60 до 0,50 (или от 60% до 50 %), - оценка – «3»; при К ниже 0,05 (50%), - оценка «2» [3, С. 30].

Таблица12

Виды ошибок

Задание 1		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно решено неравенство
7	3	3
Задание 2		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно построен график функции
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно построен график функции

2	7	4
Задание 3		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно решено неравенство
3	5	5

В таблице 13 представлены полученные результаты.

Таблица 13

Результаты учащихся

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	10% (3)
«4»	17% (5)
«3»	32% (9)
«2»	41% (12)

Таким образом, можно сделать вывод о том, большинство учащихся не умеют решать задачи на нахождение области определения логарифмической функции углубленного уровня сложности.

Большие проблемы у учащихся с задачами на нахождение множества значений логарифмической функции с использованием графического метода решения.

Предлагаемая нами система задач как раз и ориентирована на формирование у старшеклассников умений находить область определения и множество значений логарифмических функций разными методами.

Выводы по второй главе

Сформулируем основные выводы и результаты, полученные по второй главе.

1.Выявлено, что при обучении учащихся решению задач по теме «Область определения и множества значений логарифмической функции» следует:

-уделять больше внимания формированию практических навыков;

-уделять внимание на формирование определения логарифмической функции, умение выполнять построение графиков логарифмических функций, знание свойств логарифмов;

-проводить больше уроков, где учащиеся самостоятельно будут решать задачи по теме «Область определения и множества значений логарифмической функции».

2.Разработана система задач по теме «Область определения логарифмической функции».

3. Разработана система задач по теме «Множества значений логарифмической функции».

4. Проведён констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента, результаты которого свидетельствуют о низком уровне умений старшеклассников находить множество значений логарифмических функций.

5. Для повышения качества математической подготовки обучающихся следует дополнить систему упражнений школьных учебников алгебры в 10-11 классах дополнительными задачами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведённого исследования:

1.В результате анализа методической литературы выявили, что «изучение понятия функции это не только одна из важнейших целей преподавания математики в школе, но и средство которое даёт возможность связать общей идеей разные курсы математики, установить связь с другими предметами» [18].

2.Выявлены особенности обучения учащихся решению задач на нахождение области определения функции. Определено, что при нахождении области определения функции надо помнить о следующих ограничениях: «если функция содержит корень чётной степени, то подкоренное выражение должно быть не отрицательным или хотя бы равняться нулю; знаменатель дроби не может быть равным нулю так как на нуль делить нельзя; выражение, стоящее под знаком логарифма не может быть отрицательным или равняться нулю; выражение, стоящее под знаком арксинуса или арккосинуса не может превышать 1 по модулю.

Так же нужно помнить, что область определения всегда нужно искать для исходной функции, до каких либо преобразований» [38].

3. Выявлены особенности обучения учащихся решению задач на нахождение множества значений функции. Определено, что «множеством значений функции y=f(x) на интервале X называют множество всех значений функции, которые она принимает при переборе всех x ϵ X.

Разрабатываемая нами система задач по теме включает задачи базового и углубленного уровней, а также задачи на различные «способы нахождения множества значений функций:

– последовательное нахождение значений сложных аргументов функции;

– метод оценок/границ;

– использование свойств непрерывности и монотонности функции;

- графический метод» [44].

4.Проведён констатирующий и поисковый этапы эксперимента, который выявил недостаточный уровень умения решать задачи по теме «Нахождение области определения и множества значений логарифмической функции».

5. Апробированы приведённые системы задач в процессе поискового этапа педагогического эксперимента.

Всё это даёт основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гомонов, С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения: 10-11 кл. учебное пособие / С.А. Гомонов. – 2-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2006. – 254 с.

2. Горлач, Б.А. Математический анализ: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2013. – 608 с.: ил. – «Учебники для вузов. Специальная литература).

3. Гусев, В.А. Магистерская диссертация по методике преподавания математики: Методические рекомендации. – М.: Прометей, 1996. – С.30.

4. Дворянинов С. Как находить множество значений функции. 10-11 классы //Математика. Изд-во «Первое сентября».-2005.-№13(579).

5. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.].- 3-е изд.- М.: Просвещение, 2016.- 320 с.

6. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]; под ред. Г.В. Дорофеева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 5-е изд.- М.: Просвещение, 2010.- 304 с.: ил. – (Академический школьный учебник).

7. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие. – 8-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 464 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

8. Иванова, Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов/ Под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр.и доп. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. 355 с.

9. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1990. – 320 с.: ил.

10. Колягин, Ю.М. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Е.Н. Фёдорова, М.И. Шабунин].- М.: Просвещение, 2012.- 319 с.

11. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Е.Н. Фёдорова, М.И. Шабунин].- М.: Просвещение, 2014.- 304с.

12. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Е.Н. Фёдорова, М.И. Шабунин]; под ред. А.Б. Жижченко.- 4-е изд.- М.: Просвещение, 2011.- 368с.

13. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Е.Н. Фёдорова, М.И. Шабунин]; под ред. А.Б. Жижченко.- 2-е изд.- М.: Просвещение, 2010.- 336с.

14. Крайнева, Л.Б. Тестовые материалы для оценки качества обучения. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс. Учебное пособие / Л.Б. Крайнева; под общей редакцией А.О. Татура; Московский центр качества образования. – Москва: «Интеллект- центр», 2013. – 128 с.

15. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И.Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского.- М.: Просвещение, 2013.- 256с.

16. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И.Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского.- М.: Просвещение, 2013.- 287с.

17. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И.Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – 21-е изд.-М.: Просвещение, 2014.- 271с.

18. Методические рекомендации по изучению функциональной линии в курсе алгебры 7-9 классов.- [Электронный ресурс].- Режим доступа: https://revolution.allbest.ru/mathematics/00637675_0.html .- Последнее обновление 25.08.2018.

19. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мордкович.- 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013.- 175 с.

20. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович.- 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010.- 215 с.

21. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. П.В. Семёнов.- 12-е изд. стер.- М.: Мнемозина, 2010.- 224 с.

22. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина и др.]; под ред. А.Г. Мордковича.- 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010.- 223 с.

23. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2011. – 424 с.

24. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений

(профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 8-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2011. – 343 с.

25. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2012. – 287 с.

26. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2012. – 264 с.: ил.

27. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.: ил.

28. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 239 с.: ил.

29. Муравина, О.В. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Рабочие программы. – М.: Дрофа, 2014.

30. Муравина, О.В. Рабочие программы. [Электронный ресурс].- Режим дустunion: http://muravin2007.narod.ru/p0107.htm. – Последнее обновление 25.08.2018 г.

31. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин. – 6-е изд., стереотип.- М.: Дрофа, 2013.- 287 с.

32. Никольский, С.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.: ил. – (МГУ – школе).

33. Никольский, С.М. Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин].- 3-е изд.- М.: Просвещение, АО «Московские учебники», 2006.- 255 с.

34. Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин].- 8-е изд.- М.: Просвещение, 2009.- 430 с.

35. Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин].- 8-е изд.- М.: Просвещение, 2009.- 464 с.

36. Оганесян, В.А. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика :учеб.пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980. – С 112-127.

37. Покровский, В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно – методическая линия: учеб.-метод. пособие / В.П. Покровский; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.

38. Простая физика. – Режим доступа: https://easy-physic.ru/oblast-opredeleniya-funktsii/ - Последнее обновление 08.06.19.

39. Рурукин, А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа. 11 класс. - М. : ВАКО, 2009. – С. 91-92.

40. Савинов, Е.С. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа / [сост. Е.с. Савинов]. – М.: Просвещение, 2011. – С. 91-92. – (Стандарты нового поколения).

41. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2019 . 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Задачи с параметром /Ю.В. Садовничий. – М.: Изд-во «Экзамен» , 2019. - §6. Ограниченность функции. Нахождение области значений. С. 56-

68.

42. Сильвестров, В.В. Множество значений функции: Учебное пособие // Чебоксары: Изд-во ЧувГу, 2004. 64 с.

43. Теребинова, С.А.Элективный курс «Задачи на нахождение области определения и множества значений логарифмических функций // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – 1 оптический диск. – С. 254-256.

44. Теребинова, С.А. Элективный курс «Задачи на нахождение множества значений логарифмической функции» // «Математическое образование: современное состояние и перспективы» (к 100-летию со дня рождения профессора А.А. Столяра), 20-21 февраля 2019 года, МГУ имени А.А. Кулешова, г. Могилёв. – Могилёв: МГУ имени А.А. Кулешова, 2019. – С. 192-194.: ил.

45. Утеева, Р.А. Математика и математическое образование: сборник трудов VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса), 26-29 апреля 2017 года, Россия, г. Тольятти/ под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017.- 468 с.: обл.

46. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования / М-во образования и науки РФ. (Стандарты второго поколения). Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012. №413, С.15.

47. Шабунин, М.И. алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс: профил. уровень/ [М.И. Шабунин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, О.Н. Доброва].- 3-е изд.- М.: Просвещение, 2011.- 142 с.

48. Шестаков, С.А. Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 кл. / Под ред. С.А. Шестакова. М.: Астрель, 2007. 255 с.

49. Шмигирилова, И.Б. Теория и методика обучения математике в понятиях. Схемах и таблицах.- [Электронный ресурс].- Режим доступа: https://studfiles.net/preview/6064540/page:22/ .- Последнееобновление 25.08.2018.

50.Russel B., Problem Solving in Mathematics .[Электронный ресурс] // ThoughtCo.-2018. URL:https://www.thoughtco.com/problem-solving-in-mathematics-2311775(дата обращения 4.06.2019).

51. Ledwith J., Parent Functions. [Электронныйресурс] // ThoughtCo.-2017 .URL:https://www.thoughtco.com/definition-of-parent-functions-2311963 (дата обращения 4.06.2019).

52. Hukamdad D., Effect of Using Problem Solving Method in Teaching Mathematics. [Электронный ресурс] // ResearchGate. – 2010. PP. 67-70.URL:https://www.researchgate.net/publication/41846896_Effect_of_Using_Problem_Solving_Method_in_Teaching_Mathematics_on_the_Achievement_of_Mathematics_Students(дата обращения 4.06.2019).

53. Augustyn A., Function. [Электронныйресурс] // Encyclopedia Britannica. – 2018.URL:https://www.britannica.com/science/function-mathematics(дата обращения 4.06.2019).

54. Bergger J., Elementary algebra. [Электронныйресурс] // Encyclopedia Britannica. - 2017.URL:https://www.britannica.com/science/elementary-algebra#ref790345 (дата обращения 4.06.20019).

55.Gerlach U., LINEAR MATHEMATICS IN INFINITE DIMENSIONS Signals Boundary Value Problems and Special Functions. [Электронный ресур] // People.math. – 2017. PP. 1-5.URL:https://people.math.osu.edu/gerlach.1/math/BVtypset (дата обращения 4.06.2019).

Приложение А

Ответы и решения к таблице 6

Найдите область определения функции:

1. $y = \log_{\frac{1}{3}}(5 - x)$.

Решение. 5-х>0 $\to x < 5 \ \to x \in (-\infty; 5)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 5)$.

2. $y = \log_{\frac{1}{3}}(3 - x)$.

Решение. 3-х>0 $\to x < 3 \ \to x \in (-\infty; 3)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 3)$.

3. $y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 4)$.

Решение. Х+4>0 $\to x > -4 \ \to x \in (-4; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-4; +\infty)$.

4. $y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 5)$.

Решение. Х+5>0 $\to x > -5 \ \to x \in (-5; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-5; +\infty)$.

5. $y = \log_{0,3}(7 - x)$.

Решение. 7-Х>0 $\to x < 7 \ \to x \in (-\infty; 7)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 7)$

6. $y = \log_{0,3}(x + 8)$.

Решение. Х+8>0 $\to x > -8 \ \to x \in (-8; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-8; +\infty)$.

7. $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2)$.

Решение. Т.к. x^2 будет иметь всегда положительные значения при любых х, то $x^2 > 0$ не выполняется →функция не определена.

Ответ: функция не определена.

9. $y = \log_{\pi}(10 + 5x)$.

Решение. 10+5X>0 $\rightarrow x > -2 \ \rightarrow x \in (-2; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-2; +\infty)$.

10. $y = \log_{\pi}(8x + 9)$.

Решение. 8X+9>0 $\rightarrow x > -\frac{9}{8} \rightarrow x \in (-\frac{9}{8}; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\frac{9}{8}; +\infty)$.

11. $y = \log_{\pi}(4x - 1)$.

Решение. 4X-1>0 $\rightarrow x > \frac{1}{4} \rightarrow x \in (\frac{1}{4}; +\infty)$.

Ответ:$x \in (\frac{1}{4}; +\infty)$.

12. $y = \log_{0,4}(-2x^3)$.

Решение. $-2x^3$ >0 $\rightarrow x < 0 \ \rightarrow x \in (-\infty; 0)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0)$.

13. $y = \log_{0,5}(4x^5)$.

Решение. $4x^5$ >0 $\rightarrow x > 0 \ \rightarrow x \in (0; +\infty)$.

Ответ: $x \in (0; +\infty)$.

14. $y = \log_4 \frac{1}{1-4x}$.

Решение. $\begin{matrix} \frac{1}{1-4x} > 0 \\ 1 - 4x \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x < \frac{1}{4} \\ x \neq \frac{1}{4} \end{matrix} \rightarrow x \in \ -\infty; \frac{1}{4}$.

Ответ: $x \in \ -\infty; \frac{1}{4}$.

15. $y = \log_5 \frac{2}{4x+1}$.

Решение. $\begin{matrix} \frac{2}{4x+1} > 0 \\ 4x + 1 \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x > -\frac{1}{4} \\ x \neq -\frac{1}{4} \end{matrix} \rightarrow x \in \ -\frac{1}{4}; \ +\infty$.

Ответ:$x \in \ -\frac{1}{4}; \ +\infty$.

16. $y = \log_{0,5} \frac{2+5x}{6-3x}$.

Решение. $\begin{matrix} \frac{2+5x}{6-3x} > 0 \\ 6 - 3x \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x > -0,4 \\ x < 2 \\ x \neq 2 \end{matrix} \rightarrow x \in \ -0,4; \ 2$.

Ответ: $x \in \ -0{,}4;\ 2\ .$

17. $y = \log_8 \frac{2+7x}{8-5x}$.

Решение. $\begin{matrix} \frac{2+7x}{8-5x} > 0 \\ 8-5x \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x > -\frac{2}{7} \\ x < 1{,}6 \\ x \neq 1.6 \end{matrix} \rightarrow x \in \ -\frac{2}{7};\ 1{,}6\ .$

Ответ: $x \in \ -\frac{2}{7};\ 1{,}6\ .$

18. $y = \log_4 \frac{3x+7}{x-2}$.

Решение. $\begin{matrix} \frac{3x+7}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x < -\frac{7}{3} \\ x > 2 \\ x \neq 2 \end{matrix} \rightarrow x \in \ -\infty;\ -\frac{7}{3}\ \cup (2; +\infty).$

Ответ: $x \in \ -\infty;\ -\frac{7}{3}\ \cup (2; +\infty).$

19. $y = \log_{\frac{}{7}} \frac{2x+11}{x-7}$.

Решение. $\begin{matrix} \frac{2x+11}{x-7} > 0 \\ x-7 \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x < -5{,}5 \\ x > 7 \\ x \neq 7 \end{matrix} \rightarrow x \in \ -\infty;\ -5{,}5\ \cup (7; +\infty).$

Ответ: $x \in \ -\infty;\ -5{,}5\ \cup (7; +\infty).$

21. $y = \log_{0,6} \frac{x}{3x+1}$.

Решение. $\begin{matrix} \frac{x}{3x+1} > 0 \\ 3x+1 \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x < -\frac{1}{3} \\ x \neq \frac{-1}{3} \end{matrix} \rightarrow x \in \ -\infty; -\frac{1}{3}\ \cup (0; +\infty).$

Ответ: $x \in \ -\infty; -\frac{1}{3}\ \cup (0; +\infty).$

22. $y = \log_{11} \frac{3-x}{4x}$.

Решение. $\begin{matrix} \frac{3-x}{4x} > 0 \\ 4x \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix} \rightarrow x \in (0; 3).$

Ответ: $x \in (0;3)$.

23. $y = \log_9 \frac{5+x}{4x}$.

Решение. $\begin{cases} \frac{5+x}{4x} > 0 \\ 4x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow x \in \ -\infty; -5 \ \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $x \in \ -\infty; -5 \ \cup (0; +\infty)$.

20. $y = \log_{0,2} \frac{x}{3x-1}$.

Решение. $\begin{cases} \frac{x}{3x-1} > 0 \\ 3x - 1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{1}{3} \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow x \in \ -\infty; 0 \ \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Ответ: $x \in \ -\infty; 0 \ \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

24. $y = \log_6(x^2 - 9)$.

Решение. $x^2 - 9 > 0$

$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

25. $y = \log_7(x^2 - 0,49)$.

Решение. $x^2 - 0,49 > 0$

$x^2 - 0,49 = 0 \rightarrow x^2 = 0,49 \rightarrow x = \pm 0,7 \rightarrow x \in (-\infty; -0,7) \cup (0,7; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -0,7) \cup (0,7; +\infty)$.

26. $y = \log_6(16 - x^2)$.

Решение. $16 - x^2 > 0$, $16 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow x \in \ -4; 4\ $.

Ответ: $x \in \ -4; 4\ $.

27. $y = \log_6(x^2 - 0,25)$.

Решение. $x^2 - 0,25 > 0$

$x^2 - 0{,}25 = 0 \to x^2 = 0{,}25 \ \to x = \pm 0{,}5 \to x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (0{,}5;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (0{,}5;\ +\infty)$.

32. $y = \log_{0,7}(x^2 + 9)$.

Решение. $x^2 + 9 > 0$ при любом значении x. Следовательно x любое.

Ответ: x любое.

33. $y = \log_{0,4}(\frac{x^2-16}{x+3})$.

Решение. $\begin{array}{l} \frac{x^2-16}{x+3} > 0 \\ x+3 \neq 0 \end{array} \to \begin{array}{l} \frac{x^2-16}{x+3} = 0 \\ x+3 \neq 0 \end{array} \to \begin{array}{l} x = \pm 4 \\ x = -3 \\ x \neq -3 \end{array}$

Ответ: D(y)∈ $-4;\ -3 \ \cup \ 4; +\infty$.

34. $y = \log_{\frac{1}{7}}(\frac{x-5}{x^2+5})$.

Решение. $\begin{array}{l} \frac{X-5}{x^2+5} > 0 \\ x^2+5 \neq 0 \end{array} \to \begin{array}{l} \frac{x-5}{x^2+5} = 0 \\ x^2+5 \neq 0 \end{array} \to \ x = 5.$ Знаменатель не обращается в нуль, он всегда положительный, следовательно D(y)∈ $5;\ +\infty$.

Ответ:D(y)∈ $5;\ +\infty$.

35. $y = \log_2(x^2 - 4x)$.

Решение.$X^2 - 4x > 0;\ \ x^2 - 4x = 0; x\ \ x - 4\ \ = 0; x_1 = 0;\ x_2 = 4.$

Ответ:D(y) = $-\infty; 0 \ \cup \ 4; +\infty$.

37. $y = \log_3(1{,}2x - x^2)$.

Решение. $1{,}2x - x^2 > 0;\ \ 1{,}2x - x^2 = 0; x\ \ 1{,}2 - x\ \ = 0; x_1 = 0;\ x_2 = 1{,}2.$

Ответ:D(y) = $0; 1{,}2$.

39. $y = \log_2(3к^2 - 4к + 4)$.

Решение.$3к^2 - 4к + 4\ > 0;\ \ 3к^2 - 4к + 4 = 0; Д = 1; x_1 = 1;\ x_2 = 1\frac{1}{3}.$

Ответ:$D(y) = \ -\infty; 1 \ \cup \ 1\frac{1}{3}; +\infty \ .$

41. $y = \log_4(-3к^2 + 13к - 14).$

Решение. $-3к^2 + 13к - 14 > 0; \ -3к^2 + 13к - 14 = 0; Д = 1; x_1 = 2; \ x_2 = 2\frac{1}{3}.$

Ответ: $D(y) = \ 2; 2\frac{1}{3} \ .$

43. $y = \log_3(\log_{0,2} x).$

Решение. $\begin{array}{c} x > 0 \\ \log_{0,2} x > 0 \end{array}$; т.к. $0 < 0,2 < 1$, то $0 < x < 1.$

Ответ:$D \ y \ = \ 0; 1 \ .$

44. $y = \log_3(\log_{0,3} x).$

Решение. $\begin{array}{c} x > 0 \\ \log_{0,3} x > 0 \end{array}$; т.к. $0 < 0,3 < 1$, то $0 < x < 1.$

Ответ:$D \ y \ = \ 0; 1 \ .$

45. $y = \ \log_3 \sin x.$

Решение. $\sin x > 0, 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: D(y)= $\ 2\pi n; \ \pi + 2\pi n \ , n \in Z.$

46. $y = \ \log_3 \cos x.$

Решение. $\cos x > 0, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ:D(y)= $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in Z.$

51. $y = \log_2 \ 4^x - 1 \ .$

Решение. $4^x - 1 > 0, x > 0.$

Ответ:$D \ y \ = \ 0; \ +\infty \ .$

52. $y = \log_5\ 1 - 5^x$.

Решение. $1 - 5^x > 0, 5^x < 0, x < 0.$ $D\ \ y\ \ =\ \ -\infty; 0$.

Ответ: $D\ \ y\ \ =\ \ -\infty; 0$.

55. y=$\log_{5,1}\ 3^{5x^2-11x+3} - 3$.

Решение. $3^{5x^2-11x+3} - 3 > 0;\ 5x^2 - 11x + 3 > 1;\ 5x^2 - 11x + 2 > 0$; D=81, $x_1 = 0{,}2;\ x_2 = 2$.

Ответ:D(y) = (-∞; 0,2) $\cup\ \ 2; +\infty$.

57. y=$\log_{0,5}(\frac{3^{x^2-3x+3}-3}{x})$.

Решение. $\frac{3^{x^2-3x+3}-3}{x} > 0$, $x \neq 0$. $3^{x^2-3x+3} - 3 = 0, x^2 - 3x + 3 = 1, x^2 - 3x + 2 = 0$, D=1, $x_1 = 1;\ x_2 = 2$..

Ответ:D(y)= (0; 1) $\cup\ \ 2; +\infty$