

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

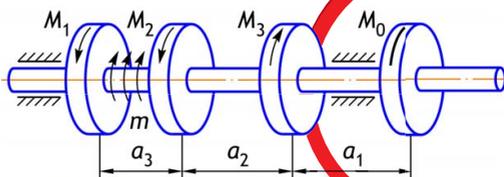
Т.Ф. Гаврилова, Е.П. Гордиенко, А.А. Разуваев

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Практикум для студентов очной формы обучения

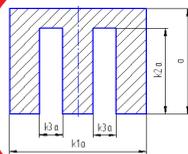
В двух частях

Часть 1



© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2017

ISBN 978-5-8259-1139-7



УДК 539.3/6

ББК 30.121

Рецензенты:

канд. пед. наук, доцент Института менеджмента,
маркетинга и права *П.Э. Шендереи*;

д-р физ.-мат. наук, профессор Тольяттинского государственного
университета *Д.Л. Мерсон*.

Под общей редакцией д-ра физ.-мат. наук,
профессора Д.Л. Мерсона.

Гаврилова, Т.Ф. Сопротивление материалов : практикум для студентов очной формы обучения. В 2 ч. / Т.Ф. Гаврилова, Е.П. Гордиенко, А.А. Разуваев ; под общ. ред. Д.Л. Мерсона. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2017. – Ч. 1. – 1 оптический диск.

Практикум содержит четыре модуля с практическими занятиями по дисциплине «Сопротивление материалов-1». В каждом модуле приведена технологическая карта обучения, в каждом практическом занятии изложен необходимый теоретический материал, выделены алгоритмы основных методов и расчетов, показано подробное решение типовой задачи, даны рекомендации по тренингу. В приложениях приведены тестовый материал, ответы к тестам, задания для выполнения расчетно-проектировочных работ (РПР), необходимый справочный материал.

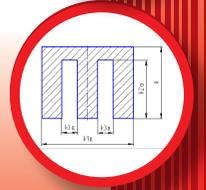
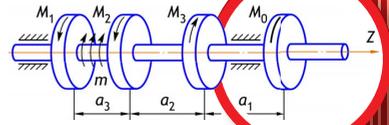
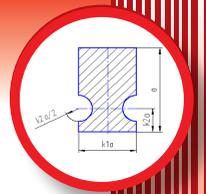
Предназначен для студентов очной формы обучения в помощь при подготовке к практическим занятиям и при выполнении расчетно-проектировочных работ по дисциплине «Сопротивление материалов». Рекомендуется для следующих направлений подготовки: 08.03.01 «Строительство», 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», 20.03.01 «Техносферная безопасность» и др.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; ПИП 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2017



Редактор *Г.В. Данилова*

Технический редактор *Н.П. Крюкова*

Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*

Художественное оформление, компьютерное

проектирование: *Г.В. Карасева, И.В. Карасев*

Дата подписания к использованию 24.11.2017.

Объем издания 10 Мб.

Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.

Заказ № 1-09-16.

Издательство Тольяттинского государственного университета

445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,

тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

МОДУЛЬ 1. Введение. Метод сечений. Построение эпюр внутренних силовых факторов при растяжении-сжатии, кручении, изгибе	6
Практическое занятие 1. Построение эпюры продольной силы N и крутящего момента M_z	7
Практическое занятие 2. Построение эпюры внутренней поперечной силы и изгибающего момента при прямом изгибе балок. Части 1 и 2	19
Практическое занятие 3. Построение эпюр внутренних силовых факторов на плоских рамах. Части 1 и 2	39
Практическое занятие 4. Построение эпюр внутренних силовых факторов на пространственных стержневых конструкциях	58
МОДУЛЬ 2. Напряжения и деформации при растяжении-сжатии. Механические испытания материалов при растяжении-сжатии. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии	70
Лабораторно-практическое занятие 1. Определение механических характеристик материала по результатам испытания на растяжение	71
Практическое занятие 5. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии	77
МОДУЛЬ 3. Расчет на прочность и жесткость при изгибе	90
Практическое занятие 6. Определение главных центральных моментов инерции составного сечения	91
Практическое занятие 7. Расчет на прочность балок при прямом изгибе	99
Практическое занятие 8. Расчет на жесткость балок при прямом изгибе	108

Практическое занятие 9. Расчет на прочность и жесткость при совместном действии двух прямых изгибов	118
Практическое занятие 10. Расчет на прочность при совместном действии изгиба и растяжения-сжатия	138
МОДУЛЬ 4. Расчет на прочность и жесткость при кручении	152
Практическое занятие 11. Расчет на прочность и жесткость круглых валов при кручении	152
Приложение 1	161
Приложение 2	173
Приложение 3	221
Приложение 4	222
Приложение 5	251

МОДУЛЬ 1

ВВЕДЕНИЕ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ, КРУЧЕНИИ, ИЗГИБЕ

Цели занятий: освоить метод сечений и научиться строить эпюры внутренних силовых факторов (ВСФ) при простых видах деформации – растяжении-сжатии, кручении и прямом изгибе балок и на сложных конструкциях – плоских и пространственных рамах.

Необходимые знания для достижения цели

1. Алгоритм метода сечений – метода построения эпюр ВСФ.
2. Правило знаков для продольной силы N , крутящего момента M_z , поперечных сил Q_y и Q_x , изгибающих моментов M_x и M_y .
3. Основные закономерности при построении эпюр N , M_z , Q_y и Q_x , M_x и M_y , следующие из метода сечений.

Технологическая карта работы в модуле

№ недели	Вид аудит. занятия	Самостоятельная работа	Контроль за выполнением самостоят. работы
1	Лекция 1	Выдача задания РПР 1	Консультации по РПР 1
	Практическое занятие 1		
2	Практическое занятие 2, ч. 1	Подготовка к практическим занятиям, выполнение РПР 1	
3	Лекция 2		
	Практическое занятие 2, ч. 2		
4	Практическое занятие 3, ч. 1		
5	Лекция 3		
	Практическое занятие 3, ч. 2		
6	Практическое занятие 4		Прием РПР 1

Практическое занятие 1

Построение эпюры продольной силы N и крутящего момента M_z

Технология построения эпюры внутренней продольной силы



Что такое внутренняя продольная сила?

Это внутренний силовой фактор, возникающий в поперечных сечениях элемента конструкции, нагруженного внешними силами, производящими деформацию растяжения или сжатия.



Зачем нужно уметь строить эпюры внутренней продольной силы?

Это необходимо для определения положения опасного сечения элемента конструкции, т. е. для нахождения величины максимального напряжения и получения условия прочности, выполнение которого позволит обеспечить прочностную надежность конструкции при ее эксплуатации.



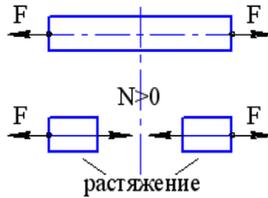
Чтобы научиться строить эпюры внутренней продольной силы, надо знать!

1. Метод сечений и вытекающие из него закономерности для построения эпюры N :

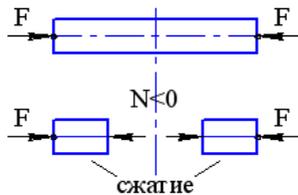
- внешняя сосредоточенная сила на эпюре N дает скачок на величину силы в сторону знака ее воздействия;
- если участок ничем не загружен (отсутствует распределенная по длине нагрузка), то на соответствующем участке эпюры должна быть прямая, параллельная базе;
- если участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , то на соответствующем участке эпюры должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным q .

2. Правило знаков для продольной силы N .

- Продольная сила считается положительной, если вызывающая её внешняя сила относительно рассматриваемого сечения растягивает стержень:



- Продольная сила считается отрицательной, если вызывающая её внешняя сила относительно рассматриваемого сечения сжимает стержень:



- Знак продольной силы имеет физическое значение в связи с тем, что некоторые материалы по-разному сопротивляются деформации растяжения и деформации сжатия.



Алгоритм построения эпюры продольной силы

1. Для построения эпюры провести базу – линию, параллельную продольной оси стержня, равную длине стержня.
2. Разделить базу эпюры на участки соответственно участкам стержня.

Для этого надо знать. Участком является часть длины стержня между точками приложения сосредоточенных сил или началом и концом действия распределенной нагрузки.

3. Для консольного типа стержней (один конец свободный, другой в жесткой заделке) выбрать направление построения эпюры от свободного конца к заделке.

4. Определить состояние в начале участка: если есть сосредоточенная сила, производящая деформацию растяжения, отложить на эпюре ординату, равную величине силы, со знаком «+». Со знаком «-», если сила производит деформацию сжатия. При отсутствии силы построение эпюры начинаем с нуля.

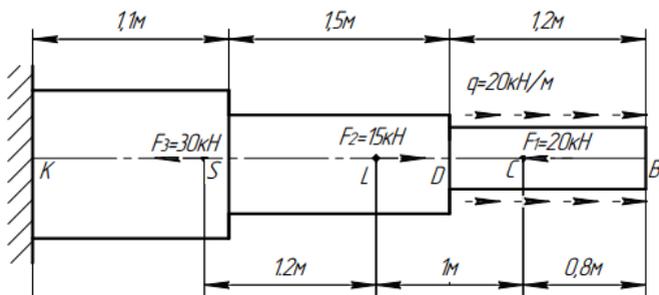
5. Определить состояние внутри участка:

- если участок пустой, провести прямую, параллельную базе, высотой, равной отложенной ординате в начале участка;
 - если участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , проводим наклонную прямую с угловым коэффициентом $= q$. Для определения величины продольной силы в конце участка прибавляем к значению ординаты в начале участка с учетом ее знака произведение $q \cdot \ell$ в случае растягивающей распределенной нагрузки. И, наоборот, вычитаем от значения ординаты в начале участка произведение $q \cdot \ell$ в случае сжимающей распределенной нагрузки. Здесь ℓ — длина участка.
6. И так далее по каждому участку.



Пример решения задачи

Для данного стержня построить эпюру продольной силы N .



Решение

Стержень имеет пять участков: BC, CD, DL, LS, SK.

Проведем параллельно продольной оси стержня базу эпюры (ось, относительно которой будем откладывать ординаты (значения) внутренней продольной силы). Разделим базу на участки соответственно участкам стержня, проводя из граничных точек участков стержня прямые \perp базе до пересечения с базой. Направление построения эпюры примем от свободного конца к заделке, не определяя реактивных сил в заделке.

1-й участок (BC)

Правая граница участка в т. «В»: отсутствует сосредоточенная сила, поэтому начинаем эпюру N с нуля.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 20$ кН/м, поэтому должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом $= +q$, так как нагрузка производит деформацию растяжения, и наклонная прямая пойдет в положительную область. Для построения наклонной прямой определим значение на левой границе участка.

Левая граница участка т. «С»: значение продольной силы определим, умножив интенсивность нагрузки на длину участка: $20 \cdot 0,8 = 16$ (кН). Откладываем в точке «С» 16 кН вверх от базы и соединяем с нулем в т. «В» наклонной прямой.

2-й участок (CD)

Правая граница участка т. «С»: здесь находится сосредоточенная сила $F_1 = 20$ кН, производящая деформацию сжатия, что на эпюре вызывает скачок в отрицательную сторону от ординаты 16 кН. Получим -4 кН.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 20$ кН/м, поэтому должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом $= +q$, так как нагрузка производит деформацию растяжения, и наклонная прямая пойдет в положительную область. Для построения наклонной прямой определим значение на левой границе участка.

Левая граница участка т. «D»: значение продольной силы в этой точке определяем следующим образом: к значению ординаты в начале участка -4 кН прибавляем произведение $q = 20$ кН/м на длину участка $0,4$ м. Получаем следующее значение продольной силы: $N = -4 + 20 \cdot 0,4 = 4$ кН, которое откладываем выше базы в конце второго участка, и наклонной прямой соединяем ординаты в точке «С» -4 кН и в точке «D» $+4$ кН.

3-й участок (DL)

Правая граница участка т. «D»: сосредоточенная сила отсутствует, поэтому значение $N = 4$ кН, полученное в данной точке на предыдущем участке, не изменяется.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе.

Левая граница участка т. «L»: значение продольной силы будет таким же, как в начале участка. Проводим прямую линию, параллельную базе, ординатой 4 кН.

4-й участок (LS)

Правая граница участка т. «L»: приложена сосредоточенная сила $F_1 = 15$ кН, которая производит деформацию растяжения и дает на эпюре скачок на величину 15 кН вверх от ординаты 4 кН. Получим 19 кН.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен. Поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе.

Левая граница участка т. «S»: значение продольной силы будет таким же, как в начале участка, т. е. 19 кН. Проводим прямую линию, параллельную базе, ординатой 19 кН.

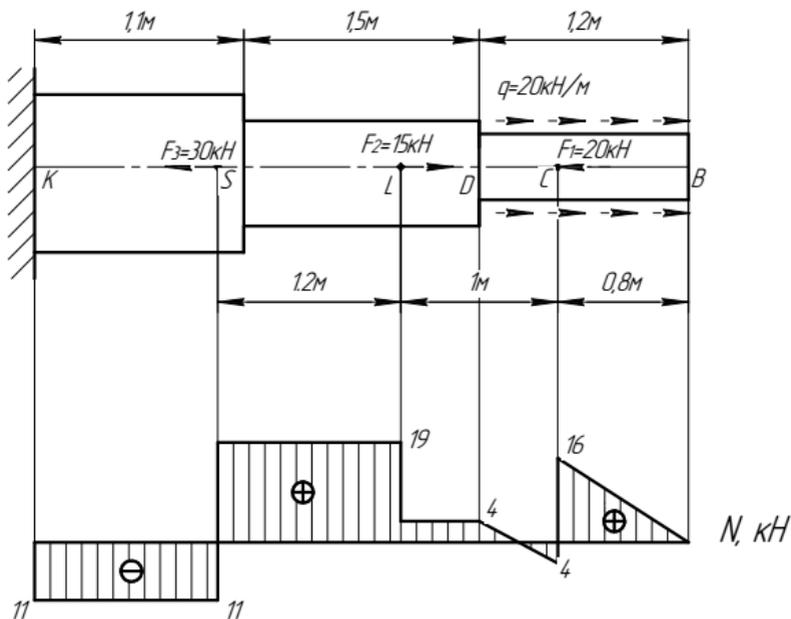
5-й участок (SK)

Правая граница участка т. «S»: здесь находится сосредоточенная сила $F_3 = 30$ кН, производящая деформацию сжатия. На эпюре это вызывает скачок на величину -30 кН от ординаты 19 кН. Получим величину -11 кН.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен. Поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе.

Левая граница участка т. «K»: значение продольной силы будет таким же, как в начале участка, т. е. равным -11 кН. Проводим прямую линию, параллельную базе, ординатой -11 кН.

Внутри эпюры ставим знаки и делаем штриховку перпендикулярно базе эпюры. Почему перпендикулярно базе? Потому что каждая штриховая линия определяет значение внутренней силы в соответствующем сечении.



Эпюра построена. 🙌😊

Технология построения эпюры внутреннего крутящего момента M_z

🗉🤔 Что такое внутренний крутящий момент?

Это внутренний силовой фактор, возникающий в поперечных сечениях элемента конструкции, нагруженного внешними парами сил, воздействующими относительно продольной оси и производящими деформацию кручения.

🗉🤔 Зачем нужно уметь строить эпюры внутреннего крутящего момента?

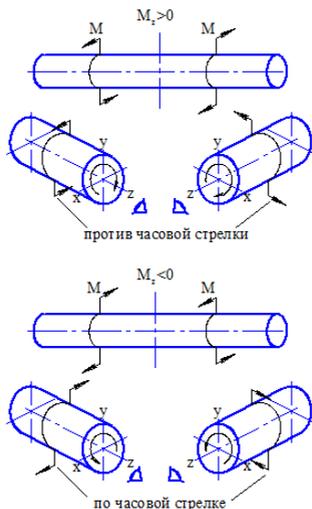
Это необходимо для определения положения опасного сечения элемента конструкции, т. е. для нахождения величины максимального напряжения и получения условия прочности, выполнение которого позволит обеспечить прочностную надежность конструкции при ее эксплуатации.

 **Чтобы научиться строить эпюры внутреннего крутящего момента, надо знать!**

1. Метод сечений и вытекающие из него закономерности для построения эпюры M_z :

- внешняя сосредоточенная пара сил на эпюре M_z дает скачок на величину пары сил в сторону знака ее воздействия;
- если участок ничем не загружен (отсутствует распределенный по длине момент), то на соответствующем участке эпюры M_z должна быть прямая, параллельная базе;
- если участок загружен равномерно распределенным моментом интенсивностью m , то на соответствующем участке эпюры должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным m .

2. Правило знаков для внутреннего крутящего момента:



 **Что мы видим на графической иллюстрации правила знаков?**

- Прежде чем определять направление вращения внешнего момента, от которого назначается знак внутреннего, следует мысленно сделать сечение в пределах участка, на котором вы хотите определить M_z , оставить любую из полученных частей вала и посмотреть в торец сделанному сечению.

- Поворачивая внешний момент, определите его направление и назначьте знак внутреннему моменту. Например, как это сделано на иллюстрации. Если внешний момент поворачивается против часовой стрелки, то внутренний момент принимается положительным. И наоборот.

Так как знак внутреннего момента не имеет физического смысла, вы имеете возможность правило знаков назначать произвольно. То есть не будет ошибки, если вы назначите знак плюс внутреннему моменту, возникающему от внешнего момента, вращающегося по часовой стрелке. **Важным** в правиле знаков является лишь то, что при определении направления вращения внешнего момента вы обязательно должны смотреть со стороны сделанного сечения! Знак внутри эпюры крутящего момента не ставится.



Алгоритм построения эпюры M_z

1. Для построения эпюры провести базу – линию, параллельную продольной оси стержня, равную длине вала.

2. Разделить базу на участки соответственно участкам вала.

Для этого нужно знать. Участок – часть длины вала между точками приложения сосредоточенных пар сил или между началом и концом действия распределенного момента.

3. Для консольного типа валов (один конец свободный, другой в жесткой заделке) выбрать направление построения эпюры от свободного конца к заделке.

4. Определить состояние в начале участка: если есть сосредоточенная пара сил, отложить ординату на эпюре, равную величине пары сил, выше или ниже базы эпюры, согласно правилу знаков. При отсутствии пары сил построение эпюры начинаем с нуля.

5. Определить состояние внутри участка:

- если участок пустой, провести прямую линию, параллельную базе, высотой, равной отложенной ординате в начале участка;
- если участок загружен равномерно распределенным моментом интенсивностью m , проводим наклонную прямую с угловым коэффициентом $= m$. Для определения величины внутреннего крутящего момента в конце участка увеличиваем ординату в начале участка с учетом ее знака на величину произведения $m \cdot \ell$, в случае

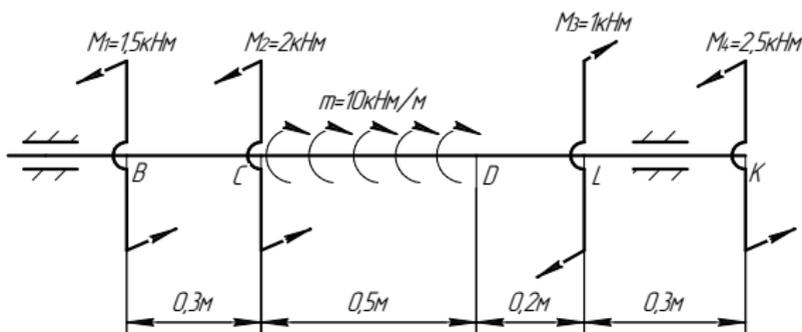
если направление распределенного момента совпадает с направлением сосредоточенного. И наоборот, уменьшаем значение ординаты в начале участка на величину произведения $m \cdot \ell$ в случае несовпадения направления распределенного момента с направлением сосредоточенного в начале участка.

6. И так далее по каждому участку.



Пример решения задачи

Для данного вала построить эпюру внутреннего крутящего момента.



Решение

Сначала проведем краткий анализ данной расчетной схемы и определим количество участков, на которые надо разделить вал.

1. Вал нагружен системой самоуравновешенных моментов. В этом можно убедиться, если алгебраически сложить все моменты, учитывая их разные направления. Одного направления на схеме моменты M_1 , M_2 и M_4 . Их сумма составляет 6 кНм. Противоположно им направлен равномерно распределенный момент и момент M_3 . Их сумма составляет: $m \cdot 0,5 \text{ м} + M_3 = 10 \text{ кНм/м} \cdot 0,5 \text{ м} + 1 \text{ кНм} = 6 \text{ кНм}$. Таким образом, сумма всех моментов будет равна нулю. Это означает, что реактивные моменты в опорах будут отсутствовать и крайний левый участок от опоры до момента M_1 не будет испытывать внешнего воздействия, а значит, в его поперечных сечениях не будет возникать внутреннего крутящего момента.

2. В результате вал можно разделить на четыре участка: BC, CD, DL, LK.

3. Под расчетной схемой параллельно продольной оси проведем базу эпюры в границах длины ВК.

4. Базу эпюры поделим на участки, соответствующие участкам расчетной схемы.

1-й участок (BC)

Выберем направление построения эпюры слева направо.

Левая граница участка т. «В»: здесь находится сосредоточенный момент $M_1 = 1,5$ кНм, который на эпюре должен вызывать скачок на величину 1,5 кНм. Примем знак скачка положительным.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен, т. е. на эпюре должна быть прямая, параллельная базе.

Правая граница участка т. «С»: значение крутящего момента будет таким же, как в начале участка. Проведем прямую линию, параллельную базе, с ординатой 1,5 кНм.

2-й участок (CD)

Левая граница участка т. «С»: здесь находится сосредоточенный момент $M_2 = 2$ кНм того же направления, что и M_1 . Это вызывает на эпюре скачок на 2 кНм вверх. Получим 3,5 кНм.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенным моментом, поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $m = 10$ кНм/м. Поскольку направление равномерно распределенного момента противоположно M_1 и M_2 , то наклонная прямая пойдет в отрицательную сторону, т. е. знак углового коэффициента примем «-». Для построения наклонной прямой определим значение внутреннего крутящего момента в конце участка.

Правая граница участка т. «D»: величину M_2 вычислим как $3,5 - m \cdot 0,5$ м = $3,5 - 10 \cdot 0,5 = -1,5$ кНм, т. е. из значения в начале участка вычитаем величину равнодействующей равномерно распределенного момента. Соединяем ординату в начале участка = 3,5 кНм с ординатой в конце участка = -1,5 кНм наклонной прямой.

3-й участок (DL)

Левая граница участка т. «D»: сосредоточенный внешний момент отсутствует, поэтому ордината -1,5 кНм не изменится.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен, поэтому на эпюре будет прямая, параллельная базе.

Правая граница участка т. «L»: значение M_z будет таким же, как в начале участка в т. «D».

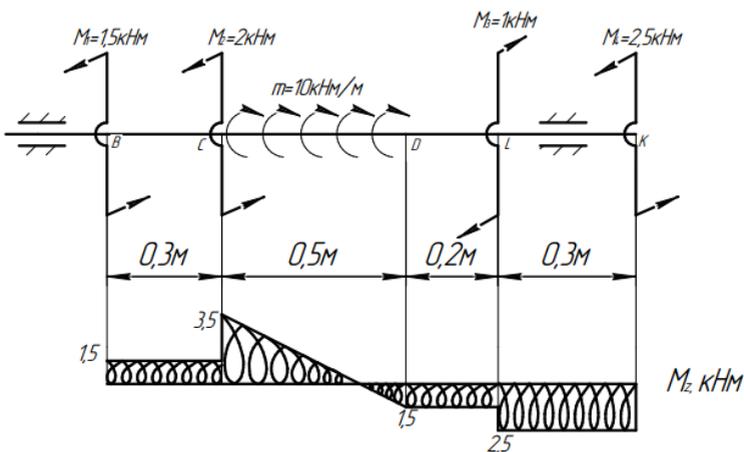
4-й участок (LK)

Левая граница участка т. «L»: здесь находится сосредоточенный момент $M_3 = 1$ кНм того же направления, что и равномерно распределенный момент. Поэтому он вызовет скачок на эпюре крутящего момента в отрицательную сторону, и мы получим ординату величиной $-2,5$ кНм.

Состояние по длине участка: участок ничем не нагружен, поэтому на эпюре будет прямая, параллельная базе.

Правая граница участка т. «K»: значение M_z будет таким же, как в начале участка в т. «L».

Знак внутри эпюры крутящего момента не ставится, а штриховка используется спиралью.

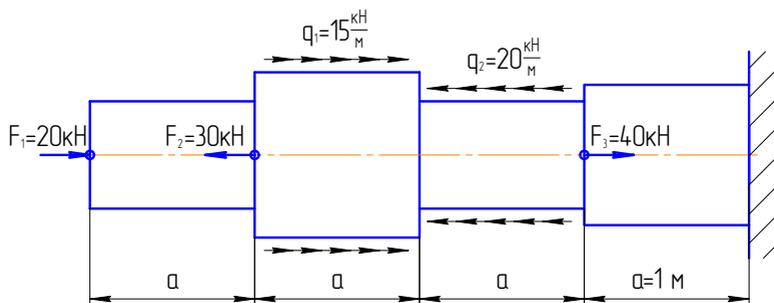


Эпюра построена.

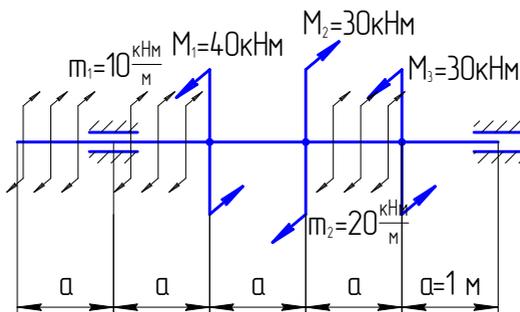


Задачи для самостоятельного решения на занятии

Задача 1. Для данной расчетной схемы построить эпюру продольной силы N , используя метод построения по характерным сечениям.



Задача 2. Для данной расчетной схемы построить эпюру крутящего момента M_z , используя метод построения по характерным сечениям.



Потренируемся?

- ◆ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 1).
- ◆ Решить задачи 1.1 и 1.2 из РПП 1 (прил. 4).

Практическое занятие 2

Построение эпюры внутренней поперечной силы и изгибающего момента при прямом изгибе балок

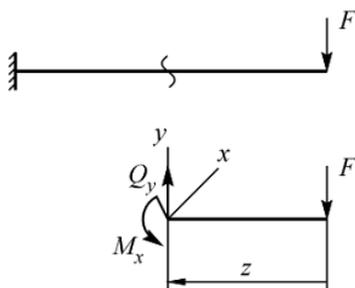
Части 1 и 2

Технология построения эпюры поперечной силы и изгибающего момента

🧐 Что такое внутренняя поперечная сила и изгибающий момент?

Поперечная сила — это внутренняя сила, возникающая в поперечном сечении элемента конструкции в ответ на действие внешних сил, дающих проекцию на одну из осей x или y поперечного сечения.

Изгибающий момент — это внутренний момент, возникающий в поперечном сечении элемента конструкции в ответ на действие моментов от внешних сил относительно одной из осей x или y поперечного сечения. Например:



$$Q_y = F, \quad M_x = F \cdot z$$

В приведенном примере мы видим, что внешняя сила F дает проекцию на ось y поперечного сечения балки и в ответ возникает поперечная сила Q_y . Кроме этого, сила F создает момент с плечом z относительно оси x , который должен быть уравновешен внутренним моментом M_x .

🧐 Зачем нужно уметь строить эпюры поперечной силы и изгибающего момента?

Это необходимо для определения положения опасного сечения и дальнейшей оценки прочности и жесткости конструкции.



Чтобы научиться строить эпюры внутренней поперечной силы и изгибающего момента, надо знать!

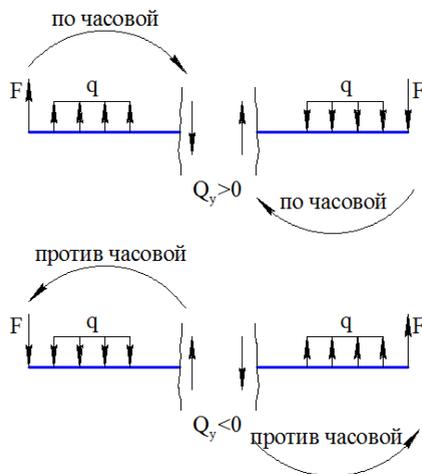
1. Метод сечений и следующие основные закономерности для построения эпюр Q_y и M_x , основанные на этом методе:

- от действия внешней сосредоточенной силы на эпюре Q_y должен быть скачок на величину силы в сторону знака ее воздействия, на эпюре M_x — перелом, острие которого направлено навстречу действию силы;
- от действия сосредоточенного внешнего момента на эпюре Q_y не происходит изменений (она на него не реагирует), на эпюре M_x должен быть скачок на величину момента в сторону знака его воздействия;
- если участок пустой (без распределенной нагрузки), то на эпюре Q_y будет прямая, параллельная базе, на эпюре M_x — прямолинейная зависимость с угловым коэффициентом, равным Q_y этого участка;
- если участок загружен равномерно распределенной нагрузкой, то на эпюре Q_y будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным интенсивности нагрузки q , на эпюре M_x — квадратичная парабола с квадратичным слагаемым $\frac{q \cdot z^2}{2}$. Выпуклость параболы направлена навстречу действию нагрузки;
- если наклонная прямая на эпюре Q_y пересекает базу, то в соответствующем сечении на эпюре M_x будет экстремум (его определение обязательно!);
- правильность построенных эпюр можно проконтролировать, используя существующую дифференциальную зависимость между Q_y и M_x : $Q_y = \frac{dM_x}{dz}$. Анализ по участкам эпюр надо проводить в строгом направлении слева направо. Если поперечная сила Q_y на участке положительна, то функция момента M_x должна быть возрастающей, и наоборот, если Q_y отрицательна, то функция M_x должна быть убывающей.

2. Правило знаков для поперечной силы и изгибающего момента.

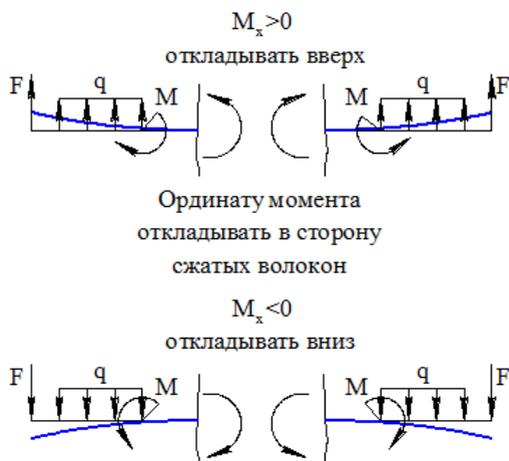
Правило знаков для поперечной силы Q_y

Поперечная сила считается положительной, если вызывающая её внешняя сила поворачивается относительно рассматриваемого сечения по часовой стрелке, и наоборот. Внутри эпюры Q_y ставится знак «+» или «-».

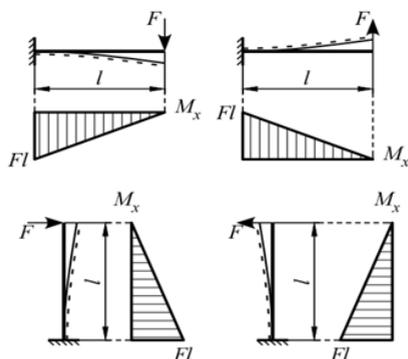


Правило знаков для изгибающего момента M_x

Ординаты на эпюре изгибающего момента откладываются в сторону сжатых волокон, и знак внутри эпюры не ставится.



Например:



Алгоритм построения эпюр Q_y и M_x экспресс-методом по характерным сечениям

1. Обозначить характерные сечения на расчетной схеме.

Для этого надо знать. Характерное сечение – это сечение на расчетной схеме, где находится сосредоточенная сила, начало и конец действия равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенный момент (только для эпюры изгибающего момента).

2. Определить количество образовавшихся участков.

Для этого надо знать. Участок – это часть длины на расчетной схеме между характерными сечениями.

3. Начинать построение эпюры Q_y и M_x следует с любого крайнего участка. Сначала проанализировать состояние в начальной точке (делать скачок или нет в зависимости от наличия сосредоточенной силы для Q_y или сосредоточенного момента для M_x). А затем анализировать состояние на участке для определения типа функции Q_y и M_x в зависимости от загруженности участка по длине.

Для выполнения этого пункта необходимо использовать основные закономерности при построении эпюр Q_y и M_x .

4. Для определения значения Q_y в конце участка, загруженного равномерно распределенной нагрузкой, следует изменить значение Q_y в начале участка на величину, равную произведению интенсивности нагрузки q на длину участка. В случае незагруженного участка значение Q_y в конце будет таким же, как в начале участка.

5. Для определения значения M_x в конце участка следует рассмотреть часть балки (рамы) до точки конца участка со стороны движе-

ния по участку. Определить величины моментов от всех нагрузок, находящихся на рассматриваемой части балки, относительно данной точки и сложить их алгебраически, применяя правило знаков.

Рекомендация. Для удобства вычисление момента в характерном сечении можно делать в табличной форме,

M_x	
ВВ.	НВ.

заменяв правило знаков, использующее «+» и «-», на занесение моментов в таблицу, в одном столбце которой должны находиться моменты от нагрузок, изгибающих балку относительно сделанного сечения так, что сжаты верхние волокна (вв.), а в другом — моменты от нагрузок, изгибающих так, что сжаты нижние волокна (нв.). Особенно это удобно делать при вычислении моментов в характерных сечениях при изгибе вертикальных стержней, у которых в изогнутом виде могут быть сжаты либо левые волокна (лв.), либо правые (пв.). Подсчитываем сумму моментов в каждом столбике и затем вычитаем из большего меньший результат. Полученную разность записываем под нижней чертой в столбик с большим результирующим моментом. Ординату этой величины откладываем в данном сечении от базы на те волокна, которые соответствуют положению результата в таблице.

6. При переходе от участка к участку необходимо четко соблюдать направление построения эпюры, т. е. движения по участку, и повторять действия п. 3.

7. После завершения построения эпюр Q_y и M_x провести проверку правильности полученного решения:

- убедиться в наличии скачков на эпюре Q_y в сечениях, где есть сосредоточенные силы; на M_x — в сечениях, где есть сосредоточенные моменты;
- убедиться в правильности типов функций Q_y и M_x по участкам и соотношения выпуклости параболы с направлением равномерно распределенной нагрузки;

- убедиться в правильной взаимосвязи функций Q_y и M_x по участкам согласно соотношению $Q_y = \frac{dM_x}{dz}$, т. е. слева направо в пределах каждого участка при $Q_y > 0$ $M_x \uparrow$, при $Q_y < 0$ $M_x \downarrow$. Если эпюра Q_y пересекает базу, в соответствующей точке на эпюре M_x должен быть экстремум, величину которого необходимо обязательно определить.

Часть 1. Построение эпюры поперечной силы и изгибающего момента на консольной балке

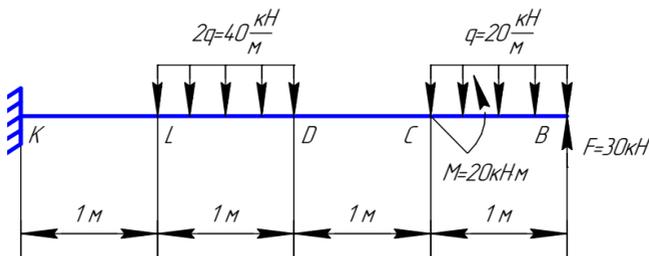
 Что такое консольная балка и какие особенности существуют при построении эпюр на такой схеме?

Консольной называют такую балку, у которой один конец закреплён в жесткой заделке, а другой свободен от закрепления. Построение эпюр производят на основе алгоритма экспресс-метода по характерным сечениям, но при этом есть **рекомендация**: строить эпюры в определенном направлении — от свободного конца к заделке, всегда оставляя часть со свободным концом для вычисления значений внутренних силовых факторов в характерном сечении. А зачем? Затем, чтобы не определять реактивных усилий в заделке, экономя время на решение задачи.



Пример решения задачи

Для данной консольной балки построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x .



Решение

Итак, строить эпюры будем, не определяя реактивных усилий в заделке. Направление построения примем со свободного конца

к заделке, т. е. от точки В к точке К. Начинаем построение с эпюры поперечной силы Q_y .

Построение эпюры Q_y

Под расчетной схемой проведем базу для эпюры и разделим ее на участки. Для этого обозначим буквами характерные сечения: В, С, D, L, К. Таким образом на схеме и, соответственно, на базе получилось четыре участка: ВС, CD, DL и LK.

1-й участок (ВС)

Правая граница участка т. В: имеется сосредоточенная сила $F = 30$ кН, от которой на эпюре должен быть скачок на величину 30 кН. Знак скачка определим, поворачивая силу по ходу построения эпюры, т. е. справа налево. Сила поворачивается против часовой стрелки, поэтому откладываем ординату 30 кН вниз, в отрицательную сторону.

Состояние по длине участка: весь участок загружен распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $q = 20$ кН/м, а поскольку направление вектора q противоположно направлению силы F , наклонная прямая пойдет вверх, в положительную область значений Q_y .

Правая граница участка т. С: определим величину силы, на которую произойдет изменение поперечной силы за счет действия распределенной нагрузки на участке, умножив q на длину участка 1 м, получим 20 кН. Величина поперечной силы в т. «С» определится как сумма: $-F + q \cdot 1 \text{ м} = -10$ кН. Отложим это значение вниз от базы, т. е. со знаком «-». Соединим ординаты на левой и правой границах участка наклонной прямой.

2-й участок (CD)

Правая граница участка т. С: сосредоточенная сила отсутствует, а на сосредоточенный момент $M = 30$ кНм поперечная сила не реагирует. Следовательно, значение поперечной силы -10 кН не изменится.

Состояние по длине участка: участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе. Проведем ее до левой границы участка.

Левая граница участка т. D: значение такое же, как и на правой границе, т. е. -10 кН.

3-й участок (DL)

Правая граница участка т. D: сосредоточенная сила отсутствует, поэтому значение поперечной силы -10 кН не изменится.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $2q = 40$ кН/м. Поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $+2q = 40$ кН/м. Почему $+40$ кН/м. Потому что стрелки интенсивности поворачиваются по часовой стрелке при движении по участку справа налево.

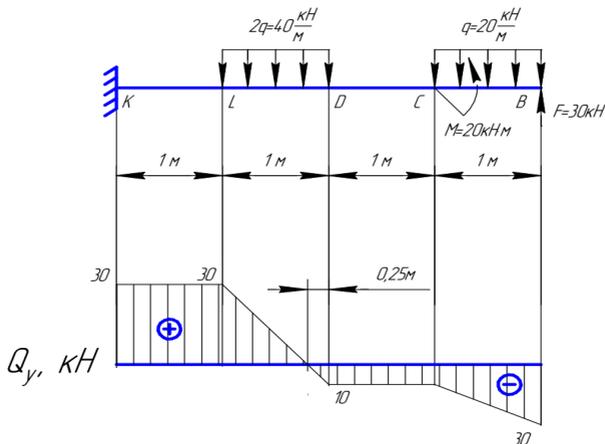
Левая граница участка т. L: определим величину силы, на которую произойдет изменение Q_y за счет действия распределенной нагрузки на участке, умножив $2q$ на длину участка 1 м, получим 40 кН. Величина поперечной силы в т. «L» определится как сумма: $-F + q \cdot 1 \text{ м} + 2q \cdot 1 \text{ м} = -10 + 40 = 30$ кН. Отложим это значение вверх от базы, т. е. со знаком «+». Соединим ординаты на левой и правой границах участка наклонной прямой.

4-й участок (LK)

Правая граница участка т. L: сосредоточенная сила отсутствует, т. е. значение поперечной силы 30 кН не изменится.

Состояние по длине участка: участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе. Проведем ее до левой границы участка.

Левая граница участка т. K: значение такое же, как на правой границе, т. е. 30 кН.



Построение эпюры изгибающего момента M_x

1-й участок (BC)

Правая граница участка т. В: отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому скачка в начале участка не будет. Начинаем эпюру момента с нуля.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет квадратичная парабола, выпуклостью вверх, навстречу действию нагрузки. Для определения наличия экстремума анализируем эпюру поперечной силы этого участка. Наклонная прямая на эпюре Q_y не пересекает базу, т. е. внутри участка не принимает нулевое значение. Это говорит о том, что экстремума на параболе не будет. Такие параболы строят по двум значениям в граничных точках участка.

Левая граница участка т. С: определим значение внутреннего изгибающего момента в т. С по части балки BC в табличной форме:

M_{xc}^{BC}	
ВВ.	НВ.
$F \times 1 = 30$	$q \times 1 \times 0,5 =$ $= 20 \times 1 \times 0,5 = 10$
20 кНм	

Полученную величину момента 20 кНм откладываем в точке С выше базы и соединяем с нулем в т. В параболой без экстремума, направляя выпуклость вверх.

2-й участок (CD)

Правая граница участка т. С: здесь находится сосредоточенный момент $M = 20$ кНм, который вызовет на эпюре скачок, равный 20 кНм. Знак скачка определим по направлению действия момента. По ходу построения эпюры внешний момент направлен в сторону верхних волокон, поэтому откладываем скачок вверх и получим 40 кНм.

Состояние по длине участка: участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре момента должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом $Q_y = -10$ кН этого участка.

Левая граница участка т. D: величину внутреннего момента в точке D определим с использованием табличной формы по всей части балки BD.

$$M_{xD}^{BD}$$

ВВ.	НВ.
$F \times 2 = 30 \times 2 = 60$	$q \times 1 \times 1,5 =$
$M = 20$	$= 20 \times 1 \times 1,5 = 30$
50 кНм	

По двум значениям момента, полученным в точках С и D, строим наклонную прямую.

3-й участок (DL)

Правая граница участка т. D: сосредоточенный момент отсутствует, поэтому значение момента 50 кНм не изменится.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $2q = 40$ кН/м. Поэтому должна быть квадратичная парабола выпуклостью вверх навстречу действию $2q$. Наличие экстремума определяем по эпюре поперечной силы этого участка. Очевидно, что в точке пересечения наклонной прямой на эпюре Q_y квадратичная парабола будет иметь экстремальное значение. Определим расстояние от точки D до точки экстремума. Для этого величину, отсекаемую наклонной прямой в точке D, поделим на угловой коэффициент этой наклонной прямой, равный $2q = 40$ кН/м: $10 \text{ кН} / 40 \text{ кНм/м} = 0,25$ м. Обозначим соответствующее сечение на расчетной схеме буквой S. Вычислим величину экстремума по части балки BS, используя табличную форму.

$$M_{xD}^{BS}$$

ВВ.	НВ.
$F \times 2,25 =$	$q \times 1 \times 1,75 =$
$= 30 \times 2,25 = 67,5$	$= 20 \times 1 \times 1,75 = 35$
$M = 20$	$2q \times 0,25 \times 0,125 =$
	$40 \times 0,25 \times 0,125 = 1,25$
51,25 кНм	

Левая граница участка т. L: определим величину момента по части балки BL, используя табличную форму.

M_{xL}^{BL}	
ВВ.	НВ.
$F \times 3 = 30 \times 3 = 90$	$q \times 1 \times 2.5 =$
$M = 20$	$= 20 \times 1 \times 2.5 = 50$
	$2q \times 1 \times 0.5 =$
	$= 40 \times 1 \times 0.5 = 20$
40кНм	

По значениям момента, полученным в трех точках участка, строим параболу.

4-й участок (LK)

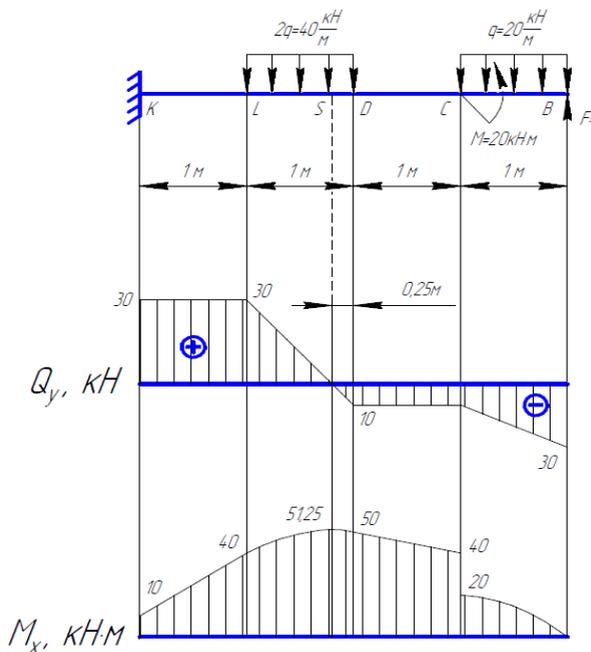
Правая граница участка т. L: сосредоточенный внешний момент отсутствует, т. е. значение 40 кНм, полученное в данной точке в конце предыдущего участка, не изменится.

Состояние по длине участка: участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $Q_y = 30$ кН данного участка.

Левая граница участка т. K: значение внутреннего момента вычислим по всей балке BK, используя табличную форму.

M_{xK}^{BK}	
ВВ.	НВ.
$F \times 4 = 30 \times 4 = 120$	$q \times 1 \times 3.5 =$
$M = 20$	$= 20 \times 1 \times 3.5 = 70$
	$2q \times 1 \times 1.5 =$
	$= 40 \times 1 \times 1.5 = 60$
10кНм	

Полученную величину момента 10 кНм на верхних волокнах откладываем в точке K выше базы и соединяем наклонной прямой со значением в точке L.

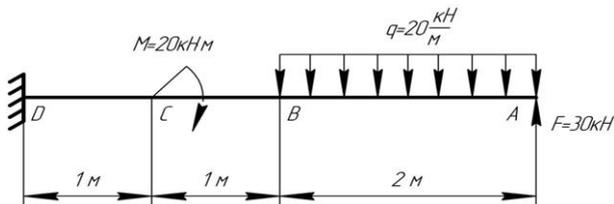


Правильность построенных эпюр проверим, используя дифференциальную зависимость $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, слева направо в пределах каждого участка. Участки KL и LS: $Q_y > 0$, $M_x \uparrow$; участки SD, DC и CD: $Q_y < 0$, $M_x \downarrow$. Анализ показал полное соответствие поведения функции изгибающего момента дифференциальной зависимости.

Эпюры построены. 🙌

Задача для самостоятельного решения на занятии

Для данной расчетной схемы построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента, используя основные закономерности и определяя значения внутренних силовых факторов в характерных сечениях.



Часть 2. Построение эпюры поперечной силы и изгибающего момента на двухопорной балке

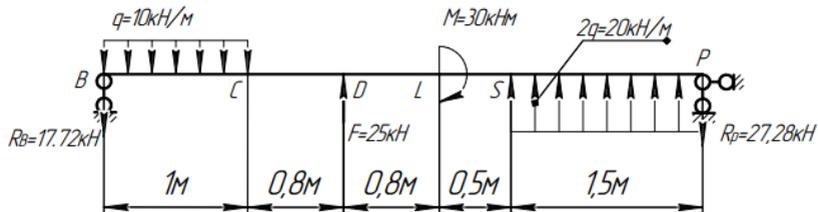
🤔🧐 Что такое двухопорная балка и какие особенности существуют при построении эпюр на такой схеме?

Двухопорной является балка, закрепленная на двух шарнирных опорах, одна из которых подвижная, а другая неподвижная или одна опора – жесткая заделка, другая – шарнирно-подвижная, а между ними расположен соединительный шарнир. Для таких схем обязательно определение реактивных усилий в опорах до построения эпюр.



Пример решения задачи

Для данной двухопорной балки построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x .



Решение

Так как балка закреплена на двух шарнирных опорах, то до начала построения эпюр необходимо определить реакции в опорах (прил. 1). Обозначим буквами опоры: шарнирно неподвижную «Р», шарнирно подвижную «В». Для определения реакции в опоре «Р» составим уравнение суммы моментов относительно точки опоры «В»: $\sum_i M_B(F_i) = 0$.

Используем правило знаков для моментов, принятое в Теоретической механике (раздел «Статика»): момент против часовой стрелки принимаем положительным и наоборот. В результате получим:

$$-M + F \cdot 1,8 - q \cdot 1 \cdot 0,5 + 2q \cdot 1,5 \cdot 3,85 - R_p \cdot 4,6 = 0.$$

Подставив численное значение всех входящих величин, выразим из уравнения

$$R_p = \frac{-30 + 25 \cdot 1,8 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5 + 20 \cdot 1,5 \cdot 3,85}{4,6} = 27,28 \text{ кН}.$$

Для определения реакции в опоре «В» составим уравнение суммы моментов относительно точки опоры «Р»: $\sum_i M_P(F_i) = 0$, расписывая левую часть уравнения, получим:

$$-M - F \cdot 2,8 + q \cdot 1 \cdot 4,1 - 2q \cdot 1,5 \cdot 0,75 + R_B \cdot 4,6 = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{+30 + 25 \cdot 2,8 - 10 \cdot 1 \cdot 4,1 + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75}{4,6} = 17,72 \text{ кН.}$$

Для проверки правильности определенных реакций составим уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось: $\sum_i F_{iy} = 0$ или $F - q \cdot 1 + 2q \cdot 1,5 - R_B - R_P = 0$. Подставив численное значение сил, получим: $25 - 10 \cdot 1 + 20 \cdot 1,5 - 17,72 - 27,28 = 0$. То есть реакции определены верно. Теперь можно приступить к построению эпюр.

Разделим балку на участки соответственно определению. Очевидно, что для построения эпюры поперечной силы участков будет меньше. Это участки ВС, CD, DS и SP. Участок DS включает характерное сечение т. «L», так как на сосредоточенный момент поперечная сила не реагирует. Для построения эпюры изгибающего момента надо принять пять участков: ВС, CD, DL, LS и SP.

Построение эпюры Q_y

Проведем под расчетной схемой базу для эпюры Q_y и разделим ее на четыре участка: ВС, CD, DS и SP.

1-й участок (ВС)

Левая граница участка т. «В»: имеется сосредоточенная сила R_B , поэтому на эпюре Q_y будет скачок на величину 17,72 кН. Знак скачка определяем, повернув R_B по направлению построения эпюры, т. е. слева направо. Поворот происходит против часовой стрелки: знак скачка «-». Скачок откладываем вниз от базы.

Состояние по длине участка: весь участок загружен распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $q = -10$ кН/м, так как направление вектора q такое же, как у R_B .

Правая граница участка т. «С»: определим величину силы, на которую произойдет изменение поперечной силы за счет действия распределенной нагрузки на участке, умножив q на длину участка 1 м, получим 10 кН. Величина поперечной силы в т. «С» определит-

ся как сумма: $-R_B - q \cdot 1 \text{ м} = -27,72 \text{ кН}$. Отложим это значение вниз от базы, т. е. со знаком «-». Соединим ординаты на левой и правой границах участка наклонной прямой.

2-й участок (CD)

Левая граница участка т. «С»: здесь отсутствует сосредоточенная сила, поэтому значение $-27,72 \text{ кН}$ останется неизменным.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен, т. е. на эпюре будет прямая, параллельная базе.

Правая граница участка т. «D»: значение $Q_y = -27,72 \text{ кН}$.

3-й участок (DS)

Левая граница участка т. «D»: на левой границе находится сосредоточенная сила $F = 25 \text{ кН}$, на величину которой надо сделать скачок на эпюре в положительную сторону, так как сила поворачивается по направлению построения эпюры слева направо по часовой стрелке. В результате получим:

$$-27,72 \text{ кН} + 25 \text{ кН} = -2,72 \text{ кН}.$$

Состояние по длине участка: на участке отсутствует распределенная нагрузка, поэтому на эпюре будет прямая, параллельная базе, с ординатой $-2,72 \text{ кН}$.

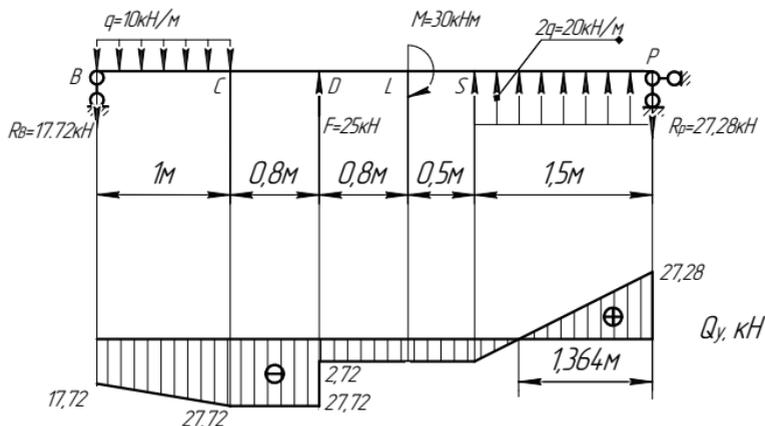
Правая граница участка т. «S»: ордината, равная $-2,72 \text{ кН}$, — конец прямой, параллельной базе.

4-й участок (SP)

Направление построения эпюры на этом участке выберем справа налево.

Правая граница участка т. «P»: здесь находится сосредоточенная сила $R_p = 27,28 \text{ кН}$, которая вызовет на эпюре скачок на эту величину вверх. Почему вверх? Потому что сила R_p по ходу построения эпюры (справа налево) поворачивается по часовой стрелке. В результате в начале четвертого участка ордината поперечной силы будет равна $27,28 \text{ кН}$.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенной нагрузкой $2q = 20 \text{ кН/м}$, поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $-2q$, так как вектор интенсивности нагрузки поворачивается против часовой стрелки при движении по участку справа налево.



Левая граница участка т. «S»: здесь уже имеется значение на эпюре, равное $-2,27$ кН, которое не должно меняться, так как в данной точке отсутствует внешняя сосредоточенная сила, которая могла бы вызвать скачок. Соединив значения ординат в начале участка $27,28$ кН в т. «P» со значением в конце участка $-2,72$ кН в т. «S», получим наклонную прямую.

Построение эпюры M_x

Эпюра M_x строится под эпюрой Q_y . База эпюры предварительно делится на пять участков: BC, CD, DL, LS и SP.

1-й участок (BC)

Левая граница участка т. «B»: отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому на эпюре M_x будет ноль.

Состояние по длине участка: наличие равномерно распределенной нагрузки на эпюре M_x дает параболу, выпуклость которой направлена вверх (навстречу нагрузке). Парабола будет без экстремума, поскольку наклонная прямая на соответствующем участке эпюры Q_y не пересекает базу. Строится по двум точкам, значениям момента на левой и правой границах участка.

Правая граница участка т. «C»: сделаем сечение по правой границе первого участка и оставим для определения момента в сечении «отрезанный» участок BC. На нем имеется сосредоточенная сила $R_B = 17,72$ кН и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 10$ кН/м. Направление обеих сил указывает на положение

сжатых волокон от изгиба: они находятся внизу. Момент в сечении «С» от этих двух нагрузок вычислим в табличной форме.

$$M_{xC}^{BC}$$

вв.	нв.
	$q \times 1 \times 0,5 = 5$
	$R_B \times 1 = 17,72$
	22,72 кНм

Напоминаем, что вв. означает, что данным моментом сжаты верхние волокна, а нв. — нижние. Полученную величину момента 22,72 кНм откладываем в т. «С» вниз от базы и соединяем с нулем в т. «В» параболой без экстремума выпуклостью, направленной навстречу q , т. е. вверх.

2-й участок (CD)

Левая граница участка т. «С»: отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому на эпюре M_x значение 22,72 кНм не изменится.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен, т. е. на эпюре M_x будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным значению поперечной силы данного участка $Q_y = -27,72$ кН.

Правая граница участка т. «D»: сделаем сечение по точке «D», оставим для определения значения момента часть балки BD и вычислим величину M_x , также используя табличную форму.

$$M_{xD}^{BD}$$

вв.	нв.
	$q \times 1 \times 1,3 = 13$
	$R_B \times 1,8 = 17,72$
	44,896 кНм

Откладываем значение 44,896 кНм в точке «D» на нижние волокна и соединяем со значением момента в т. «С» наклонной прямой.

3-й участок (DL)

Левая граница участка т. «D»: отсутствует внешний сосредоточенный момент, поэтому значение момента 44,896 кНм не изменится.

Состояние по длине участка: участок пустой, ничем не загружен. На эпюре M_x должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным Q_y этого участка, т. е. $-2,72$ кН. Построим прямую по двум точкам, для чего определим значение момента на правой границе.

Правая граница участка т. «L»: сделаем сечение по правой границе участка так, чтобы сосредоточенный внешний момент, находящийся в точке «L», не вошел на отсечённую часть балки BL. Рассмотрим на части BL действие силы R_B , равномерно распределенной нагрузки q и силы F . Определим момент в сечении, используя табличную форму:

M_{xL}^{BL}	
ВВ.	НВ.
$F \times 0,8 = 20$	$q \times 1 \times 2,1 = 21$
	$R_B \times 2,6 = 46,072$
	$47,072 \text{ кНм}$

Почему момент от силы F в таблице поставлен в столбике на верхних волокнах? Потому что, воздействуя на балку слева силой F , мы изгибаем ее так, что будут сжаты верхние волокна. На это указывает и направление вектора силы. По полученным значениям момента на левой и правой границах участка, соответственно 44,896 кНм и 47,072 кНм, строим наклонную прямую.

4-й участок (LS)

Левая граница участка т. «L»: находится сосредоточенный внешний момент $M = 30$ кНм, который вызовет скачок вверх по направлению действия момента от значения $-47,072$ кНм на величину 30 кНм. Получим значение момента 17,072 кНм на нижних волокнах.

Состояние по длине участка: участок пустой, ничем не загружен. На эпюре M_x должна быть наклонная прямая. Построим прямую по двум точкам. Для этого определим значение момента на правой границе.

Правая граница участка т. «S»: делая сечение по т. «S», оставляем для определения момента правую часть балки – участок «PS». Вычислим величину момента в табличной форме:

$$M_{xS}^{PS}$$

ВВ.	НВ.
$2q \times 1,5 \times 0,75 = 22,5$	$R_P \times 1,5 = 40,92$
$18,42 \text{ кНм}$	

Полученный результат 18,42 кНм откладываем в т. «S» на нижние волокна и соединяем с ординатой $-17,072$ кНм в т. «L» наклонной прямой.

5-й участок (PS)

Выбираем направление построения эпюры справа налево, т. е. от т. «P» к т. «S».

Правая граница участка т. «P»: в данной точке отсутствует внешний сосредоточенный момент, поэтому начинаем эпюру моментов с нуля.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенной нагрузкой. На эпюре M_x должна быть парабола, выпуклость которой направлена навстречу направлению интенсивности нагрузки, т. е. вниз. Парабола имеет экстремум в том сечении, где поперечная сила на данном участке пересекает базу. Определим координату экстремума, приравняв функцию поперечной силы на данном участке нулю. Для этого запишем функцию Q_y справа налево, приняв начало координат в т. «P» и используя уже имеющуюся эпюру поперечной силы:

$$Q_y = R_P - 2q \cdot z = 0,$$

откуда

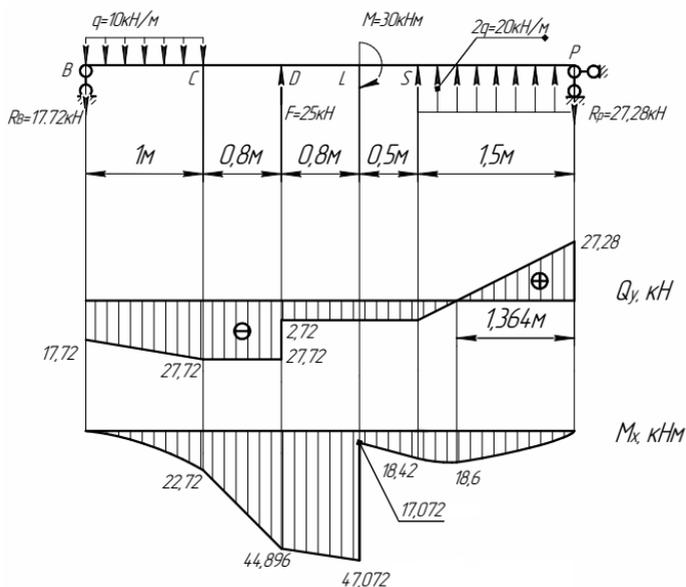
$$z = \frac{R_P}{2q} = \frac{27,28}{20} = 1,364 \text{ м.}$$

Определим экстремальное значение момента, используя табличную форму вычисления:

$M_{\text{экстр.}}^{PS}$

ВВ.	НВ.
$2q \times 1,364^2 / 2 = 18,6$	$R_p \times 1,364 = 37,2$
	18,6 кНм

Левая граница участка т. «S»: в этой точке уже был определен момент при работе с участком «LS». $M_{xS} = 18,42$ кНм на нижних волокнах. Скачка здесь быть не может, так как в этой точке не действует внешний сосредоточенный момент. Поэтому осталось соединить три ординаты: $-18,42$ кНм, $-18,6$ кНм и 0 параболой с экстремальным значением $-18,6$ кНм.



**Проверка правильности построенных эпюр
по дифференциальной зависимости**

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}$$

Анализ эпюр проводим слева направо:

- 1-й участок «BC»: $Q_y < 0$ $M_x \downarrow$
- 2-й участок «CD»: $Q_y < 0$ $M_x \downarrow$
- 3-й участок «DL»: $Q_y < 0$ $M_x \downarrow$

4-й участок «LS»: $Q_y < 0$, $M_x \downarrow$

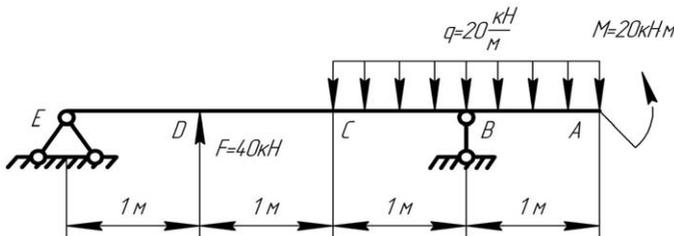
5-й участок «SP»: до пересечения наклонной прямой базы на эпюре поперечной силы $Q_y < 0$, $M_x \downarrow$. После пересечения $-Q_y > 0$, а $M_x \uparrow$.

Анализ показал полное соответствие поведения функции изгибающего момента дифференциальной зависимости.

Эпюры построены. 

Задача для самостоятельного решения на занятии

Для данной расчетной схемы построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента, используя основные закономерности и определяя значения внутренних силовых факторов в характерных сечениях.



Потренируемся?

- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 2).
- ✦ Решить задачу 1.3 из РПР 1 (прил. 4).

Практическое занятие 3

Построение эпюр внутренних силовых факторов на плоских рамах. Части 1 и 2

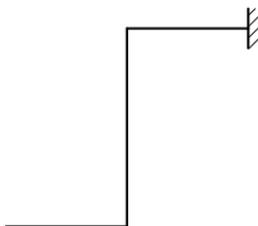
Технология построения эпюр внутренних силовых факторов на плоских рамах



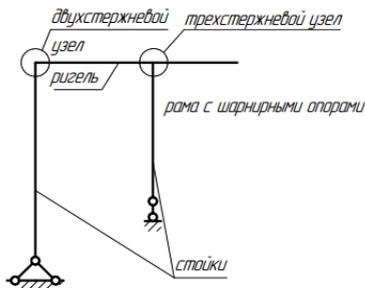
Что такое плоская рама?

Плоская рама — это стержневая конструкция, состоящая из вертикальных и горизонтальных элементов, связанных друг с другом под прямым углом жестко или шарнирно. Вертикальные элементы рамы называются стойками, горизонтальные — ригелями. Место соединения двух или более стержней называется узлами.

Например:



Консольная рама

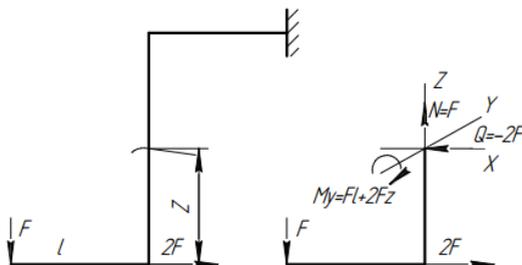


Двухопорная рама

 Какие внутренние силовые факторы возникают в сечениях элементов рамы?

При нагружении элементов рамы внешними нагрузками в их поперечных сечениях могут возникнуть три внутренних силовых фактора: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Например:



В данном случае в поперечном сечении стойки на расстоянии z от нижнего узла возникают продольная сила N , поперечная сила Q_x и изгибающий момент M_y .

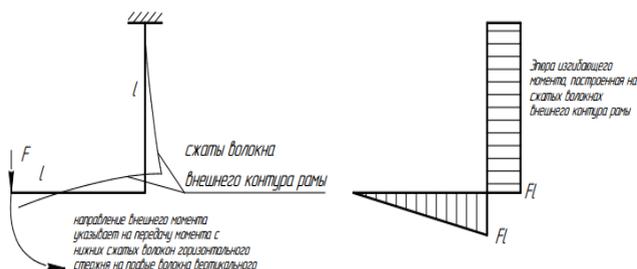
 Какие особенности построения эпюр N , Q и M на рамах существуют?

Эпюры указанных внутренних силовых факторов строятся точно так же, как на балках и стержнях, с использованием имеющихся основных закономерностей для каждого из перечисленных внутренних силовых факторов. Но есть и особенности, присущие именно этой конструкции.

- База для эпюр повторяет геометрическую конфигурацию рамы без опорных элементов и не привязывается к расчетной схеме. Размер базы может отличаться от размера расчетной схемы.
- При построении эпюры изгибающего момента M в местах перехода через узел с одного стержня на другой: *величина момента, полученная в узловой точке на рассматриваемом участке данного стержня, передается в узловой точке на связанный с ним следующий стержень на волокна одноименного контура. При построении эпюры изгибающего момента на сжатых волокнах можно сказать, что передается момент в узле по направлению действия внешнего момента.*

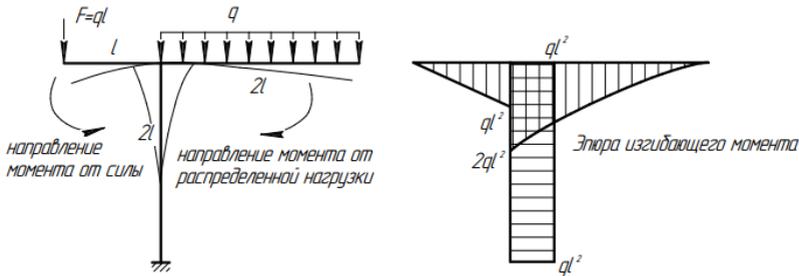
🤔 А нельзя ли попонятней?

Для лучшего понимания попробуем проиллюстрировать сказанное на следующем примере. Консольная рама Г-образной формы, имеющая двухстержневой узел, нагружена сосредоточенной силой на свободном конце. Построение эпюры изгибающего момента начинаем со свободного конца горизонтального стержня. В начале участка внутренний момент равен 0, а затем начинает изменяться по наклонной прямой (так как участок пустой) и достигает значения $F\ell$ в конце участка в узловой точке. Эту величину откладываем вниз на сжатые волокна. При переходе ко второму вертикальному участку передаем величину момента $F\ell$ с нижних сжатых волокон горизонтального участка на правые сжатые волокна вертикального участка, что видно из деформационной картины и соответствует направлению действия внешнего момента от силы F .



А если на раме будет трехстержневой узел? Попробуем рассмотреть и такой случай на примере Т-образной консольной рамы, имеющей трехстержневой узел.

Построение эпюры изгибающего момента производим со свободного конца правого и левого ригелей к узлу. С левого ригеля момент в узловой точке создает сосредоточенная сила F с плечом ℓ величиной $q\ell^2$, который откладываем в узле на нижние сжатые волокна. С правого ригеля момент в узловой точке создает распределенная нагрузка, равнодействующая которой равна $2q\ell$, имеющая плечо относительно узла $=\ell$. Таким образом, момент в узловой точке получим $2q\ell^2$, откладывая его также на нижние сжатые волокна.



Итак, в узловую точку привели два момента справа и слева. Чтобы выйти из узла и начать строить эпюру момента на стойке, необходимо алгебраически сложить эти моменты. Так как они направлены навстречу друг другу, вычтем из большего момента меньший момент и полученную величину отложим от базы стойки на правые сжатые волокна, т. е. со стороны большего момента.

Часть 1. Построение эпюр внутренних силовых факторов на консольной раме

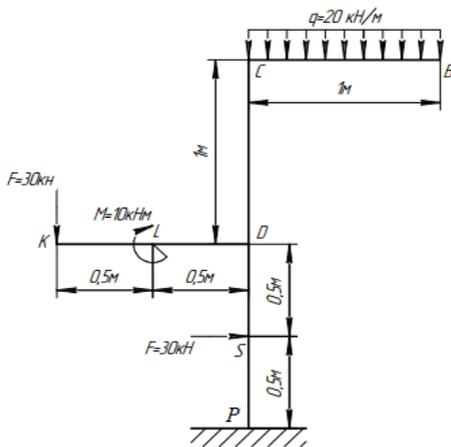
 Какие существуют особенности построения эпюр внутренних силовых факторов на консольных рамах?

При построении эпюр на консольных рамах так же, как и на консольных балках, используют возможность не определять реактивных усилий в заделке. При этом принимают строго определенное направление построения эпюр от свободного конца (концов) к заделке.



Пример решения задачи

Построить эпюры внутренних силовых факторов на данной консольной раме.



Решение

Построение эпюры продольной силы N

Выберем направление построения эпюры N . Поскольку рама консольного типа, строить эпюру будем, идя со свободных концов ригелей «BC» и «KD» сначала к узлу «D», а затем от узла к заделке, не определяя реактивных сил.

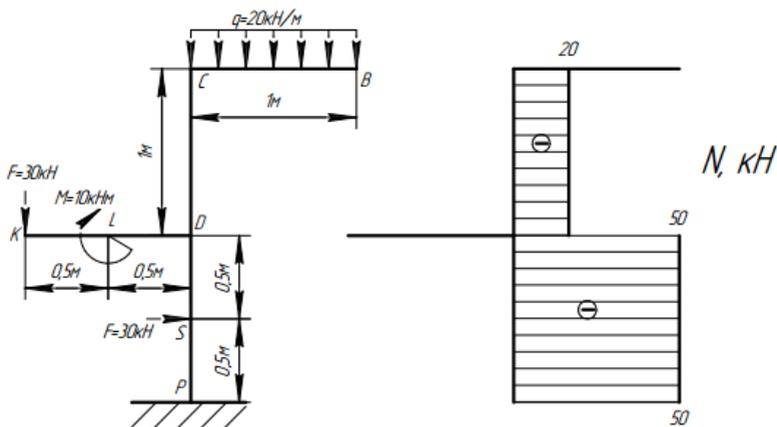
1. Верхний ригель BC. Двигаемся от точки «B» к точке «C». В начале участка в т. «B» отсутствует внешняя сила, способная дать проекцию на продольную ось участка, т. е. начинаем с нуля. Далее по длине участка действует равномерно распределенная нагрузка, которая также не дает проекцию на продольную ось. Таким образом, продольная сила на участке «BC» равна 0.

2. Верхняя часть стойки CD. Двигаемся от точки «C» к точке «D», рассматривая стойку вместе с верхним ригелем. В точке «C» на продольную ось стойки дает проекцию равнодействующая распределенной нагрузки, равная $q \cdot 1 \text{ м} = 20 \text{ кН}$. Так как распределенная нагрузка оказывает сжимающее воздействие на стойку «CD», в т. «C» стойки откладываем скачок относительно вертикальной базы стойки на величину 20 кН (на эпюре принято отрицательное направление справа от базы). Так как участок «CD» пустой, проводим прямую, параллельную базе, до конца участка, т. е. до т. «D».

3. Левый ригель KD. Двигаемся от точки «K» к точке «D». В начале участка в т. «K» отсутствует сила, способная дать проекцию на продольную ось ригеля, начинаем эпюру N с 0. Так как сосредоточенный

момент, находящийся в т. «L», не оказывает влияния на продольную силу, и оба участка ригеля «KL» и «LD» пустые, то далее можно сделать вывод об отсутствии продольной силы на всем ригеле.

4. Нижняя часть стойки DP. Движемся от точки «D» к точке «P», рассматривая влияние всех сил, находящихся на обоих ригелях и верхней части стойки. В начале участка «DP» в точке «D» видим, что на продольную ось участка дает проекцию как равнодействующая распределенной нагрузки, так и сила $F = 30$ кН, находящаяся в точке «K» левого ригеля. Она также производит сжимающее воздействие на нижнюю часть стойки, поэтому вызовет скачок на эпюре N на 30 кН в отрицательную сторону. Получим ординату, равную -50 кН. Сосредоточенная сила $F = 30$ кН, находящаяся в точке «S», не дает проекции на продольную ось стойки, поэтому, игнорируя эту силу, проведем прямую, параллельную базе, величиной ординаты -50 кН до конца участка.



Построение эпюры поперечной силы Q

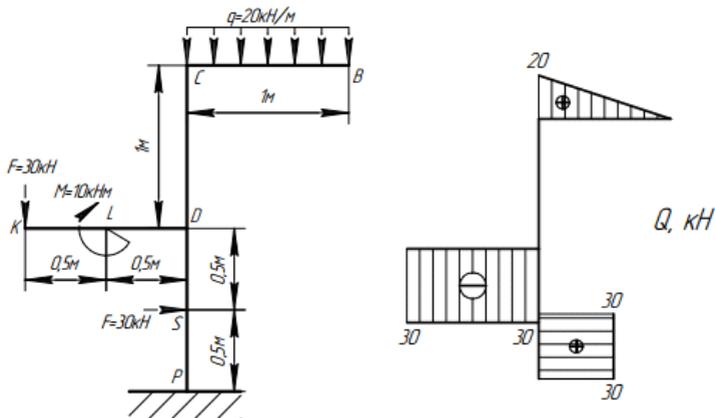
1. Верхний ригель ВС. Движемся от точки «В» к точке «С». В начале участка в т. «В» отсутствует внешняя сосредоточенная сила, способная дать проекцию на вертикальную ось поперечного сечения, т. е. начинаем с нуля. Далее по длине участка действует равномерно распределенная нагрузка, которая проецируется на вертикальную ось поперечного сечения и на эпюре Q дает наклонную прямую. Знак на эпюре Q определяем путем поворота стрелок интенсивности на-

грузки по ходу движения по участку. Поворот происходит по часовой стрелке, т. е. распределенная нагрузка создает положительную поперечную силу. На длине участка в 1 метр распределенная нагрузка имеет равнодействующую, равную 20 кН. Это значение откладываем в конце участка в т. «С» вверх, соединяя с нулем в начале участка.

2. Верхняя часть стойки CD. Движемся от точки «С» к точке «D», рассматривая стойку вместе с верхним ригелем. В точке «С» стойки отсутствует внешняя сосредоточенная сила, дающая проекцию на ось поперечного сечения, т. е. начинаем с 0. Так как участок «CD» пустой, то можно сказать, что на всем участке поперечная сила будет равна 0.

3. Левый ригель KD. Движемся от точки «К» к точке «D». В начале участка в т. «К» находится сосредоточенная сила $F = 30$ кН, способная дать проекцию на ось поперечного сечения ригеля. Она вызывает скачок на эпюре Q . Знак скачка определяем, поворачивая силу по ходу движения по ригелю. Поворот сила делает против часовой стрелки, т. е. откладываем в точке «К» величину -30 кН. Так как сосредоточенный момент, находящийся в т. «L», не оказывает влияния на поперечную силу, два участка ригеля «KL» и «LD» пустые, то далее проводим прямую, параллельную базе, ординатой -30 кН до конца участка.

4. Нижняя часть стойки DP. Движемся от точки «D» к точке «P», рассматривая влияние всех сил, находящихся на обоих ригелях и верхней части стойки. В начале участка «DP» в точке «D» видим, что нет сил, которые могли бы дать проекцию на ось поперечного сечения. В пределах незагруженного участка «DS» поперечная сила равна 0. В точке «S» находится сосредоточенная сила $F = 30$ кН, которая дает проекцию на ось поперечного сечения и вызовет скачок на эпюре Q . Знак скачка определим, поворачивая силу по ходу движения от точки «S» к точке «P». Она поворачивается по часовой стрелке, т. е. откладываем от вертикальной базы стойки в точке «S» величину ординаты $+30$ кН. Так как участок «SP» ничем не загружен, проводим прямую, параллельную базе, величиной ординаты $+30$ кН до конца участка.



Построение эпюры изгибающего момента M

1. Верхний ригель ВС. Движемся от точки «В» к точке «С». В начале участка в т. «В» отсутствует внешний сосредоточенный изгибающий момент, способный дать скачок на эпюре момента, т. е. начинаем с нуля. Далее по длине участка действует равномерно распределенная нагрузка, которая на эпюре M дает квадратичную параболу, выпуклость которой направлена навстречу действию нагрузки. Так как на эпюре Q данного участка наклонная прямая не пересекает базу, квадратичная параболка будет без экстремума. Такие параболы можно строить по двум точкам. Поэтому определим величину внутреннего изгибающего момента в сечении «С» по части «ВС». Момент M_c будет равен моменту от равномерно распределенной нагрузки, т. е. $q \cdot 1 \text{ м} \cdot 0,5 \text{ м} = 10 \text{ кНм}$. Эту ординату откладываем в точке «С» на нижние сжатые волокна и соединяем с нулем в т. «В» безэкстремальной параболой выпуклостью вверх. Так как точка «С» является узловой, передадим ординату момента 10 кНм в данной точке на верхнюю часть стойки «CD» по направлению момента от q , т. е. на правые волокна стойки.

2. Верхняя часть стойки CD. Движемся от точки «С» к точке «D», начиная с ординаты 10 кНм на правых волокнах, полученной с верхнего ригеля. Так как поперечная сила Q на участке «CD» равна нулю, то соответственно дифференциальной зависимости $\frac{dM}{dz} = Q$ изгибающий момент будет константой, т. е. будет оставаться величиной

10 кНм по всей длине верхней части стойки. Проводим прямую, параллельную базе, рассматривая стойку вместе с верхним ригелем.

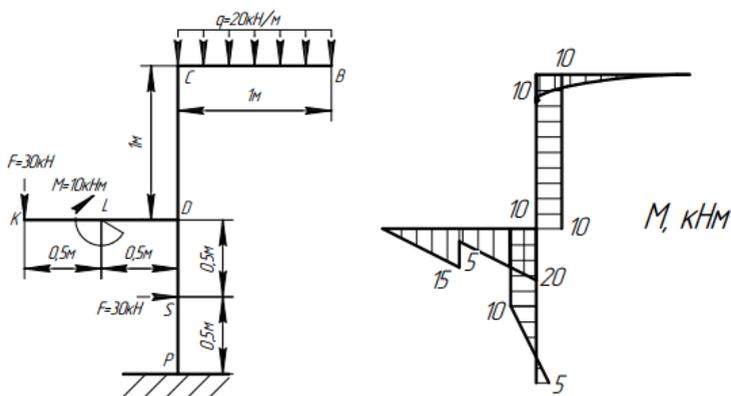
3. Левый ригель KD. Разбиваем на два участка «KL» и «LD». Движемся от точки «K» к точке «L». В начале участка в т. «K» отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому начинаем эпюру с 0. Участок пустой, поэтому должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным Q . Вычисляем значение внутреннего момента в точке «L» по части «KL», умножив величину силы $F = 30$ кН на плечо 0,5 м: $30 \cdot 0,5 = 15$ кНм. Откладываем это значение на нижние сжатые волокна в т. «L». На границе участков «KL» и «LD» находится внешний сосредоточенный момент $M = 10$ кНм, на который делаем скачок вверх от величины 15 кНм по направлению данного момента. Получаем величину 5 кНм на нижних волокнах, от которой вновь должна быть наклонная прямая до конца участка «LD». Значение момента в точке «D» определим по части «KD»: $-F \cdot 1 \text{ м} + M = -30 + 10 = -20$ кНм, приняв момент от силы F на нижних сжатых волокнах со знаком «-», а на сжатых верхних от действия момента M со знаком «+». Полученную величину -20 кНм отложим в точке «D» на нижние сжатые волокна.

4. Нижняя часть стойки DP. Разбиваем на два участка: «DS» и «SP». Начинаем построение эпюры с участка «DS». Так как точка «D» – узловая точка, в которой сходятся три стержня: верхняя часть стойки, левый ригель и нижняя часть стойки, начнем с передачи моментов, приведенных в данную точку с верхней части стойки и левого ригеля. Передачу осуществляем на нижнюю часть стойки, исходя из направлений приведенных моментов: 10 кНм с верхней части стойки находится на правых сжатых волокнах, момент с левого ригеля 20 кНм передается на левые сжатые волокна. Вычитая из большего момента меньший, откладываем 10 кНм на левые волокна в т. «D» нижней части стойки. Так как участок «DS» пустой, на эпюре M должна быть прямолинейная зависимость. Величину углового коэффициента определяем по эпюре Q данного участка. Поскольку Q_{DS} равна нулю, на эпюре момента будет прямая, параллельная базе. То есть ординатой 10 кНм на левых волокнах проведем прямую до конца данного участка. В начале следующего участка «SP» в точке «S» нет сосредоточенного внешнего момента, поэтому значение момента

10 кНм не изменится. Участок пустой, что определяет прямолинейный характер зависимости внутреннего момента с угловым коэффициентом, равным поперечной силе данного участка $Q_{sp} = 30$ кН. Для построения наклонной прямой определим значение момента в точке «Р», рассматривая влияние всех сил, находящихся на обоих ригелях и верхней части стойки. Определение момента проведем, используя табличную форму вычисления и следующие обозначения: лв – левые волокна стойки, пв – правые волокна стойки.

сжаты	
лв	пв
$F_{x1}=30$	$q_{x1} \times 0,5 = 10$
	$F_{x0,5} = 15$
	$M = 10$
	5

Сложив величины моментов в левом и правом столбцах и вычитая из большего значения меньшее, записываем результат в столбец с большим моментом. Таким образом, в точке «Р» откладываем ординату в 5 кНм на правых сжатых волокнах и соединяем с величиной 10 кНм в начале участка в точке «S». Получаем наклонную прямую с угловым коэффициентом 30 кНм.

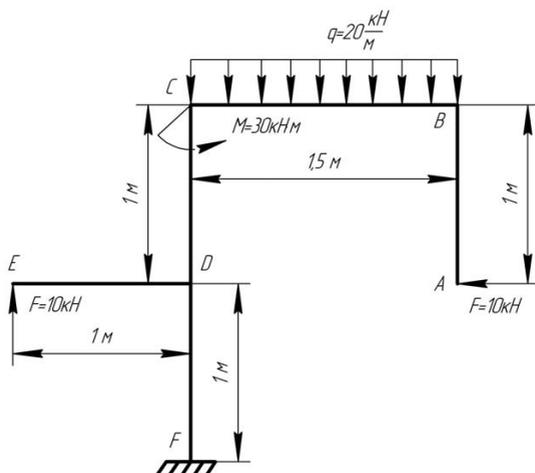


Эпюры построены.



Задача для самостоятельного решения на занятии

Для данной расчетной схемы рамы построить эпюры внутренних силовых факторов, используя основные закономерности и определяя значения внутренних силовых факторов в характерных сечениях.



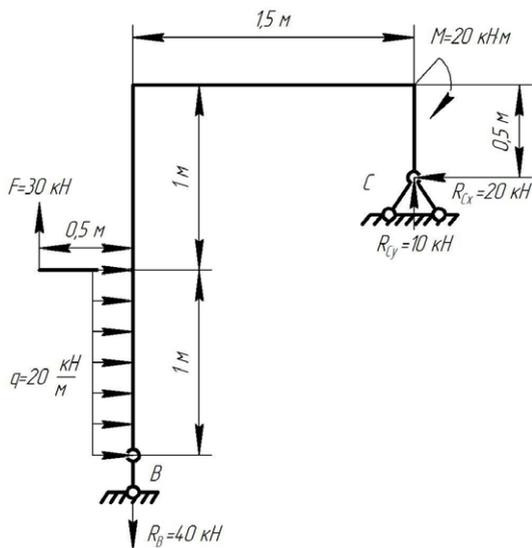
Часть 2. Построение эпюр внутренних силовых факторов на двухопорной раме

На двухопорной раме строить эпюры надо так же, как на двухопорной балке? Да, порядок используется такой же: сначала обязательно определяются реактивные усилия в опорах, а потом уже приступают к построению эпюр.



Пример решения задачи

Построить эпюры внутренних силовых факторов на данной двухопорной раме.



Решение

Так как рама закреплена на двух шарнирных опорах, то до начала построения эпюр необходимо определить реакции в опорах. Обозначим опоры буквами: шарнирно неподвижную – «С», шарнирно подвижную – «В». Для определения реакции в опоре «В» составим уравнение суммы моментов относительно точки опоры «С»: $\sum_i M_C(F_i) = 0$. Используем правило знаков моментов, принятое в теоретической механике (раздел «Статика»): момент против часовой стрелки принимаем положительным и наоборот. В результате получим: $-M - F \cdot 2 + q \cdot 1 \cdot 1 + R_B \cdot 1,5 = 0$. Подставив численное значение всех входящих величин, выразим из уравнения $R_B = 40$ кН. В шарнирно неподвижной опоре «С» возникают горизонтальная и вертикальная составляющие реакции. Для определения горизонтальной составляющей реакции R_{Cx} запишем сумму проекций сил на горизонтальную ось x : $\sum F_{ix} = 0$ или $R_{Cx} - q \cdot 1 \text{ м} = 0$. Откуда $R_{Cx} = 20$ кН. Для определения вертикальной составляющей реакции в опоре «С» составим уравнение суммы моментов относительно точки опоры «В»: $\sum_i M_B(F_i) = 0$. Расписывая левую часть уравнения, получим:

$$-F \cdot 0,5 - q \cdot 1 \cdot 0,5 - M + R_{Cx} \cdot 1,5 + R_{Cy} \cdot 1,5 = 0,$$

откуда $R_{Cy} = 10$ кН.

Для проверки правильности определенных реакций составим уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось: $\Sigma F_{iy} = 0$ или $F + R_{Cy} - R_B = 30 + 10 - 40 = 0$.

То есть реакции определены верно. Теперь можно приступать к построению эпюр. Для этого разделим раму на участки: ОК, ВК, КЛ, LD, CD и подготовим базу для первой эпюры, повторив конфигурацию рамы без опорных элементов. Начинать строить эпюру каждого внутреннего силового фактора можно с любого крайнего участка, поскольку все внешние силы, включая реактивные, для данной рамы известны.

Построение эпюры продольной силы N

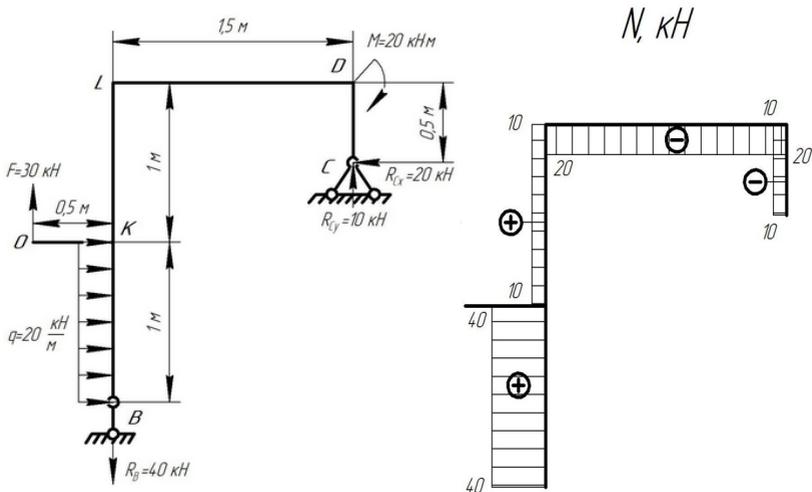
1. Правая стойка CD. Выберем направление построения эпюры от точки «С» к точке «D». В начале участка в точке «С» находится сосредоточенная сила R_{Cy} , которая дает проекцию на продольную ось стойки и создает скачок на эпюре величиной 10 кН. Знак скачка «-», так как R_{Cy} создает деформацию сжатия. Выбираем (произвольно) отрицательное направление от вертикальной базы участка слева и откладываем ординату -10 кН. Участок по длине ничем не загружен, т. е. должна быть прямая, параллельная базе. Ординатой -10 кН проводим прямую линию до конца участка до точки «D».

2. Верхний ригель DL. Выберем начало в точке «D». Делая сечение в начале участка, оставляем часть рамы DC, на которой проекцию на продольную ось ригеля может дать только сила $R_{Cx} = 20$ кН, производящая сжимающее воздействие на ригель. Поэтому в точке «D» на эпюре откладываем скачок вниз на -20 кН. По длине участок DL ничем не загружен, поэтому проводим прямую линию, параллельную базе, ординатой -20 кН до конца участка до точки «L».

3. Нижняя часть левой стойки ВК. Выберем начало в точке «В», в которой находится сосредоточенная сила $R_B = 40$ кН, дающая проекцию на продольную ось стойки и производящая растягивающее воздействие. Поэтому на эпюре делаем скачок на величину 40 кН, приняв положительное направление слева от базы элемента. По длине участок ВК загружен равномерно распределенной нагрузкой, которая не дает проекцию на продольную ось стойки и не влияет на продольную силу, поэтому на эпюре будет прямая, параллельная базе, с ординатой 40 кН.

4. Боковой ригель ОК. Принимаем начало участка в точке «О», в которой находится сосредоточенная сила $F = 30$ кН. Она проецируется на продольную ось ригеля в ноль, поэтому в точке «О» продольная сила равна 0. Поскольку участок ОК по длине ничем не загружен, то на протяжении всей длины также продольная сила будет равна 0.

5. Верхняя часть левой стойки KL. Примем начало участка в точке «К». В этой точке уже получено значение продольной силы с участка ВК, равное 40 кН. Сила $F = 30$ кН, находящаяся на боковом ригеле, дает проекцию в точке «К» на продольную ось стойки, оказывая сжимающее воздействие на участок KL. Поэтому на эпюре в точке «К» произведем изменение (скачок) на величину 30 кН в отрицательную сторону от ординаты 40 кН. Получим 10 кН. По длине участок ничем не загружен, поэтому далее проводим прямую линию, параллельную базе, ординатой 10 кН до конца участка, т. е. до точки «L».



Построение эпюры поперечной силы Q

1. Правая стойка CD. Выберем направление построения эпюры от точки «С» к точке «D». В начале участка в точке «С» находится сосредоточенная сила $R_{Cx} = 20$ кН, которая дает проекцию на ось поперечного сечения стойки и создает скачок на эпюре Q величиной 20 кН. Знак скачка «+», так как R_{Cx} поворачивается при движении

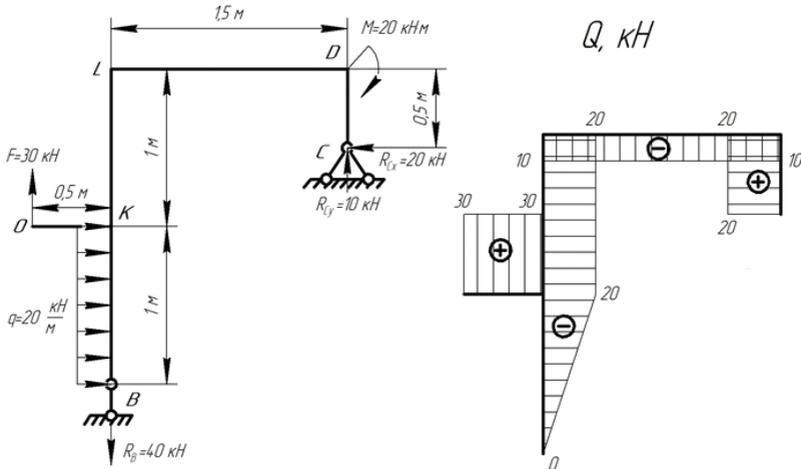
по участку от точки «С» вверх по часовой стрелке. По длине участок ничем не загружен, поэтому на эпюре будет прямая, параллельная базе, ординатой 20 кН до конца участка до точки «D».

2. Верхний ригель DL. Выберем начало в точке «D». Делая сечение в начале участка, оставляем часть рамы DC, на которой проекцию на вертикальную ось любого поперечного сечения ригеля может дать только сила $R_{Cy} = 10$ кН. На момент, находящийся в точке «D», поперечная сила не реагирует. Поэтому в точке «D» откладываем скачок на величину -10 кН. Почему скачок с минусом? Потому что поворот силы R_{Cy} при движении от точки «D» к точке «L» происходит против часовой стрелки. По длине участок DL ничем не загружен, поэтому проводим прямую линию, параллельную базе, ординатой -10 кН до конца участка до точки «L».

3. Нижняя часть левой стойки BK. Выберем начало в точке «B», в которой нет сосредоточенных сил, дающих проекцию на ось поперечного сечения стойки. Поэтому на эпюре Q в точке «B» будет ноль. По длине участок BK загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 20$ кН/м, дающей проекцию на ось поперечного сечения стойки и от которой на эпюре Q будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $-q$. Знак углового коэффициента определяем, поворачивая стрелки интенсивности, двигаясь от точки «B» вверх. Поворот происходит против часовой стрелки, что соответствует знаку « $-$ ». Для построения наклонной прямой определим значение поперечной силы в конце участка, т. е. в точке «K». Для этого умножим интенсивность $-q$ на длину участка, равную одному метру. Получим -20 кН. Приняв отрицательную область значений поперечной силы справа от базы стойки, откладываем эту величину в точке «K».

4. Боковой ригель ОК. Принимаем начало участка в точке «O», в которой находится сосредоточенная сила $F = 30$ кН. Она дает проекцию на ось любого поперечного сечения ригеля. Поэтому на эпюре Q в точке «O» откладываем скачок на величину $+30$ кН, так как сила F поворачивается по часовой стрелке при движении от точки «O» к точке «K». По длине участок ОК ничем не загружен, поэтому на протяжении всей длины будет прямая, параллельная базе, с ординатой 30 кН.

5. Верхняя часть левой стойки KL. Примем начало участка в точке «К». В этой точке уже получено значение продольной силы с участка ВК, равное -20 кН. Сила $F = 30$ кН, находящаяся на боковом ригеле, не дает проекцию на ось поперечного сечения участка KL, поэтому не оказывает влияния на поперечную силу. По длине участок KL ничем не загружен, следовательно, должна быть прямая, параллельная базе, с ординатой -20 кН.



Построение эпюры изгибающего момента M

1. Правая стойка CD. Выберем направление построения эпюры от точки «С» к точке «D». В начале участка в точке «С» отсутствует сосредоточенный момент, поэтому эпюру момента начинаем с нуля. Поскольку по длине участок ничем не загружен, на эпюре момента должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным поперечной силе этого участка, т. е. 20 кН. Для ее построения определим значение момента в конце участка в точке «D» по части рамы CD: $M_D = R_{Cx} \cdot 0,5 \text{ м} = 10 \text{ кНм}$. Ординату 10 кНм откладываем в точке «D» на сжатые волокна, находящиеся слева от базы стойки по направлению действия момента от силы R_{Cx} . Соединяя 10 кНм с нулем в точке «С», получим наклонную прямую.

2. Верхний ригель DL. Выберем направление построения эпюры от точки «D» к точке «L». В начале участка в точке «D», являющейся узловой, соединяющей два элемента: стойку CD и ригель

DL, прежде всего перенесем момент 10 кНм, полученный в точке «D» стойки, на ригель по направлению действия этого момента, т. е. на нижние волокна относительно базы ригеля. Затем увеличим значение перенесенного момента на величину внешнего сосредоточенного момента $M = 20$ кНм, так как его направление совпадает с направлением перенесенного момента со стойки. Таким образом, в точке «D» ригеля получим внутренний момент, равный 30 кНм, на нижних сжатых волокнах. По длине ригель ничем не загружен, поэтому на эпюре момента должна быть наклонная прямая. Для ее построения определим значение момента в конце участка в точке «L». Для этого, делая сечение в точке «L» и оставляя часть рамы LDC, составим алгебраическую сумму моментов от внешних нагрузок, находящихся на этой части рамы. Для этого используем табличную форму вычисления внутреннего момента:

$$M_L^{LDC}$$

ВВ.	НВ.
$R_{cy} \cdot 1,5 = 15$	$M=20$
	$R_{cx} \cdot 0,5 = 10$
	15 кНм

Соединяя ординаты 15 и 30 кНм, получим наклонную прямую на эпюре.

3. Нижняя часть левой стойки ВК. Выберем направление построения эпюры от точки «В» к точке «К». В начале участка в точке «В» отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому начинаем эпюру с нуля. По длине участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 20$ кН/м. Это означает, что на эпюре момента должна быть квадратичная парабола. Вероятность наличия экстремума определяем по эпюре поперечной силы этого участка. Так как наклонная прямая на эпюре Q не пересекает базу, то парабола будет без экстремума, и мы ее построим по двум точкам. Для этого определим значение внутреннего момента в конце участка в точке «К» по части рамы ВК, на которой момент может создать только равномерно распределенная нагрузка по закону $\frac{qz^2}{2}$. Подставим вместо z длину участка, равную 1 метру, и $q = 20$ кН/м,

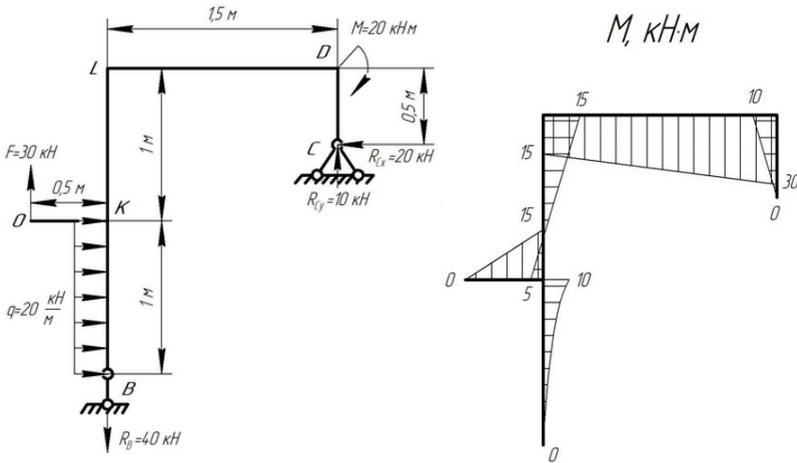
получим $M_K = 10$ кНм. Откладываем эту ординату в точке «К» на сжатые волокна справа от базы стойки по направлению действия момента от равномерно распределенной нагрузки. Соединяем отложенную ординату с нулем в точке «В» параболой, направляя выпуклость навстречу действию нагрузки.

4. Левый ригель ОК. Выбираем направление построения эпюры от точки «О» к точке «К». В начале участка в точке «О» отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому начинаем эпюру с нуля. Участок по длине ничем не загружен. Это означает, что на эпюре должна быть наклонная прямая. Для ее построения определим значение внутреннего момента в конце участка в точке «К» по части рамы ОК. Момент, равный $30 \cdot 0,5 = 15$ кНм, создает внешняя сосредоточенная сила $F = 30$ кН с плечом 0,5 метра. Откладываем ординату 15 кНм в точке «К» на сжатые верхние волокна относительно базы ригеля по направлению действия момента от силы F . Соединяя 15 кНм с нулем в точке «О», получим наклонную прямую.

5. Верхняя часть стойки KL. Выбираем направление построения эпюры от точки «К» к точке «L». Так как точка «К» – узловая точка, в которой соединены три стержня: ВК, ОК и KL, то моменты, полученные в этой точке на участках ВК и ОК, должны передаваться на верхнюю часть стойки KL. Чтобы передать действие этих моментов, надо их алгебраически сложить. Момент с бокового ригеля ОК 15 кНм действует навстречу моменту 10 кНм с нижней части стойки ВК. Поэтому результат 5 кНм получим, вычтя из большего момента меньший, который отложим в точке «К» на верхней части стойки KL со стороны действия большего момента, т. е. слева от базы стойки. По длине участок KL ничем не загружен, поэтому на эпюре будет наклонная прямая. Для ее построения определим величину внутреннего момента в конце участка в точке «L» по части рамы VKL. Используем табличную форму:

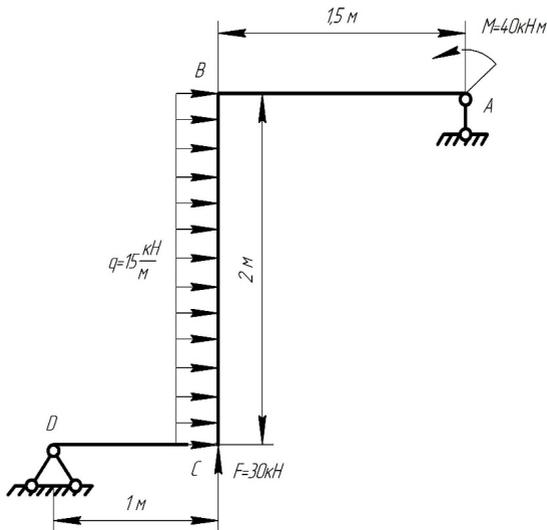
$$\begin{array}{c}
 M_L^{VKL} \\
 \hline
 \begin{array}{c|c}
 \text{лв.} & \text{пв.} \\
 \hline
 F \cdot 0,5 = 15 & q \cdot 1\text{м} \cdot 1,5\text{м} = \\
 & = 30 \\
 \hline
 & 15\text{кНм}
 \end{array}
 \end{array}$$

Откладываем в точке «L» полученное значение момента на сжатые правые волокна относительно базы стойки и соединяем с ординатой 5 кНм в точке «К» наклонной прямой. Эпюра построена.



Эпюры построены. 🙌

Задача для самостоятельного решения



Для данной расчетной схемы рамы построить эпюры внутренних силовых факторов, используя основные закономерности и определяя значения внутренних силовых факторов в характерных сечениях.



Потренируемся?

- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 3).
- ✦ Решить задачу 1.4 из РПР 1 (прил. 4).

Практическое занятие 4

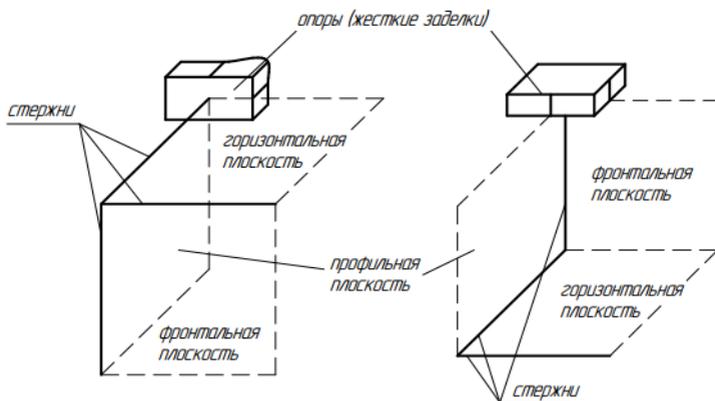
Построение эпюр внутренних силовых факторов на пространственных стержневых конструкциях

Технология построения эпюр внутренних силовых факторов на пространственных стержневых конструкциях



Что такое пространственная стержневая конструкция?

Это конструкция, состоящая из связанных стержней, находящихся в разных плоскостях. Например:



Обе пространственные конструкции консольного типа состоят из трех стержней, связанных между собой в узловых точках под углом в 90° .



Какие внутренние силовые факторы возникают в сечениях элементов пространственной стержневой конструкции?

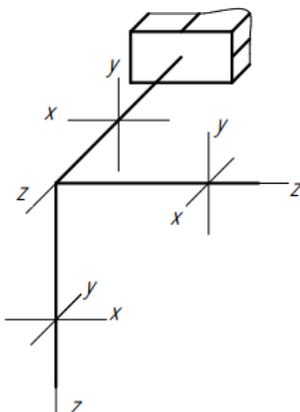
При нагружении элементов конструкции внешними нагрузками в их поперечных сечениях могут возникнуть шесть внутренних си-

ловых факторов: продольная сила N , поперечные силы Q_x и Q_y , изгибающие моменты M_x и M_y и крутящий момент M_z .

 *Какие существуют особенности при построении эпюр внутренних силовых факторов на пространственных стержневых конструкциях?*

1. Воздействие внешних сил и, соответственно, возникающие от них внутренние силовые факторы на каждом стержне рассматриваются по плоскостям декартовой пространственной системы координат.

2. На каждом стержне используют локальную систему координат: ось z совмещают с продольной осью стержня, а оси x и y – горизонтальная и вертикальная оси, соответственно, в поперечном сечении стержня. Например:



3. Силы, удаленные от рассматриваемого стержня, но находящиеся на рассматриваемой части конструкции, рекомендуется приводить к началу данного стержня по правилам переноса сил и включать в число внешних сил, действующих на данный стержень.

4. Эпюры следующих внутренних силовых факторов рекомендуется строить на одной базе:

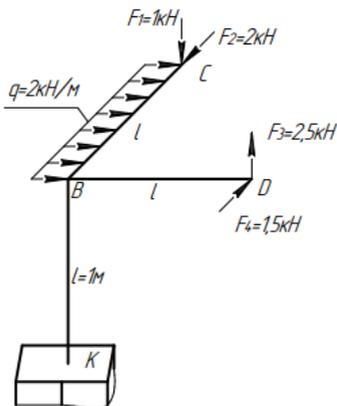
- поперечные силы Q_x и Q_y , ординаты которых откладывают по осям x и y соответственно;
- изгибающие моменты M_x и M_y , ординаты которых откладывают в сторону сжатых волокон в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (плоскостях изгиба).

В остальном все закономерности и приемы построения эпюр внутренних силовых факторов, рассмотренные на стержнях, балках и плоских рамах, применяются также на пространственных стержневых конструкциях.



Пример решения задачи

Для данной консольной пространственной стержневой конструкции построить эпюры внутренних силовых факторов.



Решение

Перед началом решения задачи напоминаем

1. База эпюры представляет собой геометрическую конфигурацию расчетной схемы без опорных элементов и внешних нагрузок.
2. Построение каждой эпюры для консольной конструкции начинаем со свободных концов, двигаясь через узловые точки к заделке.
3. Применяем метод построения по характерным сечениям с использованием основных закономерностей для каждого внутреннего силового фактора.

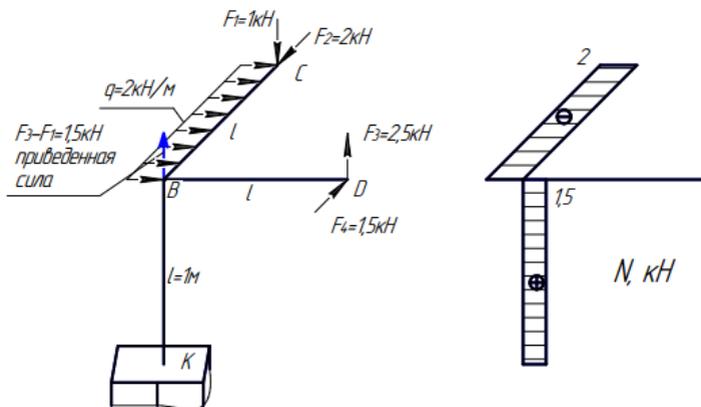
Построение эпюры продольной силы N

Участок СВ. Анализ состояния в начале участка: на свободном конце участка СВ в т. «С» находится сила $F_2 = 2$ кН, действующая по продольной оси стержня и производящая деформацию сжатия. От ее действия откладываем от базы скачок на величину -2 кН в любой удобной для этого плоскости (горизонтальной или профильной).

Мы отложили ординату -2 кН в горизонтальной плоскости, приняв отрицательные значения слева от базы. Анализируем состояние по длине участка: при движении от свободного конца к узлу в т. «В» нет больше сил, действующих вдоль или параллельно продольной оси участка СВ. Поэтому проводим прямую, параллельную базе, ординатой -2 кН до конца участка.

Участок DB. Анализ состояния в начале участка: на свободном конце участка отсутствует сила, действующая по продольной оси стержня, поэтому на эпюре будет 0. Анализируем состояние по длине участка: он пустой, ничем не загружен, т. е. по всей длине стержня продольная сила также будет отсутствовать.

Участок BK. Анализ состояния в начале участка: для этого необходимо в точку «В» привести все силы, параллельные продольной оси стержня ВК, со стержней «СВ» и «DB». Это силы $F_1 = 1$ кН и $F_3 = 2,5$ кН. Так как они имеют разное направление, то их суммарный вектор равен $F_3 - F_1 = 1,5$ кН и имеет направление силы F_3 , т. е. вверх, и оказывает растягивающее воздействие на стержень «ВК». На эпюре эта приведенная сила даст скачок величиной 1,5 кН, который откладываем также в любой визуально удобной для этого плоскости: фронтальной или профильной. Мы отложили во фронтальной плоскости, приняв положительные значения справа от базы. Анализируем состояние по длине участка: он пустой, т. е. проводим прямую, параллельную базе, до конца участка ординатой 1,5 кН.

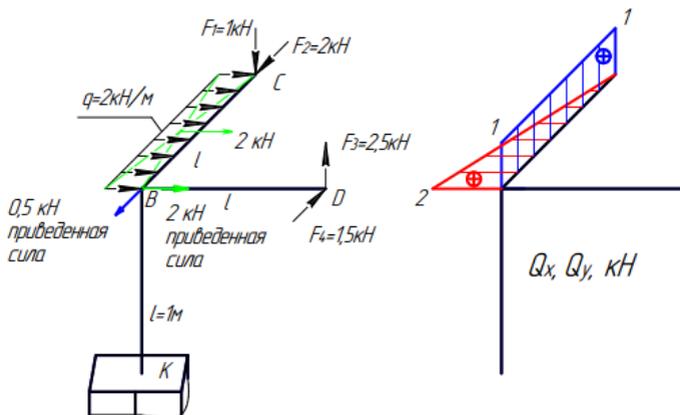


Построение эпюры поперечных сил Q_x и Q_y

Участок СВ

Эпюра поперечной силы Q_y . Анализ состояния в начале участка: в начале участка на свободном конце находится сосредоточенная сила $F_1 = 1$ кН, дающая проекцию на ось y поперечного сечения участка. Это вызовет скачок на эпюре Q_y , равный величине силы. Знак скачка определим, поворачивая силу F_1 по направлению движения по участку (от т. «С» к т. «В»). Сила поворачивается по часовой стрелке, т. е. знак поперечной силы «+». Откладываем от базы ординату $=1$ кН по оси y (вертикальной оси) вверх, приняв положительные значения выше базы. Анализ состояния по длине участка: так как больше нет внешних нагрузок, дающих проекцию на вертикальную ось y поперечных сечений стержня, то проводим прямую, параллельную базе, ординатой 1 кН до конца участка.

Эпюра поперечной силы Q_x . Анализ состояния в начале участка: сосредоточенных сил, дающих проекцию на ось x поперечного сечения, в начале участка в т. «С» нет. Поэтому эпюру Q_x начинаем с 0. Анализируя состояние по длине участка, видим, что участок закружен в горизонтальной плоскости равномерно распределенной нагрузкой, которая проецируется на ось x поперечных сечений. Это означает, что от нуля в начале участка надо провести наклонную прямую с угловым коэффициентом $q = 2$ кН/м. Для построения наклонной прямой определим значение Q_x в конце участка в т. «В», умножив интенсивность нагрузки на длину участка: 2 кН/м \cdot 1 м = 2 кН.

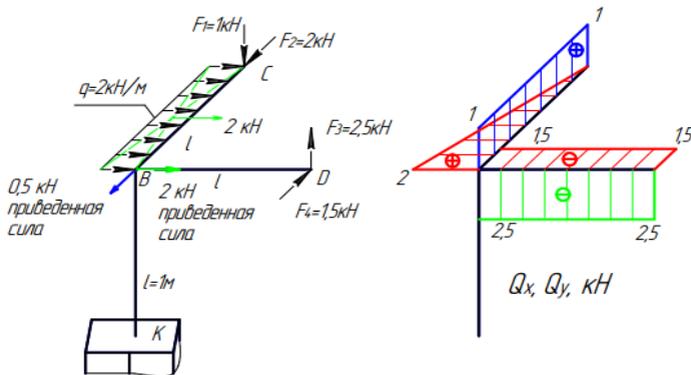


Знак поперечной силы Q_x определим, поворачивая стрелки на грузки по направлению движения по участку (от т. «С» к т. «В»). Поворот происходит по часовой стрелке, значит, знак Q_x «+». Откладываем в т. «В» участка СВ от базы по оси x влево ординату 2 кН, приняв положительные значения с левой стороны, и соединяем с 0 в т. «С».

Участок DB. Анализ состояния в начале участка: в начале участка в т. «D» находятся две сосредоточенные силы:

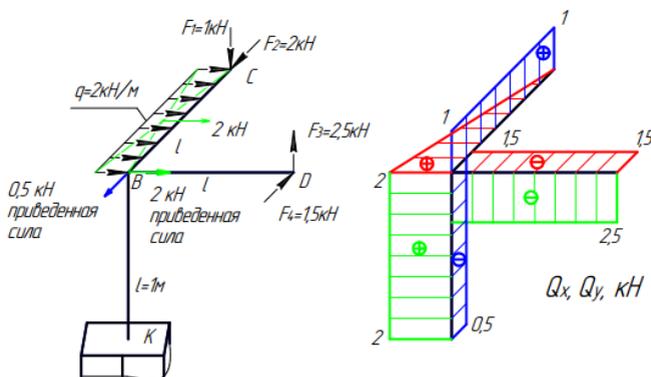
- $F_3 = 2,5$ кН, которая дает проекцию на ось y поперечного сечения и вызывает скачок на эпюре Q_y , равный $-2,5$ кН, так как сила поворачивается по направлению движения по участку от т. «D» к т. «В» против часовой стрелки;
- $F_4 = 1,5$ кН, которая дает проекцию на ось x поперечного сечения и вызывает скачок на эпюре $Q_x = -1,5$ кН, так как сила тоже поворачивается против часовой стрелки по направлению движения по участку.

Откладываем соответствующие ординаты в т. «D» от базы по осям y и x $-2,5$ кН вниз во фронтальной плоскости и $-1,5$ кН вправо в горизонтальной плоскости. Анализ состояния по длине участка: участок ничем не загружен ни в горизонтальной, ни во фронтальной плоскости. Поэтому в горизонтальной и фронтальной плоскостях проводим прямые, параллельные базе, величиной соответствующих ординат.



Участок BK. Сначала приведем в точку «В» все силы с участков СВ и DB, дающие проекции на оси x и y . Это равнодействующая распределенной нагрузки $2ql = 2$ кН, дающая проекцию на ось x поперечного сечения, и суммарный вектор сил F_2 и F_4 , равный 0,5 кН

и направленный в сторону большей силы F_2 , дающий проекцию на ось y поперечного сечения. Эти приведенные силы вызывают скачки в точке «В»: на эпюре $Q_x = 2 \text{ кН}$ и на эпюре $Q_y = -0,5 \text{ кН}$. Знак скачков определяем по той же технологии, поворачивая приведенные силы по направлению построения эпюр, от т. «В» к т. «К». Приведенная горизонтальная сила 2 кН поворачивается по часовой стрелке, что говорит о положительном знаке Q_x . А приведенная сила в $0,5 \text{ кН}$ поворачивается против часовой стрелки, что определяет отрицательный знак скачка на эпюре Q_y . Анализ состояния по длине участка: участок ничем не загружен. Это означает, что на эпюрах Q_x и Q_y будут прямые, параллельные базе, которые проводим в профильной плоскости ординатой $-0,5 \text{ кН}$, а во фронтальной – ординатой 2 кН .



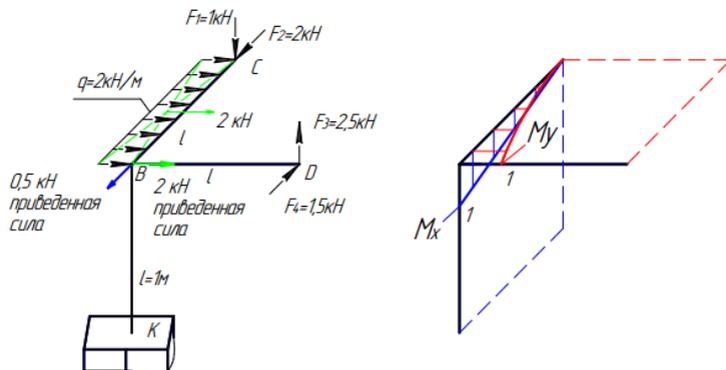
Построение эпюры изгибающих моментов M_x и M_y

Участок СВ. Изгиб этого стержня возможен в двух плоскостях: горизонтальной и профильной. Момент M_x возникает в профильной плоскости, а M_y в горизонтальной.

Эпюра M_x в профильной плоскости: в начале участка на свободном конце стержня в т. «С» отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому эпюру начинаем с 0. Анализ состояния по длине участка: участок пустой, т. е. должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным Q_y этого участка. Для ее построения определим значение M_x в конце участка в т. «В» по части «СВ». Момент создает сила $F_1 = 1 \text{ кН}$ с плечом $\ell = 1 \text{ м}$, т. е. $M_x = F_1 \cdot \ell = 1 \text{ кНм}$. Откладываем эту величину в т. «В» на нижние сжатые волокна по направлению момента от F_1 и соединяем с 0 в т. «С».

Эпюра M_y в горизонтальной плоскости: в начале участка в т. «С» отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому эпюру M_y начинаем с нуля. Анализ состояния по длине участка: участок загружен в горизонтальной плоскости равномерно распределенной нагрузкой, поэтому должна быть парабола, выпуклость которой – навстречу направлению нагрузки. Вероятность наличия экстремума проверяем по эпюре Q_x на данном участке. Наклонная прямая на эпюре Q_x не пересекает базу, значит, парабола будет без экстремума. Такие параболы строят по двум точкам. Для этого определим значение M_y в конце участка в т. «В» по части «СВ» от распределенной нагрузки, заменяя ее равнодействующей, равной 2 кН (вектор зеленого цвета на рисунке), которую помещаем в точку центра тяжести площади, занимаемой нагрузкой. Расстояние от равнодействующей до т. «В» – 0,5 метра, тогда величина $M_y = 2 \text{ кН} \cdot 0,5 \text{ м} = 1 \text{ кНм}$. Откладываем эту величину в т. «В» по направлению действия момента от распределенной нагрузки на правые сжатые волокна в горизонтальной плоскости и соединяем с нулем параболой, выпуклость которой направляем вправо, навстречу вектору q .

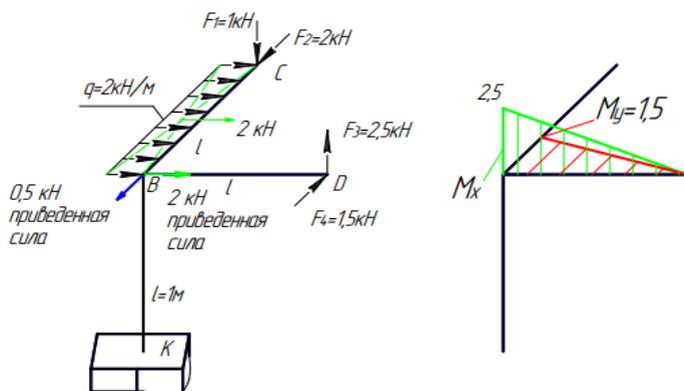
Таким образом, на стержне СВ мы получили эпюры M_x и M_y в виде двух плоских фигур: линейного треугольника (синего цвета) и параболического треугольника (красного цвета), которые находятся в профильной и горизонтальной плоскостях соответственно.



Участок DB. Изгиб данного участка может происходить в горизонтальной и фронтальной плоскостях. В горизонтальной плоскости будет возникать изгибающий момент M_y , а во фронтальной – M_x .

Эпюра M_x во фронтальной плоскости. Анализ состояния в начале участка: на свободном конце в т. «D» отсутствует сосредоточенный внешний момент, т. е. начинаем построение эпюры с 0. Анализ состояния по длине участка: участок ничем не загружен, т. е. должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным Q_y данного участка. Для построения наклонной прямой определим значение M_x в конце участка в т. «B» по части DB. Момент будет создавать сила $F_3 = 2,5$ кН с плечом 1 м: $M_x = 2,5 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м} = 2,5 \text{ кНм}$. Откладываем это значение в т. «B» на верхние сжатые волокна по направлению действия момента от силы F_3 и соединяем с нулем в т. «D».

Эпюра M_y в горизонтальной плоскости. Анализ состояния в начале участка: на свободном конце в т. «D» отсутствует сосредоточенный внешний момент, т. е. начинаем построение эпюры с 0. Анализ состояния по длине участка: участок ничем не загружен, т. е. должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом Q_x данного участка. Для построения наклонной прямой определим значение M_y в конце участка в т. «B» по части DB. Момент будет создавать сила $F_4 = 1,5$ кН с плечом 1 м: $M_y = 1,5 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м} = 1,5 \text{ кНм}$. Откладываем это значение в т. «B» на правые сжатые волокна по направлению действия момента от силы F_4 и соединяем с нулем в т. «D». Таким образом, на стержне DB мы получили эпюры M_x и M_y в виде двух плоских фигур – линейных треугольников, которые находятся во фронтальной и горизонтальной плоскостях, зеленого и красного цвета соответственно.



Участок ВК. Изгиб данного участка может происходить во фронтальной и профильной плоскостях. В профильной плоскости будет возникать изгибающий момент M_x , а во фронтальной – M_y . В горизонтальной плоскости данный участок может подвергаться деформации кручения, что сопровождается возникновением внутреннего крутящего момента M_z .

Эюра M_x в профильной плоскости. Анализ состояния в начале участка в т. «В». В профильной плоскости в данную точку приведен момент с участка СВ, равный 1 кНм, который передаем на участок ВК по направлению действия данного момента, т. е. на правые сжатые волокна стержня в профильной плоскости. Анализ состояния по длине участка: участок ничем не загружен, т. е. должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом $Q_y = -0,5$ кН. Для построения наклонной прямой определим значение M_x в конце участка в т. «К». Направление приведенной в т. «В» силы 0,5 кН (синий вектор на рисунке) показывает направление изменения момента M_x с правых сжатых волокон в профильной плоскости на левые волокна. В пределах длины участка (1 метр) это изменение произойдет на величину $0,5 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м} = 0,5 \text{ кНм}$. Вычисление момента M_x в точке «К» сделаем в табличном виде:

сжаты	
пв	лв
1	0,5
0,5	

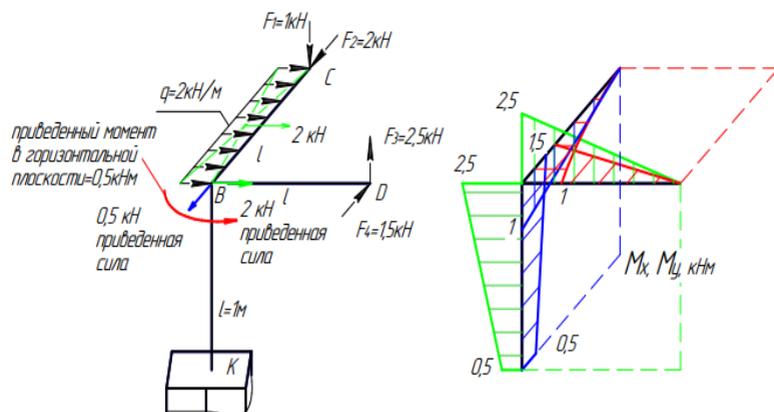
Здесь в таблице: пв – правые волокна, лв – левые волокна. Таким образом, отложив 0,5 кНм на правые сжатые волокна в т. «К» в профильной плоскости и соединив с ординатой 1 кНм в начале участка, получим трапецию (на рисунке синего цвета).

Эюра M_y во фронтальной плоскости. Анализ состояния в начале участка в т. «В»: во фронтальной плоскости в данную точку приведен момент с участка ДВ, равный 2,5 кНм (на рисунке зеленого цвета), который передаем на левые сжатые волокна стержня ВК по направлению действия момента. Анализ состояния по длине участка: участок ничем не загружен. Значит, должна быть наклон-

ная прямая с угловым коэффициентом, равным $Q_x = 2$ кН данного участка. Направление изменения момента M_y от величины 2,5 кНм в начале участка определим по направлению вектора приведенной в т. «В» силы, равной 2 кН (на рисунке зеленого цвета), которое указывает на изменение момента с левых сжатых волокон на правые на величину, равную $2 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м} = 2 \text{ кНм}$. Вычислим значение M_y в конце участка ВК в табличной форме:

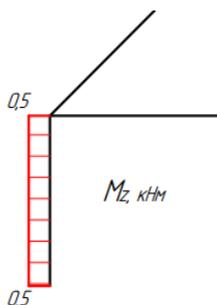
сжаты	
ПВ	ЛВ
2	2,5
	0,5

Отложив величину ординаты, равную 0,5 кНм, в конце участка во фронтальной плоскости на левые сжатые волокна участка «ВК» и соединив с величиной 2,5 кНм, получим трапецию (на рисунке зеленого цвета).



Эпюра крутящего момента M_z в горизонтальной плоскости. Анализ состояния в начале участка в т. «В»: в горизонтальной плоскости приведено два момента: с участка СВ 1 кНм и с участка DB 1,5 кНм (на рисунке красные ординаты). Сначала алгебраически складываем эти моменты, учитывая направления их действия: момент, равный 1 кНм, действует по часовой стрелке (согласно направлению действия равнодействующей распределенной нагрузки), а момент,

равный $1,5 \text{ кНм}$, – против часовой стрелки (согласно направлению действия силы F_4). Результирующий момент равен: $1,5 - 1 = 0,5 \text{ кНм}$ и имеет направление против часовой стрелки (на расчетной схеме красного цвета). Откладываем его на базе участка «ВК» в т. «В» в любой, удобной для визуального восприятия, плоскости. Мы отложили эту ординату на эпюре во фронтальной плоскости. Анализ состояния по длине участка: участок ничем не загружен. Согласно закономерностям при построении эпюры крутящего момента это означает, что на всем участке крутящий момент не изменяется и равен $0,5 \text{ кНм}$. На эпюре это будет прямоугольник ординатой $0,5 \text{ кНм}$.

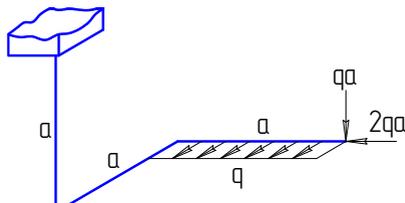


Эпюры построены.



Задача для самостоятельного решения на занятии

Для заданной расчетной схемы построить эпюры внутренних силовых факторов, используя метод построения по характерным сечениям.



Потренируемся?

- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 4).
- ✦ Решить задачу 1.5 из РПР 1 (прил. 4).

МОДУЛЬ 2

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Цели занятий: освоить методику проведения испытаний материала при растяжении-сжатии. Научиться перестраивать машинную диаграмму испытания при растяжении в условную диаграмму и определять основные механические характеристики материала, используя результаты испытания. Научиться рассчитывать стержневые конструкции, работающие в условиях растяжения-сжатия, на прочность и жесткость.

Необходимые знания для достижения цели

1. Типы образцов, используемые для испытания на растяжение, и методика проведения испытания на растяжение.
2. Машинная и условная диаграммы испытания.
3. Основные механические характеристики, определяемые по результатам испытания на растяжение.
4. Алгоритм перестроения машинной диаграммы испытания на растяжение в диаграмму условную.
5. Условие прочности по допускаемому напряжению при растяжении-сжатии.
6. Алгоритм расчета на прочность.
7. Задачи, вытекающие из условия прочности.
8. Условие жесткости при растяжении-сжатии по величине допускаемого перемещения.
9. Алгоритм расчета на жесткость.

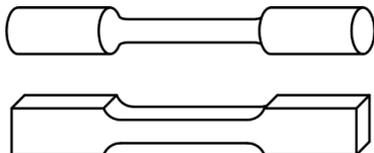
Технологическая карта работы в модуле

№ недели	Вид аудиторного занятия	Самостоятельная работа	Контроль выполнения самостоятельной работы
6	Лабораторно-практическое занятие 1. Определение механических характеристик материала по результатам испытания на растяжение	Подготовка к лабораторно-практическому занятию, выполнение РПР 2	Прием отчета по лабораторно-практическому занятию, консультация по РПР 2
7	Лекция 4	Выполнение РПР 2	Консультация по РПР 2, прием РПР 2
	Практическое занятие 5		

Лабораторно-практическое занятие 1 Определение механических характеристик материала по результатам испытания на растяжение

 Какие типы образцов используются при испытании на растяжение?

Для испытания на растяжение изготавливают образцы в виде стержня круглого или прямоугольного сечения. На концах образца обычно делают утолщения (*головки*), необходимые для его закрепления в испытательной машине. Средняя, наиболее узкая часть образца называется *рабочей частью*.



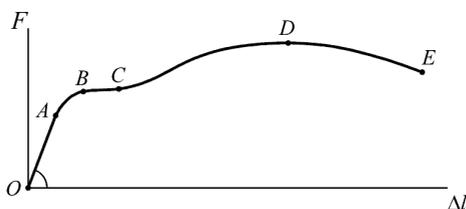
Перед испытанием образцы размечаются. Как? В случае цилиндрического образца измеряется диаметр рабочей части d . Затем на поверхности рабочей части симметрично относительно ее центра откладывается и отмечается рисками расстояние, равное $10d$ или $5d$. В первом случае образец называется нормальным, во втором – укороченным. Расстояние между метками называется *расчетной длиной образца*.

Если образец плоский, то измеряются ширина и толщина его рабочей части. При вычислении расчетной длины используется диаметр круга, площадь которого равна площади поперечного сечения рабочей части образца.

 Что такое машинная диаграмма растяжения?

В процессе испытания образец растягивается с постоянной скоростью до разрыва. При этом самописец испытательной машины вычерчивает график, показывающий изменение растягивающей силы F с ростом удлинения образца Δl — машинную диаграмму растяжения.

 Как по диаграмме растяжения понять, что происходило с образцом в процессе испытания?



На начальном участке OA зависимость между F и Δl линейна, то есть здесь выполняется закон Гука, — это *участок упругой деформации*. Далее диаграмма искривляется и с появлением пластических деформаций переходит в почти горизонтальный участок BC — *площадку текучести*. Накопление пластических деформаций приводит к изменению внутренней структуры материала, в результате которой он упрочняется. На диаграмме наблюдается дальнейший рост нагрузки (CD — *участок упрочнения*). При достижении точки D деформация образца сосредотачивается в самом слабом месте, где возникает локальное сужение (*шейка*). Из-за уменьшения площади сечения образца наблюдается спад растягивающей нагрузки на участке DE . Последняя точка диаграммы E соответствует началу разрушения образца.

 Что такое условная диаграмма растяжения?

Зачем понадобилась еще одна диаграмма? Машинная диаграмма характеризует свойства не материала, а образца, так как ее значения зависят от исходных размеров поперечного сечения и рас-

четной длины образца. Поэтому диаграмму «сила F – удлинение Δl » перестраивают в координатах «напряжение σ – относительная деформация ε », используя формулы:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где A_0 – начальная площадь поперечного сечения образца (до нагружения); l_0 – начальная расчетная длина образца.

Полученный график называют *условной диаграммой растяжения*, поскольку в приведенных формулах усилие и удлинение относят не к действительным, а к начальным размерам образца.

  *Какие механические характеристики материалов определяют по результатам испытания на растяжение?*

Механические характеристики материалов принято делить на прочностные, пластические и упругие.

Основными характеристиками прочности являются *предел текучести* σ_T и *предел прочности* σ_B .

Что такое **предел текучести** σ_T ? За предел текучести принимают напряжение, соответствующее минимальному значению растягивающей силы на площадке текучести.

Что такое **предел прочности** σ_B ? За предел прочности принимают напряжение, соответствующее максимальному значению растягивающей силы за всё время испытания.

Характеристики пластичности: *относительное удлинение после разрыва* δ и *относительное сужение после разрыва* ψ .

Что такое **относительное удлинение после разрыва** δ ?

Относительное удлинение после разрыва можно вычислить по формуле

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100 \%,$$

где l_0 – расчетная длина образца до испытания; l_1 – расчетная длина образца после разрыва.

Что такое **относительное сужение после разрыва** ψ ?

Относительное сужение после разрыва определяется по формуле

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100 \%,$$

где A_0 – площадь поперечного сечения рабочей части образца до испытания; A_1 – площадь поперечного сечения рабочей части образца в месте разрыва (шейки).

Основной характеристикой упругости является *модуль упругости первого рода E* (модуль Юнга).

Что такое **модуль упругости первого рода E** ?

Это физическая константа, характеризующая жесткость материала, то есть его способность сопротивляться упругой деформации растяжения-сжатия. Математически модуль Юнга представляет собой коэффициент пропорциональности между напряжением и относительным удлинением при упругой деформации:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Для сталей модуль Юнга слабо зависит от марки и составляет в среднем $2 \cdot 10^5$ МПа.

Порядок проведения лабораторно-практического занятия

1. Ознакомление с устройством испытательной машины.
2. Наблюдение за процессом испытания стального образца нормального типа.
3. Определение механических характеристик материала и перестроение машинной диаграммы в условную диаграмму для заранее испытанного образца, выданного преподавателем вместе с протоколом, включающим машинную диаграмму и размеры образца до испытания.



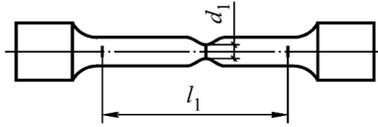
Алгоритм определения механических характеристик

1. По приведенным в табл. 1 протокола начальным поперечным размерам сечения образца: b_0 и c_0 (для плоского образца) или диаметру d_0 (для цилиндрического образца) вычислить начальную площадь поперечного сечения A_0 и занести результат в табл. 1 протокола.

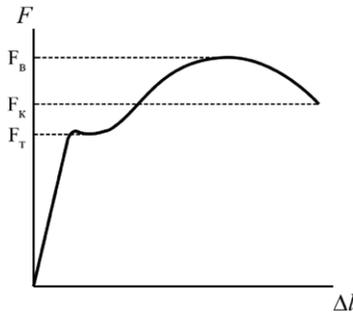
2. Измерить поперечные размеры в месте разрыва (для цилиндрического образца – диаметр d_1 , для плоского – ширину и толщину b_1 и c_1) и занести значения размеров в табл. 1 протокола.

3. По измеренным поперечным размерам образца в месте разрыва вычислить площадь сечения в шейке A_1 и занести в табл. 1 протокола.

4. Положить части разрушенного образца рисками вверх и плотно соединить друг с другом так, чтобы совпали поверхности разрушения. Измерить штангенциркулем расстояние между рисками l_1 и занести результат в табл. 1 протокола.



5. По машинной диаграмме растяжения, приведенной в протоколе, определить величину наименьшей силы на площадке текучести F_T , максимальную силу F_B и усилие в момент разрыва F_K . Занести значения сил в табл. 1 протокола.



В случае отсутствия площадки текучести рекомендуется принять за F_T нагрузку, соответствующую окончанию участка упругости.

6. Вычислить и занести в табл. 2 механические характеристики:

– предел текучести $\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}$;

– предел прочности $\sigma_B = \frac{F_B}{A_0}$;

– истинное сопротивление разрыву $\sigma_s = \frac{F_K}{A_1}$;

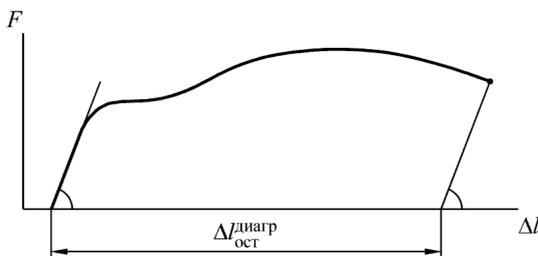
– относительное удлинение после разрыва $\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%$;

– относительное сужение после разрыва $\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%$.



Алгоритм перестроения машинной диаграммы растяжения в условную

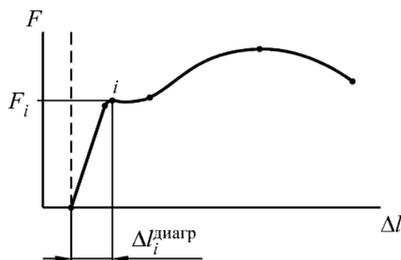
1. Провести на машинной диаграмме из точки разрыва прямую, параллельную участку упругости, до пересечения с осью удлинения. Измерить линейкой расстояние $\Delta l_{\text{ост}}^{\text{диагр}}$ от начала диаграммы до полученной точки.



2. Определить масштабный коэффициент рабочей диаграммы по оси Δl :

$$M_{\Delta l} = \frac{l_1 - l_0}{\Delta l_{\text{ост}}^{\text{диагр}}}.$$

3. Выбрать на машинной диаграмме несколько характерных точек, например, начало и конец площадки текучести (если ее нет, то конечную точку участка упругости), точки, соответствующие пределу прочности и разрыву. Для каждой точки определить величину усилия F_i и расстояние от точки до вертикальной оси, проходящей через начало диаграммы, $\Delta l_i^{\text{диагр}}$ в миллиметрах (здесь и далее i – номер точки).



4. Пересчитать для каждой точки координаты F_i и $\Delta l_i^{\text{диагр}}$ в напряжение σ_i и относительную деформацию ε_i :

$$\sigma_i = \frac{F_i}{A_0}; \quad \varepsilon_i = \frac{\Delta l_i^{\text{диагр}} \cdot M_{\Delta l}}{l_0} \cdot 100 \%.$$

При выполнении п. 3, 4 рекомендуется использовать таблицу:

№ точки	F	$\Delta l_{\text{диагр}}$	σ	ε
	кН	мм	МПа	%

5. Выбрать масштаб осей напряжения и относительной деформации условной диаграммы, ориентируясь на величины σ_B и δ , стараясь, чтобы размеры диаграммы по осям σ и F , ε и Δl примерно были одинаковы.

6. Нанести точки с координатами $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ на условную диаграмму. Соединить точки линиями, примерно придерживаясь формы машинной диаграммы.

Практическое занятие 5 **Расчет на прочность и жесткость** **при растяжении-сжатии**

 *Что такое условие прочности по допускаемому напряжению?*

В условиях растяжения-сжатия в поперечных сечениях стержневой конструкции возникают нормальные напряжения под действием внутренней продольной силы, которые вычисляются по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – величина внутренней продольной силы в данном сечении;
 A – площадь поперечного сечения.

Условием прочности по допускаемому напряжению считается выполнение следующего неравенства:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – величина допускаемого напряжения, является справочной величиной или определяется по характеристикам прочности для данной марки материала как:

– для пластичного материала

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T};$$

– для хрупкого материала

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B},$$

где σ_T – предел текучести; σ_B – предел прочности данной марки материала; n_T – коэффициент запаса по текучести; n_B – коэффициент запаса по прочности.



Алгоритм расчета на прочность

1. Определить положение опасного сечения:

- построить эпюру продольной силы N ;
- вычислить величину максимального нормального напряжения:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max}.$$

2. Записать условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma]$$

и решить его согласно поставленной задаче.



Какие задачи можно решить из условия прочности?

1. Проверочная задача – известны геометрические размеры конструкции, условия нагружения, марка материала, из которого изготовлена конструкция, и необходимо проверить выполнение условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma],$$

2. Проектировочная задача – известны условия нагружения, соотношения геометрических размеров поперечных сечений участков стержня, марка материала и необходимо определить допускаемую величину площади поперечного сечения $[A] = \frac{N}{[\sigma]}$, удовлетворяющую условию прочности

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma],$$

3. Задача по определению грузоподъемности конструкции – известны геометрические размеры, марка материала, закон нагруже-

ния конструкции и требуется определить величину допускаемой нагрузки $[N(F)] = A \cdot [\sigma]$, удовлетворяющей условию прочности.

4. Задача по подбору марки материала для изготовления конструкции – известны геометрические размеры и условия нагружения конструкции и требуется подобрать из условия прочности марку материала.



Что такое условие жесткости при растяжении-сжатии?

Под условием жесткости понимается ограничение максимального перемещения сечений стержневой конструкции в результате деформации растяжения-сжатия величиной допускаемого перемещения:

$$\delta_{\max} \leq [\delta] \text{ или } \sum_i \Delta l_i \leq [\delta],$$

где δ_{\max} – величина максимального перемещения поперечных сечений стержня вследствие деформации; $[\delta]$ – допускаемое перемещение, обычно назначаемое из условий эксплуатации.

Величина δ_{\max} может быть определена как накопленная алгебраическая сумма абсолютных деформаций участков стержня

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{EA_i},$$

где N_i – внутренняя продольная сила i -го участка, взятая с эпюры; l_i – длина; A_i – площадь поперечного сечения i -го участка соответственно; E – модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга).



Алгоритм расчета на жесткость

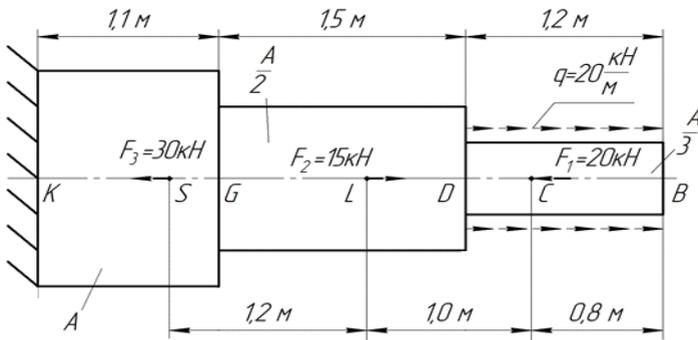
1. Выбрать начало координат для отсчета перемещений поперечных сечений (если стержень имеет жесткую заделку, то рекомендуется принять начало координат в заделке).
2. Разделить стержень на участки, в пределах каждого из которых неизменны функция продольной силы и площадь поперечного сечения.
3. Двигаясь от начала координат, определить абсолютную деформацию каждого участка с учетом знака продольной силы.
4. Определить перемещение каждого характерного сечения стержня как накопленную сумму абсолютных деформаций участков, предшествующих данному сечению: $\delta_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$.

5. По значениям полученных перемещений рекомендуется построить эпюру, откладывая от базы, параллельной продольной оси стержня, величины перемещений в соответствующих сечениях стержня.
6. Записать условие жесткости в виде: $|\delta_{\max}| \leq [\delta]$ и сделать вывод о его выполнении.



Пример решения задачи

Стержень круглого поперечного сечения с заданным соотношением площадей поперечного сечения участков нагружен осевыми силами.



Требуется

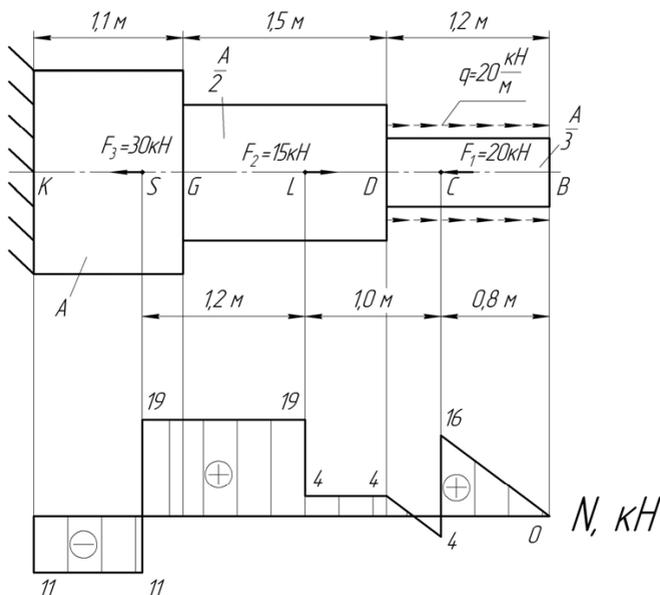
1. Из условия прочности по допускаемому напряжению определить величину допускаемой площади поперечного сечения $[A]$, построив эпюры продольной силы N , нормальных напряжений σ .
2. Произвести проверку жесткости стержня с полученным значением площади сечения, построив эпюру перемещений δ .
3. Спроектировать равнопрочный стержень круглого поперечного сечения.

Принять: $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Величину $[\delta]$ определить на основании закона Гука как

$$[\delta] = \frac{[\sigma] \cdot l}{E}.$$

Решение

1. Построим эпюру продольных сил, используя метод сечений.



2. Определим нормальные напряжения в характерных сечениях на выделенных участках стержня в долях от площади поперечного сечения A :

Участок KS. Во всех сечениях данного участка в силу постоянства значения продольной силы и площади поперечного сечения нормальное напряжение будет одинаковым.

$$\sigma_{KS} = \frac{N_{KS}}{A_{KS}} = \frac{-11 \text{ кН}}{A}.$$

Участок SG. На участке SG, как и на предыдущем участке, в результате постоянства продольной силы и площади поперечного сечения напряжение будет постоянным по величине.

$$\sigma_{SG} = \frac{N_{SG}}{A_{SG}} = \frac{19 \text{ кН}}{A}.$$

Участок GL. На данном участке напряжение будет константой в силу тех же причин, что и на предыдущих участках, при площади поперечного сечения в два раза меньшей.

$$\sigma_{GL} = \frac{N_{GL}}{A_{GL}} = \frac{19 \text{ кН}}{A/2} = \frac{38 \text{ кН}}{A}.$$

Участок LD. Участок аналогичен участку GL

$$\sigma_{LD} = \frac{N_{LD}}{A_{LD}} = \frac{4 \text{ кН}}{A/2} = \frac{8 \text{ кН}}{A}.$$

Участок DC. На данном участке продольная сила изменяется по закону наклонной прямой при площади поперечного сечения $A/3$. Определим напряжение в граничных сечениях участка.

$$\sigma_D^{DC} = \frac{N_D}{A_D} = \frac{4 \text{ кН}}{A/3} = \frac{12 \text{ кН}}{A}; \quad \sigma_C^{DC} = \frac{N_C}{A_C} = \frac{-4 \text{ кН}}{A/3} = \frac{-12 \text{ кН}}{A}.$$

Участок CB. Участок аналогичен предыдущему. Поэтому определяем также напряжения в граничных сечениях участка.

$$\sigma_C^{(CB)} = \frac{N_C^{(CB)}}{A_C} = \frac{16 \text{ кН}}{A/3} = \frac{48 \text{ кН}}{A}; \quad \sigma_B^{CB} = \frac{N_B}{A_B} = \frac{0 \text{ кН}}{A/3} = 0.$$

3. По полученным значениям построим эпюру напряжений ($\sigma \cdot A$), соблюдая характер зависимости на участках соответственно эпюре продольной силы.

4. Определим из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma]$$

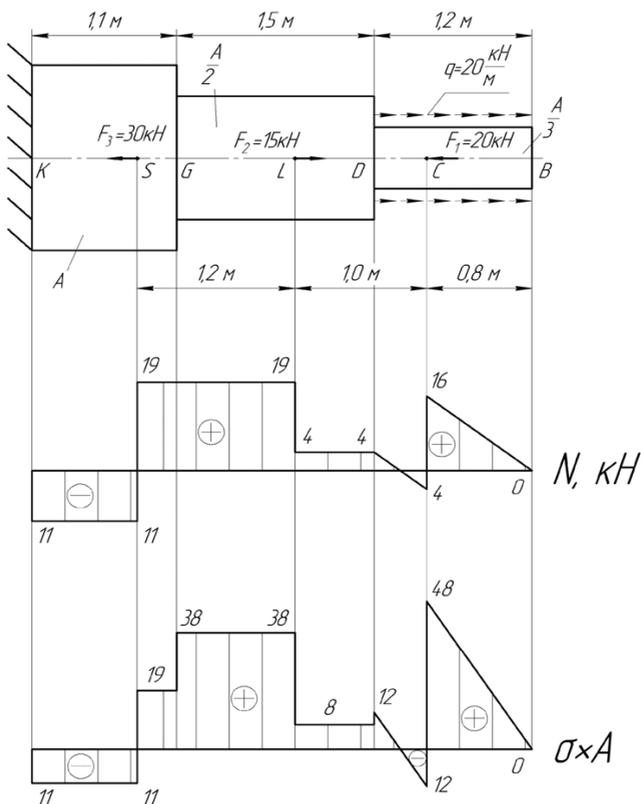
величину допускаемой площади поперечного сечения стержня.

Опасное сечение стержня – сечение «С». Условие прочности запишем:

$$\sigma_{\max} = \frac{48}{A} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Тогда величина допускаемой площади поперечного сечения из решения данного условия прочности равна:

$$[A] = \frac{48 \text{ кН}}{160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$



5. Для проведения проверки жесткости стержня рассчитаем абсолютные линейные деформации участков стержня, приняв начало координат в жесткой заделке (сечение «К»). На участках с постоянным значением напряжения по длине можно использовать формулу

$$\Delta l = \frac{\sigma \cdot l}{E},$$

т. е. на участках KS, SG, GL и LD. Расчет сделаем, не раскрывая жесткости поперечного сечения EA .

$$\Delta l_{KS} = \frac{\sigma_{KS} \cdot l_{KS}}{E} = \frac{-11 \cdot 0,8 \text{ м}}{EA} = -\frac{8,8}{EA}; \quad \Delta l_{SG} = \frac{\sigma_{SG} \cdot l_{SG}}{E} = \frac{19 \cdot 0,3 \text{ м}}{EA} = \frac{5,7}{EA};$$

$$\Delta l_{GL} = \frac{\sigma_{GL} \cdot l_{GL}}{E} = \frac{38 \cdot 0,9 \text{ м}}{EA} = \frac{34,2}{EA}; \quad \Delta l_{LD} = \frac{\sigma_{LD} \cdot l_{LD}}{E} = \frac{8 \cdot 0,6 \text{ м}}{EA} = \frac{4,8}{EA}.$$

На участках DC и CB продольная сила и напряжение меняются по закону наклонной прямой, и абсолютная линейная деформация определяется по интегральной формуле

$$\Delta l = \int \frac{N(z)dz}{EA},$$

т. е.

$$\Delta l_{DC} = \int_0^{0,4\text{м}} \frac{(4 - 20z)dz}{EA_{DC}} = \frac{4z - 10z^2}{EA/3} \Big|_0^{0,4\text{м}} = \frac{12z - 30z^2}{EA} \Big|_0^{0,4\text{м}} = 0.$$

По выражению, полученному в числителе, видно, что характер изменения величины абсолютной деформации на участке DC получился параболический. Посередине участка в точке Р, где величина продольной силы равна нулю (эпюра N пересекает базу), абсолютная деформация будет иметь экстремум. Поэтому найдем Δl_p половины длины участка DC, т. е. вычислим интеграл, записанный для определения Δl_{DC} при $z = 0,2$ м. Получим:

$$\Delta l_{DP|z=0,2\text{м}} = \frac{12 \cdot 0,2 - 30 \cdot 0,2^2}{E \cdot A} = \frac{1,2}{EA}.$$

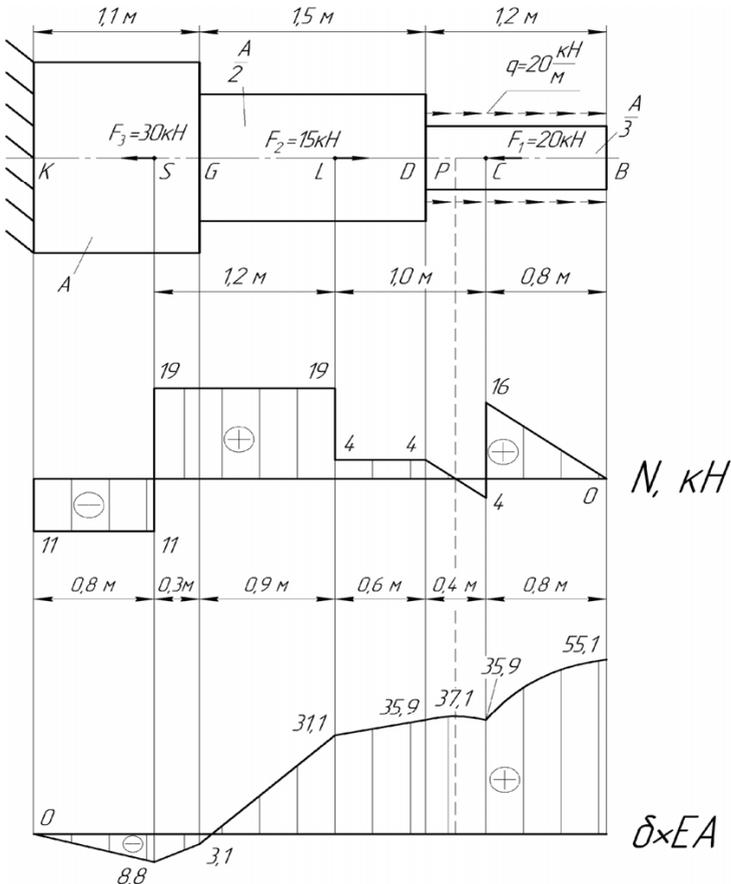
Аналогично определим абсолютное изменение длины участка CB:

$$\Delta l_{CB} = \int_0^{0,8\text{м}} \frac{(16 - 20z)dz}{E \cdot A_{CB}} = \frac{16z - 10z^2}{EA/3} \Big|_0^{0,8\text{м}} = \frac{19,2}{EA}.$$

6. Определим перемещения характерных сечений «S», «G», «L», «D», «P», «C», «B» относительно неподвижного сечения «K» и построим эпюру перемещений на базе, параллельной продольной оси стержня, не раскрывая знаменателя EA:

$$\begin{aligned} \delta_{S-K} &= \Delta l_{KS} = -\frac{8,8}{EA}; \\ \delta_{G-K} &= \delta_{S-K} + \Delta l_{SG} = -\frac{8,8}{EA} + \frac{5,7}{EA} = -\frac{3,1}{EA}; \\ \delta_{L-K} &= \delta_{G-K} + \Delta l_{GL} = -\frac{3,1}{EA} + \frac{34,2}{EA} = \frac{31,1}{EA}; \\ \delta_{D-K} &= \delta_{L-K} + \Delta l_{LD} = \frac{31,1}{EA} + \frac{4,8}{EA} = \frac{35,9}{EA}; \\ \delta_{P-K} &= \delta_{D-K} + \Delta l_{DP} = \frac{35,9}{EA} + \frac{1,2}{EA} = \frac{37,1}{EA}; \\ \delta_{C-K} &= \delta_{D-K} + \Delta l_{DC} = \frac{35,9}{EA} + 0 = \frac{35,9}{EA}; \end{aligned}$$

$$\delta_{B-K} = \delta_{C-K} + \Delta l_{CB} = \frac{35,9}{EA} + \frac{19,2}{EA} = \frac{55,1}{EA}$$



Из анализа полученных результатов видно, что максимальное перемещение относительно заделки получило сечение «В». Подставим в знаменатель выражения для перемещения сечения «В» значение модуля упругости и площади поперечного сечения, полученной из условия прочности:

$$\delta_{\max} = \delta_{B-K} = \frac{55,1}{EA} = \frac{55,1 \text{ кН} \cdot \text{м}}{2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 9,18 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Проведем проверку жесткости: $|\delta_{\max}| \leq [\delta]$. Из расчетов

$$\delta_{\max} = 9,18 \cdot 10^{-4} \text{ м}; [\delta] = [\varepsilon] \cdot l = \frac{[\sigma] \cdot l}{E} = \frac{160 \text{ МПа} \cdot 3,8 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 30,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

(на основании закона Гука).

$$\delta_{\max} = 9,18 \cdot 10^{-4} \text{ м} < [\delta] = 30,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

То есть площадь поперечного сечения, определенная из условия прочности, обеспечивает жесткость конструкции.

7. Спроектируем рациональную конструкцию с точки зрения экономии расхода материала. Такой конструкцией является равнопрочный стержень или стержень равного сопротивления, у которого на всех участках напряжение одинаково и равно допускаемому значению: $\sigma_i = [\sigma]$. Из этого условия выразим диаметр i -го участка стержня:

$$\frac{N_i}{A_i} = \frac{N_i \cdot 4}{\pi \cdot d_i^2} = [\sigma],$$

откуда

$$[d_i] = 2 \cdot \sqrt{\frac{N_i}{\pi \cdot [\sigma]}}.$$

Из анализа полученной формулы очевидно, что на участках стержня с постоянным значением продольной силы N_i форма участка будет цилиндрической. На тех же участках, где продольная сила изменяется по наклонной прямой, форма должна представлять конус с криволинейной поверхностью. Для упрощения технологии изготовления примем форму таких участков цилиндрическими с диаметром, равным диаметру основания конуса, определенному по максимальной величине продольной силы данного участка. Подставляя с эпюры продольной силы ее значения по участкам, получим значения диаметров участков новой конструкции стержня:

$$[d_{KS}] = 2 \cdot \sqrt{\frac{N_{KS}}{\pi \cdot [\sigma]}} = 9,5 \text{ мм}; [d_{SL}] = 2 \cdot \sqrt{\frac{N_{SL}}{\pi \cdot [\sigma]}} = 12,5 \text{ мм};$$

$$[d_{LD}] = 2 \cdot \sqrt{\frac{N_{LD}}{\pi \cdot [\sigma]}} = 6 \text{ мм}.$$

При внимательном анализе эпюры продольной силы на участке DC, где наклонная прямая изменяется от $N_D = 4$ кН до $N_C = -4$ кН, проектируемый цилиндрический участок будет такого же диаметра, как предшествующий участок LD, испытывающий постоянную по величине продольную силу, равную $N_{LD} = 4$ кН:

$$[d_{DC}] = 2 \cdot \sqrt{\frac{N_D}{\pi \cdot [\sigma]}} = 6 \text{ мм.}$$

На последнем участке СВ проектируем цилиндр, диаметр основания которого определяем по максимальному значению продольной силы этого участка $N_C = 16$ кН:

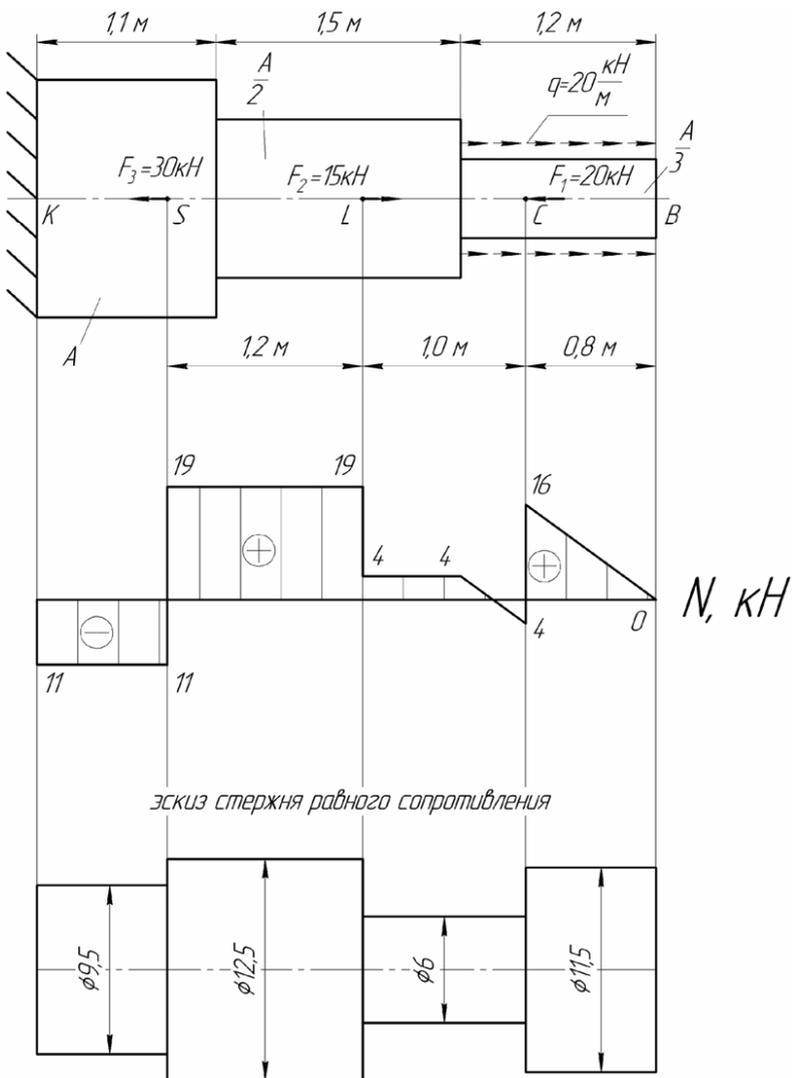
$$[d_C] = 2 \cdot \sqrt{\frac{N_C}{\pi \cdot [\sigma]}} = 11,5 \text{ мм.}$$

По полученным размерам построим эскиз новой конструкции стержня. Сравним металлоемкость исходного стержня и спроектированного нами. Для этого определим их объемы:

$$\begin{aligned} V_{\text{исход.ст.}} &= V_{KG} + V_{GD} + V_{DB} = A_{KG} \cdot l_{KG} + A_{GD} \cdot l_{GD} + A_{DB} \cdot l_{DB} = \\ &= [A] \left(l_{KG} + \frac{1}{2} \cdot l_{GD} + \frac{1}{3} \cdot l_{DB} \right) = \\ &= 3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(1,1 \text{ м} + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \text{ м} + \frac{1}{3} \cdot 1,2 \text{ м} \right) = 6,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{спроект.ст.}} &= V_{KS} + V_{SL} + V_{LC} + V_{CB} = \\ &= \frac{\pi}{4} (d_{KS}^2 \cdot l_{KS} + d_{SL}^2 \cdot l_{SL} + d_{LC}^2 \cdot l_{LC} + d_{CB}^2 \cdot l_{CB}) = \\ &= \frac{3,14}{4} \cdot 10^{-6} (9,5^2 \cdot 0,8 + 12,5^2 \cdot 1,2 + 6^2 \cdot 1 + 11,5^2 \cdot 0,8) = \\ &= 3,15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Таким образом, спроектированный стержень, на котором выполняется условие равной прочности только на двух участках из четырех, экономически более выгодный, так как расход материала меньше по сравнению с исходным в два с лишним раза.

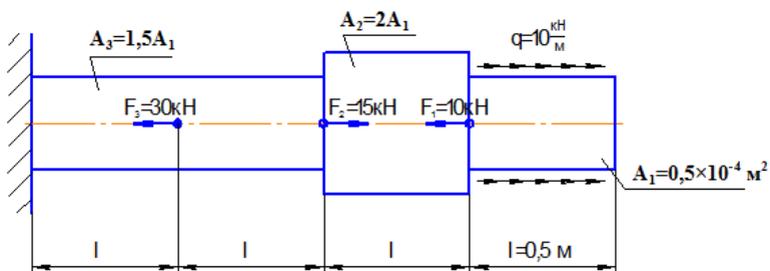


Задача решена. 🙌😊

Задача для самостоятельного решения на занятии

Стержень круглого поперечного сечения нагружен осевыми силами. Произвести проверку прочности и жесткости стержня, построив эпюры N , σ , δ . Спроектировать равнопрочный стержень круглого поперечного сечения.

Принять: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\delta] = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.



Потренируемся?

- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 5).
- ✦ Решить задачи 2.1 и 2.2 из РПР 2 (прил. 4).

МОДУЛЬ 3

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Цели занятий: научиться рассчитывать на прочность и жесткость стержневые конструкции с простой и сложной формой поперечного сечения, работающие в условиях прямого и косоугольного изгиба, а также оценивать влияние продольной силы при её добавлении к изгибу.

Необходимые знания для достижения цели

1. Формулы для определения геометрических характеристик простых плоских сечений.
2. Алгоритм определения положения центра тяжести и главных центральных моментов инерции сложных сечений.
3. Условие прочности по допускаемому напряжению при прямом изгибе.
4. Особенности расчета на прочность при прямом изгибе балок, изготовленных из пластичного и хрупкого материалов.
5. Алгоритмы расчета на прочность балок из пластичного и хрупкого материалов.
6. Метод Мора определения перемещений при изгибе.
7. Условие жесткости при изгибе балок по величине допускаемого перемещения.
8. Алгоритм расчета на жесткость балок при прямом изгибе.
9. Алгоритм расчета на прочность балок при совместном действии двух прямых изгибов.
10. Алгоритм определения полного перемещения при совместном действии двух прямых изгибов.
11. Оценка перенапряжения от действия продольной силы, добавленной к изгибу.
12. Определение величины смещения нейтральной линии от добавления продольной силы к изгибу.

Технологическая карта работы в модуле

№ недели	Вид аудиторного занятия	Самостоятельная работа	Контроль выполнения самостоятельной работы
9	Лекция 5	Выполнение РПР 3 (3.1), подготовка к занятиям	Консультации по РПР 3
	Практическое занятие 6		
10	Практическое занятие 7	Выполнение РПР 3 (3.2), подготовка к занятиям	
11	Лекция 6		
	Практическое занятие 8		
12	Лабораторная работа 2		
13	Лекция 7	Выполнение РПР 3 (3.3), подготовка к занятиям	
	Практическое занятие 9		
14	Практическое занятие 10	Выполнение РПР 3 (3.4), подготовка к занятиям. Сдача РПР 3	Прием РПР 3

Практическое занятие 6

Определение главных центральных моментов инерции составного сечения

 *Что такое главные центральные моменты инерции?*

Это осевые моменты инерции I_x и I_y , вычисленные относительно главных центральных осей.

 *Что такое главные центральные оси?*

Это оси, проходящие через центр тяжести сечения (центральные), относительно которых центробежный момент инерции равен нулю (главные). Ось симметрии всегда является главной центральной осью.

 *Зачем нужно уметь определять главные центральные моменты инерции?*

Эти величины характеризуют жесткость поперечного сечения конструкции, работающей в условиях изгиба, и используются при расчетах такой конструкции на прочность и жесткость.

 *Что такое статический момент сечения площадью A относительно заданной оси x ?*

Это величина, равная:

$$S_x = y_c \cdot A,$$

где y_c — координата центра тяжести сечения относительно оси x .

Очевидно, что статические моменты сечений относительно их главных центральных осей равны нулю.

 *Зачем нужно уметь определять статические моменты?*

С помощью статических моментов несложно определить координаты центра тяжести сложного сечения, состоящего из набора простейших. Если положение центров тяжести этих простейших сечений известно, то координаты центра тяжести всего сложного сечения относительно осей X и Y равны:

$$X_C = \frac{\sum_i S_{Yi}}{\sum_i A_i}; \quad Y_C = \frac{\sum_i S_{Xi}}{\sum_i A_i},$$

где $S_{Xi} = A_i \cdot y_{Ci}$; $S_{Yi} = A_i \cdot x_{Ci}$ — статические моменты простейших сечений, составляющих сложное.

 *Чтобы научиться определять главные центральные моменты инерции сложного сечения, надо знать !*

1. Алгоритм определения положения центра тяжести сложного сечения:

- разделить сложную фигуру на простые фигуры, координаты центров тяжести которых известны;
- выбрать вспомогательную систему координат, в которой будет определяться положение центра тяжести всей фигуры.

Рекомендации: для рациональности решения целесообразно оси вспомогательной системы координат провести через центр тяжести одной из составляющих простых фигур;

- определить площади A_i и статические моменты простых фигур относительно вспомогательных осей:

$$S_{Xi} = A_i \cdot y_{Ci}; \quad S_{Yi} = A_i \cdot x_{Ci},$$

где x_{Ci} и y_{Ci} — координаты точек C_i центров тяжести простых фигур в системе вспомогательных осей; i — номер простой фигуры;

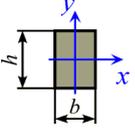
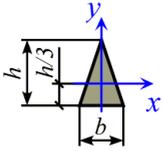
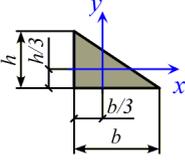
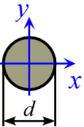
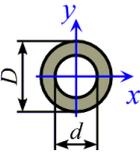
▪ вычислить координаты точки C центра тяжести всей фигуры по формулам:

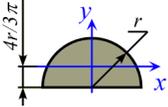
$$X_C = \frac{\sum_i S_{y_i}}{\sum_i A_i}; \quad Y_C = \frac{\sum_i S_{x_i}}{\sum_i A_i},$$

2. Теорему о суммировании осевых моментов инерции.

Момент инерции сложного сечения относительно заданной оси равен алгебраической сумме моментов инерции простейших сечений, его составляющих, вычисленных относительно той же самой оси.

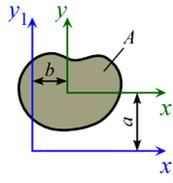
3. Формулы для определения главных центральных моментов инерции простейших сечений:

Формы простейших сечений	Главные центральные моменты инерции
	$I_x = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{12}$
	$I_x = \frac{bh^3}{36}; I_y = \frac{hb^3}{48}$
	$I_x = \frac{bh^3}{36}; I_y = \frac{hb^3}{36}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - \alpha^4),$ $\alpha = \frac{d}{D}$

Формы простейших сечений	Главные центральные моменты инерции
	$I_x = 0,11r^4, I_y = \frac{\pi r^4}{8}$

4. Теорему о преобразовании осевых моментов инерции при параллельном переносе осей.

Осевой момент инерции сечения относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь сечения:



$$I_{x_1} = I_x + a^2 A; \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A.$$



Алгоритм определения главных центральных моментов инерции сложного сечения

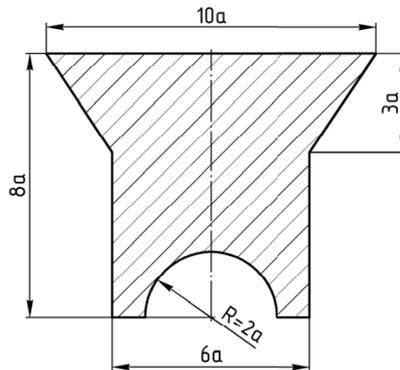
1. Определить положение центра тяжести сложного сечения согласно приведенному выше алгоритму.
2. Провести главные центральные оси сечения, одна из которых является осью симметрии, а другая, ей перпендикулярная, проходит через центр тяжести.
3. Провести главные центральные оси простейших сечений, составляющих сложное, и вычислить главные центральные моменты инерции этих сечений, воспользовавшись соответствующими формулами.
4. Найти расстояния между главной центральной осью всего сложного сечения и главной центральной осью каждого простейшего сечения, а затем определить моменты инерции каждого простейшего сечения относительно общей главной центральной оси, воспользовавшись теоремой о параллельном переносе осей.

5. Определить главные центральные моменты инерции сложного сечения по теореме о суммировании моментов инерции.



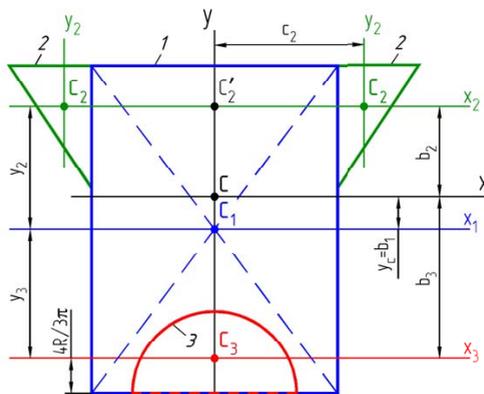
Пример решения задачи

Для заданного сложного сечения определить положение центра тяжести и найти главные центральные моменты инерции.



Решение

Сечение имеет одну ось симметрии, следовательно, она является главной центральной осью (y) и центр тяжести сечения лежит на этой оси. Вторая главная центральная ось (x) перпендикулярна первой и проходит через центр тяжести сечения.



Определим положение центра тяжести сложного сечения по оси y . Для этого:

- разобьем сложное сечение на простейшие, его составляющие: прямоугольник (1), два одинаковых треугольника (2) и полукруг (3);
- отметим центры тяжести простейших сечений точками C_1 , C_2 и C_3 соответственно. Центр тяжести прямоугольника лежит на пересечении его диагоналей, у треугольников на расстоянии одной трети от основания, а у полукруга он смещен от его основания на расстояние, равное $\frac{4R}{3\pi}$. Проведем горизонтальные оси x_1, x_2, x_3 через точки C_1, C_2 и C_3 соответственно. Эти оси являются главными центральными осями простейших сечений;
- выберем вспомогательную систему координат, относительно которой будем находить положение центра тяжести всей фигуры. Свяжем её, например, с центром тяжести прямоугольника, т. е. $x_1 C_1 y$ – вспомогательная система координат;
- определим ординаты точек C_1, C_2 и C_3 в выбранной системе координат:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 4a - \frac{1}{3}(3a) = 3a, \quad y_3 = -\left(4a - \frac{4(2a)}{3 \cdot \pi}\right) \approx -3,15a;$$

- найдем площади простейших фигур:

для прямоугольника

$$A_1 = 6a \cdot 8a = 48a^2,$$

для треугольника

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 2a = 3a^2,$$

для полукруга

$$A_3 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(2a)^2}{2} \approx 6,28a^2;$$

- найдем статические моменты простейших фигур относительно вспомогательной оси x_1 :

$$S_{x_1}^{(1)} = y_1 \cdot A_1 = 0,$$

$$S_{x_1}^{(2)} = y_2 \cdot A_2 = 3a \cdot 3a^2 = 9a^3,$$

$$S_{x_1}^{(3)} = y_3 \cdot A_3 = -3,15a \cdot 6,28a^2 = -19,78a^3;$$

- подставим найденные значения в формулу для определения координаты общего центра тяжести:

$$y_C = \frac{S_{x_1}^{(1)} + 2 \cdot S_{x_1}^{(2)} - S_{x_1}^{(3)}}{A_1 + 2 \cdot A_2 - A_3} = \frac{0 + 2 \cdot 9a^3 - (-19,78a^3)}{48a^2 + 2 \cdot 3a^2 - 6,28a^2} = 0,79a.$$

Знак «-» у третьих слагаемых числителя и знаменателя формулы означает, что третья фигура (полукруг) не входит в сложное сечение (является отверстием, «вынимается» из прямоугольника);

- отложим по оси y от вспомогательной оси x_1 вверх отрезок, равный $0,79a$, и нанесем точку C – общий центр тяжести сложного сечения. Проведем через точку C ось x – вторую главную центральную ось сложного сечения. Таким образом, оси x и y – главные центральные оси сложного сечения.

Найдем теперь относительно этих осей главные центральные моменты инерции I_x и I_y . Сначала определим момент I_x . Для этого:

- найдем расстояния между общей осью x и параллельной ей осью каждой простейшей фигуры x_1, x_2, x_3 соответственно, т. е. длины отрезков CC_1, CC_2 и CC_3 :

$$b_1 = CC_1 = |y_C| = 0,79a,$$

$$b_2 = CC_2' = |y_2| - |y_C| = 3a - 0,79a = 2,21a,$$

$$b_3 = CC_3 = |y_3| + |y_C| = 3,15a + 0,79a = 3,94a;$$

- определим осевые моменты инерции простейших фигур относительно их главных центральных осей:

– для прямоугольника

$$I_{x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{6a \cdot (8a)^3}{12} = 256a^4,$$

– для треугольника

$$I_{x_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{36} = \frac{2a \cdot (3a)^3}{36} = 1,5a^4,$$

– для полукруга

$$I_{x_3}^{(3)} = 0,11R^4 = 0,11(2a)^4 = 1,76a^4;$$

- пересчитаем их относительно общей главной центральной оси x , воспользовавшись теоремой о параллельном переносе осей:

$$I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + b_1^2 A_1 = 256a^4 + (0,79a)^2 \cdot 48a^2 = 285,96a^4,$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + b_2^2 A_2 = 1,5a^4 + (2,21a)^2 \cdot 3a^2 = 16,15a^4,$$

$$I_x^{(3)} = I_{x_3}^{(3)} + b_3^2 A_3 = 1,76a^4 + (3,94a)^2 \cdot 6,28a^2 = 99,25a^4;$$

- сложим найденные величины алгебраически согласно теореме о сложении моментов инерции. Таким образом, главный центральный момент инерции сложного сечения относительно оси x равен:

$$I_x = I_x^{(1)} + 2 \cdot I_x^{(2)} - I_x^{(3)} =$$

$$= 285,96a^4 + 2 \cdot 16,15a^4 - 99,25a^4 = 219,01a^4 \approx 219a^4.$$

Полукруг вырезается, поэтому его момент инерции $I_x^{(3)}$ в выражении берется со знаком «-».

Найдем теперь главный центральный момент инерции относительно оси y . Здесь расчеты будут несколько проще, поскольку центры тяжести прямоугольника и полукруга лежат на этой оси и она является главной центральной осью как для этих простых фигур, так и всей сложной, т. е. оси y_1 , y_3 и y совпадают, а следовательно, не нужно применять теорему о параллельном переносе осей. Однако для треугольников смещение осей y_2 и y есть, поэтому нужно определить это расстояние и применить теорему о параллельном переносе осей.

$$c_2 = C_2' C_2 = 3a + \frac{1}{3}(2a) \approx 3,67a;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{8a \cdot (6a)^3}{12} = 144a^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + c_2^2 \cdot A_2 = \frac{h_2 b_2^3}{36} + c_2^2 \cdot A_2 = \frac{3a \cdot (2a)^3}{36} + (3,67a)^2 \cdot 3a^2 = 41,07a^4;$$

$$I_y^{(3)} = I_{y_3}^{(3)} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi(2a)^4}{8} = 6,28a^4;$$

$$I_y = I_y^{(1)} + 2 \cdot I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 144a^4 + 2 \cdot 41,07a^4 - 6,28a^4 = 219,86a^4 \approx 220a^4.$$

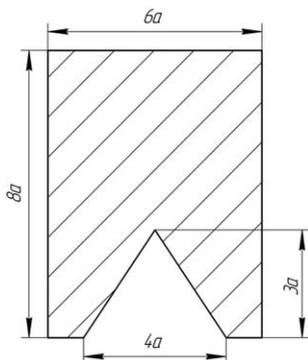
Таким образом, мы нашли главные центральные моменты инерции заданного сложного сечения:

$$I_x = 219a^4; I_y = 220a^4.$$

Задача решена. 

Задача для самостоятельного решения на занятии

Для заданного сложного сечения определить положение центра тяжести и найти главные центральные моменты инерции.



Потренируемся?

- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 6).
- ✦ Решить задачу 3.1 из РПР 3 (прил. 4).

Практическое занятие 7

Расчет на прочность балок при прямом изгибе

 Что такое условие прочности по допускаемому напряжению?

Известно, что в условиях прямого поперечного изгиба доминирующее значение в оценке прочности имеют нормальные напряжения, возникающие от внутреннего изгибающего момента, которые вычисляются по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x},$$

где M_x — величина внутреннего изгибающего момента в данном сечении; W_x — осевой момент сопротивления.

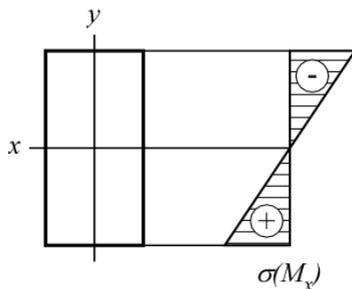
Условием прочности по допускаемому напряжению при прямом изгибе считается выполнение следующего неравенства:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – величина допускаемого напряжения, являющаяся справочной величиной или определяемая по характеристикам прочности для данной марки материала.

 Как распределяется нормальное напряжение по поперечному сечению балки?

Нормальное напряжение по ширине сечения не изменяется, а по высоте сечения изменяется по линейному закону, причем оно равно нулю в точках нейтральной линии (горизонтальной главной центральной оси x) и принимает максимальное значение в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (опасных точках). Нейтральная линия делит все сечение на две зоны – зону растянутых (+) и сжатых (–) волокон.



 Что такое осевой момент сопротивления?

Это геометрическая характеристика, которая зависит от формы и размеров поперечного сечения, а также от положения опасных точек в нем:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}},$$

где I_x – осевой момент инерции сечения; y_{\max} – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных (опасных) точек сечения.

 Чем по прочности отличаются пластичный и хрупкий материалы?

Пластичный материал одинаково сопротивляется напряжениям растяжения и сжатия, поэтому для конструкций из пластичных материалов допускаемое напряжение принимается единое:

$$[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где σ_T – предел текучести материала; n_T – коэффициент запаса по текучести.

Хрупкий материал лучше сопротивляется нагрузкам сжатия и хуже нагрузкам растяжения, поэтому допускаемые напряжения здесь в зонах растяжения и сжатия разные:

$$[\sigma]_c = \frac{\sigma_{Bc}}{n_B}, \quad [\sigma]_p = \frac{\sigma_{Bp}}{n_B}, \quad \text{причем } [\sigma]_c > [\sigma]_p,$$

где σ_{Bc} , σ_{Bp} – пределы прочности материала при сжатии и при растяжении соответственно; n_B – коэффициент запаса по прочности.



Алгоритм расчета на прочность балок из пластичного материала

1. Определить положение опасного сечения:

- построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x ;
- по эпюре M_x определить максимальное значение изгибающего момента.

2. Определить положение опасных точек в опасном сечении:

- установить положение нейтральной линии;
- найти y_{\max} – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных (опасных) точек сечения.

3. Определить осевой момент сопротивления:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

4. Записать условие прочности и решить его соответственно поставленной задаче:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$



Алгоритм расчета на прочность балок из хрупкого материала

1. Определить положение опасного сечения, построив эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x .

2. Определить положение нейтральной линии в опасном сечении, установив положение его центра тяжести.

3. Решить вопрос о рациональности положения сечения, обеспечив соответствие: при $[\sigma]_c > [\sigma]_p$ расстояние $y_{\max c}$ должно быть больше $y_{\max p}$.

4. Определить момент инерции сечения I_x относительно нейтральной линии.

5. Определить положение опасного волокна в опасном сечении, проведя следующий анализ:

- если $\frac{y_{\max c}}{y_{\max p}} > \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}$ (А), то опасным является наиболее сжатое волокно;
- если $\frac{y_{\max c}}{y_{\max p}} < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}$ (В), то опасным является наиболее растянутое волокно в опасном сечении.

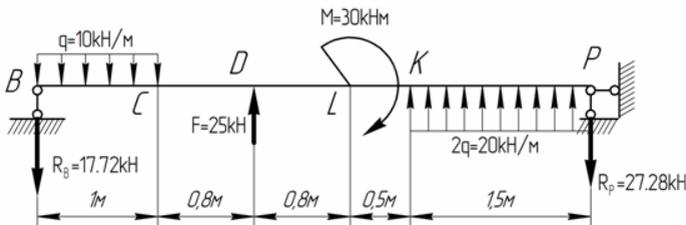
6. Записать условие прочности и решить его соответственно поставленной задаче:

- $\frac{M_{X \max} \cdot y_{\max c}}{I_x} \leq [\sigma]_c$ в случае выполнения условия (А);
- $\frac{M_{X \max} \cdot y_{\max p}}{I_x} \leq [\sigma]_p$ в случае выполнения условия (В).



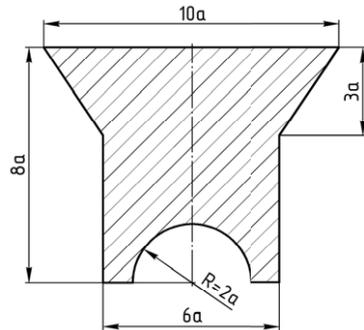
Пример решения задачи

Двухопорная балка постоянного поперечного сечения нагружена заданной системой поперечных сил и изгибающих моментов.



Требуется

1. Для данной балки, изготовленной из пластичного материала с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа, подобрать из условия прочности двутавровое, прямоугольное ($h/b = 2$) и круглое сечения. Дать заключение о рациональности формы сечения по расходу материала.



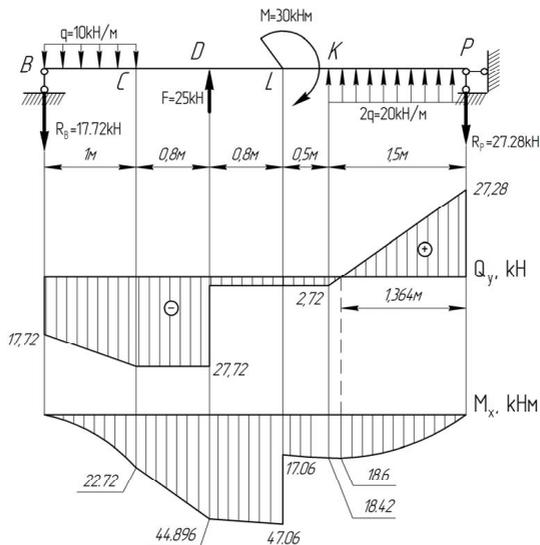
2. Для данной балки, изготовленной из хрупкого материала с допускаемыми напряжениями $[\sigma]_p = 100$ МПа, $[\sigma]_c = 150$ МПа, определить из условия прочности характерный размер $[a]$ сложного поперечного сечения, предварительно решив вопрос о его рациональном положении.

Принять: $[\sigma]_p = 100$ МПа, $[\sigma]_c = 150$ МПа.

Решение

1. Рассмотрим первый случай, когда балка изготовлена из пластичного материала.

Построим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x (см. [практическое занятие 2](#)).



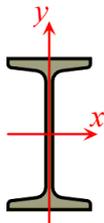
По эпюре M_x определяем положение опасного сечения – сечение L наиболее опасно, $M_{x \max} = 47,06$ кНм.

Подберем из условия прочности размеры трех форм сечений: двутаврового, прямоугольного и круглого. Для этого прежде всего найдем из условия прочности, каким минимальным моментом сопротивления должно обладать поперечное сечение балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma] \rightarrow [W_x] = \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{47,06 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 294,125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \approx 294 \text{ см}^3.$$

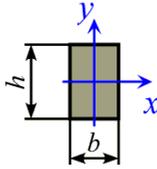
Далее для каждой из трех форм сечений выразим момент сопротивления с геометрической точки зрения, т. е. через характерный размер сечения, и, приравняв его к расчетному моменту сопротивления $[W_x] = 294 \text{ см}^3$, определим характерный размер.

А. Двутавровое сечение:



Тонкостенные профили – двутавры, швеллеры, уголки – выпускаются промышленностью определенных стандартных размеров. Номер профиля соответствует его высоте, выраженной в сантиметрах. Все характерные размеры таких профилей, а также их геометрические характеристики (в том числе и W_x) сведены в таблицы, которые называются «Сортамент прокатных профилей» (приводятся в соответствующих ГОСТах, а также в справочниках, учебниках и задачниках по сопротивлению материалов). Нам остается лишь по сортаменту указать номер двутавра, у которого момент сопротивления ближайший бóльший к расчетному: по сортаменту (ГОСТ 8239–89) подходит двутавр № 24а, у которого $W_x = 317 \text{ см}^3$, а площадь сечения $A_{\text{дв}} = 37,5 \text{ см}^2$ (прил. 5).

Б. Прямоугольное сечение ($h/b = 2$):

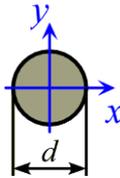


Нейтральная линия прямоугольника – главная центральная ось x . Расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения $y_{\max} = \frac{h}{2}$. Тогда $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}$. Учитывая, что $h = 2b$, выразим момент сопротивления прямоугольника через характерный размер b : $W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$. Приравняв его к расчетному значению, находим минимально допустимый размер прямоугольника:

$$\frac{2b^3}{3} = 294 \text{ см}^3 \rightarrow [b] = \sqrt[3]{\frac{294 \cdot 3}{2}} \approx 7,6 \text{ см},$$

тогда площадь прямоугольника: $A_{\text{пр}} = bh = 2b^2 = 2 \cdot 7,62 \approx 115,5 \text{ см}^2$.

В. Круглое сечение:



Здесь все аналогично: нейтральная линия – ось x , $y_{\max} = \frac{d}{2}$. Тогда

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32} = 294 \text{ см}^3 \rightarrow [d] = \sqrt[3]{\frac{294 \cdot 32}{\pi}} \approx 14,4 \text{ см}.$$

Площадь круглого сечения:

$$A_{\text{кр}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 14,4^2}{4} \approx 162,9 \text{ см}^2.$$

Наиболее рациональной формой сечения по расходу материала является та, которая имеет наименьшую площадь:

$$A_{\text{дв}} = 37,5 \text{ см}^2 < A_{\text{пр}} = 115,5 \text{ см}^2 < A_{\text{кр}} = 162,9 \text{ см}^2.$$

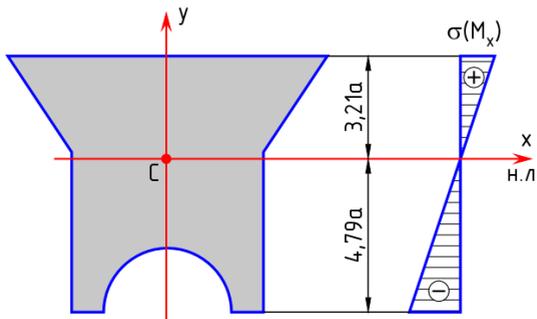
Следовательно, *двутавровое сечение является наиболее рациональным.*

2. Рассмотрим балку из хрупкого материала и подберем из условия прочности характерный размер $[a]$ заданного сложного сечения, геометрические характеристики которого были определены на практическом занятии 6.

Нейтральная линия сечения – главная центральная ось x_c , проходящая через центр тяжести. Она делит всё сечение на две зоны – растянутых и сжатых волокон. Учитывая правило знаков для эпюры изгибающих моментов M_x (строится на сжатых волокнах), легко определить расположение соответствующих зон в опасном сечении. На эпюре M_x в опасном сечении L ордината $M_{xL} = M_{x\max} = 47,06$ кНм расположена ниже осевой линии, следовательно, в этом сечении снизу от нейтральной линии расположены сжатые волокна, а сверху – растянутые. Определим расстояния от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения в зонах растяжения и сжатия: $y_{\max p}$ и $y_{\max c}$, учитывая положение центра тяжести сечения (см. стр. 97):

$$y_{\max p} = \frac{h_1}{2} - |y_C| = \frac{8a}{2} - |0,79a| = 3,21a;$$

$$y_{\max c} = \frac{h_1}{2} + |y_C| = \frac{8a}{2} + |0,79a| = 4,79a.$$



Решим вопрос о рациональности расположения сечения. Поскольку $[\sigma]_c = 150$ МПа $>$ $[\sigma]_p = 100$ МПа и $y_{\max c} = 4,79a >$ $y_{\max p} = 3,21a$, значит, сечение расположено рационально. В противном случае его нужно перевернуть на 180° .

Определим положение опасного волокна в опасном сечении:

$$\frac{y_{\max c}}{y_{\max p}} = \frac{4,79a}{3,21a} = 1,49 < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p} = \frac{150}{100} = 1,5,$$

следовательно, согласно условию (В) алгоритма, наиболее опасным является растянутое волокно.

Запишем условие прочности для растянутого волокна и вычислим характерный размер сложного сечения $[a]$, учитывая ранее определенное значение момента инерции $I_x = 219a^4$.

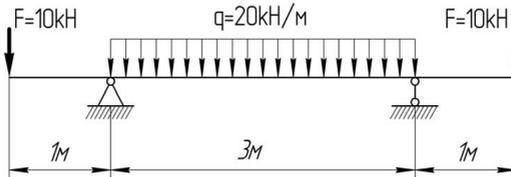
$$\frac{M_{X \max} \cdot y_{\text{MAX}p}}{I_x} \leq [\sigma]_p \rightarrow \frac{47,06 \text{ кНм} \cdot 3,21a}{219a^4} \leq 100 \cdot 10^3 \text{ кПа} \rightarrow$$

$$\rightarrow [a] = \sqrt[3]{\frac{47,06 \text{ кНм} \cdot 3,21}{219 \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ кПа}}} = 0,019 \text{ м} = 19 \text{ мм}.$$

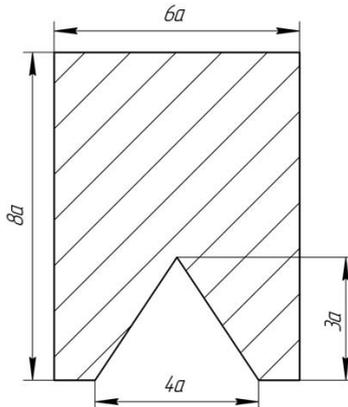
Задача решена. 🤗

Задача для самостоятельного решения на занятии

Для данной балки, изготовленной из хрупкого материала с допускаемыми напряжениями $[\sigma]_p = 100 \text{ МПа}$, $[\sigma]_c = 150 \text{ МПа}$:



определить из условия прочности характерный размер сложного поперечного сечения, предварительно решив вопрос о его рациональном положении.





Потренируемся?

- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 7).
- ✦ Решить пункты 1, 2 и 3 задачи 3.2 из РПР 3 (прил. 4).

Практическое занятие 8

Расчет на жесткость балок при прямом изгибе



Какие перемещения испытывают поперечные сечения балки при прямом изгибе?

Согласно гипотезе Бернулли, поперечные сечения балки при прямом изгибе не искривляются, а лишь вертикально смещаются, поворачиваясь при этом относительно нейтральной линии на некоторый угол. Таким образом, перемещениями при изгибе являются вертикальное смещение (прогиб) сечений δ и угол поворота сечений θ , причем функция углов поворота $\theta(z)$ связана с функцией прогибов $\delta(z)$ дифференциальной зависимостью

$$\theta = \frac{d\delta}{dz},$$

поэтому из двух функций перемещений основной является функция прогибов.



Как рассчитать балку на жесткость при изгибе?

Для этого необходимо определить максимальный прогиб балки δ_{\max} , который можно найти, получив аналитическое выражение для функции прогибов $\delta(z)$. Но это достаточно сложная с математической точки зрения задача. Поэтому, чтобы оценить деформацию балки при изгибе, рекомендуется следующее:

- определить прогибы в граничных незакрепленных сечениях балки;
- изобразить приближенный вид изогнутой оси балки, учитывая найденные значения перемещений, условия закрепления (закрепленные сечения не смещаются), а также согласуя направление выпуклости осевой линии с участками эпюры изгибающих моментов M_x , на которых момент не меняет знак (эпюра M_x располагается со стороны сжатых волокон относительно осевой линии);

- глядя на вид изогнутой оси балки, определить, в каком её сечении прогиб наибольший, найти δ_{\max} методом Мора и проверить выполнение условия жесткости.



Что такое условие жесткости при изгибе?

Под условием жесткости понимается ограничение максимального вертикального смещения сечений балки величиной допускаемого перемещения:

$$\delta_{\max} \leq [\delta],$$

где δ_{\max} — величина максимального прогиба балки; $[\delta]$ — допускаемое перемещение, обычно назначаемое из условий эксплуатации.



Как определить перемещение конкретного сечения балки при изгибе?

Перемещение δ конкретного сечения балки определяется методом Мора.



Алгоритм метода Мора

1. Для заданной балки построить эпюру изгибающих моментов от действия внешней нагрузки (грузовую эпюру).
2. Разгрузить балку от внешних нагрузок.
3. К сечению балки, перемещение которого необходимо определить, приложить в направлении перемещения единичную безразмерную сосредоточенную силу $F = 1$ и построить от действия этой силы единичную эпюру изгибающих моментов M_1 .
4. Искомое перемещение δ определить путем «перемножения» грузовой эпюры M_x на единичную эпюру M_1 , используя:

- либо интеграл Мора:

$$\delta = \sum_{i=1}^k \int_{l_i} \frac{M_{xi}(z) \cdot M_{1i}(z)}{EI_x} dz_i, \quad (1)$$

где k — количество участков балки; l_i — длина i -го участка; $M_{xi}(z)$, $M_{1i}(z)$ — функции грузовой и единичной изгибающих моментов на i -м участке балки соответственно; E — модуль Юнга материала балки; I_x — осевой момент инерции поперечного сечения.

Таким образом, интегралы составляются и находятся для каждого участка балки, а результат суммируется;

▪ либо формулу Симпсона:

$$\delta = \sum_{i=1}^k \frac{l_i}{6EI_x} (M_{xi}^n \cdot M_{li}^n + 4M_{xi}^{cp} \cdot M_{li}^{cp} + M_{xi}^n \cdot M_{li}^n), \quad (2)$$

где M_{xi}^n , M_{xi}^{cp} , M_{xi}^n – ординаты грузовой эпюры изгибающего момента M_x , взятые на левой границе, в средней точке и на правой границе i -го участка балки соответственно; аналогично M_{li}^n , M_{li}^{cp} , M_{li}^n – ординаты единичной эпюры изгибающего момента, взятые на левой границе, в средней точке и на правой границе i -го участка балки. Остальные обозначения те же;

▪ либо формулу Верещагина:

$$\delta = \sum_{i=1}^k \frac{\Omega_{Fi} \cdot M_{1Ci}}{EI_x}, \quad (3)$$

где Ω_{Fi} – площадь грузовой эпюры изгибающего момента M_x на i -м участке балки; M_{1Ci} – ордината единичной эпюры изгибающего момента M_1 , расположенная под центром тяжести грузовой эпюры M_x i -го участка. Остальные обозначения те же.



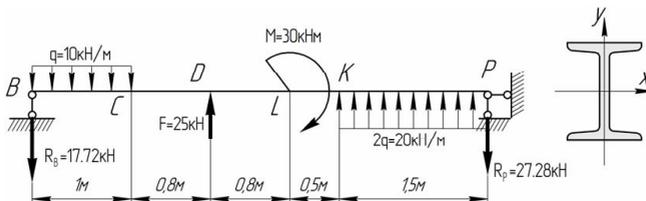
Алгоритм расчета на жесткость балок при изгибе

1. Построить эпюру изгибающего момента M_x .
2. Определить перемещения граничных незакрепленных сечений балки методом Мора.
3. Изобразить приближенный вид изогнутой оси балки и определить максимальный прогиб δ_{\max} .
4. Записать условие жесткости: $\delta_{\max} \leq [\delta]$ и сделать вывод о его выполнении.



Пример решения задачи

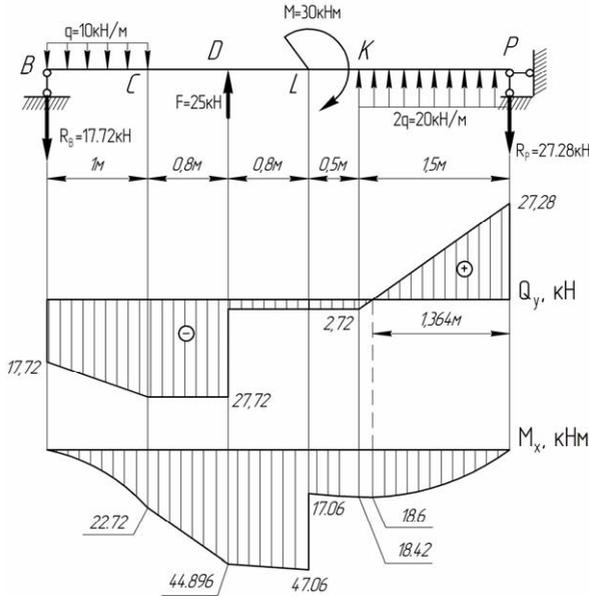
Двухопорная балка двутаврового сечения, изготовленная из стали Ст3, нагружена системой поперечных сил и изгибающих моментов.



Провести проверку жесткости балки, если её поперечное сечение – двутавр № 24а с осевым моментом инерции $I_x = 3800 \text{ см}^4$. Принять: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\delta] = 0,001L$ (где L – расстояние между опорами).

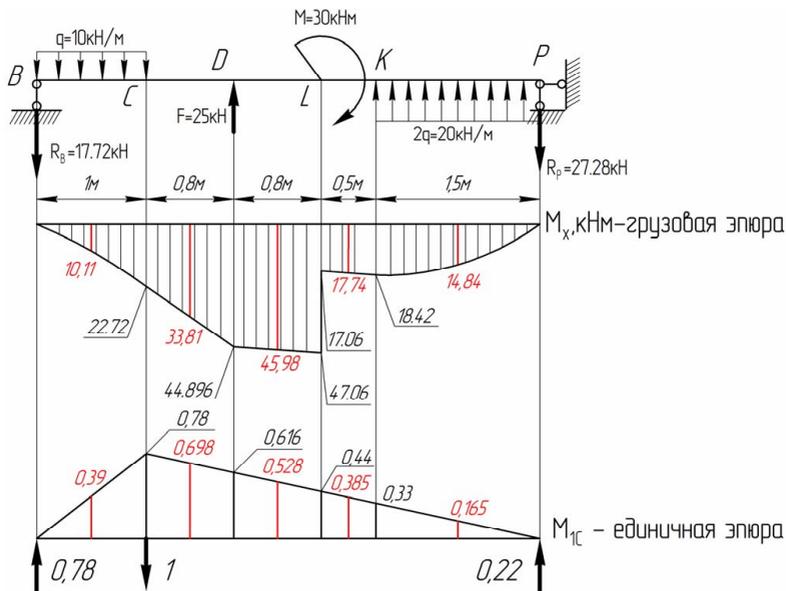
Решение

1. Построим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x методом сечения (см. [практическое занятие 2](#)).



2. Определим перемещения незакрепленных сечений балки: C, D, L, K методом Мора.

Для определения прогиба в сечении C разгрузим балку от внешних нагрузок и приложим к этому сечению единичную безразмерную сосредоточенную силу в направлении перемещения (вертикально). Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1C} , определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах: $R_{1B} = 0,78$, $R_{1P} = 0,22$.



«Перемножим» грузовую эпюру моментов M_x на единичную M_{1C} , используя формулу Симпсона (2). Количество участков перемножения $k = 5$: BC, CD, DL, LK и KP. Методом сечений либо геометрически найдем значения грузового и единичного моментов посередине длины каждого участка (выполнить самостоятельно).

Тогда:

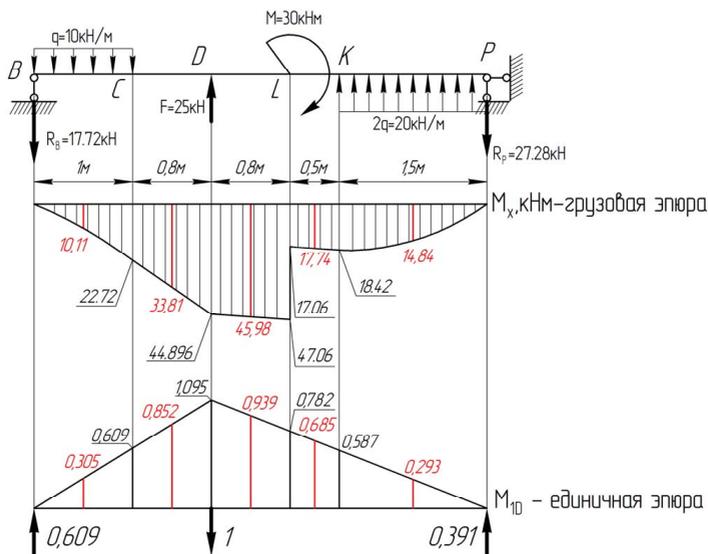
$$\begin{aligned}
 \delta_C &= \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{6EI_x} (M_{xi}^n \cdot M_{1Ci}^n + 4M_{xi}^{cp} \cdot M_{1Ci}^{cp} + M_{xi}^n \cdot M_{1Ci}^n) = \\
 &= \frac{10^3}{EI_x} \left[-\frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 10,11 \cdot 0,39 + 22,72 \cdot 0,78) - \right. \\
 &\quad - \frac{0,8}{6}(22,72 \cdot 0,78 + 4 \cdot 33,81 \cdot 0,698 + 44,9 \cdot 0,616) - \\
 &\quad - \frac{0,8}{6}(44,9 \cdot 0,616 + 4 \cdot 45,98 \cdot 0,528 + 47,06 \cdot 0,44) - \\
 &\quad - \frac{0,5}{6}(17,06 \cdot 0,44 + 4 \cdot 17,74 \cdot 0,385 + 18,42 \cdot 0,33) - \\
 &\quad \left. - \frac{1,5}{6}(18,42 \cdot 0,33 + 4 \cdot 14,84 \cdot 0,165 + 0) \right] = \\
 &= -\frac{50,993 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = -0,00671 \text{ м} \approx -6,7 \text{ мм},
 \end{aligned}$$

где модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, момент инерции для двутавра № 24а определяем по сортаменту: $I_x = 3800 \text{ см}^4 = 3800 \cdot 10^{-8} \text{ см}^4$. Знаки «-» в квадратных скобках означают, что на всех участках перемножения грузовая и единичная эпюры расположены с разных сторон от осевой линии, т. е. перемножаемые в формуле Симпсона моменты имеют противоположные знаки.

Полученное отрицательное значение перемещения $\delta_C = -6,7 \text{ мм}$ говорит о том, что сечение C смещается в сторону, противоположную направлению приложенной единичной силы. Таким образом, при изгибе балки сечение C смещается вверх на 6,7 мм.

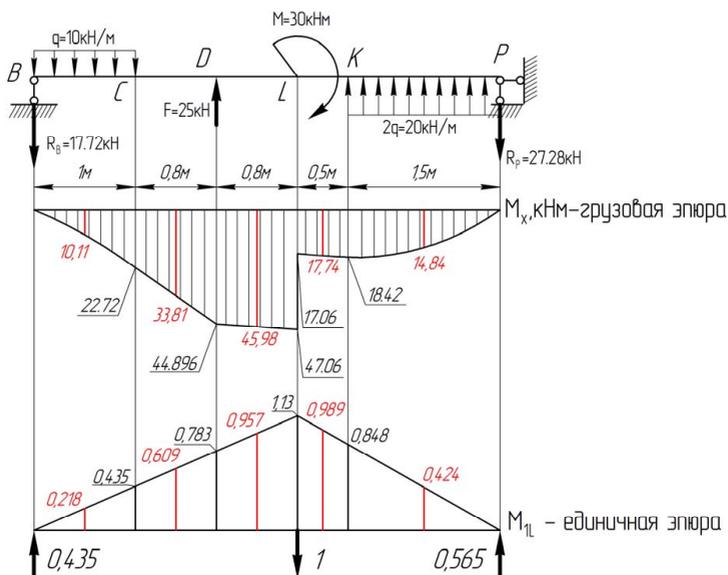
Аналогично определим прогиб балки в сечении D . Вновь разгрузим балку от внешних нагрузок и приложим к сечению D единичную силу. Построим единичную эпюру M_{1D} и найдем перемещение δ_D по формуле Симпсона. При этом количество участков перемножения прежнее $k = 5$: BC , CD , DL , LK и KP .

$$\begin{aligned} \delta_D &= \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{6EI_x} (M_{xi}^n \cdot M_{1Di}^n + 4M_{xi}^{cp} \cdot M_{1Di}^{cp} + M_{xi}^n \cdot M_{1Di}^n) = \\ &= \frac{10^3}{EI_x} \left[-\frac{1}{6} (0 + 4 \cdot 10,11 \cdot 0,305 + 22,72 \cdot 0,609) - \right. \\ &\quad - \frac{0,8}{6} (22,72 \cdot 0,609 + 4 \cdot 33,81 \cdot 0,852 + 44,9 \cdot 1,09) - \\ &\quad - \frac{0,8}{6} (44,9 \cdot 1,09 + 4 \cdot 45,98 \cdot 0,939 + 47,06 \cdot 0,782) - \\ &\quad - \frac{0,5}{6} (17,06 \cdot 0,782 + 4 \cdot 17,74 \cdot 0,685 + 18,42 \cdot 0,587) - \\ &\quad \left. - \frac{1,5}{6} (18,42 \cdot 0,587 + 4 \cdot 14,84 \cdot 0,293 + 0) \right] = \\ &= -\frac{75,669 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = -0,00996 \text{ м} \approx -10 \text{ мм}. \end{aligned}$$



Итак, сечение D смещается вертикально вверх на 10 мм.

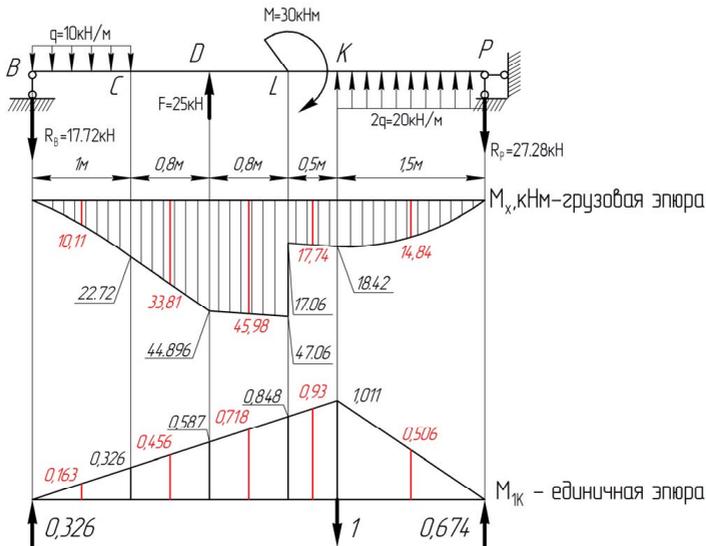
Определим прогиб балки в сечении L . Разгрузим балку от внешних нагрузок и приложим к сечению L единичную силу. Построим единичную эпюру M_{1L} и найдем перемещение δ_L по формуле Симпсона. Участки перемножения прежние.



$$\begin{aligned}
\delta_L &= \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{6EI_x} (M_{xi}^n \cdot M_{1Li}^n + 4M_{xi}^{cp} \cdot M_{1Li}^{cp} + M_{xi}^n \cdot M_{1Li}^n) = \\
&= \frac{10^3}{EI_x} \left[-\frac{1}{6} (0 + 4 \cdot 10,11 \cdot 0,218 + 22,72 \cdot 0,435) - \right. \\
&- \frac{0,8}{6} (22,72 \cdot 0,435 + 4 \cdot 33,81 \cdot 0,609 + 44,9 \cdot 0,783) - \\
&- \frac{0,8}{6} (44,9 \cdot 0,783 + 4 \cdot 45,98 \cdot 0,957 + 47,06 \cdot 1,13) - \\
&- \frac{0,5}{6} (17,06 \cdot 1,13 + 4 \cdot 17,74 \cdot 0,989 + 18,42 \cdot 0,848) - \\
&\quad \left. - \frac{1,5}{6} (18,42 \cdot 0,848 + 4 \cdot 14,84 \cdot 0,424 + 0) \right] = \\
&= -\frac{74,303 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = -0,00978 \text{ м} \approx -9,8 \text{ мм}.
\end{aligned}$$

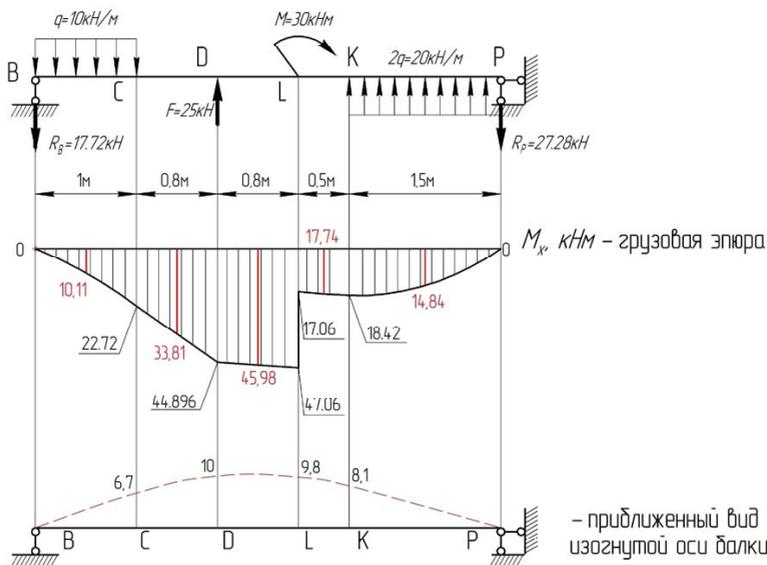
Таким образом, сечение L балки смещается вверх на 9,8 мм.

Наконец, аналогично определим прогиб в незакрепленном сечении K . Разгрузим балку от внешних нагрузок и приложим к сечению K единичную силу. Построим единичную эпюру M_{1K} и найдем перемещение δ_K по формуле Симпсона. Участки перемножения прежние.



$$\begin{aligned}
\delta_K &= \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{6EI_x} (M_{xi}^n \cdot M_{1Ki}^n + 4M_{xi}^{cp} \cdot M_{1Ki}^{cp} + M_{xi}^n \cdot M_{1Ki}^n) = \\
&= \frac{10^3}{EI_x} \left[-\frac{1}{6} (0 + 4 \cdot 10,11 \cdot 0,163 + 22,72 \cdot 0,326) - \right. \\
&\quad - \frac{0,8}{6} (22,72 \cdot 0,326 + 4 \cdot 33,81 \cdot 0,456 + 44,9 \cdot 0,587) - \\
&\quad - \frac{0,8}{6} (44,9 \cdot 0,587 + 4 \cdot 45,98 \cdot 0,718 + 47,06 \cdot 0,848) - \\
&\quad - \frac{0,5}{6} (17,06 \cdot 0,848 + 4 \cdot 17,74 \cdot 0,93 + 18,42 \cdot 1,011) - \\
&\quad \left. - \frac{1,5}{6} (18,42 \cdot 1,011 + 4 \cdot 14,84 \cdot 0,506 + 0) \right] = \\
&= -\frac{61,921 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = -0,008148 \text{ м} \approx -8,1 \text{ мм}.
\end{aligned}$$

3. Изобразим приближенный вид изогнутой оси балки и определим максимальный прогиб δ_{\max} .



Изобразим сначала прямолинейную ось балки, какой она была до приложения нагрузки. Отметим в граничных сечениях найден-

ные значения перемещений, учитывая, что закрепленные сечения B и P сместиться не могут: $\delta_B = 0$, $\delta_C = 6,7$ мм, $\delta_D = 10$ мм, $\delta_L = 9,8$ мм, $\delta_K = 8,1$ мм, $\delta_P = 0$. Соединим полученные точки плавной кривой выпуклостью вверх, так как эпюра изгибающих моментов M_x , построенная на сжатых волокнах, полностью лежит ниже осевой линии.

По виду изогнутой оси балки определяем, что максимальный прогиб получился в сечении D : $\delta_{\max} = |\delta_D| = 10$ мм.

4. Проверим выполнение условия жесткости. Найдем численное значение допускаемого перемещения:

$$[\delta] = 0,001 \cdot L = 0,001 \cdot 4,6 \text{ м} = 4,6 \text{ мм}.$$

Тогда:

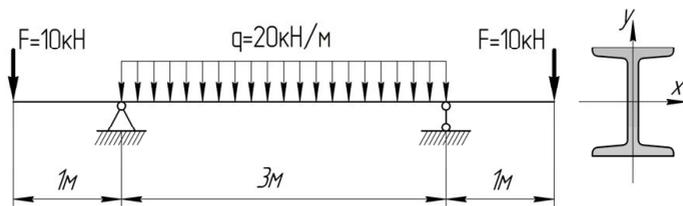
$$\delta_{\max} = 10 \text{ мм} > [\delta] = 4,6 \text{ мм},$$

следовательно, условие жесткости не выполняется.

Задача решена. 🤖

Задача для самостоятельного решения на занятии

Двухопорная балка двутаврового сечения, изготовленная из стали Ст3, нагружена системой поперечных сил и изгибающих моментов.



Провести проверку жесткости балки, если её поперечное сечение – двутавр № 16 с осевым моментом инерции $I_x = 873 \text{ см}^4$. Принять: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\delta] = 0,001L$ (где L – расстояние между опорами).



Потренируемся?

- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 8).
- ✦ Решить пункт 4 задачи 3.2 из РПР 3 (прил. 4).

Практическое занятие 9

Расчет на прочность и жесткость при совместном действии двух прямых изгибов

В результате совместного действия двух прямых изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях сечение конструкции может испытывать либо косою изгиб, либо прямой пространственный изгиб (случаи исключения).

Случай косою изгиба

 *Что такое косою изгиб?*

Косым изгибом называется такой вид деформации, при котором силовая линия не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения.

 *Что такое силовая линия?*

Силовая линия — это след плоскости действия изгибающего момента.

 *Что такое главные центральные оси сечения?*

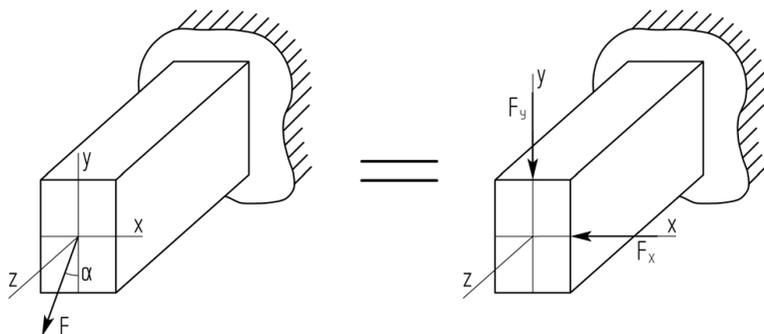
Это оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Сложно и непонятно? Тогда проще. Если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то она всегда является главной центральной осью. Вторая главная центральная ось перпендикулярна первой и проходит через центр тяжести сечения. Главные центральные оси делят все сечение на четыре четверти.

 *Почему необходимо знать об этом виде деформации и уметь делать расчеты на прочность?*

Дело в том, что косою изгиб достаточно часто встречается в реальных конструкциях и опаснее прямого. Поэтому, если условия работы элемента конструкции приводят к возникновению именно косою изгиба, то абсолютно очевидно, что надо уметь корректно оценивать прочность, учитывая особенности данного вида деформации.

 **Чтобы научиться оценивать прочность в случае косоугольного изгиба, надо знать!**

1. Косой изгиб можно представить как сумму двух прямых изгибов:



Здесь $F_x = F \sin \alpha$, $F_y = F \cos \alpha$ – проекции силы F на главные центральные оси x и y .

2. Напряжения при косом изгибе в любой произвольной точке поперечного сечения определяются как алгебраическая сумма нормальных напряжений от каждого изгибающего момента, создающего прямой изгиб:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) = \frac{M_X \cdot y}{I_X} + \frac{M_Y \cdot x}{I_Y},$$

где x и y – координаты точки сечения, в которой определяют величину напряжения σ_{Σ} ; I_x и I_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения. Для заданной формы сечения формулы для них можно найти в справочнике.

3. Для определения положения опасных точек сечения надо знать положение нейтральной линии, которая не перпендикулярна силовой (в отличие от прямого изгиба) и проходит через четверти сечения, противоположные тем, через которые проходит силовая линия. Точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии, – опасные точки. Для прямоугольного сечения и форм сечений на основе прямоугольника (двутавр, швеллер) – это всегда угловые точки, находящиеся в силовых четвертях. То есть в четвертях, через которые проходит силовая линия.

4. Положение опасных точек можно также определить, используя прием простановки знаков нормальных напряжений в четвертях сечения от каждого из прямых изгибов относительно осей x и y , из которых состоит косоугольный изгиб. Опасные точки находятся в четвертях сечения с одинаковыми знаками напряжений и максимально удалены от нейтральной линии и главных центральных осей сечения.

5. Условие прочности для косоугольного изгиба:

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) = \frac{M_X^{\text{MAX}} \cdot y_{\text{max}}}{I_X} + \frac{M_Y^{\text{MAX}} \cdot x_{\text{max}}}{I_Y} \leq [\sigma].$$

6. Для элементов конструкций с симметричными формами профилей, изготовленных из пластичных материалов, можно использовать зеркальную формулу

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \frac{M_X^{\text{MAX}}}{W_X} + \frac{M_Y^{\text{MAX}}}{W_Y} \leq [\sigma].$$



Алгоритм расчета на прочность при косом изгибе

1. Определение положения опасного сечения на элементе конструкции по эпюрам внутренних моментов M_x и M_y , построенных от действия внешних нагрузок.

2. Определение положения силовой линии в опасном сечении. Для этого необходимо в плоскости сечения по осям x и y отложить в масштабе ординаты внутренних моментов (M_x по оси y , а M_y по оси x) в сторону, соответствующую положению ординат на эпюрах изгибающих моментов в опасном сечении. Ордината суммарного момента $M_{\Sigma} = \sqrt{(M_x^2 + M_y^2)}$, построенная как геометрическая сумма ординат моментов M_x и M_y , определяет положение силовой линии.

3. Определение положения опасных точек в опасном сечении. Для сечения прямоугольной формы и подобной ему (двутавр, швеллер) опасные точки — это угловые точки в силовых четвертях. Они равноопасны, так как находятся на одинаковых расстояниях от главных центральных осей сечения.

4. Запись условия прочности для опасных точек и его решение согласно поставленной задаче:

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) = \frac{M_X^{\text{MAX}} \cdot y_{\text{max}}}{I_X} + \frac{M_Y^{\text{MAX}} \cdot x_{\text{max}}}{I_Y} \leq [\sigma].$$

Для прямоугольного сечения можно воспользоваться зеркальной формулой для определения нормальных напряжений от каждого изгибающего момента, создающего прямой изгиб:

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) = \frac{M_X^{\text{MAX}}}{W_X} + \frac{M_Y^{\text{MAX}}}{W_Y} \leq [\sigma],$$

где W_x и W_y – моменты сопротивления поперечного сечения относительно соответствующих главных центральных осей.

Случаи исключения

Имеются формы поперечных сечений, для которых кривой изгиб невозможен. Это сечения, у которых любая пара центральных осей является главной. И как бы ни проходила силовая линия, она всегда совпадет с главной центральной осью. Это такие профили, как круг и все правильные многоугольники, например, равносторонний треугольник, квадрат и т. д. Для этих форм профилей изгиб всегда прямой. Нейтральная линия, соответственно, перпендикулярна силовой линии. Если при этом внешняя нагрузка представляет собой сочетание двух прямых изгибов, то вид деформации называют *прямым пространственным изгибом*.



Как быть в таком случае?

- Если элемент конструкции нагружен одной нагрузкой под углом к осям заданной системы координат, то расчет напряжений ведется по формуле прямого изгиба от максимального момента, созданного этой нагрузкой. Линия действия нагрузки является силовой линией, а нейтральная линия проходит перпендикулярно силовой. Опасные точки находятся на максимальном расстоянии от нейтральной линии, напряжения в которых определяются по формуле

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{M_{\text{MAX}} \cdot y_{\text{MAX}}}{I_X}.$$

Для круглого профиля эти точки находятся на пересечении силовой линии с контуром сечения, напряжения в них можно определить по зеркальной формуле

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{MAX}}}{W_{oc}},$$

где $W_{oc} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$; d – диаметр круглого профиля.

▪ Если элемент конструкции нагружен силами, векторы которых лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, то в опасном сечении по осям сечения x и y откладываются величины ординат внутренних изгибающих моментов (M_x по оси y , а M_y по оси x) в сторону, соответствующую положению ординат на эпюрах изгибающих моментов в соответствующем сечении. Находится величина и положение ординаты суммарного внутреннего момента $M_\Sigma = \sqrt{(M_x^2 + M_y^2)}$, который и определяет положение силовой линии. Далее нахождение опасных точек и напряжений в них производится аналогично предыдущему случаю.

Определение перемещений

 Как определить перемещения поперечных сечений балки при совместном действии двух прямых изгибов?

В данном случае нагружения полное перемещение любого поперечного сечения балки δ находится как геометрическая сумма перемещений этого сечения вдоль его главных центральных осей δ_x и δ_y :

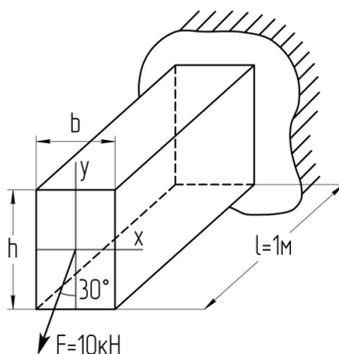
$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}.$$

Перемещение δ_x определяется методом Мора от действия прямого изгиба в плоскости (xz) , т. е. с помощью эпюры внутреннего изгибающего момента M_y . Аналогично δ_y — от действия прямого изгиба в плоскости (yz) с помощью эпюры M_x .



Примеры решения задач

Задача 1. Консольный стержень прямоугольного сечения на свободном конце нагружен сосредоточенной силой $F = 10 \text{ кН}$, вектор которой проходит через центр тяжести сечения под углом 30° к вертикальной оси y . Длина стержня $l = 1 \text{ м}$, а соотношение сторон прямоугольного сечения $h/b = 2$. Стержень изготовлен из стали Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

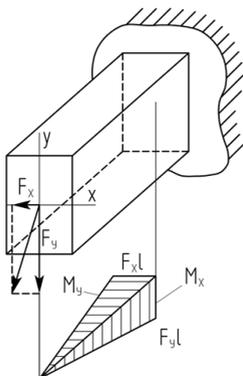


Требуется

1. Определить из условия прочности по допускаемым напряжениям величину характерного размера прямоугольного сечения $[b]$.
2. Заменяв прямоугольное сечение стержня круглым, определить величину диаметра круглого сечения $[d]$ из условия прочности.
3. Сравнить металлозатраты стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений.

Решение

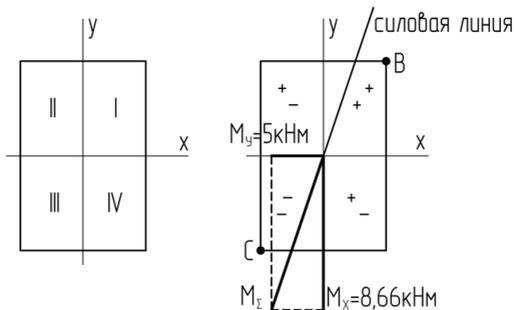
1. Определим положение опасного сечения. Для этого спроектируем силу F на главные центральные оси X и Y поперечного сечения: $F_x = F \cdot \sin 30^\circ = 5 \text{ кН}$; $F_y = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}$. Затем от каждой из этих сил построим эпюры изгибающих моментов на одной базе M_y и M_x соответственно.



Опасное сечение будет в заделке, т. е. в том сечении, где моменты достигают своего максимального значения.

2. Определим положение силовой линии в опасном сечении. Для этого изобразим сечение, в плоскости которого отложим в масштабе значения изгибающих моментов M_y и M_x в ту же сторону, что на эпюрах соответствующих моментов: M_y отложим влево, а M_x отложим вниз. Так как эпюры построены на сжатых волокнах, то сжаты левые волокна стержня относительно оси « y » от действия момента M_y и, соответственно, там поставим знаки « \leftarrow » во II и III четвертях сечения, а в противоположных I и IV знаки « \rightarrow » (нумерацию четвертей прямоугольника смотри ниже). Также сжаты нижние волокна стержня относительно оси « x » от момента M_x и, соответственно,

поставим знаки «-» нормального напряжения в III и IV четвертях, а в верхних – I и II четвертях знаки «+». Тогда ордината суммарного момента пройдет через I и III четверти и определит положение силовой линии. В этих же четвертях совпадают знаки нормальных напряжений от изгибающих моментов M_x и M_y :



3. Определим положение опасных точек в опасном сечении. Это будут угловые точки в силовых четвертях, т. е. точки «В» и «С». Точки являются равноопасными точками, так как величины напряжений в них будут одинаковыми по абсолютной величине. В точке «С» – угловой точке третьей четверти с двумя знаками «-» нормальных напряжений от двух прямых изгибов возникает максимальное сжимающее напряжение. Противоположная ей точка «В» попала в область растяжения (два знака «+» от прямых изгибов) и напряжение в ней будет положительным: $\sigma_B^{\text{MAX}} = -\sigma_C^{\text{MAX}}$.

4. Запишем условие прочности для опасных точек и определим из его решения величину размера поперечного сечения:

$$\sigma_B^{\text{MAX}} = -\sigma_C^{\text{MAX}} = \sigma_B^{\text{MAX}}(M_x) + \sigma_C^{\text{MAX}}(M_y) = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

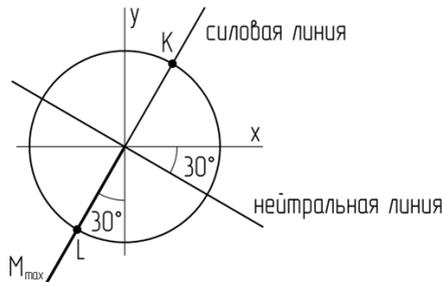
Предварительно выразим моменты сопротивления поперечного сечения через характерный размер b .

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b^2)}{6} = \frac{2b^3}{3}; \quad W_y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

После подстановки численного значения изгибающих моментов в сечении заделки и выражений для моментов сопротивления через размер b получим:

$$\frac{8,66 \cdot 3}{2 \cdot b^3} + \frac{5 \cdot 3}{b^3} = \frac{27,99}{b^3} \leq [\sigma], \text{ откуда } [b] = \sqrt[3]{\frac{27,99 \text{ кН} \cdot \text{м}}{160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2}} = 0,0559 \text{ м}.$$

5. Для определения диаметра круглого сечения для данного стержня определим внутренний изгибающий момент в заделке: $M_{MAX} = F \cdot \ell = 10 \text{ кНм}$. В плоскости опасного сечения проведем ординату максимального момента под углом в 30° к оси y и продлим ее до пересечения с контуром сечения. Это и будет силовой линией. Нейтральная линия проходит перпендикулярно силовой линии. Опасными будут точки, расположенные на максимальном расстоянии от нейтральной линии. Это точки «К» и «L», находящиеся на концах диаметра, совпадающего с силовой линией. Направление вектора внешней силы F указывает на сжатую зону. То есть половина сечения выше нейтральной линии растянута и точка «К» испытывает положительные напряжения. Соответственно, точка «L» — отрицательные напряжения.



6. Запишем условие прочности по формуле прямого изгиба:

$$\sigma_{MAX_K} = -\sigma_{MAX_L} = \frac{M_{MAX} \cdot y_{MAX}}{I_X} = \frac{M_{MAX}}{W_X} \leq [\sigma].$$

Для круглого сечения момент сопротивления через диаметр определяется как:

$$W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Подставив в условие прочности значение момента и выражение для W_X , получим:

$$\frac{10 \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq 160 \cdot 10^3, \text{ откуда } [d] = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 32}{\pi \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,086 \text{ м}.$$

7. Сравним стержни прямоугольного и круглого сечений по металлозатратам. Для этого определим площади сечений:

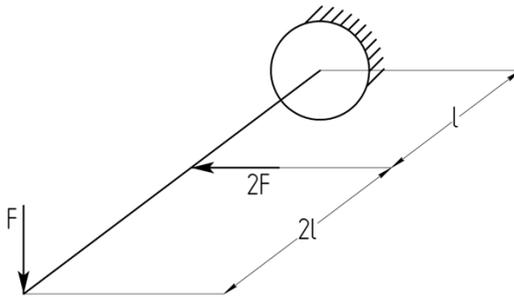
$$A_{\text{прямо-ка}} = 2 \cdot b^2 = 2 \cdot 0,0559^2 = 0,00625 \text{ м}^2;$$

$$A_{\text{круга}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,086^2}{4} = 0,0058 \text{ м}^2,$$

т. е. для случая косоугольного изгиба (прямоугольный профиль) требуется большее по площади сечение, что указывает на более опасный характер этого вида деформации для данных исходных условий.

Задача решена. 🙌😊

Задача 2. Стержень консольного типа нагружен двумя силами: величиной F в вертикальной плоскости и величиной $2F$ в горизонтальной плоскости.



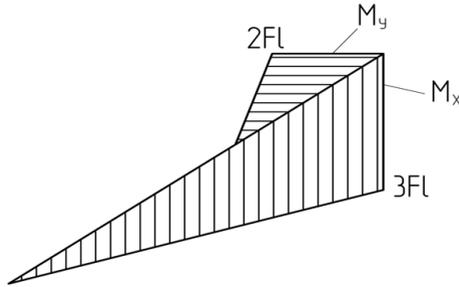
Параметр длины $\ell = 1$ м. Изготовлен стержень из Ст3 с допустимым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.

Требуется

1. Определить грузоподъемность стержня $[F]$ из условия прочности по допустимому напряжению для прямоугольного сечения с соотношением сторон $h/b = 1,5$ и величиной $b = 8 \cdot 10^{-2}$ м.
2. Определить грузоподъемность стержня $[F]$ из условия прочности по допустимому напряжению для круглого сечения, равного по площади прямоугольному профилю.

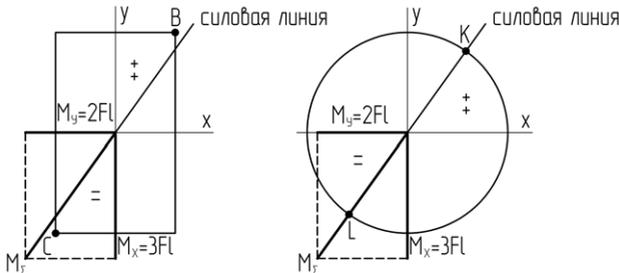
Решение

1. Определим положение опасного сечения, для чего построим эпюры изгибающих моментов M_y и M_x на одной базе:



Из эпюр видно, что опасное сечение находится в заделке с моментами $M_x = 3Fl$ и $M_y = 2Fl$.

2. Определим положение силовой линии в плоскости прямоугольного и круглого сечений. Для этого с сохранением масштаба перенесем ординаты изгибающих моментов с эпюр M_x и M_y в опасном сечении в плоскость прямоугольного и круглого сечений и найдем величину и направление ординаты суммарного момента $M_\Sigma = \sqrt{(M_x^2 + M_y^2)}$ как геометрическую сумму моментов M_x и M_y .



3. Определим положение опасных точек в опасном сечении. В прямоугольном сечении опасными будут угловые точки «В» и «С» в силовых четвертях, а в круглом сечении точки «К» и «Л» на концах диаметра, совпадающего с силовой линией.

4. Запишем условие прочности для опасных точек прямоугольного профиля и определим из его решения величину грузоподъемности $[F]$:

$$\sigma_B^{\text{MAX}} = -\sigma_C^{\text{MAX}} = \sigma_B^{\text{MAX}}(M_x) + \sigma_C^{\text{MAX}}(M_y) = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Предварительно выразим моменты сопротивления через характерный размер b поперечного сечения:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (1,5b)^2}{6} = \frac{3b^3}{8}; \quad W_y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{1,5b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{4}.$$

После подстановки численного значения изгибающих моментов в сечении заделки и выражений для моментов сопротивления через размер b получим:

$$\frac{3 \cdot F\ell \cdot 8}{3 \cdot b^3} + \frac{2F\ell \cdot 4}{b^3} = \frac{16F\ell}{b^3} \leq [\sigma],$$

откуда

$$[F] = \frac{b^3 \cdot [\sigma]}{16 \cdot \ell} = \frac{(8 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 160 \cdot 10^3}{16 \cdot 1} = 5,12 \text{ кН}.$$

5. Для круглого сечения определим из условия равенства площадей прямоугольного и круглого сечений величину диаметра:

$$A^{\text{прямо-ка}} = A^{\text{круга}} \rightarrow 1,5b^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \rightarrow d = b \cdot \sqrt{\frac{1,5 \cdot 4}{3,14}} = 11,06 \text{ см}.$$

6. Для опасных точек круглого сечения «К» и «Л» запишем условие прочности:

$$\sigma_K^{\text{MAX}} = -\sigma_L^{\text{MAX}} = \frac{M_{\Sigma}^{\text{MAX}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $M_{\Sigma}^{\text{MAX}} = \sqrt{\left((M_x^{\text{MAX}})^2 + (M_y^{\text{MAX}})^2\right)} = \sqrt{\left((3Fl)^2 + (2Fl)^2\right)} = 3,6 Fl.$

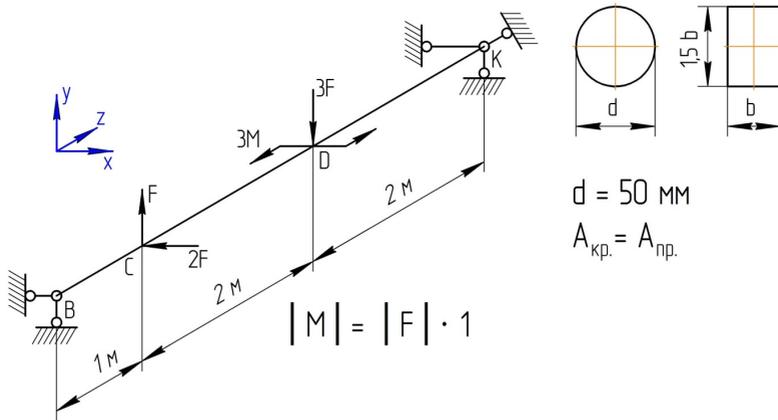
Подставив в условие прочности, получим:

$$\frac{3,6Fl \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq 160 \cdot 10^3,$$

откуда $[F] = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot 160 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 1 \cdot 32} = \frac{3,14 \cdot (11,06 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 16 \cdot 10^4}{3,6 \cdot 1 \cdot 32} = 5,89 \text{ кН}.$

Задача решена. 🤖👋

Задача 3. Стальная балка на двух шарнирных опорах постоянно поперечного сечения нагружена в двух взаимно перпендикулярных плоскостях системой поперечных сил и изгибающих моментов, значения которых заданы в долях параметра нагрузки F . Характеристики стали: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.



Требуется

1. Определить допускаемую нагрузку $[F]$ для балки круглого и прямоугольного сечений, одинаковых по площади, если диаметр круглого сечения $d = 50$ мм, а в прямоугольном сечении $h/b = 1,5$.
2. Указать наиболее рациональную форму поперечного сечения по грузоподъемности.
3. Определить полное перемещение сечения D для балки прямоугольного профиля.

Решение

1. Построим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y .

Внешняя нагрузка действует в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Эпюру M_x строим от вертикальной нагрузки в плоскости yz , а M_y — от горизонтальной в плоскости xz .

Построение эпюры M_x (плоскость yz)

Определим из уравнений равновесия вертикальные реакции в шарнирных опорах R_{By} и R_{Ky} , предварительно направив их вертикально вверх. Из моментного уравнения равновесия, записанного относительно опоры B , найдем R_{Ky} :

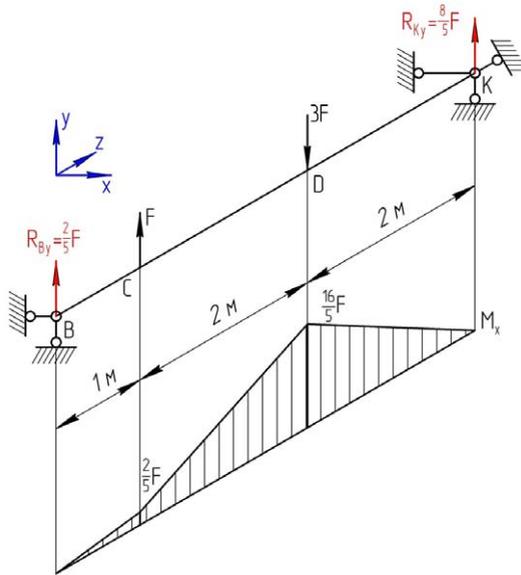
$$\sum M_B(yz) = 0 \rightarrow R_{Ky} \cdot BK - 3F \cdot BD + F \cdot BC = 0 \rightarrow$$

$$R_{Ky} = \frac{3F \cdot BD - F \cdot BC}{BK} = \frac{3F \cdot 3 - F \cdot 1}{5} = \frac{8}{5}F.$$

Из силового уравнения равновесия в проекции на ось y найдем R_{By} :

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_{By} + F - 3F + R_{Ky} = 0 \rightarrow R_{By} = -F + 3F - \frac{8}{5}F = \frac{2}{5}F.$$

Построим эпюру M_x методом сечений.



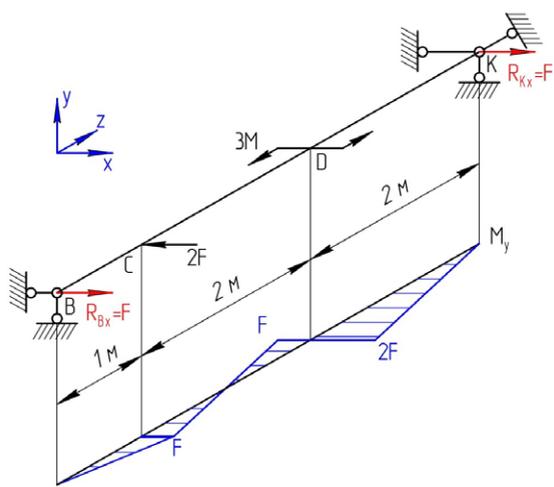
Построение эпюры M_y (плоскость xz)

Аналогичным образом построим эпюру M_y , предварительно определив горизонтальные реакции опор R_{Bx} и R_{Kx} .

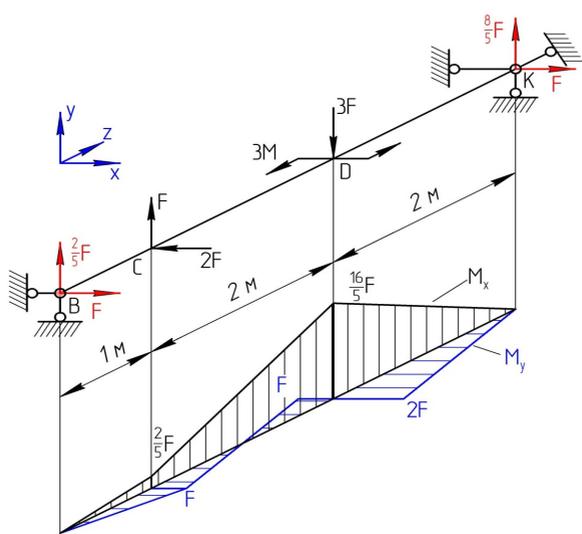
$$\sum M_B(xz) = 0 \rightarrow R_{Kx} \cdot BK - 3M - 2F \cdot BC = 0 \rightarrow$$

$$R_{Kx} = \frac{3M + 2F \cdot BC}{BK} = \frac{3F + 2F}{5} = F$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow R_{Bx} - 2F + R_{Kx} = 0 \rightarrow R_{Bx} = 2F - F = F$$



Можно обе эпюры M_x и M_y изобразить на одной базе:



2. Определим положение опасного сечения.

Размер поперечного сечения по длине балки не изменяется, следовательно, опасное сечение (с наибольшим напряжением) будет там, где суммарный изгибающий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение. Суммарный момент в каждом поперечном сечении равен геометрической сумме соответствующих

моментов M_x и M_y . Очевидно, что в заданной балке наибольший суммарный момент будет в сечении D :

$$M_{\Sigma \max} = M_{\Sigma D} = \sqrt{M_{xD}^2 + M_{yD}^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}F\right)^2 + (2F)^2} = 3,77F.$$

Если это не очевидно, тогда находим M_{Σ} во всех граничных сечениях и выбираем наибольшее.

Таким образом, сечение D нашей балки наиболее опасное.

3. Определим допускаемую нагрузку $[F]$ для балки круглого поперечного сечения с диаметром $d = 50$ мм. При этом вид деформации в опасном сечении – прямой пространственный изгиб (сечение-исключение).

Определим положение силовой линии и опасных точек в плоскости сечения. Для этого с сохранением масштаба перенесем ординаты изгибающих моментов с эпюр M_x и M_y в опасном сечении D в плоскость круглого сечения и определим положение ординаты суммарного момента M_{Σ} как геометрическую сумму моментов M_x и M_y .



Продлив M_{Σ} до пересечения с внешней окружностью, получим силовую линию. Опасные точки L, S лежат на пересечении силовой линии с внешней окружностью круглого сечения. Напряжения в этих точках равны по величине, но противоположны по знаку.

Запишем условие прочности для опасных точек круглого профиля и определим из его решения величину грузоподъемности $[F]$:

$$\sigma_{\max S} = -\sigma_{\max L} = \frac{M_{\Sigma \max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

где

$$M_{\Sigma \max} = M_{\Sigma D} = 3,77F, \quad W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$

тогда

$$\frac{3,77F \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq 160 \cdot 10^6 \text{ Па} \rightarrow [F] = \frac{\pi(50 \cdot 10^{-3})^3 160 \cdot 10^6}{3,77 \cdot 32} = 520,8 \text{ Н}.$$

4. Определим допускаемую нагрузку $[F]$ для балки прямоугольного профиля, предварительно рационально его расположив – большей стороной вдоль большего изгибающего момента. Просматривая эпюры M_x и M_y , видим, что наибольшая ордината – $M_{\Sigma} = \frac{16}{5}F$ расположена вертикально, значит, рациональное расположение прямоугольника – *вертикальное*. Вид деформации в опасном сечении – косой изгиб.

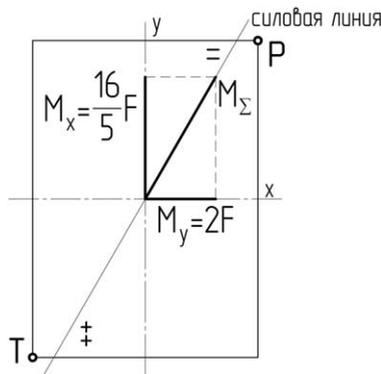
Найдем размеры прямоугольника из условия равенства площадей:

$$A_{\text{кр}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (50 \text{ мм})^2}{4} = 1963,5 \text{ мм}^2, \quad A_{\text{пр}} = b \cdot h = b \cdot (1,5b)^2 = 1,5b^2$$

$$A_{\text{кр}} = A_{\text{пр}} \rightarrow 1963,5 \text{ мм}^2 = 1,5b^2 \rightarrow$$

$$b = \sqrt{\frac{1963,5}{1,5}} = 36 \text{ мм} = 3,6 \text{ см}, \quad h = 1,5b = 1,5 \cdot 36 = 54 \text{ мм} = 5,4 \text{ см}.$$

Определим положение силовой линии и опасных точек в плоскости прямоугольного сечения по аналогии с круглым. Единственное отличие – опасные точки лежат не на силовой линии, а в соответствующих угловых точках прямоугольника:



Таким образом, угловые точки P и T – равноопасные точки в прямоугольном сечении.

Запишем условие прочности для опасных точек прямоугольного профиля в опасном сечении D и определим из его решения величину грузоподъемности $[F]$:

$$\sigma_{\max T} = -\sigma_{\max P} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma].$$

Предварительно выразим моменты сопротивления через характерный размер b поперечного сечения, учитывая, что $h = 1,5b$:

$$W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (1,5b)^2}{6} = \frac{3b^3}{8}; W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{1,5b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{4}.$$

После подстановки численного значения изгибающих моментов в сечении заделки и выражений для моментов сопротивления через размер b получим:

$$\frac{16F \cdot 8}{5 \cdot 3b^3} + \frac{2F \cdot 4}{b^3} = \frac{16,53F}{b^3} \leq [\sigma],$$

откуда

$$[F]_{\text{пр}} = \frac{b^3 \cdot [\sigma]}{16,53} = \frac{(3,6 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 160 \cdot 10^6}{16,53} = 451,6H.$$

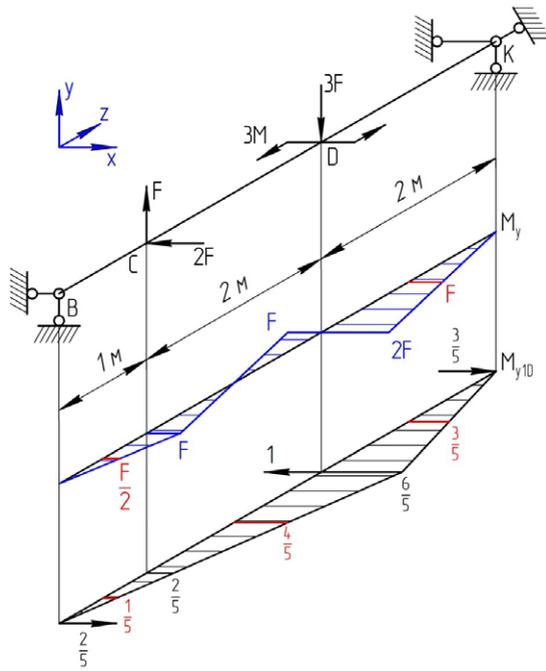
5. Сравним балки круглого и прямоугольного профилей по грузоподъемности. Для этого найдем отношение соответствующих допускаемых значений нагрузок:

$$\frac{[F]_{\text{кр}}}{[F]_{\text{пр}}} = \frac{520,8H}{451,6H} = 1,15.$$

Таким образом, по грузоподъемности балка круглого профиля в 1,15 раза выгоднее балки прямоугольного профиля при всех прочих одинаковых условиях.

6. Определим полное перемещение сечения D для балки прямоугольного профиля. Для этого найдем методом Мора составляющие перемещения этого сечения вдоль главных центральных осей δ_{x_D} и δ_{y_D} .

6.1. Для определения горизонтального перемещения в сечении D разгрузим балку от внешних нагрузок и приложим к этому сечению в горизонтальном направлении единичную безразмерную сосредоточенную силу. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{y1D} , определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах: $R_{x1K} = 3/5$, $R_{x1B} = 2/5$.



Горизонтальную составляющую δ_{xD} найдем путем перемножения горизонтальной грузовой эпюры M_y на единичную эпюру M_{y1D} с использованием формулы Симпсона

$$\begin{aligned} \delta_{xD} &= \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{6EI_Y} (M_{Yi}^n \cdot M_{y1Di}^n + 4M_{Yi}^{cp} \cdot M_{y1Di}^{cp} + M_{Yi}^n \cdot M_{y1Di}^n) = \\ &= \frac{1}{EI_Y} \left[\frac{1}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{5} + F \cdot \frac{2}{5} \right) + \frac{2}{6} \left(F \cdot \frac{2}{5} + 0 - F \cdot \frac{6}{5} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{6} \left(2F \cdot \frac{6}{5} + 4 \cdot F \cdot \frac{3}{5} + 0 \right) \right] = \frac{1,467 \cdot F}{EI_Y}. \end{aligned}$$

Для того чтобы досчитать величину δ_{xD} , определим I_Y прямоугольного сечения в вертикальном его положении ($b = 3,6$ см, $h = 5,4$ см):

$$I_Y = \frac{hb^3}{12} = \frac{5,4 \cdot 3,6^3}{12} = 20,995 \text{ см}^4.$$

Значение силы $F = [F]_{\text{np}} = 451,6$ Н.

Таким образом:

$$\delta_{xD} = \frac{1,467 \cdot F}{EI_Y} = \frac{1,467 \cdot 451,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20,995 \cdot 10^{-8}} = 15,78 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 15,8 \text{ мм}.$$

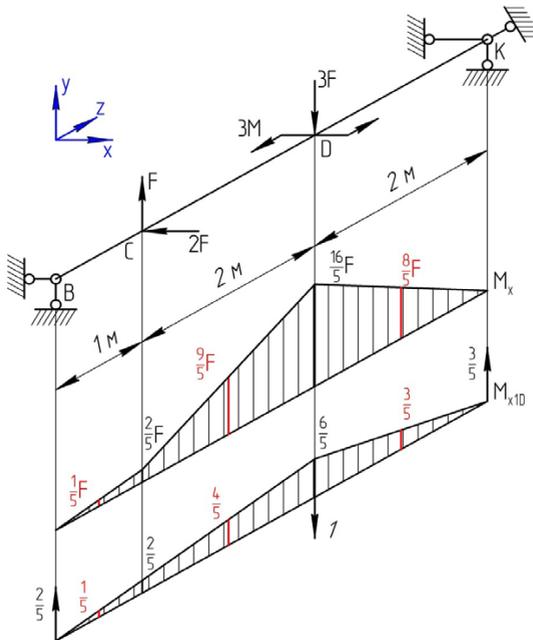
Внимание! Не забываем о том, что при определении перемещения вдоль оси «x» изгибающие моменты (грузовой и единичный), а также осевой момент инерции имеют противоположный индекс «y».

6.2. Вертикальную составляющую перемещения δ_{yD} найдем аналогичным образом путем перемножения вертикальной грузовой эпюры M_x на единичную эпюру M_{x1D} , которая полностью повторяет единичную эпюру M_{y1D} , но в вертикальной плоскости.

Прежде определим осевой момент инерции прямоугольника I_X :

$$I_X = \frac{hb^3}{12} = \frac{7,2 \cdot 3,6^3}{12} = 47,239 \text{ см}^4.$$

Перемножаемые эпюры изгибающих моментов M_x и M_{x1D} имеют вид:



Используя формулу Симпсона, находим перемещение δ_{yD} :

$$\begin{aligned} \delta_{yD} &= \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{6EI_X} \left(M_{Xi}^n \cdot M_{x1Di}^n + 4M_{Xi}^{cp} \cdot M_{x1Di}^{cp} + M_{Xi}^n \cdot M_{x1Di}^n \right) = \\ &= \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{F}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} F \cdot \frac{2}{5} \right) + \frac{2}{6} \left(\frac{2}{5} F \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{9}{5} F \cdot \frac{4}{5} + \frac{16}{5} F \cdot \frac{6}{5} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{6} \left(\frac{16}{5} F \cdot \frac{6}{5} + 4 \cdot \frac{8}{5} F \cdot \frac{3}{5} + 0 \right) \right] = \frac{5,867 \cdot F}{EI_X} = \frac{5,867 \cdot 451,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 47,239 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 28,04 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 28,0 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\delta_{xD} = 15,8$ мм, $\delta_{yD} = 28,0$ мм.

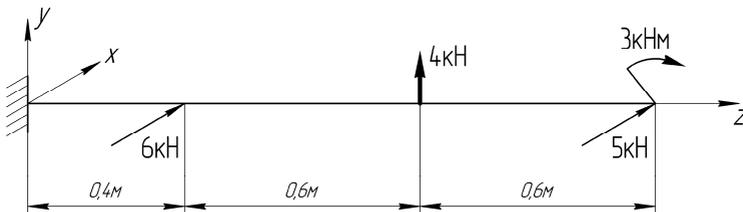
Определим полное перемещение сечения D как геометрическую сумму составляющих δ_{xD} и δ_{yD} :

$$\delta_D = \sqrt{\delta_{xD}^2 + \delta_{yD}^2} = \sqrt{15,8^2 + 28,0^2} = 32,15 \text{ см}.$$

Задача решена. 

Задача для самостоятельного решения на занятии

Консольный стержень прямоугольного сечения нагружен системой поперечных сил и изгибающих моментов, действующих в двух взаимно перпендикулярных плоскостях:



Длина стержня $l = 1,6$ м, а соотношение сторон прямоугольного сечения $h/b = 1,5$. Стержень изготовлен из стали Ст3 с допустимым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа. Определить из условия прочности характерный размер b прямоугольного сечения.



Потренируемся?

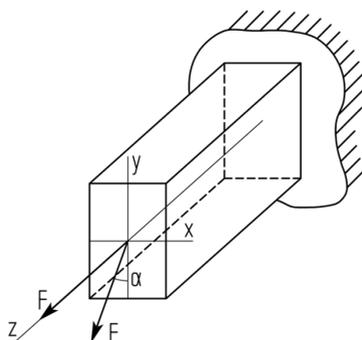
- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 9).
- ✦ Решить задачу 3.3 из РПР 3 (прил. 4).

Практическое занятие 10

Расчет на прочность при совместном действии изгиба и растяжения-сжатия

Случай косоуго изгиба с растяжением-сжатием

Совокупность косоуго изгиба, при котором силовая линия не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения, с одновременным силовым воздействием в направлении продольной оси элемента конструкции приводит к данному случаю деформации. Например:



 Чтобы научиться оценивать прочность в случае косоуго изгиба с растяжением-сжатием, надо знать!

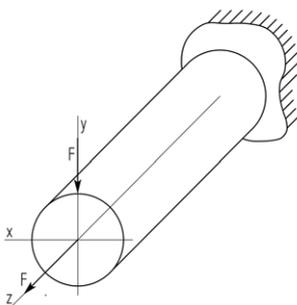
1. Оценка напряжений в опасной точке элемента конструкции ведется отдельно от каждого внутреннего силового фактора, возникающего при данном виде деформации.
2. Поскольку присутствует косоуго изгиб, то в первую очередь определяют положение опасных точек от косоуго изгиба.
3. В зависимости от того, что добавляется к косоуго изгибу (деформация растяжения или сжатия), в опасные точки от действия изгибающих моментов будет добавляться соответственно положительное или отрицательное напряжение от продольной силы.
4. Условие прочности при косоуго изгибе с растяжением-сжатием имеет следующий вид:

$$\sigma_{\Sigma MAX} = \sigma(M_X) + \sigma(M_Y) + \sigma(N) = \pm \frac{M_X^{MAX} \cdot y_{max}}{I_X} \pm \frac{M_Y^{MAX} \cdot x_{max}}{I_Y} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (Y1)$$

5. Если материал элемента конструкции пластичный, т. е. имеет одинаковые пределы текучести при растяжении и сжатии, то расчет напряжений в опасной точке сжатой зоны ведется по модулю.

Случай прямого изгиба с растяжением-сжатием

Совокупность прямого изгиба, при котором силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, с одновременным силовым воздействием в направлении продольной оси элемента конструкции приводит к данному случаю деформации. Например:



 *Чтобы научиться оценивать прочность в случае прямого изгиба с растяжением-сжатием, надо знать!*

1. Что, по сути, это частный случай косоугольного изгиба с растяжением-сжатием. Если косоугольный изгиб представляют как два прямых, то в данном случае присутствует один из изгибающих моментов M_X или M_Y . Поэтому все методические приемы оценки прочности остаются такими же, как и для случая косоугольного изгиба с растяжением-сжатием.

2. Условие прочности для прямого изгиба с растяжением-сжатием имеет вид в зависимости от особенностей нагружения и формы сечения:

- при наличии внутреннего изгибающего момента M_X и продольной силы N :

$$\sigma_{\Sigma MAX} = \sigma(M_X) + \sigma(N) = \pm \frac{M_X^{MAX} \cdot y_{max}}{I_X} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (Y2)$$

- при наличии внутреннего изгибающего момента M_Y и продольной силы N :

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_Y) + \sigma(N) = \pm \frac{M_Y^{\text{MAX}} \cdot x_{\text{max}}}{I_Y} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma]; \quad (\text{У3})$$

- при наличии моментов M_X и M_Y и продольной силы N , но для форм сечений, исключаяющих кривой изгиб (круг и правильные многоугольники):

$$\sigma_{\Sigma \text{MAX}} = \sigma(M_{\Sigma}) + \sigma(N) = \pm \frac{M_{\Sigma}^{\text{MAX}}}{W_{oc}} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (\text{У4})$$

где $M_{\Sigma} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$; W_{oc} – осевой момент сопротивления поперечного сечения относительно оси изгиба (нейтральной линии).



Алгоритм расчета на прочность при косом (прямом) изгибе с растяжением-сжатием

1. Определение положения опасного сечения на элементе конструкции по эпюрам (эпюре) изгибающих моментов.

2. Определение положения опасной точки в опасном сечении.

2.1. При наличии двух прямых изгибов нужно построить силовую линию в плоскости опасного сечения. Как построить силовую линию, подробно смотрите в практическом занятии 9 **во втором пункте алгоритма**. В случае прямоугольного сечения, двутавра или швеллера опасными от изгибающих моментов будут угловые точки в силовых четвертях. Для круглого сечения опасные точки будут на пересечении силовой линии с контуром сечения. Одна из опасных точек от изгиба будет испытывать растягивающее нормальное напряжение со знаком «+», а противоположная точка – сжимающее нормальное напряжение со знаком «-». В каждую из опасных точек от изгиба надо приписать знак нормального напряжения от продольной силы N в случае растяжения «+» или «-» в случае сжатия. Точка, в которой знаки нормальных напряжений совпадут, будет опасной точкой сечения.

2.2. При наличии одного внутреннего изгибающего момента силовой линией является та ось поперечного сечения, с которой совпадает ордината изгибающего момента. Ось, перпендикулярная силовой, является нейтральной. Точки, максимально отстоящие от нейтральной линии, являются опасными от изгиба. Те точки, кото-

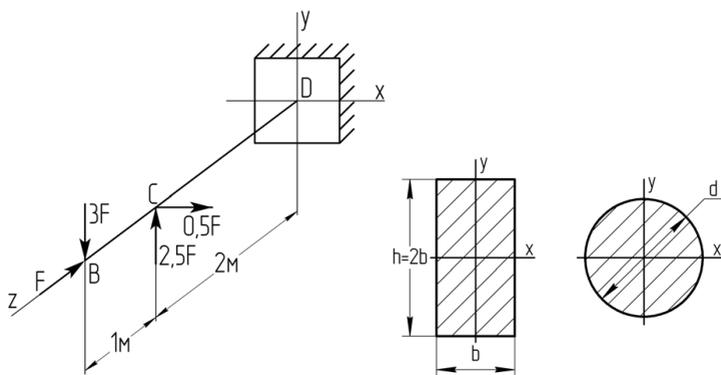
рые находятся в зоне сжатия, испытывают нормальное напряжение со знаком «-», а противоположные в зоне растяжения – со знаком «+». Осталось только добавить знаки нормальных напряжений от действия продольной силы. Опасными будут, соответственно, те точки, в которых совпадут знаки напряжений.

3. Запись одного из условий прочности (У1)–(У4) и его решение в соответствии с поставленной задачей. При реализации этого пункта алгоритма чаще всего напряжением от действия продольной силы пренебрегают. Во-первых, потому, что оно гораздо меньше по сравнению с напряжением, возникающим от изгибающего момента, и, во-вторых, включает величину характерного размера в квадрате, а напряжение от изгибающего момента – в кубе, что затрудняет, например, решение задачи об определении величины характерного размера поперечного сечения. После определения величины характерного размера по составляющей напряжения от изгиба проводят проверку прочности с учетом напряжения от действия продольной силы. Если процент перенапряжения не превышает пяти, принимают найденные величины в качестве действительных. В противном случае их изменяют методом подбора.



Примеры решения задач

Задача 1. Консольная балка нагружена силами, создающими изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, и сжимающей силой, приложенной к свободному концу. Материал балки Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.



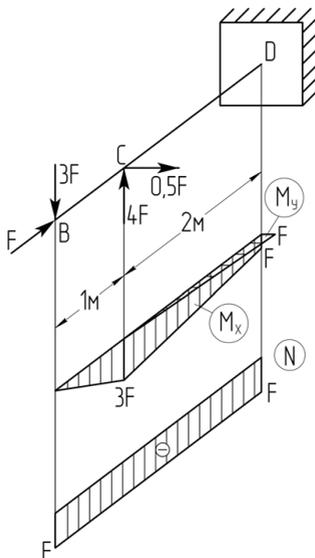
Требуется

Определить величину допускаемой силы $[F]$ для двух случаев поперечного сечения: прямоугольного с отношением сторон $h/b = 2$ при $b = 4 \cdot 10^{-2}$ м и круглого с диаметром $d = 6 \cdot 10^{-2}$ м.

Решение

Для прямоугольного сечения

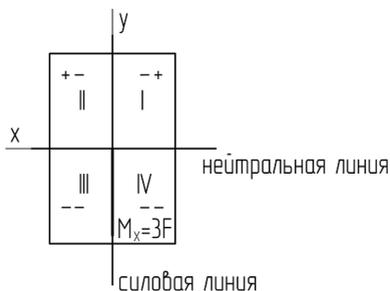
1. Определим положение опасного сечения на балке. Для этого построим эпюры изгибающих моментов M_x , M_y и продольной силы N .



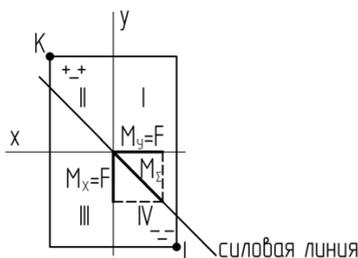
Из эпюр изгибающих моментов видно, что предположительно опасными могут быть два сечения: «С» и «D». Сечение «С» испытывает прямой поперечный изгиб со сжатием, а сечение «D» – косоу поперечный изгиб со сжатием. Какое сечение более опасно в данном случае, мы сможем сказать только после определения величин напряжений в опасных точках каждого сечения.

2. Определим положение опасных точек в сечениях «С» и «D». Для этого в плоскости каждого сечения отложим ординаты внутренних изгибающих моментов и установим положение силовой линии. В сечении «С» силовая линия совпадает с осью «у», а ось «х» является нейтральной от действия момента M_x . Опасными являются точки верхней и нижней сторон сечения. Нижние волокна испытывают на-

пряжение сжатия (на это указывает ордината момента в соответствии с эпюрой моментов), поэтому в области нижних волокон мы ставим знак «-», а в области верхних «+», так как они испытывают напряжение растяжения. Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающего момента знак «-» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опасными являются нижние волокна сечения.



В сечении «D» силовая линия определяется по положению ординаты суммарного момента и пересекает II и IV четверти поперечного сечения.



Опасными от изгиба будут угловые точки «K» и «L». Положение ординаты суммарного изгибающего момента указывает на то, что точка «L» испытывает напряжение сжатия, и рядом с ней мы ставим два знака «-» от действия M_x и M_y , а рядом с точкой «K» два знака «+», так как в ней возникают напряжения растяжения. Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающих моментов знак «-» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опаснее будет точка «L».

3. Определим величины напряжений от изгибающих моментов в опасных точках сечений «C» и «D».

Для сечения «С»:

$$\sigma_{\max}^C(M_X) = \frac{M_X}{W_X},$$

где $M_X = 3F$, а $W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}$.

Заменяя h на $2b$, получим:

$$W_X = \frac{2 \cdot b^3}{3},$$

тогда

$$\sigma_{\max}^C(M_X) = -\frac{3F \cdot 3}{2 \cdot b^3} = -\frac{4,5 \cdot F}{b^3}.$$

Для сечения «D»:

$$\sigma_{\max}^L = -\frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y},$$

где $M_X = F$, $M_Y = F$, $W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{2 \cdot b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}$.

Тогда

$$\sigma_{\max}^L = -\frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y} = -\frac{F \cdot 3}{2 \cdot b^3} - \frac{F \cdot 3}{b^3} = -\frac{4,5 \cdot F}{b^3}.$$

Из сравнения максимальных напряжений в опасном волокне сечения «С» и в опасной точке сечения «D» очевидно, что сечения равноопасны. Определим величину допускаемой силы из условия прочности по составляющей от изгибающего момента, беря ее по модулю:

$$\frac{4,5 \cdot F}{b^3} \leq [\sigma] \rightarrow [F] = \frac{b^3 \cdot [\sigma]}{4,5}.$$

Подставив значения $b = 4 \cdot 10^{-2}$ м и $[\sigma] = 160 \cdot 10^3$ кПа, получим:

$$[F] = \frac{(4 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 160 \cdot 10^3}{4,5} = 2,28 \text{ кН}.$$

Проведем проверку прочности в опасных точках сечений «С» и «D» с учетом составляющей напряжения от действия продольной силы $|\sigma| = \frac{N}{A} = \frac{F}{2b^2}$.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{4,5 \cdot [F]}{b^3} + \frac{[F]}{2b^2} = \frac{4,5 \cdot 2,28 \cdot 10^{-3}}{(4 \cdot 10^{-2})^3} + \frac{2,28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2} = \\ &= 160,3125 \text{ МПа} + 0,7125 \text{ МПа} = 161,025 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Процент перегруза составляет:

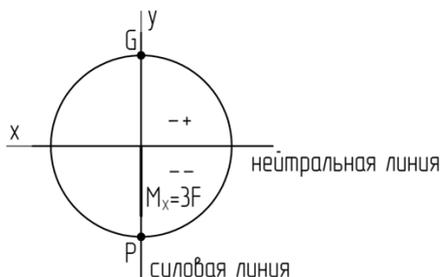
$$\frac{1,025 \text{ МПа}}{160 \text{ МПа}} \cdot 100 \% = 0,64 \% < 5 \% \text{ — допустимого процента перегруза.}$$

Для круглого сечения

1. Определим положение опасного сечения на балке. Этот пункт уже выполнен для данной балки в случае прямоугольного сечения. Для круглого профиля это также сечения «С» и «D». Только в отличие от прямоугольного в сечении «D» возникает прямой пространственный изгиб со сжатием.

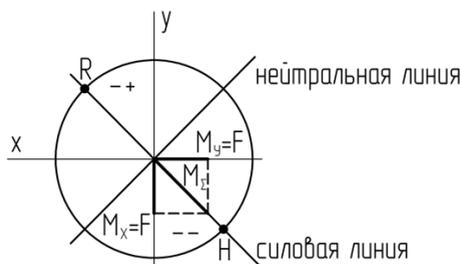
2. Определим положение опасных точек в сечениях «С» и «D».

В сечении «С» силовая линия совпадает с осью «у», нейтральная — с осью «х».



Опасными являются точки «G» и «P» на пересечении силовой линии с контуром круглого сечения, находящиеся на максимальном расстоянии от нейтральной линии. Нижняя точка «P» испытывает напряжение сжатия, и около нее мы поставим знак «-» (объяснение то же, что и для прямоугольного профиля). Верхняя точка «G», соответственно, попала в область растяжения, и около нее мы поставим знак «+». Добавляя знак «-» от напряжений, возникающих под действием сжимающей продольной силы, получаем максимальное по модулю напряжение в точке «P».

Для определения опасной точки в сечении «D» необходимо определить положение силовой линии по положению ординаты суммарного момента. Для этого ординаты внутренних моментов M_x и M_y откладываем в ту же сторону, что и на эпюрах соответствующих моментов. В силу равенства моментов M_x и M_y , ордината суммарного момента, а значит и силовая линия, пройдет под углом в 45° через II и IV четверти поперечного сечения.



Опасными от изгиба будут точки «R» и «H» – точки пересечения силовой линии с контуром круга. Нейтральная линия пройдет перпендикулярно силовой, разделив плоскость сечения на области растяжения (в нее попала точка «R») и сжатия (в нее попала точка «H»). Соответственно, около точки «R» поставим знак «+», а около точки «H» – знак «-». Добавляя к каждой точке по знаку «-» нормального напряжения от действия сжимающей продольной силы, делаем вывод о том, что опасной точкой сечения «D» является точка «H».

3. Определим напряжения в опасных точках сечений «C» и «D», чтобы выявить, какая из них опаснее. При этом определим в этих точках только составляющую напряжения от изгиба, отбросив слабое от действия продольной силы.

$$\sigma_{\max}^P \approx \frac{M_X}{W_X},$$

где $M_X = 3F$, $W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$.

Подставив эти выражения в формулу для напряжения, получим:

$$\sigma_{\max}^P \approx \frac{3 \cdot F \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \frac{96 \cdot F}{\pi \cdot d^3}.$$

$$\sigma_{\max}^H \approx \frac{M_{\Sigma}}{W_X},$$

где $M_{\Sigma} = \sqrt{(M_X^2 + M_Y^2)}$, $M_X = F$, $M_Y = F$, т. е. тогда

$$M_{\Sigma} = F \cdot \sqrt{2},$$

$$\sigma_{\max}^H \approx \frac{F \cdot \sqrt{2} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \approx \frac{45,25 \cdot F}{\pi \cdot d^3}.$$

Сравнивая напряжения в точках «Р» и «Н», приходим к выводу, что самой опасной точкой на балке круглого сечения является точка «Р», из условия прочности в которой определим величину допускаемой нагрузки:

$$\sigma_{\max}^P \approx \frac{96 \cdot F}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma] \rightarrow [F] = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot [\sigma]}{96} = \frac{3,14 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 160 \cdot 10^3}{96} = 1,13 \text{ кН.}$$

Определим напряжение в опасной точке «Р» с учетом напряжения от действия продольной силы $|\sigma| = \frac{N}{A} = \frac{F \cdot 4}{\pi \cdot d^2}$:

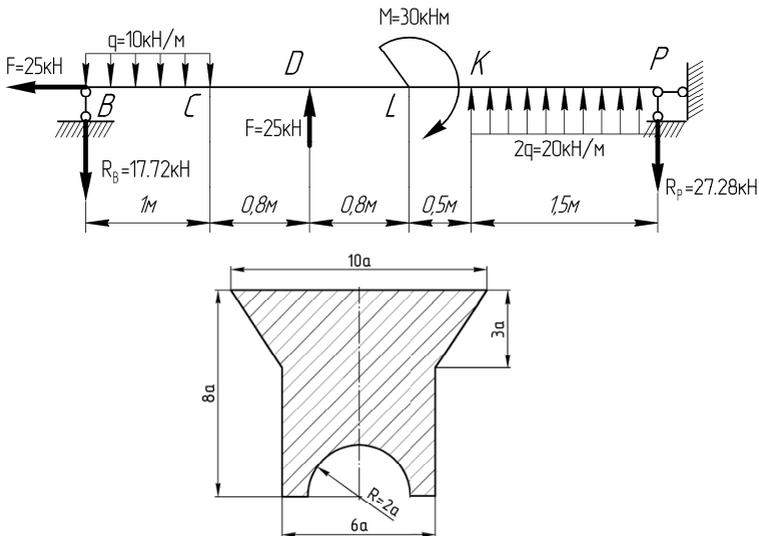
$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^P &= \frac{96 \cdot F}{\pi \cdot d^3} + \frac{F \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = \frac{96 \cdot 1,13 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^3} + \frac{1,13 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^2} = \\ &= 159,94 \text{ МПа} + 0,4 \text{ МПа} = 160,34 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Процент перегруза составляет:

$$\frac{0,34}{160} \cdot 100\% = 0,21\% \ll 5\% \text{ допускаемого перегруза.}$$

Задача решена. 🤖

Задача 2. Используем схемы балки и сложного сечения из [задачи практического занятия 7](#), добавляя действие продольной растягивающей силы F :

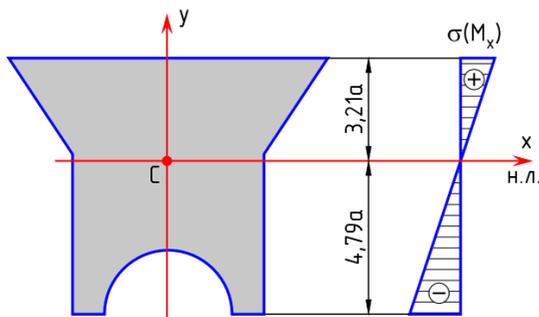


Требуется

1. Оценить влияние продольной силы на величину характерного размера поперечного сечения $[a]$ (хрупкий материал, $[\sigma]_p = 100$ МПа, $[\sigma]_c = 150$ МПа).
2. Определить величину смещения нейтральной линии под действием продольной силы F .

Решение

В задаче практического занятия 7 данная балка находилась под воздействием только изгибающей нагрузки (действие продольной силы F не учитывалось). Там из условия прочности при прямом изгибе мы подобрали минимально допустимое значение параметра a , определяющего размер заданного сложного сечения: $[a] = 19$ мм. При этом нейтральная линия сечения проходила через его центр тяжести и совпадала с главной центральной осью x :



Добавление растягивающей продольной силы $F = 25$ кН к заданной изгибающей нагрузке приводит к незначительному увеличению наибольшего значения напряжения в опасных точках опасного сечения, а также к смещению нейтральной линии от центра тяжести.

1. Найдем перенапряжение от действия продольной силы F и оценим, стоит ли увеличивать при этом значение $[a] = 19$ мм. При этом значении параметра согласно условию прочности при изгибе наибольшее напряжение в опасных точках растянутой зоны опасного сечения равно $[\sigma]_p = 100$ МПа. Добавив растягивающую силу F , мы тем самым увеличиваем значение наибольшего напряжения на величину:

$$\sigma(N) = \frac{N}{A},$$

где внутренняя продольная сила $N = F$, а площадь A сложного сечения в долях параметра a мы определяли в [практическом занятии 6](#) как алгебраическую сумму площадей простых сечений, составляющих наше сложное (прямоугольника (A_1), треугольников ($2A_2$) и полукруга (A_3)):

$$A = A_1 + 2A_2 - A_3 = 48a^2 + 2 \cdot 3a^2 - 6,28a^2 = 47,72a^2.$$

Тогда окончательно:

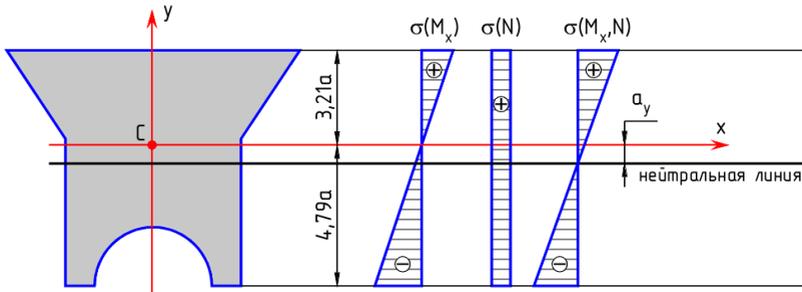
$$\sigma(N) = \frac{N}{A} = \frac{F}{47,72a^2} = \frac{25 \text{ кН} \cdot 10^3}{47,72 \cdot (19 \text{ мм})^2 \cdot 10^{-6}} = 1,45 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,45 \text{ МПа}.$$

Переведем это значение в проценты по отношению к $[\sigma]_p = 100 \text{ МПа}$:

$$\frac{\sigma(N)}{[\sigma]_p} \cdot 100 \% = \frac{1,45}{100} \cdot 100 \% = 1,45 \%.$$

Таким образом, перенапряжение от добавления продольной силы составило всего лишь 1,45 % по отношению к допускаемому напряжению. Методы сопротивления материалов имеют пятипроцентную погрешность, кроме того, допускаемое напряжение рассчитывается с учетом запаса прочности, поэтому разрешается превышать значение допускаемого напряжения, но не более чем на 5 %. В нашем случае перенапряжение составило 1,45 %, что меньше допустимых 5 %. Следовательно, значение характерного размера $[a] = 19 \text{ мм}$ можно не увеличивать, а оставить прежним.

2. Определим величину смещения нейтральной линии под действием продольной силы F . Напряжение, возникающее от действия изгибающего момента M_x , распределяется по высоте поперечного сечения по линейному закону, причем нулевое напряжение действует в точках, лежащих на нейтральной линии, совпадающей с главной центральной осью x . В точках, лежащих выше оси x , напряжение положительное (растянутая зона), в точках, лежащих ниже нейтральной линии, напряжение отрицательное (зона сжатых волокон). При добавлении растягивающей продольной силы F напряжение во всех точках сечения изменяется на величину $\sigma(N) = +1,45 \text{ МПа}$. Это приводит к тому, что растянутая зона увеличивается, а сжатая уменьшается, нейтральная линия при этом смещается вниз по оси на величину a_y :



Величину a_y можно вычислить двумя способами. Во-первых, геометрически, из подобия прямоугольных треугольников, лежащих в растянутой зоне на эпюрах $\sigma(M_x)$ и $\sigma(M_x, N)$ (см. рисунок):

$$\frac{3,21a}{3,21a + a_y} = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_p + \sigma(N)} \rightarrow (3,21a + a_y) \cdot [\sigma]_p = 3,21a \cdot ([\sigma]_p + \sigma(N))$$

$$a_y = \frac{3,21a \cdot \sigma(N)}{[\sigma]_p} = \frac{3,21 \cdot 19 \text{ мм} \cdot 1,45 \text{ МПа}}{100 \text{ МПа}} \approx 0,88 \text{ мм}.$$

Во-вторых, эту же величину a_y можно вычислить по формуле, вытекающей из уравнения нейтральной линии для случая совместного действия изгиба и растяжения-сжатия:

$$a_y = \frac{N}{A} \cdot \frac{I_x}{M_x},$$

здесь $N = F = 25 \text{ кН}$ – продольная сила; $A = 47,72a^2$ – площадь сложного сечения; $I_x = 219a^4$ – главный центральный момент инерции сложного сечения (его вычисление – см. [стр. 98](#)); $M_x = 47,06 \text{ кНм}$ – изгибающий момент в опасном сечении балки. Тогда:

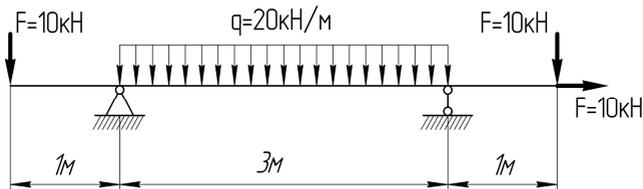
$$a_y = \frac{N}{A} \cdot \frac{I_x}{M_x} = \frac{25 \text{ кН} \cdot 10^3}{47,72 \cdot (19 \text{ мм})^2 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{219 \cdot (19 \text{ мм})^4 \cdot 10^{-12}}{47,06 \text{ кНм} \cdot 10^3} =$$

$$= 87,9 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 0,88 \text{ мм}.$$

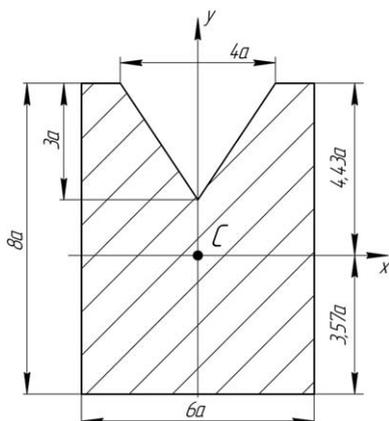
Задача решена. 🙌😊

Задача для самостоятельного решения на занятии

Данная балка, изготовленная из хрупкого материала ($[\sigma]_p = 100$ МПа, $[\sigma]_c = 150$ МПа), воспринимает действие изгибных нагрузок и продольной растягивающей силы:



Поперечное сечение балки сложное, положение его центра тяжести известно:



Характерный размер сложного сечения a был определен из условия прочности от действия только изгибной нагрузки: $[a] = 13,3$ мм.

Требуется

1. Оценить влияние продольной силы на величину характерного размера поперечного сечения $[a]$.
2. Определить величину смещения нейтральной линии под действием продольной силы F .



Потренируемся?

- ✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 10).
- ✦ Решить задачу 3.4 из РПР 3 (прил. 4).

МОДУЛЬ 4

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Цель занятий – научиться рассчитывать на прочность и жесткость стержневые конструкции круглого поперечного сечения, работающие в условиях кручения.

Необходимые знания для достижения цели

1. Условие прочности по допускаемому напряжению при кручении.
2. Алгоритм расчета на прочность.
3. Алгоритм построения эпюры углов закручивания поперечных сечений конструкции.
4. Условие жесткости при кручении по абсолютному и относительному углам закручивания.
5. Алгоритм расчета на жесткость.

Технологическая карта работы в модуле

№ недели	Вид аудиторного занятия	Самостоятельная работа	Контроль знаний
15	Лекция 8	Подготовка к занятиям и тестированию	Прием задолженностей по РПР
	Практическое занятие 11		
16	Итоговое тестирование		

Практическое занятие 11

Расчет на прочность и жесткость крутых валов при кручении

 *Что такое условие прочности по допускаемому напряжению?*

В условиях кручения в поперечных сечениях стержневой конструкции возникают касательные напряжения под действием внутреннего крутящего момента, которые в опасных точках сечения вычисляются по следующей формуле:

$$\tau = \frac{M_z}{W_p},$$

где M_z – величина внутреннего крутящего момента в данном сечении; W_ρ – полярный момент сопротивления – геометрическая характеристика поперечного сечения.

Для круглого сечения с диаметром d полярный момент сопротивления

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Условием прочности по допускаемому напряжению при кручении считается выполнение следующего неравенства:

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_z}{W_\rho} \right|_{\max} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ – величина допускаемого напряжения, является справочной величиной или определяется по характеристикам прочности для данной марки материала как: $[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}$ – для пластичного материала или $[\tau] = \frac{\tau_B}{n_B}$ – для хрупкого материала, где τ_T – предел текучести; τ_B – предел прочности данной марки материала; n_T – коэффициент запаса по текучести; n_B – коэффициент запаса по прочности.



Алгоритм расчета на прочность

1. Определить положение опасного сечения:

- построить эпюру крутящего момента M_z ;
- определить величину максимального касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_z}{W_\rho} \right|_{\max}.$$

2. Записать условие прочности:

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_z}{W_\rho} \right|_{\max} \leq [\tau]$$

и решить его соответственно поставленной задаче.



Какие перемещения испытывают круглые поперечные сечения стержня при кручении?

Согласно гипотезе Бернулли, круглые и плоские поперечные сечения стержня до приложения крутящего момента остаются круглыми и плоскими и после его воздействия, поворачиваясь при этом вокруг продольной оси на некоторый угол. Таким образом, переме-

щением при кручении считается φ — угол закручивания поперечных сечений вокруг продольной оси стержня.

Чтобы оценить деформацию стержня при кручении, рекомендуется построить эпюру распределения углов закручивания φ вдоль оси конструкции.



Алгоритм построения эпюры углов закручивания

1. Выбрать начало координат для отсчета перемещений поперечных сечений (если стержень имеет жесткую заделку, то рекомендуется принять начало координат в заделке).

2. Разделить стержень на участки, в пределах каждого из которых неизменны функция крутящего момента и размер поперечного сечения.

3. Начиная от начала координат, определить абсолютную деформацию каждого участка φ_i (угол закручивания граничных сечений данного участка относительно друг друга) с учетом знака крутящего момента:

- для участка без распределенного момента по формуле

$$\varphi_i = \left(\frac{M_z \cdot l}{GI_\rho} \right)_i,$$

где M_z — величина крутящего момента данного участка; l — длина участка; G — модуль сдвига (характеристика материала стержня); $I_\rho = \pi d^4/32$ — полярный момент инерции круглого сечения;

- для участка с распределенным моментом по формуле

$$\varphi_i = \left(\int_{l_i} \frac{M_z(z)}{GI_\rho} dz \right)_i.$$

4. Определить перемещение (угол закручивания) каждого граничного сечения стержня относительно выбранного начала координат как накопленную сумму абсолютных деформаций участков, предшествующих данному сечению: $\varphi_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i$.

5. По значениям полученных перемещений построить эпюру $\varphi(z)$, откладывая на базе, параллельной продольной оси стержня, величины углов закручивания в соответствующих сечениях стержня (учитывать, что на участках без распределенного момента функция

$\varphi(z)$ изменяется по линейному закону, а на участках с распределенным моментом – по параболическому).



Что такое условие жесткости при кручении?

Условие жесткости при кручении принято записывать либо в абсолютных, либо в относительных (погонных) углах закручивания. Погонным углом закручивания i -го участка стержня называется величина $\Theta_i = \left(\frac{M_z}{GI_\rho} \right)_i$.

Под условием жесткости, записанным в абсолютных углах закручивания, понимается ограничение максимального угла закручивания сечений стержневой конструкции в результате деформации кручения величиной допускаемого перемещения:

$$\varphi_{\max} \leq [\varphi],$$

где φ_{\max} – величина максимального угла закручивания сечений вала; $[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания, обычно назначаемый из условий эксплуатации или регламентирующими документами.

Под условием жесткости, записанным в относительных углах закручивания, понимается ограничение максимального относительного (погонного) угла закручивания участков стержневой конструкции в результате деформации кручения некоторой допускаемой величиной:

$$\Theta_{\max} \leq [\Theta],$$

где Θ_{\max} – величина максимального погонного угла закручивания участков стержня; $[\Theta]$ – допускаемый погонный угол закручивания.



Алгоритм расчета на жесткость по абсолютным углам закручивания

1. Построить эпюру углов закручивания $\varphi(z)$ согласно приведенному выше алгоритму.
2. По эпюре определить максимальный по абсолютной величине угол закручивания, подставить в условие жесткости: $\varphi_{\max} \leq [\varphi]$ и сделать вывод о его выполнении.



Алгоритм расчета на жесткость по относительным углам закручивания

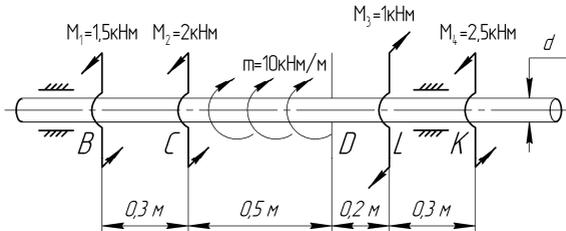
1. Найти погонные углы закручивания для каждого участка стержня по формуле $\Theta_i = \left(\frac{|M_z|}{GI_\rho} \right)_i$.
2. Определить максимальный по абсолютной величине погонный угол закручивания: $\Theta_{\max} = \max|\Theta_i|$, подставить в условие жесткости: $\Theta_{\max} \leq [\Theta]$ и сделать вывод о его выполнении.



Пример решения задачи

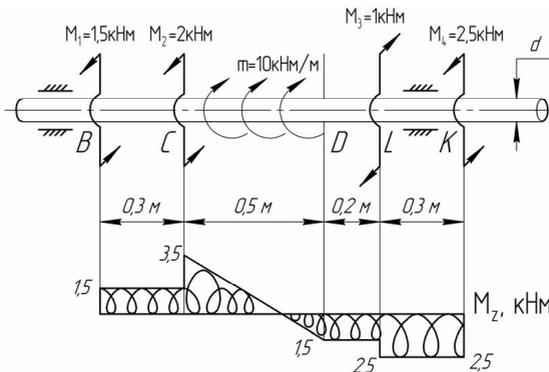
Вал круглого поперечного сечения, заключенный в подшипники, нагружен системой внешних крутящих моментов. Определить из условия прочности величину допускаемого диаметра сечения $[d]$, предварительно построив эпюру крутящего момента M_z . Проверить выполнение условия жесткости по абсолютным и относительным углам закручивания.

Принять: $[\tau] = 100$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $[\varphi] = 0,2^\circ$, $[\Theta] = 0,3^\circ/\text{м}$.



Решение

1. Построим эпюру крутящих моментов, используя метод сечений.



2. Определим положение опасного сечения вала и величину максимального касательного напряжения.

Так как диаметр вала по всей его длине не меняется, то опасное сечение определяется непосредственно по эпюре крутящего момента M_z (там, где момент принимает максимальное по абсолютной величине значение). Таким образом, сечение C вала наиболее опасно. Максимальное значение касательного напряжения в этом сечении равно:

$$\tau_{\max} = |\tau_C| = \frac{M_{zC}}{W_\rho} = \frac{3,5 \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{56}{\pi d^3}.$$

3. Подставим полученное значение максимального напряжения в условие прочности и найдем минимально допустимый диаметр $[d]$:

$$\tau_{\max} = \frac{56}{\pi d^3} \leq [\tau] \rightarrow [d] = \sqrt[3]{\frac{56 \text{ кНм}}{\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ кПа}}} = 0,056 \text{ м} = 5,6 \text{ см}.$$

4. Рассчитаем абсолютные углы закручивания участков стержня, приняв начало координат на крайней левой границе вала (сечение B).

На участках с постоянным значением крутящего момента по длине функция углов закручивания $\varphi(z)$ изменяется по линейному закону и здесь для определения абсолютного угла закручивания можно использовать формулу $\varphi = \frac{M_z \cdot l}{GI_\rho}$, т. е. на участках BC , DL и LK :

$$\begin{aligned} \varphi_{BC} &= \frac{M_{zBC} \cdot l_{BC}}{GI_\rho} = \frac{1,5 \text{ кНм} \cdot 0,3 \text{ м}}{8 \cdot 10^7 \text{ кПа} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,056^4}{32}\right) \text{ м}^4} = 0,00583 \text{ рад} = \\ &= \frac{0,00583 \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,33^\circ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{DL} &= \frac{M_{zDL} \cdot l_{DL}}{GI_\rho} = \frac{-1,5 \text{ кНм} \cdot 0,2 \text{ м}}{8 \cdot 10^7 \text{ кПа} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,056^4}{32}\right) \text{ м}^4} = -0,00388 \text{ рад} = \\ &= \frac{-0,00388 \cdot 180^\circ}{\pi} = -0,22^\circ, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{LK} &= \frac{M_{zLK} \cdot l_{LK}}{GI_\rho} = \frac{-2,5 \text{ кНм} \cdot 0,3 \text{ м}}{8 \cdot 10^7 \text{ кПа} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,056^4}{32}\right) \text{ м}^4} = -0,00971 \text{ рад} = \\ &= \frac{-0,00971 \cdot 180^\circ}{\pi} = -0,56^\circ. \end{aligned}$$

На участке CD крутящий момент изменяется по линейному закону, а функция $\varphi(z)$ по параболическому, и абсолютный угол закручивания определяется по интегральной формуле $\varphi = \int_l \frac{M_z(z) dz}{GI_\rho}$, то есть

$$\begin{aligned}\varphi_{CD} &= \int_0^{0,5M} \frac{(3,5 - 10z) dz}{GI_\rho} = \frac{3,5z - 5z^2}{8 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,096^4}{32} \right)} \Big|_0^{0,5M} = 0,00647 \text{ рад} = \\ &= \frac{0,00647 \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,37^\circ.\end{aligned}$$

Так как эпюра M_z на участке CD в сечении P пересекает осевую линию ($M_{zP} = 0$), то парабола функции $\varphi(z)$ на участке CD имеет экстремум в сечении P . Чтобы определить экстремальное значение угла закручивания, необходимо выделить на участке CD подучасток, границами которого являются ближайшая к началу координат граница участка CD , т. е. сечение C , и экстремальное сечение P . Таким образом, на выделенном подучастке CP длиной 0,35 м абсолютный угол закручивания равен:

$$\begin{aligned}\varphi_{CP} &= \int_0^{0,35M} \frac{(3,5 - 10z) dz}{GI_\rho} = \frac{3,5z - 5z^2}{8 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,056^4}{32} \right)} \Big|_0^{0,35M} = 0,00793 \text{ рад} = \\ &= \frac{0,00793 \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,45^\circ.\end{aligned}$$

5. Определим углы закручивания характерных сечений C , D , L , K и экстремального сечения P относительно неподвижного сечения B и построим эпюру углов закручивания $\varphi(z)$ на базе, параллельной продольной оси стержня:

$$\varphi_B = 0,$$

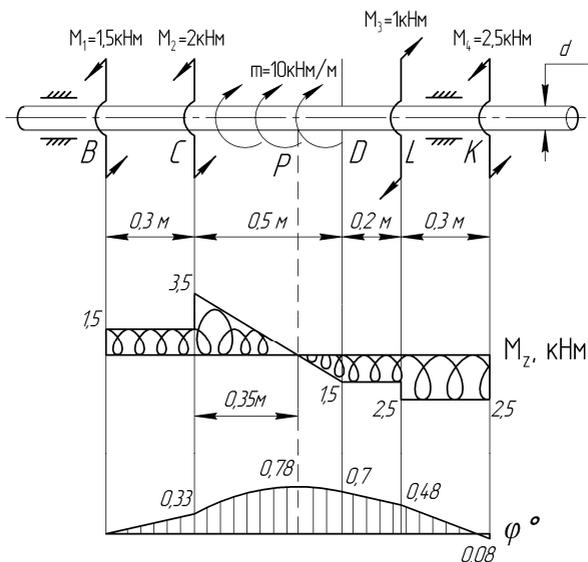
$$\varphi_C = \varphi_{BC} = 0,33^\circ,$$

$$\varphi_P = \varphi_{BC} + \varphi_{CP} = 0,33^\circ + 0,45^\circ = 0,78^\circ,$$

$$\varphi_D = \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = 0,33^\circ + 0,37^\circ = 0,7^\circ,$$

$$\varphi_L = \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DL} = 0,33^\circ + 0,37^\circ - 0,22^\circ = 0,48^\circ,$$

$$\varphi_K = \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DL} + \varphi_{CK} = 0,33^\circ + 0,37^\circ - 0,22^\circ - 0,56^\circ = -0,08^\circ.$$



По эпюре видно, что максимальный по абсолютной величине угол закручивания возникает в сечении P : $\varphi_{\max} = |\varphi_P| = 0,78^\circ$.

6. Проверим выполнение условия жесткости по абсолютным углам закручивания: $\varphi_{\max} \leq [\varphi]$.

$$\varphi_{\max} = 0,78^\circ > [\varphi] = 0,2^\circ,$$

т. е. условие жесткости не выполняется.

7. Проверим выполнение условия жесткости по относительным углам закручивания: $\Theta_{\max} \leq [\Theta]$.

Вычислим погонные углы закручивания для каждого участка по формуле

$$\Theta_i = \left(\frac{|M_z|}{GI_p} \right)_i.$$

На участках без распределенного момента:

$$\Theta_{BC} = \frac{|\varphi_{BC}|}{l_{BC}} = \frac{0,33^\circ}{0,3} = 1,1 \text{ } \frac{^\circ}{\text{м}};$$

$$\Theta_{DL} = \frac{|\varphi_{DL}|}{l_{DL}} = \frac{0,22^\circ}{0,2} = 1,1 \text{ } \frac{^\circ}{\text{м}};$$

$$\Theta_{LK} = \frac{|\varphi_{LK}|}{l_{LK}} = \frac{0,56^\circ}{0,3} = 1,87 \text{ } \frac{^\circ}{\text{м}}.$$

На участке с распределенным моментом парабола функции $\varphi(z)$ имеет экстремум, и наибольшее изменение угла закручивания происходит на подучастке CP , поэтому погонный угол закручивания будем вычислять именно здесь:

$$\Theta_{CP} = \frac{|\varphi_{CP}|}{l_{CP}} = \frac{0,45^\circ}{0,35} = 1,29 \text{ }^\circ/\text{м}.$$

Таким образом:

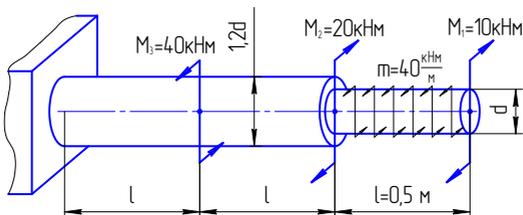
$$\Theta_{\max} = 1,87 \text{ }^\circ/\text{м} > [\Theta] = 0,3 \text{ }^\circ/\text{м},$$

следовательно, условие жесткости не выполняется.

Задача решена. 🙌😊

Задача для самостоятельного решения на занятии

Для данного консольного вала определить из условия прочности величину допускаемого диаметра сечения $[d]$, предварительно построив эпюры M_z и τ . Для полученных размеров сечения определить максимальный абсолютный угол закручивания вала, построив эпюру углов закручивания φ . Принять: $[\tau] = 100 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.



Потренируемся?

✦ Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к ПЗ 11).

Определение реакций опор статически определимых балок

Цель занятия – научиться определять реактивные усилия, возникающие в опорных точках статически определимых нагруженных балок.

Необходимые знания для достижения цели

1. Основные виды опор на балках и возникающие в них реактивные усилия.
2. Понятие статической определимости.
3. Формы статических уравнений равновесия для плоской системы сил.
4. Правила определения момента относительно заданной точки от действия всех видов усилий, приложенных к балке.

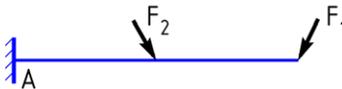
Какие основные виды опор используются для балок?

Чаще всего для балок используются следующие виды опор:

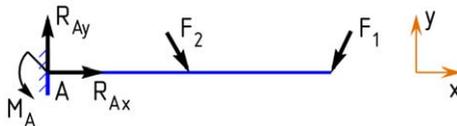
- жесткое защемление (жесткая заделка);
- шарнирно-неподвижная опора;
- шарнирно-подвижная опора.

Какие реактивные усилия возникают в опорах балки от действия плоской внешней нагрузки?

а) балка с жестким защемлением:

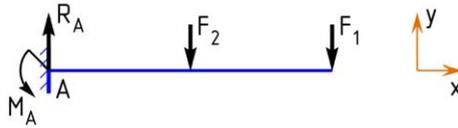


В жестком защемлении (A) балки под действием произвольно направленной внешней нагрузки (силы F_1 и F_2) в плоской системе координат возникают три реактивных усилия: две проекции реактивной силы R_{Ax} и R_{Ay} и реактивный момент M_A :

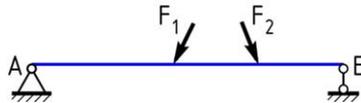


Но если внешние силы будут направлены строго вертикально (параллельно друг другу), то горизонтальная проекция реактивной

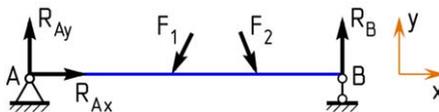
силы R_{Ax} будет тождественно равна нулю. Таким образом, при вертикальной нагрузке в жестком защемлении балки возникает два реактивных усилия – вертикальная реактивная сила R_A и реактивный момент M_A :



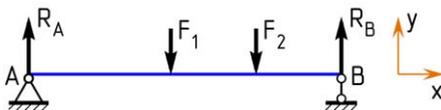
б) балка на двух шарнирных опорах:



Рассмотрим балку на двух шарнирных опорах, одна из которых шарнирно-неподвижная (опора A), а другая – шарнирно-подвижная (опора B). Внешняя нагрузка – плоская, произвольно направленная. Наличие шарнира в таких опорах снимает поворотное усилие, поэтому в них реактивных моментов не возникает. В шарнирно-неподвижной опоре (A) в силу её неподвижности возникает две проекции реактивной силы по направлению координатных осей R_{Ax} и R_{Ay} . В шарнирно-подвижной опоре (B) возможность её смещения в горизонтальном направлении компенсирует действие горизонтальных составляющих внешних сил и поэтому возникает единственная реактивная сила в вертикальном направлении R_B (перпендикулярно направлению смещения опоры):



Если же внешние силы будут направлены строго вертикально, то в шарнирно-неподвижной опоре (A) горизонтальная проекция реактивной силы R_{Ax} будет тождественно равна нулю. То есть при вертикальной нагрузке и в шарнирно-неподвижной, и в шарнирно-подвижной опорах возникают только по одной вертикальной реактивной силе – R_A и R_B :



Какие конструкции называются статически определимыми?

Конструкции, у которых количество неизвестных реактивных усилий равно необходимому и достаточному количеству уравнений статического равновесия, называются статически определимыми. А раз количество неизвестных соответствует количеству уравнений, в которые эти неизвестные входят, то все реактивные усилия однозначно определяются из уравнений статического равновесия. Отсюда и название таких конструкций – статически определимые.

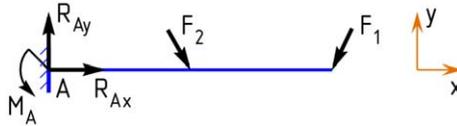
К статически определимым балкам относятся балки с жестким защемлением и балки на двух шарнирных опорах, одна из которых шарнирно-неподвижная, а другая – шарнирно-подвижная.

Что такое условие равновесия конструкции?

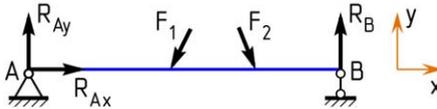
Все нагруженные конструкции должны находиться в равновесии. Условием равновесия статически нагруженных плоских конструкций является выполнение для них трех статических уравнений равновесия.

Три статических уравнения равновесия для конструкции, находящейся под действием **произвольной плоской системы сил**, могут быть записаны в одной из трех форм:

1) $\Sigma M_{iA} = 0$, $\Sigma X_i = 0$, $\Sigma Y_i = 0$, где $\Sigma M_{iA} = 0$ – моментное уравнение равновесия, записанное относительно произвольной точки A , означающее, что сумма моментов, возникающих относительно точки A от действия всех активных (внешних) и реактивных сил конструкции, должна равняться нулю; $\Sigma X_i = 0$ и $\Sigma Y_i = 0$ – силовые уравнения равновесия, означающие, что сумма проекций всех активных и реактивных сил конструкции на координатные оси X и Y должна равняться нулю. **Рекомендация:** эту форму уравнений равновесия следует выбирать для определения трех реакций опор балки с жестким защемлением, причем в качестве точки A рационально выбирать точку защемления балки:



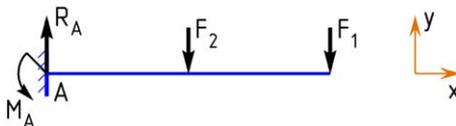
2) $\Sigma M_{iA} = 0$, $\Sigma M_{iB} = 0$, $\Sigma U_i = 0$, где $\Sigma M_{iA} = 0$ и $\Sigma M_{iB} = 0$ – моментные уравнения равновесия, записанные относительно двух произвольных точек A и B , а $\Sigma U_i = 0$ – силовое уравнение равновесия в проекции на произвольную ось U , не перпендикулярную прямой, соединяющей точки A и B . **Рекомендация:** эту форму уравнений равновесия следует выбирать для определения реактивных усилий балки на двух шарнирных опорах, причем в качестве точек A и B рационально выбирать опорные точки балки, а силовое уравнение равновесия записывать в проекции на горизонтальную ось X :



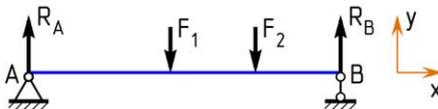
3) $\Sigma M_{iA} = 0$, $\Sigma M_{iB} = 0$, $\Sigma M_{iC} = 0$, где $\Sigma M_{iA} = 0$, $\Sigma M_{iB} = 0$, $\Sigma M_{iC} = 0$ – моментные уравнения равновесия, записанные относительно трех произвольных точек A , B и C , не лежащих на одной прямой.

Если же силы, действующие на конструкцию, образуют **параллельную систему сил** (например, все силы направлены строго вертикально), то количество уравнений равновесия сокращается до двух, и они могут быть записаны в одной из двух форм:

1) $\Sigma M_{iA} = 0$, $\Sigma Y_i = 0$, здесь смысл уравнений тот же, причем ось Y , на которую проектируются все силы, должна быть параллельна силам. **Рекомендация:** эту форму уравнений равновесия следует выбирать для определения двух реакций опор балки с жестким защемлением и вертикальной нагрузкой, причем в качестве точки A рационально выбирать точку защемления балки:



2) $\sum M_{iA} = 0$, $\sum M_{iB} = 0$, здесь два моментных уравнения равновесия записываются относительно двух произвольных точек A и B , однако прямая AB не должна быть параллельна силам. **Рекомендация:** эту форму уравнений равновесия следует выбирать для определения двух реакций опор балки с шарнирными опорами и вертикальной нагрузкой, причем в качестве точек A и B рационально выбирать опорные точки балки:



Как составить моментное уравнение равновесия относительно данной точки?

Наибольшее затруднение вызывает составление моментных уравнений равновесия. Для этого нужно уметь определять значения моментов, возникающих в данной точке (относительно которой записывается уравнение равновесия) от действия каждого усилия (активного и реактивного), приложенного к конструкции. Основные виды усилий, применяемых в расчетных схемах:

- сосредоточенный момент M ;
- сосредоточенная сила F ;
- распределенная сила интенсивностью q , приложенная на расстоянии a .

Повторим **правила определения момента в точке от действия M , F и q** . Момент – это поворотное усилие, которое характеризуется значением и направлением вращения.

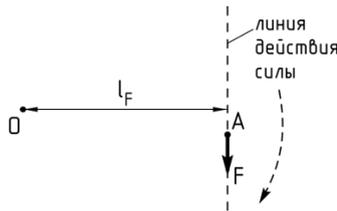
Правило 1. Момент, возникающий в точке O плоской системы от действия сосредоточенного момента M , приложенного в точке A данной системы, равен значению данного момента M и сохраняет его направление вращения:



$$M_o(M) = M \text{ (по часовой стрелке)}$$

Таким образом, действие сосредоточенного момента передается в любую точку плоскости без изменения.

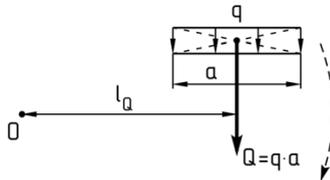
Правило 2. Момент, возникающий в точке O плоской системы от действия сосредоточенной силы F , приложенной в точке A данной системы, равен произведению силы на её плечо (с учетом направления вращения).



$$M_O(F) = F \cdot l_F \text{ (по часовой стрелке)}$$

Плечом силы F относительно точки O (l_F) называется кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы.

Правило 3. Момент, возникающий в точке O плоской системы от действия распределенной нагрузки интенсивностью q , приложенной на расстоянии a , равен произведению равнодействующей распределенной нагрузки на её плечо (с учетом направления вращения).



$$M_O(q) = Q \cdot l_Q = q \cdot a \cdot l_Q \text{ (по часовой стрелке)}$$

Равнодействующая распределенной нагрузки Q — это сосредоточенная сила, приложенная в центре тяжести распределенной нагрузки и равная произведению интенсивности q на расстояние действия a : $Q = q \cdot a$. Плечом равнодействующей Q относительно точки O (l_Q) называется кратчайшее расстояние от точки O до линии действия равнодействующей.

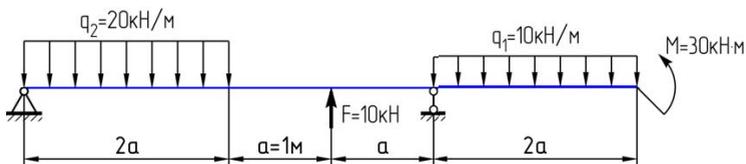
Таким образом, чтобы составить моментное уравнение равновесия для балки относительно выбранной точки нужно определить моменты от всех действующих на балку усилий (активных и реактивных) относительно данной точки, просуммировать их с учетом направления вращения и приравнять полученную сумму к нулю.

Алгоритм определения реакций опор статически определимых балок

1. Обозначить на схеме балки опорные точки буквами и изобразить в них реактивные усилия соответственно типам опор и виду внешней нагрузки.
2. Выбрать рациональную форму уравнений равновесия согласно приведенным выше рекомендациям.
3. По выбранной форме составить уравнения равновесия балки с учетом действия всех активных (заданных) и реактивных усилий. **Внимание:** количество уравнений должно соответствовать количеству реактивных усилий!
4. Решить полученную систему уравнений равновесия относительно реактивных усилий. **Внимание:** если знак найденного реактивного усилия получился отрицательным, то его направление нужно изменить на противоположное!

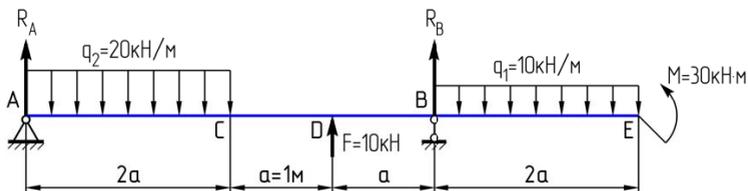
Пример определения реактивных усилий балки на двух шарнирных опорах с вертикальной нагрузкой

Определить реакции опор данной балки:



Решение

1. Обозначим опорные точки балки буквами A и B и изобразим в них реактивные усилия, возникающие от действия приложенной нагрузки:



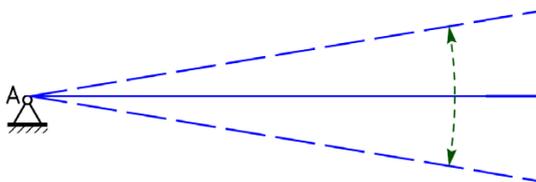
Так как все внешние силы, действующие на балку, вертикальные (образуют параллельную систему сил), то и в шарнирно-неподвиж-

ной опоре A , и в шарнирно-подвижной опоре B возникают только вертикальные реактивные силы R_A и R_B .

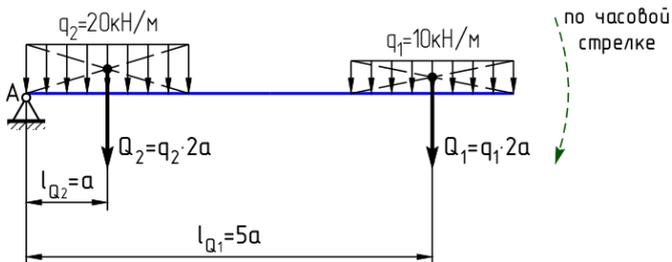
2. Наиболее рациональной формой двух уравнений равновесия для данной балки с вертикальной нагрузкой является вторая форма:

$$\Sigma M_{iA} = 0, \Sigma M_{iB} = 0.$$

3. Составим первое моментное уравнение равновесия для балки относительно опорной точки A : $\Sigma M_{iA} = 0$. Это уравнение означает, что алгебраическая сумма моментов, возникающих в точке A от действия всех активных (заданных) и реактивных усилий, должна равняться нулю. Это утверждение можно перефразировать несколько иначе: сумма моментов, поворачивающих балку относительно точки A по часовой стрелке, должна равняться сумме моментов, поворачивающих её относительно этой точки против часовой стрелки. Визуально это легко представить, если мысленно открепить балку от опоры B , тогда она будет представлять собой рычаг с центром в точке A , который поворачивается действующими усилиями либо против, либо по часовой стрелке.



По часовой стрелке относительно точки A поворачивают балку распределенные силы q_1 и q_2 :

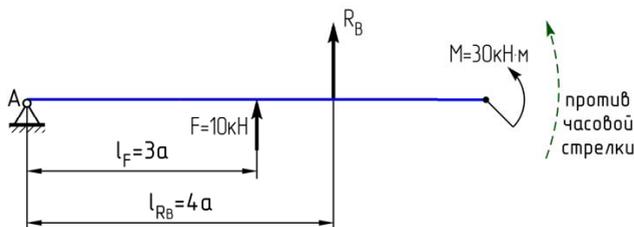


Найдем моменты этих сил относительно точки A , применяя правило 3 (см. выше):

$$M_A(q_1) = Q_1 \cdot l_{Q_1} = q_1 \cdot 2a \cdot l_{Q_1} = q_1 \cdot 2a \cdot 5a = 10q_1 a^2;$$

$$M_A(q_2) = Q_2 \cdot l_{Q_2} = q_2 \cdot 2a \cdot l_{Q_2} = q_2 \cdot 2a \cdot a = 2q_2 a^2.$$

Против часовой стрелки относительно точки A поворачивают балку следующие усилия: сосредоточенный момент M , реактивная сила R_B и сосредоточенная сила F .



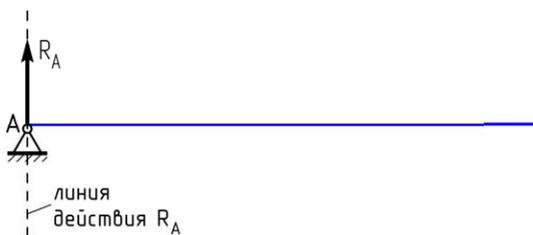
Найдем моменты этих усилий относительно точки A , применяя правила 1 и 2 (см. выше):

$$M_A(M) = M,$$

$$M_A(R_B) = R_B \cdot l_{R_B} = R_B \cdot 4a,$$

$$M_A(F) = F \cdot l_F = F \cdot 3a.$$

Реакция R_A относительно точки A момента не создает, потому что её линия действия проходит через эту точку и, соответственно, плечо её относительно точки A равно нулю:



Приравняем сумму моментов, поворачивающих балку относительно точки A по часовой стрелке, к сумме моментов, поворачивающих её относительно этой точки против часовой стрелки:

$$M_A(q_1) + M_A(q_2) = M_A(M) + M_A(R_B) + M_A(F).$$

Подставив сюда найденные значения данных моментов, приходим к уравнению относительно неизвестной реакции R_B :

$$10q_1 a^2 + 2q_2 a^2 = M + 4R_B a + 3Fa.$$

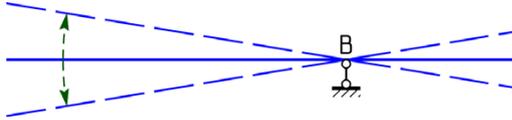
Выразим из этого уравнения реакцию R_B и найдем её численное значение, подставив известные значения внешних усилий и параметра a :

$$R_B = \frac{10q_1a^2 + 2q_2a^2 - M - 3Fa}{4a} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 1^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1^2 - 30 - 3 \cdot 10}{4 \cdot 1} = 20 \text{ кН.}$$

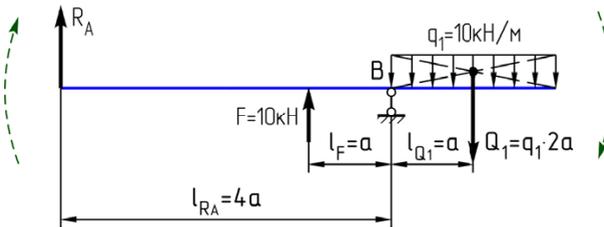
Значение реакции R_B получилось положительное, значит, мы угадали истинное её направление. Если знак реактивного усилия получается отрицательным, то его первоначально выбранное направление нужно изменить на противоположное.

4. Поступая аналогично, составим второе моментное уравнение равновесия: $\Sigma M_{iB} = 0$ и найдем из него вторую реактивную силу R_A .

Мысленно открепив балку теперь от опоры A , получим рычаг с центром в точке B :



По часовой стрелке относительно точки B поворачивают балку следующие усилия: распределенная нагрузка q_1 , сосредоточенная сила F и реактивная сила R_A .



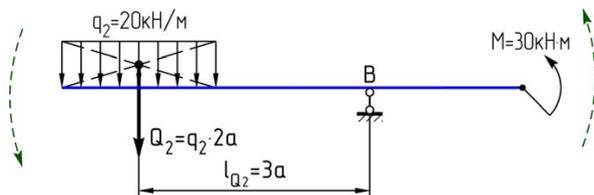
Найдем моменты этих сил относительно точки B , применяя правила 2 и 3 (см. выше):

$$M_B(q_1) = Q_1 \cdot l_{Q_1} = q_1 \cdot 2a \cdot a = 2q_1a^2,$$

$$M_B(F) = F \cdot l_F = F \cdot a,$$

$$M_B(R_A) = R_A \cdot l_{R_A} = R_A \cdot 4a = 4R_Aa.$$

Против часовой стрелки относительно точки B поворачивают балку следующие усилия: распределенная нагрузка q_2 и сосредоточенный момент M .

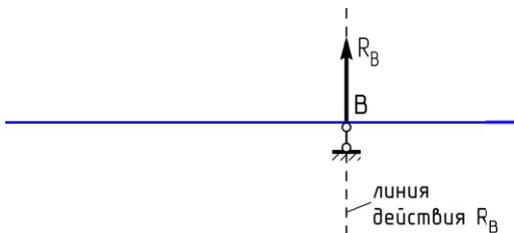


Найдем моменты этих усилий относительно точки B , применяя правила 1 и 3 (см. выше):

$$M_B(q_2) = Q_2 \cdot l_{Q_2} = q_2 \cdot 2a \cdot 3a = 6q_2 a^2,$$

$$M_B(M) = M.$$

Реакция R_B относительно точки B момента не создает, потому что её линия действия проходит через точку B и, соответственно, плечо её относительно точки B равно нулю:



Приравняем сумму моментов, поворачивающих балку относительно точки B по часовой стрелке, к сумме моментов, поворачивающих её относительно этой точки против часовой стрелки:

$$M_B(q_1) + M_B(F) + M_B(R_A) = M_B(q_2) + M_B(M).$$

Подставив сюда найденные значения данных моментов, приходим к уравнению относительно неизвестной реакции R_A :

$$2q_1 a^2 + Fa + 4R_A a = 6q_2 a^2 + M.$$

Выразим из этого уравнения реакцию R_A и найдем её численное значение, подставив известные значения внешних усилий и параметра a :

$$R_A = \frac{6q_2 a^2 + M - 2q_1 a^2 - Fa}{4a} = \frac{6 \cdot 20 \cdot 1^2 + 30 - 2 \cdot 10 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 30 \text{ кН}.$$

Значение реакции R_A также получилось положительное, значит, мы угадали и её истинное направление.

5. Проверим правильность найденных значений реактивных усилий силовым уравнением равновесия в проекции на вертикальную ось Y : $\Sigma Y_i = 0$. Если реакции найдены верно, то уравнение должно удовлетворяться тождественно. То есть алгебраическая сумма всех активных и реактивных сил, действующих на балку, должна равняться нулю. Распределенная нагрузка в силовом уравнении равновесия представляется своей равнодействующей. В нашем случае:

$$Q_1 = q_1 \cdot 2a = 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ кН} \text{ и } Q_2 = q_1 \cdot 2a = 20 \cdot 2 \cdot 1 = 40 \text{ кН}.$$

Силы, направленные вверх: R_A , F и R_B . Силы, направленные вниз: Q_1 и Q_2 . Момент в силовом уравнении не участвует. Тогда силовое уравнение равновесия для нашей балки имеет вид:

$$R_A - Q_2 + F + R_B - Q_1 = 0.$$

Подставим значения сил в уравнение

$$30 - 40 + 10 + 20 - 20 = 0.$$

Уравнение тождественно выполняется, значит, реакции найдены верно.

Таким образом, реактивные силы балки направлены вверх и равны соответственно:

$$R_A = 20 \text{ кН}, R_B = 30 \text{ кН}.$$

Задача решена.

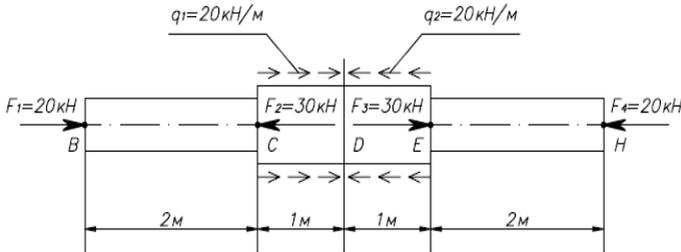
Тестовый материал

Практическое занятие 1

Построение эпюры продольной силы N и крутящего момента M_x

Вариант 1.1

Задан стержень:



1. На какое количество участков надо поделить данный стержень для построения эпюры N ?

- 1) 3 участка
- 2) 4 участка
- 3) 5 участков
- 4) 6 участков

2. В каких сечениях данного стержня на эпюре N будут скачки?

- 1) в сечениях, где приложены сосредоточенные силы
- 2) сечениях, где меняется размер сечения
- 3) сечениях, где начинается и кончается распределенная нагрузка
- 4) сечениях, где приложены сосредоточенные силы и где начинается и кончается распределенная нагрузка

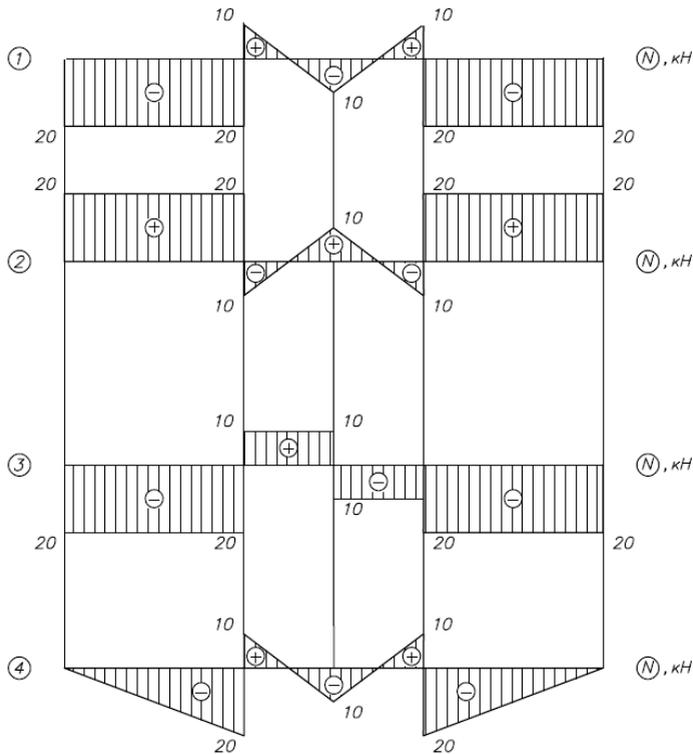
3. На каких участках эпюры N для данного стержня будут прямые, параллельные базе эпюры?

- 1) на участках BC и EH
- 2) участках CD и DE
- 3) участках BC и CD
- 4) участках DE и EH

4. На каких участках эпюры N для данного стержня будут наклонные прямые?

- 1) на всех участках
- 2) таких участков нет
- 3) на участках CD и DE
- 4) на участках BC и CB
- 5) на участках DE и EH

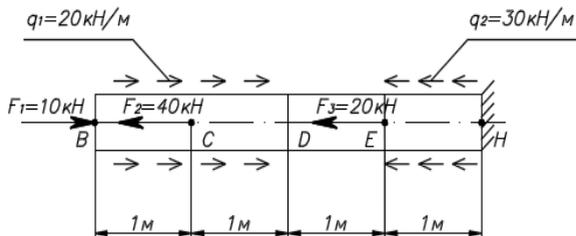
5. Выберите правильную эпюру N для данного стержня.



- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

Вариант 1.2

Задан стержень:



1. На какое количество участков надо поделить данный стержень для построения эпюры N ?

- 1) 3 участка
- 2) 4 участка
- 3) 5 участков
- 4) 6 участков

2. В каких сечениях данного стержня на эпюре N будут скачки?

- 1) в сечениях B, C, E, H
- 2) в сечениях C, D, E
- 3) в сечениях D, E, H
- 4) во всех сечениях стержня

3. На каких участках эпюры N для данного стержня будут прямые параллельные базе эпюры?

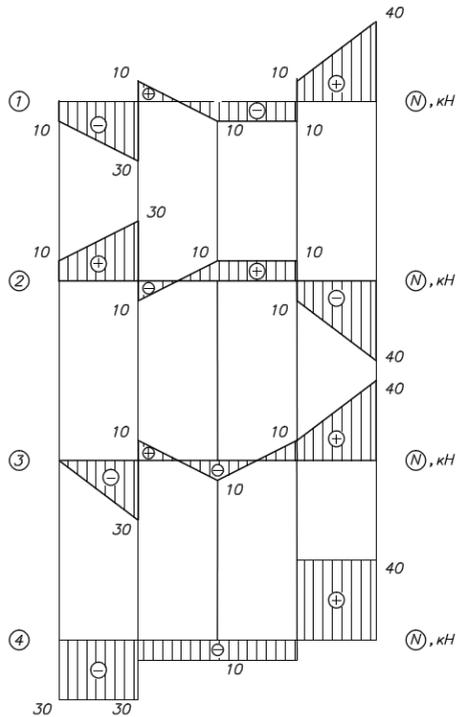
- 1) на всех участках
- 2) участках BC и EH
- 3) участках CD и DE
- 4) участках BC, CD и EH
- 5) участке DE

4. На каких участках эпюры N для данного стержня будут наклонные прямые?

- 1) на всех участках
- 2) участках BC и EH
- 3) участках CD и DE
- 4) участках BC, CD и EH
- 5) участках DE и EH

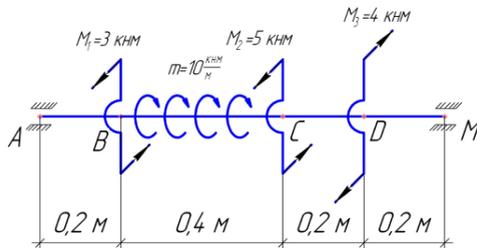
5. Для данного стержня выберите правильную эпюру N .

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4



Вариант 2.1

Задан вал:



1. На какое количество участков надо поделить данный вал для построения эпюры M_z ?

- 1) 3 участка
- 2) 2 участка
- 3) 5 участков
- 4) 4 участка

2. В каких сечениях данного вала на эпюре M_z будут скачки?

- 1) во всех сечениях
- 2) сечениях A, M
- 3) сечениях B, C, D
- 4) сечениях B, D
- 5) сечениях C, D

3. На каких участках эпюры M_z для данного вала будут прямые, параллельные базе?

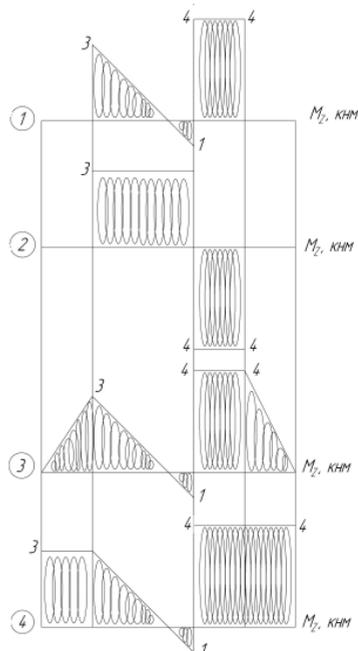
- 1) на всех участках эпюры
- 2) на участке CD
- 3) таких участков нет
- 4) на участке BC

4. На каких участках эпюры M_z для данного вала будут наклонные прямые?

- 1) на всех участках эпюры
- 2) на участке CD
- 3) таких участков нет
- 4) на участке BC

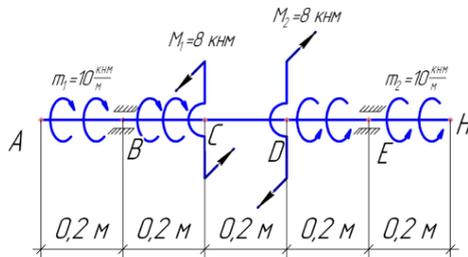
5. Для данного вала выберите верную эпюру M_z .

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4



Вариант 2.2

Задан вал:



1. На какое количество участков надо поделить данный вал для построения эпюры M_z ?

- 1) 4 участка
- 2) 3 участка
- 3) 5 участков
- 4) 6 участков

2. В каких сечениях данного вала на эпюре M_z будут скачки?

- 1) во всех сечениях
- 2) сечениях A, H
- 3) сечениях B, C, D
- 4) сечениях B, D
- 5) сечениях C, D

3. На каких участках эпюры M_z для данного вала будут прямые, параллельные базе?

- 1) на всех участках эпюры
- 2) на участках AB, CD, DE
- 3) таких участков нет
- 4) на участках AB, DE
- 5) на участке CD

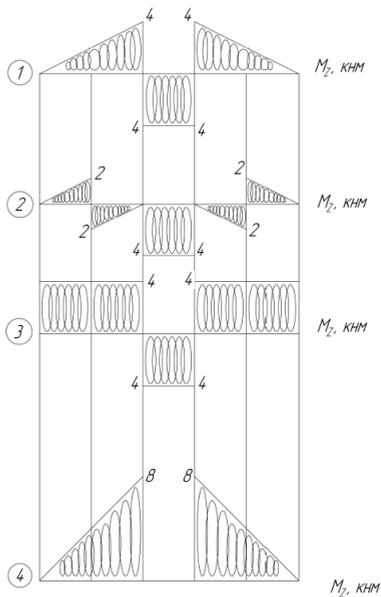
4. На каких участках эпюры M_z для данного вала будут наклонные прямые?

- 1) на всех участках эпюры
- 2) на участках AB, BC, DE, EH
- 3) таких участков нет
- 4) на участках AB, EH

5. Выберите верную эпюру

M_z для данного вала

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

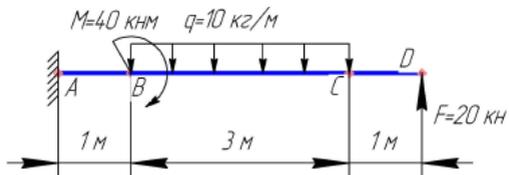


Практическое занятие 2

Построение эпюр внутренней поперечной силы и изгибающего момента при прямом изгибе балок

Вариант 1

Задана балка:



1. На какое количество участков надо поделить данную балку для построения эпюр Q_y и M_z ?

- 1) 4 участка
- 2) 3 участка
- 3) 2 участка
- 4) 5 участков

2. В каких сечениях данной балки будут скачки на эпюре Q_y ?

- 1) в сечениях А и D
- 2) в сечениях В и С
- 3) в сечениях А, В, С и D
- 4) скачков не будет ни в одном сечении

3. В каких сечениях данной балки будут скачки на эпюре M_x ?

- 1) в сечениях А и В
- 2) в сечениях В и С
- 3) в сечениях В и D
- 4) скачков не будет ни в одном сечении

4. На каких участках данной балки будут прямые, параллельные базе, на эпюре Q_y ?

- 1) на участках АВ и CD
- 2) на участке BC
- 3) на всех участках
- 4) ни на одном участке

5. На каких участках данной балки будут наклонные прямые на эпюре Q_y ?

- 1) на участке BC
- 2) на участках АВ и CD
- 3) на всех участках балки
- 4) ни на одном участке

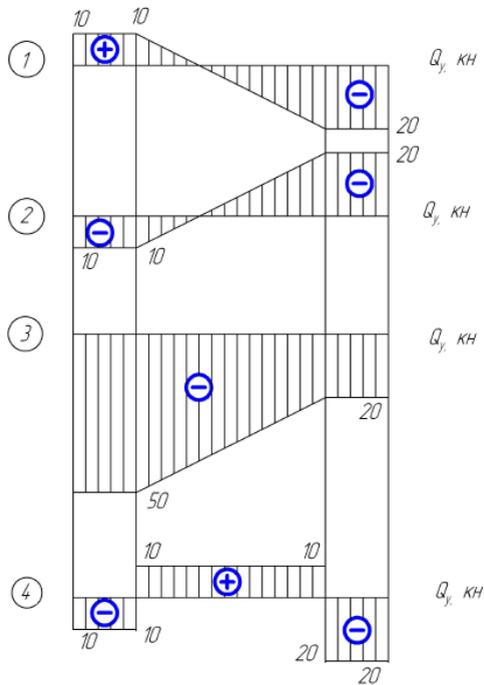
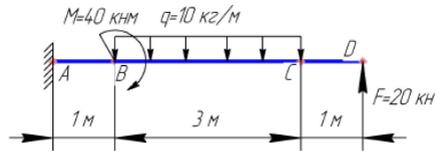
6. На каких участках данной балки будут прямолинейные зависимости на эпюре M_x ?

- 1) на участках АВ и CD
- 2) на участке BC
- 3) на всех участках
- 4) ни на одном участке

7. На каких участках данной балки будут параболические зависимости на эпюре M_x ?

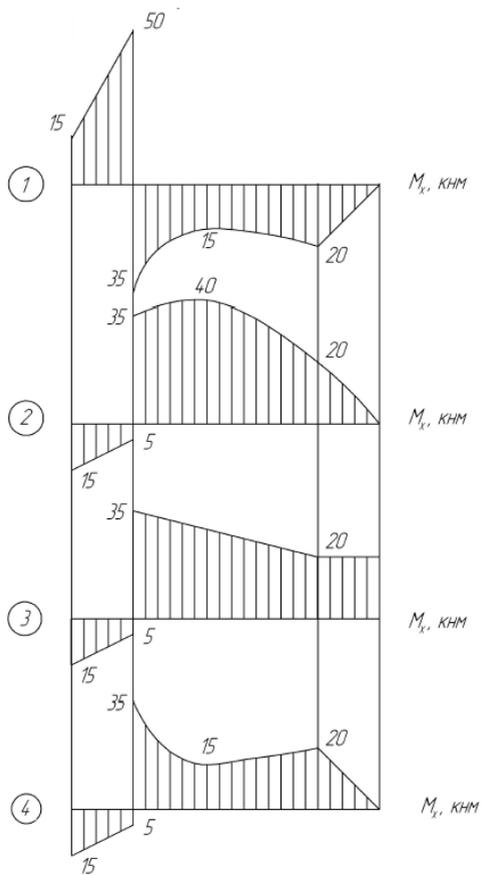
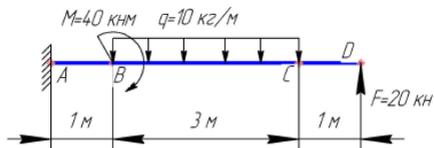
- 1) на участке BC
- 2) на участках АВ и CD
- 3) на всех участках
- 4) ни на одном участке

8. Для данной балки выберите верную эпюру Q_y



- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

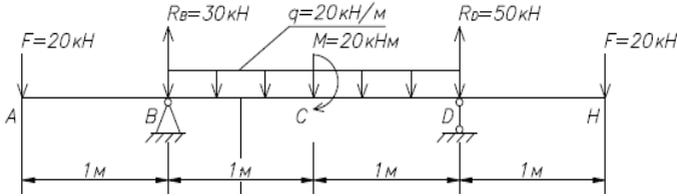
9. Для данной балки выберите верную эпюру M_x



- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

Вариант 2

Задана балка:



1. На какое количество участков надо поделить данную балку для построения эпюр Q_y и M_z ?

- 1) 3 участка
- 2) 2 участка
- 3) 4 участка
- 4) 5 участков

2. В каких сечениях данной балки будут скачки на эпюре Q_y ?

- 1) в сечениях B, C и D
- 2) в сечениях A, B, D и H
- 3) в сечениях A, B, C, D и H
- 4) скачков не будет ни в одном сечении

3. В каких сечениях данной балки будут скачки на эпюре M_x ?

- 1) скачков не будет ни в одном сечении
- 2) в сечениях C и B
- 3) в сечениях B и D
- 4) в сечении C

4. На каких участках данной балки будут прямые, параллельные базе, на эпюре Q_y ?

- 1) на участках AB и DH
- 2) на участке CB
- 3) на всех участках
- 4) ни на одном участке

5. На каких участках данной балки будут наклонные прямые на эпюре Q_y ?

- 1) на всех участках балки
- 2) на участках AB и DH

- 3) на участке BC и CD
- 4) ни на одном участке

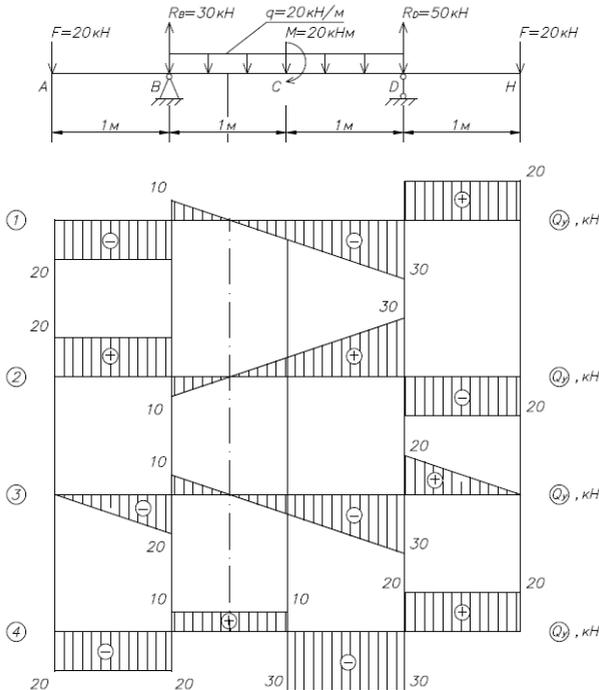
6. На каких участках балки будут прямолинейные зависимости на эпюре M_x ?

- 1) ни на одном участке
- 2) на участке BC
- 3) на всех участках
- 4) на участках AB и DH

7. На каких участках балки будут параболические зависимости на эпюре M_x ?

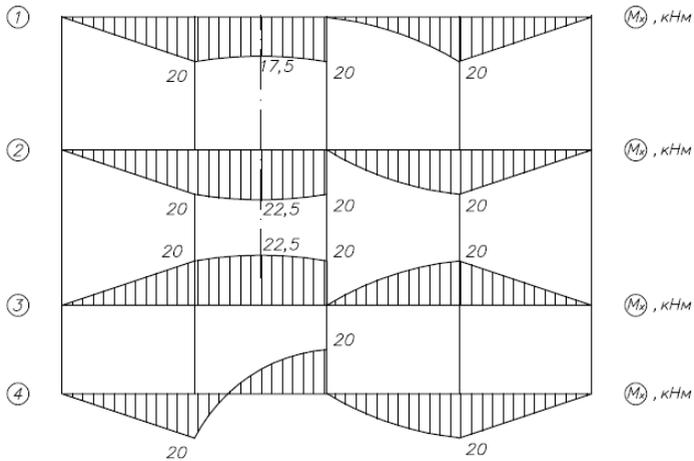
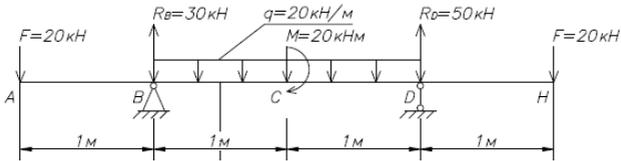
- 1) на участках AB и DH
- 2) на участках BC и CD
- 3) на всех участках
- 4) ни на одном участке

8. Для данной балки выберите верную эпюру Q_y



- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

9. Для данной балки выберите верную эпюру M_x .



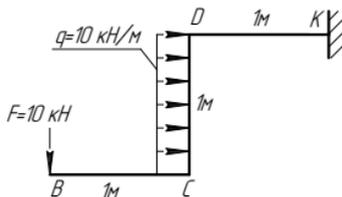
- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

Практическое занятие 3

Построение эпюр внутренних силовых факторов на плоских рамах

Вариант 1

Для данной консольной рамы, состоящей из трех стержней, определить



1. На какое количество участков необходимо разбить раму для построения эпюр ВСФ?

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

2. На каких участках рамы будет возникать внутренняя продольная сила N ?

- 1) BC
- 2) CD
- 3) DK
- 4) CD и DK
- 5) на всех стержнях

3. На каких участках рамы будет возникать внутренняя поперечная сила Q ?

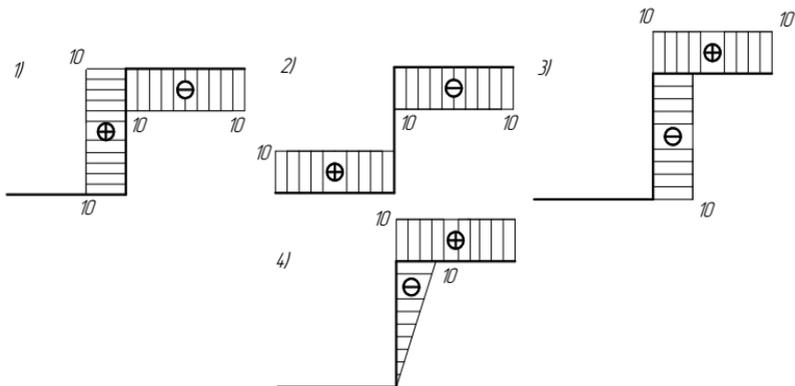
- 1) BC
- 2) CD
- 3) DK
- 4) на всех стержнях
- 5) отсутствует на всех стержнях

4. На каких участках рамы возникают и продольная, и поперечная силы?

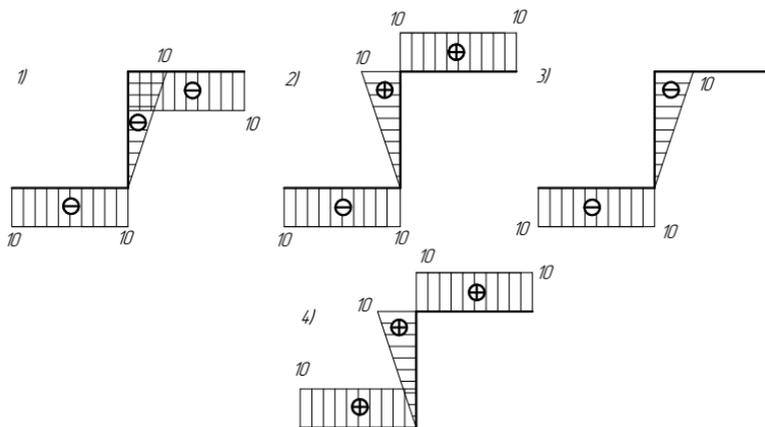
- 1) BC
- 2) CD

- 3) DK
- 4) CD и DK
- 5) на всех стержнях

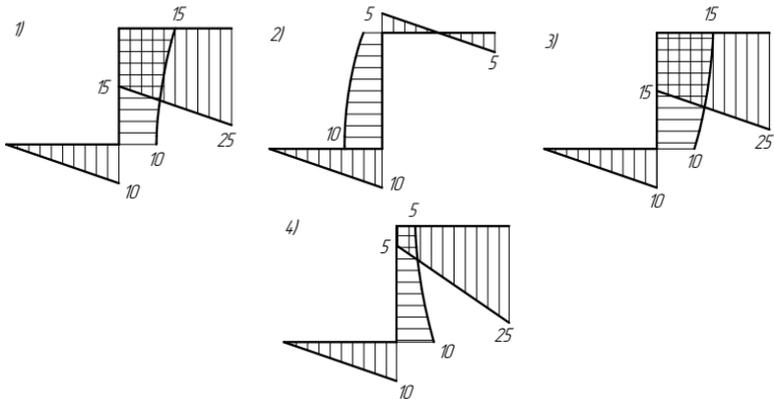
5. Выберите верную эпюру продольной силы для данной рамы



6. Выберите верную эпюру поперечной силы для данной рамы

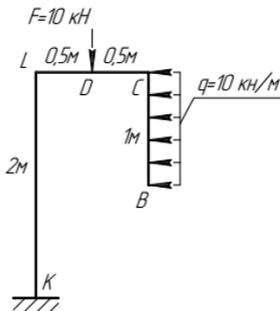


7. Выберите верную эпюру изгибающего момента для данной рамы



Вариант 2

Для данной консольной рамы, состоящей из трех стержней, определить



1. На какое количество участков необходимо разбить раму для построения эпюр ВСФ?

- 1) 3
- 2) 4
- 3) 5
- 4) 6

2. На каких участках рамы будет возникать внутренняя продольная сила N ?

- 1) BC
- 2) CD

- 3) DL
- 4) LK
- 5) CD, DL, LK

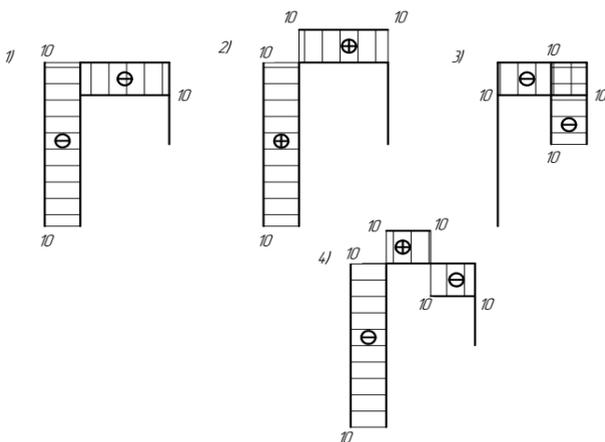
3. На каких стержнях рамы будет возникать внутренняя поперечная сила Q ?

- 1) BC
- 2) CD
- 3) DL
- 4) LK
- 5) BC, DL, LK

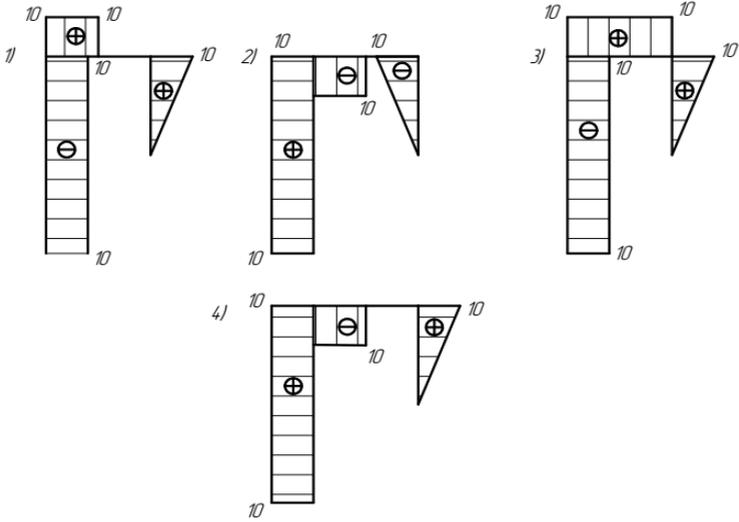
4. На каких стержнях рамы возникают и продольная, и поперечная силы?

- 1) DL, LK
- 2) DL, LK, CD
- 3) на всех участках
- 4) DL
- 5) LK

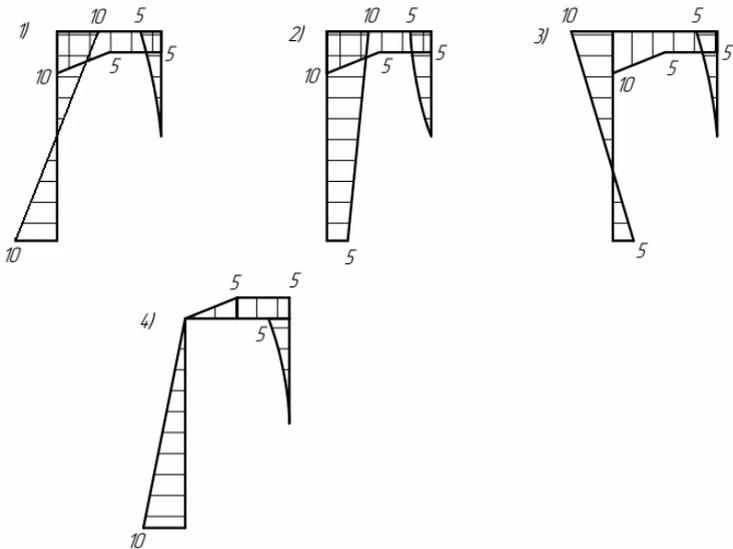
5. Выберите верную эпюру продольной силы для данной рамы



6. Выберите верную эпюру поперечной силы для данной рамы



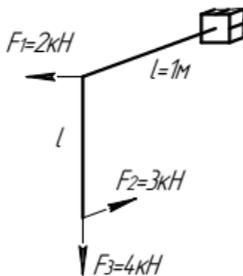
7. Выберите верную эпюру изгибающего момента



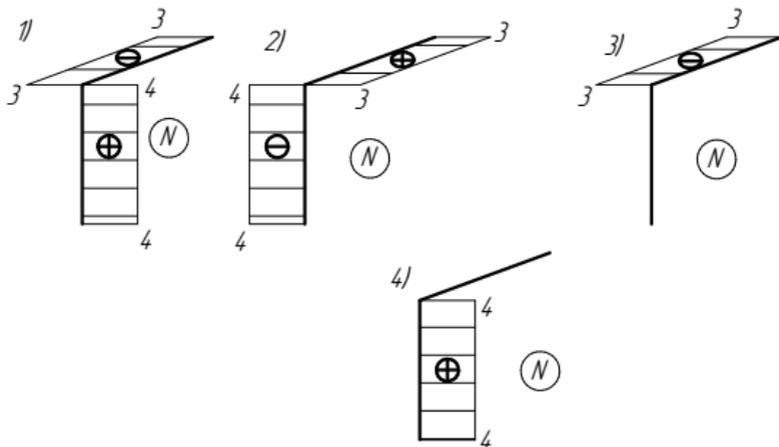
Практическое занятие 4
Построение эпюр внутренних силовых факторов
на пространственных стержневых конструкциях

Вариант 1

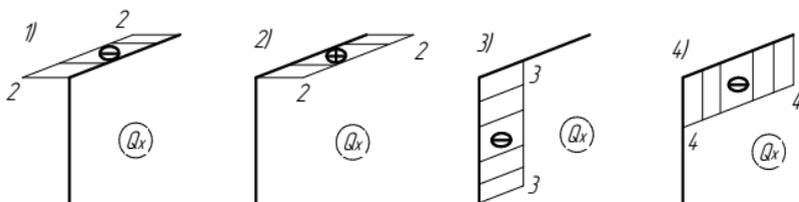
Для данной пространственной стержневой конструкции кон-
 сольного типа выбрать



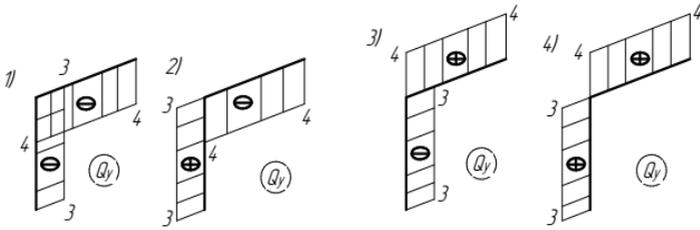
1. Верную эпюру продольной силы N



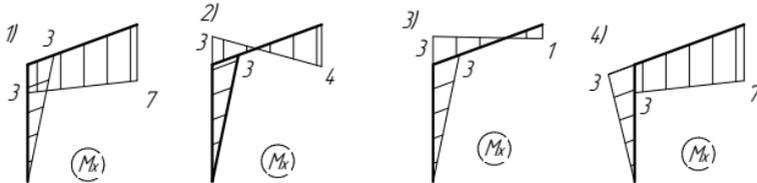
2. Верную эпюру поперечной силы Q_x



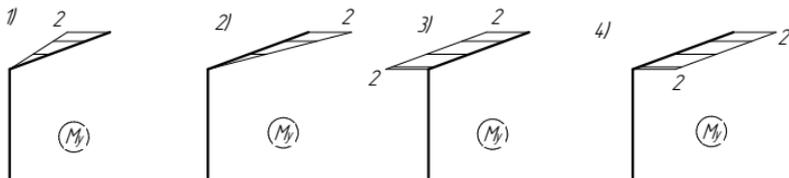
3. Верную эпюру поперечной силы Q_y



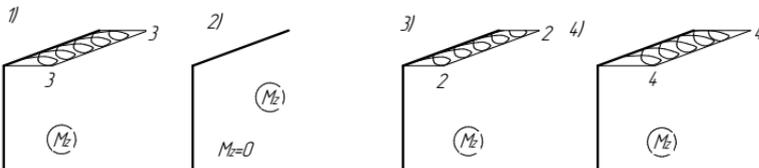
4. Верную эпюру изгибающего момента M_x



5. Верную эпюру изгибающего момента M_y

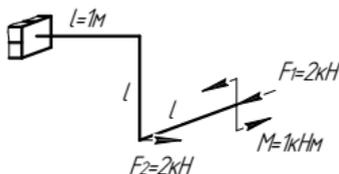


6. Верную эпюру крутящего момента M_z

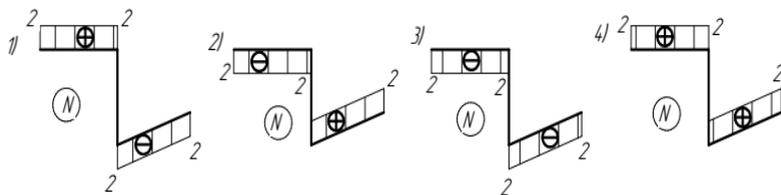


Вариант 2

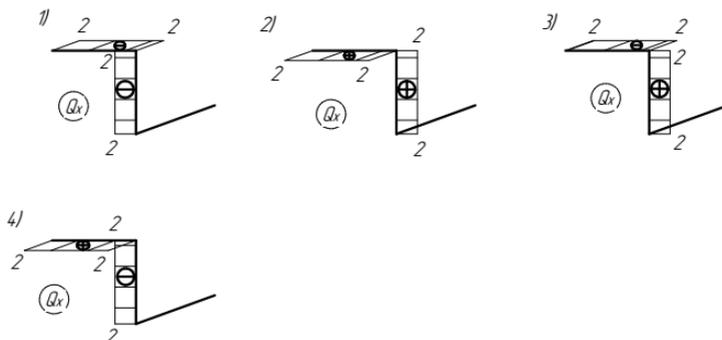
Для данной пространственной стержневой конструкции консольного типа выбрать



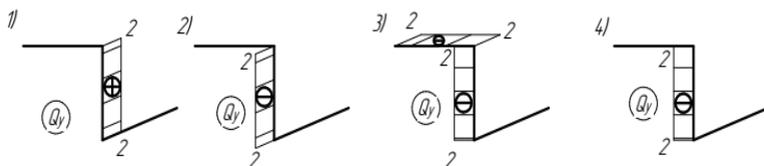
1. Верную эпюру продольной силы N



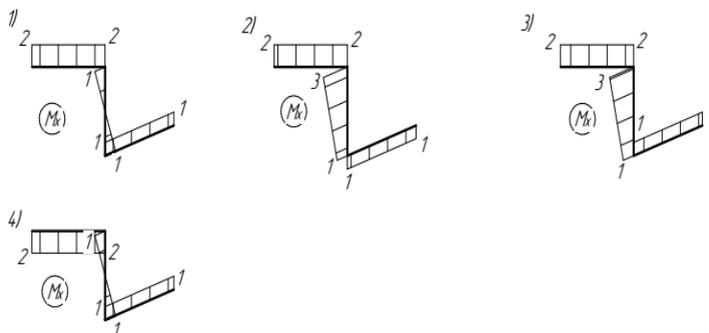
2. Верную эпюру поперечной силы Q_x



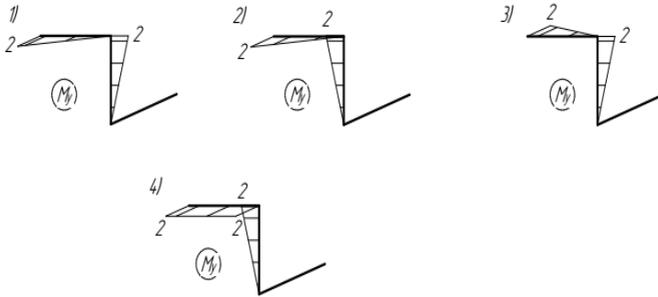
3. Верную эпюру поперечной силы Q_y



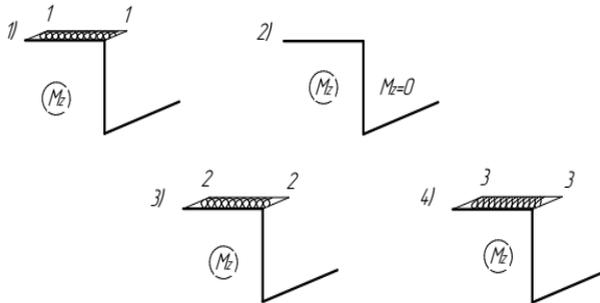
4. Верную эпюру изгибающего момента M_x



5. Верную эпюру изгибающего момента M_y



6. Верную эпюру крутящего момента M_z

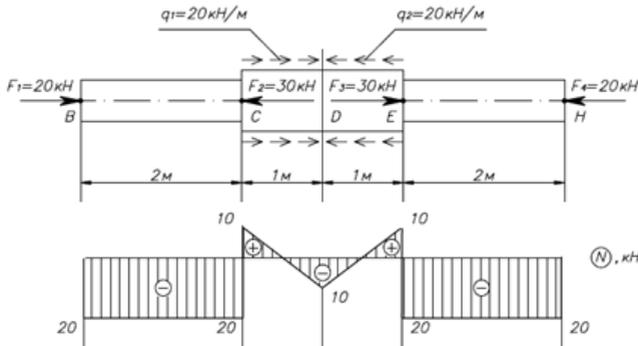


Практическое занятие 5

Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии

Вариант 1

Задан ступенчатый стержень круглого поперечного сечения с построенной эпюрой внутренней продольной силы N :



Площадь поперечного сечения участков BC и EH стержня равна 2 см^2 , а участков CD и DE – 4 см^2 . Материал стержня – Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ и модулем упругости первого рода $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

1. Определите, какое сечение данного стержня самое опасное.

- 1) все сечения участков BC и EH равноопасны
- 2) сечения C и E участков CD и DE
- 3) сечения C и E участков BC и EH
- 4) сечения C , D и E участков CD и DE

2. Чему равно максимальное по абсолютной величине напряжение, возникающее в сечениях данного стержня?

- 1) 25 МПа
- 2) 150 МПа
- 3) 50 МПа
- 4) 100 МПа

3. Чему равно минимальное напряжение в сечениях данного стержня?

- 1) 0
- 2) –25 МПа
- 3) 2,5 МПа
- 4) 25 МПа

4. Определите величину и направление перемещения сечения C данного стержня, приняв за неподвижное сечение B .

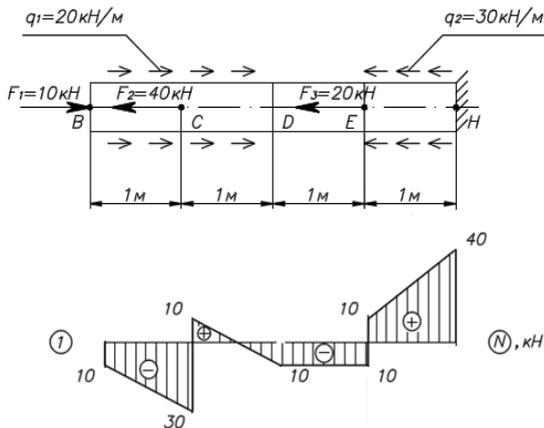
- 1) 0,5 мм к сечению B
- 2) 0,5 мм от сечения B
- 3) 1 мм к сечению B
- 4) 1 мм от сечения B

5. Определите минимальный диаметр данного стержня из условия прочности.

- 1) 16 мм
- 2) 13 мм
- 3) 18 мм
- 4) 20 мм

Вариант 2

Задан стержень круглого поперечного сечения с построенной эпюрой внутренней продольной силы N :



Площадь поперечного сечения всех участков стержня одинакова и равна 2 см^2 . Материал, из которого изготовлен стержень, — Ст3 с допустимым напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ и модулем упругости первого рода $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

1. Определите, какое сечение данного стержня самое опасное.

- 1) сечение E
- 2) сечение C
- 3) сечение H
- 4) сечение B

2. Чему равно максимальное по абсолютной величине напряжение, возникающее в сечениях данного стержня?

- 1) 200 МПа
- 2) 150 МПа
- 3) 50 МПа
- 4) 25 МПа

3. Чему равно минимальное напряжение, возникающее в сечениях данного стержня?

- 1) 50 МПа
- 2) -50 МПа

3) 0

4) -150 МПа

4. Определите величину и направление перемещения сечения E данного стержня, приняв за неподвижное сечение H .

1) 0,625 мм к сечению H

2) 0,625 мм от сечения H

3) 0,25 мм к сечению H

4) 0,25 мм от сечения H

5. Определите диаметр данного стержня из условия прочности.

1) 18 мм

2) 17 мм

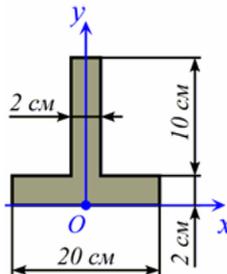
3) 20 мм

4) 15 мм

Практическое занятие 6
Определение главных центральных моментов инерции
составного сечения

Вариант 1

Задано сложное сечение, состоящее из двух прямоугольников:



Обозначим верхний прямоугольник № 1, а нижний № 2.

1. Чему равны координаты центров тяжести прямоугольников y_1 и y_2 в заданной системе координат xOy ?

1) $y_1 = 2$ см, $y_2 = 6$ см

2) $y_1 = 1$ см, $y_2 = 7$ см

3) $y_1 = -6$ см, $y_2 = 0$ см

4) $y_1 = 7$ см, $y_2 = 1$ см

2. Чему равны статические моменты первого и второго прямоугольников относительно оси x ?

1) $S_x^{(1)} = -50 \text{ см}^3$, $S_x^{(2)} = 100 \text{ см}^3$

2) $S_x^{(1)} = 40 \text{ см}^3$, $S_x^{(2)} = 120 \text{ см}^3$

3) $S_x^{(1)} = 140 \text{ см}^3$, $S_x^{(2)} = 40 \text{ см}^3$

4) $S_x^{(1)} = 70 \text{ см}^3$, $S_x^{(2)} = 10 \text{ см}^3$

3. Чему равна координата центра тяжести данного сложного сечения y_C в заданной системе координат xOy ?

1) $y_C = 4 \text{ см}$

2) $y_C = 3 \text{ см}$

3) $y_C = 5 \text{ см}$

4) $y_C = 2 \text{ см}$

4. Чему равны моменты инерции прямоугольников относительно собственных главных центральных осей x_1 и x_2 ?

1) $I_{x_1}^{(1)} = 33,33 \text{ см}^3$, $I_{x_2}^{(2)} = 13,33 \text{ см}^3$,

2) $I_{x_1}^{(1)} = 55,56 \text{ см}^3$, $I_{x_2}^{(2)} = 4,44 \text{ см}^3$,

3) $I_{x_1}^{(1)} = 6,67 \text{ см}^3$, $I_{x_2}^{(2)} = 1333,33 \text{ см}^3$,

4) $I_{x_1}^{(1)} = 166,67 \text{ см}^3$, $I_{x_2}^{(2)} = 13,33 \text{ см}^3$

5. Чему равны расстояния между центром тяжести всего сечения и центрами тяжести каждого прямоугольника b_1 и b_2 соответственно?

1) $b_1 = 4 \text{ см}^3$, $b_2 = 2 \text{ см}^3$

2) $b_1 = 3 \text{ см}^3$, $b_2 = 3 \text{ см}^3$

3) $b_1 = 2 \text{ см}^3$, $b_2 = 4 \text{ см}^3$

4) $b_1 = 5 \text{ см}^3$, $b_2 = 1 \text{ см}^3$

6. Чему равны главные центральные моменты инерции сложного сечения?

1) $I_x = 660 \text{ см}^4$, $I_y = 1340 \text{ см}^4$

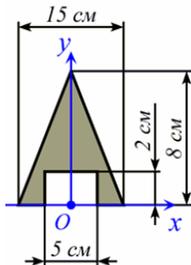
2) $I_x = 840 \text{ см}^4$, $I_y = 1160 \text{ см}^4$

3) $I_x = 1280 \text{ см}^4$, $I_y = 960 \text{ см}^4$

4) $I_x = 1060 \text{ см}^4$, $I_y = 740 \text{ см}^4$

Вариант 2

Задано сложное сечение, состоящее из треугольника и прямоугольной выемки.



Обозначим треугольник простейшей фигурой № 1, а прямоугольник № 2.

1. Чему равны координаты центров тяжести треугольника y_1 и прямоугольника y_2 в заданной системе координат xOy ?

- 1) $y_1 = 8/3$ см, $y_2 = 1$ см
- 2) $y_1 = 4$ см, $y_2 = 1$ см
- 3) $y_1 = -3$ см, $y_2 = 0$ см
- 4) $y_1 = 16/3$ см, $y_2 = 2$ см

2. Чему равны статические моменты треугольника и прямоугольника относительно оси x ?

- 1) $S_x^{(1)} = -180$ см³, $S_x^{(2)} = 0$ см³
- 2) $S_x^{(1)} = 240$ см³, $S_x^{(2)} = 10$ см³
- 3) $S_x^{(1)} = 160$ см³, $S_x^{(2)} = 10$ см³
- 4) $S_x^{(1)} = 320$ см³, $S_x^{(2)} = 20$ см³

3. Чему равна координата центра тяжести данного сложного сечения y_C в заданной системе координат xOy ?

- 1) $y_C = 4$ см
- 2) $y_C = 3$ см
- 3) $y_C = 5$ см
- 4) $y_C = 2$ см

4. Чему равны моменты инерции треугольника и прямоугольника относительно собственных главных центральных осей x_1 и x_2 ?

- 1) $I_{x_1}^{(1)} = 213,33$ см⁴, $I_{x_2}^{(2)} = 3,33$ см⁴,
- 2) $I_{x_1}^{(1)} = 55,56$ см⁴, $I_{x_2}^{(2)} = 4,44$ см⁴,

- 3) $I_{x_1}^{(1)} = 6,67 \text{ см}^3$, $I_{x_2}^{(2)} = 333,33 \text{ см}^3$,
 4) $I_{x_1}^{(1)} = 166,67 \text{ см}^3$, $I_{x_2}^{(2)} = 13,33 \text{ см}^3$

5. Чему равны расстояния между центром тяжести всего сечения и центрами тяжести каждого прямоугольника b_1 и b_2 соответственно?

- 1) $b_1 = 7/3 \text{ см}^3$, $b_2 = 4 \text{ см}^3$
 2) $b_1 = 4/3 \text{ см}^3$, $b_2 = 3 \text{ см}^3$
 3) $b_1 = 1/3 \text{ см}^3$, $b_2 = 2 \text{ см}^3$
 4) $b_1 = 5 \text{ см}^3$, $b_2 = 1 \text{ см}^3$

6. Чему равны главные центральные моменты инерции сложного сечения?

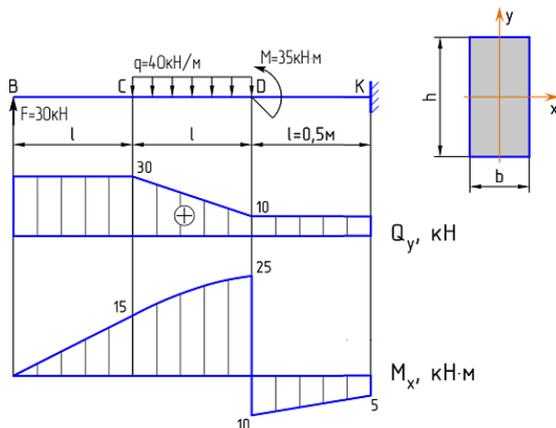
- 1) $I_x = 660 \text{ см}^4$, $I_y = 1340 \text{ см}^4$
 2) $I_x = 263,33 \text{ см}^4$, $I_y = 583,33 \text{ см}^4$
 3) $I_x = 1280 \text{ см}^4$, $I_y = 960 \text{ см}^4$
 4) $I_x = 846,67 \text{ см}^4$, $I_y = 537,33 \text{ см}^4$

Практическое занятие 7

Расчет на прочность балок при прямом изгибе

Вариант 1

Балка с жестким защемлением, изготовленная из пластичного материала с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, нагружена известной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов. Поперечное сечение балки прямоугольное со сторонами $b = 5 \text{ см}$ и $h = 15 \text{ см}$. Эпюры внутренних поперечных сил и изгибающих моментов построены.



1. Какое сечение балки является наиболее опасным?

- 1) В
- 2) С
- 3) D
- 4) К

2. Где в опасном сечении расположена зона сжатых волокон относительно нейтральной линии?

- 1) выше нейтральной линии
- 2) ниже нейтральной линии

3. Где расположены опасные точки в опасном сечении?

- 1) на верхней и нижней сторонах прямоугольника
- 2) левой и правой сторонах прямоугольника
- 3) нейтральной линии
- 4) диагоналях прямоугольника

4. Чему равно расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения?

- 1) $y_{\max} = 2,5 \text{ см}$
- 2) $y_{\max} = 5 \text{ см}$
- 3) $y_{\max} = 7,5 \text{ см}$
- 4) $y_{\max} = 15 \text{ см}$

5. Чему равен осевой момент сопротивления W_x прямоугольного сечения балки?

- 1) $W_x = 236,25 \text{ см}^3$
- 2) $W_x = 62,5 \text{ см}^3$
- 3) $W_x = 128,5 \text{ см}^3$
- 4) $W_x = 187,5 \text{ см}^3$

6. Чему равна величина максимального нормального напряжения в опасных точках опасного сечения?

- 1) $\sigma_{\max} = 120 \text{ МПа}$
- 2) $\sigma_{\max} = 133 \text{ МПа}$
- 3) $\sigma_{\max} = 187 \text{ МПа}$
- 4) $\sigma_{\max} = 225 \text{ МПа}$

7. Выполняется ли условие прочности для заданной балки?

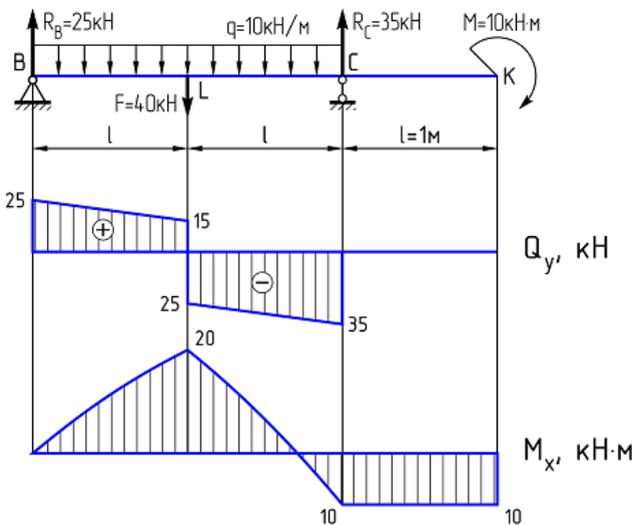
- 1) выполняется
- 2) не выполняется

8. Чему равно минимально допустимое значение стороны прямоугольника $[b]$, при котором выполняется условие прочности, если $h/b = 3$?

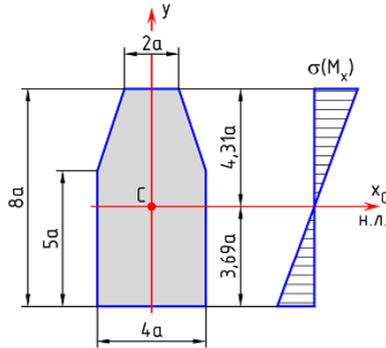
- 1) $[b] = 6,5$ см
- 2) $[b] = 5,8$ см
- 3) $[b] = 4,7$ см
- 4) $[b] = 3,2$ см

Вариант 2

Балка на двух шарнирных опорах, изготовленная из хрупкого материала с допускаемыми напряжениями $[\sigma]_p = 100$ МПа и $[\sigma]_c = 200$ МПа, нагружена известной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов. Эпюры внутренних поперечных сил и изгибающих моментов построены.



Поперечное сечение балки сложное, размеры его заданы в долях параметра a . Положение центра тяжести C определено, x_C – нейтральная линия сечения. Момент инерции сечения $I_{x_C} = 139,4a^4$.



1. Какое сечение балки является наиболее опасным?

- 1) B
- 2) L
- 3) C
- 4) K

2. Где в опасном сечении расположена зона сжатых волокон относительно нейтральной линии?

- 1) выше нейтральной линии
- 2) ниже нейтральной линии

3. Рационально ли расположено сечение или его нужно повернуть на 180° ?

- 1) сечение расположено рационально
- 2) сечение расположено нерационально, его нужно повернуть на 180°

4. Какое волокно является наиболее опасным при рациональном расположении сечения?

- 1) растянутое волокно
- 2) сжатое волокно

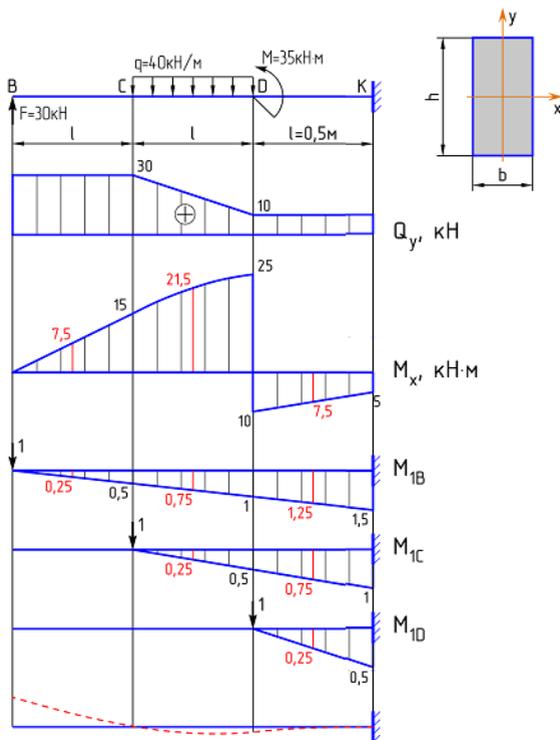
5. Чему равен из условия прочности характерный размер сечения $[a]$?

- 1) $[a] = 1,2$ см
- 2) $[a] = 0,9$ см
- 3) $[a] = 1,7$ см
- 4) $[a] = 2,3$ см

Практическое занятие 8
Расчет на жесткость балок при прямом изгибе

Вариант 1

Балка с жестким защемлением нагружена известной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов. Поперечное сечение балки прямоугольное со сторонами $b = 5$ см и $h = 15$ см. Рассчитать балку на жесткость, используя предоставленный графический материал. Принять: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\delta] = 0,001 \cdot L$ (где L – полная длина балки).



1. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении B ?

- 1) $k = 1$
- 2) $k = 2$
- 3) $k = 3$
- 4) $k = 4$

2. Чему равно перемещение сечения B ?

- 1) $\delta_B = 0$
- 2) $\delta_B = 0,9$ мм (вниз)
- 3) $\delta_B = 1,7$ мм (вверх)
- 4) $\delta_B = 2,5$ мм (вниз)

3. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении C ?

- 1) $k = 1$
- 2) $k = 2$
- 3) $k = 3$
- 4) $k = 4$

4. Чему равно перемещение сечения C ?

- 1) $\delta_C = 0$
- 2) $\delta_C = 0,6$ мм (вниз)
- 3) $\delta_C = 0,1$ мм (вниз)
- 4) $\delta_C = 1,2$ мм (вниз)

5. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении D ?

- 1) $k = 1$
- 2) $k = 2$
- 3) $k = 3$
- 4) $k = 4$

6. Чему равно перемещение сечения D ?

- 1) $\delta_D = 0$
- 2) $\delta_D = 1,2$ мм (вверх)
- 3) $\delta_D = 0,3$ мм (вниз)
- 4) $\delta_D = 0,5$ мм (вниз)

7. Чему равно перемещение сечения K ?

- 1) $\delta_K = 0$
- 2) $\delta_K = 0,4$ мм (вниз)
- 3) $\delta_K = 0,6$ мм (вверх)
- 4) $\delta_K = 0,1$ мм (вверх)

8. Какое сечение балки имеет наибольшее перемещение?

- 1) K
- 2) D
- 3) C
- 4) B

9. Чему равен наибольший прогиб балки?

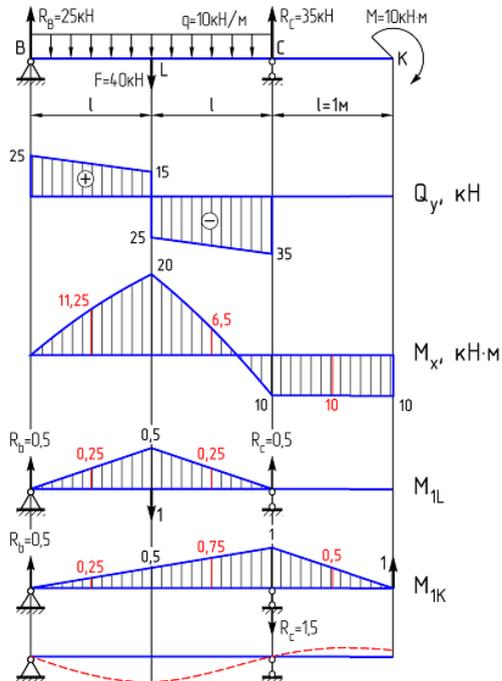
- 1) $\delta_{\max} = 3,5 \text{ мм}$
- 2) $\delta_{\max} = 2,2 \text{ мм}$
- 3) $\delta_{\max} = 1,7 \text{ мм}$
- 4) $\delta_{\max} = 0,9 \text{ мм}$

10. Выполняется ли условие жесткости?

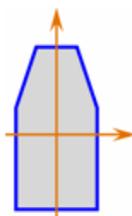
- 1) выполняется
- 2) не выполняется

Вариант 2

Балка на двух шарнирных опорах нагружена известной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов.



Поперечное сечение балки сложное, момент инерции сечения $I_{xc} = 1165 \text{ см}^4$.



Рассчитать балку на жесткость, используя предоставленный графический материал. Принять: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\delta] = 0,001 \cdot BC$ (где BC – расстояние между опорами).

1. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении L ?

- 1) $k = 1$
- 2) $k = 2$
- 3) $k = 3$
- 4) $k = 4$

2. Чему равно перемещение сечения L ?

- 1) $\delta_L = 0$
- 2) $\delta_L = 0,9 \text{ мм}$ (вниз)
- 3) $\delta_L = 1,7 \text{ мм}$ (вверх)
- 4) $\delta_L = 2,7 \text{ мм}$ (вниз)

3. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении K ?

- 1) $k = 1$
- 2) $k = 2$
- 3) $k = 3$
- 4) $k = 4$

4. Чему равно перемещение сечения K ?

- 1) $\delta_K = 0$
- 2) $\delta_K = 0,6 \text{ мм}$ (вниз)
- 3) $\delta_K = 0,7 \text{ мм}$ (вверх)
- 4) $\delta_K = 1,2 \text{ мм}$ (вниз)

5. Чему равно перемещение сечения B ?

- 1) $\delta_B = 0$
- 2) $\delta_B = 1,2$ мм (вверх)
- 3) $\delta_B = 0,3$ мм (вниз)
- 4) $\delta_B = 0,5$ мм (вниз)

6. Чему равно перемещение сечения C ?

- 1) $\delta_C = 0,4$ мм (вниз)
- 2) $\delta_C = 0$
- 3) $\delta_C = 0,6$ мм (вверх)
- 4) $\delta_C = 0,1$ мм (вверх)

7. Какое сечение балки имеет наибольшее перемещение?

- 1) K
- 2) L
- 3) C
- 4) B

8. Чему равен наибольший прогиб балки?

- 1) $\delta_{\max} = 3,5$ мм
- 2) $\delta_{\max} = 2,7$ мм
- 3) $\delta_{\max} = 1,7$ мм
- 4) $\delta_{\max} = 0,9$ мм

9. Выполняется ли условие жесткости?

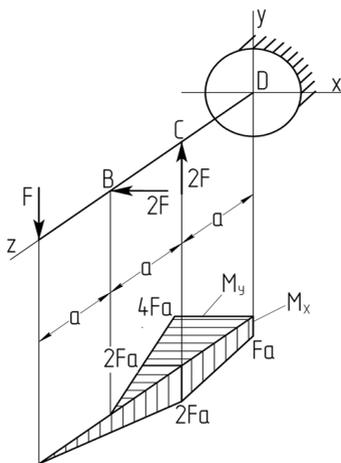
- 1) выполняется
- 2) не выполняется

Практическое занятие 9

Расчет на прочность и жесткость при совместном действии двух прямых изгибов

Вариант 1

Для данного консольного стержня, нагруженного сосредоточенными силами в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, решить следующие задачи:

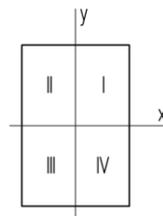


1. Определить положение опасного сечения на данной балке для случая круглого профиля.

- 1) «B»
- 2) «C»
- 3) «D»
- 4) сечения «C» и «D» равноопасны

2. Через какие четверти прямоугольного сечения «D» проходит силовая линия?

- 1) I и III
- 2) II и IV
- 3) I и IV
- 4) II и III

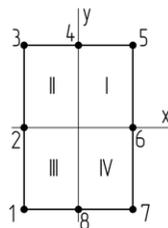


3. Через какие четверти прямоугольного сечения «D» проходит нейтральная линия?

- 1) I и III
- 2) II и IV
- 3) I и IV
- 4) II и III

4. Какие точки прямоугольного сечения «D» опасны?

- 1) 1 и 5
- 2) 3 и 7
- 3) 2 и 6
- 4) 4 и 8



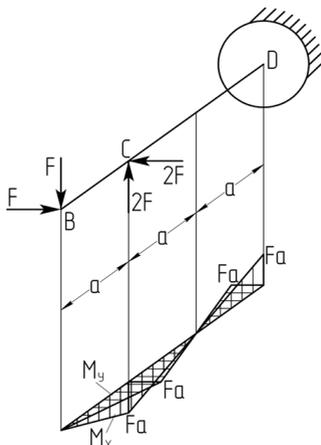
5. Какое из выражений для напряжения, возникающего в точке «1» прямоугольного сечения «D», верно?

- 1) $\sigma_{(1)} = \frac{M_X^{\max}}{W_X} + \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 2) $\sigma_{(1)} = -\frac{M_X^{\max}}{W_X} - \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 3) $\sigma_{(1)} = -\frac{M_X^{\max}}{W_X} + \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 4) $\sigma_{(1)} = \frac{M_X^{\max}}{W_X} - \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$

6. Для случая круглого поперечного сечения данного стержня диаметром d какое из приведенных условий прочности верно?

- 1) $\frac{5 \cdot Fa \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 2) $\frac{5 \cdot Fa \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 3) $\frac{4,123 \cdot Fa \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 4) $\frac{4,123 \cdot Fa \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$

Вариант 2



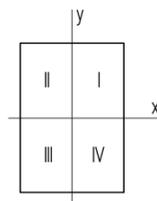
Для данного консольного стержня, нагруженного сосредоточенными силами в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, решить следующие задачи.

1. Определить, какое из сечений стержня наиболее опасно?

- 1) «В»
- 2) «С»
- 3) «D»
- 4) сечения «С» и «D» равноопасны

2. Через какие четверти прямоугольного сечения «D» проходит силовая линия?

- 1) I и III
- 2) II и IV
- 3) I и IV
- 4) II и III



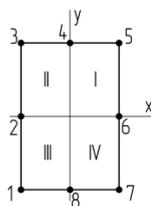
3. Через какие четверти прямоугольного сечения «D» проходит нейтральная линия?

- 1) I и III
- 2) II и IV
- 3) I и IV
- 4) II и III

4. Какие точки прямоугольного сечения «D»

опасны?

- 1) 1 и 5
- 2) 3 и 7
- 3) 2 и 6
- 4) 4 и 8



5. Какое из выражений для напряжения, возникающего в точке «1» прямоугольного сечения «С», верно?

- 1) $\sigma_{(1)} = -\frac{M_X^{\max}}{W_X} - \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 2) $\sigma_{(1)} = \frac{M_X^{\max}}{W_X} + \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 3) $\sigma_{(1)} = -\frac{M_X^{\max}}{W_X} + \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$
- 4) $\sigma_{(1)} = \frac{M_X^{\max}}{W_X} - \frac{M_Y^{\max}}{W_Y}$

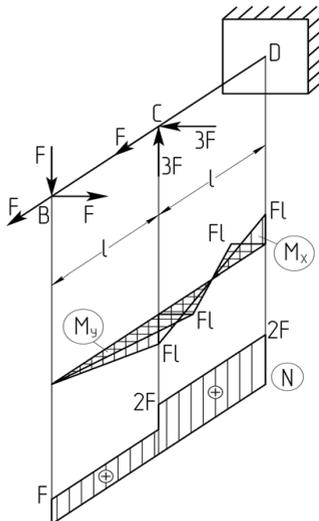
6. Для случая круглого поперечного сечения данного стержня диаметром d какое из приведенных условий прочности верно?

- 1) $\frac{2 \cdot Fa \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 2) $\frac{\sqrt{2} \cdot Fa \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 3) $\frac{\sqrt{2} \cdot Fa \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$
- 4) $\frac{2 \cdot Fa \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$

Практическое занятие 10
Расчет на прочность при совместном действии изгиба
и растяжения-сжатия

Вариант 1

Для данной консольной балки, нагруженной продольной силой и сосредоточенными поперечными силами в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, решить следующие задачи.

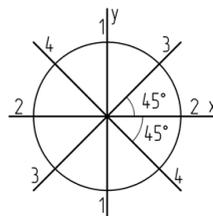


1. Какое сечение данной балки является опасным?

- 1) сечение «С» участка BC
- 2) сечение «С» участка CD
- 3) сечение «D» участка CD
- 4) сечения «С» и «D» участка CD равноопасны

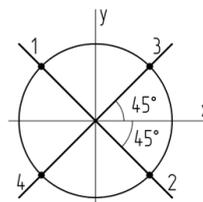
2. Для данной балки определите положение силовой линии в плоскости круглого поперечного сечения «С» участка CD.

- 1) 1–1
- 2) 2–2
- 3) 3–3
- 4) 4–4



3. Определите положение опасной точки в плоскости круглого сечения «С» участка CD данной балки.

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»



3) точка «3»

4) точка «4»

4. Выберите выражение для определения σ_{\max} , возникающего в опасной точке круглого сечения «С» участка CD данной балки.

1) $\sigma_{\max} = \frac{64 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

2) $\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot \sqrt{2} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

3) $\sigma_{\max} = -\frac{32 \cdot \sqrt{2} \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} - \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

4) $\sigma_{\max} = \frac{64 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

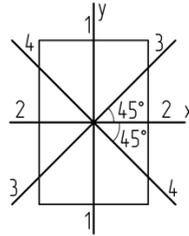
5. Определите положение силовой линии в плоскости прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки.

1) 1–1

2) 2–2

3) 3–3

4) 4–4



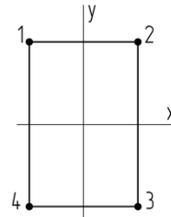
6. Определите положение опасной точки в плоскости прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки.

1) точка «1»

2) точка «2»

3) точка «3»

4) точка «4»



7. Выберите выражение для σ_{\max} , возникающего в опасной точке прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки при соотношении сторон прямоугольника $h/b = 2$.

1) $\sigma_{\max} = \frac{4,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}$

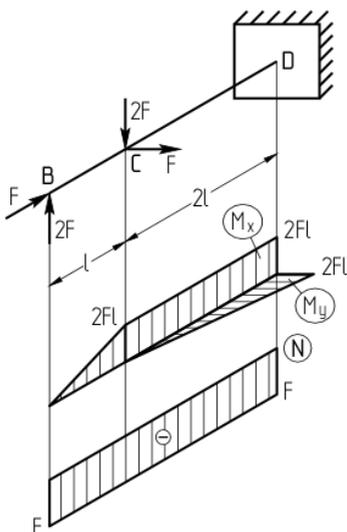
2) $\sigma_{\max} = -\frac{4,5 \cdot Fl}{b^3} - \frac{F}{b^2}$

$$3) \sigma_{\max} = \frac{6 \cdot Fl}{b^3} + \frac{0,5 \cdot F}{b^2}$$

$$4) \sigma_{\max} = \frac{2 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}$$

Вариант 2

Для данной консольной балки, нагруженной продольной силой и сосредоточенными поперечными силами в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, решить следующие задачи.

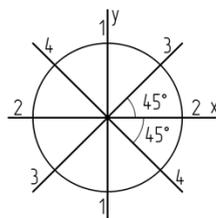


1. Какое сечение данной балки является опасным?

- 1) сечение «С» участка BC
- 2) сечение «С» участка CD
- 3) сечение «D» участка CD
- 4) сечения «С» и «D» участка CD равноопасны

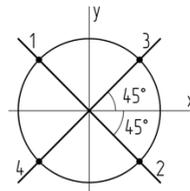
2. Для данной балки определите положение силовой линии в плоскости круглого поперечного сечения «С» участка CD.

- 1) 1–1
- 2) 2–2
- 3) 3–3
- 4) 4–4



3. Определите положение опасной точки в плоскости круглого сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»
- 3) точка «3»
- 4) точка «4»

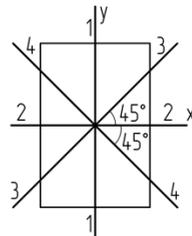


4. Выберите выражение для определения σ_{\max} , возникающего в опасной точке круглого сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) $\sigma_{\max} = \frac{64 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 2) $\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot 2\sqrt{2}Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 3) $\sigma_{\max} = -\frac{32 \cdot 2\sqrt{2}Fl}{\pi \cdot d^3} - \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$
- 4) $\sigma_{\max} = \frac{64 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3} + \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

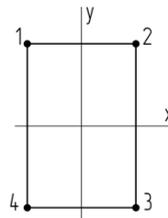
5. Определите положение силовой линии в плоскости прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) 1–1
- 2) 2–2
- 3) 3–3
- 4) 4–4



6. Определите положение опасной точки в плоскости прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки.

- 1) точка «1»
- 2) точка «2»
- 3) точка «3»
- 4) точка «4»



7. Выберите выражение для σ_{\max} , возникающего в опасной точке прямоугольного сечения «D» участка CD данной балки, при соотношении сторон прямоугольника $h/b = 2$.

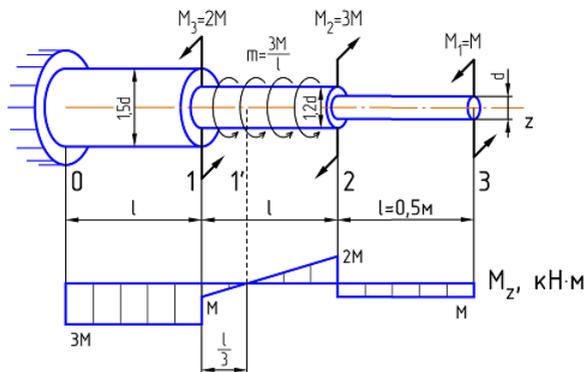
- 1) $\sigma_{\max} = \frac{4,5 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}$
- 2) $\sigma_{\max} = -\frac{9 \cdot Fl}{b^3} - \frac{0,5 \cdot F}{b^2}$
- 3) $\sigma_{\max} = \frac{6 \cdot Fl}{b^3} + \frac{0,5 \cdot F}{b^2}$
- 4) $\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot Fl}{b^3} + \frac{F}{b^2}$

Практическое занятие 11

Расчет на прочность и жесткость при кручении вала круглого поперечного сечения

Вариант 1

Ступенчатый вал круглого поперечного сечения, изготовленный из малоуглеродистой стали Ст3, нагружен системой внешних крутящих моментов, заданных в долях параметра M . Эпюра крутящих моментов для данного вала также построена в долях параметра M . Известно: $d = 20$ мм, $[\tau] = 100$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $[\varphi] = 1^\circ$.



1. Чему равно касательное напряжение на участке (2–3) в долях параметра M ?

- 1) $\tau_{(2-3)} = 1,25 M$ (МПа)
- 2) $\tau_{(2-3)} = 0,46 M$ (МПа)
- 3) $\tau_{(2-3)} = 0,64 M$ (МПа)
- 4) $\tau_{(2-3)} = 2,84 M$ (МПа)

2. Чему равно максимальное по абсолютной величине напряжение вала в долях параметра M ?

1) $|\tau_{\max}| = 0,58 M$ (МПа)

2) $|\tau_{\max}| = 0,74 M$ (МПа)

3) $|\tau_{\max}| = 1,43 M$ (МПа)

4) $|\tau_{\max}| = 2,98 M$ (МПа)

3. Какое сечение или участок вала является наиболее опасным?

1) участок (0–1)

2) сечение (1) участка (1–2)

3) сечение (2) участка (1–2)

4) участок (2–3)

4. Чему равна величина максимально допустимого параметра M , найденного из условия прочности?

1) $[M] = 136$ Нм

2) $[M] = 94$ Нм

3) $[M] = 182$ Нм

4) $[M] = 210$ Нм

5. Чему равен абсолютный угол закручивания участка (0–1), если $M = 100$ Нм?

1) $\varphi_{(0-1)} = -0,8^\circ$

2) $\varphi_{(0-1)} = 0,4^\circ$

3) $\varphi_{(0-1)} = -1,6^\circ$

4) $\varphi_{(0-1)} = 1,2^\circ$

6. Чему равен угол закручивания сечения (2) относительно жесткой заделки, если $M = 100$ Нм?

1) $\varphi_2 = -2,7^\circ$

2) $\varphi_2 = 6,4^\circ$

3) $\varphi_2 = 4,1^\circ$

4) $\varphi_2 = -1,3^\circ$

7. Чему равен максимальный по абсолютной величине угол закручивания вала относительно жесткой заделки (при $M = 100$ Нм)?

1) $|\varphi_{\max}| = 9,9^\circ$

2) $|\varphi_{\max}| = 12,6^\circ$

3) $|\varphi_{\max}| = 6,8^\circ$

4) $|\varphi_{\max}| = 4,3^\circ$

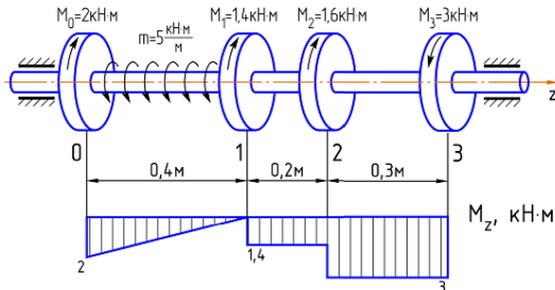
8. Выполняется ли условие жесткости по абсолютному углу закручивания?

1) выполняется

2) не выполняется

Вариант 2

Вал постоянного круглого поперечного сечения, изготовленный из малоуглеродистой стали Ст3, нагружен системой внешних самоуравновешенных крутящих моментов. Эпюра внутренних крутящих моментов M_z для данного вала построена. Известно: $d = 50$ мм, $[\tau] = 100$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $[\varphi] = 1^\circ$.



1. Чему равен полярный момент сопротивления круглого сечения вала?

1) $W_p = 85,7 \text{ см}^3$

2) $W_p = 24,5 \text{ см}^3$

3) $W_p = 56,9 \text{ см}^3$

4) $W_p = 12,2 \text{ см}^3$

2. Чему равно касательное напряжение в сечении (0)?

1) $\tau_0 = 119,7 \text{ МПа}$

2) $\tau_0 = -57,1 \text{ МПа}$

3) $\tau_0 = 34,2 \text{ МПа}$

4) $\tau_0 = -81,5 \text{ МПа}$

3. Чему равно касательное напряжение на участке (1–2)?

- 1) $\tau_{(1-2)} = -57$ МПа
- 2) $\tau_{(1-2)} = 82$ МПа
- 3) $\tau_{(1-2)} = -39$ МПа
- 4) $\tau_{(1-2)} = -69$ МПа

4. Чему равно максимальное по абсолютной величине напряжение вала?

- 1) $|\tau_{\max}| = 76,5$ МПа
- 2) $|\tau_{\max}| = 137,3$ МПа
- 3) $|\tau_{\max}| = 95,8$ МПа
- 4) $|\tau_{\max}| = 122,2$ МПа

5. Выполняется ли условие прочности?

- 1) выполняется
- 2) не выполняется

6. Чему равен абсолютный угол закручивания участка (0–1)?

- 1) $\varphi_{(0-1)} = -0,47^\circ$
- 2) $\varphi_{(0-1)} = -0,32^\circ$
- 3) $\varphi_{(0-1)} = 0,18^\circ$
- 4) $\varphi_{(0-1)} = -0,65^\circ$

7. Чему равен максимальный по абсолютной величине угол закручивания относительно сечения (0)?

- 1) $|\varphi_{\max}| = 0,85^\circ$
- 2) $|\varphi_{\max}| = 1,85^\circ$
- 3) $|\varphi_{\max}| = 1,43^\circ$
- 4) $|\varphi_{\max}| = 0,69^\circ$

8. Выполняется ли условие жесткости по абсолютному углу закручивания?

- 1) выполняется
- 2) не выполняется

Ответы к тестам

№ вопроса		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ПЗ 1	Вар. 1.1	2	1	1	3	1	–	–	–	–	–
	Вар. 1.2	2	1	5	4	1	–	–	–	–	–
	Вар.2.1	4	3	2	4	1	–	–	–	–	–
	Вар. 2.2	3	5	5	2	1	–	–	–	–	–
ПЗ 2	Вар. 1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	–
	Вар. 2	3	2	4	1	3	4	2	1	1	–
ПЗ 3	Вар. 1	3	4	4	4	1	1	1	–	–	–
	Вар. 2	2	5	5	1	1	1	1	–	–	–
ПЗ 4	Вар. 1	1	2	1	1	1	2	–	–	–	–
	Вар. 2	1	4	1	1	1	1	–	–	–	–
ПЗ 5	Вар. 1	1	4	2	3	2	–	–	–	–	–
	Вар. 2	3	1	4	2	1	–	–	–	–	–
ПЗ 6	Вар. 1	4	3	2	4	1	1	–	–	–	–
	Вар. 2	1	3	2	1	3	2	–	–	–	–
ПЗ 7	Вар. 1	3	1	1	3	4	2	1	3	–	–
	Вар. 2	2	1	1	1	3	–	–	–	–	–
ПЗ 8	Вар. 1	3	3	2	3	1	3	1	4	3	2
	Вар.2	2	4	3	3	1	2	2	2	2	–
ПЗ 9	Вар. 1	3	1	2	1	2	4	–	–	–	–
	Вар. 2	4	2	1	2	3	2	–	–	–	–
ПЗ 10	Вар. 1	4	4	1	2	4	3	1	–	–	–
	Вар. 2	3	1	3	3	3	2	2	–	–	–
ПЗ 11	Вар. 1	3	2	1	1	3	4	1	2	–	–
	Вар. 2	2	4	1	4	2	1	2	2	–	–

Задания для выполнения расчетно-проектировочных работ (РПР)**Правила оформления и выполнения РПР**

По дисциплине «Сопrotивление материалов» для студентов очной формы обучения учебным планом предусмотрено выполнение трех расчетно-проектировочных работ, содержание которых изложено в данном приложении. Каждая расчетно-проектировочная работа состоит из набора задач, план выполнения которых прилагается. Правила оформления и выполнения РПР следующие.

Каждому студенту преподавателем назначается индивидуальный трехзначный номер варианта, согласно которому тот выбирает исходные данные для своих контрольных заданий.

Во всех задачах РПР 1 первая цифра варианта в приведенных таблицах исходных данных означает номер схемы конструкции, вторая – номер строки значений линейных размеров, третья – номер строки значений нагрузок. Таблица с пронумерованными расчетными схемами приводится отдельно. Для выбранных таким образом нагруженных расчетных схем необходимо построить эпюры внутренних силовых факторов.

Задачи РПР 2 и 3 переходящие, т. е. являются продолжением задач РПР 1, поэтому студент использует в них свои же расчетные схемы с уже построенными эпюрами внутренних силовых факторов из РПР 1 и рассчитывает их на прочность и жесткость. Таким образом, первая цифра варианта в задачах РПР 2 и 3 означает номер схемы из соответствующей задачи РПР 1, вторая и третья цифры варианта используются для выбора материала конструкции, его прочностных данных и некоторых коэффициентов пропорциональности, используемых в задаче. Все эти параметры также выбираются из приведенной таблицы исходных данных.

Расчетно-проектировочная работа оформляется либо в электронном виде, либо на листах формата А4, скрепленных степлером. Титульный лист к каждой РПР оформляется по образцу, приведенному в данном приложении. Для каждой задачи указывается её номер, название темы, изображается расчетная схема конструкции в масштабе исходных данных по своему варианту. Значения линейных размеров и значения приложенных нагрузок указываются на самой расчетной схеме. Остальные данные варианта (если они есть) приводятся правее схемы. Решения каждой задачи рекомендуются производить согласно приведенному плану по мере изучения соответствующего материала дисциплины (см. ссылки в конце каждого практического занятия данного практикума).

Выполненные расчетно-проектировочные работы представляются на проверку преподавателю лично в сроки, указанные в плане-графике учебного процесса.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

Расчетно-проектировочная работа № 1
по дисциплине «Соппротивление материалов»

«Построение эпюр внутренних силовых факторов»

Вариант № _____

Студент _____

Группа _____

Преподаватель _____

Оценка _____

« _____ » _____ 20 ____ г.

Тольятти 20 ____

Задача 1.1. Построение эпюр внутренних силовых факторов при растяжении-сжатии стержней

Для ступенчатого стержня, работающего в условиях растяжения-сжатия, построить эпюру внутренней продольной силы N . Исходные данные – в табл. 1.1.1 и 1.1.2.

План решения

1. Вычертить в масштабе расчетную схему ступенчатого стержня с указанием числовых значений нагрузок и линейных размеров. Указание. Рекомендуется следующий порядок составления расчетной схемы: сначала вычертить стержень по размерам ступеней l_1, l_2, l_3 , а затем на полученной схеме расставить силы, ориентируясь на размеры a_1, a_2, a_3 .
2. Разделить базу эпюры на участки соответственно условиям нагружения стержня.
3. Вычислить значения продольной силы N в характерных сечениях каждого участка стержня.
4. Используя основные закономерности при построении эпюры продольной силы и значения в характерных сечениях каждого участка, вычертить в масштабе эпюру продольной силы.
5. Определить по эпюре N наиболее нагруженный участок или сечение стержня.

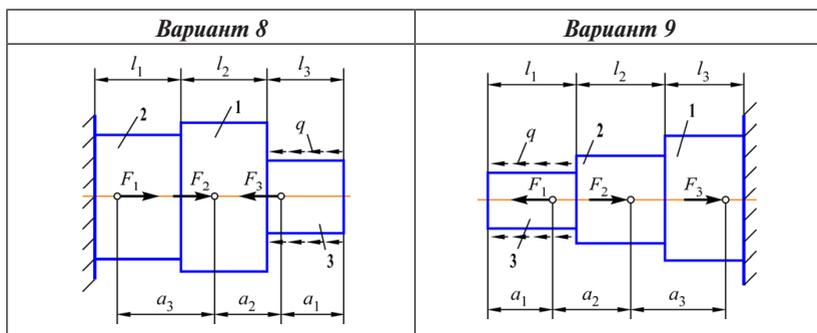
Таблица 1.1.1

Исходные данные вариантов

1. Варианты схем		2. Варианты линейных размеров					3. Варианты нагрузок				
№ вар.	№ вар.	$l_1, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$l_3, \text{ м}$	$a_1, \text{ м}$	$a_2 = 2a_3, \text{ м}$	№ вар.	$F_1, \text{ кН}$	$F_2, \text{ кН}$	$F_3, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$
0	0	0,8	1,5	1,2	0,5	1,4	0	10	20	30	30
1	1	0,9	1,4	1,2	0,8	1,3	1	20	10	30	20
2	2	0,9	1,2	1,4	0,4	1,5	2	20	30	40	20
3	3	0,8	1,6	1,1	0,7	1,5	3	20	30	10	40
4	4	1,0	1,4	1,1	0,8	1,3	4	30	20	40	30
5	5	0,7	1,9	0,9	0,3	1,7	5	40	20	30	40
6	6	1,0	1,8	0,7	0,9	1,4	6	30	40	20	20
7	7	0,7	2,0	0,8	0,5	1,8	7	40	20	10	30
8	8	1,1	1,4	1,0	0,8	1,3	8	30	40	10	30
9	9	1,4	1,2	0,9	0,7	1,6	9	40	10	20	20

Расчетные схемы стержней

<p>Вариант 0</p>	<p>Вариант 1</p>
<p>Вариант 2</p>	<p>Вариант 3</p>
<p>Вариант 4</p>	<p>Вариант 5</p>
<p>Вариант 6</p>	<p>Вариант 7</p>



Задача 1.2. Построение эпюр внутренних силовых факторов при кручении валов

Для вала, заключенного в подшипники и работающего в условиях кручения, построить эпюру внутреннего крутящего момента M_z . Исходные данные – в табл. 1.2.1 и 1.2.2.

План решения

1. Вычертить в масштабе расчетную схему вала с указанием числовых значений нагрузок и линейных размеров.
2. Из условия равновесия вала определить неизвестный момент M_0 .
3. Разделить базу эпюры крутящего момента на участки соответственно условиям нагружения.
4. Вычислить значения крутящего момента M_z в характерных сечениях каждого участка вала.
5. Используя основные закономерности при построении эпюры крутящего момента и значения в характерных сечениях, вычертить в масштабе эпюру крутящего момента M_z .
6. Определить по эпюре M_z наиболее нагруженный участок или сечение вала.

Таблица 1.2.1

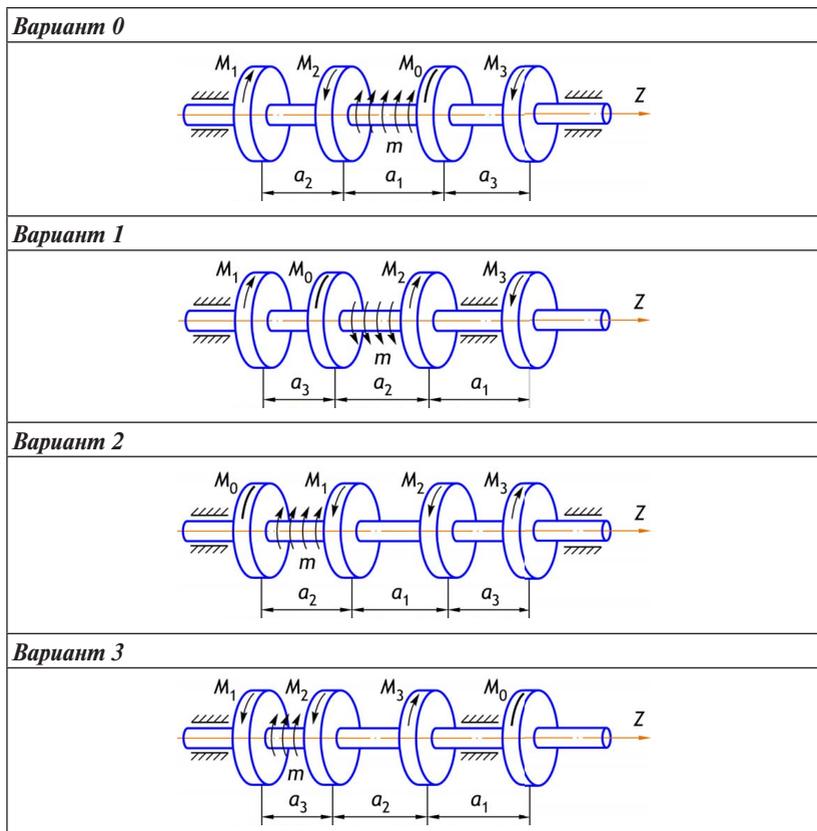
Исходные данные вариантов

1. Варианты схем	2. Варианты линейных размеров				3. Варианты нагрузок				
№ вар.	№ вар.	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	№ вар.	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	M_3 , кН·м	m , кН·м/м
0	0	0,5	0,3	0,2	0	1,0	2,6	3,0	5,0
1	1	0,4	0,3	0,1	1	1,6	2,0	2,0	8,0
2	2	0,6	0,5	0,4	2	2,0	1,8	1,5	10,0

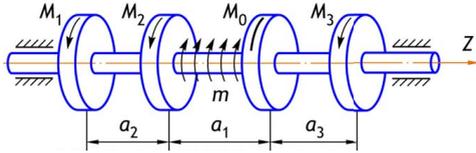
1. Варианты схем	2. Варианты линейных размеров				3. Варианты нагрузок				
	№ вар.	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	№ вар.	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	M_3 , кН·м	m , кН·м/м
3	3	0,5	0,4	0,3	3	1,8	1,5	2,2	6,0
4	4	0,6	0,4	0,2	4	1,5	2,2	2,8	8,0
5	5	0,7	0,3	0,2	5	2,2	2,8	3,0	10,0
6	6	0,4	0,3	0,2	6	3,0	1,2	2,5	5,0
7	7	0,7	0,5	0,3	7	2,8	3,0	1,6	7,0
8	8	0,8	0,3	0,1	8	2,0	2,5	1,8	9,0
9	9	0,8	0,5	0,2	9	2,6	1,6	2,0	10,0

Таблица 1.2.2

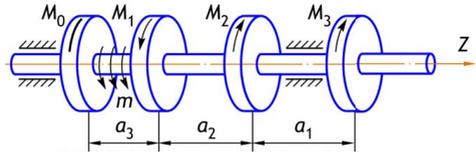
Расчетные схемы валов



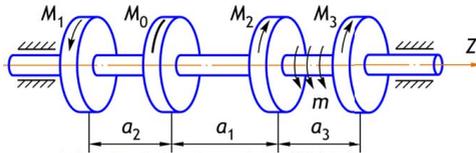
Вариант 4



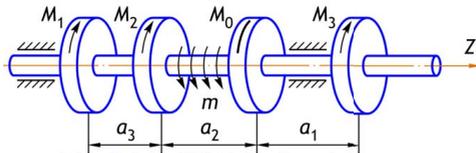
Вариант 5



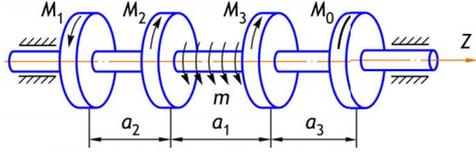
Вариант 6



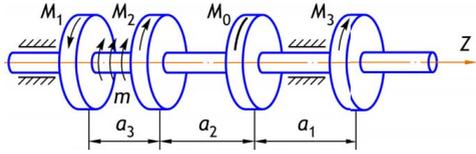
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



Задача 1.3. Построение эпюр внутренних силовых факторов при изгибе балок

Для двух статически определимых балок, работающих в условиях плоского изгиба: схема 1 – балка с жестким защемлением, схема 2 – балка на двух опорах, построить эпюры внутренних силовых факторов.

Исходные данные – в табл. 1.3.1 и 1.3.2.

План решения

Для каждой конструкции:

1. Вычертить в масштабе расчетную схему с указанием числовых значений нагрузок и линейных размеров.
2. Определить реакции всех опор (для двухопорной балки).
3. Разделить базу каждой эпюры на участки соответственно условиям нагружения.
4. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x , предварительно вычислив их значения в характерных сечениях каждого участка и используя основные закономерности при построении эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

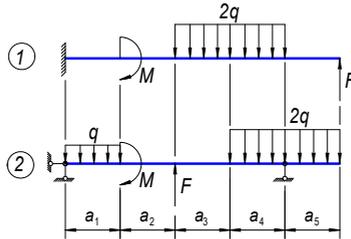
Таблица 1.3.1

Исходные данные вариантов

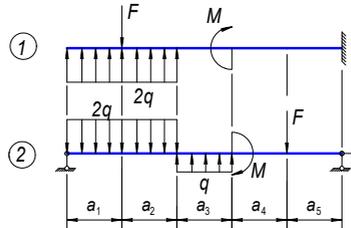
1. Варианты схем		2. Варианты линейных размеров					3. Варианты нагрузок			
№ вар.	№ вар.	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	a_4 , м	a_5 , м	№ вар.	q , кН/м	F , кН	M , кН·м
0	0	1,5	2,0	0,6	2,0	1,9	0	15	20	30
1	1	2,0	1,8	0,7	2,2	1,6	1	10	30	40
2	2	1,2	1,6	1,0	2,4	2,6	2	10	40	35
3	3	1,8	1,4	0,8	2,5	2,0	3	20	50	25
4	4	1,4	1,2	0,5	2,3	2,4	4	15	25	30
5	5	1,7	1,9	0,7	2,1	1,6	5	20	20	35
6	6	1,6	1,7	0,9	2,0	1,8	6	10	35	40
7	7	1,9	1,5	0,6	1,8	1,8	7	15	45	50
8	8	1,3	1,3	0,8	2,0	2,6	8	15	40	45
9	9	2,0	1,2	0,6	1,8	2,4	9	10	60	30

Расчетные схемы балок

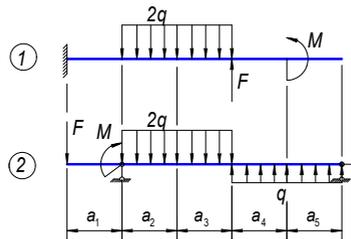
Вариант 0



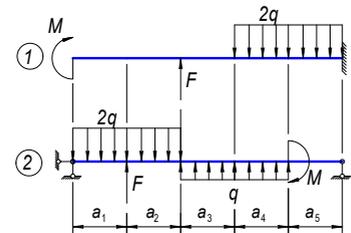
Вариант 1



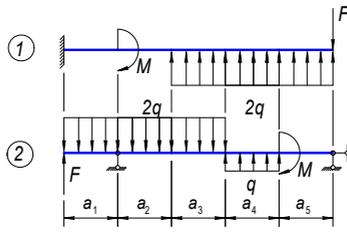
Вариант 2



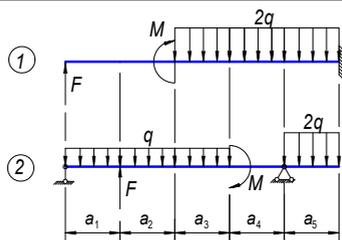
Вариант 3



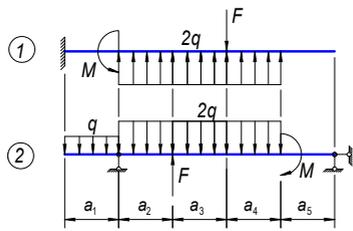
Вариант 4



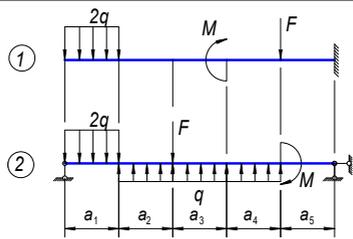
Вариант 5

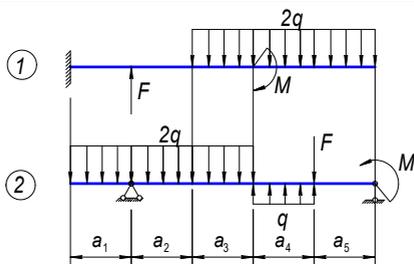
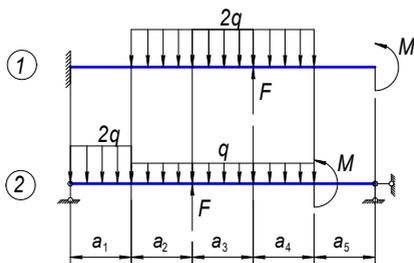


Вариант 6



Вариант 7



Вариант 8**Вариант 9**

Задача 1.4. Построение эпюр внутренних силовых факторов для плоских рам

Для двух статически определимых рам, работающих в условиях плоского изгиба: схема 1 – рама с жестким защемлением, схема 2 – рама на двух шарнирных опорах, построить эпюры внутренних силовых факторов.

Исходные данные – в табл. 1.4.1 и 1.4.2.

План решения

Для каждой конструкции:

1. Вычертить в масштабе расчетную схему с указанием числовых значений нагрузок и линейных размеров.
2. Определить реакции всех опор (для двухопорной рамы).
3. Разделить базу каждой эпюры на участки соответственно условиям нагружения.
4. Построить эпюры продольной силы N , поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x , предварительно вычислив их значения в характерных сечениях каждого участка.

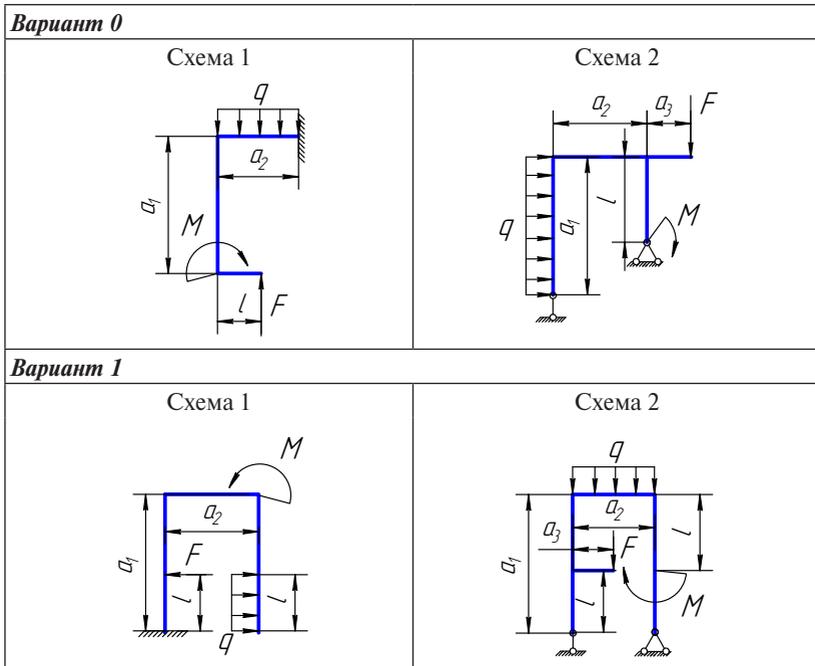
Таблица 1.4.1

Исходные данные вариантов

1. Варианты схем		2. Варианты линейных размеров				3. Варианты нагрузок			
№ вар.	№ вар.	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	l , м	№ вар.	q , кН/м	F , кН	M , кН·м
0	0	1,5	2,0	0,6	0,5	0	15	20	30
1	1	2,0	1,8	0,7	1,0	1	20	30	40
2	2	1,2	1,6	1,0	0,6	2	10	40	35
3	3	1,8	1,4	0,8	0,7	3	20	50	25
4	4	1,4	1,2	0,5	0,8	4	30	20	30
5	5	1,7	1,9	0,7	0,7	5	20	30	35
6	6	1,6	1,7	0,9	0,6	6	10	35	40
7	7	1,9	1,5	0,6	1,0	7	15	45	50
8	8	1,3	1,3	0,8	0,5	8	15	40	45
9	9	2,0	1,2	0,6	0,8	9	10	60	30

Таблица 1.4.2

Расчетные схемы рам



Вариант 2

Схема 1

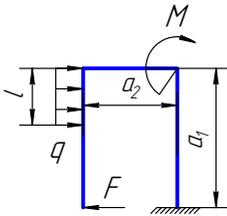


Схема 2

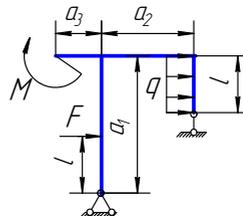
**Вариант 3**

Схема 1

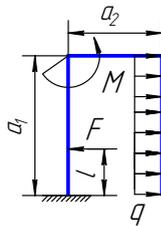


Схема 2

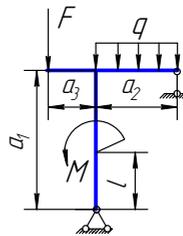
**Вариант 4**

Схема 1

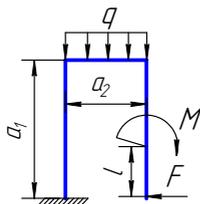


Схема 2

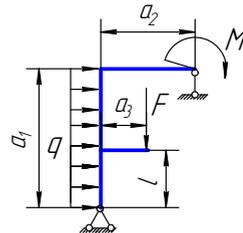
**Вариант 5**

Схема 1

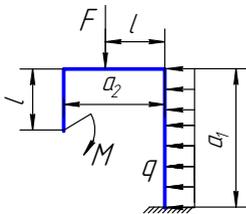
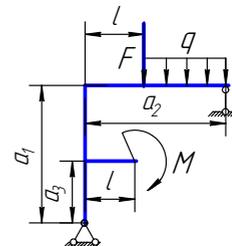


Схема 2



Вариант 6

Схема 1

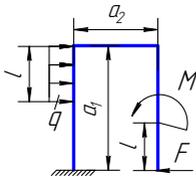


Схема 2

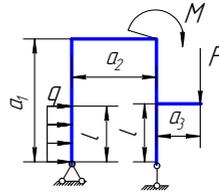
**Вариант 7**

Схема 1

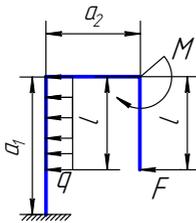


Схема 2

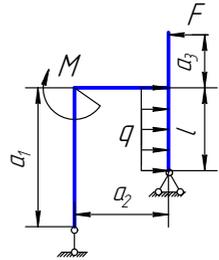
**Вариант 8**

Схема 1

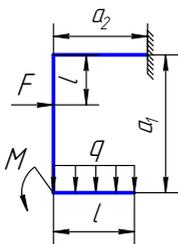


Схема 2

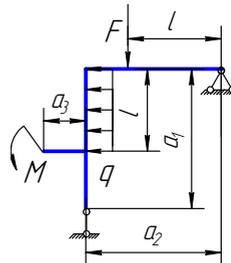
**Вариант 9**

Схема 1

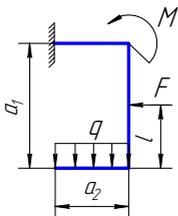
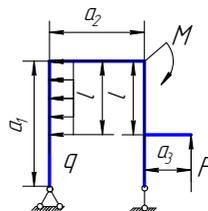


Схема 2



Задача 1.5. Построение эпюр внутренних силовых факторов на пространственной стержневой системе

Для нагруженной пространственной рамы, состоящей из трех элементов, построить эпюры внутренних силовых факторов. Длина всех элементов одинакова и равна ℓ .

Исходные данные – в табл. 1.5.1 и 1.5.2.

План решения

1. Вычертить в масштабе расчетную схему пространственной стержневой конструкции и указать числовые значения нагрузок и линейных размеров.
2. Построить эпюры продольной силы N , поперечных сил Q_x и Q_y , изгибающих моментов M_y и M_x , крутящего момента M_z , используя метод построения по характерным сечениям (эпюры Q_x и Q_y , M_y и M_x строить попарно на одной базе).

Таблица 1.5.1

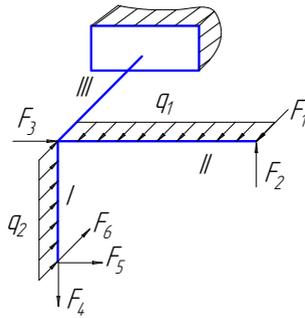
Исходные данные вариантов

Варианты схем (1-я цифра варианта)	Варианты линейных размеров (2-я цифра варианта)			Варианты нагрузок (3-я цифра варианта)									
				№ вар.	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	F_4 , кН	F_5 , кН	F_6 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	
№ вар.	№ вар.	ℓ , м	h/b	№ вар.	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	F_4 , кН	F_5 , кН	F_6 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	
0	0	0,6	1,5	0	5,0	2,0	5,0	-3,0	1,0	—	—	2,0	
1	1	0,7	1,5	1	—	1,5	—	-2,5	2,0	3,0	3,0	—	
2	2	0,8	1,7	2	2,0	3,0	3,0	4,0	1,0	—	1,0	—	
3	3	0,9	1,8	3	—	2,0	—	5,0	3,0	-2,5	2,5	1,0	
4	4	1,0	1,9	4	3,0	3,0	2,0	3,0	—	—	2,0	—	
5	5	0,6	2,0	5	—	2,5	—	5,0	-4,0	-4,0	2,0	2,5	
6	6	0,7	1,6	6	2,0	3,0	2,0	4,0	—	—	—	-2,5	
7	7	0,8	1,7	7	—	3,5	—	-2,5	3,0	3,0	3,0	-3,0	
8	8	1,0	1,8	8	3,0	2,4	2,5	5,0	2,0	2,0	1,0	—	
9	9	0,9	1,5	9	—	2,0	—	-2,0	-2,5	—	2,0	2,6	

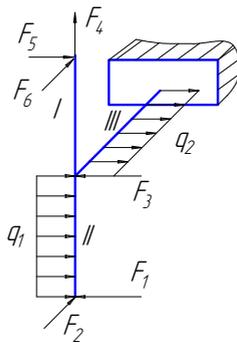
Примечание. Знак «—» в табл. 1.5.1 означает, что направление действия соответствующего силового фактора противоположное указанному на схеме (табл. 1.5.2). Прочерк означает отсутствие соответствующего силового фактора на схеме.

Расчетные схемы пространственных конструкций

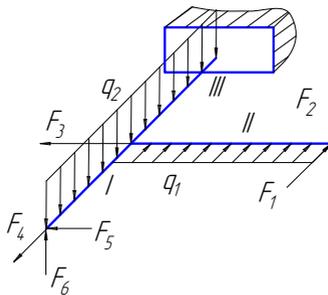
Вариант 0



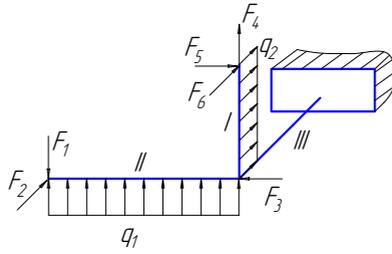
Вариант 1



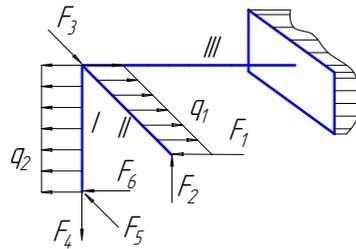
Вариант 2



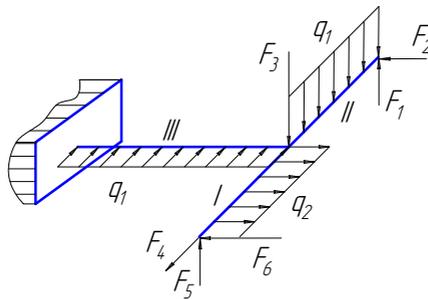
Вариант 3



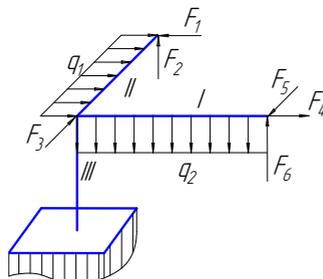
Вариант 4



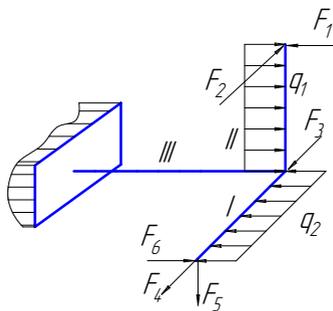
Вариант 5



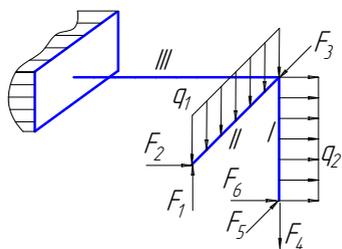
Вариант 6



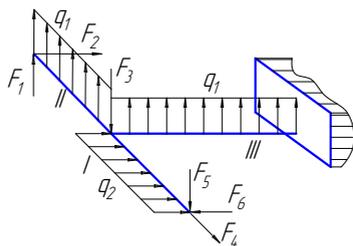
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

Расчетно-проектировочная работа № 2
по дисциплине «Сопротивление материалов»

«Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии»

Вариант № _____

Студент _____

Группа _____

Преподаватель _____

Оценка _____

« ____ » _____ 20__ г.

Тольятти 20__

Задача 2.1. Расчет на прочность и жесткость ступенчатого бруса

Ступенчатый стальной брус круглого поперечного сечения нагружен силами, направленными вдоль его оси (схема – РПР 1, задача 1.1).

Приняв на исходной схеме соотношение площадей круглых поперечных сечений по пронумерованным участкам бруса: $A_1 = A$, $A_2 = A/2$, $A_3 = A/3$, подобрать из условия прочности $[A]$ – допускаемую площадь поперечного сечения. Проверить выполнение условия жесткости. Спроектировать брус равного сопротивления и провести обоснование его экономичности. Исходные данные – в табл. 2.1.1.

План решения

1. Используя эпюру продольной силы N (РПР 1, задача 1.1), построить эпюру нормальных напряжений σ в долях $1/A$, если $A_1 = A$; $A_2 = A/2$; $A_3 = A/3$.
2. Определить по эпюре напряжений опасное сечение или участок стержня и подобрать из условия прочности допускаемый параметр площади $[A]$.
3. Построить эпюру перемещений и проверить выполнение условия жесткости ($[\Delta\ell] = \frac{\ell}{E} \cdot [\sigma]$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа).
4. Спроектировать брус равного сопротивления и вычертить его в масштабе.
5. Сравнить по экономичности спроектированный вами равнопрочный брус и брус заданной формы.

Таблица 2.1.1.

Исходные данные вариантов

1. Варианты схем	2. Варианты материалов			3. Варианты коэффициентов запаса	
№ вар.	№ вар.	Материал	σ_T , МПа	№ вар.	n_T
0	0	Сталь 40	340	0	1,8
1	1	Сталь 50Г	300	1	2,0
2	2	Сталь 5	320	2	1,5
3	3	Сталь 30ХМ	750	3	1,9
4	4	Сталь 45Х	850	4	2,0
5	5	Сталь 3	240	5	1,3
6	6	Сталь 12ХН3А	700	6	1,7
7	7	Сталь 40Х	800	7	1,4
8	8	Сталь 45	360	8	2,0
9	9	Сталь 20Х	650	9	1,6

Задача 2.2. Расчет статически определимых систем на прочность

Абсолютно жесткий брус, шарнирно закрепленный в одной точке, удерживается в горизонтальном положении с помощью деформируемого стержня заданной площади поперечного сечения A . Определить из условия прочности деформируемого стержня величину допускаемой нагрузки $[F]$.

Исходные данные в табл. 2.2.1 и 2.2.2.

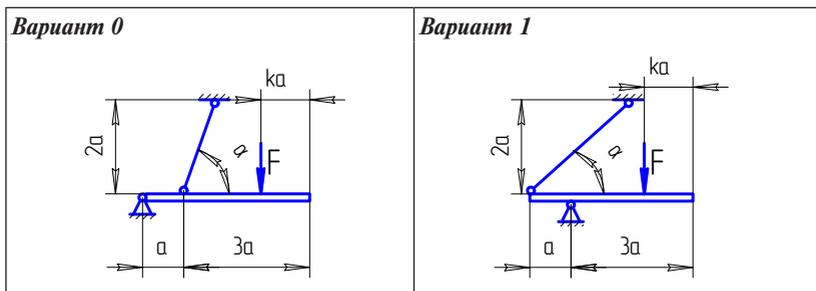
Таблица 2.2.1

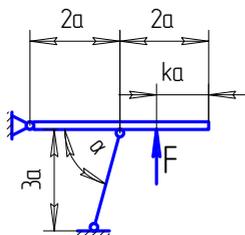
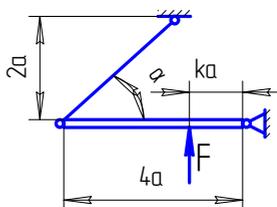
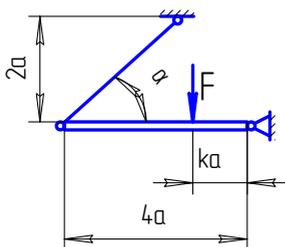
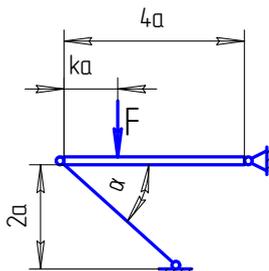
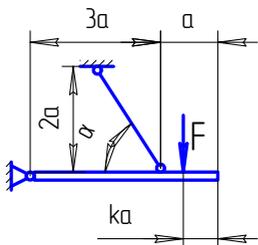
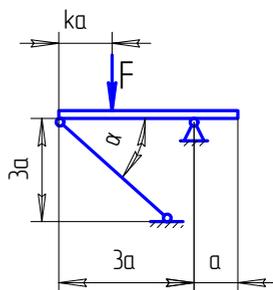
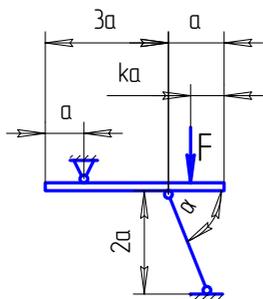
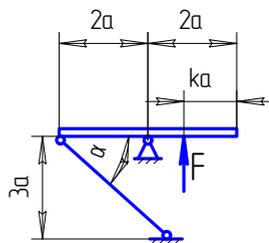
Исходные данные вариантов

1. Варианты схем		2. Варианты прочностных характеристик			3. Варианты линейных и угловых размеров и площадей				
№ вар.	№ схемы	№ вар.	σ_T , МПа	n_T	№ вар.	a , м	k	α , град	A , м ²
0	Вариант 0	0	250	1,6	0	0,4	1,5	30	$6 \cdot 10^{-4}$
1	Вариант 1	1	200	2,0	1	0,6	2	45	$5 \cdot 10^{-4}$
2	Вариант 2	2	220	1,4	2	0,5	0,5	60	$3 \cdot 10^{-4}$
3	Вариант 3	3	240	1,7	3	1,3	1,3	90	$4 \cdot 10^{-4}$
4	Вариант 4	4	230	1,3	4	0,7	2,8	30	$7 \cdot 10^{-4}$
5	Вариант 5	5	260	2,0	5	1,0	0,8	45	$4 \cdot 10^{-4}$
6	Вариант 6	6	270	1,9	6	0,8	1,8	90	$2 \cdot 10^{-4}$
7	Вариант 7	7	280	1,5	7	0,9	2,1	60	$9 \cdot 10^{-4}$
8	Вариант 8	8	300	2,0	8	1,1	3,1	45	$8 \cdot 10^{-4}$
9	Вариант 9	9	210	1,8	9	0,3	3,5	30	$3 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2.2.2

Схемы стержневых систем



Вариант 2**Вариант 3****Вариант 4****Вариант 5****Вариант 6****Вариант 7****Вариант 8****Вариант 9**

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

Расчетно-проектировочная работа № 3
по дисциплине «Соппротивление материалов»

«Расчет на прочность и жесткость при изгибе»

Вариант № _____

Студент _____

Группа _____

Преподаватель _____

Оценка _____

« ____ » _____ 20__ г.

Тольятти 20__

Задача 3.1. Определение главных центральных моментов инерции сложного сечения

Сечение сложной формы является поперечным сечением некоторой нагруженной конструкции. Для расчета в дальнейшем этой конструкции на прочность и жесткость необходимо определить положение главных центральных осей и значения главных центральных моментов инерции сложного сечения.

Исходные данные взять в табл. 3.1.1 и 3.1.2.

План решения

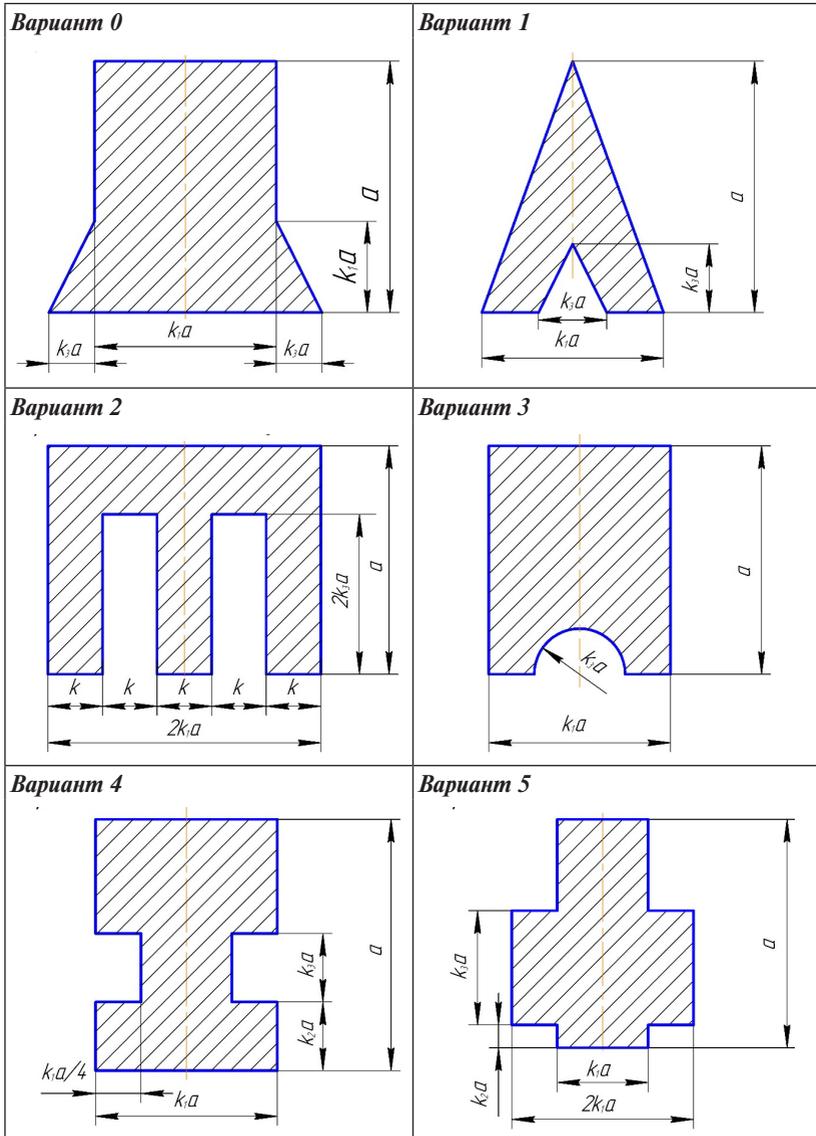
1. Разбить сложное сечение на простейшие составляющие и определить положение их центров тяжести.
2. Выбрать вспомогательную ось отсчета, относительно которой определить координаты центров тяжести простейших составляющих сложного сечения.
3. Найти координату центра тяжести всего сложного сечения и провести его главные центральные оси.
4. Определить значения главных центральных моментов инерции сложного сечения в долях параметра a .

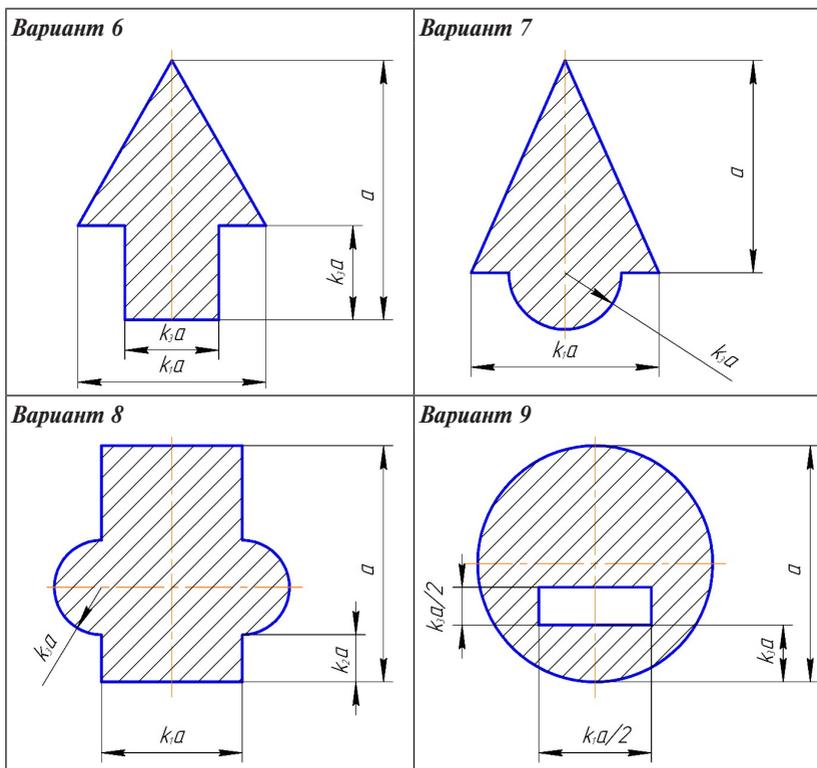
Таблица 3.1.1

Исходные данные вариантов

Первая цифра варианта		Вторая цифра варианта			Третья цифра варианта	
№ вар.	№ схемы сечения	№ вар.	k_1	k_2	№ вар.	k_3
0	Вариант 0	0	1,0	0	0	0,30
1	Вариант 1	1	0,9	0,10	1	0,26
2	Вариант 2	2	0,8	0,20	2	0,22
3	Вариант 3	3	0,7	0	3	0,20
4	Вариант 4	4	0,6	0,3	4	0,30
5	Вариант 5	5	0,6	0,2	5	0,32
6	Вариант 6	6	0,7	0,1	6	0,18
7	Вариант 7	7	0,9	0	7	0,36
8	Вариант 8	8	0,4	0,3	8	0,16
9	Вариант 9	9	0,5	0,40	9	0,24

Схемы сечений





Задача 3.2. Расчет на прочность и жесткость балок при плоском поперечном изгибе

План решения

1. Вычертить в масштабе балку на двух опорах с построенными эпюрами Q_y и M_x (РПП 1, задача 1.3, схема 2).
2. Для балки, изготовленной из пластичного материала, подобрать из условия прочности двутавровое, прямоугольное ($h/b = 2$) и круглое сечения, приняв $[\sigma] = 160$ МПа. Дать заключение о рациональности формы сечения по расходу материала.
3. Для балки, изготовленной из хрупкого материала, определить из условия прочности характерный размер $[a]$ сложного поперечного сечения (из задачи 3.1), предварительно решив вопрос о его рациональном положении.
4. Определив перемещения незакрепленных граничных сечений, изобразить приближенный вид оси изогнутой балки и прове-

сти проверку жесткости балки двутаврового сечения, приняв $[\delta] = (0,0005\dots 0,001) \cdot l$ (где l – расстояние между опорами).

Таблица 3.2.1

Характеристики прочности для хрупкого материала

Третья цифра варианта		
№ вар.	$\sigma_{вр}$, МПа	$\sigma_{вс}$, МПа
0	150	640
1	210	600
2	120	300
3	200	400
4	100	360
5	300	500
6	210	460
7	350	790
8	320	620
9	400	600

Общие данные: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль упругости первого рода; $n_b = 2$ – коэффициент запаса по прочности.

Задача 3.3. Расчет балок при нагружении в двух плоскостях

План решения

1. Вычертить в масштабе балку, изображенную на рис. 3.3.1, по размерам, соответствующим своему варианту. Исходные данные взять в табл. 3.3.1.
2. Построить эпюры изгибающих моментов M_x и M_y .
3. Определить допускаемую нагрузку для балки круглого и прямоугольного сечений, одинаковых по площади.
4. Оценить влияние вида деформации на грузоподъемность балки.
5. Определить полное перемещение сечения, указанного по варианту, для прямоугольного профиля.

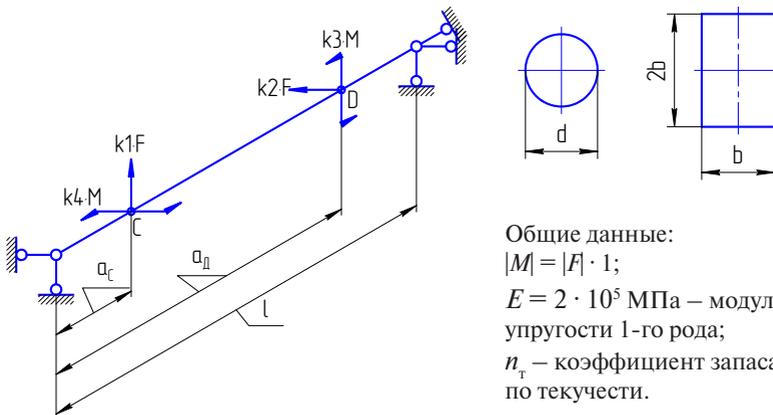


Рис. 3.3.1

Таблица 3.3.1

Первая цифра варианта				Вторая цифра варианта				Третья цифра варианта				
№ вар.	a_c , м	a_d , м	l , м	№ вар.	k_1	k_2	k_3	k_4	№ вар.	d , мм	Положение сечения	σ_T МПа
0	1	3	6	0	1	2	3	4	0	95	С	400
1	1,5	4,5	6,5	1	3	2	1	3	1	90	Д	380
2	1	5	7	2	3	1	2	2	2	85	С	360
3	1,5	3,5	7,5	3	1	3	2	1	3	80	Д	340
4	2	5	9	4	2	1	3	2	4	75	С	320
5	1	4	7	5	2	3	1	2	5	70	Д	300
6	2	6	9	6	1	1	2	1	6	65	С	280
7	1,5	5,5	10,5	7	2	2	3	3	7	60	Д	260
8	2	7	10	8	3	3	1	3	8	55	С	240
9	1	5	11	9	4	2	1	1	9	50	Д	220

Задача 3.4. Расчет балок при совместном действии плоского изгиба и растяжения

План решения

Используя схемы балки и сложного сечения из задачи 3.2 и учитывая действие продольной растягивающей силы F (табл. 3.4.1):

1) оценить влияние продольной силы на величину характерного размера поперечного сечения $[a]$;

2) определить величину смещения нейтральной оси под действием продольной силы F .

Таблица 3.4.1

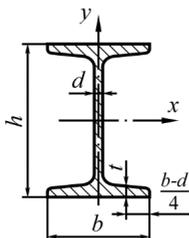
Схемы балок

<p>Вариант 0</p>	<p>Вариант 1</p>
<p>Вариант 2</p>	<p>Вариант 3</p>
<p>Вариант 4</p>	<p>Вариант 5</p>
<p>Вариант 6</p>	<p>Вариант 7</p>
<p>Вариант 8</p>	<p>Вариант 9</p>

Справочный материал

Сортамент прокатной стали

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)



A – площадь поперечного сечения;
 W – момент сопротивления;
 I – момент инерции;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции;
 m – масса одного погонного метра.

№	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	m , кг	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54