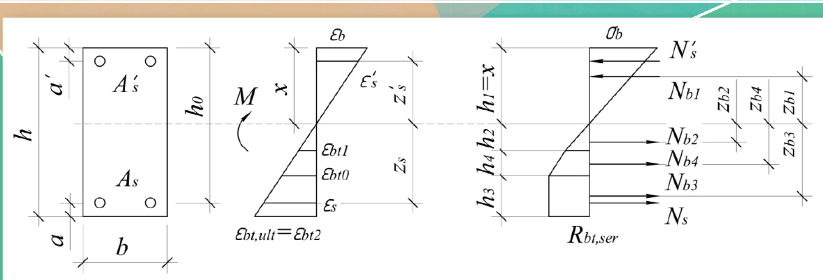
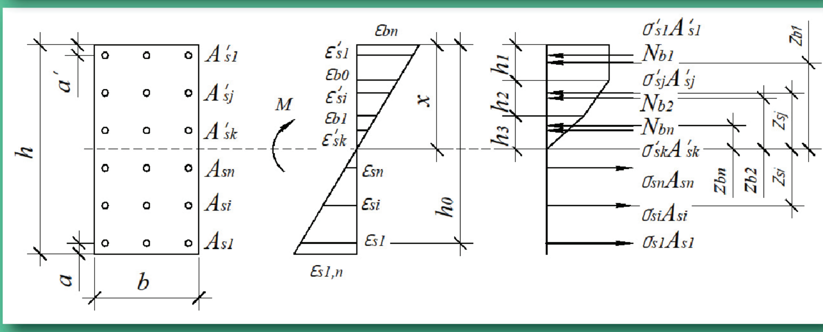
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Архитектурно-строительный институт
Кафедра «Промышленное, гражданское строительство и городское хозяйство»

В.А. Ерышев

ДИАГРАММНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Электронное учебно-методическое пособие





ISBN 978-5-8259-1429-9

УДК 624.012.45.04
ББК 38.53

Рецензенты:
д-р техн. наук, доцент, советник РААСН, эксперт ООО «Волжский исследовательский научный экспертный центр» *С.М. Анпилов*;
канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой «Промышленное, гражданское строительство и городское хозяйство» Тольяттинского государственного университета *Д.С. Тошин*.

Ерышев, В.А. Диаграммный метод расчета стержневых железобетонных элементов : электронное учебно-методическое пособие / В.А. Ерышев. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2019. – 1 оптический диск.

В учебно-методическом пособии представлена методика расчета на трещинообразование и прочность железобетонных изгибаемых элементов прямоугольного сечения по нелинейной деформационной модели с использованием кусочно-линейных диаграмм деформирования бетона и арматуры при осевом сжатии и растяжении. Представлен алгоритм решения нелинейной задачи для выполнения последовательного приближения при проверке условия равновесия усилий в сечениях элемента.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки магистров 08.04.01 «Строительство».

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Е.А. Держаева*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию 25.02.2019.
Объем издания 7,8 Мб.
Комплектация издания:
компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-19-18.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Деформационный метод расчета железобетонных конструкций с использованием диаграмм деформирования бетона и арматуры в последние годы приобрел статус приоритетного, так как обеспечивает высокую степень надежности в оценке их прочностных и деформативных свойств. Наряду с деформационными моделями в практике проектирования длительное время применяется традиционная методика расчета по методу предельных состояний. Расчет железобетонных элементов на трещинообразование и прочность по нелинейной деформационной модели производят на основе диаграмм осевого растяжения и сжатия бетона, растяжения арматуры и гипотезы плоских сечений. Отечественные и зарубежные нормативные документы [1; 2] рекомендуют в качестве расчетных, аппроксимирующих экспериментальные кривые деформирования бетона, стальной арматуры и устанавливающих связь между относительными деформациями и напряжениями, любые виды диаграмм: криволинейные, упрощенные кусочно-линейные (двухлинейные и трехлинейные), отвечающие механическим свойствам материалов.

Расчеты железобетонных конструкций на трещинообразование и прочность с учетом полной криволинейной диаграммы бетона на осевое растяжение и сжатие с нисходящими ветвями реализованы в программных комплексах на ЭВМ, где прочностные и деформационные характеристики материалов согласно нормативным документам принимаются с обеспеченностью 0,95, и без особых затруднений используются при проектировании новых объектов. Необходимость применения программных комплексов возникает при расчетах конструкций сложной формы сечений или когда в основу положены криволинейные диаграммы с нелинейной связью между напряжениями и деформациями. Процедура расчета сводится к выделению по высоте сечения элементарных участков и, используя аналитические связи между напряжениями и деформациями в диаграммах деформирования материалов для каждого участка, определяются значения напряжений и после проверки равновесия усилий в сечениях вычисляются внутренние усилия, величина которых не должна превышать усилий от внешних воздействий. Нелинейная задача решается методом последовательных приближений (итераций) или в приращениях с изменением значений деформаций (кривизны) до выполнения условия равновесия усилий в сечении с заданной точностью. Когда в расчетах используются криволинейные диаграммы деформирования бетона с восходящими и ниспадающими ветвями, точность расчета зависит от количества участков разбиения сечения и применение программных комплексов для ЭВМ необходимо. При выполнении поверочных расчетов, когда нагрузки, характеристики материалов зависят от условий эксплуатации конструкций, при производстве экспериментальных исследований новых эффективных материалов и прогрессивных технологий прочностные и деформационные параметры определяются, как правило, на стандартных образцах. Использование программных комплексов в расчетах конструкций с фактическими характеристиками материалов не представляется возможным. Исследования, выполненные автором, показывают, что для железобетонных изгибаемых элементов регулярной формы сечений (прямоугольной, тавровой, двутавровой форм) при недостаточной обеспеченности исходных данных расчеты на трещинообразование и прочность с заданной точностью можно производить с использованием упрощенных диаграмм состояния материалов на растяжение и сжатие. На основании гипотезы плоских сечений напряжения и усилия в арматуре и бетоне выражаются через деформации. В растянутой и сжатой зонах бетона формируется ограниченное количество дискретных участков напряжений линейной формы с вполне определенными центрами тяжести приложения усилий, что упрощает проверку условия равновесия усилий в сечении и позволяет получить разрешающие уравнения для определения значений момента трещинообразования M_{crc} и предельного изгибающего момента M_{ult}.

Глава 1. ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

1.1. Модели деформирования материалов

Классические модели деформирования изотропных и анизотропных твердых тел описываются в общем случае линейной теорией упругости, теорией пластичности и ползучести в зависимости от механических свойств материалов. Основные механические свойства материалов обнаруживаются в экспериментальных исследованиях на одноосное растяжение и сжатие стандартных образцов. По опытным значениям истинных напряжений σ и относительных деформаций ε строится некоторая кривая, так называемая диаграмма материала на растяжение или сжатие. Напряжения σ определяются по усилию N силовой установки как $\sigma = N/A$ (A – площадь сечения образца), а относительные деформации удлинения или укорочения по оси образца как $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$, где ℓ – линейный размер образца до приложения силы; $\Delta\ell$ – абсолютное линейное удлинение (укорочение) образца при деформировании силой N. Как правило, значения относительных деформаций ε откладываются по оси абсцисс, а по оси ординат – значения напряжений σ.

Типичная диаграмма стали. Диаграммы на растяжение и сжатие стали симметричны относительно оси деформаций (рис. 1.1). Начальный участок A_1OA близок к прямой линии и характеризуется обратимыми деформациями, т. е. как при нагрузке (увеличении σ), так и при разгрузке (уменьшении σ) точка, изображающая на диаграмме состояние материала, двигается по одной и той же прямой A_1OA. Связь между деформациями и напряжениями на линейном участке записывается в виде

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1.1}$$

где E – модуль упругости стали.

При нагружении образца силой N наряду с осевыми деформациями ε возникают свободные поперечные деформации ε_p. Отношение поперечных деформаций к осевым составляет коэффициент Пуассона μ:

$$\mu = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon}. \tag{1.2}$$

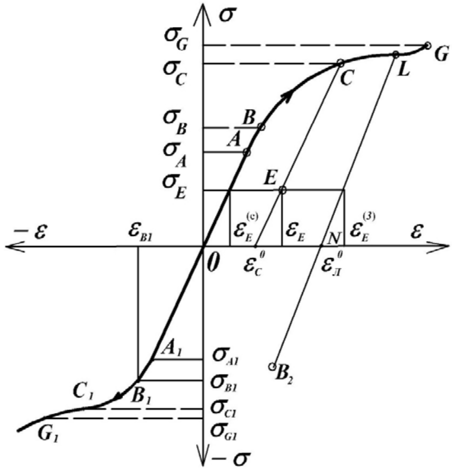


Рис. 1.1. Диаграмма одноосного растяжения-сжатия для стали (мягкое железо)

Границы интервала применимости линейной формулы (1.1) называются пределами пропорциональности, а соответствующие напряжения σ_A и σ_{A1} – напряжениями на пределе пропорциональности. Таким образом, при напряжениях σ, меньших σ_A и больших σ_{A1}, на диаграмме имеется участок A_1A, соответствующий закону Гука в виде (1.1), или линейной теории упругости. С увеличением усилия за точкой A (A_1) деформации развиваются на участке AB (A_1B_1). Образец на этих участках ведет себя тоже как упругое тело, но с динамически нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. Понятие динамической нелинейности в данном случае относится к геометрически малым деформациям (меньше 1 %).

При дальнейшем увеличении внешнего усилия, когда $\sigma > \sigma_B$, проявляются необратимые эффекты пластичности. После перехода через точку B, например в точку C, при последующей разгрузке изображающая точка будет перемещаться не по кривой $CBAO$, а по линии – CE. Обычно линия CE близка к прямой, наклон которой приблизительно совпадает с наклоном прямой OA. После частичной разгрузки до точки E при новой нагрузке изображающая точка будет практически двигаться по той же линии EC, а после достижения точки C при дальнейшей нагрузке – вдоль исходной кривой OAG. Если нагрузку полностью снять и получить состояние, отвечающее $\sigma = 0$, то в этом состоянии удлинение (укорочение) ε оказывается отличным от нуля, возникают так называемые остаточные деформации $\varepsilon_c^{\,0}$. Полные деформации, например в точке E, можно рассматривать как состоящие из двух частей – упругой $\varepsilon_E^{\,e}$ и пластической $\varepsilon_E^{\,p}$:

$$\varepsilon_E = \varepsilon_E^{\,e} + \varepsilon_E^{\,p}. \qquad (1.3)$$

Причем можно принять, что $\varepsilon_E^{\,e} = \sigma_E / E_1$.

Если наклон прямой CE совпадает с наклоном участка исходной диаграммы OA, то $E = E_1$; $\varepsilon_E^{\,p} = \varepsilon_c^{\,0}$.

Отметим, что пластические деформации не определяются однозначно значением напряжения σ, например σ_E может соответствовать бесчисленное множество значений деформаций $\varepsilon_E^{(1)}$, $\varepsilon_E^{(2)}$ и т. д. Если при нагружении образца внешняя нагрузка превысила предел упругости, то значение деформации, соответствующее данному значению напряжения, зависит от того, как было достигнуто это значение напряжения, т. е. от истории нагружения. Появление остаточных деформаций после достижения внешней нагрузкой определенного предела характеризует собой по определению основное свойство пластичности. При появлении остаточных пластических деформаций характерно различие между функциями $\sigma = f(\varepsilon)$ при нагрузке и разгрузке. Следует отметить, что появление пластических деформаций в опытах можно обнаружить после проведения разгрузки. Точка B определяет начало проявления свойств пластичности, значение напряжения σ_B называется пределом упругости, или пределом текучести.

Заметим, что после перехода материала в пластическую область, например в точку C, при разгрузках и последующих нагрузках, таких, что $O < \sigma < \sigma_C$, материал ведет себя как упругое тело (нагрузка и разгрузка идут по одной и той же линии CE). Поэтому можно говорить, что точка C также является пределом упругости для материала, полученного из исходного с помощью пластического деформирования. Для многих материалов $\sigma_C > \sigma_B$, по крайней мере для некоторых участков диаграммы. Такие участки называются участками упрочнения материала, а повышение предела упругости в результате пластического деформирования называется упрочнением материала, или наклепом. Материал упрочняется, если $\sigma_C > \sigma_B$. Для некоторых материалов на диаграмме растяжения-сжатия существует горизонтальный участок, называемый площадкой текучести. При деформировании, соответствующем этому участку, упрочнения не происходит. При увеличении внешней нагрузки до σ_G материал разрушается. Растягивающее напряжение σ_{G1} называется пределом прочности на растяжение, а сжимающее напряжение называется пределом прочности на сжатие.

Эффект Баушингера. Пределы пропорциональности и упругости, пластические деформации и упрочнение имеют место как при растяжении, так и при сжатии. Для металлов диаграммы на растяжение и сжатие симметричны относительно т. O. Предел упругости на диаграмме сжатия при первоначальном нагружении соответствует точке B_1. После растяжения, например до т. L, с последующей разгрузкой и сжатием предел упругости материала на сжатие на участке упругих деформаций LNB_2 будет соответствовать B_2. Деформации на участках OB_1 и NB_2 равны между собой, однако $\sigma_{B2} > \sigma_{B1}$. Эффект изменения предела упругости на сжатие после предварительного растяжения за предел упругости называется эффектом Баушингера. Таким образом, пластическая деформация одного знака уменьшает напряжения, при которых такая же деформация достигается в последующем после разгрузки и нагружении напряжениями другого знака. Объясняется этот эффект тем, что в зернах металла остаются напряжения, содействующие деформациям противоположного знака.

1.2. Модели деформирования пластических материалов

Построение теории пластичности связано с разрешением трех основных задач:

– обобщением на случай произвольных напряженных состояний понятия предела упругости;
– введением в общем случае понятий нагрузки и разгрузки, включая повторные и знакопеременные режимы нагружения;
– установлением законов, определяющих нарастание остаточных (пластических) деформаций, т. е. установлением соотношений, позволяющих определять остаточные деформации при любых допустимых законах изменения внутренних напряжений.

Выделим два основных типа моделей пластических сред.

Модели идеально упругопластических или жесткопластических сред, в которых не учитываются упрочнение и эффект Баушингера (рис. 1.2, *а*, *б*). Эти модели получаются в результате обобщения произвольных диаграмм деформирования в виде идеализированных диаграмм для простых частных случаев деформирования, предложенных Прандтлем, например диаграммы для одноосного растяжения и сжатия (рис. 1.2, *а*). На этом рисунке приведена диаграмма одноосного растяжения-сжатия для идеально упругопластической среды. При напряжении растяжения меньше некоторого постоянного предельного значения σ_0 и напряжении сжатия, большем σ_0', материал ведет себя как упругое тело; часто можно принять, что $\sigma_0 = \sigma_0'$ (по абсолютной величине).

В диаграмме (рис. 1.2, *б*) упругие деформации вообще не учитываются из-за их малости по сравнению с возможными пластическими деформациями. При напряжениях, абсолютная величина которых меньше некоторого постоянного значения σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_0'$), деформации принимаются равными нулю.

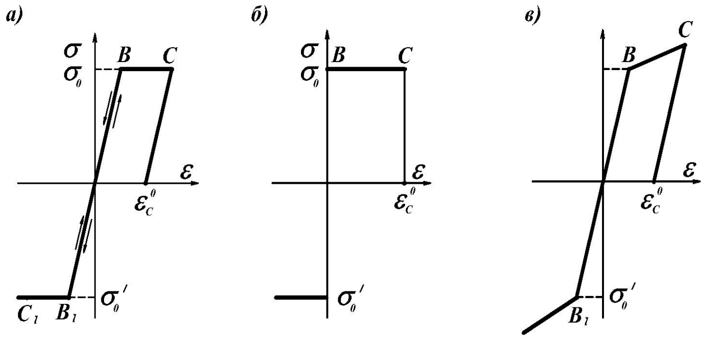


Рис. 1.2. Диаграммы сжатия-растяжения: *а* – для идеально упругопластического материала; *б* – для жесткопластического материала; *в* – для линейно упрочняющегося материала

Такие диаграммы растяжения-сжатия образца характерны для жесткопластических материалов. В обоих случаях после увеличения напряжения до σ_0 возможно течение материала с неограниченно возрастающей деформацией при постоянном напряжении. Такие модели могут удовлетворительно описывать поведение материалов, для которых на диаграмме «σ–ε» имеется площадка текучести.

Модель линейно упрочняющегося материала. В этих моделях пластических материалов учитывается упрочнение, т. е. изменение предела упругости после разгрузки и при последующем нагружении.

1.3. Расчетные диаграммы состояния бетона на осевое сжатие

В качестве расчетных диаграмм состояния бетона, определяющих связь между напряжениями и относительными деформациями, в нормативной литературе принимают трехлинейную и двухлинейную диаграммы (рис. 1.3, *а*, *б*). Диаграммы состояния бетона используют при расчете железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели. Основными деформационными характеристиками бетона являются значения:

– предельных относительных деформаций бетона при осевом сжатии и растяжении (при однородном напряженном состоянии бетона) ε_{b0} и ε_{bt0};
– коэффициента (характеристики) ползучести $\varphi_{b,cr}$, которые определяются в зависимости от условий окружающей среды (относительной влажности воздуха) и класса бетона по СП 63.13330.2012 (табл. 6.12);
– коэффициента поперечной деформации бетона (коэффициента Пуассона) $v_{b,r} = 0{,}2$; коэффициента линейной температурной деформации бетона α_{bt}, значение которого при изменении температуры от минус 40 °C до плюс 50 °C принимается $\alpha_{bt} = 1 \cdot 10^{-5}$ °C (для тяжелого, мелкозернистого, напрягающего бетонов);
– начального модуля упругости E_b, которые численно равны тангенсу угла наклона касательной на диаграмме бетона. В расчетах при продолжительном действии нагрузки пользуются средним или упругопластичным модулем, соответствующим тангенсу угла наклона прямой, проходящей через точку на диаграмме с заданным напряжением; средний модуль упругости бетона для различных классов по прочности на сжатие определяется по формуле

$$E_{b,\tau} = \frac{E_b}{1 + \varphi_{b,cr}}; \quad (1.4)$$

– модуля сдвига бетона G_b, которые при известных значениях E_b и ν_b определяются по формуле

$$G_b = \frac{E_b}{[2(1 + \nu_b)]}. \quad (1.5)$$

При значении $\nu_b = \nu_{b,r} = 0{,}2$ получим $G_b = 0{,}4E_b$.

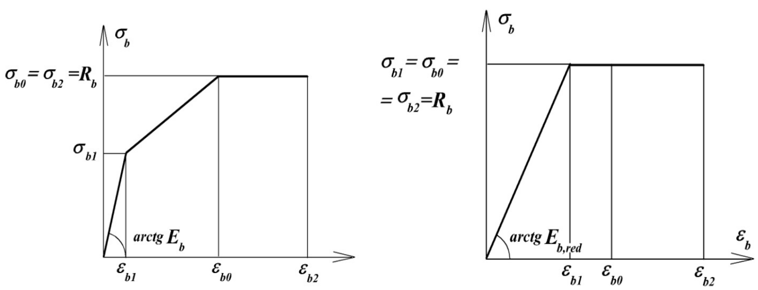


Рис. 1.3. Диаграммы состояния сжатого бетона: *а* – трехлинейная диаграмма состояния сжатого бетона; *б* – двухлинейная диаграмма состояния сжатого бетона

При трехлинейной диаграмме (рис. 1.3, *а*) сжимающие напряжения бетона σ_b в зависимости от относительных деформаций укорочения бетона ε_b определяют по формулам:

– при $0 \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b1}$

$$\sigma_b = E_b \varepsilon_b; \quad (1.6)$$

– при $\varepsilon_{b1} < \varepsilon_b < \varepsilon_{b0}$

$$\sigma_b = \left[\left(1 - \frac{\sigma_{b1}}{R_b}\right)\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1}} + \frac{\sigma_{b1}}{R_b}\right] R_b; \quad (1.7)$$

– при $\varepsilon_{b0} \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b2}$

$$\sigma_b = R_b. \quad (1.8)$$

Значения напряжений σ_{b1}, относительных деформаций ε_{b1}, ε_{b2} и предельных относительных деформаций при осевом сжатии ε_{b0} (при непродолжительном действии нагрузки) соответственно принимают: $\sigma_{b1} = 0{,}6R_b$, $\varepsilon_{b1} = \frac{\sigma_{b1}}{E_b}$, $\varepsilon_{b2} = 0{,}0035$, $\varepsilon_{b0} = 0{,}002$. При продолжительном действии нагрузки относительные деформации ε_{b1} и ε_{b2}

определяются по СП 63.13330.2012 (табл. 6.10) в зависимости от относительной влажности воздуха окружающей среды.

Для высокопрочных бетонов класса по прочности на сжатие B70–B100 значение ε_{b2} принимается по линейному закону от 0,0033 при B70 до 0,0028 при B100.

При двухлинейной диаграмме (рис. 1.3, *б*) сжимающие напряжения бетона σ_b в зависимости от относительных деформаций ε_b определяют по формулам:

– при $0 \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b1}$

$$\varepsilon_{b1} = \frac{R_b}{E_{b,red}}; \tag{1.9}$$

– при $\varepsilon_{b1} \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b2}$

$$\sigma_b = E_{b,red}\varepsilon_b;$$

$$\sigma_b = R_b. \tag{1.10}$$

Значения приведенного модуля деформаций бетона $E_{b,red}$ принимаются:

$$E_{b,red} = \frac{R_b}{\varepsilon_{b1,red}}. \tag{1.11}$$

Значения относительных деформаций $\varepsilon_{b1,red}$ при непродолжительном действии нагрузки составляют $\varepsilon_{b1,red} = 0{,}0015$, при продолжительном действии нагрузки определяются по СП 63.13330.2012 (табл. 6.10).

1.4. Расчетные диаграммы состояния бетона на осевое растяжение

Растягивающие напряжения бетона σ_{bt} в зависимости от относительных деформаций ε_{bt} определяются так же, как при сжатии, по трехлинейным и двухлинейным диаграммам (рис. 1.3, *а*, *б*). При этом:

– расчетные значения сопротивления бетона сжатию R_b заменяются на расчетные значения сопротивления бетона растяжению R_{bt};
– значения начального модуля упругости E_{bt} вычисляются по формуле (1.4);
– значения относительных деформаций ε_{bt0} и ε_{bt2} для тяжелого, мелкозернистого и напрягающего бетонов при непродолжительном действии нагрузки составляют $\varepsilon_{bt0} = 0{,}00010$ и $\varepsilon_{bt2} = 0{,}00015$; при продолжительном действии нагрузки относительные деформации

ε_{bt0} и ε_{bt2} определяются по СП 63.13330.2012 (табл. 6.10) в зависимости от относительной влажности воздуха окружающей среды;

– для двухлинейной диаграммы при непродолжительном действии нагрузки принимается $\varepsilon_{bt1,red} = 0{,}00008$, а при продолжительном – по табл. 6.10 СП 63.13330.2012;

– значения $E_{bt,red}$ вычисляются по формуле (1.11), в нее подставляются R_{bt} и $\varepsilon_{bt1,red}$.

1.5. Нормативные и расчетные характеристики бетона

Основными прочностными характеристиками бетона являются нормативные значения сопротивления бетона осевому сжатию R_{bn} (призменная прочность) и осевому растяжению $R_{bt,n}$ (при назначении класса бетона по прочности на сжатие). Нормативные характеристики определяются в зависимости от класса бетона по прочности на сжатие В по СП 63.13330.2012 (табл. 6.7), их значения были приняты с обеспеченностью P не менее 0,95, которая показывает, что не менее чем в 95 случаях из 100 прочность материала будет выше средней прочности. Однако на дальнейших стадиях изготовления конструкций – при транспортировании бетонной смеси, укладке бетона, вибрировании, твердении – многие факторы приводят к возможным отклонениям прочности бетона от нормативной, имеется также отклонение фактических размеров. Поэтому возможное отклонение прочности бетона в конструкциях учитывается специальным коэффициентом надежности γ_b, большим единицы, на который делится нормативное сопротивление бетона. Тогда сопротивление бетона, учитываемое в расчете (так называемое расчетное сопротивление бетона для предельных состояний первой группы), определяется по формулам

$$R_b = \frac{R_{bn}}{\gamma_b};\ R_{bt} = \frac{R_{bt,n}}{\gamma_{bt}}. \qquad (1.12)$$

Такой подход установления расчетных сопротивлений называется полувероятностным. Коэффициенты надежности бетона всех видов (кроме ячеистого), работающих на сжатие, принимаются $\gamma_b = 1{,}3$, на растяжение – $\gamma_{bt} = 1{,}5$.

Обычно на производстве, а также при экспериментальных исследованиях железобетонных конструкций контролируется только кубиковая прочность бетона на сжатие R_m, а призменная прочность R_b и прочность бетона осевому растяжению определяются по зависимостям:

$$R_b = R_m(0{,}77 - 0{,}001R_m); \tag{1.13}$$

$$R_{bt} = 0{,}5\sqrt[3]{R_m^2}. \tag{1.14}$$

Прочность бетона на растяжение, определяемая по формуле (1.14), имеет большую изменчивость (неточность формулы), чем прочность на сжатие, поэтому коэффициент надежности по прочности на растяжение γ_{bt} принят выше коэффициента γ_b.

Расчетные сопротивления бетона для предельных состояний второй группы $R_{b,ser}$ и $R_{bt,ser}$ принимаются равными нормативным сопротивлениям соответственно R_{bn} и $R_{bt,n}$. В этом проявляется фактор запаса, вводимый в расчет с тем, чтобы обеспечить достаточную надежность конструкций.

1.6. Сравнительный анализ диаграмм состояния

Анализ результатов расчета для бетонов класса по прочности на сжатие В25 и В50 показал, что в различных точках (например, при $\sigma_{b1} = 0{,}6R_b$) существует разница в значениях деформаций для бетона В25 в 2,4 раза, а для бетона В50 – в 1,5 раза. Это наглядно видно по рис. 1.4.

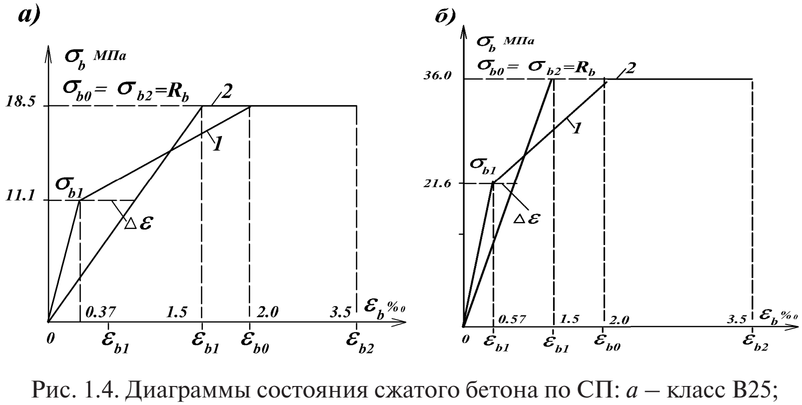


Рис. 1.4. Диаграммы состояния сжатого бетона по СП: *а* – класс В25; *б* – класс В50; *1* – трехлинейная диаграмма; *2* – двухлинейная

Такое несоответствие диаграмм между собой отражается на конечных результатах расчета элементов по второй группе предельных состояний в расчетах прогибов конструкций.

Линейные диаграммы учитывают только нелинейность деформаций ползучести и не описывают нелинейность упруго-мгновенных деформаций. В расчетах на прочность при проектировании конструкций на длительные эксплуатационные нагрузки статического характера такой подход вполне объясним. При кратковременных нагружениях, нагрузках динамического, сейсмического характера, изменяющихся по некоторым циклическим закономерностям, расчет конструкций необходимо выполнять с учетом необратимости части нелинейных упруго-мгновенных деформаций. Бетон в этом случае характеризуется нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями (нелинейными физическими соотношениями), а диаграммы имеют криволинейный вид.

1.7. Диаграммы состояния растянутой арматуры

Основными деформационными характеристиками арматуры являются значения:

– относительных деформаций удлинения арматуры ε_{s0} при достижении напряжениями расчетного сопротивления R_s; значения относительных деформаций арматуры ε_{s0} принимают равными:
  • для арматуры с физическим пределом текучести

$$\varepsilon_{s0} = \frac{R_s}{E_s}; \tag{1.15}$$

  • для арматуры с условным пределом текучести

$$\varepsilon_{s0} = \frac{R_s}{E_s} + 0{,}002; \tag{1.16}$$

– модуля упругости арматуры E_s; значения модуля упругости арматуры E_s принимают одинаковыми при растяжении и сжатии и равными: $E_s = 1{,}95 \cdot 10^5$ МПа – для арматурных канатов, $E_s = 2{,}0 \cdot 10^5$ МПа – для остальной арматуры.

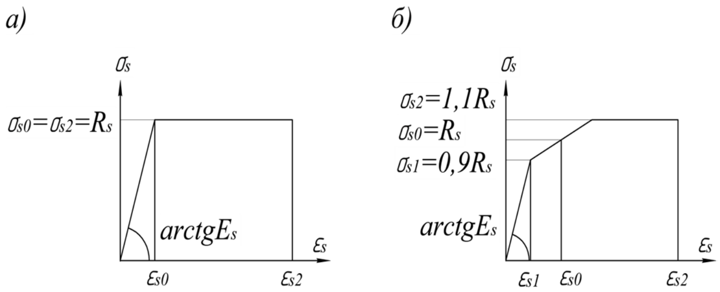


Рис. 1.5. Диаграммы состояния растянутой арматуры: *а* – двухлинейная диаграмма для арматуры с физической площадкой текучести; *б* – трехлинейная диаграмма для арматуры без площадки текучести

Диаграммы состояния (деформирования) арматуры используют при расчете железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели. При расчете железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели в качестве расчетных диаграмм состояния (деформирования) арматуры, устанавливающих связь между напряжениями σ_s и относительными деформациями ε_s, принимают упрощенные диаграммы по типу диаграмм Прандтля. Для арматуры с физическим пределом текучести классов А240–А500 – двухлинейную диаграмму (рис. 1.5, *а*), а для арматуры с условным пределом текучести классов А600–А1000, $\text{В}_\text{р}$1200–$\text{В}_\text{р}$1500, К1400, К1500 и К1600 – трехлинейную (рис. 1.5, *б*) без учета упрочнения за площадкой текучести.

Диаграммы состояния арматуры при растяжении и сжатии принимают одинаковыми, с учетом нормируемых расчетных сопротивлений арматуры растяжению и сжатию.

Напряжения в арматуре σ_s согласно двухлинейной диаграмме состояния арматуры определяют в зависимости от относительных деформаций ε_s по формулам:

– при $0 < \varepsilon_s < \varepsilon_{s0}$

$$\sigma_s = \varepsilon_s E_s; \tag{1.17}$$

– при $\varepsilon_{s0} \le \varepsilon_s \le \varepsilon_{s2}$

$$\sigma_s = R_{sn}. \tag{1.18}$$

Значения ε_{s0} определяются по формулам (1.15) и (1.16). Согласно СП 63.13330.2012 при расчете ответственных конструкций диаграмму для арматуры с условным пределом текучести (без физической площадки текучести) разрешается использовать до значения относительной деформации $\varepsilon_{s2} = 0{,}015$, а для арматуры с физической площадкой (пределом) текучести – до значения $\varepsilon_{s2} = 0{,}025$. После этого арматура исключается из расчета.

Основными прочностными характеристиками арматуры являются нормативные сопротивления растяжению R_{sn}, устанавливаемые с обеспеченностью 0,95. По ним определяются расчетные характеристики арматуры растяжению по второй группе предельных состояний ($R_{s,ser}$) и первой группе предельных состояний (R_s). Для первой группы предельных состояний дополнительно вводятся расчетные характеристики сжатию R_{sc} (исходя из возможности выпучивания сжатой арматуры в конструкциях) и расчетные сопротивления R_{sw} поперечной арматуры (хомутов и отогнутых стержней). Эти характеристики представлены в табл. 6.13, 6.14 и 6.1 СП 63.13330.2012.

Напряжения в арматуре σ_s согласно трехлинейной диаграмме состояния арматуры определяют в зависимости от относительных деформаций ε_s по формулам:

– при $0 < \varepsilon_s < \varepsilon_{s1}$

$$\sigma_s = \varepsilon_s E_s; \tag{1.19}$$

– при $\varepsilon_{s1} \le \varepsilon_s \le \varepsilon_{s2}$

$$\sigma_s = \left[\left(1 - \frac{\sigma_{s1}}{R_s}\right) \cdot \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{s0} - \varepsilon_{s1}} + \frac{\sigma_{s1}}{R_s}\right] \cdot R_s \le 1{,}1 R_s. \tag{1.20}$$

Значение ε_{s0} вычисляется по формуле (1.16), R_s принимается согласно требованиям норм.

Значения напряжений σ_{s1} принимаются равными $0{,}9R_s$, а напряжений σ_{s2} – равными $1{,}1R_s$.

Значения относительных деформаций ε_{s1} принимаются равными $0{,}9R_s/E_s$, а деформации ε_{s2} – равными 0,015.

Глава 2. РАСЧЕТ НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО ОБРАЗОВАНИЮ ТРЕЩИН ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

2.1. Стадии напряженно-деформированного состояния нормальных сечений железобетонных элементов

При нагружении железобетонного элемента изгибающим моментом нормальное сечение на этапах деформирования проходит несколько стадий.

Стадия I. Бетон в сжатой зоне, бетон и арматура в растянутой зоне деформируются в упругой области. Для крайних, наиболее напряженных волокон бетона и арматуры зависимость между деформациями и напряжениями линейная: $\sigma_b = \varepsilon_b E_b$, $\sigma_{bt} = \varepsilon_{bt} E_b$, $\sigma_s = \varepsilon_s E_s$.

Стадия Ia. Трещин нет. Деформации бетона упругопластические, деформации арматуры упругие. С увеличением нагрузки растягивающие напряжения в бетоне σ_{bt} приближаются к пределу прочности при растяжении R_{bt}, деформации увеличиваются, что связано с развитием микротрещин. При этом имеют место относительные взаимные смещения бетона и арматуры [$\varepsilon_g(x) = \varepsilon_s(x) - \varepsilon_{bt}(x)$]. Эпюра напряжений искривляется, нейтральная ось смещается к сжатому краю сечения, а фибровые деформации растянутого бетона достигают предельных значений $\varepsilon_{bt,u}$. Зависимость между деформациями и напряжениями в растянутой зоне нелинейная $\sigma_{bt} = \varepsilon_{bt} E_b v_{bt}$, где v_{bt} – коэффициент изменения секущего модуля.

Стадия II. В растянутой зоне образовались видимые трещины (a_{crc} = 0,05–0,1 мм). На графиках «нагрузка – средние деформации» образуется перелом, наблюдается мгновенное увеличение кривизны в виде скачка вследствие резкого снижения жесткости конструкции, и с ростом нагрузки трещины развиваются по высоте сечения. Соответствующая нагрузка в опытах обычно принимается за нагрузку трещинообразования. В растянутой зоне в сечении с трещиной растягивающие усилия воспринимаются арматурой и участком бетона над вершиной трещины. На участке между трещинами, являющемся зоной активного сцепления, бетон и арматура относительно смещаются. Высота сжатой зоны уменьшается, сжимающие напряжения растут и при слабом армировании могут достигнуть предельных значений R_b, но деформации еще меньше предельных. Эпюры напряжений бетона – криволинейные, при этом на диаграмме «σ_b–ε_b» может появиться ниспадающая ветвь.

Стадия IIа. Напряженное состояние сечения соответствует состоянию II. Однако напряжение в растянутой арматуре в сечении с трещиной достигает предела текучести. Между образовавшимися трещинами могут появляться новые трещины (следующий уровень трещинообразования).

Стадия III. Трещинообразование продолжается. Между трещинами напряжения в арматуре меньше предела текучести, в сечении с трещиной напряжение в арматуре может быть больше предела текучести. Напряжения в сжатом бетоне могут достигнуть предела прочности при сжатии R_b, однако деформации меньше предельных значений.

Стадия IIIа. Напряженное состояние такое же, как в стадии III. Прогрессируют одна или две трещины, а новые не образуются. В сжатой зоне бетона образуются продольные трещины, которые расчленяют сжатую зону бетона на отдельные столбики, образующие область выкалывания. В результате сжатая зона в предельном состоянии не представляет монолитный бетон, а является областью с нарушенной сплошностью, ослабленной продольными трещинами отрыва как по высоте, так и по ширине сжатой зоны. При достижении в бетоне предельных относительных деформаций сжатия несущая способность бетона исчерпывается и происходит разрушение конструкции.

В неармированных бетонных изгибаемых и внецентренно растянутых элементах возникновение трещин вызывает внезапное обрушение. Арматура, расположенная в растянутой зоне сечения, изменяет процесс образования трещин, придавая железобетону свойства так называемой фиктивной пластичности. Насыщение арматуры в растянутой зоне можно довести до такой величины, при которой трещины при возникновении будут иметь столь малое раскрытие, что их даже трудно обнаружить приборами. Однако исследования не подтвердили предположение повышения пластических свойств с ростом армирования, поэтому в нормативных документах приняты предельные значения удлинения крайнего растянутого волокна.

2.2. Основные положения расчета образования трещин по предельным усилиям

Расчет железобетонных элементов по образованию нормальных трещин производят по предельным усилиям или по нелинейной деформационной модели. Расчет по образованию наклонных трещин производят по предельным усилиям.

Расчет по образованию трещин железобетонных элементов по предельным усилиям производят из условия, по которому усилие от внешних нагрузок и воздействий F в рассматриваемом сечении не должно превышать предельного усилия $F_{crc,ult}$, которое может быть воспринято железобетонным элементом при образовании трещин.

$$F \le F_{crc,ult}. \tag{2.1}$$

Для изгибаемых, растянутых и внецентренно сжатых железобетонных элементов $F = M_r$ и $F_{crc,ult} = M_{crc}$, где M_r – момент внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно оси, параллельной нулевой линии и проходящей через ядровую точку, наиболее удаленную от растянутой зоны, трещинообразование которой проверяется, M_{crc} – момент, воспринимаемый сечением, нормальным к продольной оси элемента, при образовании трещин.

Усилие M_{crc} определяется исходя из следующих основных положений:

1. Сечения после деформации остаются плоскими, принимается гипотеза о линейном распределении деформаций по высоте сечения (гипотеза плоских сечений).

2. Наибольшее относительное удлинение крайнего растянутого волокна бетона равно $2R_{bt,ser}/E_b$. Предельные относительные деформации растянутого бетона, равные величине $(8...12) \cdot 10^{-5}$, с запасом оценивают растяжимость бетона в сечении перед образованием в нем трещин.

3. Для изгибаемых ненапряженных и растянутых элементов при растягивающей силе N, большей усилия предварительного обжатия

P, напряжение в бетоне сжатой зоны определяется с учетом упругих деформаций бетона, так как момент образования трещин сравнительно небольшой и нелинейные деформации бетона сжатой зоны (если она есть) проявляются незначительно. Для предварительно напряженных изгибаемых и внецентренно сжатых элементов при напряжениях $\sigma_b > 0{,}6R_b$ заметно проявляется нелинейная ползучесть, эпюра напряжений в сжатой зоне искривляется. При этом неупругие деформации учитываются уменьшением ядрового расстояния r.

4. Напряжения в бетоне растянутой зоны распределены равномерно и равны по величине $R_{bt,ser}$, т. е. эпюра напряжений в растянутой зоне прямоугольная: $\sigma_b = R_{bt,ser}$. Фактическая эпюра напряжений в растянутом бетоне отличается от прямоугольной и имеет криволинейное очертание. Однако принятие прямоугольной эпюры упрощает расчет и приводит к неплохой сходимости расчета и опыта.

5. Напряжения в ненапрягаемой арматуре равны алгебраической сумме напряжений, отвечающих приращению деформаций окружающего бетона, и напряжений, вызванных усадкой и ползучестью бетона. Напряжение в такой арматуре, расположенной вблизи крайнего растянутого волокна (без учета начальных напряжений от усадки и ползучести бетона), равно $(2R_{bt,ser}/E_b)E_s = 2\alpha R_{bt,ser} \approx 30$ МПа.

6. Напряжения в напрягаемой арматуре равны алгебраической сумме ее предварительного напряжения (с учетом всех потерь) и напряжения, отвечающего приращению деформаций окружающего бетона. Если такая арматура расположена вблизи крайнего растянутого волокна, то напряжение в ней равно $2\alpha R_{bt,ser} + \sigma_p$.

2.3. Определение момента образования трещин в изгибаемых элементах по предельным усилиям

Рассмотрим сечение, симметричное относительно плоскости действия сил, железобетонного элемента с сжатой A_s' и растянутой A_s ненапрягаемой арматуры. В соответствии с принятыми основными положениями расчета эпюры напряжений и деформаций имеют вид, показанный на рис. 2.1.

Определим напряжение в арматуре и сжатом бетоне. Напряжение в бетоне на уровне крайнего сжатого волокна при $у = 1$ (неупругие деформации не учитываются):

$$\sigma'_b = \frac{2R_{bt,ser}}{E_b} \frac{x}{h-x} E_b \bar{\nu} = 2R_{bt,ser} \frac{x}{h-x}.$$

Напряжение в бетоне на уровне центра тяжести площади сжатой зоны (средние напряжения):

$$\sigma'_{bm} = \sigma'_b \ (y'_m/x).$$

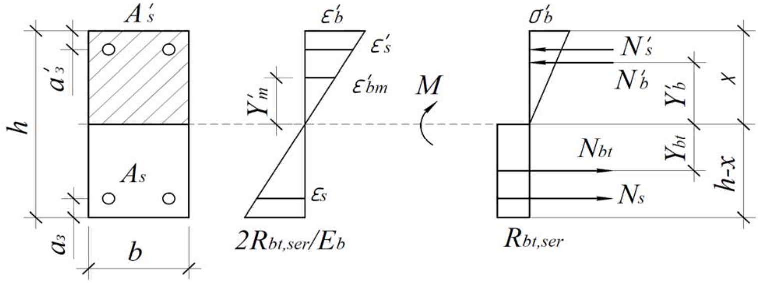


Рис. 2.1. Схемы усилий, напряжений и деформаций в поперечном сечении изгибаемого ненапряженного элемента при его расчете по образованию нормальных трещин

Напряжения в растянутой и сжатой арматуре (без учета напряжений от усадки и ползучести бетона) соответственно:

$$\sigma'_s = \frac{2R_{bt,ser}}{E_b} \frac{x-a'}{h-x} E_s = 2R_{bt,ser} \frac{x-a'}{h-x} \alpha;$$

$$\sigma_s = \frac{2R_{bt,ser}}{E_b} \frac{h-x-a}{h-x} E_s = 2R_{bt,ser} \frac{h-x-a}{h-x} \alpha.$$

Отсюда усилия, воспринимаемые бетоном и арматурой непосредственно перед образованием трещин:

$$N_b = 2R_{bt,ser} \frac{x}{h-x} \frac{y'_m}{x} A_b = \frac{2R_{bt,ser} S'_{b,0}}{h-x};$$

$$N'_s = 2R_{bt,ser} \frac{x-a'}{h-x} \alpha A'_s = \frac{2R_{bt,ser} \alpha S'_{s,0}}{h-x};$$

$$N_s = 2R_{bt,ser} \frac{h-x-a}{h-x} \alpha A_s = \frac{2R_{bt,ser} \alpha S_{s,0}}{h-x};$$

$$N_{bt} = R_{bt,ser} A_{bt},$$

где $S'_{b,0}$, $S'_{s,0}$, $S_{s,0}$ – статические моменты площадей сечения соответственно сжатой зоны бетона, арматуры A_s' и A_s относительно нулевой линии; A_{bt} – площадь сечения растянутой зоны бетона.

Из условия равенства нулю суммы проекций всех продольных сил получим выражение

$$\frac{2}{h-x}\left(S'_{b,0} + \alpha S'_{s,0} - \alpha S_{s,0}\right) - A_{bt} = 0 \qquad (2.2)$$

или формулу, приведенную в СНиП 2.03.01–84:

$$S'_{b,0} + \alpha S'_{s,0} - \alpha S_{s,0} = (h-x)A_{bt}/2.$$

Из равенства (2.2) можно найти положение нулевой (нейтральной) линии. После этого можем определить момент внутренних сил относительно нулевой линии, он равен внешнему моменту M_{crc} непосредственно перед образованием трещин:

$$M_{crc} = N'_b y'_b + N'_s(x-a') + N_s(h-x-a) + N_{bt}y_{bt}. \qquad (2.3)$$

Или, подставляя найденные выше выражения для усилий в бетоне и арматуре, получим

$$M_{crc} = R_{bt,ser}\left[\frac{2}{h-x}\left(S'_{b,0}y'_b + \alpha A'_s(x-a')^2 + \alpha A_s(h-x-a)^2\right) + A_{bt}y_{bt}\right],$$

где y_b' – расстояние от равнодействующей усилий в сжатой зоне до нулевой линии; $y_b' = I_{b,0}/S'_{b,0}$; y_{bt} – расстояние от равнодействующей усилий в растянутой зоне до нулевой линии.

2.4. Методика определения момента трещинообразования по нелинейной деформационной модели с применением двухлинейной диаграммы бетона на растяжение

Расчет железобетонных элементов по образованию нормальных трещин по нелинейной деформационной модели производят на основе диаграмм состояния арматуры, растянутого и сжатого бетона и гипотезы плоских сечений.

Критерием образования трещин является достижение на крайнем волокне растянутого бетона значений относительных деформаций, превышающих предельные деформации бетона при осевом растяжении.

Рассмотрим сечение, симметричное относительно плоскости действия сил, железобетонного элемента с многорядным армированием ненапрягаемой арматурой (рис. 2.2, *а*). В соответствии с принятыми положениями при использовании двухлинейных диаграмм состояния бетона и арматуры эпюры деформаций и напряжений имеют вид, показанный на рис. 2.2, *б*, *в*.

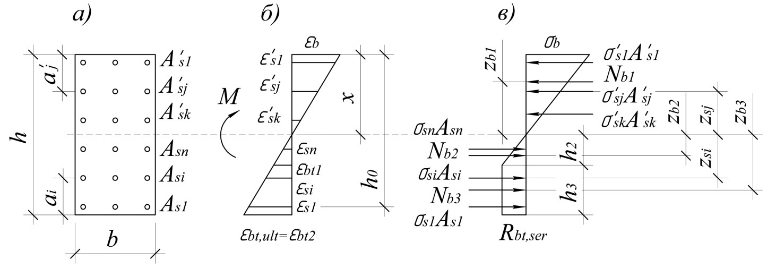


Рис. 2.2. К расчету момента трещинообразования нормального сечения железобетонного ненапряженного изгибаемого элемента с использованием двухлинейной диаграммы бетона на растяжение: *а* – схема расчетного сечения с многорядным армированием; *б* – эпюра деформаций; *в* – эпюра напряжений

Основным действием в процессе определения момента трещинообразования является проверка уравнения равновесия усилий:

$$N_{b2} + N_{b3} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_{si} A_{si} - N_{b1} - \sum_{j=1}^{n} \sigma_{sj} A'_{sj} = 0, \qquad (2.4)$$

при условии $\varepsilon_{bt,ult} = \varepsilon_{bt2} = 0{,}00015$ (рассматривается непродолжительное действие нагрузки) $\sigma_b = \varepsilon_b E_b$, $\sigma_{si} = \varepsilon_{si} E_s$, $\sigma_{sj} = \varepsilon_{sj} E_s$, где ε_{bt2} – максимальные относительные деформации растяжения бетона на крайнем волокне растянутой зоны; σ_b и ε_b – соответственно напряжение и относительные деформации сжатия на крайнем волокне сжатой зоны бетона; ε_{si} и σ_{si} – соответственно деформации и напряжения в арматуре растянутой зоны бетона; ε_{sj} и σ_{sj} – соответственно деформации и напряжения в арматуре сжатой зоны; N_{b1} – усилие в бетоне сжатой зоны на участке распределения напряжений $x = h_1$ (x – высота сжатой зоны бетона); N_{b2} – усилие в бетоне растянутой зоны на участке распределения напряжений h_2; N_{b3} – усилие в бетоне растянутой зоны на участке распределения напряжений h_3; E_s – модуль упругости стали.

Из линейного закона распределения деформаций по высоте сечения следует

$$\frac{1}{\rho} = \chi = \frac{\varepsilon_{bt2}}{h - x} = \frac{\varepsilon_b}{x} = \frac{\varepsilon_b + \varepsilon_{bt2}}{h}. \tag{2.5}$$

Из уравнения (2.5) выразим высоту сжатой зоны x и деформации ε_{bn} через кривизну:

$$x = \frac{\chi h - \varepsilon_{bt2}}{\chi}, \varepsilon_{bn} = \chi h - \varepsilon_{bt2}. \tag{2.6}$$

Из условия подобия с учетом (2.6) определяются высоты участков напряжений h_2, h_3:

$$h_2 = \varepsilon_{bt1}/\chi, \ h_3 = (\varepsilon_{bt2} - \varepsilon_{bt1})/\chi \tag{2.7}$$

и значения деформаций в стержнях арматуры ε_{si} и ε'_{sj}:

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{bt2} - \chi a_i; \ \varepsilon'_{sj} = \chi h - \varepsilon_{bt2} - \chi a_j, \tag{2.8}$$

где a_i и a_j – расстояния от центров тяжести i-й и j-й арматуры соответственно до грани элемента растянутой зоны ($i = 1...k$) и до грани элемента сжатой зоны ($j = 1...n$).

С учетом выражений (2.5), (2.6), (2.7) и (2.8) уравнение равновесия запишется в виде

$$\frac{R_{bt}b}{2\chi}(2\varepsilon_{bt2} - \varepsilon_{bt1}) - \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2})^2}{2\chi}E_b b - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon'_{sj}E_s A'_{sj} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{si}E_s A_{si} = 0, \tag{2.9}$$

где R_{bt} – расчетное сопротивление бетона для предельных состояний второй группы; E_b – модуль деформаций бетона (определяются по таблицам свода правил).

Назначаются геометрические размеры сечения, армирование, класс бетона по прочности на сжатие, и по таблицам свода правил определяются характеристики E_s, R_{bt}, E_b.

Проверка уравнения равновесия (2.9) выполняется методом последовательных приближений (методом итераций). В первом приближении принимается $\varepsilon_b^{(1)} = \varepsilon_{bt2}$, т. е. линия деформаций разделяет сечение по высоте на две равные части ($x = h/2$). По формулам (2.5), (2.6), (2.7) и (2.8) вычисляются кривизна χ, высота сжатой зоны x, высоты участков напряжений в растянутой зоне h_2 и h_3, относительные деформации в арматуре ε_{si} и ε'_{sj}, значения которых подставляются в уравнение (2.9).

С учетом принятых на схеме знаков (отрицательные значения усилий в сжатой зоне и положительные – в растянутой зоне) по результатам вычисления уравнения (2.9) могут возникнуть два случая:
– в первом случае сумма слагаемых в левой части меньше нуля;
– во втором случае левая часть больше нуля.

При возникновении первого случая необходимо выполнить следующие операции:

– во втором приближении необходимо уменьшить деформации первого приближения $\varepsilon_b^{(1)}$ и определить новую величину деформации $\varepsilon_b^{(2)}$:

$$\varepsilon_b^{(2)} = \varepsilon_b^{(1)} - \Delta\varepsilon_b^{(1)}, \qquad (2.10)$$

принимая $\Delta\varepsilon_b^{(1)} = 0{,}1\varepsilon_b^{(1)}$ (увеличивается угол наклона прямой линии деформаций к горизонтальной оси, уменьшается высота сжатой зоны при постоянных значениях ε_{bt2});

– проверить уравнение равновесия (2.9), и если левая часть уравнения вновь меньше нуля, то деформацию на втором цикле итераций $\varepsilon_b^{(2)}$ следует еще раз уменьшить на величину $\Delta\varepsilon_b^{(2)} = \Delta\varepsilon_b^{(1)}$;

– последовательное уменьшение деформаций по формуле (2.10) выполняется до тех пор, пока левая часть уравнения не изменит знак.

После изменения знака уравнения равновесия (2.9) оценивается точность решения. Точность решения считается достаточной при значении

$$\Delta\varepsilon_b^{(k)} \leq 0{,}01\varepsilon_b^{(1)}. \qquad (2.11)$$

Если на цикле приближения (l – 1) знак изменился и условие (2.11) не выполняется, то деформации в (l) приближении увеличиваются:

$$\varepsilon_b^{(l)} = \varepsilon_b^{(l-1)} + \Delta\varepsilon_b^{(l)}, \qquad (2.12)$$

где $\Delta\varepsilon_b^{(l)} = 0{,}1\ \Delta\varepsilon_b^{(l-1)}$ при постоянных значениях ε_{bt2}.

Вычисления выполняются до тех пор, пока не будет достигнута достаточная (заданная) точность выполнения условия (2.11).

При реализации второго случая, т. е. когда левая часть уравнения оказалась больше нуля, алгоритм проверки уравнения равновесия (2.9) выполняется в той же последовательности. Однако деформации на крайнем волокне сжатой зоны, принятые в первом приближении $\varepsilon_b^{(1)}$, увеличиваются на втором цикле итераций на величину приращения:

$$\varepsilon_b^{(2)} = \varepsilon_b^{(1)} + \Delta\varepsilon_b^{(1)} \tag{2.13}$$

при постоянных значениях деформаций на крайнем волокне растянутой зоны ε_{bt2}.

Вычисления выполняются до тех пор, пока не будет достигнута достаточная (заданная) точность выполнения условия (2.11).

После завершения итераций определяется момент внутренних сил относительно нулевой линии. Он равен внешнему моменту M_{crc} непосредственно перед образованием трещин:

$$M_{crc} = \frac{R_{bt}b}{6\chi^2}(3\varepsilon_{bt2}^2 - \varepsilon_{bt1}^2) + \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2})^3}{3\chi^2}E_b b + \\ + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon'_{sj} E_s A'_{sj} z_{si} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{si} E_s A_{si}\, z_{sj}, \tag{2.14}$$

где $z_{si} = h - x - a_i$; $z_{sj} = x - a_j$; $z_{b1} = \frac{2}{3}\left(\frac{\chi h - \varepsilon_{bt2}}{\chi}\right)$; $z_{b2} = \frac{2\varepsilon_{bt1}}{3\chi}$; $z_{b3} = \frac{\varepsilon_{bt2} + \varepsilon_{bt1}}{\chi}$; деформации арматуры ε_{si} и ε'_{sj} вычисляются по формулам (2.8); кривизна χ – по формуле (2.5).

При определении момента трещинообразования M_{crc} в формуле (2.14) используются величины χ, ε'_{sj}, ε_{si}, z_{si}, z_{sj}, полученные на последнем цикле итераций, после выполнения условия (2.11).

2.5. Методика определения момента трещинообразования по нелинейной деформационной модели с применением трехлинейной диаграммы бетона на растяжение

Рассмотрим сечение, симметричное относительно плоскости действия сил, железобетонного элемента с многорядным армированием ненапрягаемой арматурой (рис. 2.3, *а*). В соответствии с принятыми положениями при использовании трехлинейных диаграмм состояния бетона на растяжение эпюры деформаций и напряжений имеют вид, показанный на рис. 2.3, *б, в*. К эпюрам напряжений в растянутой зоне треугольной и прямоугольной форм с применением двухлинейной диаграммы (рис. 2.2, *в*) добавляется участок напряжений высотой h_4 в форме трапеции и с результирующим усилием

N_{b4}. Основным действием в процессе определения момента трещинообразования, как в случае применения двухлинейных диаграмм, является проверка уравнения равновесия усилий.

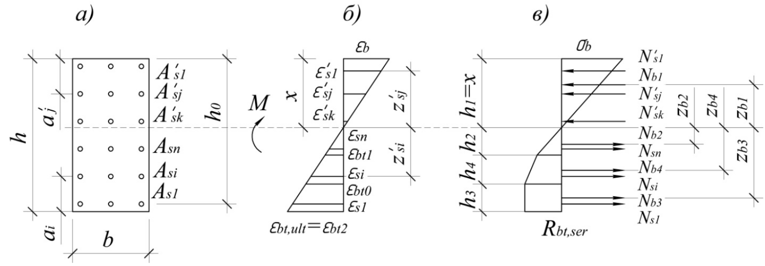


Рис. 2.3. К расчету момента трещинообразования нормального сечения железобетонного ненапряженного изгибаемого элемента с использованием трехлинейной диаграммы бетона на растяжение: *а* – схема расчетного сечения с многорядным армированием; *б* – эпюра деформаций; *в* – эпюра напряжений

Уравнение равновесия записывается в виде

$$N_{b2} + N_{b3} + N_{b4} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_{si} A_{si} - N_{b1} - \sum_{j=1}^{n} \sigma_{sj} A'_{sj} = 0. \qquad (2.15)$$

С учетом

$$h_1 = x = \frac{\chi h - \varepsilon_{bt2}}{\chi};\ h_2 = \frac{\varepsilon_{bt1}}{\chi};\ h_3 = \frac{\varepsilon_{bt2} - \varepsilon_{b0}}{\chi};\ h_4 = \frac{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{bt1}}{\chi}$$

уравнение равновесия (2.15) примет вид

$$\frac{R_{bt} b}{\chi}(\varepsilon_{bt2} - 0{,}5\varepsilon_{bt1} - 0{,}2\varepsilon_{b0}) - \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2})^2}{2\chi} E_b b - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon'_{sj} E_s A'_{sj} + \qquad (2.16)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{si} E_s A_{si} = 0,$$

где $\varepsilon'_{sj} = \chi h - \varepsilon_{bt2} - \chi a'_j$; $\varepsilon_{si} = \varepsilon_{bt2} - \chi a_i$; $\varepsilon_b = \chi h - \varepsilon_{bt2}$.

Расстояния усилий до нейтральной оси составляют:
– для усилий в арматуре N_{si} и N'_{sj}:

$$z_{si} = \frac{\varepsilon_{bt2} - a_i \chi}{\chi};\ z'_{sj} = \frac{\chi h - \varepsilon_{bt2} - a'_j \chi}{\chi}; \qquad (2.17)$$

– для усилий в бетоне N_{b1}, N_{b2} и N_{b3} соответственно:

$$z_{b1} = \frac{2(\chi h - \varepsilon_{bt2})}{3\chi};\ z_{b2} = \frac{2\varepsilon_{bt1}}{3\chi};\ z_{b3} = \frac{\varepsilon_{bt2} - \varepsilon_{b0}}{2\chi}. \qquad (2.18)$$

Эпюра напряжений на участке h_4 представляется в виде прямоугольника и треугольника, тогда расстояния до нейтральной оси выделенных из трапеции элементов соответственно равны

$$z'_{b4} = \frac{\varepsilon_{b0} + \varepsilon_{bt1}}{2\chi};\ z''_{b4} = \frac{2\varepsilon_{b0} + \varepsilon_{bt1}}{3\chi}. \qquad (2.19)$$

Момент трещинообразования M_{crc} вычисляется по формуле

$$M_{crc} = \frac{R_{bt} b}{6\chi^2} \cdot S + \frac{E_b b(\chi h - \varepsilon_{bt2})^3}{3\chi^2} + \sum_{i=1}^{k} C_i E_s A_{si} + \sum_{j=1}^{n} C'_j E_s A'_{sj}, \qquad (2.20)$$

где $S = 3\varepsilon_{bt2}^2 - 0{,}4\varepsilon_{bt0}^2 - 1{,}4\varepsilon_{bt1}^2 - 1{,}2\varepsilon_{bt0}\varepsilon_{bt1}$, $C_i = \dfrac{(\varepsilon_{bt2} - \chi a_i)^2}{\chi}$,
$C'_j = \dfrac{\left(\chi h - \varepsilon_{bt2} - a'_j \chi\right)^2}{\chi}$.

При определении момента трещинообразования M_{crc} в формуле (2.20) используются величины χ, ε'_{sj}, ε_{si}, z_{si}, z_{sj}, полученные на последнем цикле итераций, после выполнения условия (2.11).

Глава 3. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

3.1. Расчет прочности с использованием двухлинейных диаграмм состояния бетона и арматуры

Расчет железобетонного сечения на заданное воздействие изгибающим моментом в плоскости симметрии с использованием нелинейной деформационной модели включает два этапа: отыскание положения нейтральной оси (нулевой линии); вычисление предельных усилий.

Положение нулевой линии определяется из условия равенства нулю суммы проекций всех внешних и внутренних сил на продольную ось элемента. Предельные величины напряжений и усилий в сечении железобетонного элемента определяются граничными значениями деформаций в диаграммах деформирования бетона и арматуры, которые устанавливаются нормативными документами. Расчеты железобетонных конструкций по прочности с учетом полной криволинейной диаграммы бетона с нисходящей ветвью реализованы в программных комплексах для ЭВМ и без особых затруднений используются при проектировании. В то же время при выполнении поверочных расчетов, когда нагрузки, характеристики материалов зависят от условий эксплуатации конструкций, при производстве экспериментальных исследований, когда характеристики материалов определяются на стандартных образцах, для железобетонных элементов регулярной формы сечений (прямоугольной, тавровой, двутавровой форм) расчеты на прочность с приемлемой точностью можно производить с использованием упрощенных диаграмм состояния материалов.

Далее описывается деформационный метод расчета прочности с использованием упрощенной двухлинейной диаграммы на примере железобетонного элемента прямоугольной формы высотой h и шириной b с многорядным армированием ненапряженной арматурой с физической площадкой текучести (рис. 3.1, *а*): в растянутой зоне – арматурой площадью A_{si} ($i = 1...n$) и в сжатой зоне – площадью A_{sj}' ($j = 1...k$).

Нормативные документы для диаграмм состояния устанавливают граничные значения деформаций: $\varepsilon_{b2} = 0{,}0035$ – на крайнем волокне бетона сжатой зоны (при непродолжительном действии нагрузки); $\varepsilon_{s2} = 0{,}025$ – для арматуры с физическим пределом текучести и при использовании двухлинейной диаграммы состояния. При достижении граничных значений деформаций бетон и арматура выключаются из работы.

Проводим прямую линию изменения деформаций по высоте прямоугольного сечения (рис. 3.1, *б*) и отмечаем значения деформаций: ε_{bn} – на крайнем волокне бетона сжатой зоны; ε_{sj}' – деформации на уровне центра тяжести сжатой арматуры площадью A_{sj}'; ε_{si} – деформации на уровне центра тяжести растянутой арматуры площадью A_{si}; ε_{b1} – деформации бетона в пределах сжатой зоны.

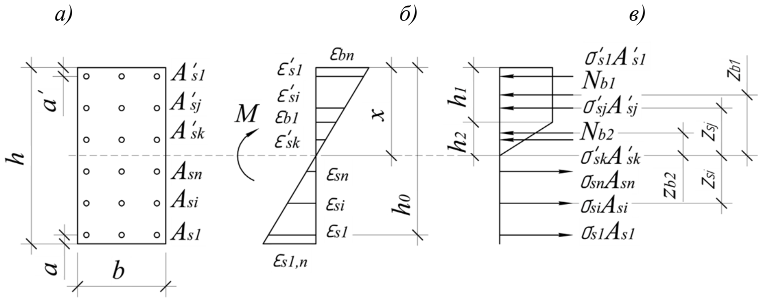


Рис. 3.1. К построению метода расчета на прочность нормального сечения железобетонного изгибаемого элемента с использованием двухлинейных диаграмм состояния сжатия бетона и растяжения арматуры: *а* – схема расчетного сечения с многорядным армированием; *б* – эпюра деформаций; в – эпюра напряжений

В первом приближении принимаем $\varepsilon_{bn}^{(1)} = \varepsilon_{b2}$, тогда для двухлинейной диаграммы бетона $\varepsilon_{b1} = \sigma_{b1}/E_b$; $\varepsilon_{s2}^{(1)}$ – деформации на уровне центра тяжести арматуры A_{s1} (наиболее удаленной от нейтральной оси в растянутой зоне).

В этом случае эпюра напряжений в сжатой зоне бетона включает два участка (рис. 3.1, *в*): участок прямоугольной формы с постоянным значением напряжений $\sigma_{b1} = R_b$ и высотой h_1, соответствующий уменьшению деформаций от значения ε_{b2} до значения ε_{b1} (на диаграмме бетона горизонтальная линия); примыкающий участок формы треугольника высотой h_2, соответствующий уменьшению деформаций от значения ε_{b1} до 0 (на диаграмме бетона линия пропорциональной зависимости напряжений от деформаций). К центрам тяжести участков прикладываются усилия сжатия N_{b1} и N_{b2} соответственно для первого и второго участка, кроме того, в арматуре сжатой зоны возникают усилия $N_{sj}' = \sigma_{sj}' A_{sj}'$. На уровне тяжести арматуры A_{si} действуют усилия растяжения $N_{si} = \sigma_{si} A_{si}$. Уравнение равновесия усилий в сечении железобетонного элемента запишется в виде

$$N_{b1} + N_{b2} + \sum_{j=1}^{k} N_{sj}' - \sum_{i=1}^{n} N_{si} = 0. \tag{3.1}$$

Выразим значения усилий в бетоне и арматуре в уравнении (3.1) через напряжения, тогда

$$R_b b h_1 + \frac{R_b b h_2}{2} + \sum_{j=1}^{k} \sigma_{sj}' \, A_{sj}' - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} \, A_{si} = 0. \tag{3.2}$$

Из соотношения $\frac{\varepsilon_{b2}}{x} = \frac{\varepsilon_{s2}}{(h_0 - x)}$ определяется высота сжатой зоны:

$$x = \frac{\varepsilon_{b2} h_0}{\varepsilon_{s2} + \varepsilon_{b2}} = \frac{\varepsilon_{b2}}{\chi}, \tag{3.3}$$

где χ – кривизна элемента, величина которой определяется по формуле

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{s2}}{h_0}, \tag{3.4}$$

здесь ρ – радиус кривизны; h_0 – рабочая высота элемента.

Из соотношения $\frac{\varepsilon_{b2}}{x} = \frac{\varepsilon_{b1}}{h_2}$ определяется высота второго участка h_2:

$$h_2 = \frac{\varepsilon_{b1} x}{\varepsilon_{b2}} = \frac{\varepsilon_{b1}}{\chi}. \tag{3.5}$$

Соответственно, высота первого участка h_1:

$$h_1 = x - h_2 = \frac{\varepsilon_{b2} - \varepsilon_{b1}}{\chi}. \tag{3.6}$$

Значения деформаций ε_{sj}' и ε_{si} определяются из соотношений:

– для арматуры в сжатой зоне бетона

$$\frac{\varepsilon_{b2}}{x} = \frac{\varepsilon_{sj}'}{h_{sj}'},$$

где $h_{sj}' = x - a_j'$ (a_j' – расстояние от центра тяжести j-й арматуры до крайнего волокна сжатой зоны бетона);

– для арматуры в растянутой зоне

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{h_0 - x} = \frac{\varepsilon_{si}}{h_{si}},$$

где $h_{si} = h - x - a_i$ (a_i – расстояние от центра тяжести i-й арматуры до крайнего волокна растянутой зоны).

Получим

$$\varepsilon_{sj}' = \varepsilon_{b2} - \chi a_j'; \quad \varepsilon_{si} = h\chi - \varepsilon_{b2} - a_i\chi. \tag{3.7}$$

Выразим напряжения в стержнях арматуры в уравнении (3.2) через деформации с учетом механических свойств для арматуры с физической площадкой текучести:

– если $\varepsilon_{sj}' < \varepsilon_{s0}$ и $\varepsilon_{si} < \varepsilon_{s0}$, где $\varepsilon_{sj}' = R_s / E_s$, то напряжения вычисляются по линейной зависимости

$$\sigma_{sj}' = \varepsilon_{sj}' E_s; \quad \sigma_{si} = \varepsilon_{si} E_s; \tag{3.8}$$

– если $\varepsilon_{s0} \le \varepsilon_{sj}' \le \varepsilon_{s2}$ и $\varepsilon_{s0} \le \varepsilon_{si} \le \varepsilon_{s2}$ ($\varepsilon_{s2} = 0{,}025$), то

$$\sigma_{sj}' = R_s \quad \text{и} \quad \sigma_{si} = R_s. \tag{3.9}$$

С учетом формул (3.4), (3.5) и (3.6) уравнение (3.2) в окончательном виде запишется:

$$\frac{R_b b}{2\chi}(2\varepsilon_{b2} - \varepsilon_{b1}) + \sum_{j=1}^{k} \sigma_{sj}' A_{sj}' - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} A_{si} = 0, \tag{3.10}$$

где напряжения в арматуре σ_{sj}' и σ_{si} вычисляются по формуле (3.8) или принимают значения согласно (3.9) в зависимости от величин деформаций, определяемых по формуле (3.7).

Уравнение проекций внутренних усилий на горизонтальную ось (3.10) в левой части включает три слагаемых, которые выражены через деформации. Первые два слагаемых определяют усилия в бетоне и арматуре сжатой зоны и принимаются с положительным знаком, третье слагаемое составляет усилие в растянутой зоне (сопротивление растянутой зоны бетона допускается не учитывать, за исключением железобетонных конструкций, в которых не допускается образование трещин) и принимается с отрицательным знаком. Очевидно, равновесие внутренних усилий будет обеспечено, если положительная сумма слагаемых будет по абсолютной величине равна отрицательному слагаемому.

Основным действием в процессе определения прочности сечения изгибаемого элемента является проверка уравнения равновесия (3.10).

Назначаются геометрические размеры сечения, армирование, класс бетона по прочности на сжатие, и по таблицам свода правил определяются характеристики E_s, R_b, E_b. Выбирается вид диаграммы (двухлинейная), определяются граничные ε_{s2}, ε_{b2} и вычисляются промежуточные ε_{b1}, ε_{s0} значения деформаций в диаграммах состояния бетона и арматуры при соответствующих значениях напряжений.

Проверка уравнения равновесия (3.10) выполняется методом последовательных приближений (методом итераций). Для первого принятого ранее приближения ($\varepsilon_{bn}{}^{(1)} = \varepsilon_{b2} = 0{,}0035$, $\varepsilon_{s2}{}^{(1)} = 0{,}025$ – деформации на уровне центра тяжести арматуры A_{s1}) вычисляются: высота сжатой зоны x (3.3), кривизна χ (3.4), высоты участков напряжений в сжатой зоне h_1 (3.6), h_2 (3.5), относительные деформации в арматуре ε_{si} и ε_{sj}' (3.7) и напряжения в арматуре (3.8) или (3.9), значения которых подставляются в уравнение (3.10).

С учетом принятых на схеме знаков (отрицательные значения усилий в растянутой зоне и положительные значения усилий в сжатой зоне) по результатам вычисления уравнения (3.10) могут возникнуть два случая:

– в первом случае сумма слагаемых в левой части больше нуля, что свидетельствует о недостаточности армирования;
– во втором случае левая часть меньше нуля, что означает переармирование сечения.

При возникновении первого случая необходимо выполнить следующие операции:

– во втором приближении необходимо уменьшить деформации первого приближения $\varepsilon_{bn}{}^{(1)}$ и определить новую величину деформации $\varepsilon_{bn}{}^{(2)}$:

$$\varepsilon_{bn}{}^{(2)} = \varepsilon_{bn}{}^{(1)} - \Delta\varepsilon_b{}^{(1)}, \qquad (3.11)$$

принимая $\Delta\varepsilon_b{}^{(1)} = 0{,}1\varepsilon_{bn}{}^{(1)}$ (увеличивается угол наклона прямой линии деформаций к горизонтальной оси, уменьшается высота сжатой зоны при постоянных значениях ε_{s2});

– проверить уравнение равновесия (3.10), и если левая часть уравнения вновь больше нуля, то деформацию на втором цикле итераций $\varepsilon_{bn}^{(2)}$ следует еще раз уменьшить на величину $\Delta\varepsilon_b^{(2)} = \Delta\varepsilon_b^{(1)}$;

– последовательное уменьшение деформаций по формуле (3.11) выполняется до тех пор, пока левая часть уравнения не изменит знак.

После изменения знака уравнения равновесия (3.10) оценивается точность решения. Точность решения считается достаточной при значении

$$\Delta\varepsilon_b^{(k)} \le 0{,}01\varepsilon_{bn}^{(1)}. \qquad (3.12)$$

Если на цикле приближения (l – 1) знак изменился и условие (3.12) не выполняется, то деформации в (l) приближении увеличиваются:

$$\varepsilon_b^{(l)} = \varepsilon_b^{(l-1)} + \Delta\varepsilon_b^{(t)}, \qquad (3.13)$$

где $\Delta\varepsilon_b^{(l)} = 0{,}1\Delta\varepsilon_b^{(l-1)}$ при постоянных значениях $\varepsilon_{s2} = 0{,}025$.

Вычисления выполняются до тех пор, пока не будет достигнута достаточная (заданная) точность выполнения условия (3.12).

При реализации второго случая, т. е. когда левая часть уравнения оказалась меньше нуля, алгоритм проверки уравнения равновесия (3.10) выполняется в той же последовательности. Однако деформации в арматуре, наиболее удаленной от нейтральной оси, принятые в первом приближении $\varepsilon_{s1}^{(1)} = \varepsilon_{s2} = 0{,}025$, уменьшаются на втором цикле итераций на величину приращения

$$\varepsilon_{s1}^{(2)} = \varepsilon_{s1}^{(1)} - \Delta\varepsilon_s^{(1)} \qquad (3.14)$$

при постоянных значениях деформаций на крайнем волокне сжатой зоны бетона $\varepsilon_{b2} = 0{,}0035$.

Вычисления выполняются до тех пор, пока не будет достигнута достаточная (заданная) точность выполнения условия (3.12) по $\Delta\varepsilon_s^{(k)}$.

Условие прочности сечений железобетонных изгибаемых элементов записывается в виде $M \le M_{ult}$, где M – изгибающий момент от внешних нагрузок; M_{ult} – предельный изгибающий момент, воспринимаемый сечением элемента. Значения M_{ult} для элементов прямоугольного сечения определяются относительно фиксированной нулевой линии.

Расстояния усилий до нейтральной оси составляют:

– для усилий в арматуре N_{si} и N_{sj}' соответственно:

$$z_{si} = \frac{\varepsilon_{b2} - a_i\chi}{\chi};\ z_{sj}' = \frac{\chi h_0 - \varepsilon_{b2} - a_j'\chi}{\chi}; \qquad (3.15)$$

– для усилий в бетоне N_{b2} и N_{b2} соответственно:

$$z_{b1} = \frac{\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{b1}}{2\chi};\ z_{b2} = \frac{2\varepsilon_{b1}}{3\chi}. \qquad (3.16)$$

При использовании двухлинейной диаграммы бетона уравнение предельного изгибающего момента в общем виде запишется:

$$M_{ult} = R_b b h_1 z_{b1} + \frac{R_b b h_2}{2} z_{b2} + \sum_{j=1}^{k} \sigma_{sj}' A_{sj}' z_{sj}' + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} A_{si} z_{si}. \quad (3.17)$$

С учетом зависимостей (3.5), (3.6) и (3.16) уравнение (3.17) примет окончательный вид:

$$M_{ult} = \frac{R_b b}{2\chi}(2\varepsilon_{b2} - \varepsilon_{b1}) + \sum_{j=1}^{k} \sigma_{sj}' A_{sj}' z_{sj}' + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} A_{si} z_{si}, \qquad (3.18)$$

где z_{sj}' и z_{si} вычисляются по формуле (3.15).

В процессе последовательного приближения изменяются угол наклона эпюры деформаций и координаты нулевой линии, поэтому при определении предельного изгибающего момента M_{ult} используют величины $\varepsilon_{bn}^{(k)}$; $\varepsilon_{sn}^{(k)}$; $\chi^{(k)}$, полученные на последних циклах итераций.

3.2. Расчет прочности с использованием трехлинейных диаграмм состояния бетона и арматуры

Далее описывается деформационный метод расчета прочности с использованием упрощенной трехлинейной диаграммы на примере железобетонного элемента прямоугольной формы высотой h и шириной b с многорядным армированием ненапряженной арматурой с условным пределом текучести (рис. 3.2, *а*): в растянутой зоне – арматурой площадью A_{si} ($i = 1...n$) и в сжатой зоне – площадью A_{sj}' ($j = 1...k$).

Проводим прямую линию изменения деформаций по высоте прямоугольного сечения (рис. 3.2, *б*) и отмечаем значения деформаций: ε_{bn} – на крайнем волокне бетона сжатой зоны; ε_{sj}' – деформации на уровне центра тяжести сжатой арматуры площадью A_{sj}';

ε_{si} – деформации на уровне центра тяжести растянутой арматуры площадью A_{si}; ε_{b1} и ε_{b0} – деформации бетона в пределах сжатой зоны.

В первом приближении принимаем $\varepsilon_{bn} = \varepsilon_{b2}$, тогда для трехлинейной диаграммы бетона $\varepsilon_{b1} = \sigma_{b1}/E_b$ ($\sigma_{b1} = 0{,}6R_b$); ε_{b0} – предельные относительные деформации при осевом сжатии (при непродолжительном действии нагрузки принимаются равными 0,002). Для трехлинейной диаграммы арматуры $\varepsilon_{s2} = 0{,}015$ – деформации на уровне центра тяжести арматуры A_{s1} (наиболее удаленной от нейтральной оси в растянутой зоне), $\varepsilon_{s0} = R_s/E_s + 0{,}002$; $\varepsilon_{s1} = 0{,}9R_s/E_s$. При использовании трехлинейной расчетной диаграммы бетона эпюра напряжений бетона сжатой зоны включает три участка (рис. 3.2, *в*): участок прямоугольной формы с постоянным значением напряжений $\sigma_b = R_b$ и высотой h_1, соответствующий уменьшению деформаций от значения ε_{b2} до значения ε_{b0} (на диаграмме бетона горизонтальная линия); примыкающий участок в форме трапеции высотой h_2, соответствующий на диаграмме бетона линейному закону изменения напряжений на отрезке напряжений $0{,}6R_b$–R_b от приращения деформаций $\Delta\varepsilon_2 = \varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1}$; примыкающий участок треугольной формы высотой катета h_3, соответствующий на диаграмме бетона линейному закону изменения напряжений на отрезке 0–$0{,}6R_b$ от нулевых деформаций до значения ε_{b1}.

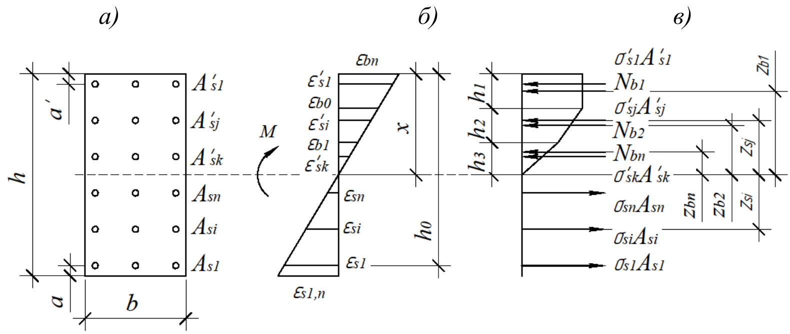


Рис. 3.2. К построению метода расчета на прочность нормального сечения железобетонного изгибаемого элемента с использованием трехлинейных диаграмм состояния сжатия бетона и растяжения арматуры: *а* – схема расчетного сечения с многорядным армированием; *б* – эпюра деформаций; *в* – эпюра напряжений

Уравнение равновесия усилий в сечении железобетонного элемента запишется в виде

$$N_{b1} + N_{b2} + N_{b3} + \sum_{j=1}^{k} N'_{sj} - \sum_{i=1}^{n} N_{si} = 0. \qquad (3.19)$$

Выразим значения усилий в бетоне через напряжения:

$$N_{b1} = R_b b h_1;\ N_{b2} = R_b b h_2 - \frac{(R_b - 0{,}6R_b) b h_2}{2};\ N_{b3} = \frac{0{,}6 R_b b h_3}{2}, \qquad (3.20)$$

$$R_b b h_1 + \left[R_b b h_2 - \frac{(R_b - 0{,}6R_b) b h_2}{2}\right] + \frac{0{,}6 R_b b h_3}{2} + \\ + \sum_{j=1}^{k} \sigma'_{sj} A'_{sj} - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} A_{si} = 0. \qquad (3.21)$$

Для определения усилия на втором участке площадь трапеции вычисляется как разность площадей прямоугольника высотой h_2 с напряжениями, равными R_b, и треугольника с катетами $0{,}4R_b$ и h_2 (второе слагаемое, заключенное в уравнении (3.21) в квадратные скобки).

Из соотношения $\frac{\varepsilon_{b2}}{x} = \frac{\varepsilon_{s2}}{(h_0 - x)}$ определяется высота сжатой зоны:

$$x = \frac{\varepsilon_{b2} h_0}{\varepsilon_{s2} + \varepsilon_{b2}} = \frac{\varepsilon_{b2}}{\chi}, \qquad (3.22)$$

где χ – кривизна элемента, величина которой определяется по формуле

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{s2}}{h_0}, \qquad (3.23)$$

здесь ρ – радиус кривизны; h_0 – рабочая высота элемента.

Значения деформаций ε_{sj}' и ε_{si} определяются из соотношений:

– для арматуры в сжатой зоне бетона

$$\frac{\varepsilon_{b2}}{x} = \frac{\varepsilon'_{sj}}{h'_{sj}},$$

где $h_{sj}' = x - a_j'$ (a_j' – расстояние от центра тяжести j-й арматуры до крайнего волокна сжатой зоны бетона);

– для арматуры в растянутой зоне

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{h_0 - x} = \frac{\varepsilon_{si}}{h_{si}},$$

где $h_{si} = h - x - a_i$ (a_i – расстояние от центра тяжести i-й арматуры до крайнего волокна растянутой зоны).

Получим

$$\varepsilon'_{sj} = \varepsilon_{b2} - \chi a'_j;\ \varepsilon_{si} = h\chi - \varepsilon_{b2} - a_i\chi. \tag{3.24}$$

Для арматуры с условным пределом текучести принимаем трехлинейную диаграмму:

– если $\varepsilon_{sj}' < \varepsilon_{s1}$ и $\varepsilon_{si} < \varepsilon_{s1}$ ($\varepsilon_{s1} = 0{,}9R_s/E_s$), то напряжения вычисляются по линейной зависимости:

$$\sigma'_{sj} = \varepsilon'_{sj}E_s,\ \sigma_{si} = \varepsilon_{si}E_s; \tag{3.25}$$

– если $\varepsilon_{s1} \le \varepsilon_{sj}' \le \varepsilon_{s2}$ и $\varepsilon_{s1} \le \varepsilon_{si} \le \varepsilon_{s2}$ ($\varepsilon_{s2} = 0{,}015$), то σ_{sj}' и σ_{si} вычисляются по формуле (6.16) СП 63.13330.2012.

Из соотношения $\frac{\varepsilon_{b2}}{x} = \frac{\varepsilon_{b1}}{h_3}$ вычисляется высота третьего участка h_3:

$$h_3 = \frac{\varepsilon_{b1}x}{\varepsilon_{b2}} = \frac{\varepsilon_{b1}}{\chi}. \tag{3.26}$$

Из соотношения $\frac{\varepsilon_{b1}}{h_3} = \frac{\varepsilon_{b0}}{h_2+h_3}$ вычисляется высота второго участка h_2:

$$h_2 = \frac{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1}}{\chi}. \tag{3.27}$$

Соответственно, высота первого участка h_1 равна

$$h_1 = x - h_2 - h_3 = \frac{\varepsilon_{b2} - \varepsilon_{b0}}{\chi}. \tag{3.28}$$

С учетом формул (3.22), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) и (3.28) уравнение (3.19) примет окончательный вид:

$$\frac{R_b b}{\chi}(\varepsilon_{b2} - 0{,}5\varepsilon_{b1} - 0{,}2\varepsilon_{b0}) + \sum_{j=1}^{k}\sigma'_{sj}A'_{sj} - \sum_{i=1}^{n}\sigma_{si}A_{si} = 0, \tag{3.29}$$

где σ_{sj}' и σ_{si} определяются по (3.25) в зависимости от того, в каких границах линейных участков находятся относительные деформации арматуры, вычисленные по формуле (3.24).

Уравнение проекций внутренних усилий на горизонтальную ось (3.29) в левой части включает три слагаемых, которые выражены через деформации. Первые два слагаемых определяют усилия в сжатой зоне бетона и принимаются с положительным знаком, третье слагаемое составляет усилие в растянутой зоне (сопротивление растянутой зоны бетона допускается не учитывать, за исключением железобетонных конструкций, в которых не допускается образование трещин) и принимается с отрицательным знаком. Очевидно, равновесие внутренних усилий будет обеспечено, если положительная сумма слагаемых будет по абсолютной величине равна отрицательному слагаемому.

Основным действием в процессе определения прочности сечения изгибаемого элемента является проверка уравнения равновесия (3.29).

Назначаются геометрические размеры сечения, армирование, класс бетона по прочности на сжатие, и по таблицам свода правил определяются характеристики E_s, R_b, E_b. Выбирается вид диаграммы (двухлинейная или трехлинейная), определяются граничные ε_{s2}, ε_{b2} и промежуточные ε_{b1}, ε_{b0}, ε_{s1}, ε_{s0} значения деформаций в диаграммах состояния бетона и арматуры, вычисляются соответствующие значения напряжений.

Проверка уравнения равновесия (3.29) выполняется методом последовательных приближений (методом итераций). Для первого принятого ранее приближения ($\varepsilon_{bn}^{(1)} = \varepsilon_{b2} = 0{,}0035$, $\varepsilon_{sn}^{(1)} = \varepsilon_{s2} = 0{,}015$ – деформации на уровне центра тяжести арматуры A_{s1}) вычисляются кривизна χ, высота сжатой зоны, высоты участков напряжений в сжатой зоне h_1, h_2 и h_3, относительные деформации в арматуре ε_{si} и ε_{sj}', значения которых подставляются в уравнение (3.29).

С учетом принятых на схеме знаков (отрицательные значения усилий в растянутой зоне и положительные значения усилий в сжатой зоне) по результатам вычисления уравнения (3.29) могут возникнуть два случая:

– в первом случае сумма слагаемых в левой части больше нуля, что свидетельствует о недостаточности армирования;
– во втором случае левая часть меньше нуля, что означает переармирование сечения.

При возникновении первого случая необходимо выполнить следующие операции:

– во втором приближении необходимо уменьшить деформации первого приближения $\varepsilon_{bn}^{(1)}$ и определить новую величину деформации $\varepsilon_{bn}^{(2)}$:

$$\varepsilon_{bn}^{(2)} = \varepsilon_{bn}^{(1)} - \Delta\varepsilon_{b}^{(1)}, \tag{3.30}$$

принимая $\Delta\varepsilon_b^{(1)} = 0{,}1\varepsilon_{bn}^{(1)}$ (увеличивается угол наклона прямой линии деформаций к горизонтальной оси, уменьшается высота сжатой зоны при постоянных значениях ε_{s2});

– проверить уравнение равновесия (3.29), и если левая часть уравнения вновь больше нуля, то деформацию на втором цикле итераций $\varepsilon_{bn}^{(2)}$ следует еще раз уменьшить на величину $\Delta\varepsilon_b^{(2)} = \Delta\varepsilon_b^{(1)}$;

– последовательное уменьшение деформаций по формуле (3.30) выполняется до тех пор, пока левая часть уравнения не изменит знак.

После изменения знака уравнения равновесия (3.29) оценивается точность решения. Точность решения считается достаточной при значении

$$\Delta\varepsilon_b^{(k)} \le 0{,}01\varepsilon_{bn}^{(1)}. \qquad (3.31)$$

Если на цикле приближения (l – 1) знак изменился и условие (3.31) не выполняется, то деформации в (l) приближении увеличиваются:

$$\varepsilon_b^{(l)} = \varepsilon_b^{(l-1)} + \Delta\varepsilon_b^{(l)}, \qquad (3.32)$$

где $\Delta\varepsilon_b^{(l)} = 0{,}1\,\Delta\varepsilon_b^{(l-1)}$ при постоянных значениях $\varepsilon_{s2} = 0{,}025$.

Вычисления выполняются до тех пор, пока не будет достигнута достаточная (заданная) точность выполнения условия (3.31).

При реализации второго случая, т. е. когда левая часть уравнения оказалась меньше нуля, алгоритм проверки уравнения равновесия (3.29) выполняется в той же последовательности. Однако деформации в арматуре, наиболее удаленной от нейтральной оси, принятые в первом приближении $\varepsilon_{sn}^{(1)} = \varepsilon_{s2} = 0{,}015$, уменьшаются на втором цикле итераций на величину приращения:

$$\varepsilon_{sn}^{(2)} = \varepsilon_{sn}^{(1)} - \Delta\varepsilon_s^{(1)} \qquad (3.33)$$

при постоянных значениях деформаций на крайнем волокне сжатой зоны бетона $\varepsilon_{b2} = 0{,}0035$.

Вычисления выполняются до тех пор, пока не будет достигнута достаточная (заданная) точность выполнения условия (3.31) по $\Delta\varepsilon_s^{(k)}$.

Расстояния усилий до нейтральной оси составляют:

– для усилий в арматуре N_{si} и N_{sj}':

$$z_{si} = \frac{\varepsilon_{b2} - a_i\chi}{\chi};\ z_{sj}' = \frac{\chi h_0 - \varepsilon_{b2} - a_j'\chi}{\chi}; \qquad (3.34)$$

– для усилий в бетоне N_{b1}, N_{b2} и N_{b3} соответственно:

$$z_{b1} = \frac{\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{b0}}{2\chi};\ z'_{b2} = \frac{\varepsilon_{b1} + \varepsilon_{b0}}{2\chi};\ z''_{b2} = \frac{2\varepsilon_{b0} + \varepsilon_{b1}}{3\chi};\ z_{b3} = \frac{2\varepsilon_{b1}}{3\chi}. \quad (3.35)$$

Эпюра напряжений на участке h_2 представляется в виде прямоугольника и треугольника, тогда расстояния до нейтральной оси выделенных из трапеции элементов соответственно равны z'_{b2} и z''_{b2}.

Условие прочности сечений железобетонных изгибаемых элементов записывается в виде $M \le M_{ult}$, где M – изгибающий момент от внешних нагрузок; M_{ult} – предельный изгибающий момент, воспринимаемый сечением элемента. Значения M_{ult} для элементов прямоугольного сечения определяются относительно фиксированной нулевой линии.

С учетом зависимостей (3.34) и (3.35) уравнение предельного изгибающего момента, воспринимаемого сечением элемента, с использованием трехлинейных диаграмм деформирования бетона и арматуры примет окончательный вид

$$M_{ult} = \frac{R_b b}{\chi^2 6} S + \sum_{j=1}^{k} \sigma'_{sj} A'_{sj} z'_{sj} - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} A_{si}\, z_{si}, \qquad (3.36)$$

где $S = 3\varepsilon_{b2}^2 - \varepsilon_{b1}^2 - 0{,}4\varepsilon_{b0}^2 - 0{,}4\varepsilon_{b1}\varepsilon_{b0}$.

В процессе последовательного приближения изменяются угол наклона эпюры деформаций и координаты нулевой линии, поэтому при определении изгибающего момента M_{ult} используют величины $\varepsilon_{bn}^{(k)}$; $\varepsilon_{sn}^{(k)}$; $\chi^{(k)}$, полученные на последних циклах итераций.

Библиографический список

1. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. – М. : Минрегион России, 2013. – 175 с.
2. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003) / ЦНИИПромзданий, НИИЖБ. – М. : ЦНИИПромзданий, 2005. – 214 с.
3. Ерышев, В.А. Метод расчета железобетонных конструкций на прочность с применением упрощенных диаграмм деформирования материалов / В.А. Ерышев // Научное обозрение. – 2016. – № 4. – С. 21–25.
4. Ерышев, В.А. Методика расчёта деформации бетона при режимных нагружениях : монография / В.А. Ерышев. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. – 150 с.

Приложение А

Пример расчета железобетонного элемента на образование трещин по нелинейной деформационной модели

Определим момент образования трещин в изгибаемом железобетонном элементе с симметричным относительно плоскости действия момента прямоугольным сечением высотой h = 18 см, шириной b = 12 см. Ненапрягаемая арматура класса А400 диаметром 10 мм расположена в сжатой и растянутой зонах бетона (по два стержня, рис. А.1, *а*). Механические характеристики бетона и арматуры представлены в табл. А.1.

Таблица А.1

Характеристики арматуры и бетона

Сечение образца, см	Арматура			Бетон	
	$\mu = \mu'$, %	$A_s = A_s'$, см^2	$\sigma_т$, МПа	R_{bt}, МПа	$E_b \cdot 10^{-4}$, МПа
12 × 18	0,82	1,57	522	2,2	3,07

В соответствии с принятыми основными положениями расчета эпюры деформаций и напряжений с использованием **двухлинейной** диаграммы состояния бетона на растяжение имеют вид, показанный на рис. А.1, *б*, *в*.

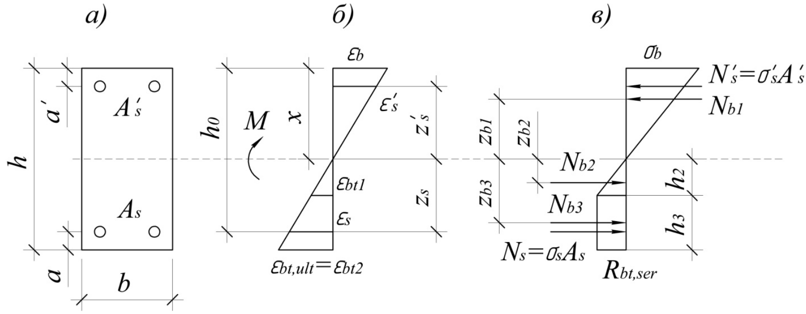


Рис. А.1. К расчету момента трещинообразования нормального сечения железобетонного ненапряженного изгибаемого элемента с использованием двухлинейной диаграммы состояния растяжения бетона: *а* – схема расчетного сечения с армированием в сжатой и растянутой зонах; *б* – эпюра деформаций; *в* – эпюра напряжений

Для двухрядного армирования ($i = 1$ и $j = 1$) и при условии $\varepsilon_{bt,ult} = \varepsilon_{bt2} = 0{,}00015$ (рассматривается непродолжительное действие нагрузки), $\sigma_b = \varepsilon_b E_b$, $\sigma'_s = \varepsilon'_s E_s$, $\sigma_s = \varepsilon_s E_s$ уравнение равновесия (2.9) принимает вид

$$\frac{R_{bt}b}{2\chi}(2\varepsilon_{bt2} - \varepsilon_{bt1}) - \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2})^2}{2\chi}E_b b - \varepsilon'_s E_s A'_s + \varepsilon_s E_s A_s = 0, \quad (\text{А}.1)$$

где $\varepsilon'_s = \chi h - \varepsilon_{bt2} - \chi a'$; $\varepsilon_s = \varepsilon_{bt2} - \chi a$.

Для симметричного армирования ($A_s = A_s'$; $a = a'$):

$$\frac{R_{bt}b}{2\chi}(2\varepsilon_{bt2} - \varepsilon_{bt1}) - \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2})^2}{2\chi}E_b b + (2\varepsilon_{bt2} - \chi h)E_s A_s = 0. \quad (\text{А}.2)$$

Соответственно упрощается уравнение момента (2.14) непосредственно перед образованием трещин:

$$M_{crc} = \frac{R_{bt}b(3\varepsilon_{bt2}^2 - \varepsilon_{bt1}^2)}{6\chi^2} + \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2})^3}{3\chi^2}E_b b + \varepsilon'_s E_s A'_s z'_s + \varepsilon_s E_s A_s z_s, \quad (\text{А}.3)$$

где $z'_s = \dfrac{\chi h - \varepsilon_{bt2} - \chi a'}{\chi}$; $z_s = \dfrac{\varepsilon_{bt2} - \chi a}{\chi}$.

Проверку равновесия в уравнении (А.2) методом последовательного приближения представляем в табличной форме (табл. А.2) в программе Microsoft Excel.

Таблица А.2

Параметры проверки уравнения равновесия

№ итераций	$\varepsilon_b^{(i)}$	χ (2.5)	A, кг	B, кг	C, кг	Σ (А.2)
1	2	3	4	5	6	7
1 2 n	0,00015 0,00014 0,000125	$1{,}67 \cdot 10^{-5}$ $1{,}61 \cdot 10^{-5}$ $1{,}5 \cdot 10^{-5}$	1808,4 1870,8 1969,98	0 –31,4 –77,24	–486,72 –2240,9 –1893,19	–678,25 –401,5 –0,4
$M_{crc} = 2{,}68$ кН · м						

В первой колонке указывается номер итераций ($i = 1...n$), во второй колонке – деформации $\varepsilon_b^{(i)}$ приближения на крайнем волокне бетона сжатой зоны ($\varepsilon_b^{(1)} = 0{,}00015$), в колонке 3 – кривизна элемента, в колонках 4, 5 и 6 – символы, обозначающие слагаемые в уравнении (А.2), в колонке 7 – сумма слагаемых в уравнении (А.2). Для железобетонного элемента с заданными параметрами условие равновесия достигается путем последовательного уменьшения деформации на крайнем волокне бетона сжатой зоны. При значении деформации $\varepsilon_b^{(n)} = 0{,}000125$ выполняется с заданной точностью условие равновесия. Используя параметры *n*-го приближения, по формуле (А.3) вычисляется значение момента трещинообразования M_{crc}.

В соответствии с принятыми основными положениями расчета эпюры деформаций и напряжений с использованием **трехлинейной** диаграммы состояния бетона на растяжение имеют вид, показанный на рис. А.2, *б*, *в*.

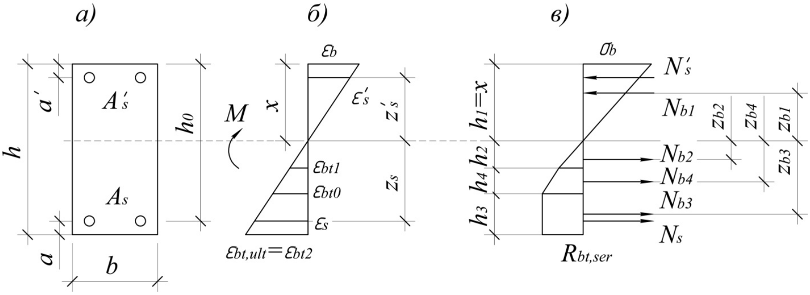


Рис. А.2. К расчету момента трещинообразования нормального сечения железобетонного ненапряженного изгибаемого элемента с использованием трехлинейной диаграммы состояния растяжения бетона: *а* – схема расчетного сечения с армированием в сжатой и растянутой зонах; *б* – эпюра деформаций; *в* – эпюра напряжений

С учетом, что

$$h_1 = x = \frac{\chi h - \varepsilon_{bt2}}{\chi};\ h_2 = \frac{\varepsilon_{bt1}}{\chi};\ h_3 = \frac{\varepsilon_{bt2} - \varepsilon_{b0}}{\chi};\ h_4 = \frac{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{bt1}}{\chi},$$

уравнение равновесия (2.15) запишется в виде

$$\frac{R_{bt}b}{\chi}(\varepsilon_{bt2} - 0{,}5\varepsilon_{bt1} - 0{,}2\varepsilon_{b0}) - \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2})^2}{2\chi}E_b b - \\ - \varepsilon'_s E_s A'_s + \varepsilon_s E_s A_s = 0, \tag{А.4}$$

где $\varepsilon_s' = \chi h - \varepsilon_{bt2} - \chi a'$; $\varepsilon_s = \varepsilon_{bt2} - \chi a$; $\varepsilon_b = \chi h - \varepsilon_{bt2}$.

Для симметричного армирования ($A_s = A'_s;\ a = a'$):

$$\frac{R_{bt}b}{\chi}(\varepsilon_{bt2} - 0{,}5\varepsilon_{bt1} - 0{,}2\varepsilon_{b0}) - \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2})^2}{2\chi}E_b b + \\ + (2\varepsilon_{bt2} - \chi h)E_s A_s = 0. \tag{А.5}$$

Расстояния усилий до нейтральной оси составляют:

– для усилий в арматуре N_s и N_s':

$$z_s = \frac{\varepsilon_{bt2}}{\chi};\ z_s' = \frac{\chi h - \varepsilon_{bt2} - a'\chi}{\chi}; \tag{А.6}$$

– для усилий в бетоне N_{b1}, N_{b2} и N_{b3} соответственно:

$$z_{b1} = \frac{2(\chi h - \varepsilon_{bt2})}{3\chi};\ z_{b2} = \frac{2\varepsilon_{bt1}}{3\chi};\ z_{b3} = \frac{\varepsilon_{bt2} - \varepsilon_{b0}}{2\chi}. \tag{А.7}$$

Эпюра напряжений на участке h_4 представляется в виде прямоугольника и треугольника, тогда расстояния до нейтральной оси выделенных из трапеции элементов соответственно равны

$$z_{b4}' = \frac{\varepsilon_{b0} + \varepsilon_{bt1}}{2\chi};\ z_{b4}'' = \frac{2\varepsilon_{b0} + \varepsilon_{bt1}}{3\chi}. \tag{А.8}$$

Момент трещинообразования M_{crc} вычисляется по формуле

$$M_{crc} = \frac{R_{bt} b}{6\chi^2} \cdot S + \frac{(\varepsilon_{bt2} - \chi a)^2}{\chi} E_s A_s + \frac{E_b b(\chi h - \varepsilon_{bt2})^3}{3\chi^2} + + \frac{(\chi h - \varepsilon_{bt2} - a'\chi)^2}{\chi} E_s A_s', \tag{А.9}$$

где $S = 3\varepsilon_{bt2}^2 - 0{,}4\varepsilon_{bt0}^2 - 1{,}4\varepsilon_{bt1}^2 - 1{,}2\varepsilon_{bt0}\varepsilon_{bt1}$.

Проверку равновесия в уравнении (А.5) методом последовательного приближения представляем в табличной форме (табл. А.3) в программе Microsoft Excel.

Таблица А.3

Параметры проверки уравнения равновесия

№ итераций	$\varepsilon_b^{(i)}$	χ (2.5)	A, кг	B, кг	C, кг	Σ (А.5)
1	2	3	4	5	6	7
1	0,00015	$1{,}66 \cdot 10^{-5}$	1718,66	–2486,7	0	–768,034
2	0,00014	$1{,}61 \cdot 10^{-5}$	1777,93	–2240,9	31,4	–431,5
n	0,0001271	$1{,}54 \cdot 10^{-5}$	1860,7	–1932,9	71,9	–0,33
M_{crc} = 2,578 кН · м						

В первой колонке указывается номер итераций ($i = 1...n$), во второй колонке – деформации $\varepsilon_b^{(i)}$ приближения на крайнем волокне бетона сжатой зоны ($\varepsilon_b^{(1)} = 0{,}00015$), в колонке 3 – кривизна элемента, в колонках 4, 5 и 6 – символы, обозначающие слагаемые в уравнении (А.5), в колонке 7 – сумма слагаемых в уравнении (А.5). Для железобетонного элемента с заданными параметрами условие равновесия достигается путем последовательного уменьшения деформаций на крайнем волокне бетона сжатой зоны. При значении деформации $\varepsilon_b^{(n)} = 0{,}0001271$ выполняется с заданной точностью условие равновесия. Используя параметры n-го приближения, по формуле (А.9) вычисляется значение момента трещинообразования M_{crc}.

Приложение Б

Пример расчета железобетонного элемента на прочность по нелинейной деформационной модели

Определим прочность изгибаемого железобетонного элемента с симметричным относительно плоскости действия момента прямоугольным сечением высотой h = 18 см, шириной b = 12 см. Ненапрягаемая арматура класса А400 диаметром 10 мм расположена в сжатой и растянутой зонах бетона (по два стержня). Механические характеристики бетона и арматуры представлены в табл. Б.1.

Таблица Б.1

Характеристики арматуры и бетона

Сечение образца, см	Арматура			Бетон	
	$\mu = \mu'$, %	$A_s = A_s'$, см^2	$\sigma_т$, МПа	R_b, МПа	$E_b \cdot 10^{-4}$, МПа
12 × 18	0,82	1,57	522	30,6	3,07

Проверку равновесия в уравнении (3.10) методом последовательного приближения с использованием двухлинейной диаграммы бетона на сжатие представляем в табличной форме (табл. Б.2) в программе Microsoft Excel.

Таблица Б.2

Параметры проверки уравнения равновесия

№ итераций	$\varepsilon_s^{(i)}$	χ (2.5)	A, кг	B, кг	C, кг	Σ (3.10)
1	2	3	4	5	6	7
1	0,025	0,00178	50509,4	67313,7	7504,6	110318,6
2	0,02	0,001469	48755,7	53576,2	7504,6	94827,4
n	0,000971	0,000279	6210,66	1294,0	7504,6	0,1366
M_{ult} = 11,028 кН · м						

В первой колонке указывается номер итераций ($i = 1...n$), во второй колонке – деформации $\varepsilon_s^{(i)}$ приближения в арматуре растянутой зоны ($\varepsilon_s^{(1)} = 0,025$), в колонке 3 – кривизна элемента, в колонках 4, 5 и 6 – символы, обозначающие слагаемые в уравнении (3.10), в колонке 7 – сумма слагаемых в уравнении (3.10). Для железобетонного элемента с заданными параметрами условие равновесия достигается путем последовательного уменьшения деформаций в арматуре растянутой зоны. При значениях деформаций $\varepsilon_s^{(n)} = 0{,}000971$ выполняется с заданной точностью условие равновесия. Используя параметры n-го приближения, по формуле (3.18) вычисляется значение предельного изгибающего момента M_{ult}.