

В.К. Шакурский

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

Часть 2

**Аналитические и численные
методы анализа переходных процессов
в линейных, нелинейных
и параметрических электрических цепях**

Тольятти
Издательство ТГУ
2013

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт энергетики и электротехники
Кафедра «Электроснабжение и электротехника»

В.К. Шакурский

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

В двух частях

Часть 2

**Аналитические и численные методы анализа
переходных процессов в линейных, нелинейных
и параметрических электрических цепях**

Тольятти
Издательство ТГУ
2013

УДК 621.3.013(078.5)

ББК 3121

Ш19

Рецензенты:

д-р пед. наук, канд. техн. наук, профессор Поволжского государственного университета сервиса *Н.П. Бахарев*;
канд. техн. наук, доцент Тольяттинского государственного университета *В.А. Шаповалов*.

Ш19 Шакурский, В.К. Теоретические основы электротехники : в 2 ч. Ч. 2. Аналитические и численные методы анализа переходных процессов в линейных, нелинейных и параметрических электрических цепях : учеб. пособие / В.К. Шакурский. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. – 211 с. : обл.

Учебное пособие направлено на освоение методов и способов численного анализа переходных режимов в линейных, нелинейных и параметрических электрических цепях. Приводятся примеры оформления листинга компьютерных аналитических и численных решений. Даются необходимые рекомендации.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

УДК 621.3.013(078.5)

ББК 3121

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

© ФГБОУ ВПО «Тольяттинский
государственный университет», 2013

Условные обозначения

В учебном пособии используется международная система единиц СИ (SI).

t – время, секунда (с);

τ – постоянная времени, секунда (с);

f – частота, герц (Гц);

ω – угловая частота, радиан в секунду (рад/с);

T – период, секунда (с);

$q = T/t_{\text{и}}$ – скважность (безразмерная);

e – мгновенное значение ЭДС, вольт (В);

i – мгновенное значение тока, ампер (А);

u – мгновенное значение напряжения, вольт (В);

ψ – начальная фаза, радиан (рад);

φ – фазовый сдвиг, радиан (рад);

E_m – максимальное значение переменной ЭДС, вольт (В);

I_m – максимальное значение переменного тока, ампер (А);

U_m – максимальное значение переменного напряжения, вольт (В);

J_m – максимальное значение переменного тока источника тока, ампер (А);

r – активное сопротивление, ом (Ом);

x – реактивное сопротивление, ом (Ом);

z – модуль сопротивления, ом (Ом);

g – активная проводимость, сименс (См);

b – реактивная проводимость, сименс (См);

y – модуль проводимости, сименс (См);

R – сопротивление идеального резистора, ом (Ом);

G – проводимость идеального резистора, сименс (См);

L – индуктивность идеальной катушки, генри (Г);

M – взаимная индуктивность индуктивно связанных идеальных катушек, генри (Г);

C – ёмкость идеального конденсатора, фарад (Ф);

E – значение постоянной ЭДС; действующее значение переменной ЭДС, вольт (В);

I – значение постоянного тока; действующее значение переменного тока, ампер (А);

U – значение постоянного напряжения; действующее значение переменного напряжения, вольт (В);

J – обозначение источника тока; постоянный ток источника тока; действующее значение переменного тока источника тока, ампер (А);

p – мгновенное значение мощности, вольт-ампер (ВА);

S – модуль полной мощности, вольт-ампер (ВА);

P – активная мощность, ватт (Вт);

Q – реактивная мощность, вар (вар);

j – мнимая единица;

\underline{E} – комплексное действующее значение ЭДС, вольт (В);

\underline{I} – комплексное действующее значение тока, ампер (А);

\underline{I}^* – комплексное сопряжённое действующее значение тока, ампер (А);

\underline{U} – комплексное действующее значение напряжения, вольт (В);

\underline{S} – комплексная полная мощность, вольт-ампер (ВА);

\underline{Z} – комплексное сопротивление, ом (Ом);

\underline{Y} – комплексная проводимость, сименс (См);

l – длина, метр (м);

B – магнитная индукция, тесла (Т);

H – напряжённость магнитного поля, ампер на метр (А/м);

Φ – поток магнитной индукции, вебер (Вб);

Ψ – потокосцепление, вебер (Вб);

F – магнитодвижущая сила (МДС), ампер (А).

Примечание. В листинге численных решений обозначения могут быть другие. Это связано с особенностями программы Mathcad.

ВВЕДЕНИЕ

Переходные, или динамические, режимы работы электрических цепей являются наиболее важными для анализа и исследования в рамках дисциплины «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ), так как в этих режимах состояние электрической цепи не всегда очевидно. Сложность существующих в технике электрических цепей требует совместного использования аналитических и численных методов анализа. Аналитические методы позволяют получить систему дифференциальных уравнений состояния электрической цепи, а численные дают решение системы при известных исходных данных. Параллельное освоение студентами численных методов решения систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и других необходимых методов численного анализа позволяет наглядно увидеть динамические процессы, анимировать их и исследовать эффекты, которые возникают в электрических цепях.

Учебное пособие включает основные разделы аналитического и численного анализа переходных процессов в линейных, нелинейных и параметрических электрических цепях с сосредоточенными и распределёнными параметрами. Основное внимание уделяется подготовке листинга численного решения в программе Mathcad. После отработки листинга можно выполнить любое исследование цепи, варьируя параметры источников и потребителей электрической энергии. Это позволяет углубить понимание процессов, происходящих в электрических цепях, и увидеть взаимное влияние элементов цепи друг на друга и на её общее состояние.

В учебном пособии приведены решения простых и сложных задач. Понимание приведённых решений возможно лишь при наличии у студентов знаний основных методов анализа и диагностики электрических цепей и умения пользоваться программой Mathcad.

Все замечания и предложения могут быть отправлены по электронной почте на адрес: Shakurskiy@mail.ru.

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Особенностью классического метода анализа переходных процессов в электрических цепях является представление переходных токов и напряжений в виде суммы принуждённой и свободной составляющих. Обе составляющие возникают в момент коммутации. Свободная составляющая на интервале переходного процесса затухает и остаётся только принуждённая. Это определяет способы их расчёта. Для определения принуждённых составляющих послекоммутационная цепь рассчитывается в установившемся режиме. Свободные составляющие являются решением однородного дифференциального уравнения (ОДУ) цепи с постоянными коэффициентами. Решение представляется суммой экспонент. Количество слагаемых соответствует порядку ОДУ.

1.1. Анализ переходных процессов в электрических цепях первого порядка

Цепи первого порядка после коммутации содержат один реактивный элемент. Состояние цепи на интервале переходного процесса определяется уравнениями в следующем виде:

$$\begin{aligned}i(t) &= i_{np} + i_{св} = i_{np} + A \exp(pt); \\u(t) &= u_{np} + u_{св} = u_{np} + B \exp(pt),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где первые слагаемые – это принуждённые составляющие переходных токов и напряжений, коэффициенты перед экспонентой – постоянные интегрирования, p – корень характеристического уравнения цепи.

Для составления характеристического уравнения используют входное сопротивление цепи в операторной форме относительно любой ветви, которое приравнивают нулю.

Для определения постоянных интегрирования необходимо вычисление начальных значений переходных токов и напряжений после коммутаций. Для этого используют законы коммутации для корректных и некорректных коммутаций, которые позволяют найти начальные значения токов в ветвях с индуктивностями и начальные значения напряжений на конденсаторах через установившийся режим в докоммутационной схеме. Далее составляется система уравнений по законам Кирхгофа для послекоммутационной схемы. Остальные начальные значения находятся решением данной системы уравнений в начальный момент времени.

Примеры анализа переходных процессов классическим методом при корректных коммутациях

Пример 1.1. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на индуктивности в электрической цепи (рис. 1.1).

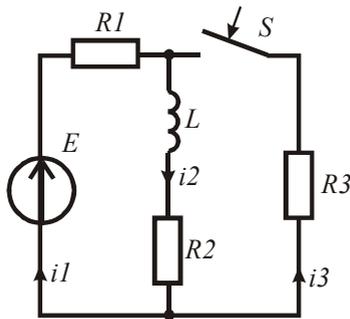


Рис. 1.1

Введём в листинг решения исходные данные.

`ORIGIN := 1 R1 := 20 R2 := 15 R3 := 18 L := 2·10-4 E := 100`

Найдём установившиеся значения искомых токов и значение напряжения на индуктивности в заданной цепи до коммутации.

$$I2y := \frac{E}{R1 + R2} = 2.857 \quad I1y := I2y \quad I3y := 0 \quad ULy := 0$$

Найдём принуждённые значения искомым переменных в заданной цепи после коммутации. Напряжение на индуктивности будет равно нулю.

$$i1np := E \cdot \left(R1 + \frac{R2 \cdot R3}{R2 + R3} \right)^{-1} \quad i2np := i1np \cdot \frac{R3}{R2 + R3} \quad i3np := i1np - i2np$$

Составим характеристическое уравнение цепи, найдём его корень и определим τ – постоянную времени цепи. Знак равенства берём с панели *Boolean*.

$$p := 0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{R1 \cdot R3}{R1 + R3} \right) \text{ solve, } p \rightarrow -\frac{2325000}{19} \quad \tau := \left| p^{-1} \right|$$

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа для послекоммутационной схемы. Подставим в неё значение тока в ветви с индуктивностью как независимое начальное значение, найденное до коммутации. В результате решения системы уравнений получим остальные начальные значения токов и начальное значение напряжения на индуктивности.

$$i1 := 0 \quad i3 := 0 \quad uL := 0 \quad \text{Given}$$

$$i1 - I2y - i3 = 0 \quad E = i1 \cdot R1 + uL + I2y \cdot R2 \quad E = i1 \cdot R1 + i3 \cdot R3$$

$$Dn := \text{Find}(i1, i3, uL) = \begin{pmatrix} 3.985 \\ 1.128 \\ -22.556 \end{pmatrix}$$

Момент коммутации не оговаривается, поэтому совмещаем момент коммутации с началом системы координат. Рассматриваем уравнения (1.1) в нулевой момент времени. Используя начальные и принуждённые значения токов и напряжения на индуктивности, находим постоянные интегрирования.

$$A1 := Dn1 - i1np \quad A2 := I2y - i2np \quad A3 := Dn2 - i3np \quad B1 := Dn3$$

Составляем выражения для переходных токов и переходного напряжения на индуктивности.

$$i1(t) := (i1np + A1 \cdot \exp(p \cdot t)) \text{ float, } 4 \rightarrow 0.4366 \cdot e^{-122368.0t} + 3.548$$

$$i2(t) := (i2np + A2 \cdot \exp(p \cdot t)) \text{ float, } 4 \rightarrow 0.9217 \cdot e^{-122368.0t} + 1.935$$

$$i3(t) := (i3np + A_3 \cdot \exp(p \cdot t)) \text{ float } ,4 \rightarrow -0.4851 \cdot e^{-122368.0t} + 1.613$$

$$uL(t) := B_1 \cdot \exp(p \cdot t) \text{ float } ,4 \rightarrow -22.56 \cdot e^{-122368.0t}$$

Оператор float,n ограничивает количество значащих разрядов, выводимых на рабочий стол.

Объединим решения до и после коммутации и найдём зависимости переменных от времени (рис. 1.2).

$$i1\varepsilon(t) := \text{if}(t < 0, I1y, i1(t)) \quad i2\varepsilon(t) := \text{if}(t < 0, I2y, i2(t))$$

$$i3\varepsilon(t) := \text{if}(t < 0, 0, i3(t)) \quad uL\varepsilon(t) := \text{if}(t < 0, 0, uL(t))$$

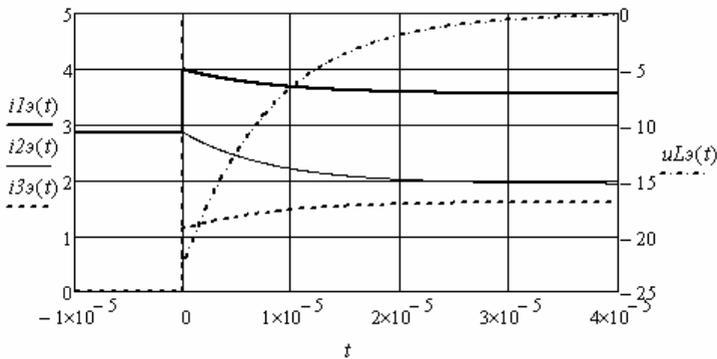


Рис. 1.2

Построим фазовый портрет напряжения на индуктивности. Это зависимость производной напряжения от напряжения на индуктивности, полученная на интервале переходного процесса. Найдём производную напряжения на индуктивности и построим соответствующую зависимость (рис. 1.3).

$$duL(t) := \frac{d}{dt} uL(t) \text{ float } ,4 \rightarrow 2.761e6 \cdot e^{-122368.0t}$$

Видно, что фазовый портрет является отрезком прямой линии, который начинается при напряжении 22,56, а заканчивается нулевым напряжением.

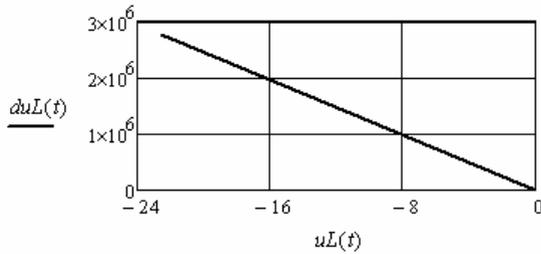


Рис. 1.3

Пример 1.2. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на конденсаторе в электрической цепи (рис. 1.4).

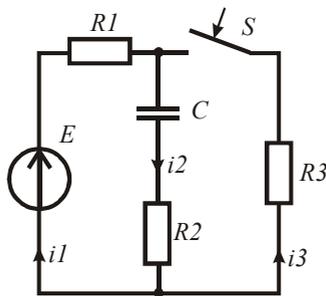


Рис. 1.4

Введём в листинг решения исходные данные.

$ORIGIN := 1$ $R1 := 20$ $R2 := 15$ $R3 := 18$ $C := 0.2 \cdot 10^{-6}$ $E := 100$

Найдём установившиеся значения искомым токам и напряжению на конденсаторе в заданной цепи до коммутации.

$$UCy := E \quad I1y := 0 \quad I2y := 0 \quad I3y := 0$$

Найдём установившиеся значения искомым токам и напряжению в заданной цепи после коммутации.

$$i1np := \frac{E}{R1 + R3} \quad i2np := 0 \quad i3np := i1np \quad uCnp := i3np \cdot R3$$

Составим характеристическое уравнение цепи, найдём его корни и определим постоянную времени цепи. Знак равенства берём с панели *Boolean*.

$$p := 0 = \left[R2 + (p \cdot C)^{-1} + \frac{R1 \cdot R3}{R1 + R3} \right] \text{solve}, p, \text{float}, 4 \rightarrow -204301.0 \quad \tau := |p^{-1}|$$

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа для последовательной схемы. Подставим в неё значение напряжения на конденсаторе как независимое начальное значение, найденное до коммутации. В результате решения системы уравнений получим остальные начальные значения токов.

$$D1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & R2 & 0 \\ R1 & 0 & R3 \end{pmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} 0 \\ E - UCy \\ E \end{pmatrix} \quad in := \text{lsolve}(D1, D2) = \begin{pmatrix} 1.613 \\ -2.151 \\ 3.763 \end{pmatrix}$$

Момент коммутации не оговаривается, поэтому совмещаем момент коммутации с началом системы координат. Рассматриваем уравнения (1.1) в нулевой момент времени. Используя начальные и принуждённые значения переменных, находим постоянные интегрирования.

$$A_1 := in_1 - i1np \quad A_2 := in_2 - i2np \quad A_3 := in_3 - i3np \quad B_1 := UCy - uCnp$$

Составляем выражения для переходных токов и напряжения на конденсаторе:

$$i1(t) := i1np + A_1 \cdot \exp(p \cdot t) \text{float}, 4 \rightarrow -1.019 \cdot e^{-204301.0t} + 2.632$$

$$i2(t) := i2np + A_2 \cdot \exp(p \cdot t) \text{float}, 4 \rightarrow -2.151 \cdot e^{-204301.0t}$$

$$i3(t) := i3np + A_3 \cdot \exp(p \cdot t) \text{float}, 4 \rightarrow 1.132 \cdot e^{-204301.0t} + 2.632$$

$$uC(t) := uCnp + B_1 \cdot \exp(p \cdot t) \text{float}, 4 \rightarrow 52.63 \cdot e^{-204301.0t} + 47.37$$

Объединим решения до и после коммутации и найдём эквивалентные зависимости токов и зависимость напряжения на конденсаторе от времени (рис. 1.5).

$$i\&1(t) := \text{if}(t < 0, I1y, i1(t)) \quad i\&2(t) := \text{if}(t < 0, I2y, i2(t))$$

$$i\&3(t) := \text{if}(t < 0, I3y, i3(t)) \quad u\&C(t) := \text{if}(t < 0, UCy, uC(t))$$

Построим фазовый портрет тока через конденсатор. Это зависимость производной тока от тока на интервале переходного процесса. Найдём производную тока через конденсатор и построим соответствующую зависимость (рис. 1.6). Видно, что фазовый портрет является отрезком прямой линии.

$$di_2(t) := \frac{d}{dt} i_2(t) \rightarrow 439451.451 \cdot e^{-204301.0t}$$

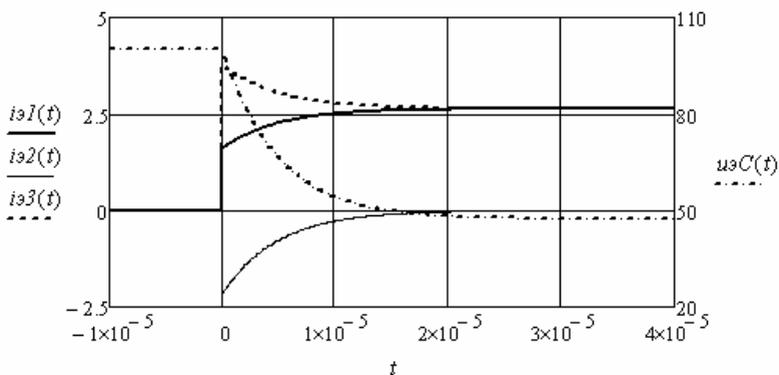


Рис. 1.5

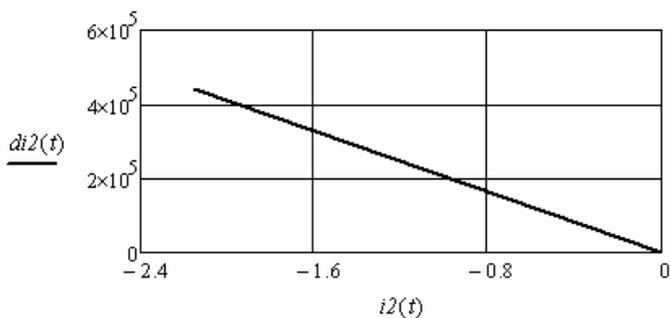


Рис. 1.6

Пример 1.3. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на индуктивности в электрической цепи с гармоническим источником (рис. 1.7).

Введём в листинг решения исходные данные.

$$ORIGIN := 1 \quad R1 := 20 \quad R2 := 15 \quad R3 := 40 \quad L := 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\omega := 2 \cdot 10^5 \quad \psi := 0.5 \quad e(t) := 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

Составим характеристическое уравнение цепи, найдём его корень и определим постоянную времени цепи.

$$p := \text{root}\left(R2 + p \cdot L + \frac{R1 \cdot R3}{R1 + R3}, p, 0, -10^6\right) \quad \tau := |p^{-1}| = 1.412 \times 10^{-5}$$

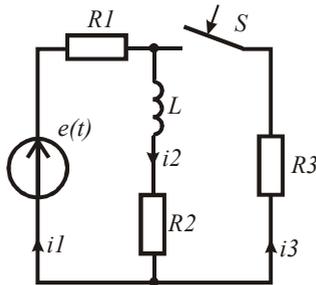


Рис. 1.7

Найдём установившиеся значения искомых токов и напряжения на индуктивности в заданной цепи до коммутации. Так как напряжение источника является синусоидальным, решение переносим на комплексную плоскость, используя амплитудное значение ЭДС источника.

$$E := 100 \cdot \exp(j \cdot \psi) \quad xL := \omega \cdot L \quad I2y := \frac{E}{R1 + R2 + j \cdot xL} \quad I1y := I2y \quad ULy := I2y \cdot j \cdot xL$$

Найдём в момент коммутации мгновенное значение тока в ветви с индуктивностью, которое является независимым начальным значением.

$$i2n := \text{Im}(I2y) = -0.701$$

Определим остальные начальные значения токов и напряжения на индуктивности. С этой целью решим систему уравнений для послекоммутационной схемы для мгновенных значений в момент коммутации с подстановкой независимого начального значения. Знак равенства берём с панели *Boolean*.

$$i1 := 0 \quad i3 := 0 \quad uL := 0 \quad \text{Given}$$

$$i1 - i2n - i3 = 0 \quad \text{Im}(E) = i1 \cdot R1 + uL + i2n \cdot R2 \quad \text{Im}(E) = i1 \cdot R1 + i3 \cdot R3$$

$$Dn := \text{Find}(i1, i3, uL) = \begin{pmatrix} 0.332 \\ 1.033 \\ 51.814 \end{pmatrix}$$

Найдём принуждённые значения искомых токов и напряжений в заданной цепи после коммутации. Так как напряжение источника является синусоидальным, решение переносим на комплексную плоскость.

$$D1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & R2 + j \cdot xL & 0 \\ R1 & 0 & R3 \end{pmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ E \end{pmatrix} \quad Inp := \text{Isolve}(D1, D2) = \begin{pmatrix} 1.853 + 0.45j \\ 0.585 - 0.524j \\ 1.268 + 0.974j \end{pmatrix}$$

$$i1np(t) := |Inp_1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Inp_1)) \quad i3np(t) := |Inp_3| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Inp_3))$$

$$i2np(t) := |Inp_2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Inp_2)) \quad ULnp := Inp_2 \cdot j \cdot xL$$

$$uLnp(t) := |ULnp| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(ULnp))$$

Момент коммутации не оговаривается, поэтому совмещаем момент коммутации с началом системы координат. Рассматриваем уравнения (1.1) в нулевой момент времени. Используя начальные и принуждённые значения переменных, находим постоянные интегрирования.

$$A1 := Dn_1 - \text{Im}(Inp_1) = -0.118 \quad A2 := i2n - \text{Im}(Inp_2) = -0.177$$

$$A3 := Dn_2 - \text{Im}(Inp_3) = 0.059 \quad B1 := Dn_3 - \text{Im}(ULnp) = 5.004$$

Составляем выражения для переходных токов и переходного напряжения на индуктивности.

$$i1(t) := i1np(t) + A1 \cdot \exp(p \cdot t) \quad i2(t) := i2np(t) + A2 \cdot \exp(p \cdot t)$$

$$i3(t) := i3np(t) + A3 \cdot \exp(p \cdot t) \quad uL(t) := uLnp(t) + B1 \cdot \exp(p \cdot t)$$

$$i1(t) \text{ float , 4} \rightarrow 1.907 \cdot \sin(200000.0 \cdot t + 0.2381) + -0.1177 \cdot e^{-70833.0t}$$

$$i2(t) \text{ float , 4} \rightarrow 0.7855 \cdot \sin(200000.0 \cdot t - 0.7304) + -0.1766 \cdot e^{-70833.0t}$$

$$i3(t) \text{ float , 4} \rightarrow 1.598 \cdot \sin(200000.0 \cdot t + 0.655) + 0.05886 \cdot e^{-70833.0t}$$

$$uL(t) \text{ float , 4} \rightarrow 62.84 \cdot \sin(200000.0 \cdot t + 0.8404) + 5.004 \cdot e^{-70833.0t}$$

Объединим решения для времени до и после коммутации и найдём зависимости переменных от времени (рис. 1.8 и 1.9).

$$i1y(t) := |I1y| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I1y)) \quad i2y(t) := i1y(t)$$

$$uLy(t) := |ULy| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(ULy))$$

$$i\text{э}1(t) := \text{if}(t < 0, i1y(t), i1(t)) \quad i\text{э}2(t) := \text{if}(t < 0, i2y(t), i2(t))$$

$$i\text{э}3(t) := \text{if}(t < 0, 0, i3(t)) \quad u\text{э}L(t) := \text{if}(t < 0, uLy(t), uL(t))$$

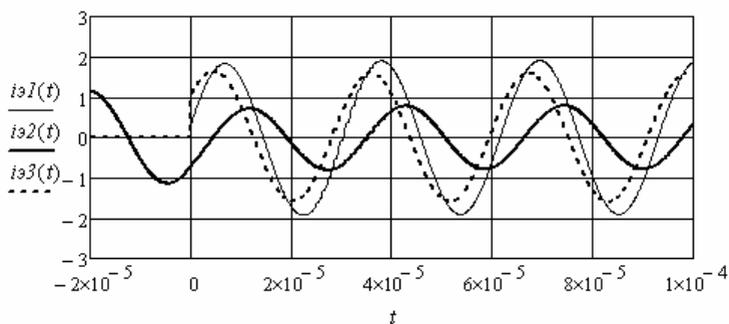


Рис. 1.8

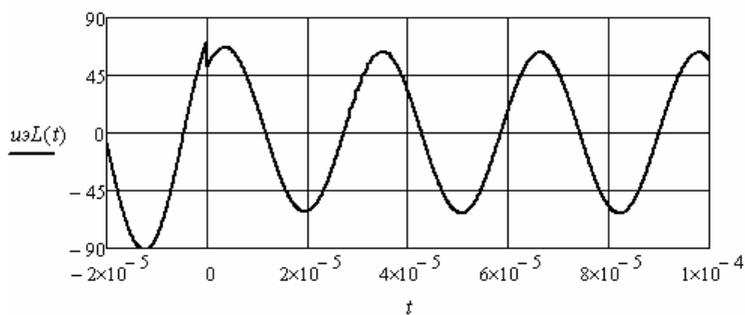


Рис. 1.9

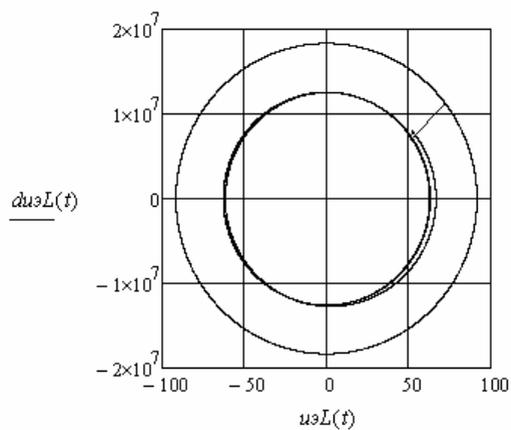


Рис. 1.10

Построим фазовый портрет напряжения на индуктивности. Это зависимость производной напряжения от напряжения, полученная на интервале времени до и после коммутации. Найдём производные напряжения на индуктивности и построим соответствующую эквивалентную зависимость.

$$duL(t) := \frac{d}{dt}uL(t) \quad duLy(t) := \frac{d}{dt}uLy(t) \quad du\omega L(t) := \text{if}(t \leq 0, duLy(t), duL(t))$$

Фазовый портрет приведён на рис. 1.10.

Пример 1.4. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на конденсаторе в электрической цепи с гармоническим источником (рис. 1.11).

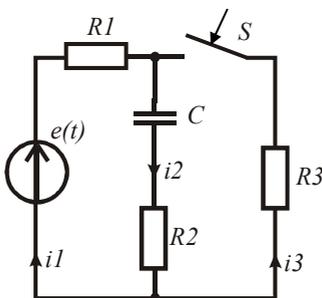


Рис. 1.11

Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 & R1 &:= 20 & R2 &:= 15 & R3 &:= 18 & C &:= 0.2 \cdot 10^{-6} & \omega &:= 2 \cdot 10^5 \\ \psi &:= -0.4 & e(t) &:= 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \end{aligned}$$

Составим характеристическое уравнение цепи, найдём его корни и определим постоянную времени цепи.

$$p := \text{root}\left(R2 + \frac{1}{p \cdot C} + \frac{R1 \cdot R3}{R1 + R3}, p, -1, -10^7\right) \quad \tau := |p^{-1}| = 4.895 \times 10^{-6}$$

Найдём установившиеся значения искомых токов и напряжения на конденсаторе в заданной цепи до коммутации. Так как напряжение источника является синусоидальным, решение переносим на комплексную плоскость.

$$\begin{aligned}
E &:= 100 \cdot \exp(j \cdot \psi) & xC &:= (\omega \cdot C)^{-1} & Ily &:= \frac{E}{R1 + R2 - j \cdot xC} & I2y &:= Ily \\
UCy &:= I2y \cdot (-j \cdot xC) & I3y &:= 0 & iIy(t) &:= |Ily| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Ily)) \\
i2y(t) &:= |I2y| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I2y)) & uCy(t) &:= |UCy| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(UCy))
\end{aligned}$$

Определим начальные значения токов и напряжения на конденсаторе. С этой целью решим систему уравнений для послекоммутационной схемы относительно мгновенных значений в момент коммутации с подстановкой независимого начального значения напряжения на конденсаторе.

$$D1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & R2 & 0 \\ R1 & 0 & R3 \end{pmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Im}(E) - \text{Im}(UCy) \\ \text{Im}(E) \end{pmatrix} \quad in := \text{solve}(D1, D2) = \begin{pmatrix} -0.284 \\ 1.564 \\ -1.848 \end{pmatrix}$$

Найдём принуждённые значения искомых токов и напряжения на конденсаторе в заданной цепи после коммутации. Так как напряжение источника является синусоидальным, решение переносим на комплексную плоскость.

$$D3 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & R2 - j \cdot xC & 0 \\ R1 & 0 & R3 \end{pmatrix} \quad D4 := \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ E \end{pmatrix} \quad Inp := \text{solve}(D3, D4) = \begin{pmatrix} 3.016 - 0.777j \\ 1.249 + 0.522j \\ 1.766 - 1.3j \end{pmatrix}$$

$$UCnp := Inp_2 \cdot (-j \cdot xC)$$

$$\begin{aligned}
i1np(t) &:= |Inp_1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Inp_1)) & i2np(t) &:= |Inp_2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Inp_2)) \\
i3np(t) &:= |Inp_3| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Inp_3)) & uCnp(t) &:= |UCnp| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(UCnp))
\end{aligned}$$

Совмещаем момент коммутации с началом системы координат. Рассматриваем уравнения (1.1) в нулевой момент времени. Используя начальные и принуждённые значения переменных, находим постоянные интегрирования.

$$A1 := in_1 - \text{Im}(Inp_1) \quad A2 := in_2 - \text{Im}(Inp_2)$$

$$A3 := in_3 - \text{Im}(Inp_3) \quad B1 := \text{Im}(UCy) - \text{Im}(UCnp)$$

Составляем выражения для переходных токов и переходного напряжения на конденсаторе.

$$\begin{aligned}
i1(t) &:= i1np(t) + A1 \cdot \exp(p \cdot t) & i2(t) &:= i2np(t) + A2 \cdot \exp(p \cdot t) \\
i3(t) &:= i3np(t) + A3 \cdot \exp(p \cdot t) & uC(t) &:= uCnp(t) + B1 \cdot \exp(p \cdot t)
\end{aligned}$$

$$i1(t) \text{ float } , 4 \rightarrow 3.114 \cdot \sin(200000.0 \cdot t - 0.2523) + 0.4934 \cdot e^{-204301.0t}$$

$$i2(t) \text{ float } , 4 \rightarrow 1.042 \cdot e^{-204301.0t} + 1.354 \cdot \sin(200000.0 \cdot t + 0.396)$$

$$i3(t) \text{ float } , 4 \rightarrow -0.5482 \cdot e^{-204301.0t} + 2.193 \cdot \sin(200000.0 \cdot t - 0.6343)$$

$$uC(t) \text{ float } , 6 \rightarrow -25.4908 \cdot e^{-204301.0t} + 33.8489 \cdot \sin(200000.0 \cdot t - 1.17476)$$

Объединим решения для времени до после коммутации и найдём эквивалентные зависимости токов и напряжения на конденсаторе от времени (рис. 1.12 и 1.13).

$$i\partial 1(t) := \text{if}(t < 0, i1y(t), i1(t)) \quad i\partial 2(t) := \text{if}(t < 0, i2y(t), i2(t))$$

$$i\partial 3(t) := \text{if}(t < 0, 0, i3(t)) \quad u\partial C(t) := \text{if}(t < 0, uCy(t), uC(t))$$

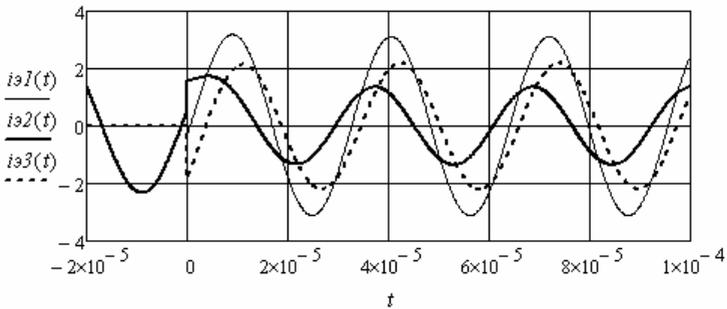


Рис. 1.12

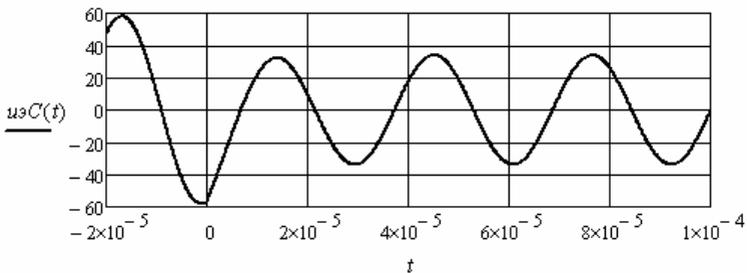


Рис. 1.13

Построим фазовый портрет для напряжения на конденсаторе. Это зависимость производной напряжения от напряжения, полученная на интервале времени до и после коммутации.

Найдём производные напряжения на конденсаторе и построим соответствующую эквивалентную зависимость (рис. 1.14).

$$duC(t) := \frac{d}{dt}uC(t) \quad duCy(t) := \frac{d}{dt}uCy(t) \quad duэC(t) := \text{if}(t \leq 0, duCy(t), duC(t))$$

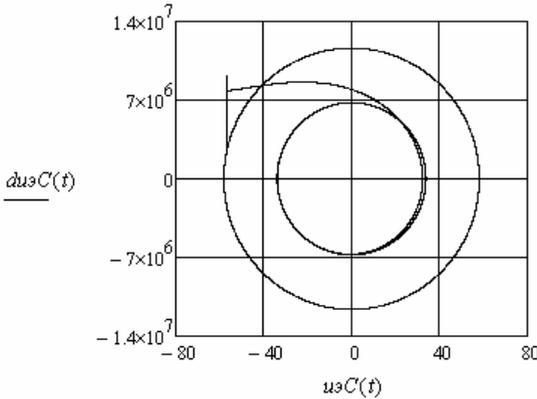


Рис. 1.14

Примеры анализа переходных процессов классическим методом при некорректных коммутациях

Пример 1.5. Необходимо найти переходные токи в ветвях с индуктивностями в электрической цепи (рис. 1.15).

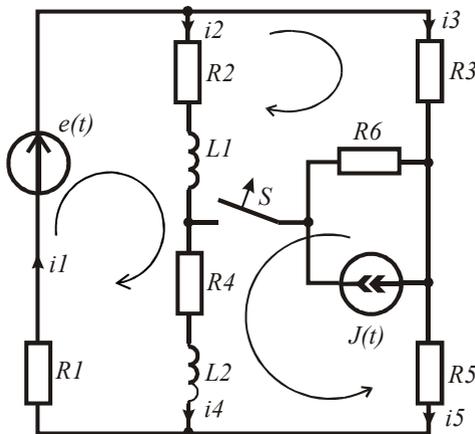


Рис. 1.15

В данном примере коммутация является некорректной, так как токи в ветвях с индуктивностями в момент коммутации могли иметь разные значения, а после коммутации они равны. Токи должны измениться скачком. Для определения начального значения тока используем обобщённый закон коммутации для индуктивностей.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 & R1 &:= 100 & R2 &:= 150 & R3 &:= 80 & R4 &:= 20 & R5 &:= 250 & R6 &:= 200 \\ L1 &:= 6 \cdot 10^{-4} & L2 &:= 4 \cdot 10^{-4} & \omega &:= 10^6 & e(t) &:= 100 \cdot \sin(\omega \cdot t) & J(t) &:= 1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi) \end{aligned}$$

Составим характеристическое уравнение цепи, найдём его корни и определим постоянную времени цепи.

$$p := \text{root} \left[\left[\frac{R1 \cdot (R3 + R5)}{R1 + R3 + R5} + R2 + R4 + p \cdot (L1 + L2) \right], p, 0, -10^6 \right] \quad \tau := |p^{-1}| = 4.053 \times 10^{-6}$$

Найдём установившиеся значения искоемых токов в заданной цепи до коммутации. Так как напряжение и ток источников являются синусоидальными, решение переносим на комплексную плоскость. Найдём контурные токи.

$$\begin{aligned} x1 &:= \omega \cdot L1 & x2 &:= \omega \cdot L2 & E &:= 100 & J &:= -1.5 \\ D1 &:= \begin{bmatrix} R1 + R2 + R3 + j \cdot (x1 + x2) & -(R2 + j \cdot x1) & R4 + j \cdot x2 \\ -(R2 + j \cdot x1) & R2 + R3 + j \cdot x1 & R6 \\ R4 + j \cdot x2 & R6 & R4 + R5 + R6 + j \cdot x2 \end{bmatrix} & D2 &:= \begin{pmatrix} E \\ J \cdot R6 \\ J \cdot R6 \end{pmatrix} \\ I_k &:= \text{lsolve}(D1, D2) \end{aligned}$$

Найдём токи в ветвях с индуктивностями и их мгновенные значения в момент коммутации при $t = -0$.

$$\begin{aligned} I2y &:= Ik_1 - Ik_2 & I4y &:= Ik_1 + Ik_2 & iy2 &:= \text{Im}(I2y) & iy4 &:= \text{Im}(I4y) \\ iy2(t) &:= |I2y| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I2y)) & iy4(t) &:= |I4y| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I4y)) \end{aligned}$$

Используя первый обобщённый закон коммутации, говорящий о неизменности суммарного потокосцепления коммутируемых индуктивностей на интервале коммутации, найдём начальное значение тока в ветви с индуктивностями в послекоммутационной схеме.

$$i2н := \frac{L1 \cdot iy2 + L2 \cdot iy4}{L1 + L2} = 0.263$$

Найдём принуждённое значение искомого тока в заданной цепи после коммутации. Так как напряжение источника является синусоидальным, решение переносим на комплексную плоскость.

Используем метод свёртки и формулу разброса токов в параллельных ветвях.

$$R2\varepsilon := R2 + R4 \quad R3\varepsilon := R3 + R5 \quad L\varepsilon := L1 + L2 \quad xL\varepsilon := \omega \cdot L\varepsilon$$

$$I2np := \left[\frac{E}{R1 + \frac{(R2\varepsilon + j \cdot xL\varepsilon) \cdot R3\varepsilon}{R2\varepsilon + j \cdot xL\varepsilon + R3\varepsilon}} \right] \cdot \frac{R3\varepsilon}{R2\varepsilon + j \cdot xL\varepsilon + R3\varepsilon}$$

$$i2np(t) := |I2np| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I2np))$$

Рассмотрим уравнения (1.1) в нулевой момент времени.

Используя начальные и принуждённые значения переменных, находим постоянную интегрирования и составляем выражение для переходного тока.

$$A := i2n - \text{Im}(I2np) \quad i2(t) := i2np(t) + A \cdot \exp(p \cdot t)$$

$$i2(t) \text{ float } ,4 \rightarrow 0.3355 \cdot e^{-246744.0t} + 0.07451 \cdot \sin(1.0e6 \cdot t - 1.329)$$

Объединим решения для времени до и после коммутации и найдём эквивалентные зависимости токов в ветвях с индуктивностями от времени (рис. 1.16).

$$i\varepsilon 2(t) := \text{if}(t \leq 0, i2y(t), i2(t)) \quad i\varepsilon 4(t) := \text{if}(t < 0, i4y(t), i2(t))$$

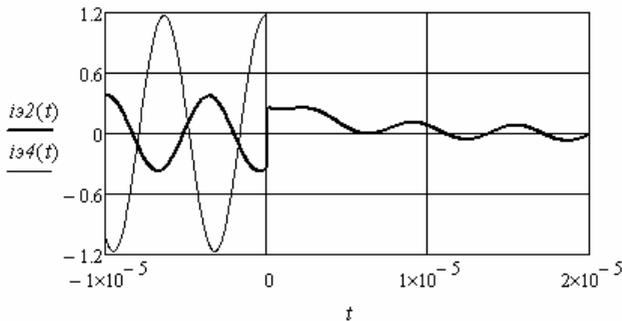


Рис. 1.16

Пример 1.6. Необходимо найти переходное напряжение на конденсаторах в электрической цепи (рис. 1.17).

В данном примере коммутация является некорректной, так как напряжения на конденсаторах в момент коммутации могли иметь разные значения, а после коммутации они равны. Напряжения должны измениться скачком. Для определения начального значе-

ния напряжения используем обобщённый закон коммутации для конденсаторов.

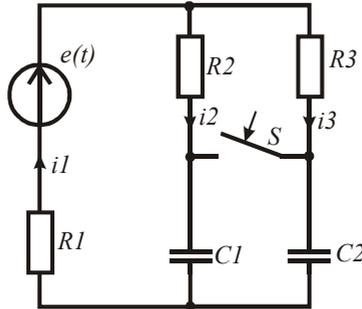


Рис. 1.17

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 10 \quad R2 := 10 \quad R3 := 20 \quad C1 := 2 \cdot 10^{-6} \quad C2 := 3 \cdot 10^{-6}$$

$$\omega := 10^5 \quad \psi := -0.5 \quad e(t) := 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

Составим характеристическое уравнение послекоммутационной цепи, найдём его корень и определим постоянную времени цепи.

$$C := C1 + C2 \quad R := \frac{R2 \cdot R3}{R2 + R3}$$

$$p := \text{root}\left[R + R1 + (p \cdot C)^{-1}, p, -1, -10^5\right] \quad \tau := |p^{-1}| = 8.333 \times 10^{-5}$$

Найдём установившиеся значения искоемых напряжений в заданной цепи до коммутации. Так как напряжение источника является синусоидальным, решение переносим на комплексную плоскость. Используем метод свёртки и формулу разброса токов в параллельных ветвях.

$$x1 := (\omega \cdot C1)^{-1} \quad x2 := (\omega \cdot C2)^{-1} \quad E := 100 \cdot \exp(j \cdot \psi)$$

$$I1y := E \cdot \left[R1 + \frac{(R2 - j \cdot x1) \cdot (R3 - j \cdot x2)}{R2 + R3 - j \cdot (x1 + x2)} \right]^{-1} \quad I2y := I1y \cdot \frac{(R3 - j \cdot x2)}{[R2 + R3 - j \cdot (x1 + x2)]}$$

$$I3y := I1y - I2y \quad U1y := I2y \cdot (-j \cdot x1) \quad U2y := I3y \cdot (-j \cdot x2)$$

$$u1y := \text{Im}(U1y) \quad u2y := \text{Im}(U2y)$$

$$u1y(t) := |U1y| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U1y)) \quad u2y(t) := |U2y| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U2y))$$

Используя второй обобщённый закон коммутации, говорящий о неизменности суммарного заряда коммутируемых конденсаторов на интервале коммутации, найдём начальное значение напряжения на конденсаторах в послекоммутационной схеме.

$$u_n := \frac{C1 \cdot u1y + C2 \cdot u2y}{C1 + C2} = -11.046$$

Найдём принуждённое значение искомого напряжения в заданной цепи после коммутации. Так как напряжение источника является синусоидальным, решение переносим на комплексную плоскость.

$$x_C := (\omega \cdot C)^{-1} \quad U_{np} := \frac{E \cdot (-j \cdot x_C)}{R1 + R - j \cdot x_C} \quad unp(t) := |U_{np}| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_{np}))$$

Рассматриваем уравнения (1.1) в нулевой момент времени. Используя начальные и принуждённые значения, находим постоянную интегрирования и составляем выражение для переходного напряжения.

$$B := u_n - \text{Im}(U_{np}) \quad u_C(t) := unp(t) + B \cdot \exp(p \cdot t)$$

$$u_C(t) \text{ float } , 4 \rightarrow 0.01633 \cdot e^{-12000.0t} + 11.91 \cdot \sin(100000.0 \cdot t - 1.951)$$

Объединим решения для времени до и после коммутации и найдём эквивалентные зависимости напряжений на конденсаторах от времени (рис. 1.18).

$$u1(t) := \text{if}(t \leq 0, u1y(t), uC(t)) \quad u2(t) := \text{if}(t \leq 0, u2y(t), uC(t))$$

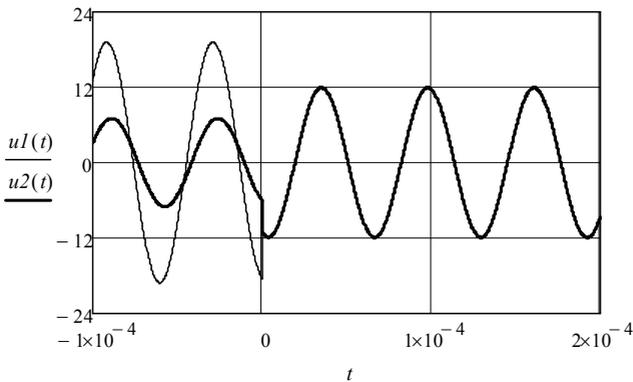


Рис. 1.18

1.2. Анализ переходных процессов в электрических цепях второго порядка

Электрические цепи второго порядка содержат два реактивных элемента. Характеристическое уравнение цепи имеет два корня. Значения корней определяют характер переходного процесса. При вещественных корнях характер переходного процесса аperiodический, при комплексно-сопряжённых корнях характер колебательный. Промежуточный критический характер переходного процесса имеет место при вещественных одинаковых корнях. Переходный процесс заканчивается незатухающими колебаниями, если корни комплексные с нулевой вещественной частью.

При использовании классического метода анализа переходных процессов отдельно находят принуждённые и свободные составляющие. Вид корней характеристического уравнения определяет форму выражения для свободных составляющих. Если корни вещественные, то используют следующую форму выражений:

$$\begin{aligned}i_{ce}(t) &= A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t); \\ u_{ce}(t) &= B_1 \exp(p_1 t) + B_2 \exp(p_2 t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

При одинаковых вещественных корнях (1.2) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}i_{ce}(t) &= (A_1 + A_2 t) \exp(pt); \\ u_{ce}(t) &= (B_1 + B_2 t) \exp(pt).\end{aligned}\tag{1.3}$$

При комплексных корнях вида $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$ используют следующую форму выражений для свободных составляющих:

$$\begin{aligned}i_{ce}(t) &= A \exp(-\alpha t) \sin(\omega_0 t + \theta); \\ u_{ce}(t) &= B \exp(-\alpha t) \sin(\omega_0 t + \eta).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Во всех случаях основной задачей является определение постоянных интегрирования.

Примеры анализа переходных процессов в цепях с источниками постоянной ЭДС

Пример 1.7. Необходимо найти переходные токи и переходные напряжения на реактивных элементах в электрической цепи, приведённой на рис. 1.19.

Введём в листинг решения исходные данные, найдём корни характеристического уравнения цепи и оценим длительность T переходного процесса.

$$R1 := 200 \quad R2 := 200 \quad C := 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad E := 100$$

$$P := 0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{R1}{p \cdot R1 \cdot C + 1} \right) \text{ solve } ,p \rightarrow \begin{pmatrix} -2500 \cdot \sqrt{1361} - 102500 \\ 2500 \cdot \sqrt{1361} - 102500 \end{pmatrix}$$

$$T := \left| (P_1)^{-1} \right| \cdot 3 = 2.921 \times 10^{-4}$$

Для определения длительности переходного процесса взят меньший корень. Корни характеристического уравнения вещественные, поэтому используем для анализа выражение (1.2).

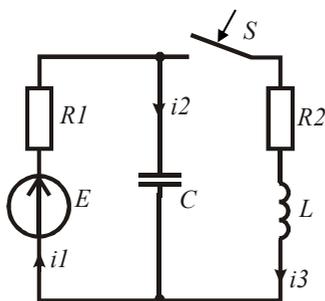


Рис. 1.19

В качестве искомого переходного тока возьмём третий ток. Это упростит определение остальных неизвестных. Начальное значение третьего тока равно нулю. Принуждённое значение определим с помощью закона Ома.

$$i3n := 0 \quad i3np := \frac{E}{R1 + R2}$$

Используя общий подход к определению постоянных интегрирования, дополним выражение для переходного тока производ-

ной от этого выражения и рассмотрим полученную систему из двух уравнений при $t = 0$.

$$\begin{cases} i_3(0) = i_{3, \text{np}}(0) + A_1 + A_2 \\ i_3'(0) = i_{3, \text{np}}'(0) + p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{cases}$$

В полученной системе уравнений, кроме постоянных интегрирования, неизвестна левая часть второго уравнения. Из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для контура R_2LC , следует: $u_C(0) = Li_3'(0)$. Независимым начальным значением является напряжение на конденсаторе. В данном примере оно равно ЭДС. В результате находим производную третьего тока.

Вернёмся к листингу решения. Определим левую часть второго уравнения системы и решим систему относительно постоянных интегрирования.

$$di3n := E \cdot L^{-1} \quad A1 := 0 \quad A2 := 0 \quad \text{Given}$$

$$i3n = i3np + A1 + A2 \quad di3n = A1 \cdot P0 + A2 \cdot P1 \quad A := \text{Find}(A1, A2)$$

Запишем решение для третьего тока и найдём остальные переходные токи и напряжения (рис. 1.20 и 1.21).

$$i3(t) := i3np + A_0 \cdot e^{P_0 \cdot t} + A_1 \cdot e^{P_1 \cdot t} \quad di3(t) := \frac{d}{dt} i3(t) \quad uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right)$$

$$uC(t) := R2 \cdot i3(t) + uL(t) \quad i2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

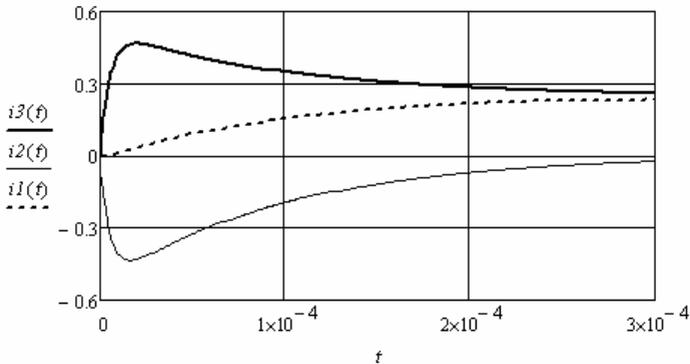


Рис. 1.20

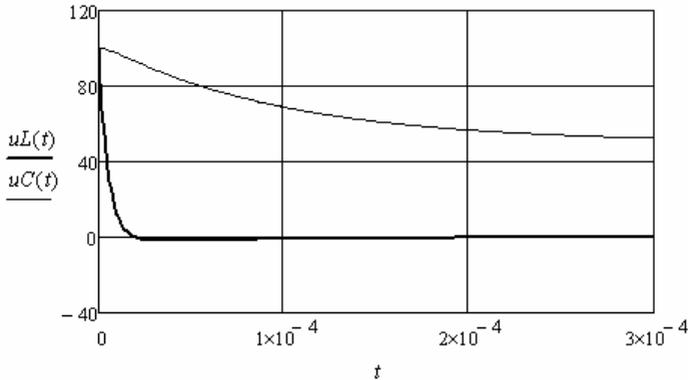


Рис. 1.21

На рис. 1.22 приведён фазовый портрет третьего тока на интервале переходного процесса.

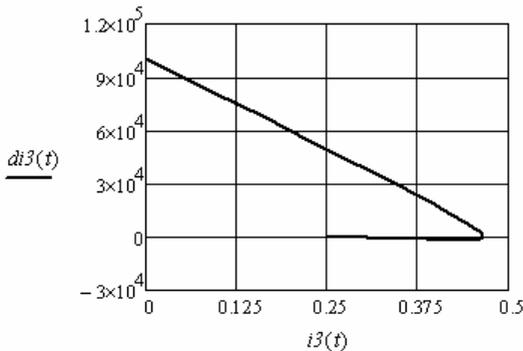


Рис. 1.22

Пример 1.8. Необходимо рассчитать критический переходный процесс в электрической цепи (рис. 1.19), выбрав соответствующее значение сопротивления второго резистора.

Введём в листинг решения исходные данные и найдём выражения для корней характеристического уравнения цепи.

$$R1 := 200 \quad C := 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad E := 100$$

$$0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{R1}{p \cdot R1 \cdot C + 1} \right) \text{solve}, p \rightarrow \begin{pmatrix} -500 \cdot R2 - 500 \cdot \sqrt{R2^2 - 10 \cdot R2 - 3975} - 2500 \\ 500 \cdot \sqrt{R2^2 - 10 \cdot R2 - 3975} - 500 \cdot R2 - 2500 \end{pmatrix}$$

При критическом переходном процессе корни должны быть одинаковыми. Для реализации данного режима выражения под корнем должны быть равны нулю. Определим необходимое для этого значение R_2 .

$$R := 0 = (R2^2 - 10 \cdot R2 - 3975) \text{ solve, } R2 \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \cdot \sqrt{10} + 5 \\ 5 - 20 \cdot \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$R2 := R_0 = 68.246$$

Найдём корни характеристического уравнения цепи при выбранном сопротивлении R_2 и оценим длительность переходного процесса.

$$P := 0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{R1}{p \cdot R1 \cdot C + 1} \right) \left| \begin{array}{l} \text{solve, } p \\ \text{float, } 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -36622.0 \\ -36622.0 \end{pmatrix}$$

$$T := \left| (P_0)^{-1} \right| \cdot 3 = 8.192 \times 10^{-5}$$

Введём в листинг решения начальное и принуждённое значение третьего тока и определим значение производной от выражения для переходного тока при $t = 0$ аналогично примеру 1.7.

$$i3n := 0 \quad i3np := \frac{E}{R1 + R2} \quad di3n := E \cdot L^{-1}$$

Система уравнений для определения постоянных интегрирования с учётом (1.3) примет вид

$$\begin{cases} i_3(0) = i_{3, \text{np}}(0) + A_1 \\ i_3'(0) = i_{3, \text{np}}'(0) + pA_1 + A_2 \end{cases}$$

Введём данную систему в листинг решения и найдём постоянные интегрирования.

$$A1 := 0 \quad A2 := 0 \quad \text{Given}$$

$$i3n = i3np + A1 \quad di3n = A1 \cdot P_0 + A2 \quad A := \text{Find}(A1, A2)$$

Запишем решение для третьего тока и найдём остальные переходные токи и напряжения.

$$i3(t) := i3np + (A_0 + A_1 \cdot t) \cdot e^{P_0 \cdot t} \quad di3(t) := \frac{d}{dt} i3(t) \quad uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right)$$

$$uC(t) := R2 \cdot i3(t) + uL(t) \quad i2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

На рис. 1.23 и 1.24 приведены полученные переходные токи и напряжения, а на рис. 1.25 фазовый портрет третьего тока.

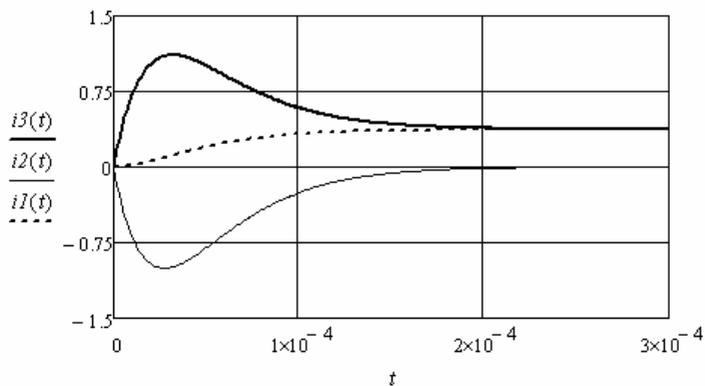


Рис. 1.23

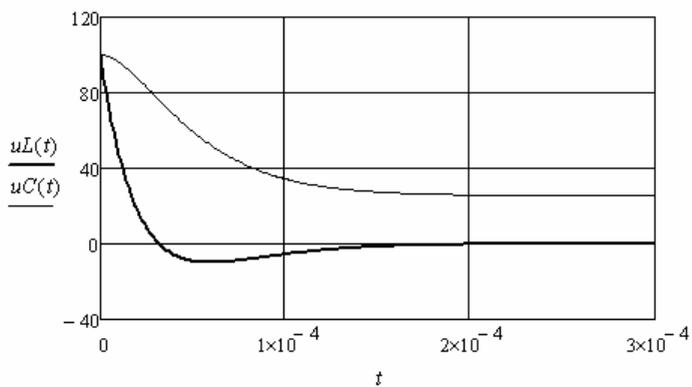


Рис. 1.24

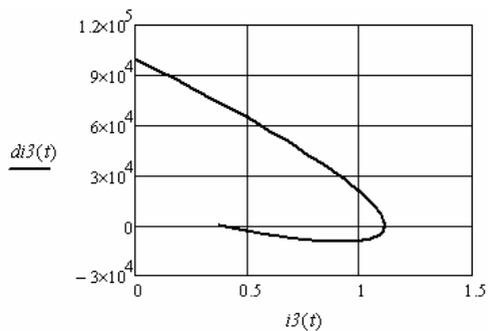


Рис. 1.25

Пример 1.9. Необходимо рассчитать колебательный переходный процесс в электрической цепи (рис. 1.19), выбрав соответствующее значение сопротивления второго резистора.

Сопротивление второго резистора должно быть меньше, чем критическое, найденное в примере 1.8.

Введём в листинг решения исходные данные. Найдём корни характеристического уравнения цепи, убедимся, что они комплексные. Оценим время переходного процесса.

$$\begin{aligned}
 R1 &:= 200 & R2 &:= 10 & C &:= 10^{-6} & L &:= 10^{-3} & E &:= 100 \\
 P &:= 0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{R1}{p \cdot R1 \cdot C + 1} \right) \text{solve}, p \rightarrow \begin{pmatrix} -7500 - 2500 \cdot \sqrt{159} \cdot j \\ -7500 + 2500 \cdot \sqrt{159} \cdot j \end{pmatrix} \\
 \alpha &:= \text{Re}(P_1) = -7.5 \times 10^3 & \omega &:= \text{Im}(P_1) = 3.152 \times 10^4 & T &:= \left| \alpha^{-1} \right| \cdot 3 = 4 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

Введём в листинг решения начальное и принуждённое значение третьего тока и определим значение производной от выражения для переходного тока при $t = 0$ аналогично примеру 1.7.

$$i3_n := 0 \quad i3_{np} := \frac{E}{R1 + R2} \quad di3_n := E \cdot L^{-1}$$

Система уравнений для определения постоянных интегрирования с учётом (1.4) примет вид

$$\begin{cases} i_3(0) = i_{3,np}(0) + A \sin \theta \\ i_3'(0) = i_{3,np}'(0) + A(\omega \cos \theta - \alpha \sin \theta) \end{cases}$$

Введём данную систему в листинг решения и найдём постоянные интегрирования.

$$\begin{aligned}
 A &:= 0 & \theta &:= 1 & \text{Given} \\
 i3_n &= i3_{np} + A \cdot \sin(\theta) & di3_n &= A \cdot (\omega \cdot \cos(\theta) - \alpha \cdot \sin(\theta)) \\
 D &:= \text{Find}(A, \theta) = \begin{pmatrix} 3.32 \\ -0.144 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Запишем решение для третьего тока и найдём остальные переходные токи и напряжения.

$$\begin{aligned}
 i3(t) &:= i3_{np} + D_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + D_1) & di3(t) &:= \frac{d}{dt} i3(t) & uL(t) &:= L \cdot di3(t) \\
 uC(t) &:= R2 \cdot i3(t) + uL(t) & i2(t) &:= C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) & i1(t) &:= i2(t) + i3(t)
 \end{aligned}$$

На рис. 1.26 и 1.27 приведены полученные переходные токи и напряжения, а на рис. 1.28 фазовый портрет третьего тока.

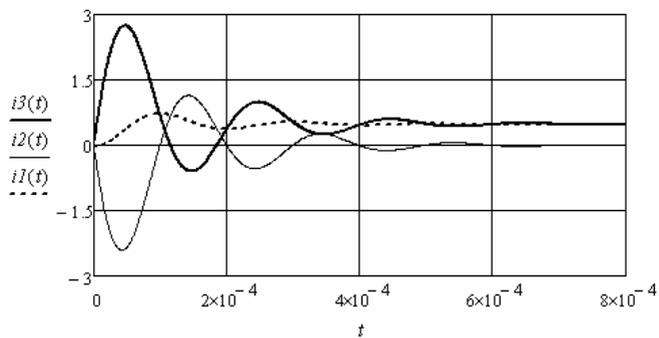


Рис. 1.26

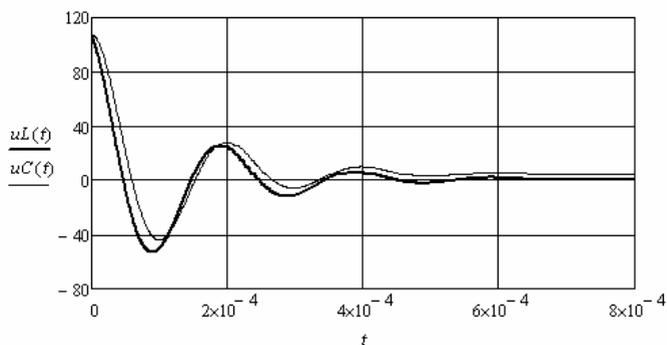


Рис. 1.27

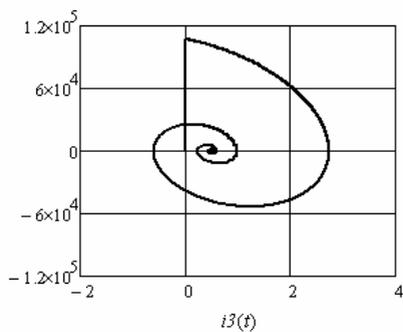


Рис. 1.28

Примеры анализа переходных процессов в цепях с источниками гармонической ЭДС

Пример 1.10. Необходимо найти переходные токи и переходные напряжения на реактивных элементах в электрической цепи (рис. 1.29), где источник ЭДС синусоидальный.

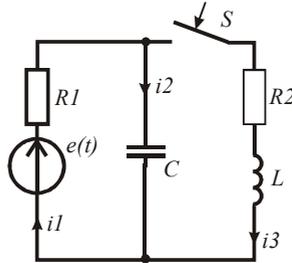


Рис. 1.29

Введём в листинг решения исходные данные, найдём корни характеристического уравнения цепи и оценим характер и длительность переходного процесса.

$$R1 := 400 \quad R2 := 50 \quad C := 2 \cdot 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad \omega := 3000$$

$$\psi := 0.4 \quad Em := 100 \quad e(t) := Em \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

$$P := 0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{R1}{p \cdot R1 \cdot C + 1} \right) \text{ solve, } p \rightarrow \left(\begin{array}{l} -625 \cdot \sqrt{241} - 25625 \\ 625 \cdot \sqrt{241} - 25625 \end{array} \right)$$

$$T := \left| (P_1)^{-1} \right| \cdot 3 = 1.884 \times 10^{-4}$$

Рассчитаем токи и напряжения в заданной цепи до коммутации. Так как источник синусоидальный, для решения используем комплексную плоскость.

$$E := Em \cdot \exp(j \cdot \psi) \quad xC := (\omega \cdot C)^{-1} = 166.667 \quad xL := \omega \cdot L = 3$$

$$Ily := \frac{E}{R1 - j \cdot xC} \quad iIy(t) := |Ily| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Ily)) \quad i2y(t) := iIy(t)$$

$$UCy := \frac{E \cdot (-j \cdot xC)}{R1 - j \cdot xC} = 27.451 - 26.94j \quad uCy(t) := |UCy| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(UCy))$$

Найдём выражение для принуждённой составляющей третьего тока.

$$I_{np} := \frac{E}{R1 + \frac{(R2 + j \cdot xL) \cdot (-j \cdot xC)}{R2 + j \cdot xL - j \cdot xC}}$$

$$I_{3np} := I_{np} \cdot \frac{-j \cdot xC}{R2 + j \cdot xL - j \cdot xC}$$

$$i_{3np} := \text{Im}(I_{3np}) = 0.028$$

$$i_{3np}(t) := |I_{3np}| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_{3np})) \text{ float}, 4 \rightarrow 0.2176 \cdot \sin(3000.0 \cdot t + 0.1291)$$

$$di_{3np}(t) := \frac{d}{dt} i_{3np}(t) \text{ simplify, float}, 4 \rightarrow 652.8 \cdot \cos(3000.0 \cdot t + 0.1291)$$

Для определения свободных составляющих используем выражение (1.2). Используя общий подход к определению постоянных интегрирования, дополним выражение для переходного тока производной от этого выражения и рассмотрим полученную систему из двух уравнений при $t = 0$.

$$\begin{cases} i_3(0) = i_{3,np}(0) + A_1 + A_2 \\ i_3'(0) = i_{3,np}'(0) + p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{cases}$$

В полученной системе уравнений кроме постоянных интегрирования неизвестны левые части уравнений. Начальное значение третьего тока равно нулю по первому закону коммутации. Из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для контура R_2LC , при $t = 0$ следует: $u_C(0) = Li_3'(0)$. Напряжение на конденсаторе равно докоммутационному значению по второму закону коммутации. Определим необходимые составляющие системы уравнений и найдём постоянные интегрирования.

$$i_{3n} := 0 \quad di_{3np} := di_{3np}(0) = 647.368 \quad di_{3n} := \frac{u_C(0)}{L} = -2.694 \times 10^4$$

$$A1 := 0. \quad A2 := 0 \quad \text{Given}$$

$$i_{3n} = i_{3np} + A1 + A2 \quad di_{3n} = A1 \cdot P_0 + A2 \cdot P_1 + di_{3np} \quad D := \text{Find}(A1, A2)$$

Составим выражение для третьего тока на интервале переходного процесса и найдём выражения для остальных токов и напряжений.

$$i_3(t) := i_{3np}(t) + D_0 \cdot \exp(P_0 \cdot t) + D_1 \cdot \exp(P_1 \cdot t) \quad uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i_3(t) \right)$$

$$u_C(t) := R2 \cdot i_3(t) + uL(t) \quad i_2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} u_C(t) \right) \quad di_3(t) := \frac{d}{dt} i_3(t)$$

$$i_1(t) := i_2(t) + i_3(t)$$

Окончательное выражение, например для третьего тока, можно получить следующим образом:

$$i3(t)_{float,4} \rightarrow 0.2176 \cdot \sin(3000.0 \cdot t + 0.1291) + -1.473 \cdot e^{-15922.0t} + 1.445 \cdot e^{-35327.0t}$$

Объединим выражения для интервалов времени до и после коммутации и построим соответствующие графики. На рис. 1.30 показаны переходные токи, а на рис. 1.31 переходные напряжения на реактивных элементах. На рис. 1.32 показан фазовый портрет третьего тока.

$$\begin{aligned} i_{\partial 1}(t) &:= \text{if}(t < 0, i1y(t), i1(t)) & i_{\partial 2}(t) &:= \text{if}(t < 0, i2y(t), i2(t)) \\ i_{\partial 3}(t) &:= \text{if}(t < 0, 0, i3(t)) & u_{\partial C}(t) &:= \text{if}(t < 0, uCy(t), uC(t)) \\ u_{\partial L}(t) &:= \text{if}(t < 0, 0, uL(t)) \end{aligned}$$

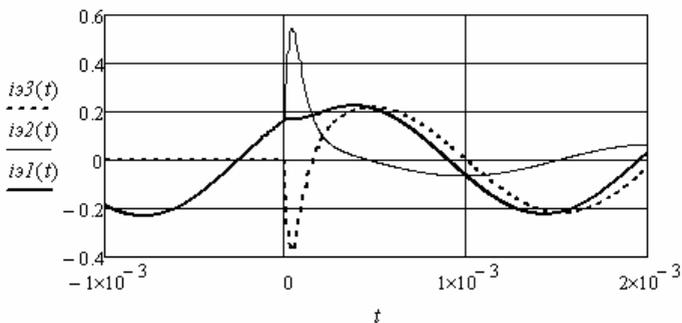


Рис. 1.30

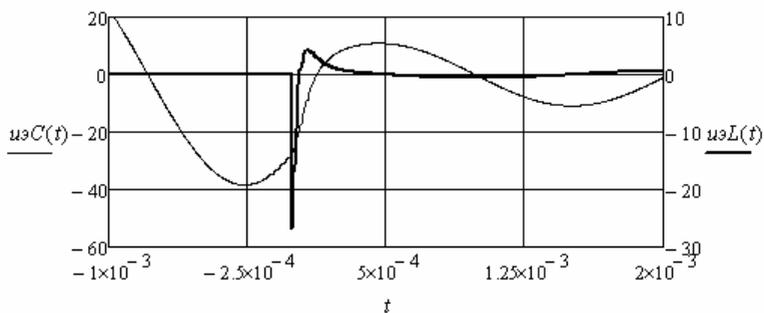


Рис. 1.31

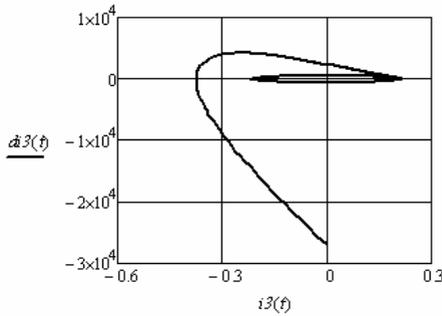


Рис. 1.32

Пример 1.11. Необходимо найти переходные токи и переходные напряжения на реактивных элементах в электрической цепи, приведённой на рис. 1.29, если источник ЭДС синусоидальный, а характер переходного процесса критический. Для достижения критического переходного процесса подобрать сопротивление резистора RI .

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R2 := 50 \quad C := 2 \cdot 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad \omega := 3000$$

$$\psi := 0.4 \quad Em := 100 \quad e(t) := Em \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

Найдём выражения для корней характеристического уравнения.

$$0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{RI}{p \cdot RI \cdot C + 1} \right) \text{solve}, p \rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{25000 \cdot RI + 5000 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{RI^2 - 100 \cdot RI + 500} + 250000}{RI} \\ \frac{25000 \cdot RI - 5000 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{RI^2 - 100 \cdot RI + 500} + 250000}{RI} \end{array} \right)$$

Найдём значения RI , при которых подкоренное выражение в корнях равно нулю. Возьмём большее значение.

$$R := 0 = (RI^2 - 100 \cdot RI + 500) \text{solve}, RI \rightarrow \left(\begin{array}{l} 20 \cdot \sqrt{5} + 50 \\ 50 - 20 \cdot \sqrt{5} \end{array} \right) \quad RI := R_0 = 94.721$$

Определим значения корней характеристического уравнения при выбранном сопротивлении первого резистора и оценим длительность переходного процесса.

$$P := 0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{RI}{p \cdot RI \cdot C + 1} \right) \text{solve}, p \rightarrow \left(\begin{array}{l} -27639.320311986007784 \\ -27639.32013801819795 \end{array} \right)$$

$$T := \left| (P_1)^{-1} \right| \cdot 3 = 1.085 \times 10^{-4}$$

Рассчитаем токи и напряжения в заданной цепи до коммутации. Так как источник синусоидальный, для решения используем комплексную плоскость.

$$E := Em \cdot \exp(j \cdot \psi) \quad xC := (\omega \cdot C)^{-1} = 166.667 \quad xL := \omega \cdot L = 3$$

$$Ily := \frac{E}{R1 - j \cdot xC} \quad i1y(t) := |Ily| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(Ily)) \quad i2y(t) := i1y(t)$$

$$UCy := \frac{E \cdot (-j \cdot xC)}{R1 - j \cdot xC} = 86.348 - 10.132j \quad uCy(t) := |UCy| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(UCy))$$

Найдём выражение для принуждённой составляющей третьего тока.

$$I3np := \frac{E}{R1 + \frac{(R2 + j \cdot xL) \cdot (-j \cdot xC)}{R2 + j \cdot xL - j \cdot xC}} \quad I3np := I1np \cdot \frac{-j \cdot xC}{R2 + j \cdot xL - j \cdot xC}$$

$$i3npn := \text{Im}(I3np) = 0.125$$

$$i3np(t) := |I3np| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I3np)) \text{ float}, 4 \rightarrow 0.6829 \cdot \sin(3000.0 \cdot t + 0.1838)$$

Для определения свободных составляющих используем выражение (1.3). Используя общий подход к определению постоянных интегрирования дополним выражение для переходного тока производной от этого выражения и рассмотрим полученную систему из двух уравнений при $t = 0$.

$$\begin{cases} i_3(0) = i_{3,np}(0) + A_1 \\ i_3'(0) = i_{3,np}'(0) + A_1 p + A_2 \end{cases}$$

В полученной системе уравнений кроме постоянных интегрирования неизвестны левые части уравнений. Начальное значение третьего тока равно нулю по первому закону коммутации. Из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для контура R_2LC , при $t = 0$ следует: $u_c(0) = Li_3'(0)$. Напряжение на конденсаторе равно докоммутационному значению по второму закону коммутации. Определим необходимые составляющие системы уравнений и найдём постоянные интегрирования.

$$di3np(t) := \frac{d}{dt} i3np(t) \text{ simplify, float}, 4 \rightarrow 2049.0 \cdot \cos(3000.0 \cdot t + 0.1838)$$

$$i3n := 0 \quad di3npn := di3np(0) \quad di3n := \frac{uCy(0)}{L}$$

$$A1 := 0. \quad A2 := 0 \quad \text{Given}$$

$$i3n = i3npn + A1 \quad di3n = A1 \cdot P_0 + A2 + di3npn \quad D := \text{Find}(A1, A2)$$

Составим выражение для третьего тока на интервале переходного процесса и найдём выражения для остальных токов и напряжений.

$$i3(t) := i3np(t) + (D_0 + D_1 \cdot t) \cdot \exp(P_0 \cdot t) \quad uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right) \quad di3(t) := \frac{d}{dt} i3(t)$$

$$uC(t) := R2 \cdot i3(t) + uL(t) \quad i2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

$$i3(t) \text{ float}, 4 \rightarrow 0.6829 \cdot \sin(3000.0 \cdot t + 0.1838) + -1.0 \cdot e^{-27639.0t} \cdot (15595.0 \cdot t + 0.1248)$$

Объединим выражения для интервалов времени до и после коммутации и построим соответствующие графики. На рис. 1.33 показаны переходные токи, а на рис. 1.34 переходные напряжения на реактивных элементах. На рис. 1.35 показан фазовый портрет третьего тока.

$$\begin{aligned} i\text{э}1(t) &:= \text{if}(t < 0, i1y(t), i1(t)) & i\text{э}2(t) &:= \text{if}(t < 0, i2y(t), i2(t)) \\ i\text{э}3(t) &:= \text{if}(t < 0, 0, i3(t)) & u\text{э}C(t) &:= \text{if}(t < 0, uCy(t), uC(t)) \\ u\text{э}L(t) &:= \text{if}(t < 0, 0, uL(t)) \end{aligned}$$

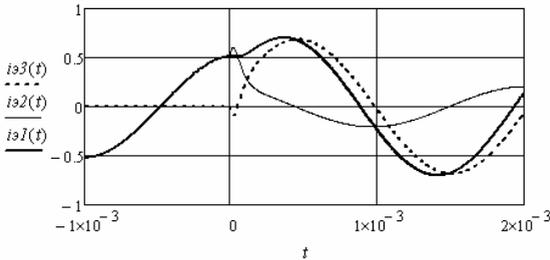


Рис. 1.33

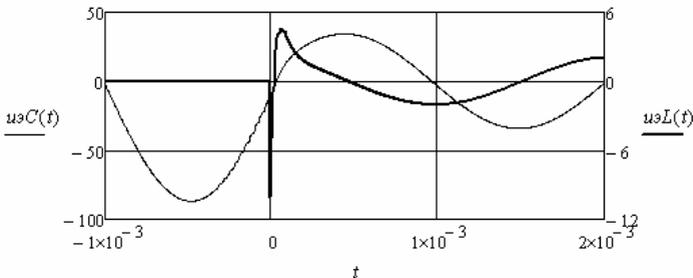


Рис. 1.34

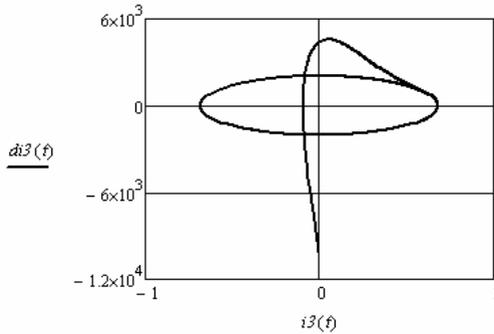


Рис. 1.35

Пример 1.12. Необходимо найти переходные токи и переходные напряжения на реактивных элементах в электрической цепи, приведённой на рис. 1.29, если источник ЭДС синусоидальный, а характер переходного процесса колебательный. Для достижения колебательного переходного процесса необходимо подобрать сопротивление резисторов $R1$ и $R2$.

Введём в листинг решения исходные данные, увеличив по сравнению с предыдущим примером $R1$ и уменьшив $R2$.

$$R1 := 400 \quad R2 := 20 \quad C := 2 \cdot 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad \omega := 3000 \quad \psi := 0.4$$

$$Em := 100 \quad e(t) := Em \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

Определим значения корней характеристического уравнения и оценим длительность переходного процесса.

$$P := 0 = \left(R2 + p \cdot L + \frac{R1}{p \cdot R1 \cdot C + 1} \right) \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} -10625 - 625 \cdot \sqrt{1055} \cdot j \\ -10625 + 625 \cdot \sqrt{1055} \cdot j \end{pmatrix}$$

$$\alpha := \text{Re}(P1) \quad \omega\omega := \text{Im}(P1) \quad T := (|\alpha|)^{-1} \cdot 3 = 2.824 \times 10^{-4}$$

Рассчитаем токи и напряжения в заданной цепи до коммутации. Так как источник синусоидальный, для решения используем комплексную плоскость.

$$E := Em \cdot \exp(j \cdot \psi) \quad xC := (\omega \cdot C)^{-1} \quad xL := \omega \cdot L \quad I1y := \frac{E}{R1 - j \cdot xC}$$

$$i1y(t) := |I1y| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I1y)) \quad i2y(t) := i1y(t)$$

$$UCy := \frac{E \cdot (-j \cdot xC)}{R1 - j \cdot xC} \quad uCy(t) := |UCy| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(UCy))$$

Найдём выражение для принуждённой составляющей третьего тока.

$$I_{1np} := \frac{E}{R1 + \frac{(R2 + j \cdot xL) \cdot (-j \cdot xC)}{R2 + j \cdot xL - j \cdot xC}} \quad I_{3np} := I_{1np} \cdot \frac{-j \cdot xC}{R2 + j \cdot xL - j \cdot xC}$$

$$I_{3npn} := \text{Im}(I_{3np})$$

$$i_{3np}(t) := |I_{3np}| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_{3np})) \text{ float}, 4 \rightarrow 0.2404 \cdot \sin(3000.0 \cdot t + 0.2771)$$

Для определения свободных составляющих используем выражение (1.4). Используя общий подход к определению постоянных интегрирования, дополним выражение для переходного тока производной от этого выражения и рассмотрим полученную систему из двух уравнений при $t = 0$.

$$\begin{cases} i_3(0) = i_{3,np}(0) + A \sin \theta \\ i_3'(0) = i_{3,np}'(0) + A(\omega_0 \cos \theta - \alpha \sin \theta) \end{cases}$$

В полученной системе уравнений кроме постоянных интегрирования A и θ неизвестны левые части уравнений. Начальное значение третьего тока равно нулю по первому закону коммутации. Из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для контура R_2LC , при $t = 0$ следует: $u_C(0) = L \cdot i_3'(0)$. Напряжение на конденсаторе равно докоммутационному значению по второму закону коммутации.

Определим необходимые составляющие системы уравнений и найдём постоянные интегрирования.

$$di_{3np}(t) := \frac{d}{dt} i_{3np}(t) \text{ simplify}, \text{float}, 4 \rightarrow 721.2 \cdot \cos(3000.0 \cdot t + 0.2771)$$

$$i_{3n} := 0 \quad di_{3npn} := di_{3np}(0) \quad di_{3n} := \frac{u_{Cy}(0)}{L}$$

$$A := 0.5 \quad \theta := 3 \quad \text{Given}$$

$$i_{3n} = I_{3npn} + A \cdot \sin(\theta) \quad di_{3n} = A \cdot (\omega_0 \cdot \cos(\theta) - \alpha \cdot \sin(\theta)) + di_{3npn}$$

$$D := \text{Find}(A, \theta) = \begin{pmatrix} 1.328 \\ 3.191 \end{pmatrix}$$

Составим выражение для третьего тока на интервале переходного процесса и найдём выражения для остальных токов и напряжений.

$$i_3(t) := i_3 np(t) + D_0 \cdot \exp(\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + D_1) \quad di_3(t) := \frac{d}{dt} i_3(t) \quad uL(t) := L \cdot di_3(t)$$

$$uC(t) := R_2 \cdot i_3(t) + uL(t) \quad i_2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) \quad i_1(t) := i_2(t) + i_3(t)$$

Объединим выражения для интервалов времени до и после коммутации и построим соответствующие графики. На рис. 1.36 показаны переходные токи, а на рис. 1.37 переходные напряжения на реактивных элементах. На рис. 1.38 показан фазовый портрет третьего тока.

$$i_{\partial 1}(t) := if(t < 0, i_1 y(t), i_1(t)) \quad i_{\partial 2}(t) := if(t < 0, i_2 y(t), i_2(t))$$

$$i_{\partial 3}(t) := if(t < 0, 0, i_3(t)) \quad u_{\partial C}(t) := if(t < 0, u_{Cy}(t), uC(t))$$

$$u_{\partial L}(t) := if(t < 0, 0, uL(t))$$

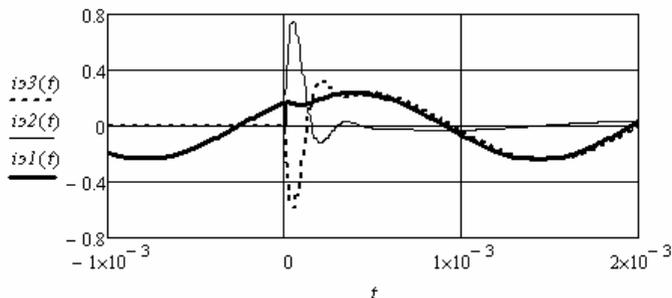


Рис. 1.36

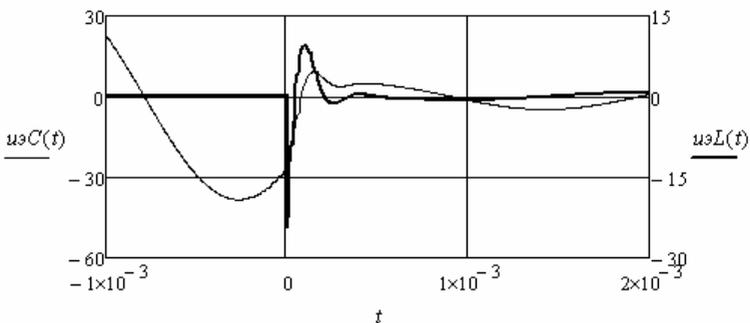


Рис. 1.37

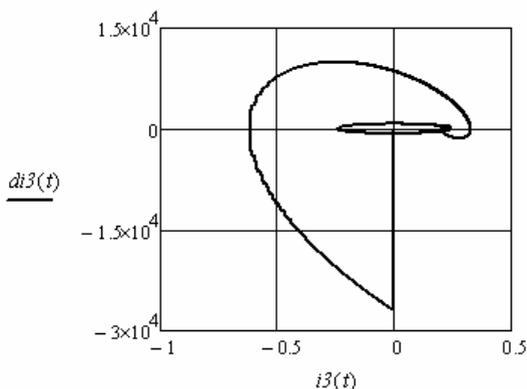


Рис. 1.38

Контрольные вопросы

1. В чём особенность классического метода анализа переходных процессов в электрических цепях?
2. Перечислите методы определения принуждённых составляющих переходных токов и напряжений.
3. Чем отличаются корректные коммутации от некорректных?
4. Какие переходные токи и напряжения имеют независимые начальные значения?
5. Что позволяют определить законы коммутации?
6. Что позволяют определить начальные значения и принуждённые значения в момент коммутации?
7. Как определить постоянные интегрирования?
8. Как составить характеристическое уравнение электрической цепи?
9. Какую информацию дают корни характеристического уравнения электрической цепи?
10. Каков характер переходного процесса, если два корня: вещественные и разные; вещественные и одинаковые; комплексно-сопряжённые?
11. Как определить постоянную времени цепи?
12. Как оценить длительность переходного процесса?
13. В каких случаях и для чего используют «декремент колебаний»?

14. Что является условием отсутствия переходного процесса в электрической цепи после коммутации?
15. Что такое перенапряжение и переток?
16. Как построить фазовый портрет переходного напряжения или переходного тока?
17. В чём сложность определения постоянных интегрирования в задачах высокого порядка?
18. Что определяет в программе функция *ORIGIN*?
19. С помощью какой функции программы находят численные значения корней уравнения?
20. С помощью какой функции программы ограничивают число разрядов, выводимых программой на рабочий стол?
21. С помощью какой функции программы решается система линейных уравнений?
22. Как изобразить на графике разноразмерные зависимости?

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Особенностью операторного метода анализа переходных процессов в электрических цепях является сопоставление линейных дифференциальных уравнений, параметры которых зависят от времени t , и алгебраических уравнений, параметры которых являются функциями комплексной переменной p . Любой функции времени t (оригиналу) соответствует функция p (изображение), полученная с помощью преобразований Лапласа. В основе решения задачи лежит операторная схема замещения послекоммутационной цепи и система уравнений в операторной форме, составленная либо по законам Кирхгофа, либо по методам контурных токов или узловых потенциалов. Переход от изображений переходных токов и напряжений к оригиналам осуществляется с помощью формул разложения или библиотеки преобразований Лапласа.

В общем случае изображения токов и напряжений представляют в виде дробной функции, например $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$. Если корни знаменателя вещественные, отрицательные и разные, то для определения оригинала используют выражение

$$i(t) = \sum_k \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \exp(p_k t), \quad (2.1)$$

где p_k – корни уравнения $M(p) = 0$; k – количество корней.

Если корни знаменателя вещественные, отрицательные и равные, то для определения составляющей оригинала от двух кратных корней общая формула разложения преобразуется к виду

$$i(t) = \left[\frac{d}{dp} \left\{ \frac{N(p)(p - p_1)^2 \exp(pt)}{M(p)} \right\} \right]_{p = p_1}.$$

Использование данного выражения в численных решениях приводит к нулевым результатам, так как в числителе есть множитель $(p - p_1)$, который равен нулю. Такой же множитель есть и в знаменателе, и их можно сократить, представив $M(p) = H(p)(p - p_1)^2$. В результате получим

$$i(t) = \left[\frac{d}{dp} \left\{ \frac{N(p)\exp(pt)}{H(p)} \right\} \right]_{p = p_1}. \quad (2.2)$$

Для пары комплексно-сопряжённых корней знаменателя $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$ формула разложения приводится к виду

$$i(t) = 2 \frac{|N(p_1)|}{|M'(p_1)|} \exp(-\alpha t) \cos(\omega_0 t + \theta), \quad (2.3)$$

где $\theta = \arg[N(p_1)] - \arg[M'(p_1)]$.

Мнимым корням соответствуют незатухающие колебания. В рассматриваемых примерах это принуждённые гармонические токи и напряжения.

2.1. Анализ переходных процессов в электрических цепях первого порядка

Примеры анализа переходных процессов операторным методом при корректных коммутациях

Пример 2.1. Необходимо найти операторным методом переходные токи и переходное напряжение на индуктивности в электрической цепи (рис. 1.1). Операторная схема замещения цепи приведена на рис. 2.1.

Введём в листинг решения исходные данные.

```
ORIGIN := 1    R1 := 20    R2 := 15    R3 := 18    L := 2·10-4    E := 100
```

Определим ток в ветви с индуктивностью в момент коммутации в докоммутационной схеме. Его значение необходимо для определения внутренней ЭДС индуктивности. Оно является начальным значением.

$$I_{2н} := \frac{E}{R1 + R2} = 2.857$$

Составим по законам Кирхгофа систему уравнений в операторной форме и решим её относительно изображений переходных токов.

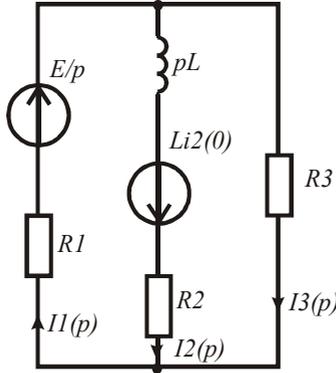


Рис. 2.1

$$A(p) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & R2 + p \cdot L & 0 \\ R1 & 0 & R3 \end{pmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{p} + L \cdot I_{2н} \\ \frac{E}{p} \end{pmatrix}$$

$$I(p) := \text{solve}(A(p), B(p)) \begin{matrix} \left| \begin{array}{l} \text{float}, 6 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{3.54839}{p} + \frac{0.436575}{p + 122368.0} \\ \frac{1.93548}{p} + \frac{0.921659}{p + 122368.0} \\ \frac{1.6129}{p} - \frac{0.485084}{p + 122368.0} \end{pmatrix}$$

Запишем выражение для изображения напряжения на индуктивности с учётом внутренней ЭДС.

$$UL(p) := I(p) \cdot 2 \cdot p \cdot L - L \cdot I_{2н}$$

Перейдём к оригиналу первого переходного тока с помощью формулы разложения. Выделим числитель и знаменатель изображения тока, найдём производную знаменателя и его корни.

$$NI(p) := \text{numer}(I(p)_1) \rightarrow 796993.0 \cdot p + 8.6841877504e10$$

$$M1(p) := \text{denom}(I(p)_1) \rightarrow 200000.0 \cdot p^2 + 2.44736e10 \cdot p$$

$$dM1(p) := \frac{d}{dp} M1(p) \rightarrow 400000.0 \cdot p + 2.44736e10$$

$$P := 0 = M1(p) \text{ solve } , p \rightarrow \begin{pmatrix} -122368.0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Составим выражение для оригинала первого тока.

$$i1(t) := \frac{NI(0)}{dM1(0)} + \frac{NI(P_1)}{dM1(P_1)} e^{P_1 \cdot t} \text{ float } , 4 \rightarrow 0.4366 \cdot e^{-122368.0t} + 3.548$$

Аналогичным образом получим выражения для второго, третьего токов и для напряжения на индуктивности.

$$N2(p) := \text{numer}(I(p)_2) \rightarrow 2.857139e6 \cdot p + 2.3684081664e11$$

$$M2(p) := \text{denom}(I(p)_2) \rightarrow 1.0e6 \cdot p^2 + 1.22368e11 \cdot p$$

$$dM2(p) := \frac{d}{dp} M2(p) \rightarrow 2.0e6 \cdot p + 1.22368e11$$

$$i2(t) := \frac{N2(0)}{dM2(0)} + \frac{N2(P_1)}{dM2(P_1)} e^{P_1 \cdot t} \text{ float } , 4 \rightarrow 0.9217 \cdot e^{-122368.0t} + 1.935$$

$$N3(p) := \text{numer}(I(p)_3) \rightarrow 140977.0 \cdot p + 2.46709184e10$$

$$M3(p) := \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow 125000.0 \cdot p^2 + 1.5296e10 \cdot p$$

$$dM3(p) := \frac{d}{dp} M3(p) \rightarrow 250000.0 \cdot p + 1.5296e10$$

$$i3(t) := \frac{N3(0)}{dM3(0)} + \frac{N3(P_1)}{dM3(P_1)} e^{P_1 \cdot t} \text{ float } , 4 \rightarrow -0.4851 \cdot e^{-122368.0t} + 1.613$$

$$N4(p) := \text{numer}(UL(p)) \rightarrow -9.642857143e9 \cdot p - 2.8195510125714287462e20$$

$$M4(p) := \text{denom}(UL(p)) \rightarrow 1.25e19 \cdot p + 1.5296e24$$

$$dM4(p) := \frac{d}{dp} M4(p) \rightarrow 1.25e19$$

$$uL(t) := \frac{N4(P_1)}{dM4(P_1)} e^{P_1 \cdot t} \text{ float}, 4 \rightarrow -22.56 \cdot e^{-122368.0t}$$

Полученные выражения идентичны выражениям, полученным классическим методом в примере 1.1. В данном случае постоянные интегрирования и установившиеся значения переменных находятся при переходе от изображений к оригиналам.

Пример 2.2. Необходимо найти операторным методом свободные составляющие переходных токов и свободную составляющую переходного напряжения на индуктивности в электрической цепи (рис. 1.7) с гармоническим источником. Определение отдельно свободных составляющих существенно облегчает анализ переходных процессов при источниках, изображение которых достаточно сложное. Операторная схема замещения цепи для определения свободных составляющих не содержит источников, а внутренние ЭДС реактивных элементов определяются через начальные значения свободных составляющих переходного тока или переходного напряжения (рис. 2.2).

Начальное значение свободной составляющей тока в индуктивности и параметры элементов цепи возьмём из примера 1.3.

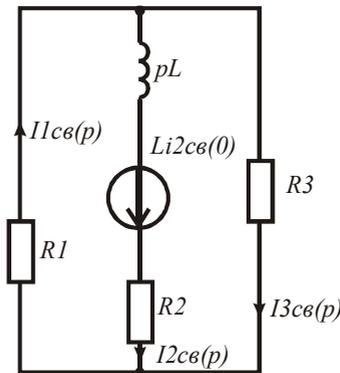


Рис. 2.2

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 20 \quad R2 := 15 \quad R3 := 40 \quad L := 4 \cdot 10^{-4} \quad i2_{свн} := -0.1766$$

Определим изображение свободной составляющей второго тока, используя метод свёртки.

$$I2_{св}(p) := \frac{L \cdot i2_{свн}}{L \cdot p + R2 + \frac{R1 \cdot R3}{R1 + R3}} \left| \begin{array}{l} \text{float}, 5 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{0.1766}{p + 70833.0}$$

Используя формулу разброса токов в параллельных ветвях, найдём изображения свободных составляющих первого и третьего токов.

$$I1_{св}(p) := I2_{св}(p) \cdot \frac{R3}{R1 + R3} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow -\frac{0.1177}{p + 70833.0}$$

$$I3_{св}(p) := -I2_{св}(p) \cdot \frac{R1}{R1 + R3} \left| \begin{array}{l} \text{float}, 4 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{0.05887}{p + 70833.0}$$

Изображение свободной составляющей напряжения на индуктивности находим как напряжение на участке индуктивности и источника, используя второй закон Кирхгофа.

$$UL_{св}(p) := I2_{св}(p) \cdot p \cdot L - L \cdot i2_{свн} \left| \begin{array}{l} \text{float}, 5 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{5.0036}{p + 70833.0}$$

С помощью обратного преобразования Лапласа находим оригиналы искоемых переменных.

$$uL_{св}(t) := UL_{св}(p) \text{ invlaplace}, p \rightarrow 5.0036 \cdot e^{-70833.0t}$$

$$i1_{св}(t) := I1_{св}(p) \text{ invlaplace}, p \rightarrow -0.1177 \cdot e^{-70833.0t}$$

$$i2_{св}(t) := I2_{св}(p) \text{ invlaplace}, p \rightarrow -0.1766 \cdot e^{-70833.0t}$$

$$i3_{св}(t) := I3_{св}(p) \text{ invlaplace}, p \rightarrow 0.05887 \cdot e^{-70833.0t}$$

Сравнивая полученные выражения с соответствующими составляющими выражений переходных переменных в примере 1.3, делаем вывод об их верности.

Пример 2.3. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на конденсаторе в электрической цепи (рис. 1.4). Операторная схема замещения цепи приведена на рис. 2.3.

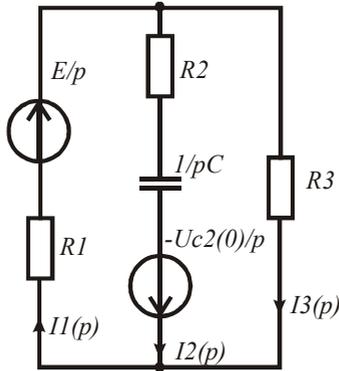


Рис. 2.3

Введём в листинг решения исходные данные.

`ORIGIN := 1 R1 := 20 R2 := 15 R3 := 18 C := 0.2·10-6 E := 100`

Определим начальное напряжение на конденсаторе, которое необходимо для определения внутренней ЭДС конденсатора.

`I1 := 0 I2 := 0 I3 := 0 UCh := E`

Составим по законам Кирхгофа систему уравнений в операторной форме и решим её относительно изображений переходных токов.

$$A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & R2 + (p \cdot C)^{-1} & 0 \\ R1 & 0 & R3 \end{bmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{p} - \frac{UCh}{p} \\ \frac{E}{p} \end{pmatrix}$$

$$I(p) := \text{solve}(A(p), B(p)) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 6 \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2.63158}{p} - \frac{1.01868}{p + 204301.0} \\ -\frac{2.15054}{p + 204301.0} \\ \frac{3500.0 \cdot p + 5.0e8}{p \cdot (930.0 \cdot p + 1.9e8)} \end{bmatrix}$$

Запишем выражение для изображения напряжения на конденсаторе с учётом внутренней ЭДС.

$$UC(p) := I(p)_2 \cdot (p \cdot C)^{-1} + \frac{UC_H}{p} \quad UC(p) \text{ float}, 6 \rightarrow \frac{100.0}{p} - \frac{1.07527e7}{p \cdot (p + 204301.0)}$$

Перейдём к оригиналу первого переходного тока с помощью формулы разложения. Выделим числитель и знаменатель изображения тока, найдём производную знаменателя и его корни.

$$NI(p) := \text{numer}(I(p)_1) \rightarrow 80645.0 \cdot p + 2.6881721279e10$$

$$MI(p) := \text{denom}(I(p)_1) \rightarrow 50000.0 \cdot p^2 + 1.021505e10 \cdot p$$

$$dMI(p) := \frac{d}{dp} MI(p) \rightarrow 100000.0 \cdot p + 1.021505e10$$

$$P := 0 = MI(p) \text{ solve}, p \rightarrow \begin{pmatrix} -204301.0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Составим выражение для оригинала первого тока.

$$i1(t) := \frac{NI(0)}{dMI(0)} + \left(\frac{NI(P_1)}{dMI(P_1)} \right) e^{P_1 \cdot t} \text{ float}, 4 \rightarrow -1.019 \cdot e^{-204301.0t} + 2.632$$

Выражение для изображения второго тока достаточно простое. Воспользуемся библиотекой программы и выполним обратное преобразование Лапласа с помощью соответствующего оператора панели *Symbolic*.

$$i2(t) := I(p)_2 \text{ invlaplace}, p \rightarrow -2.15054 \cdot e^{-204301.0t}$$

Выражения для оригиналов третьего тока и напряжения на конденсаторе получим с помощью формулы разложения.

$$N3(p) := \text{numer}(I(p)_3) \rightarrow 3500.0 \cdot p + 5.0e8$$

$$M3(p) := \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow 1.0 \cdot p \cdot (930.0 \cdot p + 1.9e8)$$

$$dM3(p) := \frac{d}{dp} M3(p) \rightarrow 1860.0 \cdot p + 1.9e8$$

$$i3(t) := \frac{N3(0)}{dM3(0)} + \left(\frac{N3(P_1)}{dM3(P_1)} \right) e^{P_1 \cdot t} \text{ float}, 4 \rightarrow 1.132 \cdot e^{-204301.0t} + 2.632$$

$$N4(p) := \text{numer}(UC(p)) \rightarrow 100.0 \cdot p + 9.6774e6$$

$$M4(p) := \text{denom}(UC(p)) \rightarrow p^2 + 204301.0 \cdot p$$

$$dM4(p) := \frac{d}{dp} M4(p) \rightarrow 2 \cdot p + 204301.0$$

$$u_C(t) := \frac{N4(0)}{dM4(0)} + \left(\frac{N4(P_1)}{dM4(P_1)} \right) e^{P_1 \cdot t} \text{float}, 4 \rightarrow 52.63 \cdot e^{-204301.0t} + 47.37$$

Полученные выражения идентичны выражениям, полученным классическим методом в примере 1.2. В данном случае постоянные интегрирования и установившиеся значения переменных находятся при переходе от изображений к оригиналам.

Пример 2.4. Необходимо найти операторным методом свободные составляющие переходных токов и свободную составляющую переходного напряжения на конденсаторе в электрической цепи (рис. 1.11) с гармоническим источником. Определение отдельно свободных составляющих существенно облегчает анализ переходных процессов при источниках, изображение которых достаточно сложное. Операторная схема замещения цепи для определения свободных составляющих не содержит источников, а внутренние ЭДС реактивных элементов определяются через начальные значения свободных составляющих переходного тока или переходного напряжения (рис. 2.4).

Начальное значение свободной составляющей тока в индуктивности и параметры элементов цепи возьмём из примера 1.4. Индекс «св» опустим.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 20 \quad R2 := 15 \quad R3 := 18 \quad C := 10^{-6} \cdot 0.2 \quad u_{Cн} := -25.491$$

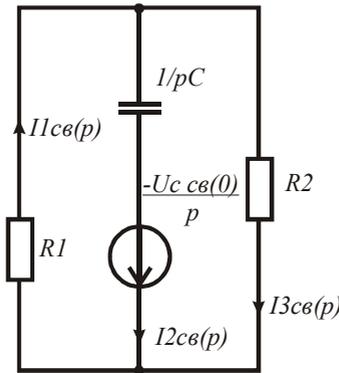


Рис. 2.4

Определим изображение свободной составляющей второго тока, используя метод свёртки.

$$I2(p) := \frac{\frac{-u_{Cн}}{p}}{(C \cdot p)^{-1} + R2 + \frac{R1 \cdot R3}{R1 + R3}} \left| \begin{array}{l} \text{float}, 4 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1.042}{p + 204298.0}$$

Используя формулу разброса токов в параллельных ветвях, найдём изображения свободных составляющих первого и третьего токов.

$$I1(p) := I2(p) \cdot \frac{R3}{R1 + R3} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \frac{0.4936}{p + 204300.0}$$

$$I3(p) := -I2(p) \cdot \frac{R1}{R1 + R3} \left| \begin{array}{l} \text{float}, 4 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{0.5484}{p + 204300.0}$$

Изображение свободной составляющей напряжения на конденсаторе находим как напряжение на участке конденсатора и источника, используя второй закон Кирхгофа.

$$UC(p) := I2(p) \cdot (p \cdot C)^{-1} + \frac{u_{Cн}}{p} \left| \begin{array}{l} \text{float}, 4 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{0.01096}{p} - \frac{25.5}{p + 204298.0}$$

В полученном выражении появилось изображение константы, которой в свободных составляющих не может быть. Величина константы мала, и её следует рассматривать как погрешность вычислений из-за округления используемых чисел. Данное слагаемое отбрасывается.

С помощью обратного преобразования Лапласа находим оригиналы искомых переменных.

$$u_C(t) := -\frac{25.5}{p + 204298.0} \text{ invlaplace}, p \rightarrow -25.5 \cdot e^{-204298.0t}$$

$$i1(t) := I1(p) \text{ invlaplace}, p \rightarrow 0.4936 \cdot e^{-204300.0t}$$

$$i2(t) := I2(p) \text{ invlaplace}, p \rightarrow 1.042 \cdot e^{-204298.0t}$$

$$i3(t) := I3(p) \text{ invlaplace}, p \rightarrow -0.5484 \cdot e^{-204300.0t}$$

Сравнивая полученные выражения с соответствующими составляющими выражений переходных переменных в примере 1.4, делаем вывод об их верности.

Примеры анализа переходных процессов операторным методом при некорректных коммутациях

Пример 2.5. Необходимо найти операторным методом переходный ток в ветви с индуктивностями после некорректной коммутации (рис. 1.15). Операторная схема замещения послекоммутационной схемы приведена на рис. 2.5.

Определим начальное значение тока в ветви с индуктивностями аналогично примеру 1.5, используя первый обобщённый закон коммутации.

Введём в листинг решения исходные данные.

```
ORIGIN := 1  R1 := 100  R2 := 150  R3 := 80  R4 := 20  R5 := 250  R6 := 200
L1 := 6·10-4  L2 := 4·10-4  ω := 106  e(t) := 100·sin(ω·t)  J(t) := 1.5·sin(ω·t + π)
```

Найдём установившиеся значения искомым токов в заданной цепи до коммутации. Так как напряжение и ток источников являются синусоидальными, решение переносим на комплексную плоскость. Найдём контурные токи.

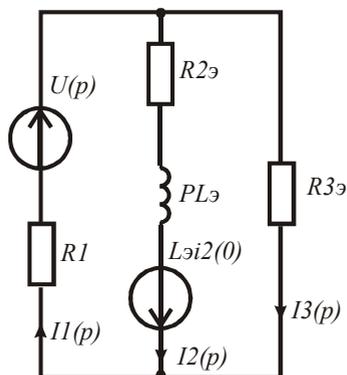


Рис. 2.5

$$x1 := \omega \cdot L1 \quad x2 := \omega \cdot L2 \quad E := 100 \quad J := -1.5$$

$$D1 := \begin{bmatrix} R1 + R2 + R3 + j \cdot (x1 + x2) & -(R2 + j \cdot x1) & R4 + j \cdot x2 \\ -(R2 + j \cdot x1) & R2 + R3 + j \cdot x1 & R6 \\ R4 + j \cdot x2 & R6 & R4 + R5 + R6 + j \cdot x2 \end{bmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} E \\ J \cdot R6 \\ J \cdot R6 \end{pmatrix}$$

$$Ik := \text{lsolve}(D1, D2) \quad I2y := Ik_1 - Ik_2 \quad I4y := Ik_1 + Ik_2$$

Найдём мгновенные значения токов в момент коммутации при $t = 0$ и определим начальное значение тока в ветви с индуктивностями после коммутации.

$$i2y := \text{Im}(I2y) \quad i4y := \text{Im}(I4y) \quad i2н := \frac{L1 \cdot i2y + L2 \cdot i4y}{L1 + L2} = 0.263$$

С помощью операторной схемы замещения цепи методом контурных токов составим систему уравнений в операторной форме и найдём изображения контурных токов. Затем найдём изображение тока в ветви с индуктивностями.

$$R2э := R2 + R4 \quad Lэ := L1 + L2 \quad R3э := R3 + R5 \quad E(p) := \frac{\omega \cdot 100}{\omega^2 + p^2}$$

$$D3(p) := \begin{pmatrix} R1 + R2э + p \cdot Lэ & R2э + p \cdot Lэ \\ R2э + p \cdot Lэ & R3э + R2э + p \cdot Lэ \end{pmatrix} \quad D4(p) := \begin{pmatrix} E(p) + Lэ \cdot i2н \\ Lэ \cdot i2н \end{pmatrix}$$

$$IK(p) := \text{Isolve}(D3(p), D4(p)) \quad I2(p) := IK(p)_1 + IK(p)_2$$

Выделим числитель и знаменатель изображения искомого тока. Найдём корни знаменателя и производную знаменателя.

$$N2(p) := \text{numer}(I2(p)) \text{ float}, 6 \rightarrow 1.13154e18 \cdot p^2 + 1.46154e30$$

$$M2(p) := \text{denom}(I2(p)) \text{ float}, 6 \rightarrow 4.3e30 \cdot p + 1.061e24 \cdot p^2 + 4.3e18 \cdot p^3 + 1.061e36$$

$$dM2(p) := \frac{d}{dp} M2(p) \quad P := 0 = M2(p) \text{ solve}, p, \text{float}, 6 \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0e6j \\ -1.0e6j \\ -246744.0 \end{pmatrix}$$

Перейдём к оригиналу искомого тока с помощью формул разложения.

$$\theta := \arg(N2(P_1)) - \arg(dM2(P_1))$$

$$i2(t) := \frac{N2(P_3)}{dM2(P_3)} \cdot \exp(P_3 \cdot t) + \frac{2 \cdot |N2(P_1)|}{|dM2(P_1)|} \cos(\text{Im}(P_1) \cdot t + \theta)$$

$$i2(t) \text{ float}, 4 \rightarrow 0.3355 \cdot e^{-246744.0t} + 0.07451 \cdot \cos(1.0e6 \cdot t - 2.9)$$

Данное выражение совпадает с выражением, полученным в примере 1.5.

Пример 2.6. Необходимо найти операторным методом переходное напряжение на конденсаторах после некорректной коммута-

ции (рис. 1.17). Операторная схема замещения послекоммутацион-
ной схемы приведена на рис. 2.6.

Определим начальное значение напряжения на конденсато-
рах аналогично примеру 1.6, используя второй обобщённый закон
коммутации.

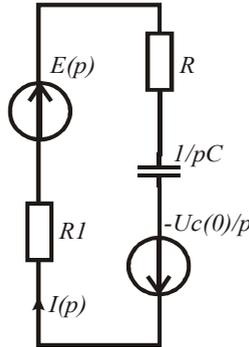


Рис. 2.6

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 10 \quad R2 := 10 \quad R3 := 20 \quad C1 := 2 \cdot 10^{-6} \quad C2 := 3 \cdot 10^{-6}$$

$$ORIGIN := 1 \quad \omega := 10^5 \quad \psi := -0.5 \quad e(t) := 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

Найдём установившиеся значения напряжений на конденсато-
рах в заданной цепи до коммутации. Так как напряжение источника
является синусоидальными, решение переносим на комплексную
плоскость. Используем метод свёртки и формулу разброса токов
в параллельных ветвях.

$$x1 := (\omega \cdot C1)^{-1} \quad x2 := (\omega \cdot C2)^{-1} \quad E := 100 \cdot \exp(j \cdot \psi)$$

$$I1y := E \cdot \left[R1 + \frac{(R2 - j \cdot x1) \cdot (R3 - j \cdot x2)}{R2 + R3 - j \cdot (x1 + x2)} \right]^{-1} \quad I2y := I1y \cdot \frac{(R3 - j \cdot x2)}{[R2 + R3 - j \cdot (x1 + x2)]}$$

$$I3y := I1y - I2y \quad U1y := I2y \cdot (-j \cdot x1) \quad U2y := I3y \cdot (-j \cdot x2)$$

Найдём мгновенные значения напряжений в момент комму-
тации при $t = -0$ и определим начальное значение напряжения на
конденсаторах после коммутации.

$$u1y := \text{Im}(U1y) \quad u2y := \text{Im}(U2y) \quad un := \frac{C1 \cdot u1y + C2 \cdot u2y}{C1 + C2} = -11.046$$

С помощью операторной схемы замещения цепи и изображения напряжения источника найдём изображение напряжения на конденсаторах.

$$C := C1 + C2 \quad R := \frac{R2 \cdot R3}{R2 + R3} \quad E(p) := \left(\frac{p \cdot \sin(\psi) + \omega \cdot \cos(\psi)}{\omega^2 + p^2} \right) \cdot 100$$

$$I(p) := \frac{E(p) - \frac{uH}{p}}{R1 + R + (p \cdot C)^{-1}} \quad UC(p) := E(p) - I(p) \cdot (R1 + R)$$

$$UC(p) \text{ simplify, float, 6} \rightarrow \frac{0.0163303}{p + 12000.0} - \frac{1.0 \cdot (11.0621 \cdot p + 442566.0)}{p^2 + 1.0e10}$$

Выделим числитель и знаменатель изображения искомого напряжения. Найдём корни и производную знаменателя.

$$N(p) := \text{numer}(UC(p)) \text{ float, 4} \rightarrow -5.753e20 \cdot p + -1.105e16 \cdot p^2 - 5.147e24$$

$$M(p) := \text{denom}(UC(p)) \rightarrow 1.0e15 \cdot p^3 + 1.2e19 \cdot p^2 + 1.0e25 \cdot p + 1.2e29$$

$$dM(p) := \frac{d}{dp} M(p) \rightarrow 2.4e19 \cdot p + 3.0e15 \cdot p^2 + 1.0e25$$

$$P := 0 = M(p) \text{ solve, p} \rightarrow \begin{pmatrix} 100000.0j \\ -100000.0j \\ -12000.0 \end{pmatrix}$$

Перейдём к оригиналу искомого напряжения с помощью формул разложения.

$$\theta := \arg(N(P_1)) - \arg(dM(P_1)) = -3.522$$

$$uC(t) := \frac{N(P_3)}{dM(P_3)} \cdot \exp(P_3 \cdot t) + \frac{2 \cdot |N(P_1)|}{|dM(P_1)|} \cos(\text{Im}(P_1) \cdot t + \theta)$$

$$uC(t) \text{ float, 4} \rightarrow 0.01631 \cdot e^{-12000.0t} + 11.92 \cdot \cos(100000.0 \cdot t - 3.522)$$

Данное выражение совпадает с выражением, полученным в примере 1.6. При использовании операторного метода нет необходимости находить отдельно постоянные интегрирования и принуждённые составляющие.

2.2. Анализ переходных процессов в электрических цепях второго порядка и выше

Достоинством операторного метода анализа переходных процессов является алгебраизация уравнений состояния электрической цепи относительно изображений искомых переходных токов и напряжений и достаточно простой переход от изображений к оригиналам.

В цепях второго порядка и выше из-за разнообразия видов корней характеристического уравнения при переходе от изображений к оригиналам необходимо пользоваться разными формулами разложения, которые приведены выше.

Примеры анализа переходных процессов операторным методом в цепях второго порядка

Пример 2.7. В электрической цепи (рис. 1.19) необходимо найти переходные токи и переходные напряжения на реактивных элементах операторным методом. Исходные данные возьмём из примера 1.7.

Операторная схема замещения цепи приведена на рис. 2.7.

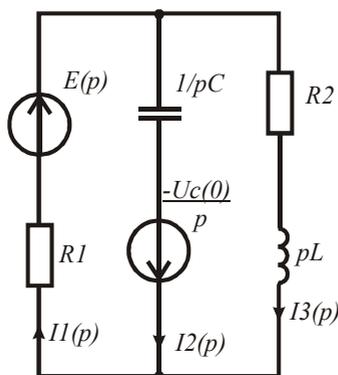


Рис. 2.7

Введём в листинг решения исходные данные и независимые начальные значения, которые возьмём из примера 1.7.

$$R1 := 200 \quad R2 := 200 \quad C := 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad E := 100$$

$$ORIGIN := 1 \quad i3n := 0 \quad uCn := E$$

Введём матрицы коэффициентов левой и правой частей системы линейных уравнений цепи в операторной форме.

$$A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ RI & (p \cdot C)^{-1} & 0 \\ RI & 0 & R2 + p \cdot L \end{bmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{p} + \frac{-E}{p} \\ \frac{E}{p} \end{pmatrix}$$

Решим систему уравнений относительно изображений неизвестных токов.

$$I(p) := \text{lsolve}(A(p), B(p)) \text{ simplify} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{500000000}{p \cdot (p^2 + 205000 \cdot p + 2000000000)} \\ - \frac{100000}{p^2 + 205000 \cdot p + 2000000000} \\ \frac{5 \cdot (20000 \cdot p + 100000000)}{p \cdot (p^2 + 205000 \cdot p + 2000000000)} \end{array} \right]$$

Для упрощения решения перейдём к оригиналу третьего тока, а с его помощью получим выражения для остальных неизвестных.

Выделим числитель и знаменатель изображения третьего тока. Найдём производную и корни знаменателя.

$$N(p) := \text{numer}(I(p)_3) \rightarrow 100000 \cdot p + 500000000$$

$$M(p) := \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow p \cdot (p^2 + 205000 \cdot p + 2000000000)$$

$$dM(p) := \frac{d}{dp} M(p) \text{ simplify} \rightarrow 3 \cdot p^2 + 410000 \cdot p + 2000000000$$

$$P := 0 = M(p) \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} 2500 \cdot \sqrt{1361} - 102500 \\ -2500 \cdot \sqrt{1361} - 102500 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Учитывая вид корней знаменателя выражения для третьего тока, при переходе от изображения к оригиналу используем формулу разложения (2.1).

$$i3(t) := \left(\frac{N(P_1)}{dM(P_1)} \right) \cdot e^{P_1 \cdot t} + \left(\frac{N(P_2)}{dM(P_2)} \right) \cdot e^{P_2 \cdot t} + \frac{N(0)}{dM(0)}$$

$$i3(t) \text{ simplify, float, 4} \rightarrow 0.2782 \cdot e^{-10270.0t} + -0.5282 \cdot e^{-194729.0t} + 0.25$$

Остальные неизвестные токи и напряжения находим следующим образом.

$$uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right) \quad uC(t) := R2 \cdot i3(t) + uL(t) \quad i2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right)$$

$$i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Легко убедиться, если построить графики переходных токов и напряжений, что полученные результаты совпадают с результатами примера 1.7.

Пример 2.8. Рассмотрим особенности использования операторного метода при критическом характере переходного процесса в электрической цепи, приведенной на рис. 1.19. Операторная схема замещения цепи приведена на рис. 2.7.

Введём в листинг решения исходные данные и независимые начальные значения из примера 1.8.

$$R1 := 200 \quad R2 := 68.2455532 \quad C := 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad E := 100$$

$$ORIGIN := 1 \quad i3н := 0 \quad uCн := E$$

Решим систему уравнений относительно неизвестных переходных токов аналогично примеру 2.7.

$$A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & (p \cdot C)^{-1} & 0 \\ R1 & 0 & R2 + p \cdot L \end{bmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{p} + \frac{-E}{p} \\ \frac{E}{p} \end{pmatrix}$$

$$I(p) := \text{solve}(A(p), B(p)) \text{ simplify} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{1.25e12}{2500.0 \cdot p^3 + 1.83113883e8 \cdot p^2 + 3.353069415e12 \cdot p} \\ - \frac{100000.0}{p^2 + 73245.5532 \cdot p + 1.341227766e9} \\ \frac{2.5e8 \cdot p + 1.25e12}{p \cdot (2500.0 \cdot p^2 + 1.83113883e8 \cdot p + 3.353069415e12)} \end{array} \right]$$

Для упрощения решения перейдём к оригиналу третьего тока, а с его помощью получим выражения для остальных неизвестных.

Выделим числитель и знаменатель изображения третьего тока. Найдём производную и корни знаменателя.

$$\begin{aligned}
 N(p) &:= \text{numer}(I(p)_3) \rightarrow 2.5e8 \cdot p + 1.25e12 \\
 M(p) &:= \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow 1.0 \cdot p \cdot (2500.0 \cdot p^2 + 1.83113883e8 \cdot p + 3.353069415e12) \\
 dM(p) &:= \frac{d}{dp} M(p) \text{ simplify} \rightarrow 7500.0 \cdot p^2 + 3.66227766e8 \cdot p + 3.353069415e12 \\
 P := 0 = M(p) \text{ solve, } p, \text{ float, } 5 &\rightarrow \begin{pmatrix} -36623.0 \\ -36623.0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Среди корней два одинаковых вещественных корня. Для перехода к оригиналу третьего тока воспользуемся выражением (2.2), определив предварительно его составляющие.

$$\begin{aligned}
 H(p) &:= 2500 \cdot p \quad Z(p) := \frac{d}{dp} \frac{N(p) \cdot \exp(p \cdot t)}{H(p)} \\
 Z(p) &\rightarrow \frac{100000.0 \cdot e^{p \cdot t}}{p} - \frac{e^{p \cdot t} \cdot (2.5e8 \cdot p + 1.25e12)}{2500 \cdot p^2} + \frac{t \cdot e^{p \cdot t} \cdot (2.5e8 \cdot p + 1.25e12)}{2500 \cdot p} \\
 i3_{св}(t) &:= Z(P_1) \text{ float, } 4 \rightarrow -0.3728 \cdot e^{-36623.0t} + 86347.0 \cdot t \cdot e^{-36623.0t}
 \end{aligned}$$

Полученный оригинал определяет свободную составляющую третьего тока. Принуждённую составляющую в формуле разложения определяет корень, равный нулю. Окончательные выражения для оригинала третьего тока и остальных неизвестных примут вид:

$$\begin{aligned}
 i3(t) &:= i3_{св}(t) + \frac{N(0)}{dM(0)} \quad uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right) \quad uC(t) := R2 \cdot i3(t) + uL(t) \\
 i2(t) &:= C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)
 \end{aligned}$$

Легко убедиться, если построить графики переходных токов и напряжений, что полученные результаты совпадают с результатами примера 1.8.

Пример 2.9. Рассмотрим особенности использования операторного метода при колебательном характере переходного процесса в электрической цепи, которая приведена на рис. 1.19. Операторная схема замещения цепи приведена на рис. 2.7.

Введём в листинг решения исходные данные и независимые начальные значения из примера 1.9.

$$R1 := 200 \quad R2 := 10 \quad C := 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad E := 100$$

$$ORIGIN := 1 \quad i3H := 0 \quad uCn := E$$

Решим систему уравнений относительно изображений неизвестных переходных токов аналогично примеру 2.7.

$$A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & (p \cdot C)^{-1} & 0 \\ R1 & 0 & R2 + p \cdot L \end{bmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{p} + \frac{-E}{p} \\ \frac{E}{p} \end{pmatrix}$$

$$I(p) := \text{lsolve}(A(p), B(p)) \text{ simplify} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{500000000}{p \cdot (p^2 + 15000 \cdot p + 1050000000)} \\ - \frac{100000}{p^2 + 15000 \cdot p + 1050000000} \\ \frac{5 \cdot (20000 \cdot p + 100000000)}{p \cdot (p^2 + 15000 \cdot p + 1050000000)} \end{array} \right]$$

Для упрощения решения перейдём к оригиналу третьего тока, а с его помощью получим выражения для остальных неизвестных.

Выделим числитель и знаменатель изображения третьего тока. Найдём производную знаменателя и корни знаменателя.

$$N(p) := \text{numer}(I(p)_3) \rightarrow 100000 \cdot p + 500000000$$

$$M(p) := \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow p \cdot (p^2 + 15000 \cdot p + 1050000000)$$

$$dM(p) := \frac{d}{dp} M(p) \text{ simplify} \rightarrow 3 \cdot p^2 + 30000 \cdot p + 1050000000$$

$$P := 0 = M(p) \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} -7500 + 2500 \cdot \sqrt{159} \cdot j \\ -7500 - 2500 \cdot \sqrt{159} \cdot j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Среди корней два комплексно сопряжённых корня. Для перехода к оригиналу третьего тока воспользуемся выражением (2.3).

$$\alpha := \text{Re}(P_1) \quad \omega_0 := \text{Im}(P_1) \quad \theta := \text{arg}(N(P_1)) - \text{arg}(dM(P_1)) = 4.558$$

$$i3(t) := 2 \cdot \left[\left(\frac{|N(P_1)|}{|dM(P_1)|} \right) \cdot e^{\alpha \cdot t} \right] \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \theta) + \frac{N(0)}{dM(0)}$$

$$i3(t) \text{ simplify, float, 4} \rightarrow 3.096 \cdot \cos(31524.0 \cdot t + 4.558) \cdot e^{-7500.0t} + 0.4762$$

Остальные неизвестные токи и напряжения находим следующим образом:

$$uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right) \quad uC(t) := R2 \cdot i3(t) + uL(t) \quad i2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) \\ i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Легко убедиться, если построить графики переходных токов и напряжений, что полученные результаты совпадают с результатами примера 1.9.

Пример 2.10. Рассмотрим особенности использования операторного метода при синусоидальном источнике ЭДС и аperiodическом характере переходного процесса в электрической цепи, которая приведена на рис. 1.29. Операторная схема замещения цепи приведена на рис. 2.7.

Введём в листинг решения исходные данные и независимые начальные значения из примера 1.10.

$$R1 := 400 \quad R2 := 50 \quad C := 10^{-6} \cdot 2 \quad L := 10^{-3} \quad \omega := 3000 \quad \psi := 0.4 \\ e(t) := 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad uCn := -26.94 \quad i3n := 0 \quad ORIGIN := 1$$

Используя изображение синусоидальной ЭДС, составим и решим систему уравнений относительно изображений переходных токов.

$$A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & (p \cdot C)^{-1} & 0 \\ R1 & 0 & R2 + p \cdot L \end{bmatrix} \quad B(p) := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{100(p \cdot \sin(\psi) + \omega \cdot \cos(\psi))}{p^2 + \omega^2} + \frac{-uCn}{p} \\ \frac{100(p \cdot \sin(\psi) + \omega \cdot \cos(\psi))}{p^2 + \omega^2} \end{bmatrix} \\ I(p) := \text{lsolve}(A(p), B(p)) \text{ simplify, float, 4} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.1254}{p + 15922.0} - \frac{0.05298}{p + 35328.0} + \frac{0.09224 \cdot p + 610.5}{p^2 + 9.0e6} \\ \frac{0.06423 \cdot p - 36.85}{p^2 + 9.0e6} - \frac{1.498}{p + 35328.0} + \frac{1.598}{p + 15922.0} \\ \frac{0.028 \cdot p + 647.4}{p^2 + 9.0e6} + \frac{1.445}{p + 35328.0} - \frac{1.473}{p + 15922.0} \end{pmatrix}$$

Для упрощения решения перейдём к оригиналу третьего тока, а с его помощью получим выражения для остальных неизвестных.

Выделим числитель и знаменатель изображения третьего тока. Найдём производную знаменателя и корни знаменателя.

$$N(p) := \text{numer}(I(p)_3) \rightarrow 2.4338518824e10 \cdot p - 1.3474227e7 \cdot p^2 + 5.14399520592e13$$

$$M(p) := \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow 500.0 \cdot p^4 + 2.5625e7 \cdot p^3 + 2.85746208e11 \cdot p^2 + 2.30625e14 \cdot p + 2.531215872e18$$

$$P := 0 = M(p) \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} 3000.0j \\ -3000.0j \\ -15922.0 \\ -35328.0 \end{pmatrix}$$

$$dM(p) := \frac{d}{dp} M(p) \text{ simplify} \rightarrow 5.71492416e11 \cdot p + 7.6875e7 \cdot p^2 + 2000.0 \cdot p^3 + 2.30625e14$$

Среди корней два комплексно сопряжённых корня с нулевой вещественной частью и два вещественных корня. Для перехода к оригинулу третьего тока воспользуемся выражениями (2.1) и (2.3).

$$\begin{aligned} \omega &:= \text{Im}(P_1) & \theta &:= \arg(N(P_1)) - \arg(dM(P_1)) \\ i3(t) &:= \left(\frac{N(P_3)}{dM(P_3)} \right) \cdot \exp(P_3 \cdot t) + \left(\frac{N(P_4)}{dM(P_4)} \right) \cdot \exp(P_4 \cdot t) + 2 \cdot \left(\frac{|N(P_1)|}{|dM(P_1)|} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \\ i3(t) \text{ simplify, float, 4} &\rightarrow 0.2176 \cdot \cos(3000.0 \cdot t - 1.442) + -1.473 \cdot e^{-15922.0t} + 1.445 \cdot e^{-35328.0t} \end{aligned}$$

Остальные неизвестные токи и напряжения находим следующим образом:

$$\begin{aligned} uL(t) &:= L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right) & uC(t) &:= R2 \cdot i3(t) + uL(t) & i2(t) &:= C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) \\ & & i1(t) &:= i2(t) + i3(t) \end{aligned}$$

Легко убедиться, если построить графики переходных токов и напряжений, что полученные результаты совпадают с результатами примера 1.10.

Пример 2.11. Рассмотрим особенности использования операторного метода при синусоидальном источнике ЭДС и критическом характере переходного процесса в электрической цепи, которая приведена на рис. 1.29. Операторная схема замещения цепи приведена на рис. 2.7.

Введём в листинг решения исходные данные и независимые начальные значения из примера 1.11.

$$\begin{aligned} R1 &:= 94.721 & R2 &:= 50 & C &:= 10^{-6} \cdot 2 & L &:= 10^{-3} & \omega &:= 3000 & \psi &:= 0.4 \\ e(t) &:= 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) & uCn &:= -10.132 & i3n &:= 0 & \text{ORIGIN} &:= 1 \end{aligned}$$

Используя изображение синусоидальной ЭДС, составим и решим систему уравнений относительно изображений переходных токов.

$$A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ RI & (p \cdot C)^{-1} & 0 \\ RI & 0 & R2 + p \cdot L \end{bmatrix} \quad B(p) := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{100(p \cdot \sin(\psi) + \omega \cdot \cos(\psi))}{p^2 + \omega^2} + \frac{-uCn}{p} \\ \frac{100(p \cdot \sin(\psi) + \omega \cdot \cos(\psi))}{p^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

$$I(p) := \text{Solve}(A(p), B(p)) \begin{array}{l} \text{float, 7} \\ \text{simplify} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{0.3239806 \cdot p + 1865.747}{p^2 + 9.0e6} + \frac{0.1941076 \cdot p + 9046.63}{55278.66 \cdot p + p^2 + 7.63933e8} \\ \frac{0.3189025 \cdot p + 28091.44}{55278.66 \cdot p + p^2 + 7.63933e8} + \frac{0.1991857 \cdot p - 148.5731}{p^2 + 9.0e6} \\ \frac{2.055607e8 \cdot p + -10132.0 \cdot p^2 + 1.367402e12}{(p^2 + 9.0e6) \cdot (55278.66 \cdot p + p^2 + 7.63933e8)} \end{bmatrix}$$

Для упрощения решения перейдём к оригиналу третьего тока, а с его помощью получим выражения для остальных неизвестных.

Выделим числитель и знаменатель изображения третьего тока. Найдём производную и корни знаменателя.

$$N(p) := \text{numer}(I(p)_3) \text{ float, 5} \rightarrow 1.0278e10 \cdot p + -506600.0 \cdot p^2 + 6.837e13$$

$$M(p) := \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow 1.0 \cdot (p^2 + 9.0e6) \cdot (50.0 \cdot p^2 + 2.763933e6 \cdot p + 3.819665e10)$$

$$P := 0 = M(p) \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} -27639.33 + 20.908158694634016002j \\ -27639.33 - 20.908158694634016002j \\ -3000.0j \\ 3000.0j \end{pmatrix}$$

$$dM(p) := \frac{d}{dp} M(p) \text{ simplify} \rightarrow 200.0 \cdot p^3 + 8.291799e6 \cdot p^2 + 7.72933e10 \cdot p + 2.4875397e13$$

Пренебрегая мнимой частью первых корней из-за их относительной малости, будем считать, что среди корней два одинаковых вещественных корня. Для перехода к оригиналу третьего тока воспользуемся выражением (2.2), определив предварительно его составляющие.

$$H(p) := (p^2 + 9.0e6) \cdot 50 \quad Z(p) := \frac{d}{dp} \left(N(p) \cdot \frac{\exp(p \cdot t)}{H(p)} \right)$$

$$i3cв(t) := Z(\text{Re}(P_1)) \text{ float, 4} \rightarrow -0.1248 \cdot e^{-27639.0t} + -15595.0 \cdot t \cdot e^{-27639.0t}$$

Полученный оригинал определяет свободную составляющую третьего тока. Принуждённую составляющую в формуле разложения определяют третий и четвёртый корни. Для определения принуждённой составляющей используем выражение (2.3). Затем найдём окончательное выражение для оригинала третьего тока.

$$\omega := \text{Im}(P_4) \quad \theta := \arg(N(P_4)) - \arg(dM(P_4))$$

$$i3np(t) := 2 \cdot \left(\frac{|N(P_4)|}{|dM(P_4)|} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \quad i3(t) := i3c(t) + i3np(t)$$

$$i3(t) \text{ float } ,4 \rightarrow -0.1248 \cdot e^{-27639.0t} + 0.6829 \cdot \cos(3000.0 \cdot t - 1.387) + -15595.0 \cdot t \cdot e^{-27639.0t}$$

Остальные неизвестные токи и напряжения, как и в предыдущих примерах, находим следующим образом:

$$uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right) \quad uC(t) := R2 \cdot i3(t) + uL(t) \quad i2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right)$$

$$i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Легко убедиться, если построить графики переходных токов и напряжений, что полученные результаты совпадают с результатами примера 1.11.

Пример 2.12. Рассмотрим особенности использования операторного метода при синусоидальном источнике ЭДС и колебательном характере переходного процесса в электрической цепи, которая приведена на рис. 1.29. Операторная схема замещения цепи приведена на рис. 2.7.

Введём в листинг решения исходные данные и независимые начальные значения из примера 1.12.

$$R1 := 400 \quad R2 := 20 \quad C := 2 \cdot 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad \omega := 3000 \quad \psi := 0.4$$

$$e(t) := 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad uCn := -26.94 \quad i3n := 0 \quad \text{ORIGIN} := 1$$

Используя изображение синусоидальной ЭДС, составим и решим систему уравнений относительно изображений переходных токов.

$$A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & (p \cdot C)^{-1} & 0 \\ R1 & 0 & R2 + p \cdot L \end{bmatrix} \quad B(p) := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{100(p \cdot \sin(\psi) + \omega \cdot \cos(\psi))}{p^2 + \omega^2} + \frac{-uCn}{p} \\ \frac{100(p \cdot \sin(\psi) + \omega \cdot \cos(\psi))}{p^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

$$I(p) := \text{lsolve}(A(p), B(p)) \begin{array}{l} \text{float, 4} \\ \text{simplify} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{0.07237 \cdot p + 1365.0}{21250.0 \cdot p + p^2 + 5.25e8} + \frac{0.09233 \cdot p + 657.6}{p^2 + 9.0e6} \\ \frac{0.02657 \cdot p - 36.16}{p^2 + 9.0e6} + \frac{0.1381 \cdot p + 30396.0}{21250.0 \cdot p + p^2 + 5.25e8} \\ \frac{4.868e7 \cdot p - 26939.0 \cdot p^2 + 1.029e11}{(p^2 + 9.0e6) \cdot (21250.0 \cdot p + p^2 + 5.25e8)} \end{array} \right]$$

Выделим числитель и знаменатель изображения третьего тока. Найдём производную и корни знаменателя.

$$N(p) := \text{numer}(I(p)_3) \rightarrow 4.868e7 \cdot p - 26939.0 \cdot p^2 + 1.029e11$$

$$M(p) := \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow 1.0 \cdot (p^2 + 9.0e6) \cdot (p^2 + 21250.0 \cdot p + 5.25e8)$$

$$P := 0 = M(p) \text{ solve, } p, \text{float, 4} \rightarrow \begin{pmatrix} -3000.0j \\ 3000.0j \\ -10625.0 + 20300.0j \\ -10625.0 - 20300.0j \end{pmatrix}$$

$$dM(p) := \frac{d}{dp} M(p) \text{ simplify} \rightarrow 4.0 \cdot p^3 + 63750.0 \cdot p^2 + 1.068e9 \cdot p + 1.9125e11$$

Среди корней два комплексно сопряжённых корня с нулевой вещественной частью и два комплексно сопряжённых корня. Для перехода к оригиналу третьего тока воспользуемся выражением (2.3).

$$\alpha := \text{Re}(P_3) \quad \omega_1 := \text{Im}(P_2) \quad \omega_2 := \text{Im}(P_3)$$

$$\theta_1 := \text{arg}(N(P_2)) - \text{arg}(dM(P_2)) \quad \theta_2 := \text{arg}(N(P_3)) - \text{arg}(dM(P_3))$$

$$i3(t) := 2 \cdot \left(\frac{|N(P_2)|}{|dM(P_2)|} \right) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \theta_1) + 2 \cdot \left[\left(\frac{|N(P_3)|}{|dM(P_3)|} \right) \cdot \exp(\alpha \cdot t) \right] \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \theta_2)$$

$$i3(t) \text{ simplify, float, 4} \rightarrow 0.2404 \cdot \cos(3000.0 \cdot t - 1.294) + 1.397 \cdot \cos(20300.0 \cdot t + 1.618) \cdot e^{-10625.0t}$$

Остальные неизвестные токи и напряжения, как и в предыдущих примерах, находим следующим образом:

$$uL(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right) \quad uC(t) := R_2 \cdot i3(t) + uL(t) \quad i2(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uC(t) \right) \\ i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Легко убедиться, если построить графики переходных токов и напряжений, что полученные результаты совпадают с результатами примера 1.12.

Пример анализа переходного процесса в цепи с несинусоидальным источником

Пример 2.13. Рассмотрим пример использования операторного метода при анализе переходных процессов в линейных цепях с источниками ЭДС или источниками тока сложной периодической формы. В таких случаях следует операторным методом искать только свободные составляющие переходных токов и напряжений, а принуждённые составляющие находить известными способами анализа линейных цепей в установившемся режиме.

Определим переходный ток в ветви с индуктивностью (рис. 1.29), если напряжение источника ЭДС периодическое, несинусоидальное и аппроксимируется тремя составляющими:

$$e(t) = E_0 + E_1 \sin(\omega t + \psi_1) + E_3 \sin(3\omega t + \psi_3).$$

Для решения используем операторную схему замещения цепи для определения свободных составляющих (рис. 2.8).

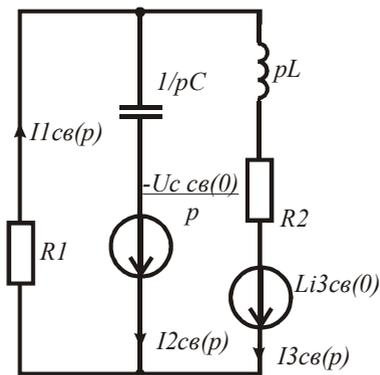


Рис. 2.8

Введём в листинг решения исходные данные.

```

R1 := 400    R2 := 20    C := 10-6    L := 10-3    E0 := 50    E1 := 50
E3 := 40    ω := 5·103    ψ1 := 0.5    ψ3 := -0.8    ORIGIN := 1
e(t) := E0 + E1·sin(ω·t + ψ1) + E3·sin(3·ω·t + ψ3)
    
```

Для определения внутренних ЭДС конденсатора и катушки индуктивности необходимо найти начальные значения и принуждённые значения тока в ветви с индуктивностью и напряжения на конденса-

торе в момент коммутации. Используем метод наложения и комплексную плоскость. Определим сопротивления реактивных элементов на частотах гармонических составляющих напряжения источника.

$$xL1 := \omega \cdot L \quad xL3 := 3 \cdot \omega \cdot L \quad xC1 := (\omega \cdot C)^{-1} \quad xC3 := (3 \cdot \omega \cdot C)^{-1}$$

Определим независимые начальные значения третьего тока и напряжения на конденсаторе из докоммутационной схемы.

$$iL_n := 0 \quad UC0 := E0 \quad UC1 := \frac{E1 \cdot \exp(j \cdot \psi1) \cdot (-j \cdot xC1)}{R1 - j \cdot xC1} \quad uC1 := \text{Im}(UC1)$$

$$UC3 := \frac{E3 \cdot \exp(j \cdot \psi3) \cdot (-j \cdot xC3)}{R1 - j \cdot xC3} \quad uC3 := \text{Im}(UC1) \quad uC_n := UC0 + uC1 + uC3$$

Определим методом свёртки принуждённое значение третьего тока в начальный момент времени и значение его свободной составляющей.

$$iLnp0 := \frac{E0}{R1 + R2} \quad iLnp1 := \left[\frac{E1 \cdot \exp(j \cdot \psi1)}{R1 + \frac{(-j \cdot xC1) \cdot (R2 + j \cdot xL1)}{R2 + j \cdot xL1 - j \cdot xC1}} \right] \cdot \frac{(-j \cdot xC1)}{(R2 + j \cdot xL1 - j \cdot xC1)}$$

$$iLnp3 := \left[\frac{E3 \cdot \exp(j \cdot \psi3)}{R1 + \frac{(-j \cdot xC3) \cdot (R2 + j \cdot xL3)}{R2 + j \cdot xL3 - j \cdot xC3}} \right] \cdot \frac{(-j \cdot xC3)}{(R2 + j \cdot xL3 - j \cdot xC3)} \quad iLnp1_n := \text{Im}(iLnp1)$$

$$iLnp3_n := \text{Im}(iLnp3) \quad iLnp_n := iLnp0 + iLnp1_n + iLnp3_n \quad iLсвн := iL_n - iLnp_n$$

Аналогичным образом найдём значение свободной составляющей напряжения на конденсаторе в начальный момент времени.

$$UCnp0 := iLnp0 \cdot R2 \quad UCnp1 := \left[\frac{E1 \cdot \exp(j \cdot \psi1)}{R1 + \frac{(-j \cdot xC1) \cdot (R2 + j \cdot xL1)}{R2 + j \cdot xL1 - j \cdot xC1}} \right] \cdot \frac{(R2 + j \cdot xL1) \cdot (-j \cdot xC1)}{(R2 + j \cdot xL1 - j \cdot xC1)}$$

$$UCnp3 := \left[\frac{E3 \cdot \exp(j \cdot \psi3)}{R1 + \frac{(-j \cdot xC3) \cdot (R2 + j \cdot xL3)}{R2 + j \cdot xL3 - j \cdot xC3}} \right] \cdot \frac{(R2 + j \cdot xL3) \cdot (-j \cdot xC3)}{(R2 + j \cdot xL3 - j \cdot xC3)} \quad uCnp1_n := \text{Im}(UCnp1)$$

$$uCnp3_n := \text{Im}(UCnp3) \quad uCnp_n := UCnp0 + uCnp1_n + uCnp3_n \quad uCсвн := uC_n - uCnp_n$$

С помощью операторной схемы замещения цепи составим систему уравнений в операторной форме и решим её относительно изображений свободных составляющих переходных токов.

$$A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R1 & (p \cdot C)^{-1} & 0 \\ R1 & 0 & R2 + p \cdot L \end{bmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ -uCсвн \\ p \\ L \cdot iLсвн \end{pmatrix}$$

$$I(p) := \text{Isolve}(A(p), B(p)) \text{ float } ,4, \text{simplify} \rightarrow \left[\begin{array}{r} \frac{1.0 \cdot (882973.0 \cdot p + 2.01e10)}{3.6e11 \cdot p + 1.6e7 \cdot p^2 + 1.68e16} \\ \frac{0.005944 \cdot p - 23178.0}{22500.0 \cdot p + p^2 + 1.05e9} \\ \frac{1.0 \cdot (6113.0 \cdot p - 2.192e9)}{2.25e9 \cdot p + 100000.0 \cdot p^2 + 1.05e14} \end{array} \right]$$

Выделим числитель и знаменатель изображения третьего тока. Найдём производную и корни знаменателя.

$$N(p) := \text{numer}(I(p)_3) \rightarrow 2.192e9 - 6113.0 \cdot p$$

$$M(p) := \text{denom}(I(p)_3) \rightarrow 100000.0 \cdot p^2 + 2.25e9 \cdot p + 1.05e14$$

$$P := 0 = M(p) \text{ solve } ,p, \text{float } ,4 \rightarrow \begin{pmatrix} -11250.0 + 30388.0j \\ -11250.0 - 30388.0j \end{pmatrix}$$

$$dM(p) := \frac{d}{dp} M(p) \text{ simplify} \rightarrow 200000.0 \cdot p + 2.25e9$$

Учитывая вид корней знаменателя, оригинал тока находим с помощью формулы разложения (2.3).

$$\alpha := \text{Re}(P_1) \quad \omega_0 := \text{Im}(P_1) \quad \theta := \text{arg}(N(P_1)) - \text{arg}(dM(P_1))$$

$$i3c\theta(t) := 2 \cdot \left(\frac{|N(P_1)|}{|dM(P_1)|} \right) \cdot \exp(\alpha \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \theta)$$

$$i3c\theta(t) \text{ simplify, float } ,4 \rightarrow 0.7465 \cdot e^{-11250.0t} \cdot \cos(30388.0 \cdot t - 1.653)$$

На рис 2.9 приведена зависимость изменения свободной составляющей третьего тока от времени на интервале переходного процесса.

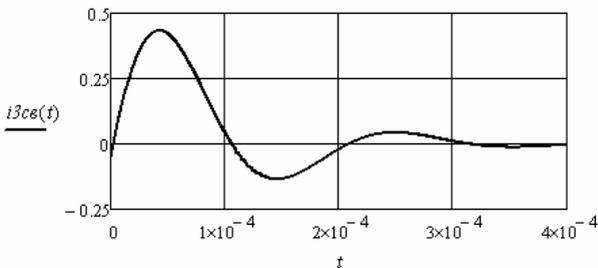


Рис. 2.9

Найдём выражение для принуждённой составляющей третьего тока, а затем и переходный ток. Соответствующая зависимость приведена на рис. 2.10.

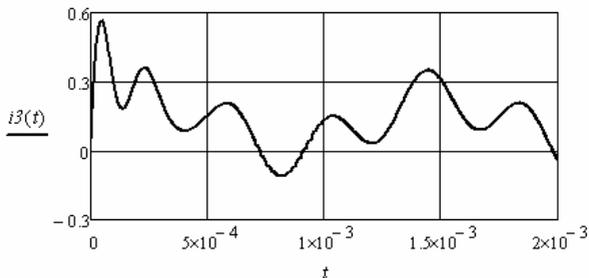


Рис. 2.10

Пример анализа переходного процесса в цепи высокого порядка

Пример 2.14. Необходимо найти переходные токи после подключения к четырёхполюснику на входе и выходе гармонических источников с конечным внутренним сопротивлением (рис. 2.11). Источники описываются выражениями:

$$e_1(t) = 80 \sin(\omega t - \psi_1), \quad e_2(t) = 100 \sin(\omega t - \psi_2).$$

Для определения принуждённых значений используем комплексную плоскость, а свободные составляющие найдём операторным методом. Для этого составим операторную схему замещения цепи (рис. 2.12).

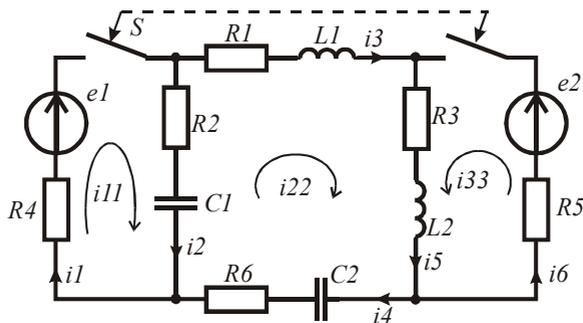


Рис. 2.11

Введём в листинг решения исходные данные. Определим комплексные ЭДС и реактивные сопротивления.

$R1 := 20$ $R2 := 15$ $R3 := 16$ $R4 := 10$ $R5 := 8$ $R6 := 22$
 $L1 := 10^{-3} \cdot 3$ $L2 := 2 \cdot 10^{-3}$ $C1 := 10 \cdot 10^{-6}$ $C2 := 8 \cdot 10^{-6}$ $\omega := 5000$
 $\psi1 := -3.5$ $\psi2 := 0.2$ $E1 := 80 \cdot \exp(j \cdot \psi1)$ $E2 := 100 \cdot \exp(j \cdot \psi2)$
 $x1 := \omega \cdot L1$ $x2 := \omega \cdot L2$ $x3 := (\omega \cdot C1)^{-1}$ $x4 := (\omega \cdot C2)^{-1}$ $ORIGIN := 1$

Найдём комплексные сопротивления ветвей и методом контурных токов найдём контурные токи.

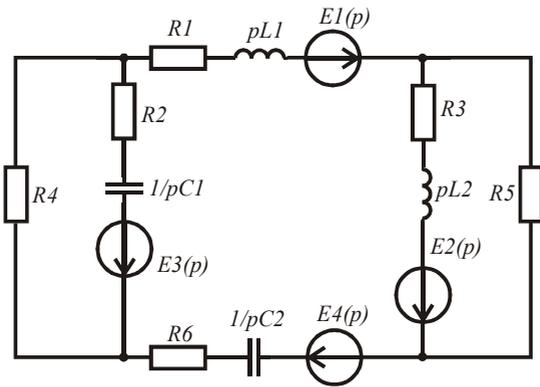


Рис. 2.12

$$\begin{aligned}
 Z1 &:= R1 + j \cdot x1 & Z2 &:= R2 - j \cdot x3 & Z3 &:= R3 + j \cdot x2 & Z4 &:= R4 \\
 Z5 &:= R5 & Z6 &:= R6 - j \cdot x4
 \end{aligned}$$

$$A := \begin{pmatrix} Z2 + Z4 & -Z2 & 0 \\ -Z2 & Z1 + Z2 + Z3 + Z6 & Z3 \\ 0 & Z3 & Z3 + Z5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} E1 \\ 0 \\ E2 \end{pmatrix}$$

$$I := \text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} -4.013 - 0.546j \\ -2.105 - 0.238j \\ 5.252 - 0.325j \end{pmatrix}$$

Найдём комплексные значения токов в ветвях схемы.

$$I1 := I_1 \quad I2 := I_1 - I_2 \quad I3 := I_2 \quad I4 := I_2 \quad I5 := I_2 + I_3 \quad I6 := I_3$$

Найдём начальные значения свободных составляющих, которые необходимы для определения внутренних ЭДС реактивных элементов.

$$\begin{aligned} i3_{прн} &:= \text{Im}(I3) & i5_{прн} &:= \text{Im}(I5) & uC1_{прн} &:= \text{Im}(-j \cdot x3 \cdot I2) \\ uC2_{прн} &:= \text{Im}(-j \cdot x4 \cdot I4) & i3_{свн} &:= -i3_{прн} & i5_{свн} &:= -i5_{прн} \\ uC1_{свн} &:= -uC1_{прн} & uC2_{свн} &:= -uC2_{прн} \end{aligned}$$

Запишем выражения для внутренних ЭДС и операторных сопротивлений ветвей.

$$\begin{aligned} E1(p) &:= L1 \cdot i3_{свн} & E2(p) &:= L2 \cdot i5_{свн} & E3(p) &:= -uC1_{свн} \cdot p^{-1} \\ E4(p) &:= -uC2_{свн} \cdot p^{-1} & z1(p) &:= R1 + p \cdot L1 & z2(p) &:= R2 + (p \cdot C1)^{-1} \\ z3(p) &:= R3 + p \cdot L2 & z4(p) &:= R4 & z5(p) &:= R5 & z6(p) &:= R6 + (p \cdot C2)^{-1} \end{aligned}$$

Для определения свободных составляющих изображений контурных токов составим матрицы коэффициентов контурных уравнений.

$$A1(p) := \begin{pmatrix} z2(p) + z4(p) & -z2(p) & 0 \\ -z2(p) & z1(p) + z2(p) + z3(p) + z6(p) & z3(p) \\ 0 & z3(p) & z3(p) + z5(p) \end{pmatrix}$$

$$B1(p) := \begin{pmatrix} E3(p) \\ E2(p) - E3(p) + E1(p) + E4(p) \\ E2(p) \end{pmatrix}$$

Найдём свободные составляющие изображений контурных токов. Набор выражений осуществляем, отключив *Automatic calculation* на панели *Tools*. Это связано с громоздкостью результата вычислений.

$$Ik(p) := \text{Isolve}(A1(p), B1(p)) \text{ simplify} \rightarrow$$

Далее находят оригиналы свободных составляющих переменных с помощью формул разложения. Приведём пример нахождения свободной составляющей первого тока.

Выражения для числителя и знаменателя изображения первого тока:

$$N(p) := \text{numer}(Ik(p)_1) \text{ float}, 8, \text{simplify} \rightarrow$$

$$M(p) := \text{denom}(Ik(p)_1) \text{ float}, 8, \text{simplify} \rightarrow$$

Находим корни знаменателя и выражение для производной знаменателя.

$$P := 0 = M(p) \begin{array}{l} \text{solve, } p \\ \text{float, } 6 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -2266.82 \\ -5358.37 \\ -9260.08 \\ -17781.4 \end{pmatrix}$$

$$dM(p) := \frac{d}{dp} M(p) \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, } 6 \end{array} \rightarrow 3.064e85 \cdot p + 4.16e81 \cdot p^2 + 1.6e77 \cdot p^3 + 6.336e88$$

Корни знаменателя вещественные, поэтому решение для свободной составляющей первого тока ищем в следующем виде:

$$i_{lcb}(t) := \left(\frac{N(P_1)}{dM(P_1)} \right) \exp(P_1 \cdot t) + \left(\frac{N(P_3)}{dM(P_3)} \right) \exp(P_3 \cdot t) + \left(\frac{N(P_2)}{dM(P_2)} \right) \exp(P_2 \cdot t) + \left(\frac{N(P_4)}{dM(P_4)} \right) \exp(P_4 \cdot t)$$

Результат подстановки находим следующим образом:

$$i_{lcb}(t) \text{ float, } 4 \rightarrow 0.1745 \cdot e^{-5358.0t} + -0.2668 \cdot e^{-17781.0t} + 1.785 \cdot e^{-2267.0t} + -0.02398 \cdot e^{-9260.0t}$$

Используя найденное выше комплексное значение принуждённой составляющей первого тока, найдём его мгновенное значение.

$$i_{lnp}(t) := |II| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(II)) \text{ float, } 4 \rightarrow 4.05 \cdot \sin(5000.0 \cdot t - 3.006)$$

Переходный ток находится как сумма свободной и принуждённой составляющих. Сложим их и построим соответствующие зависимости (рис. 2.13).

$$iI(t) := i_{lnp}(t) + i_{lcb}(t)$$

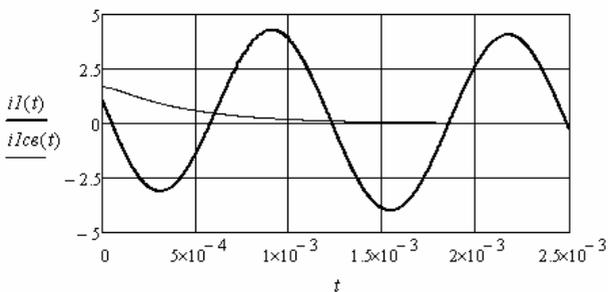


Рис. 2.13

Видно, что, несмотря на четвёртый порядок исследуемой цепи, характер переходного процесса аperiодический.

Остальные искомые переходные переменные находятся аналогичным образом.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные достоинства и недостатки операторного метода анализа переходных процессов в электрических цепях.
2. Почему система дифференциальных уравнений функций времени становится алгебраической для их изображений?
3. Чем отличается схема замещения электрической цепи для определения переходных параметров от схемы замещения для определения их свободных составляющих?
4. Как определяются внутренние ЭДС индуктивностей и ёмкостей?
5. Как найти изображение заданной функции?
6. Сформулируйте законы Кирхгофа для изображений напряжений и токов.
7. Перечислите способы перехода от изображений напряжений и токов к их оригиналам.
8. Поясните, как и для чего используются формулы разложения.
9. Можно ли использовать операторный метод для анализа нелинейных электрических цепей?
10. Какая функция программы позволяет выделить числитель изображений тока или напряжения?
11. Какая функция программы позволяет выделить знаменатель изображений тока или напряжения?
12. Когда используется функция программы *simplify*?
13. Как отображаются нулевые корни знаменателя изображений напряжений и токов в их оригинале?
14. Перечислите свойства преобразований Лапласа.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ, НЕЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Программа MathCAD содержит широкий набор встроенных функций для решения дифференциальных уравнений. Приведём некоторые из них.

rkfixed($y, x1, x2, n, F$) – возвращает матрицу решений методом Рунге-Кутты для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями в векторе y , правые части которых записаны в символьном векторе F , на интервале от $x1$ до $x2$ при фиксированном числе шагов n .

Rkadapt($y, x1, x2, n, F$) – возвращает матрицу решений методом Рунге-Кутты с переменным шагом для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями в векторе y , правые части которых записаны в символьном векторе F на интервале от $x1$ до $x2$ при фиксированном числе шагов n .

Последняя функция даёт более точный результат, но проигрывает предыдущей по скорости вычислений. Она наиболее привлекательна для решения систем дифференциальных уравнений, дающих медленно изменяющиеся решения.

rkadapt($y, x1, x2, acc, n, F, k, s$) – возвращает матрицу, содержащую таблицу значений решения задачи Коши на интервале от $x1$ до $x2$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, вычисленную методом Рунге-Кутты с переменным шагом и начальными условиями в векторе y (правые части системы записаны в векторе F , n – число шагов, k – максимальное число промежуточных точек ре-

шения, s – минимально допустимый интервал между точками, acc – погрешность решения).

$Bulstoer(y, x1, x2, n, F)$ – возвращает матрицу решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Булирша-Штера, правая часть которых в виде первых производных записана в векторе $F(x, y)$ при заданных в векторе y начальных условиях и при решении на интервале от $x1$ до $x2$ для n точек решения.

Данная функция используется, если решение имеет вид гладких зависимостей.

Кроме указанных, имеются встроенные функции для решения жёстких систем дифференциальных уравнений, а также уравнений Пуассона, Лапласа и других.

Жёсткие системы дифференциальных уравнений описывают системы, в которых сочетаются очень быстрые и очень медленные процессы. Одни и те же уравнения при разных параметрах могут быть жёсткими и нежёсткими. В таких случаях методы Рунге-Кутты требуют огромного количества шагов, что не всегда возможно.

Для решения жёстких систем дифференциальных уравнений следует использовать встроенную функцию, например $Radau(y, x1, x2, n, F)$, или другие.

3.1. Анализ переходных процессов в электрических цепях первого порядка

Дифференциальное уравнение цепи первого порядка приводится к стандартной форме Коши: $dy/dt = F[y(t), t]$. Затем определяется начальное значение искомого тока или напряжения, и находится решение с помощью одной из встроенных функций.

Дифференциальное уравнение является линейным, если его коэффициенты, определяемые параметрами элементов цепи, константы. Дифференциальное уравнение становится нелинейным, если его коэффициенты являются функциями искомого тока или напряжения. Дифференциальное уравнение считается параметрическим, если его коэффициенты являются функциями времени.

Решением дифференциального уравнения является таблица значений переходных токов или напряжений и времени. В ряде случаев

необходимо выполнить аппроксимацию полученных зависимостей. Наилучший результат даёт сплайн-аппроксимация. Для сплайн-аппроксимации имеются следующие встроенные функции:

$cspline(VX, VY)$ – возвращает вектор VS вторых производных при приближении к узловым точкам кубическим полиномом;

$pspline(VX, VY)$ – возвращает вектор VS вторых производных при приближении к узловым точкам параболической кривой;

$lspline(VX, VY)$ – возвращает вектор VS вторых производных при приближении к узловым точкам прямой;

$interp(VS, VX, VY, x)$ – возвращает значение $y(x)$ для заданных векторов VS, VX, VY и заданного значения x .

Сплайн-аппроксимация проводится в два этапа. На первом этапе с помощью одной из первых трёх функций отыскивается вектор вторых производных. На втором этапе с помощью четвёртой функции вычисляются значения $y(x)$.

Примеры анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

Пример 3.1. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на индуктивности в электрической цепи (рис. 1.1) численным решением дифференциального уравнения цепи. В качестве искомой переменной возьмём ток в ветви с индуктивностью, так как он имеет независимое начальное значение. Дифференциальное уравнение цепи относительно одной переменной получается в результате свёртки системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа. Запишем указанную систему уравнений для послекоммутационной схемы.

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ E = i_1 R_1 + L \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 \\ E = i_1 R_1 + i_3 R_3 \end{cases}$$

Выразим производную второго тока, исключив первый и третий токи. Получим дифференциальное уравнение в форме Коши.

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{ER_3 - i_2(R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2)}{L(R_1 + R_3)}$$

Введём в листинг решения исходные данные и определим начальное значение тока в ветви с индуктивностью из докоммутационной схемы.

$$R1 := 20 \quad R2 := 15 \quad R3 := 18 \quad L := 2 \cdot 10^{-4} \quad E := 100 \quad I2n := E \cdot (R1 + R2)^{-1}$$

Введём начальное значение и дифференциальное уравнение в форме Коши. Найдём его решение на известном из примера 1.1 временном интервале.

$$i_0 := I2n \quad D(t, i) := \frac{E \cdot R3 - i_0(R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3 + R1 \cdot R2)}{L \cdot (R1 + R3)}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 10^{-4}, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимости переходного тока от времени.

$$A := Z^{(0)} \quad B := Z^{(1)} \quad S := cspline(A, B) \quad i2(t) := interp(S, A, B, t)$$

Найдём производную зависимости тока и остальные искомые переходные зависимости.

$$t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-4} \quad h := 10^{-7} \quad di2(t) := \frac{i2(t+h) - i2(t-h)}{2 \cdot h}$$

$$uL(t) := L \cdot di2(t) \quad i3(t) := \frac{uL(t) + i2(t) \cdot R2}{R3} \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Построим полученные зависимости (рис. 3.1). Сравним полученные зависимости с зависимостями, приведёнными на рис. 1.3 (пример 1.1). Видно, что зависимости одинаковые.

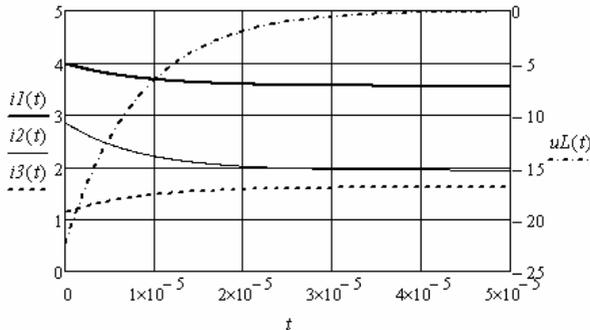


Рис. 3.1

Используя производную зависимости второго тока от времени, построим его фазовый портрет (рис. 3.2).

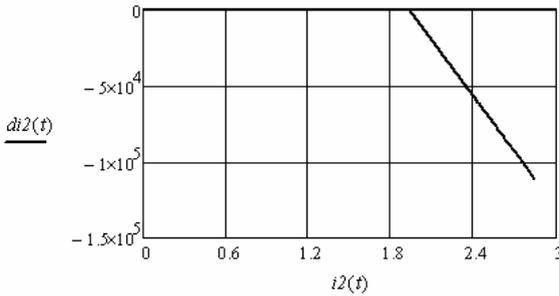


Рис. 3.2

Пример 3.2. Необходимо найти численным решением дифференциального уравнения свободную составляющую переходного тока через индуктивность в электрической цепи (рис. 1.7) с гармоническим источником. Определение отдельно свободных составляющих существенно облегчает анализ переходных процессов при источниках, описание которых достаточно сложное. В дифференциальном уравнении цепи относительно заданной переменной все источники приравниваются нулю. В этом случае получим уравнение с нулевой правой частью, которое называется однородным дифференциальным уравнением (ОДУ).

Используем вычислительный блок *Given/Odesolve* для решения ОДУ. Начальное значение тока через индуктивность и параметры элементов возьмём из примера 1.3. Так как схемы, приведённые на рис. 1.1 и рис. 1.7, одинаковые, то воспользуемся дифференциальным уравнением из примера 3.1, в котором ЭДС приравняем нулю. Получим следующее ОДУ:

$$L(R_1 + R_3) \frac{di_{2cb}}{dt} + (R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2) i_{2cb} = 0$$

Введём в листинг решения исходные данные и начальное значение.

$$R1 := 20 \quad R2 := 15 \quad R3 := 40 \quad L := 4 \cdot 10^{-4} \quad i_{2cbn} := -0.1766$$

Решение оформляется следующим образом.

Given

$$i2cв(0) = -0.1766 \quad i2cв'(t) \cdot (R1 + R3) \cdot L + i2cв(t) \cdot (R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3 + R1 \cdot R2) = 0$$

$$i2cв := \text{Odesolve}(t, 10^{-4}, 1000)$$

Знак производной (штрих) вводится сочетанием клавиш [Ctrl+F7]. Знак равенства берётся с панели *Boolean*.

На рис. 3.3 приведена полученная зависимость.

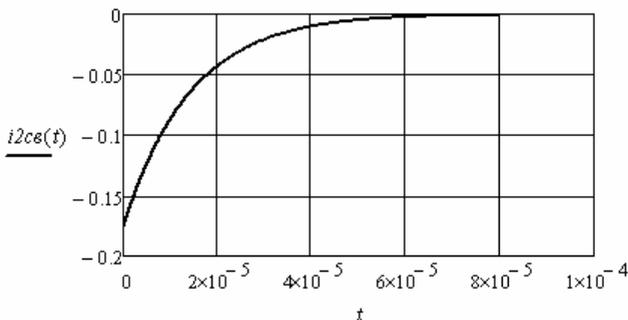


Рис. 3.3

Пример 3.3. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на конденсаторе в электрической цепи (рис. 1.4) численным решением дифференциального уравнения цепи. В качестве искомой переменной возьмём напряжение на конденсаторе, так как оно имеет независимое начальное значение.

Введём в листинг решения исходные данные и определим начальное значение напряжения на конденсаторе из докоммутационной схемы.

$$R1 := 20 \quad R2 := 15 \quad R3 := 18 \quad CI := 10^{-6} \cdot 0.2 \quad E := 100 \quad UCн := E$$

Введём начальное значение и составим дифференциальное уравнение в форме Коши. Найдём его решение на известном из примера 1.2 временном интервале.

$$ORIGIN := 1 \quad u_1 := UCн \quad D(t, u) := \frac{E \cdot R3 - u_1(R1 + R3)}{CI \cdot (R1 \cdot R2 + R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3)}$$

$$Z := \text{rkfixed}(u, 0, 10^{-4}, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимости переходного напряжения.

$$A := Z^{(1)} \quad B := Z^{(2)} \quad S := \text{cspline}(A, B) \quad uC(t) := \text{interp}(S, A, B, t)$$

Найдём производную зависимости напряжения и остальные искомые переходные зависимости.

$$t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-4} \quad h := 10^{-7} \quad duC(t) := \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h}$$

$$i2(t) := C1 \cdot duC(t) \quad i3(t) := \frac{uC(t) + i2(t) \cdot R2}{R3} \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Построим полученные зависимости (рис. 3.4). Сравним полученные зависимости с зависимостями, приведёнными на рис. 1.5 (пример 1.2). Видно, что зависимости одинаковые. Используя производную зависимости напряжения на конденсаторе от времени, построим его фазовый портрет (рис. 3.5).

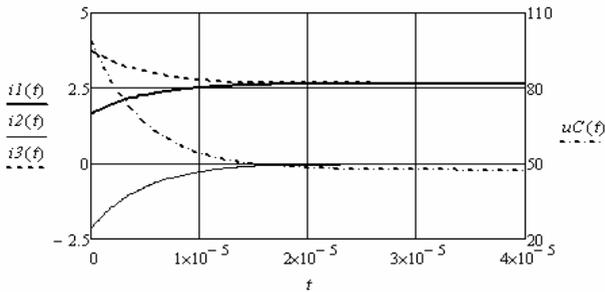


Рис. 3.4

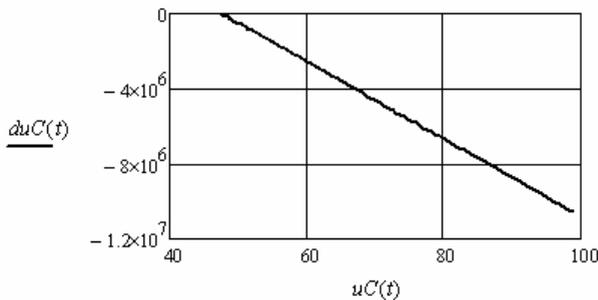


Рис. 3.5

Пример 3.4. Используя численное решение дифференциального уравнения для послекоммутиционной схемы (рис. 1.15), необходимо найти переходный ток в ветви с индуктивностями. Начальное значение тока через индуктивность, параметры элементов и выражения для токов в установившемся докоммутиционном режиме возьмём из примера 1.5.

Введём в листинг решения исходные данные.

```

R1 := 100    R2 := 150    R3 := 80    R4 := 20    R5 := 250    R6 := 200
L1 := 6·10-4  L2 := 4·10-4  ω := 106    e(t) := 100·sin(ω·t)    i2n := 0.263
i2y(t) := 0.3723·sin(1.0e6·t - 1.147)    i4y(t) := 1.17·sin(1.0e6·t + 1.638)

```

Найдём эквивалентные параметры для послекоммутиционной схемы.

```

R2э := R2 + R4    R3э := R3 + R5    Lэ := L1 + L2    ORIGIN := 1

```

Составим дифференциальное уравнение цепи и решим его на выбранном интервале времени.

$$i_1 := 0.263 \quad D(t, i) := \frac{e(t) \cdot (R3э - R1) - i_1 (R1 \cdot R3э + R2э \cdot R3э - R1^2)}{Lэ \cdot R3э}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 10^{-4}, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию решения и объединим полученные зависимости токов до и после коммутации (рис. 3.6).

```

A := Z(1)    B := Z(2)    S := cspline(A, B)    i2(t) := interp(S, A, B, t)

```

```

iэ2(t) := if(t < 0, i2y(t), i2(t))    iэ4(t) := if(t < 0, i4y(t), i2(t))

```

Данное решение совпадает с решением, полученным в примере 1.5.

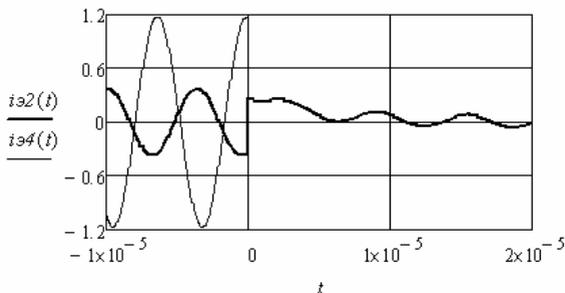


Рис. 3.6

Примеры анализа переходных процессов в нелинейных электрических цепях

Пример 3.5. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на нелинейной индуктивности в электрической цепи (рис. 3.7) численным решением нелинейного дифференциального уравнения цепи.

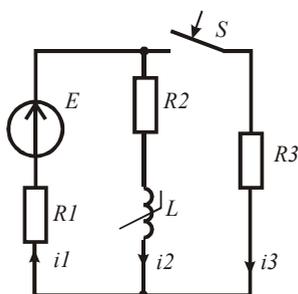


Рис. 3.7

В качестве искомой переменной возьмём ток в ветви с индуктивностью, так как он имеет независимое начальное значение.

Введём в листинг решения исходные данные и определим начальное значение тока в ветви с индуктивностью из докоммутационной схемы. На рис. 3.8 приведена зависимость индуктивности от тока.

$$R1 := 20 \quad R2 := 15 \quad R3 := 18 \quad E := 100 \quad I2n := E \cdot (R1 + R2)^{-1}$$

$$L(i) := 2 \cdot 10^{-4} \cdot \exp(-i^2 \cdot 0.7) + 0.3 \cdot 10^{-5} \quad i := 1, 1.01 \dots 3$$

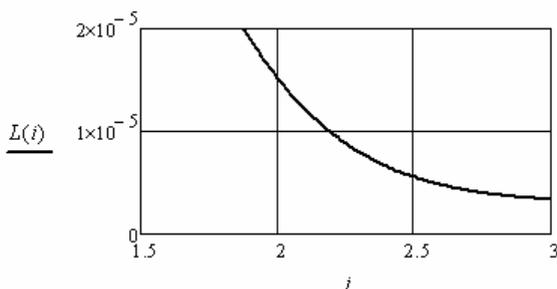


Рис. 3.8

Введём начальное значение и составим дифференциальное уравнение в форме Коши. В уравнение введём нелинейную зависимость индуктивности от тока. Найдём его решение на интервале переходного процесса.

$$i_0 := I2n \quad D(t, i) := \frac{E \cdot R3 - i_0(R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3 + R1 \cdot R2)}{\left[2 \cdot 10^{-4} \cdot \exp\left[-(i_0)^2 \cdot 0.7\right] + 3 \cdot 10^{-4}\right] \cdot (R1 + R3)}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 10^{-4}, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимости переходного тока от времени.

$$A := Z^{(0)} \quad B := Z^{(1)} \quad S := cspline(A, B) \quad i2(t) := interp(S, A, B, t)$$

Найдём производную зависимости тока и остальные искомые переходные зависимости.

$$i3(t) := \frac{uL(t) + i2(t) \cdot R2}{R3} \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Построим полученные зависимости (рис. 3.9). Сравним полученные зависимости с зависимостями, приведёнными на рис. 3.1 (пример 3.1). Видно, что переходный процесс более затянут.

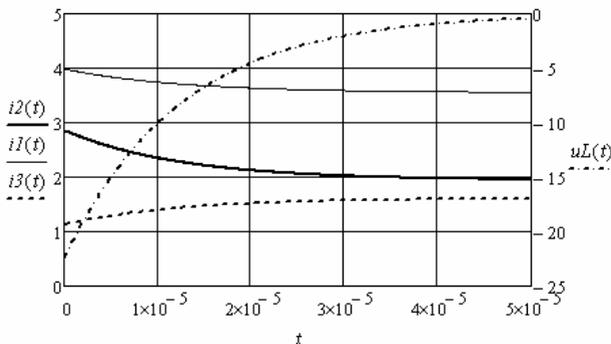


Рис. 3.9

Построим фазовый портрет переходного тока в ветви с нелинейной индуктивностью (рис. 3.10). Полученная траектория отличается от прямой линии.

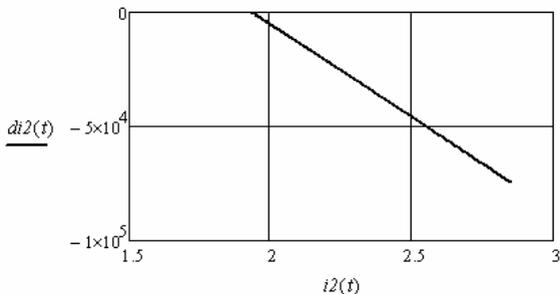


Рис. 3.10

Пример 3.6. Необходимо найти переходный ток при подключении реальной катушки к источнику синусоидальной ЭДС.

Рассмотрим случаи подключения линейной катушки и катушки с нелинейной индуктивностью. Схема замещения катушки содержит линейный резистор и индуктивность.

Введём в листинг решения первого случая исходные данные. Начальное значение переходного тока равно нулю.

$$L := 0.1 \quad R := 25 \quad \omega := 2000 \quad \psi := -0.4 \quad e(t) := 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

Определим длительность переходного процесса через корень характеристического уравнения и постоянную времени цепи.

$$p := \frac{-R}{L} \quad T := |p^{-1}| \cdot 3 = 0.012$$

Введём начальное значение и составим дифференциальное уравнение в форме Коши. Найдём его решение на интервале переходного процесса.

$$i_0 := 0 \quad D(t, i) := \frac{e(t) - R \cdot i}{L} \quad Z := \text{rkfixed}(i, 0, 0.02, 1000, D)$$

$$t := Z^{(0)} \quad i(t) := Z^{(1)}$$

Полученная зависимость переходного тока приведена на рис. 3.12.

Рассмотрим второй случай. Зависимость индуктивности катушки от мгновенных значений тока задана таблицей координат. Составим соответствующую матрицу, в которой первая строка — это значения тока, а вторая — соответствующие значения индуктивности.

$$LI := \begin{pmatrix} -2.5 & -2 & -1.5 & -1 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0.01 & 0.01 & 0.011 & 0.024 & 0.071 & 0.11 & 0.071 & 0.024 & 0.011 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}^T$$

Выполним аппроксимацию зависимости индуктивности от тока.

$$X := LI^{(0)} \quad Y := LI^{(1)} \quad S := cspline(X, Y) \quad LI(i) := interp(S, X, Y, i)$$

Полученная зависимость приведена на рис. 3.11.

Введём начальное значение и составим дифференциальное уравнение в форме Коши. В дифференциальное уравнение введём нелинейную зависимость индуктивности от искомого тока.

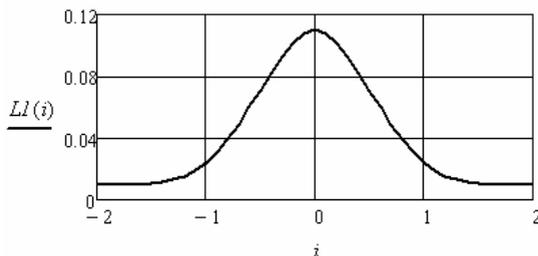


Рис. 3.11

Найдём его решение на интервале переходного процесса.

$$iI_0 := 0 \quad DI(t, iI) := \frac{e(t) - R \cdot iI}{interp(S, X, Y, iI)} \quad ZI := rkfixed(iI, 0, 0.02, 1000, DI)$$

$$t := ZI^{(0)} \quad iI(t) := ZI^{(1)}$$

Полученная зависимость переходного тока приведена на рис. 3.12.

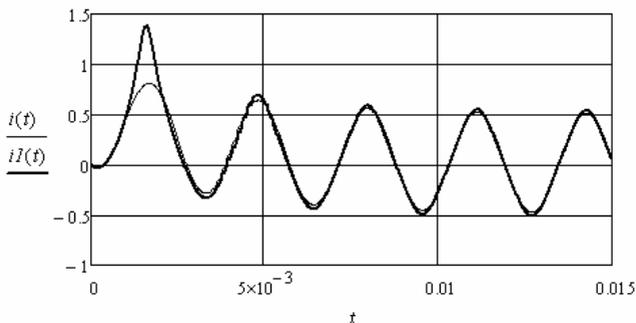


Рис. 3.12

Из сравнения полученных зависимостей переходных токов видно, что нелинейность индуктивности катушки является причиной существенного превышения переходного тока по сравнению с установившимися значениями.

Примеры анализа переходных процессов в параметрических электрических цепях

Пример 3.7. Необходимо найти форму тока в индуктивности после подключения резистора (рис. 3.13), сопротивление которого изменяется во времени по гармоническому закону.

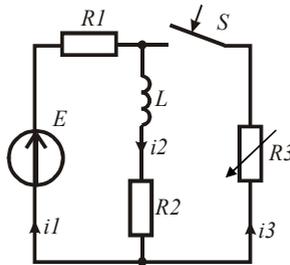


Рис. 3.13

Для решения задачи воспользуемся дифференциальным уравнением из примера 3.1, введя зависимость третьего резистора от времени.

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{ER_3(t) - i_2(R_1R_3(t) + R_2R_3(t) + R_1R_2)}{L(R_1 + R_3(t))}$$

Введём в листинг решения исходные данные.

```
R1 := 20  R2 := 15  L := 2·10-4  E := 100  I2н := E·(R1 + R2)-1
ω := 105·2  R3(t) := 20·(1 + 0.8·sin(ω·t))
```

Введём начальное значение и дифференциальное уравнение в форме Коши. Найдём его решение.

$$i_0 := I2н \quad D(t, i) := \frac{E \cdot R3(t) - i_0(R1 \cdot R3(t) + R2 \cdot R3(t) + R1 \cdot R2)}{L \cdot (R1 + R3(t))}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 10^{-3}, 10000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимости тока от времени. На рис. 3.14 приведены зависимости найденного тока и сопротивления третьего резистора от времени.

$$A := Z^{(0)} \quad B := Z^{(1)} \quad S := cspline(A, B) \quad i2(t) := interp(S, A, B, t)$$

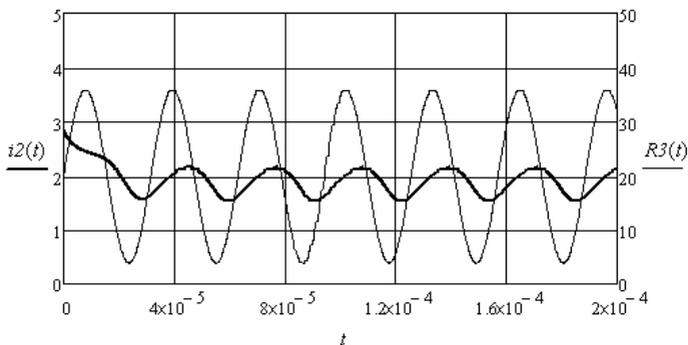


Рис. 3.14

Рассчитаем и построим фазовый портрет второго тока. Для этого найдём производную зависимости тока от времени через приращения. Фазовый портрет приведён на рис. 3.15.

$$t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-3} \quad h := 10^{-7} \quad di2(t) := \frac{i2(t+h) - i2(t-h)}{2 \cdot h}$$

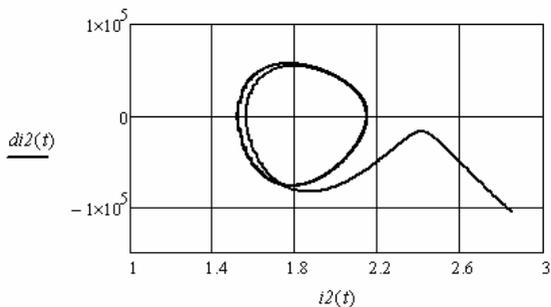


Рис. 3.15

Видно, что гармонические изменения сопротивления третьего резистора приводят к негармоническим колебаниям токов и напряжений в исследуемой цепи.

Пример 3.8. Необходимо найти форму напряжения на параметрическом конденсаторе (рис. 3.16) после подключения источника постоянной ЭДС.

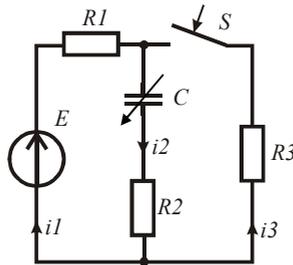


Рис. 3.16

Ёмкость конденсатора изменяется по гармоническому закону. Для решения задачи используем дифференциальное уравнение из примера 3.3, введя соответствующую зависимость ёмкости конденсатора от времени.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 20 \quad R2 := 15 \quad R3 := 30 \quad E := 100 \quad \omega := 5 \cdot 10^5$$

$$C1(t) := 10^{-6} \cdot (1 + 0.5 \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

Введём в листинг дифференциальное уравнение и решим его при нулевом начальном значении напряжения конденсатора.

$$u_0 := 0 \quad D(t, u) := \frac{E \cdot R3 - u_0(R1 + R3)}{C1(t) \cdot (R1 \cdot R2 + R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3)}$$

$$Z := rkfixed(u, 0, 10^{-3}, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию полученной зависимости и найдём производную.

$$A := Z^{(0)} \quad B := Z^{(1)} \quad S := cspline(A, B) \quad uC(t) := interp(S, A, B, t)$$

$$t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-3} \quad h := 10^{-7} \quad duC(t) := \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h}$$

Построим зависимости напряжения на конденсаторе и ёмкости конденсатора от времени (рис. 3.17), а также фазовый портрет напряжения конденсатора (рис. 3.18).

Видно, что изменение ёмкости конденсатора влияет только на переходное напряжение. В установившемся режиме напряжение на конденсаторе остаётся постоянным.

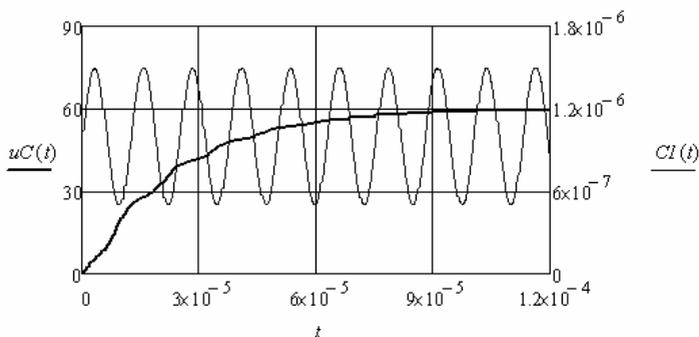


Рис. 3.17

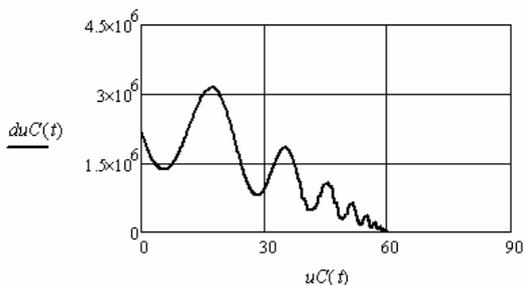


Рис. 3.18

3.2. Анализ переходных процессов в электрических цепях второго порядка

При численном анализе переходных процессов в электрических цепях второго порядка необходимо составить дифференциальное уравнение цепи относительно выбранного переходного тока или напряжения. Для этого используется система уравнений относительно мгновенных значений напряжений и токов, составленная по законам Кирхгофа. Система уравнений сворачивается к одному уравнению относительно выбранной неизвестной переменной и приводится к виду $d^2y/dt^2 = F[dy/dt, y(t), t]$.

Примеры анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

Пример 3.9. Необходимо найти переходные токи и напряжения на реактивных элементах в электрической цепи (рис. 1.19) численным решением дифференциального уравнения цепи.

В качестве переменной в дифференциальном уравнении выберем ток в ветви с индуктивностью. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \\ e(t) = i_1(t)R_1 + u_C(t) \\ u_C(t) = i_3(t)R_2 + Li_3'(t) \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение первое и третье уравнения, получим

$$e(t) = i_2(t)R_1 + i_3(t)(R_1 + R_2) + i_3'(t)L.$$

Второй ток выразим через производную напряжения на конденсаторе. Используя третье уравнение системы, получим

$$i_2(t) = u_C'(t)C = i_3'(t)R_3C + i_3''(t)LC.$$

Подставляем выражение для второго тока и приводим дифференциальное уравнение к виду, необходимому для численного решения.

$$i_3''(t) = \frac{e(t)}{R_1LC} - \frac{R_1 + R_2}{R_1LC}i_3'(t) - \frac{R_1R_2C + L}{R_1LC}i_3(t).$$

Введём следующие обозначения: переходный ток — i_0 , производная переходного тока — i_1 .

Начальными значениями являются переходный ток и производная переходного тока сразу после коммутации.

Введём в листинг решения исходные данные, которые возьмём из примера 1.7.

$$R1 := 400 \quad R2 := 10 \quad C := 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad E := 100 \quad i3n := 0 \quad di3n := E \cdot L^{-1}$$

Введём начальные значения и оформим решение дифференциального уравнения.

$$i := \begin{pmatrix} i3n \\ di3n \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{E}{R1 \cdot L \cdot C} - \left(\frac{R1 + R2}{R1 \cdot L \cdot C} \right) \cdot i_0 - \left(\frac{R1 \cdot R2 \cdot C + L}{R1 \cdot L \cdot C} \right) \cdot i_1 \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 0.001, 1000, D)$$

По полученным данным выполним аппроксимацию переходного тока и производной переходного тока.

$$\begin{aligned} S &:= \text{cspline}(Z^{(0)}, Z^{(1)}) & i3(t) &:= \text{interp}(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t) \\ SI &:= \text{cspline}(Z^{(0)}, Z^{(2)}) & di3(t) &:= \text{interp}(SI, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t) \end{aligned}$$

Найдём остальные переходные токи напряжения.

$$\begin{aligned} uL(t) &:= L \cdot di3(t) & uC(t) &:= uL(t) + R2 \cdot i3(t) & t &:= 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-3} \\ h &:= 10^{-7} & i2(t) &:= C \cdot \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h} & i1(t) &:= i2(t) + i3(t) \end{aligned}$$

Легко убедиться, построив полученные зависимости, что они совпадают с результатами примера 1.7. Варьируя исходные данные можно получить любой характер переходного процесса.

Пример 3.10. Необходимо рассчитать переходный процесс в электрической цепи (рис. 1.29) при синусоидальном источнике ЭДС.

Исходные данные возьмём из примера 2.6. Дифференциальное уравнение цепи остаётся таким же, как и в примере 3.7. Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned} R1 &:= 400 & R2 &:= 20 & C &:= 2 \cdot 10^{-6} & L &:= 10^{-3} & E &:= 100 & \omega &:= 3000 \\ \psi &:= 0.4 & e(t) &:= 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) & i3h &:= 0 \end{aligned}$$

Определим начальное значение производной третьего тока.

$$\begin{aligned} E &:= 100 \cdot \exp(j \cdot \psi) & xC &:= (\omega \cdot C)^{-1} & UCy &:= \frac{E \cdot (-j \cdot xC)}{R1 - j \cdot xC} \\ uCh &:= \text{Im}(UCy) & di3h &:= uCh \cdot L^{-1} \end{aligned}$$

Введём начальные значения и оформим решение дифференциального уравнения.

$$i := \begin{pmatrix} i3h \\ di3h \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{e(t)}{R1 \cdot L \cdot C} - \left(\frac{R1 + R2}{R1 \cdot L \cdot C} \right) \cdot i_0 - \left(\frac{R1 \cdot R2 \cdot C + L}{R1 \cdot L \cdot C} \right) \cdot i_1 \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(i, 0, 0.005, 1000, D)$$

По полученным данным выполним аппроксимацию переходного тока и производной переходного тока.

$$\begin{aligned} S &:= \text{cspline}(Z^{(0)}, Z^{(1)}) & i3(t) &:= \text{interp}(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t) \\ SI &:= \text{cspline}(Z^{(0)}, Z^{(2)}) & di3(t) &:= \text{interp}(SI, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t) \end{aligned}$$

Найдём остальные переходные токи напряжения.

$$uL(t) := L \cdot di3(t) \quad uC(t) := uL(t) + R2 \cdot i3(t) \quad t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-3}$$

$$h := 10^{-7} \quad i2(t) := C \cdot \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h} \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Легко убедиться, построив полученные зависимости, что они совпадают с результатами примера 1.10. Варьируя исходные данные, можно получить любой характер переходного процесса.

Пример 3.11. Необходимо рассчитать переходный процесс в электрической цепи (рис. 3.19), если напряжение источника ЭДС $u(t) \cdot 1(t)$ имеет форму «меандр», амплитуда которого 100 вольт, а период $4 \cdot 10^{-5}$ секунды.

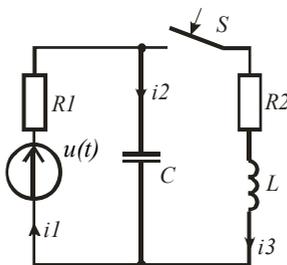


Рис. 3.19

Исходные данные и дифференциальное уравнение возьмём из предыдущего примера. Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 400 \quad R2 := 20 \quad C := 2 \cdot 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad U := 100 \quad T := 4 \cdot 10^{-5}$$

Наличие единичной функции в выражении напряжения источника говорит о том, что оно возникает при $t = 0$. Сформируем данное напряжение программным путём.

$$u(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq T \cdot 0.5 \\ 0 & \text{if } -T \cdot 0.5 \leq t \leq 0 \\ u(t - T) & \text{if } t > T \cdot 0.5 \end{cases}$$

Начальные значения третьего тока и его производной равны нулю. Введём начальные значения и оформим решение дифференциального уравнения.

$$i3_H := 0 \quad di3_H := 0$$

$$i := \begin{pmatrix} i3_H \\ di3_H \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{u(t)}{R1 \cdot L \cdot C} - \left(\frac{R1 + R2}{R1 \cdot L \cdot C} \right) \cdot i_0 - \left(\frac{R1 \cdot R2 \cdot C + L}{R1 \cdot L \cdot C} \right) \cdot i_1 \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 0.005, 1000, D)$$

По полученным данным выполним аппроксимацию переходного тока и производной переходного тока.

$$S := cspline(Z^{(0)}, Z^{(1)}) \quad i3(t) := interp(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t)$$

$$SI := cspline(Z^{(0)}, Z^{(2)}) \quad di3(t) := interp(SI, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t)$$

Найдём остальные переходные токи напряжения.

$$uL(t) := L \cdot di3(t) \quad uC(t) := uL(t) + R2 \cdot i3(t) \quad t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-3}$$

$$h := 10^{-7} \quad i2(t) := C \cdot \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h} \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Полученные результаты приведены на рис. 3.20 и 3.21.

Видно, что переходный процесс не успевает закончиться и на интервале действия импульса напряжения, и на интервале его отсутствия. Это привело на определённом интервале времени к изменению начальных значений на переднем фронте импульса напряжения. Затем начальные значения начинают повторяться, и можно говорить об окончании переходного процесса. Инерционность цепи привела к сглаживанию импульсов тока в третьей ветви.

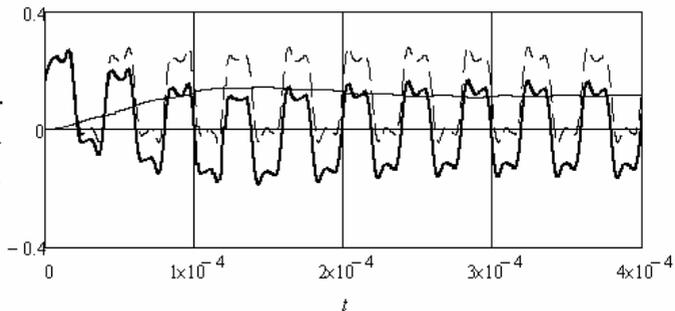


Рис. 3.20

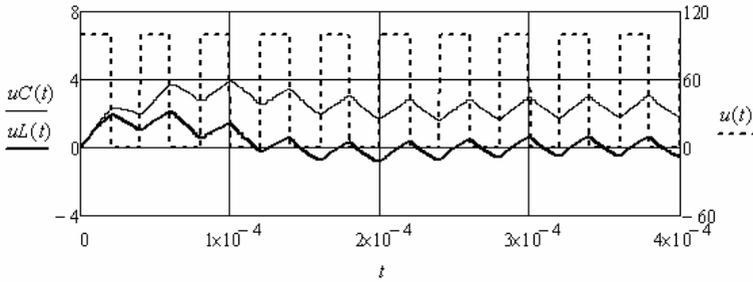


Рис. 3.21

Пример 3.12. Определим реакцию цепи (рис. 3.19), если напряжение источника ЭДС является одиночным импульсом, огибающая которого описывается полупериодом синусоиды.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 400 \quad R2 := 20 \quad C := 2 \cdot 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad U := 100 \quad T := 15 \cdot 10^{-5}$$

$$u(t) := \text{if}(0 \leq t \leq T \cdot 0.5, U \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot T^{-1} \cdot t), 0)$$

Повторим решение аналогично примеру 3.11.

$$i3h := 0 \quad di3h := 0$$

$$i := \begin{pmatrix} i3h \\ di3h \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{u(t)}{R1 \cdot L \cdot C} - \left(\frac{R1 + R2}{R1 \cdot L \cdot C} \right) \cdot i_0 - \left(\frac{R1 \cdot R2 \cdot C + L}{R1 \cdot L \cdot C} \right) \cdot i_1 \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(i, 0, 0.005, 1000, D)$$

$$S := \text{cspline}(Z^{(0)}, Z^{(1)}) \quad i3(t) := \text{interp}(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t)$$

$$SI := \text{cspline}(Z^{(0)}, Z^{(2)}) \quad di3(t) := \text{interp}(SI, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t)$$

$$uL(t) := L \cdot di3(t) \quad uC(t) := uL(t) + R2 \cdot i3(t) \quad t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-3}$$

$$h := 10^{-7} \quad i2(t) := C \cdot \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h} \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Полученные результаты приведены на рис. 3.22 и 3.23.

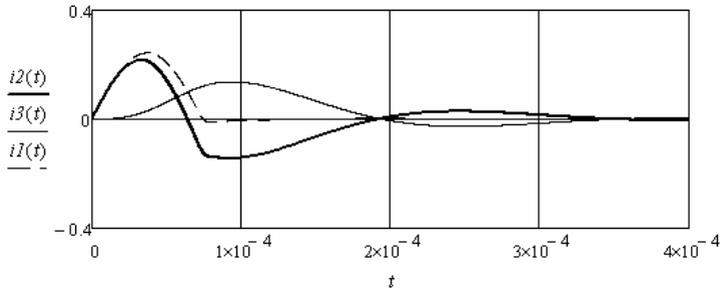


Рис. 3.22

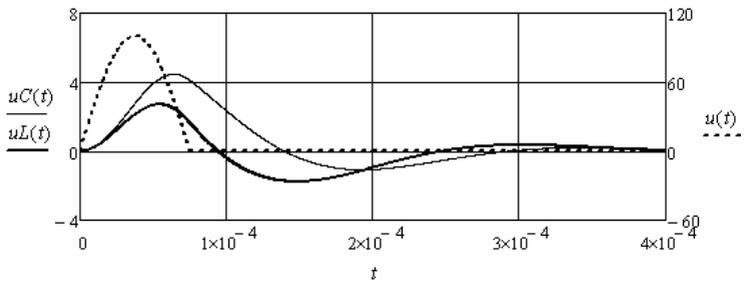


Рис. 3.23

Пример 3.13. Необходимо рассчитать переходный процесс в электрической цепи (рис. 3.24) после отключения источника ЭДС.

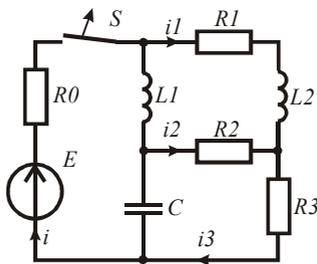


Рис. 3.24

После отключения источника в послекоммутационной схеме переходные токи и напряжения определяются только их свободными составляющими. Состояние цепи описывается однородным

дифференциальным уравнением, для решения которого в программе заложен соответствующий оператор. Воспользуемся им.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$E := 100 \quad R0 := 10 \quad R1 := 10 \quad R2 := 100 \quad R3 := 20$$

$$C := 10^{-6} \quad L1 := 10^{-3} \quad L2 := 0.5 \cdot 10^{-3}$$

Найдём установившиеся значения токов и напряжений до коммутации. Условно положительные направления напряжений соответствуют выбранным направлениям токов после коммутации. Определим начальное значение напряжения на конденсаторе.

$$I3 := E \cdot \left(R0 + R3 + \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2} \right)^{-1} \quad I1 := I3 \cdot \frac{R2}{R1 + R2} \quad I2 := I3 - I1$$

$$UC := -E + I3 \cdot R0 \quad u_{Cn} := UC$$

Для катушек коммутация является не корректной. Для определения начального значения первого тока воспользуемся первым обобщённым законом коммутации. Учитывая направление тока в первой катушке до коммутации, получим:

$$L := L1 + L2 \quad i1n := (-L1 \cdot I2 + L2 \cdot I1) \cdot L^{-1}$$

Составим по законам Кирхгофа и решим систему уравнений относительно мгновенных начальных значений токов и напряжений, подставив в неё уже найденные начальные значения. Найдём начальное значение производной первого тока.

$$i2n := 0 \quad i3n := 0 \quad uLn := 0$$

$$\text{Given} \quad i1n + i2n = i3n \quad i1n \cdot R1 + uLn = i2n \cdot R2 \quad i2n \cdot R2 + i3n \cdot R3 = -u_{Cn}$$

$$D := \text{Find}(i2n, i3n, uLn) \quad di1n := D2 \cdot L^{-1}$$

В данной задаче наиболее просто составить и решить дифференциальное уравнение относительно первого тока. Остальные переходные токи и напряжения найдём с помощью первого тока.

Система уравнений для послекоммутационной схемы имеет вид

$$\begin{cases} i_1(t) = -i_2(t) + i_3(t) \\ i_2 R_2 = i_1(t) R_1 + u_L(t) \\ -u_C(t) = i_2(t) R_2 + i_3(t) R_3 \end{cases}$$

Подставим первое и второе уравнения в третье уравнение. Полученное уравнение дифференцируем. После необходимых преобразований получим:

$$0 = i_1(t) + \frac{C(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) + L}{R_1 + R_2} i_1'(t) + \frac{(R_3 + R_2)CL}{R_1 + R_2} i_1''(t)$$

Решим полученное дифференциальное уравнение при найденных начальных значениях.

Given

$$i1''(t) \cdot \frac{L \cdot C \cdot (R2 + R3)}{R1 + R2} + i1'(t) \cdot \frac{C \cdot (R1 \cdot R2 + R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3) + L}{R1 + R2} + i1(t) = 0$$

$$i1(0) = i1n \quad i1'(0) = di1n \quad H := \text{Odesolve}(t, 10^{-2}, 1000)$$

Сформируем матрицы значений переходного тока и времени и выполним аппроксимацию.

$$n := 0, 10^{-6} .. 10^{-2} \quad B_{n \cdot 10^6, 1} := H(n) \quad B_{n \cdot 10^6, 0} := n$$

$$S := \text{lspline}(B^{(0)}, B^{(1)}) \quad i1(t) := \text{interp}(S, B^{(0)}, B^{(1)}, t)$$

Найдём остальные переходные токи и напряжения.

$$t := 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6} .. 10^{-3} \quad h := 10^{-6} \quad di1(t) := \frac{i1(t+h) - i1(t-h)}{2 \cdot h}$$

$$uL(t) := L \cdot di1(t) \quad i2(t) := \frac{i1(t) \cdot R1 + uL(t)}{R2} \quad i3(t) := i1(t) + i2(t)$$

$$uC(t) := -i2(t) \cdot R2 - i3(t) \cdot R3$$

Полученные результаты приведены на рис. 3.25 и 3.26.

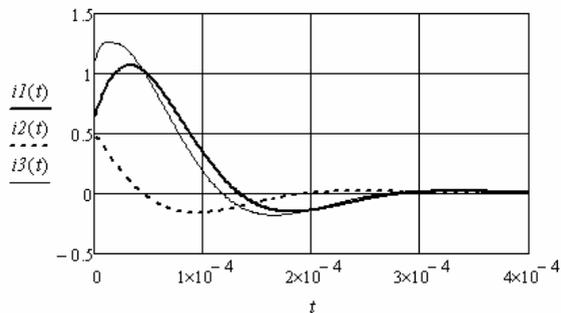


Рис. 3.25

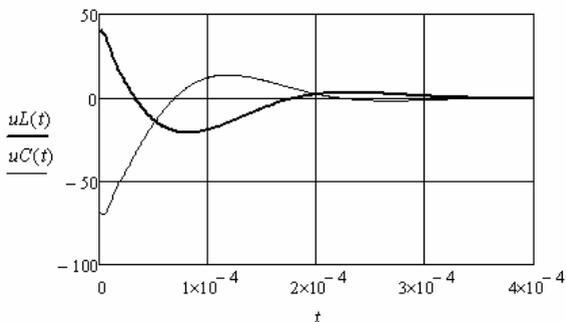


Рис. 3.26

Примеры анализа переходных процессов в нелинейных электрических цепях

Пример 3.14. Необходимо рассчитать переходный процесс в электрической цепи (рис. 1.19) с нелинейной безинерционной индуктивностью. Зависимость индуктивности от мгновенного значения тока задана аналитическим выражением.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 400 \quad R2 := 10 \quad C := 10^{-6} \quad E := 100 \quad L(i) := 0.4 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} \cdot \exp[-(0.8 \cdot i)^2]$$

На рис. 3.27 приведена зависимость индуктивности от тока. Индуктивность не зависит от направления тока.

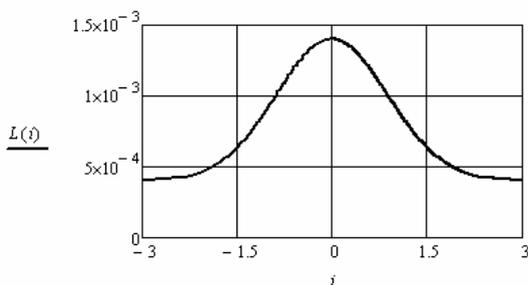


Рис. 3.27

Определим начальные значения. Введём в дифференциальное уравнение нелинейную зависимость и найдём решение для третьего тока.

$$i3_H := 0 \quad di3_H := E \cdot L(0)^{-1}$$

$$i := \begin{pmatrix} i3_H \\ di3_H \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{-(R1 + R2) \cdot i_0 - (R1 \cdot R2 \cdot C + L(i_0)) \cdot i_1 + E}{R1 \cdot C \cdot L(i_0)} \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 0.001, 1000, D)$$

По полученным данным выполним аппроксимацию переходного тока и производной переходного тока.

$$S := cspline(Z^{(0)}, Z^{(1)}) \quad i3(t) := interp(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t)$$

$$SI := cspline(Z^{(0)}, Z^{(2)}) \quad di3(t) := interp(SI, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t)$$

Найдём остальные переходные токи напряжения.

$$uR(t) := R2 \cdot i3(t) \quad uL(t) := \left[0.4 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} \cdot \exp\left[-(0.8 \cdot i3(t))^2\right] \right] \cdot di3(t)$$

$$uC(t) := uL(t) + uR(t) \quad t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-3} \quad h := 10^{-7}$$

$$duC(t) := \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h} \quad i2(t) := C \cdot duC(t) \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Полученные результаты приведены на рис. 3.28 и 3.29. На рис. 3.30 приведён фазовый портрет напряжения на конденсаторе.

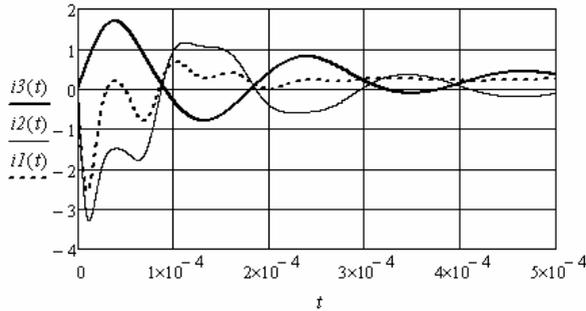


Рис. 3.28

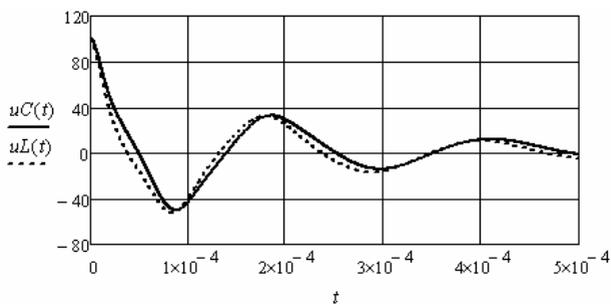


Рис. 3.29

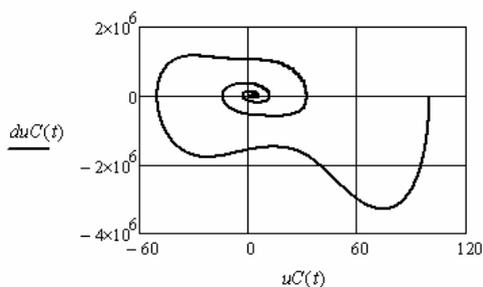


Рис. 3.30

Пример 3.15. Необходимо рассчитать переходный процесс в электрической цепи (рис. 1.29) с нелинейным безинерционным вторым резистором. Зависимость сопротивления от мгновенного значения тока задана аналитическим выражением.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 400 \quad C := 10^{-6} \cdot 2 \quad L := 10^{-3} \quad R2(i) := 10 + 100 \cdot i^2 \quad Em := 100$$

$$\omega := 3000 \quad \psi := 1 \quad e(t) := Em \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad i3n := 0$$

На рис. 3.31 приведена зависимость сопротивления второго резистора от тока. Сопротивление не зависит от направления тока.

Определим начальные значения. Введём в дифференциальное уравнение нелинейную зависимость и найдём решение для третьего тока.

$$E := Em \cdot \exp(j \cdot \psi) \quad xC := (\omega \cdot C)^{-1} \quad xL := \omega \cdot L \quad UCy := \frac{E \cdot (-j \cdot xC)}{R1 - j \cdot xC}$$

$$u_{Cn} := \text{Im}(UCy) \quad di3n := u_{Cn} \cdot L^{-1}$$

$$i := \begin{pmatrix} i3h \\ di3h \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{-(R1 + R2(i_0)) \cdot i_0 - (R1 \cdot R2(i_0) \cdot C + L) \cdot i_1 + e(t)}{R1 \cdot C \cdot L} \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 0.005, 1000, D)$$

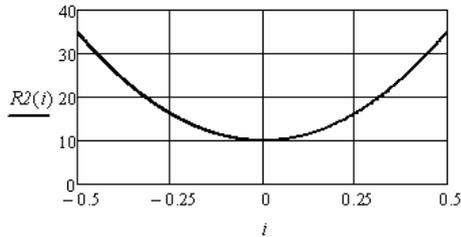


Рис. 3.31

По полученным данным выполним аппроксимацию переходного тока и производной переходного тока.

$$S := cspline(Z^{(0)}, Z^{(1)}) \quad i3(t) := interp(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t)$$

$$S1 := cspline(Z^{(0)}, Z^{(2)}) \quad di3(t) := interp(S1, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t)$$

Найдём остальные переходные токи напряжения.

$$uL(t) := L \cdot di3(t) \quad uC(t) := uL(t) + (10 + 100 \cdot i3(t)^2) \cdot i3(t) \quad t := 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6} .. 10^{-2} \cdot 0.5$$

$$h := 10^{-6} \quad i2(t) := C \cdot \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h} \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Полученные результаты приведены на рис. 3.32 и 3.33. На рис. 3.34 приведён фазовый портрет третьего тока.

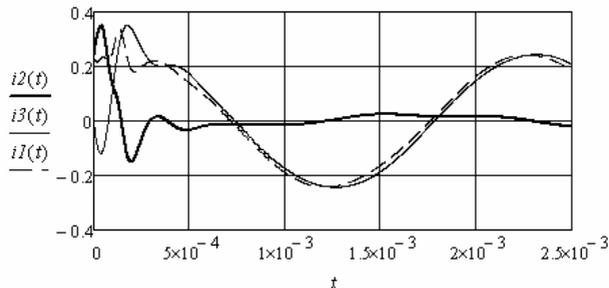


Рис. 3.32

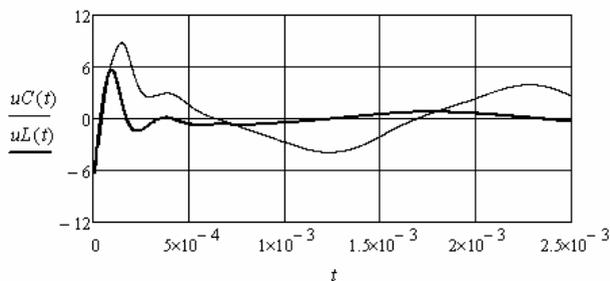


Рис. 3.33

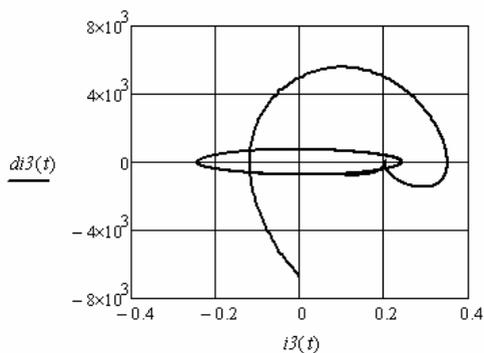


Рис. 3.34

Пример 3.16. Необходимо рассчитать переходный процесс в электрической цепи (рис. 1.29) с нелинейным безинерционным конденсатором. Зависимость ёмкости конденсатора от мгновенного значения напряжения на нём задана аналитическим выражением.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 400 \quad R2 := 20 \quad Cn := 2 \cdot 10^{-6} \quad L := 10^{-3} \quad Um := 100 \quad \omega := 3000$$

$$\psi := 0.4 \quad e(t) := Um \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad C(u) := Cn \cdot (1 + u^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4})^{-1}$$

На рис. 3.35 показана зависимость ёмкости конденсатора от напряжения.

Электрическая цепь является нелинейной и до, и после коммутации. Чтобы найти начальные значения в произвольный момент времени, необходимо решить нелинейное дифференциальное уравнение докоммутационной цепи с нулевыми начальными зна-

чениями. Составим дифференциальное уравнение относительно напряжения на конденсаторе: $u_c'(t) = (e(t) - u_c(t))(R_1 C(u_c(t)))^{-1}$. Оформи́м его решение следующим образом:

$$uCy := 0 \quad D0(t, uCy) := \frac{e(t) - uCy_0}{R1 \cdot C(uCy_0)} \quad Z0 := rkfixed(uCy, 0, 0.01, 1000, D0)$$

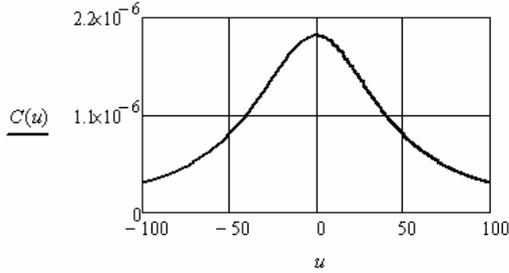


Рис. 3.35

Выполним аппроксимацию полученных данных и найдём производную напряжения на конденсаторе, а с её помощью найдём токи в докоммутиционной схеме.

$$S0 := cspline(Z0^{(0)}, Z0^{(1)}) \quad uCy(t) := interp(S0, Z0^{(0)}, Z0^{(1)}, t)$$

$$t := 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6} .. 10^{-2} \quad h := 10^{-6} \quad duCy(t) := \frac{uCy(t+h) - uCy(t-h)}{2 \cdot h}$$

$$i2y(t) := Cn \cdot (1 + uCy(t)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4})^{-1} \cdot duCy(t) \quad i1y(t) := i2y(t)$$

На рис. 3.36 показана зависимость напряжения на конденсаторе в докоммутиционной схеме.

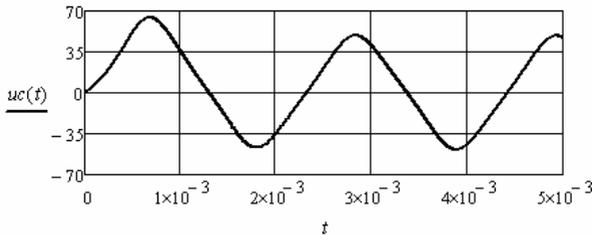


Рис. 3.36

Выберем произвольный момент коммутации и подготовим необходимые данные для решения дифференциального уравнения послекоммутационной схемы.

$$Tk := 2 \cdot 10^{-3} \quad u_{Cн} := u_{Cy}(Tk) \quad du_{Cн} := du_{Cy}(Tk) \quad de(t) := \frac{d}{dt} e(t)$$

В качестве неизвестной переменной в дифференциальном уравнении возьмём напряжение на конденсаторе, так как ёмкость конденсатора является функцией этого напряжения. Воспользуемся системой уравнений, приведённой в примере 3.7. Первое и второе уравнения подставим в третье уравнение. Исключим второй ток, используя выражение $i_2(t) = Cu'_c(t)$. Окончательно получим:

$$u''_c(t) = \frac{R_2 e(t) + L e'(t) - (R_1 + R_2)u_c(t) - (R_1 R_2 C(u_c(t)) + L)u'_c(t)}{R_1 LC(u_c(t))}$$

Введём следующие обозначения: переходное напряжение — u_0 , производная переходного напряжения — u_1 .

Начальными значениями являются переходное напряжение и производная переходного напряжения на конденсаторе сразу после коммутации.

Оформим решение полученного нелинейного дифференциального уравнения, условно считая, что коммутация произошла при $t = 0$. При этом необходимо сместить время в выражении ЭДС источника на Tk .

$$Tk := 2 \cdot 10^{-3} \quad u_{Cн} := u_{Cy}(Tk) \quad du_{Cн} := du_{Cy}(Tk) \quad de(t) := \frac{d}{dt} e(t)$$

$$u := \begin{pmatrix} u_{Cн} \\ du_{Cн} \end{pmatrix} \quad D(t, u) := \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{R_2 \cdot e(t - Tk) + L \cdot de(t - Tk) - (R_1 + R_2) \cdot u_0 - (R_1 \cdot R_2 \cdot C(u_0) + L) \cdot u_1}{R_1 \cdot L \cdot C(u_0)} \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(u, 0, 0.005, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию полученных данных.

$$S := cspline(Z^{(0)}, Z^{(1)}) \quad uC(t) := interp(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t)$$

$$S1 := cspline(Z^{(0)}, Z^{(2)}) \quad duC(t) := interp(S1, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t)$$

Чтобы найти третий ток, необходимо решить дифференциальное уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа для контура CR_2L . Далее оформим решение данного уравнения, которое имеет вид

$$i_3'(t) = (u_c(t) - R_2 i_3(t)) L^{-1}.$$

$$i3n := 0 \quad i := i3n \quad DI(t, i) := \frac{uC(t) - R2 \cdot i_0}{L} \quad ZI := rkfixed(i, 0, 0.005, 1000, DI)$$

Выполним аппроксимацию полученных данных, найдём производную третьего тока, а затем найдём зависимости для остальных неизвестных.

$$S2 := cspline(ZI^{(0)}, ZI^{(1)}) \quad i3(t) := interp(S2, ZI^{(0)}, ZI^{(1)}, t)$$

$$t := 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6} .. 10^{-2} \quad h := 10^{-6} \quad di3(t) := \frac{i3(t+h) - i3(t-h)}{2 \cdot h}$$

$$uL(t) := L \cdot di3(t) \quad i2(t) := Cn \cdot (1 + uC(t)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4})^{-1} \cdot duC(t) \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

Объединим полученные решения для интервалов времени до и после коммутации, смещая последние решения на время коммутации Tk .

$$uCэ(t) := if(Tk \geq t, uCy(t), uC(t - Tk)) \quad uLэ(t) := if(Tk \geq t, 0, uL(t - Tk))$$

$$i1э(t) := if(Tk \geq t, i1y(t), i1(t - Tk)) \quad i2э(t) := if(Tk \geq t, i2y(t), i2(t - Tk))$$

$$i3э(t) := if(Tk \geq t, 0, i3(t - Tk))$$

Зависимости переходных напряжений на реактивных элементах и зависимости переходных токов в ветвях приведены на рис. 3.37 и 3.38.

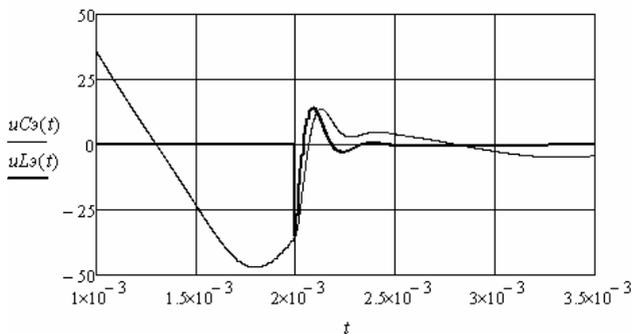


Рис. 3.37

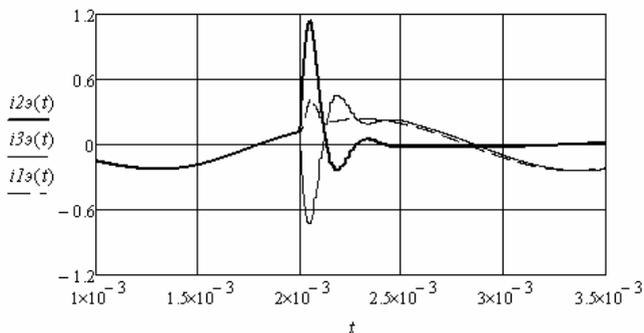


Рис. 3.38

Примеры анализа переходных процессов в параметрических электрических цепях

Пример 3.17. Необходимо найти переходные токи и напряжения на реактивных элементах в параметрической цепи (рис. 3.39) численным решением дифференциального уравнения цепи. Зависимость индуктивности от времени является гармонической функцией.

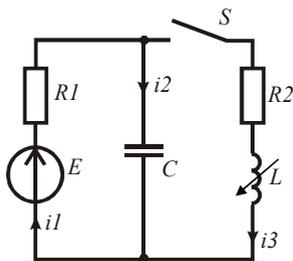


Рис. 3.39

Для решения используем дифференциальное уравнение из примера 3.9, введя в него зависимость индуктивности от времени.

$$i_3''(t) = \frac{E}{R_1 L(t) C} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 L(t) C} i_3(t) - \frac{R_1 R_2 C + L(t)}{R_1 L(t) C} i_3'(t)$$

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 400 \quad R2 := 10 \quad C := 10^{-6} \quad E := 100 \quad \omega := 0.6 \cdot 10^5$$

$$L(t) := 10^{-3} \cdot (1 + 0.6 \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

Определим начальные значения.

$$i3h := 0 \quad di3h := E \cdot L(0)^{-1}$$

Введём в листинг решения начальные значения и дифференциальное уравнение в необходимом виде.

$$i := \begin{pmatrix} i3h \\ di3h \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{E}{R1 \cdot L(t) \cdot C} - \left(\frac{R1 + R2}{R1 \cdot L(t) \cdot C} \right) \cdot i_0 - \left(\frac{R1 \cdot R2 \cdot C + L(t)}{R1 \cdot L(t) \cdot C} \right) \cdot i_1 \end{bmatrix}$$

Решим дифференциальное уравнение и выполним аппроксимацию зависимости тока и его производной от времени.

$$Z := rkfixed(i, 0, 0.001, 1000, D)$$

$$S := cspline(Z^{(0)}, Z^{(1)}) \quad i3(t) := interp(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t)$$

$$SI := cspline(Z^{(0)}, Z^{(2)}) \quad di3(t) := interp(SI, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t)$$

Найдём остальные заданные зависимости.

$$uL(t) := L(t) \cdot di3(t) \quad uC(t) := uL(t) + R2 \cdot i3(t) \quad t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 10^{-3}$$

$$h := 10^{-7} \quad i2(t) := C \cdot \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h} \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

На рис. 3.40 приведены зависимости переходных токов от времени. На рис. 3.41 приведены зависимости переходных напряжений и индуктивности от времени. На рис. 3.42 приведён фазовый портрет третьего тока.

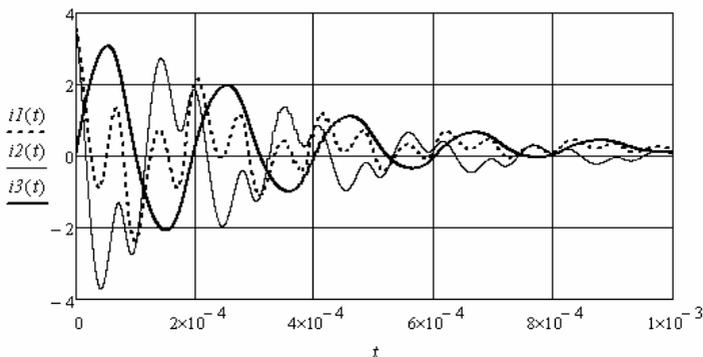


Рис. 3.40

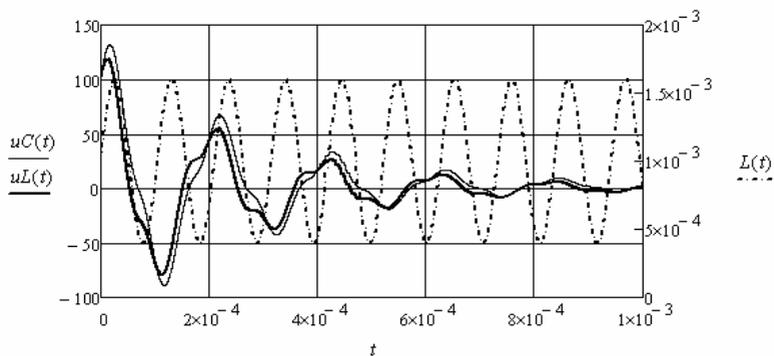


Рис. 3.41

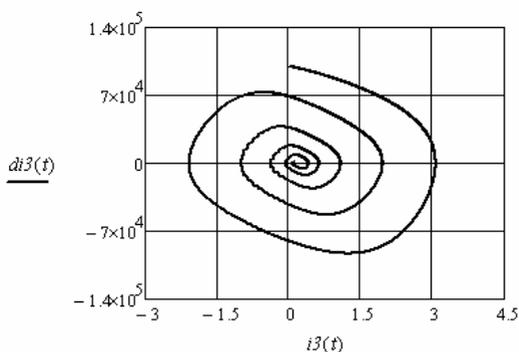


Рис. 3.42

Видно, что в переходных токах и напряжениях из-за периодического изменения индуктивности появились высшие гармонические составляющие.

Пример 3.18. Рассмотрим пример параметрического возбуждения колебаний тока в цепи, которая приведена на рис. 3.43. Ёмкость конденсатора изменяется по гармоническому закону. Параметры цепи подобраны так, чтобы амплитуда колебаний оставалась постоянной.

Введём в листинг исходные данные.

$$R := 24 \quad J := 1 \quad L := 0.00345 \quad \omega := 10.061 \cdot 10^4$$

$$C(t) := 10^{-7} \cdot (1 + 0.8 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \quad i_{2H} := 0 \quad di_{2H} := 0$$

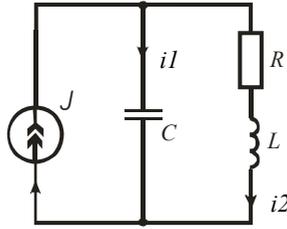


Рис. 3.43

Составим дифференциальное уравнение цепи относительно тока в ветви с индуктивностью.

$$i_2''(t) = \frac{J}{LC(t)} - \frac{R}{L} i_2'(t) - \frac{1}{LC(t)} i_2(t)$$

Введём в листинг дифференциальное уравнение и решим его.

$$i := \begin{pmatrix} i2n \\ di2n \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{J}{C(t) \cdot L} - \left(\frac{1}{C(t) \cdot L} \right) \cdot i_0 - \frac{R}{L} \cdot i_1 \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(i, 0, 0.01, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимостей второго тока и его производной от времени. Построим зависимость второго тока и ёмкости конденсатора от времени (рис. 3.44). Построим фазовый портрет второго тока (рис. 3.45).

$$S := cspline(Z^{(0)}, Z^{(1)}) \quad i2(t) := interp(S, Z^{(0)}, Z^{(1)}, t)$$

$$SI := cspline(Z^{(0)}, Z^{(2)}) \quad di2(t) := interp(SI, Z^{(0)}, Z^{(2)}, t)$$

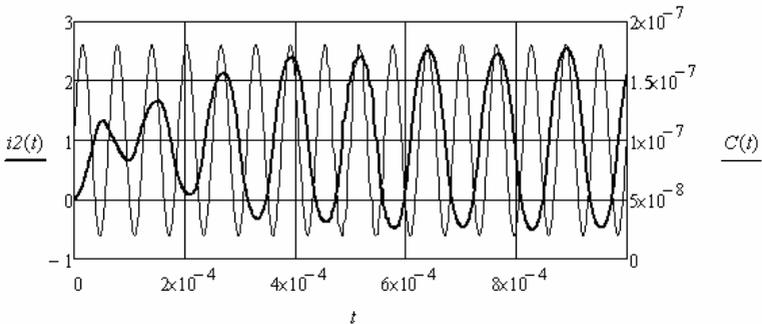


Рис. 3.44

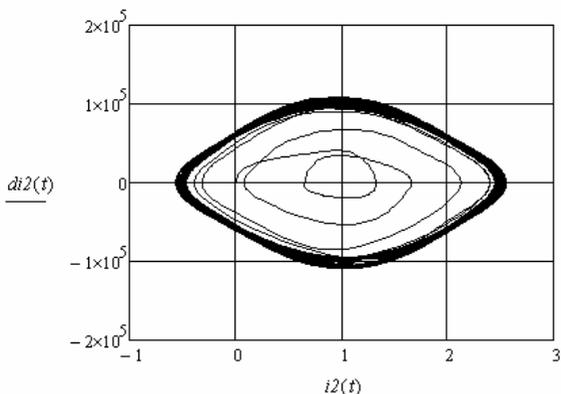


Рис. 3.45

Видно, что возбуждаемые колебания тока близки к синусоидальным.

Следует отметить, что увеличение частоты колебаний ёмкости конденсатора вызывает нарастание амплитуды колебаний тока, и наоборот, уменьшение частоты приводит к затуханию колебаний тока. Размытость фазового портрета в установившемся режиме говорит о биениях амплитуды колебаний тока.

Контрольные вопросы

1. Чем объясняется разнообразие функций численного решения дифференциальных уравнений?
2. Каким образом выполняется сплайн-аппроксимация зависимостей, полученных в результате численного решения дифференциальных уравнений?
3. К какой форме приводится дифференциальное уравнение электрической цепи при его численном решении?
4. С помощью какой функции программы решаются однородные дифференциальные уравнения (ОДУ)?
5. Как находят начальные значения при численном решении дифференциальных уравнений?
6. Как выбрать временной интервал при численном решении дифференциальных уравнений?

7. Чем отличаются линейные дифференциальные уравнения от нелинейных и параметрических дифференциальных уравнений?
8. Каковы требования к нелинейным зависимостям, которые вводятся в дифференциальные уравнения?
9. Можно ли по фазовому портрету судить о линейности и нелинейности электрической цепи?
10. Можно ли исследовать переходные процессы в нелинейных цепях классическим или операторным методами?

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ, НЕЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В методе переменных состояния в качестве неизвестных берут переходные токи в ветвях с индуктивностями и переходные напряжения на конденсаторах. Система уравнений, составленная по законам Кирхгофа для послекоммутационной схемы электрической цепи, преобразуется к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния. Данная система уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + BF(t), \quad (4.1)$$

где $X(t)$ – матрица неизвестных переменных состояния, $F(t)$ – матрица источников, A и B – матрицы коэффициентов.

Начальные значения переменных состояния являются независимыми начальными значениями, что существенно облегчает их определение.

Метод переменных состояния позволяет анализировать переходные процессы в сложных электрических цепях с большим количеством реактивных элементов. Недостатком метода является необходимость преобразования системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа, в нужную форму. Для этого разработаны различные методики. Далее рассмотрим некоторые из них.

Система уравнений (4.1) решается численно с помощью одной из встроенных функций в зависимости от жёсткости уравнений.

4.1. Использование законов Кирхгофа для составления системы уравнений относительно переменных состояния

В данной методике используется связь между мгновенными значениями токов и напряжений на реактивных элементах:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (4.2)$$

На первом этапе с помощью законов Кирхгофа получают выражения для напряжений на индуктивностях и для токов в ветвях с конденсаторами, исключая слагаемые, не соответствующие форме (4.1). На втором этапе осуществляется замена левых частей уравнений с помощью (4.2) и окончательное преобразование к форме (4.1). Начальные значения находят в докоммутиционной схеме в момент коммутации.

Пример 4.1. Необходимо рассчитать переходный процесс в электрической цепи (рис. 4.1) методом переменных состояния. Переменными состояния являются первый ток и напряжение на конденсаторе. Начальные значения нулевые.

Составим необходимую систему уравнений. На первом этапе получим

$$\begin{cases} u_L = e - R_1 i_1 - u_C \\ i_2 = i_1 - i_3 = i_1 - \frac{u_C}{R_2} \end{cases}$$

На втором этапе получим систему уравнений, соответствующую форме (4.1):

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = \frac{e - R_1 i_1 - u_C}{L} \\ \dot{u}_C = \frac{i_1 - u_C R_2^{-1}}{C} \end{cases}$$

При преобразованиях на первом этапе были использованы три уравнения, составленные по законам Кирхгофа для данной схемы.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$e(t) := 50 \quad R1 := 150 \quad R2 := 5000 \quad L := 0.002 \quad C := 10^{-7}$$

Найдём корни характеристического уравнения и оценим длительность переходного процесса.

$$P := 0 = \left[\frac{1}{p \cdot C} + \frac{R2 \cdot (R1 + p \cdot L)}{p \cdot L + R1 + R2} \right] \text{solve}, p, \text{float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -38500.0 - 60561.0j \\ -38500.0 + 60561.0j \end{pmatrix}$$

Оценивая значение вещественной части корней, выберем интервал анализа $2 \cdot 10^{-4}$.

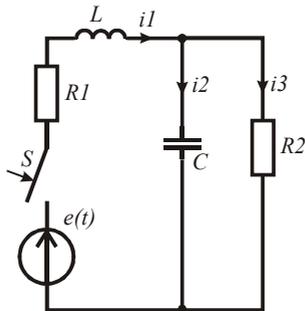


Рис. 4.1

Обозначим первый ток как x_0 , напряжение на конденсаторе как x_1 . Введём в листинг решения начальные значения, систему дифференциальных уравнений и найдём решение на выбранном интервале времени после коммутации.

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} \frac{e(t) - R1 \cdot x_0 - x_1}{L} \\ \frac{x_0 - x_1 \cdot R2^{-1}}{C} \end{pmatrix} \quad Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.0002, 1000, D)$$

Используя соответствующие столбцы матрицы решения, построим зависимости переменных состояния от времени на интервале переходного процесса.

$$t := Z^{(0)} \quad i1(t) := Z^{(1)} \quad uC(t) := Z^{(2)}$$

Для того чтобы найти остальные зависимости, выполним аппроксимацию полученных зависимостей.

$$X := Z^{(0)} \quad Y1 := Z^{(1)} \quad Y2 := Z^{(2)}$$

$$S1 := \text{cspline}(X, Y1) \quad i1(t) := \text{interp}(S1, X, Y1, t)$$

$$S2 := \text{cspline}(X, Y2) \quad uC(t) := \text{interp}(S2, X, Y2, t)$$

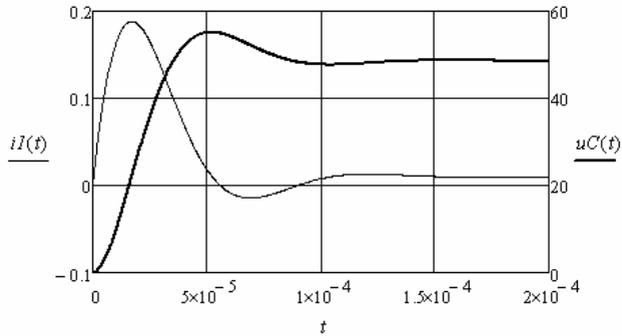


Рис. 4.2

Используя численное дифференцирование, найдём остальные переходные токи и напряжения.

$$t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 2 \cdot 10^{-4} \quad h := 10^{-7} \quad diI(t) := \frac{iI(t+h) - iI(t-h)}{2 \cdot h}$$

$$uL(t) := L \cdot diI(t) \quad duC(t) := \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h} \quad i2(t) := C \cdot duC(t)$$

$$i3(t) := iI(t) - i2(t)$$

Построим полученные зависимости и фазовый портрет первого тока.

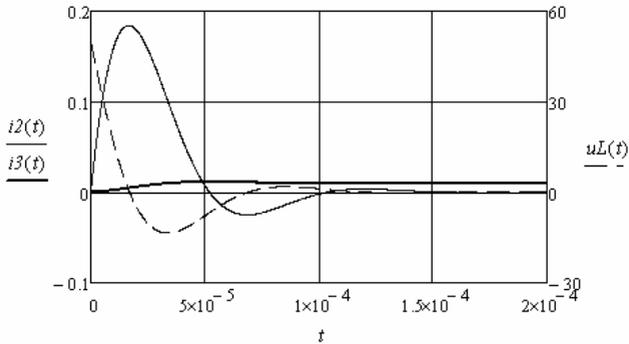


Рис. 4.3

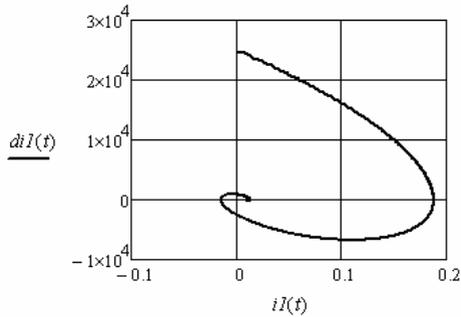


Рис. 4.4

Пример 4.2. Необходимо найти переходные токи и переходное напряжение на конденсаторе в электрической цепи (рис. 4.5).

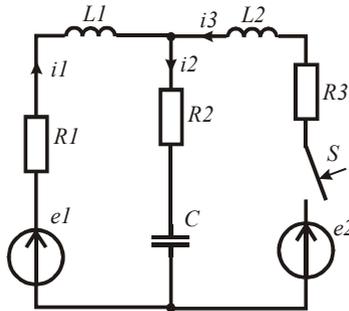


Рис. 4.5

Используем метод переменных состояния. Переменными состояния будут первый и третий токи и напряжение на конденсаторе. На первом этапе получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_{L1} = e_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 - u_C = e_1 - R_1 i_1 - R_2 (i_1 + i_3) - u_C \\ u_{L2} = e_2 - R_3 i_3 - R_2 i_2 - u_C = e_2 - R_3 i_3 - R_2 (i_1 + i_3) - u_C \\ i_2 = i_1 + i_3 \end{cases}$$

Используя (4.2), после преобразований получим необходимую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = \frac{e_1 - (R_1 + R_2)i_1 - R_2i_3 - u_C}{L_1} \\ u_{L2} = \frac{e_2 - R_2i_1 - (R_2 + R_3)i_3 - u_C}{L_2} \\ \dot{u}_C = \frac{i_1 + i_3}{C} \end{cases}$$

При преобразованиях были использованы три уравнения, составленные по законам Кирхгофа для данной схемы.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R1 := 100 \quad R2 := 10 \quad R3 := 30 \quad L1 := 0.002 \quad L2 := 0.003 \quad C := 10^{-8}$$

$$\omega := 0.5 \cdot 10^5 \quad \psi := 0.2 \quad e1(t) := 50 \quad e2(t) := 40 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

Найдём корни характеристического уравнения и оценим длительность переходного процесса.

$$P := 0 = \left[\frac{1}{p \cdot C} + R2 + \frac{(R1 + p \cdot L1) \cdot (R3 + p \cdot L2)}{p \cdot L1 + R1 + R3 + p \cdot L2} \right] \text{solve, } p, \text{float, } 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -21106.0 - 287231.0j \\ -21106.0 + 287231.0j \\ -26120.0 \end{pmatrix}$$

Оценивая значение вещественной части корней, выберем интервал анализа $4 \cdot 10^{-4}$.

Обозначим первый ток как x_0 , третий ток как x_1 , напряжение на конденсаторе как x_2 . Введём в листинг решения начальные значения, которые у токов будут нулевыми, а начальное значение напряжения на конденсаторе равно e_1 . Введём в листинг систему дифференциальных уравнений и найдём решение на выбранном интервале времени после коммутации.

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{e1(t) - (R1 + R2) \cdot x_0 - R2 \cdot x_1 - x_2}{L1} \\ \frac{e2(t) - (R2 + R3) \cdot x_1 - R2 \cdot x_0 - x_2}{L2} \\ \frac{x_0 + x_1}{C} \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.0004, 1000, D)$$

Используя соответствующие столбцы матрицы решения, построим зависимости переменных состояния от времени на интервале переходного процесса.

$$t := Z^{(0)} \quad i1(t) := Z^{(1)} \quad i3(t) := Z^{(2)} \quad uC(t) := Z^{(3)}$$

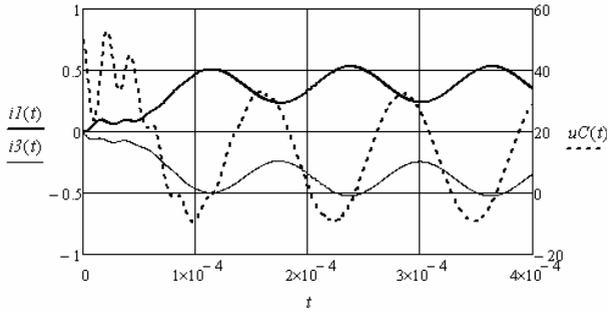


Рис. 4.6

Для того чтобы найти зависимость второго тока и построить фазовый портрет напряжения на конденсаторе, выполним аппроксимацию зависимости напряжения на конденсаторе.

$$X := Z^{(0)} \quad Y := Z^{(3)} \quad S := cspline(X, Y) \quad uC(t) := interp(S, X, Y, t)$$

$$t := 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7} .. 4 \cdot 10^{-4} \quad h := 10^{-7} \quad duC(t) := \frac{uC(t+h) - uC(t-h)}{2 \cdot h}$$

$$i2(t) := C \cdot duC(t)$$

Построим фазовый портрет напряжения на конденсаторе и зависимость второго тока.

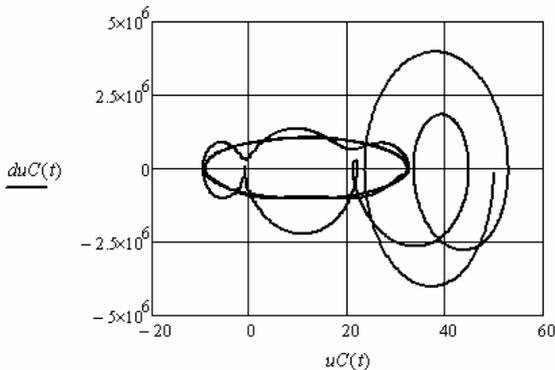


Рис. 4.7

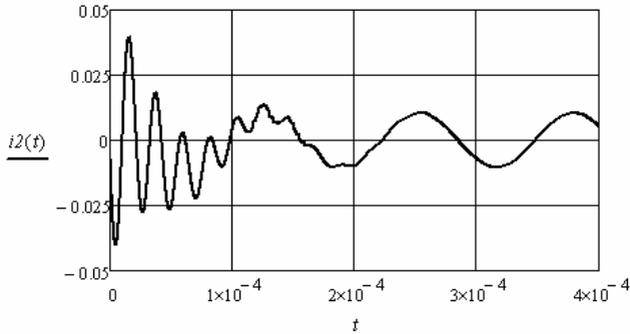


Рис. 4.8

Пример 4.3. Необходимо найти зависимости переменных состояния от времени на интервале переходного процесса в электрической цепи (рис. 4.9).

Переменными состояниями будут первый, третий и пятый токи и напряжения на конденсаторах. На первом этапе получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_{L1} = e - R_1 i_1 - R_2 i_2 - u_{C1} \\ u_{L2} = u_{C1} + R_2 i_2 - u_{C2} - R_4 i_4 \\ u_{L3} = u_{C2} + R_4 i_4 - R_5 i_5 - R_3 i_3 \\ i_2 = i_1 + J - i_3 \\ i_4 = i_3 - i_5 \end{cases}$$

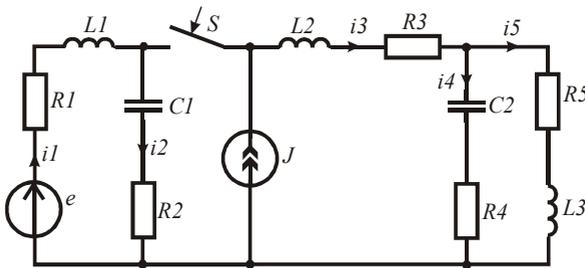


Рис. 4.9

В первых трёх уравнениях есть слагаемые, которые не связаны с переменными состояния. Их надо исключить. В данном примере это делается подстановкой вместо второго и четвёртого токов

их выражений, взятых из четвёртого и пятого уравнений системы.
В результате на втором этапе получим

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = \frac{e - R_1 i_1 - R_2(i_1 + J - i) - u_{C1}}{L_1} \\ \dot{i}_3 = \frac{u_{C1} + R_2(i_1 + J - i_3) - u_{C2} - R_4(i_3 - i_5)}{L_2} \\ \dot{i}_5 = \frac{u_{C2} + R_4(i_3 - i_5) - R_5 i_5 - R_3 i_3}{L_3} \\ u_{C1}' = \frac{i_1 + J - i_3}{C_1} \\ u_{C2}' = \frac{i_3 - i_5}{C_2} \end{cases}$$

Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned} R1 := 25 \quad R2 := 20 \quad R3 := 10 \quad R4 := 25 \quad R5 := 12 \quad L1 := 0.0016 \\ L2 := 0.002 \quad L3 := 0.0015 \quad C1 := 10^{-7} \quad C2 := 2 \cdot 10^{-7} \quad \omega := 10^5 \quad \psi := 0.5 \\ e(t) := 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad J(t) := 0.8 \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Для определения начальных значений переменных состояния рассчитаем установившийся режим в докоммутиционной схеме, используя комплексную плоскость.

$$\begin{aligned} I1 := \frac{100 \cdot \exp(j \cdot \psi)}{R1 + R2 + j \cdot [\omega \cdot L1 - (\omega \cdot C1)^{-1}]} \quad UC1 := I1 \cdot [-j \cdot (\omega \cdot C1)^{-1}] \quad I3 := 0.8 \\ I5 := I3 \cdot \frac{R4 - j \cdot (\omega \cdot C2)^{-1}}{R4 + R5 + j \cdot [\omega \cdot L3 - (\omega \cdot C2)^{-1}]} \quad I4 := I3 - I5 \quad UC2 := I4 \cdot [-j \cdot (\omega \cdot C2)^{-1}] \\ UL2 := I3 \cdot j \cdot \omega \cdot L2 \end{aligned}$$

Запишем уравнения для переменных состояния в докоммутиционной схеме.

$$\begin{aligned} i1y(t) := |I1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I1)) \text{ float } ,4 \rightarrow 1.333 \cdot \sin(100000.0 \cdot t - 0.4273) \\ i3y(t) := J(t) \rightarrow 0.8 \cdot \sin(100000 \cdot t) \\ i5y(t) := |I5| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I5)) \text{ float } ,4 \rightarrow 0.4194 \cdot \sin(100000.0 \cdot t - 2.324) \\ uC1y(t) := |UC1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(UC1)) \text{ float } ,4 \rightarrow 133.3 \cdot \sin(100000.0 \cdot t - 1.998) \\ uC2y(t) := |UC2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(UC2)) \text{ float } ,4 \rightarrow 56.45 \cdot \sin(100000.0 \cdot t - 1.296) \end{aligned}$$

Определим начальные значения переменных состояния.

$$I1н := \text{Im}(I1) \quad I3н := \text{Im}(I3) \quad I5н := \text{Im}(I5) \quad UC1н := \text{Im}(UC1) \quad UC2н := \text{Im}(UC2)$$

Определим начальный индекс массива переменных как единичный и обозначим первый ток x_1 , третий ток x_2 , пятый ток x_3 , напряжение на первом конденсаторе x_4 , а на втором x_5 .

Оценим длительность переходного процесса. Для этого составим характеристическое уравнение и найдём его корни.

$$\begin{aligned} Z1(p) &:= R1 + p \cdot L1 & Z2(p) &:= R2 + (p \cdot C1)^{-1} & Z12(p) &:= \frac{Z1(p) \cdot Z2(p)}{Z1(p) + Z2(p)} \\ Z3(p) &:= R3 + p \cdot L2 & Z4(p) &:= R4 + (p \cdot C2)^{-1} & Z5(p) &:= R5 + p \cdot L3 \\ Z45(p) &:= \frac{Z4(p) \cdot Z5(p)}{Z4(p) + Z5(p)} & Z(p) &:= Z12(p) + Z3(p) + Z45(p) \end{aligned}$$

$$P := 0 = Z(p) \text{ solve, } p, \text{float}, 6 \rightarrow \begin{pmatrix} -9236.45 \\ -14123.3 - 62447.4j \\ -14123.3 + 62447.4j \\ -21404.3 + 111681.0j \\ -21404.3 - 111681.0j \end{pmatrix}$$

Оценивая значения корней, выберем интервал анализа $4 \cdot 10^{-4}$.

Введём систему дифференциальных уравнений и найдём решение на выбранном интервале времени после коммутации.

ORIGIN := 1

$$x := \begin{pmatrix} I1_H \\ I3_H \\ I5_H \\ UC1_H \\ UC2_H \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} \frac{e(t) - R1 \cdot x_1 - R2 \cdot (x_1 - x_2 + J(t)) - x_4}{L1} \\ \frac{x_4 - x_5 + R2 \cdot (x_1 - x_2 + J(t)) - R4 \cdot (x_2 - x_3)}{L2} \\ \frac{x_5 - R3 \cdot x_2 - R5 \cdot x_3 + R4 \cdot (x_2 - x_3)}{L3} \\ \frac{x_1 - x_2 + J(t)}{C1} \\ \frac{x_2 - x_3}{C2} \end{pmatrix}$$

$$Z := Rkadapt(x, 0, 0.0005, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию найденных зависимостей.

$$\begin{aligned}
X &:= Z^{(1)} & Y1 &:= Z^{(2)} & S1 &:= \text{cspline}(X, Y1) & i1(t) &:= \text{interp}(S1, X, Y1, t) \\
& & Y2 &:= Z^{(3)} & S2 &:= \text{cspline}(X, Y2) & i3(t) &:= \text{interp}(S2, X, Y2, t) \\
& & Y3 &:= Z^{(4)} & S3 &:= \text{cspline}(X, Y3) & i5(t) &:= \text{interp}(S3, X, Y3, t) \\
& & Y4 &:= Z^{(5)} & S4 &:= \text{cspline}(X, Y4) & uC1(t) &:= \text{interp}(S4, X, Y4, t) \\
& & Y5 &:= Z^{(6)} & S5 &:= \text{cspline}(X, Y5) & uC2(t) &:= \text{interp}(S5, X, Y5, t)
\end{aligned}$$

Построим зависимости токов для интервалов времени до и после коммутации.

$$\begin{aligned}
i1\varepsilon(t) &:= \text{if}(t > 0, i1(t), i1y(t)) & i3\varepsilon(t) &:= \text{if}(t > 0, i3(t), i3y(t)) \\
i5\varepsilon(t) &:= \text{if}(t > 0, i5(t), i5y(t))
\end{aligned}$$

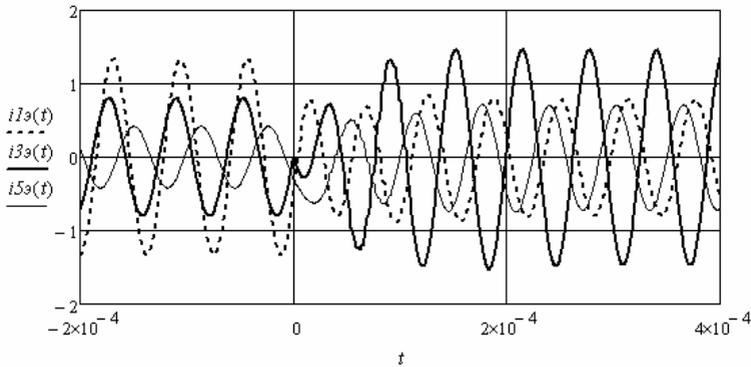


Рис. 4.10

Производная третьего тока (рис. 4.10) меняет знак в момент коммутации, что приводит к скачку напряжения на второй индуктивности. Для оценки данного скачка напряжения построим зависимости напряжений на конденсаторах и зависимость напряжения на второй индуктивности дополнительно.

$$\begin{aligned}
uC1\varepsilon(t) &:= \text{if}(t > 0, uC1(t), uC1y(t)) & uC2\varepsilon(t) &:= \text{if}(t > 0, uC2(t), uC2y(t)) \\
uL2(t) &:= L2 \cdot \left(\frac{d}{dt} i3\varepsilon(t) \right)
\end{aligned}$$

Видно, что скачок напряжения на индуктивности невелик.

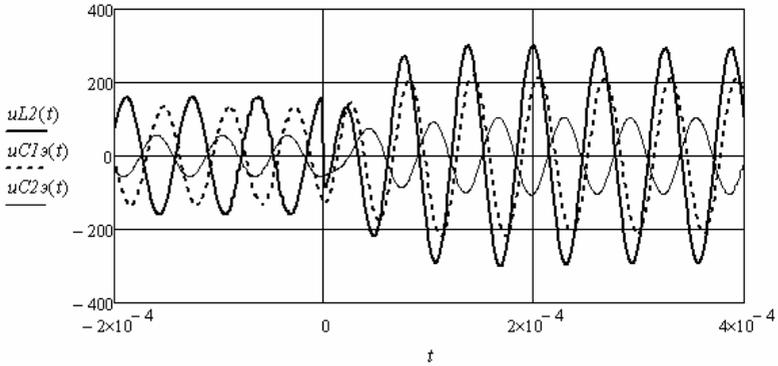


Рис. 4.11

Пример 4.4. Выполним анализ переходного процесса в трёхфазной цепи после включения трёхфазного потребителя и после коммутации прямой последовательности фаз генератора на обратную последовательность. Трёхфазная цепь собрана по четырёхпроводной схеме «звезда – звезда». Схема цепи приведена на рис. 4.12 без коммутирующих устройств. Нулевой провод обладает активным конечным сопротивлением. Характер сопротивления потребителя активно-индуктивный. Коммутация фаз происходит в момент времени t_1 .

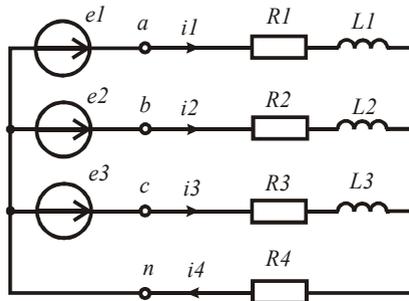


Рис. 4.12

Решим задачу методом переменных состояния. Переменными состояния будут фазные токи.

На первом этапе получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_{L1} = e_1 - R_1 i_1 - R_4 i_4 = e_1 - R_1 i_1 - R_4 (i_1 + i_2 + i_3) \\ u_{L2} = e_2 - R_2 i_2 - R_4 i_4 = e_2 - R_2 i_2 - R_4 (i_1 + i_2 + i_3) \\ u_{L3} = e_3 - R_3 i_3 - R_4 i_4 = e_3 - R_3 i_3 - R_4 (i_1 + i_2 + i_3) \end{cases}$$

На втором этапе получим систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1' = \frac{e_1 - R_1 i_1 - R_4 (i_1 + i_2 + i_3)}{L_1} \\ i_2' = \frac{e_2 - R_2 i_2 - R_4 (i_1 + i_2 + i_3)}{L_2} \\ i_3' = \frac{e_3 - R_3 i_3 - R_4 (i_1 + i_2 + i_3)}{L_3} \end{cases}$$

Введём в листинг решения исходные данные. Для имитации коммутации фаз генератора воспользуемся встроенной в программу функцией $\text{sign}(t)$.

$$\begin{aligned} R1 &:= 20 & R2 &:= 22 & R3 &:= 24 & R4 &:= 60 & L1 &:= 0.1 & L2 &:= 0.095 \\ L3 &:= 0.102 & t1 &:= 0.04 & f &:= 50 & e1(t) &:= 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \\ e2(t) &:= 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot \text{sign}(t - t1)\right) \\ e3(t) &:= 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot \text{sign}(t - t1)\right) \end{aligned}$$

В момент включения потребителя начальные значения переменных состояния нулевые. Определим начальный индекс массива переменных как единичный и обозначим первый ток x_1 , второй ток x_2 , третий ток x_3 . Введём в листинг систему дифференциальных уравнений и найдём решение.

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 \\ x &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & D(t, x) &:= \begin{bmatrix} \frac{-R1 \cdot x_1 - R4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + e1(t)}{L1} \\ \frac{-R2 \cdot x_2 - R4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + e2(t)}{L2} \\ \frac{-R3 \cdot x_3 - R4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + e3(t)}{L3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.08, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию найденных зависимостей и построим их.

$$\begin{aligned}
 X &:= Z^{(1)} & Y1 &:= Z^{(2)} & Y2 &:= Z^{(3)} & Y3 &:= Z^{(4)} \\
 S1 &:= cspline(X, Y1) & i1(t) &:= interp(S1, X, Y1, t) \\
 S2 &:= cspline(X, Y2) & i2(t) &:= interp(S2, X, Y2, t) \\
 S3 &:= cspline(X, Y3) & i3(t) &:= interp(S3, X, Y3, t)
 \end{aligned}$$

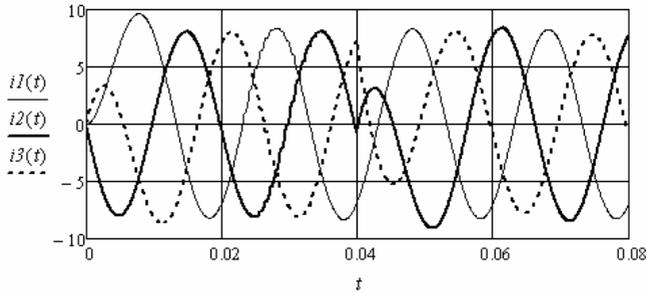


Рис. 4.13

Найдём зависимости напряжений на индуктивностях и построим их.

$$uL1(t) := L1 \cdot \frac{d}{dt} i1(t) \quad uL2(t) := L2 \cdot \left(\frac{d}{dt} i2(t) \right) \quad uL3(t) := L3 \cdot \left(\frac{d}{dt} i3(t) \right)$$

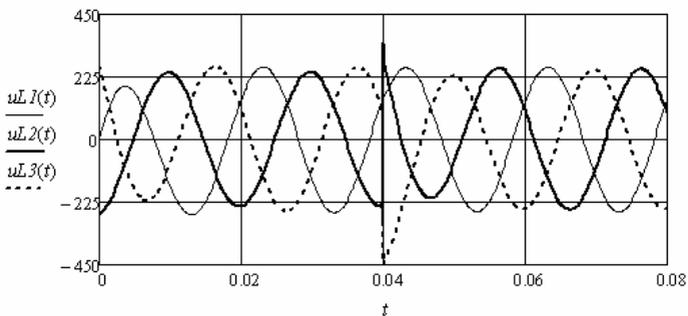


Рис. 4.14

Видно, что в момент коммутации фаз генератора возникают перенапряжения на индуктивностях в коммутируемых фазах потребителя.

4.2. Использование метода наложения для составления системы уравнений относительно переменных состояния

В данной методике составляется схема замещения послекоммутационной цепи, в которой вместо индуктивностей вводятся источники тока, а вместо конденсаторов источники ЭДС. Затем составляются выражения для частичных напряжений на введённых источниках тока и для частичных токов через введённые источники ЭДС. В результате наложения частичных напряжений и частичных токов получаем необходимую систему уравнений на первом этапе метода переменных состояния.

Использование метода наложения позволяет упростить процедуру преобразования системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа, в систему уравнений относительно переменных состояния, особенно в тех случаях, когда неизвестных токов больше, чем переменных состояния.

Пример 4.5. Рассчитаем переходный процесс в электрической цепи (рис. 4.15) методом переменных состояния. Для составления системы уравнений на первом этапе подготовим схему замещения (рис. 4.16). Переменными состояния являются напряжение на конденсаторе и токи в ветвях с индуктивностями. С помощью схемы замещения (рис. 4.16) найдём выражения для частичных значений тока через конденсатор и частичных значений напряжений на индуктивностях.

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия источника ЭДС $e(t)$. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.17. Используя законы Кирхгофа, получим

$$i_C^I = \frac{e}{R_1 + R_2}, \quad u_{L1}^I = \frac{eR_2}{R_1 + R_2}, \quad u_{L2}^I = 0.$$

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия источника ЭДС, замещающего конденсатор. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.18. Используя законы Кирхгофа, получим

$$i_C^{II} = \frac{u_C}{R_1 + R_2}, \quad u_{L1}^{II} = \frac{u_C R_2}{R_1 + R_2}, \quad u_{L2}^{II} = 0.$$

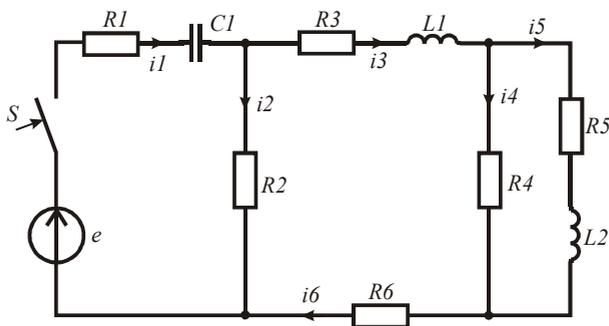


Рис. 4.15

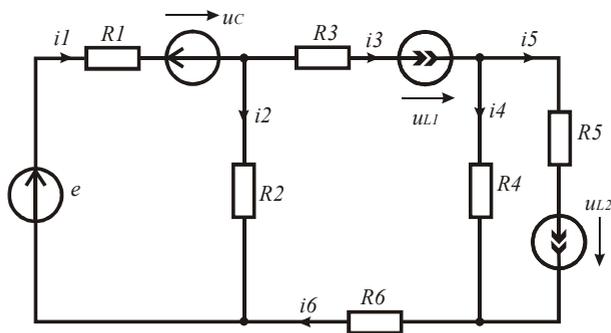


Рис. 4.16

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия источника тока, замещающего первую индуктивность. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.19. Используя законы Кирхгофа, получим:

$$i_C^{\text{III}} = \frac{i_{L1} R_2}{R_1 + R_2}, \quad u_{L1}^{\text{III}} = -i_{L1} \left(R_3 + R_4 + R_6 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right), \quad u_{L2}^{\text{III}} = i_{L1} R_4.$$

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия источника тока, замещающего вторую индуктивность. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.20. Используя законы Кирхгофа, получим

$$i_C^{\text{IV}} = 0, \quad u_{L1}^{\text{IV}} = i_{L2} R_4, \quad u_{L2}^{\text{IV}} = -i_{L2} (R_4 + R_5).$$

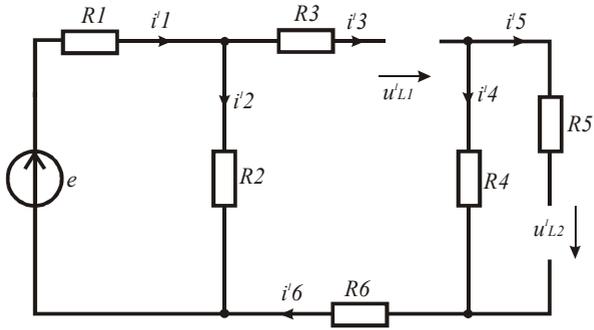


Рис. 4.17

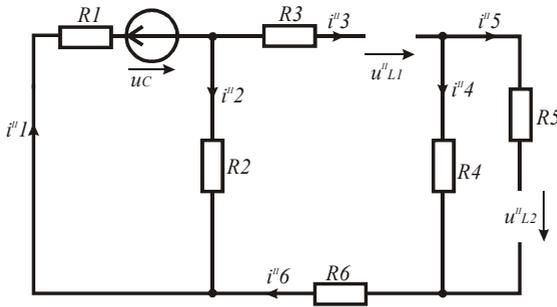


Рис. 4.18

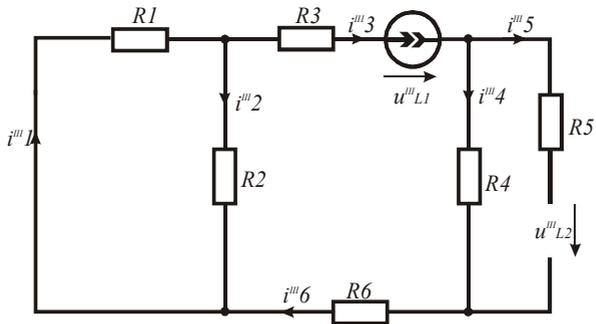


Рис. 4.19

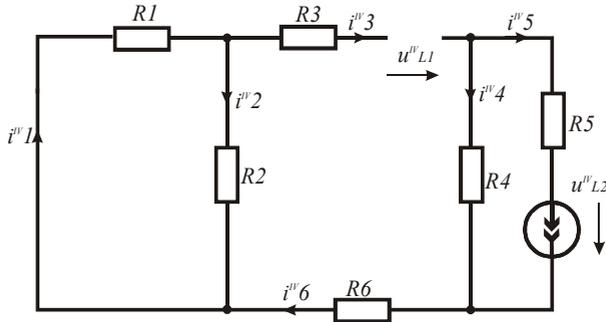


Рис. 4.20

Складывая выражения для частичных значений переменных, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{e - u_C + R_2 i_3}{R_1 + R_2} \\ u_{L1} = \frac{R_2(e - u_C)}{R_1 + R_2} - \left(R_3 + R_4 + R_6 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) i_3 + R_4 i_5 \\ u_{L2} = R_4 i_3 - (R_4 + R_5) i_5 \end{cases}$$

На втором этапе приводим полученную систему уравнений к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \dot{u}_C = \frac{e - u_C + R_2 i_3}{(R_1 + R_2)C} \\ \dot{i}_3 = \left[\frac{R_2(e - u_C)}{R_1 + R_2} - \left(R_3 + R_4 + R_6 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) i_3 + R_4 i_5 \right] L_1^{-1} \\ \dot{i}_5 = \frac{R_4 i_3 - (R_4 + R_5) i_5}{L_2} \end{cases}$$

Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned} R1 := 20 \quad R2 := 220 \quad R3 := 24 \quad R4 := 100 \quad R5 := 20 \quad R6 := 22 \\ C := 10^{-5} \quad L1 := 0.5 \quad L2 := 0.05 \quad f := 800 \quad e(t) := 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + 0.5) \end{aligned}$$

Начальные значения переменных состояния нулевые. Оценим длительность переходного процесса. Для этого составим характеристическое уравнение и найдём его корни.

$$\begin{aligned}
Z1(p) &:= R1 + (p \cdot C)^{-1} & Z3(p) &:= R3 + p \cdot L1 & Z12(p) &:= \frac{Z1(p) \cdot R2}{Z1(p) + R2} \\
Z5(p) &:= R5 + p \cdot L2 & Z45(p) &:= \frac{R4 \cdot Z5(p)}{R4 + Z5(p)} & Z(p) &:= Z12(p) + Z3(p) + Z45(p) + R6 \\
P := 0 = Z(p) \text{ solve, } p, \text{float, } 6 &\rightarrow \begin{pmatrix} -286.519 - 371.059j \\ -286.519 + 371.059j \\ -2572.3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Учитывая значения вещественных частей корней, выберем интервал анализа $2 \cdot 10^{-2}$. Определим начальный индекс массива переменных как единичный и обозначим напряжение на первом конденсаторе x_1 , третий ток x_2 , пятый ток x_3 .

Введём систему дифференциальных уравнений и найдём решение на выбранном интервале времени после коммутации.

$$\begin{aligned}
ORIGIN &:= 1 \\
x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \quad D(t, x) := \left[\begin{array}{c} \frac{R2 \cdot x_2 + e(t) - x_1}{C \cdot (R1 + R2)} \\ \frac{R2 \cdot (e(t) - x_1)}{R1 + R2} - \left(R3 + R4 + R6 + \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2} \right) \cdot x_2 + R4 \cdot x_3 \\ \frac{L1}{R4 \cdot x_2 - (R4 + R5) \cdot x_3} \\ \frac{L2}{R4 \cdot x_2 - (R4 + R5) \cdot x_3} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$Z := Rkadapt(x, 0, 0.02, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию найденных зависимостей.

$$X := Z^{(1)} \quad Y1 := Z^{(2)} \quad Y2 := Z^{(3)} \quad Y3 := Z^{(4)}$$

$$S1 := cspline(X, Y1) \quad uC(t) := interp(S1, X, Y1, t)$$

$$S2 := cspline(X, Y2) \quad i3(t) := interp(S2, X, Y2, t)$$

$$S3 := cspline(X, Y3) \quad i5(t) := interp(S3, X, Y3, t)$$

Полученные зависимости приведены на рис. 4.21 и 4.22.

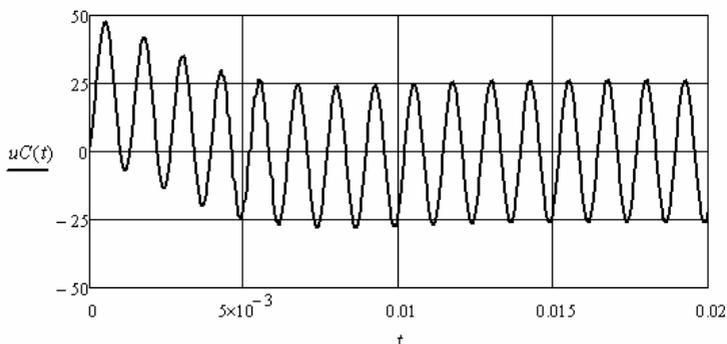


Рис. 4.21

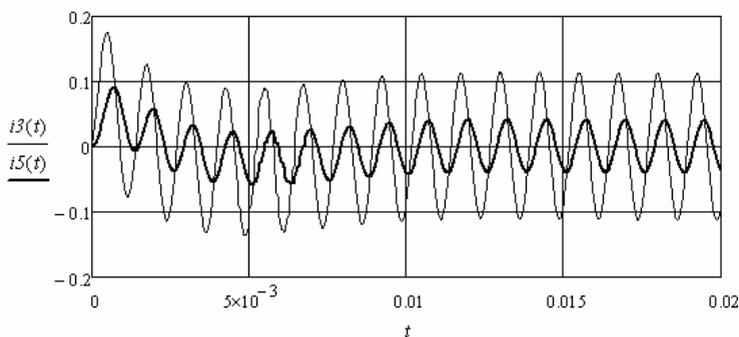


Рис. 4.22

Пример 4.6. Необходимо найти реакцию выходного напряжения четырёхполюсника (рис. 4.23) с активной нагрузкой на единичный скачок входного напряжения.

Решим задачу методом переменных состояния. Для составления системы уравнений на первом этапе подготовим схему замещения (рис. 4.24). Переменными состояниями являются напряжения на конденсаторах и токи в ветвях с индуктивностями. С помощью схемы замещения (рис. 4.24) найдём выражения для частичных значений тока через конденсаторы и частичных значений напряжений на индуктивностях.

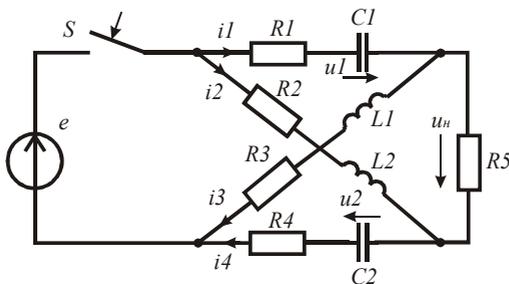


Рис. 4.23

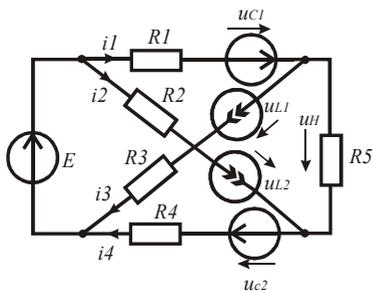


Рис. 4.24

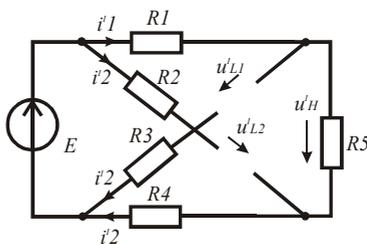


Рис. 4.25

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия единичного источника постоянной ЭДС. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.25.

Используя законы Кирхгофа, получим

$$i_{C1}^I = \frac{E}{R_1 + R_4 + R_5}, \quad i_{C2}^I = i_{C1}^I, \quad u_{L1}^I = E - R_1 i_{C1}^I, \quad u_{L2}^I = E - R_4 i_{C2}^I.$$

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия источника ЭДС, замещающего первый конденсатор. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.26.

Используя законы Кирхгофа, получим

$$i_{C1}^{II} = \frac{-u_{C1}}{R_1 + R_4 + R_5}, \quad i_{C2}^{II} = i_{C1}^{II}, \quad u_{L1}^{II} = -u_{C1} - R_1 i_{C1}^{II}, \quad u_{L2}^{II} = -R_4 i_{C2}^{II}.$$

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия источника ЭДС, замещающего второй конденсатор. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.27.

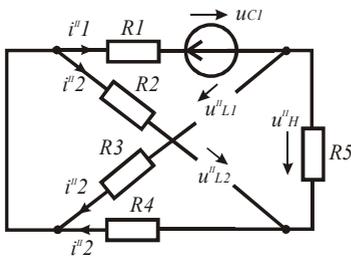


Рис. 4.26

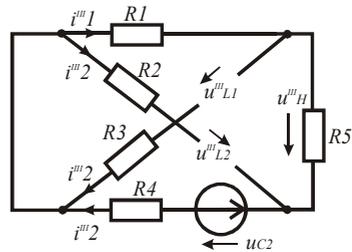


Рис. 4.27

Используя законы Кирхгофа, получим

$$i_{C1}^{III} = \frac{-u_{C2}}{R_1 + R_4 + R_5}, \quad i_{C2}^{III} = i_{C1}^{III}, \quad u_{L1}^{III} = -R_1 i_{C1}^{III}, \quad u_{L2}^{III} = -u_{C2} - R_4 i_{C2}^{III}.$$

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия источника тока, замещающего первую индуктивность. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.28.

Используя законы Кирхгофа, получим

$$i_{C1}^{IV} = \frac{(R_4 + R_5)i_{L1}}{R_1 + R_4 + R_5}, \quad i_{C2}^{IV} = i_{C1}^{IV} - i_{L1}, \quad u_{L1}^{IV} = -R_3 i_{L1} - R_1 i_{C1}^{IV}, \quad u_{L2}^{IV} = -R_4 i_{C2}^{IV}.$$

Найдём выражения для частичных значений указанных переменных от действия источника тока, замещающего первую индуктивность. Для этого используем схему замещения, приведённую на рис. 4.29.

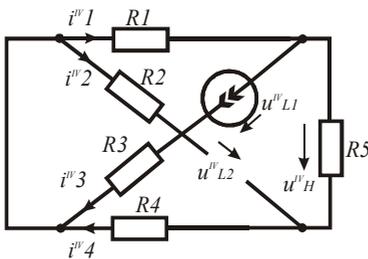


Рис. 4.28

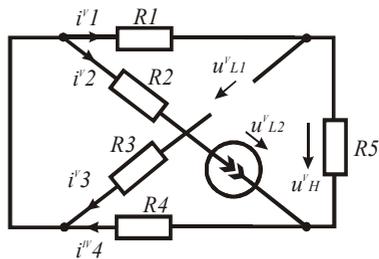


Рис. 4.29

Используя законы Кирхгофа, получим

$$i_{C1}^V = \frac{-R_4 i_{L2}}{R_1 + R_4 + R_5}, \quad i_{C2}^V = i_{C1}^V + i_{L2}, \quad u_{L1}^V = -R_1 i_{C1}^V, \quad u_{L2}^V = -R_2 i_{L2} - R_4 i_{C2}^V.$$

Складывая выражения для частичных значений переменных, после преобразований получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} i_{C1} = \frac{E - u_{C1} - u_{C2} + (R_4 + R_5)i_{L1} - R_4 i_{L2}}{R_1 + R_4 + R_5} \\ i_{C2} = \frac{E - u_{C1} - u_{C2} - R_1 i_{L1} + (R_1 + R_5)i_{L2}}{R_1 + R_4 + R_5} \\ u_{L1} = \frac{E(R_4 + R_5) - (R_4 + R_5)u_{C1} + R_1 u_{C2} - (R_3(R_1 + R_4 + R_5) + R_1(R_4 + R_5))i_{L1} + R_1 R_4 i_{L2}}{R_1 + R_4 + R_5} \\ u_{L2} = \frac{E(R_1 + R_5) + R_4 u_{C1} - (R_1 + R_5)u_{C2} + R_1 R_4 i_{L1} - (R_2(R_1 + R_4 + R_5) + R_4(R_1 + R_5))i_{L2}}{R_1 + R_4 + R_5} \end{cases}$$

На втором этапе приводим полученную систему уравнений к системе дифференциальных уравнений первого порядка для заданной схемы (рис. 4.23).

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{E - u_1 - u_2 + (R_4 + R_5)i_3 - R_4 i_2}{(R_1 + R_4 + R_5)C_1} \\ \dot{u}_2 = \frac{E - u_1 - u_2 - R_1 i_3 + (R_1 + R_5)i_2}{(R_1 + R_4 + R_5)C_2} \\ \dot{i}_3 = \frac{E(R_4 + R_5) - (R_4 + R_5)u_1 + R_1 u_2 - (R_3(R_1 + R_4 + R_5) + R_1(R_4 + R_5))i_3 + R_1 R_4 i_2}{(R_1 + R_4 + R_5)L_1} \\ \dot{i}_2 = \frac{E(R_1 + R_5) + R_4 u_1 - (R_1 + R_5)u_2 + R_1 R_4 i_3 - (R_2(R_1 + R_4 + R_5) + R_4(R_1 + R_5))i_2}{(R_1 + R_4 + R_5)L_2} \end{cases}$$

Переходное напряжение на нагрузке четырёхполюсника найдём следующим образом:

$$u_H(t) = R_5(i_1(t) - i_3(t)) = R_5 \left(C_1 \frac{du_1(t)}{dt} - i_3(t) \right)$$

Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned} R1 &:= 20 & R2 &:= 20 & R3 &:= 20 & R4 &:= 20 & R5 &:= 500 & C1 &:= 10^{-6} \\ C2 &:= 10^{-6} & L1 &:= 0.0025 & L2 &:= 0.0025 & E &:= 1 \end{aligned}$$

Начальные значения переменных состояния нулевые. Оценим длительность переходного процесса. Для этого составим характеристическое уравнение и найдём его корни.

$$Z1(p) := R1 + (p \cdot C1)^{-1} \quad Z3(p) := R3 + p \cdot L1$$

$$Z4(p) := R4 + (p \cdot C2)^{-1} \quad Z2(p) := R2 + p \cdot L2$$

$$Z(p) := R5 + \frac{Z1(p) \cdot Z3(p)}{Z1(p) + Z3(p)} + \frac{Z2(p) \cdot Z4(p)}{Z2(p) + Z4(p)}$$

$$P := 0 = Z(p) \text{ solve, } p, \text{float}, 6 \rightarrow \begin{pmatrix} -9555.56 + 17569.6j \\ -9555.56 - 17569.6j \end{pmatrix}$$

Учитывая значения вещественных частей корней, выберем интервал анализа $1 \cdot 10^{-3}$. Определим начальный индекс массива переменных как единичный и обозначим напряжение на первом конденсаторе x_1 , напряжение на втором конденсаторе x_2 , третий ток x_3 , второй ток x_4 .

Введём систему дифференциальных уравнений и найдём решение на выбранном интервале времени после коммутации.

$$ORIGIN := 1 \quad x := (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{E - x_1 - x_2 + (R4 + R5) \cdot x_3 - R4 \cdot x_4}{C1 \cdot (R1 + R4 + R5)} \\ \frac{E - x_1 - x_2 - R1 \cdot x_3 + (R1 + R5) \cdot x_4}{C2 \cdot (R1 + R4 + R5)} \\ \frac{E \cdot (R4 + R5) - x_1 \cdot (R4 + R5) + x_2 \cdot R1 - [R3 \cdot (R1 + R4 + R5) + R1 \cdot (R4 + R5)] \cdot x_3 + R1 \cdot R4 \cdot x_4}{L1 \cdot (R1 + R4 + R5)} \\ \frac{E \cdot (R1 + R5) - x_2 \cdot (R1 + R5) + x_1 \cdot R4 - [R2 \cdot (R1 + R4 + R5) + R4 \cdot (R4 + R5)] \cdot x_4 + R1 \cdot R4 \cdot x_3}{L2 \cdot (R1 + R4 + R5)} \end{bmatrix}$$

$$Z := Rkadapt(x, 0, 0.001, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию необходимых зависимостей.

$$X := Z^{(1)} \quad Y1 := Z^{(2)} \quad Y3 := Z^{(4)}$$

$$S1 := cspline(X, Y1) \quad uC1(t) := interp(S1, X, Y1, t)$$

$$S3 := cspline(X, Y3) \quad i3(t) := interp(S3, X, Y3, t)$$

Найдём переходное напряжение на нагрузке четырёхполюсника и построим соответствующую зависимость (рис. 4.30).

$$i1(t) := C1 \cdot \left(\frac{d}{dt} uC1(t) \right) \quad uн(t) := R5 \cdot (i1(t) - i3(t))$$

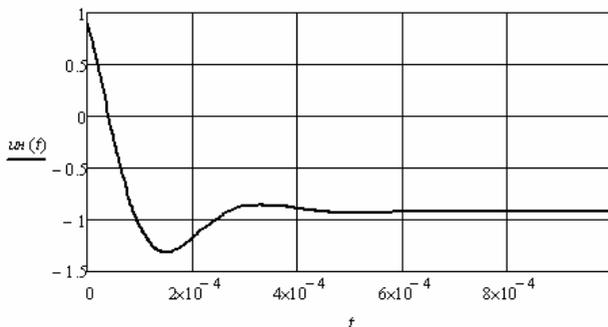


Рис. 4.30

4.3. Анализ переходных процессов в нелинейных электрических цепях

Метод переменных состояния применим и для анализа переходных процессов в нелинейных электрических цепях. При составлении системы дифференциальных уравнений относительно переменных состояния электрическая цепь считается линейной, поэтому можно использовать и метод наложения, рассмотренный выше. Затем в уравнения вводятся нелинейные зависимости сопротивлений, индуктивностей и емкостей от соответствующих переменных состояния. Если параметр нелинейного элемента не является функцией переменной состояния, то необходимо преобразовать зависимость таким образом, чтобы он стал такой функцией.

Пример 4.7. Рассчитаем переходный процесс в электрической цепи с нелинейным резистором (рис. 4.31). Зависимость сопротивления резистора от тока задана таблицей координат. Напряжение, приложенное к цепи, является последовательностью прямоугольных импульсов со скважностью 2 (отношение периода к длительности импульса).

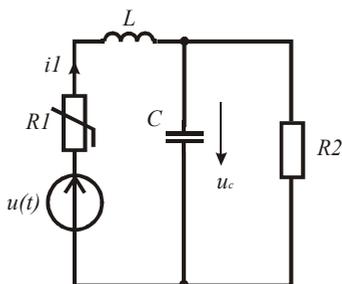


Рис. 4.31

Введём в листинг решения исходные данные.

$$ORIGIN := 1 \quad R2 := 8000 \quad L := 0.0005 \quad C := 2 \cdot 10^{-8} \quad E := 100 \quad T := 6 \cdot 10^{-5}$$

$$RI := \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.3 & 0.35 & 0.4 & 0.45 \\ 200 & 210 & 225 & 245 & 270 & 300 & 335 & 375 & 420 & 470 \end{pmatrix}^T$$

Зададим напряжение источника программным путём (рис. 4.32).

$$u(t) := \begin{cases} E & \text{if } 0 \leq t \leq T \cdot 0.5 \\ 0 & \text{if } -T \cdot 0.5 \leq t \leq 0 \\ u(t - T) & \text{if } t > T \cdot 0.5 \end{cases}$$

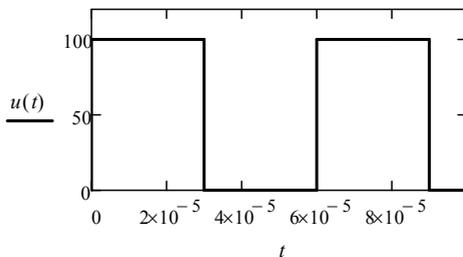


Рис. 4.32

Выполним аппроксимацию нелинейной характеристики первого резистора.

$$X := RI^{(1)} \quad Y := RI^{(2)} \quad S := cspline(X, Y)$$

Начальные значения переменных состояния нулевые. Обозначим ток в ветви с индуктивностью x_1 , а напряжение на конденсаторе x_2 .

Система дифференциальных уравнений относительно переменных состояния для исследуемой цепи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = \frac{u(t) - i_1 R(i_1) - u_c}{L} \\ \dot{u}_c = \frac{R_2 i_1 - u_c}{R_2 C} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений оформляется следующим образом:

$$x := (0 \ 0)^T$$

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} \frac{u(t) - x_1 \cdot \text{interp}(S, X, Y, |x_1|) - x_2}{L} \\ \left(x_1 - \frac{x_2}{R2}\right) \cdot C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.0004, 1000, D)$$

Построим зависимости переменных состояния от времени.

$$t := Z^{(1)} \quad iL(t) := Z^{(2)} \quad uC(t) := Z^{(3)}$$

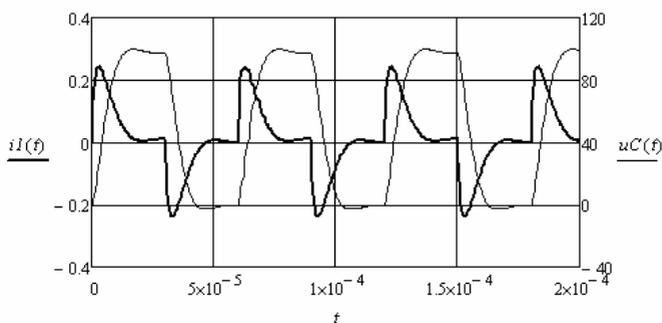


Рис. 4.33

Для сравнения построим эти же зависимости, полученные при использовании линейного первого резистора с сопротивлением 200 Ом (рис. 4.34).

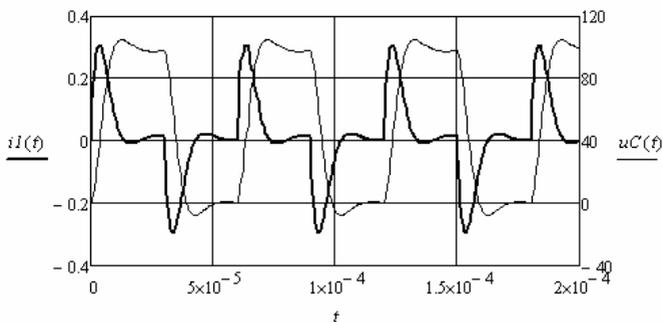


Рис. 4.34

Видно, что изменение сопротивления первого резистора во время переходного процесса приводит к сглаживанию колебательного характера затухания свободных составляющих.

Пример 4.8. Исследуем переходные процессы в нелинейном четырёхполюснике (рис. 4.35) при подключении к нему треугольного напряжения. Нагрузкой четырёхполюсника является активное сопротивление. Зависимости нелинейных индуктивностей от тока (рис. 4.36) заданы аналитическими выражениями.

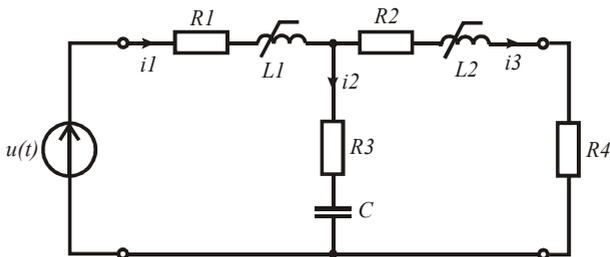


Рис. 4.35

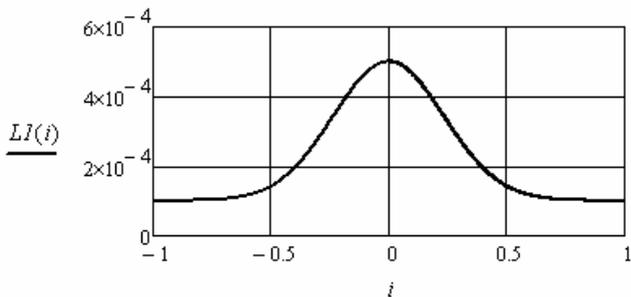


Рис. 4.36

Введём в листинг решения исходные данные.

$ORIGIN := 1$ $R1 := 20$ $R2 := 20$ $R3 := 20$ $R4 := 100$

$C := 2 \cdot 10^{-8}$ $k := 5 \cdot 10^6$ $T := 4 \cdot 10^{-5}$

$L1(i) := 10^{-4} + \exp[-(3 \cdot i)^2] \cdot 4 \cdot 10^{-4}$ $L2(i) := 10^{-4} + \exp[-(3 \cdot i)^2] \cdot 4 \cdot 10^{-4}$

Зададим напряжение источника программным путём (рис. 4.37).

$$u(t) := \begin{cases} k \cdot t & \text{if } 0 \leq t \leq T \cdot 0.5 \\ 0 & \text{if } -T \cdot 0.5 \leq t \leq 0 \\ u(t - T) & \text{if } t > T \cdot 0.5 \end{cases}$$

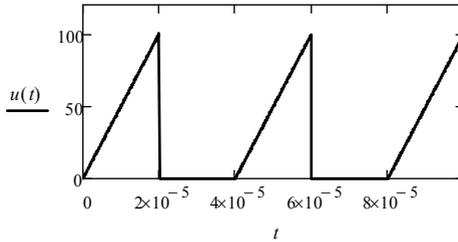


Рис. 4.37

Начальные значения переменных состояния нулевые. Обозначим напряжение на конденсаторе x_1 , а токи в ветвях с индуктивностями x_2 и x_3 .

Система дифференциальных уравнений относительно переменных состояния для исследуемой цепи имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_C = (i_1 - i_3)C^{-1} \\ \dot{i}_1 = (u(t) - u_C - i_1(R_1 + R_3) + i_3R_3)(L_1(i_1))^{-1} \\ \dot{i}_3 = (u_C + i_1R_3 - i_3(R_2 + R_3 + R_4))(L_2(i_3))^{-1} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений оформляется следующим образом:

$$x := (0 \ 0 \ 0)^T \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} (x_2 - x_3) \cdot C^{-1} \\ [u(t) - x_1 - (R_1 + R_3) \cdot x_2 + R_3 \cdot x_3] \cdot L_1(x_2)^{-1} \\ [x_1 + R_3 \cdot x_2 - (R_2 + R_3 + R_4) \cdot x_3] \cdot L_2(x_3)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z := Rkadapt(x, 0, 0.0004, 1000, D)$$

Построим выбранные зависимости напряжений и тока от времени.

$$t := Z^{(1)} \quad u_C(t) := Z^{(2)} \quad i_1(t) := Z^{(3)} \quad i_3(t) := Z^{(4)} \quad un(t) := i_3(t) \cdot R_4$$

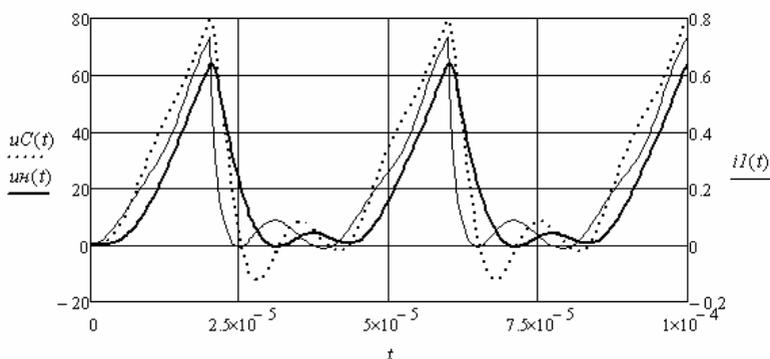


Рис. 4.38

Для сравнения построим эти же зависимости, полученные при использовании линейных индуктивностей 0,0005 Гн (рис. 4.39).

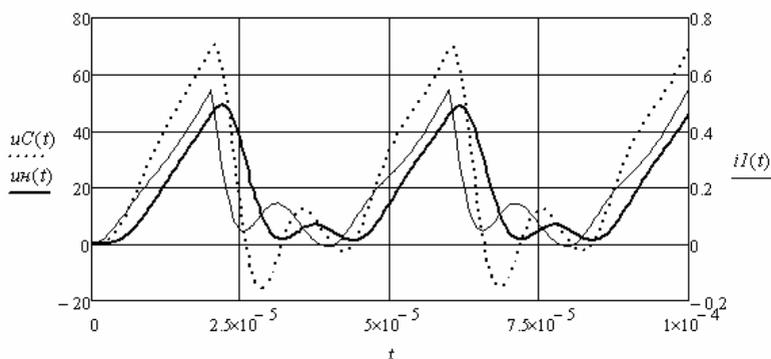


Рис. 4.39

Видно, что уменьшение индуктивности приводит к расширению полосы пропускания четырёхполюсника и лучшему сохранению формы импульса.

Пример 4.9. Определим режим работы нелинейной электрической цепи (рис. 4.40), при котором подключение источника постоянной ЭДС приводит к возбуждению автоколебаний в установившемся режиме.

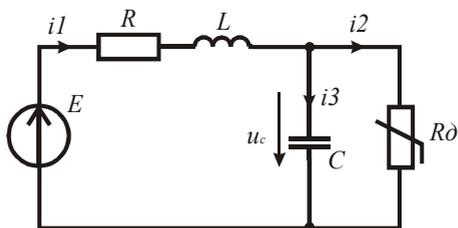


Рис. 4.40

Электрическая цепь содержит схему замещения полупроводникового нелинейного элемента, ВАХ которого имеет участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Схемой замещения элемента является параллельное соединение конденсатора и нелинейного резистора, ВАХ которого задана таблицей координат. Для возбуждения автоколебаний необходимо, чтобы корни характеристического уравнения цепи были мнимыми.

Введём в листинг решения исходные данные.

`ORIGIN := 1 E := 0.41 R := 10 L := 15·10-9 C := 50·10-12`

`BAX := $\begin{pmatrix} -0.2 & 0 & .2 & .4 & .6 & .8 & 1 & 1.2 \\ -0.02 & 0 & .01 & .004 & .001 & .0009 & .003 & .01 \end{pmatrix}^T$`

Выполним аппроксимацию ВАХ и найдём зависимость дифференциального сопротивления резистора от напряжения.

`X := BAX(1) Y := BAX(2) S := cspline(X, Y) i(u) := interp(S, X, Y, u)`

`Rd(u) := $\left(\frac{d}{du} i(u)\right)^{-1}$`

Полученные зависимости приведены на рис. 4.41.

Характеристическое уравнение цепи имеет вид

$$R_d LC p^2 + (R_d RC + L) p + R_d + R = 0.$$

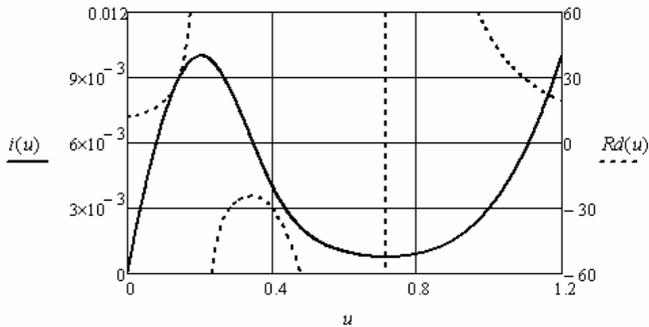


Рис. 4.41

Корни уравнения будут мнимые, если множитель при p во втором слагаемом будет равен нулю. Из этого условия найдём значение дифференциального сопротивления резистора и соответствующие значения корней.

$$Rdl := -L \cdot (R \cdot C)^{-1} = -30$$

$$p := 0 = (Rdl \cdot L \cdot C \cdot p^2 + R + Rdl) \text{ solve, } p, \text{float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 9.428e8j \\ -9.428e8j \end{pmatrix}$$

Значения корней определяют частоту автоколебаний в данной цепи.

Исследуем переходный процесс после подключения источника, принимая ЭДС источника равным 0,4 В.

Система дифференциальных уравнений цепи относительно переменных состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = (E - R i_1 - u_c) L^{-1} \\ \dot{u}_c = (i_1 - i_2(u_c)) C^{-1} \end{cases}$$

Начальные значения переменных состояния нулевые. Обозначим ток в ветви с индуктивностью x_1 , а напряжение на конденсаторе x_2 .

Решение данной системы уравнений оформляется следующим образом:

$$x := (0 \ 0)^T$$

$$D(t,x) := \begin{pmatrix} \frac{E - R \cdot x_1 - x_2}{L} \\ \frac{x_1 - \text{interp}(S, X, Y, x_2)}{C} \end{pmatrix}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 10^{-7}, 1000, D)$$

Построим полученные зависимости (рис. 4.42) переменных состояния от времени.

$$t := Z^{(1)} \quad i(t) := Z^{(2)} \quad u(t) := Z^{(3)}$$

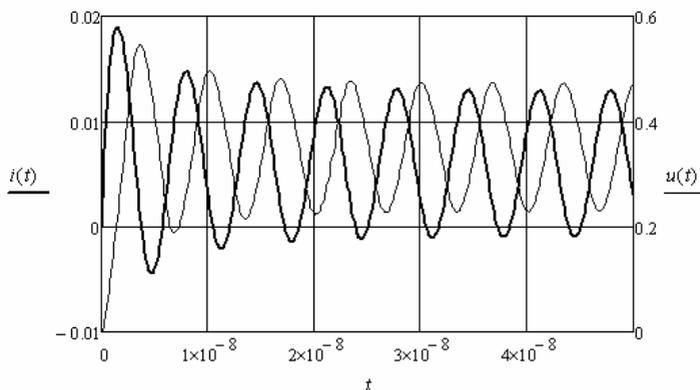


Рис. 4.42

Устойчивые автоколебания возбуждаются при значениях ЭДС в интервале 0,38–0,43 В. Частота автоколебаний точно соответствует значению корней характеристического уравнения.

Рассчитаем и построим фазовый портрет напряжения на конденсаторе. Воспользуемся результатами решения системы дифференциальных уравнений и найдём соответствующие значения производной напряжения на конденсаторе. Зависимость производной напряжения на конденсаторе от напряжения на конденсаторе приведена на рис. 4.43.

$$iL := Z^{(2)} \quad uC := Z^{(3)} \quad duC := \frac{iL - \text{interp}(S, X, Y, uC)}{C}$$

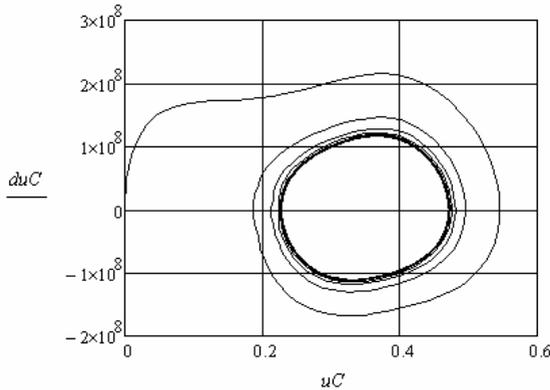


Рис. 4.43

Видно, что форма автоколебаний напряжения близка к синусоидальной.

Пример 4.10. Необходимо рассчитать переходный процесс в электрической цепи (рис. 4.44), содержащей полупроводниковый вентиль. Электрическая цепь является схемой замещения однополупериодного выпрямителя с емкостным накопителем и активно индуктивной нагрузкой. Вентиль считаем идеальным ключом.

Цепь имеет два режима работы. В первом режиме ключ открыт. Во втором режиме ключ закрыт. Используем метод переменных состояния и составим для каждого режима систему дифференциальных уравнений относительно переменных состояния. В результате получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_C = (\mathbf{e}(t) - \mathbf{u}_C - \mathbf{R}_1 \mathbf{i}_3) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{i}'_3 = (\mathbf{u}_C - \mathbf{R}_2 \mathbf{i}_3) \mathbf{L}^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_C = -\mathbf{i}_3 \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{i}'_3 = (\mathbf{u}_C - \mathbf{R}_2 \mathbf{i}_3) \mathbf{L}^{-1} \end{cases}$$

После подключения источника вентиль открывается, если напряжение источника для него положительное. Заряд конденсатора происходит быстрее, чем его разряд на нагрузку. Условием закрытия вентиля является равенство первого тока нулю. Это происходит в области равенства напряжения источника и напряжения на кон-

денсаторе. Условием открытия вентиля является превышение напряжения источника напряжения на конденсаторе. Таким образом, на каждом периоде напряжения источника будет формироваться импульс первого тока, который будет заряжать конденсатор и компенсировать потерю энергии в нагрузке. На интервале переходного процесса моменты открытия и закрытия вентиля необходимо рассчитывать. В установившемся режиме они будут повторяться с интервалом, равным периоду напряжения источника.

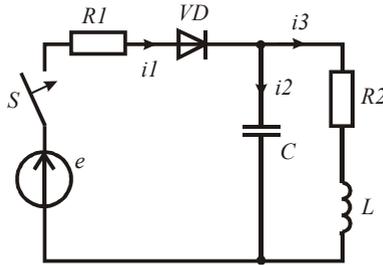


Рис. 4.44

Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned}
 R1 &:= 20 & R2 &:= 200 & C &:= 10^{-5} & L &:= 0.2 & ORIGIN &:= 1 \\
 f &:= 800 & e(t) &:= 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + 0.5)
 \end{aligned}$$

При подключении источника начальные значения переменных состояния будут нулевыми.

Обозначим напряжение на конденсаторе x_1 , а ток в ветви с индуктивностью x_2 . Решение первой системы уравнений на первом интервале времени оформляется следующим образом:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{e(t) - x_1}{R1} - x_2 \right) \cdot C^{-1} \\ (x_1 - R2 \cdot x_2) \cdot L^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z := Rkadapt(x, 0, 0.01, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимостей переменных состояния от времени и найдём аналогичную зависимость для первого тока.

$$\begin{aligned}
X &:= Z^{(1)} & Y1 &:= Z^{(2)} & Y2 &:= Z^{(3)} \\
S1 &:= \text{cspline}(X, Y1) & uC(t) &:= \text{interp}(S1, X, Y1, t) \\
S2 &:= \text{cspline}(X, Y2) & i3(t) &:= \text{interp}(S2, X, Y2, t) \\
i2(t) &:= C \cdot \frac{d}{dt} uC(t) & i1(t) &:= i2(t) + i3(t)
\end{aligned}$$

Определим время закрытия вентиля. Чтобы снять многозначность, построим необходимые зависимости и выберем интервал поиска нуля первого тока (рис. 4.45).

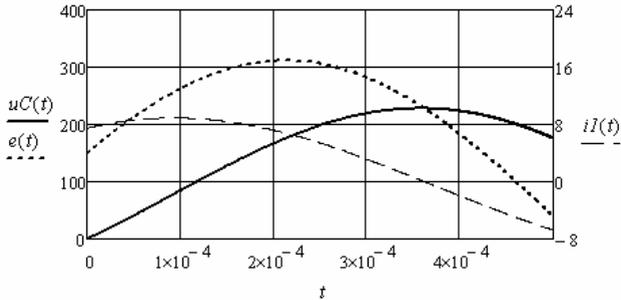


Рис. 4.45

$$t1 := \text{root}(i1(t), t, 3 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}) = 3.624 \times 10^{-4} \quad tk1 := t1$$

Полученное время рассматривается как время первой естественной коммутации. Ограничим полученные зависимости данным временем.

$$uC1(t) := \text{if}(0 \leq t \leq tk1, uC(t), 0) \quad i31(t) := \text{if}(0 \leq t \leq tk1, i3(t), 0)$$

$$i11(t) := \text{if}(0 \leq t \leq tk1, i1(t), 0)$$

Найдём зависимости переменных состояния на втором интервале времени, когда вентиль будет закрыт. В качестве начальных значений используем значения переменных состояния в момент коммутации. Решение второй системы уравнений на втором интервале времени оформляется следующим образом:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{e(t) - x_1}{R1} - x_2 \right) \cdot C^{-1} \\ (x_1 - R2 \cdot x_2) \cdot L^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.01, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию полученных зависимостей.

$$\begin{aligned}
 X &:= ZI^{(1)} & Y1 &:= ZI^{(2)} & Y2 &:= ZI^{(3)} \\
 S1 &:= cspline(X, Y1) & uC(t) &:= interp(S1, X, Y1, t) \\
 S2 &:= cspline(X, Y2) & i3(t) &:= interp(S2, X, Y2, t)
 \end{aligned}$$

Построим графики (рис. 4.46) и определим интервал времени, на котором напряжение источника увеличивается и начинает превышать напряжение на конденсаторе.

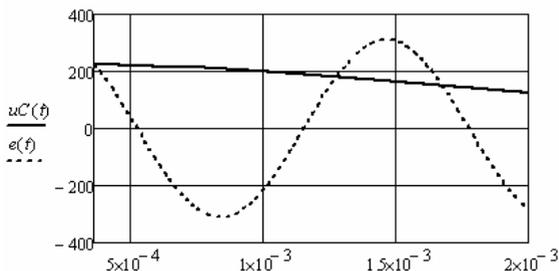


Рис. 4.46

Определим время второй коммутации, после которой клапан откроется.

$$tk2 := root(e(t) - uC(t), t, 1 \cdot 10^{-3}, 1.5 \cdot 10^{-3}) = 1.274 \times 10^{-3} \quad tk2 := tk2$$

Ограничим полученные зависимости интервалом времени между первой и второй коммутациями.

$$uC2(t) := if(tk1 \leq t \leq tk2, uC(t), 0) \quad i32(t) := if(tk1 \leq t \leq tk2, i3(t), 0)$$

Для анализа третьего интервала времени повторим вычисления, которые были сделаны для первого интервала, сменив начальные значения.

$$x := \begin{pmatrix} uC(tk2) \\ i3(tk2) \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{e(t) - x_1}{R1} - x_2 \right) \cdot C^{-1} \\ (x_1 - R2 \cdot x_2) \cdot L^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z2 := Rkadapt(x, tk2, 0.01, 1000, D)$$

$$X := Z2^{(1)} \quad Y1 := Z2^{(2)} \quad Y2 := Z2^{(3)}$$

$$\begin{aligned}
S1 &:= \text{cspline}(X, Y1) & uC(t) &:= \text{interp}(S1, X, Y1, t) \\
S2 &:= \text{cspline}(X, Y2) & i3(t) &:= \text{interp}(S2, X, Y2, t) \\
i2(t) &:= C \cdot \frac{d}{dt} uC(t) & i1(t) &:= i2(t) + i3(t)
\end{aligned}$$

Снова построим графики (рис. 4.47) и определим интервал времени, на котором первый ток будет равен нулю, а затем найдём время третьей коммутации.

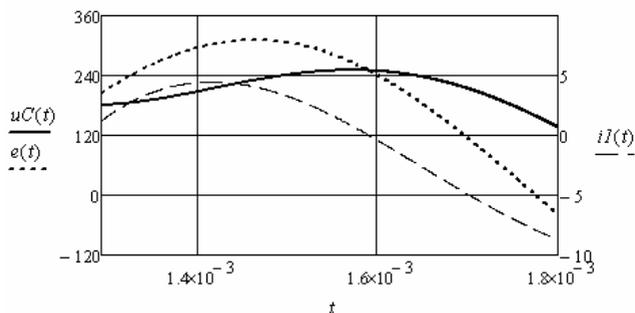


Рис. 4.47

$$t3 := \text{root}(i1(t), t, 1.5 \cdot 10^{-3}, 1.7 \cdot 10^{-3}) = 1.59 \times 10^{-3} \quad tk3 := t3$$

Ограничим полученные зависимости интервалом времени между второй и третьей коммутациями.

$$uC3(t) := \text{if}(tk2 \leq t \leq tk3, uC(t), 0) \quad i33(t) := \text{if}(tk2 \leq t \leq tk3, i3(t), 0)$$

$$i13(t) := \text{if}(tk2 \leq t \leq tk3, i1(t), 0)$$

Аналогично выше выполним анализ четвёртого интервала, когда вентиль закрыт.

$$x := \begin{pmatrix} uC(tk3) \\ i3(tk3) \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} -x_2 \cdot C^{-1} \\ (x_1 - R_2 \cdot x_2) \cdot L^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z3 := \text{Rkadapt}(x, tk3, 0.01, 1000, D)$$

$$X := Z3^{(1)} \quad Y1 := Z3^{(2)} \quad Y2 := Z3^{(3)}$$

$$S1 := \text{cspline}(X, Y1) \quad uC(t) := \text{interp}(S1, X, Y1, t)$$

$$S2 := \text{cspline}(X, Y2) \quad i3(t) := \text{interp}(S2, X, Y2, t)$$

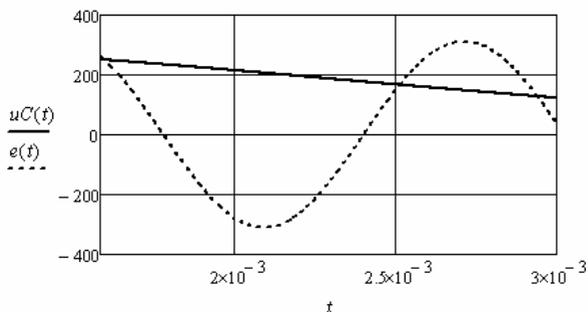


Рис. 4.48

$$t4 := \text{root}(e(t) - uC(t), t, 2.4 \cdot 10^{-3}, 2.6 \cdot 10^{-3}) = 2.512 \times 10^{-3} \quad tk4 := t4$$

$$uC4(t) := \text{if}(tk3 \leq t \leq tk4, uC(t), 0) \quad i34(t) := \text{if}(tk3 \leq t \leq tk4, i3(t), 0)$$

Выполним анализ пятого интервала, когда вентиль открыт.

$$x := \begin{pmatrix} uC(tk4) \\ i3(tk4) \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{e(t) - x_1}{R1} - x_2 \right) \cdot C^{-1} \\ (x_1 - R2 \cdot x_2) \cdot L^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z4 := \text{Rkadapt}(x, tk4, 0.01, 1000, D)$$

$$X := Z4^{(1)} \quad Y1 := Z4^{(2)} \quad Y2 := Z4^{(3)}$$

$$S1 := \text{cspline}(X, Y1) \quad uC(t) := \text{interp}(S1, X, Y1, t)$$

$$S2 := \text{cspline}(X, Y2) \quad i3(t) := \text{interp}(S2, X, Y2, t)$$

$$i2(t) := C \frac{d}{dt} uC(t) \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

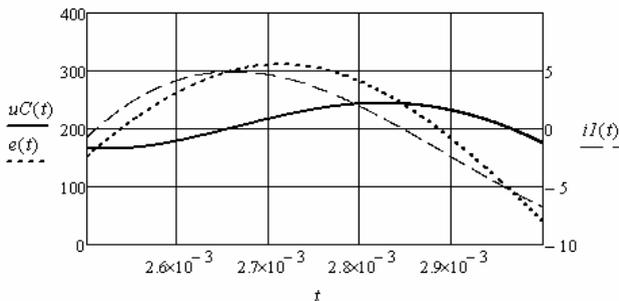


Рис. 4.49

$$t5 := \text{root}(i1(t), t, 2.8 \cdot 10^{-3}, 2.9 \cdot 10^{-3}) = 2.847 \times 10^{-3} \quad tk5 := t5$$

$$uC5(t) := \text{if}(tk4 \leq t \leq tk5, uC(t), 0) \quad i35(t) := \text{if}(tk4 \leq t \leq tk5, i3(t), 0)$$

$$i15(t) := \text{if}(tk4 \leq t \leq tk5, i1(t), 0)$$

Выполним анализ шестого интервала, когда клапан закрыт.

$$x := \begin{pmatrix} uC(tk5) \\ i3(tk5) \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} -x_2 \cdot C^{-1} \\ (x_1 - R_2 \cdot x_2) \cdot L^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z5 := \text{Rkadapt}(x, tk5, 0.01, 1000, D)$$

$$X := Z5^{(1)} \quad Y1 := Z5^{(2)} \quad Y2 := Z5^{(3)}$$

$$S1 := \text{cspline}(X, Y1) \quad uC(t) := \text{interp}(S1, X, Y1, t)$$

$$S2 := \text{cspline}(X, Y2) \quad i3(t) := \text{interp}(S2, X, Y2, t)$$

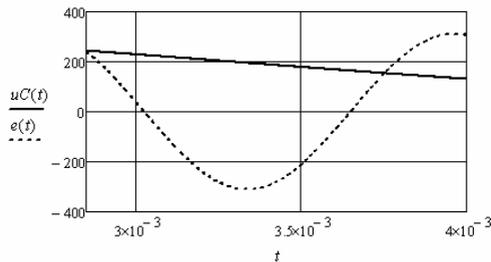


Рис. 4.50

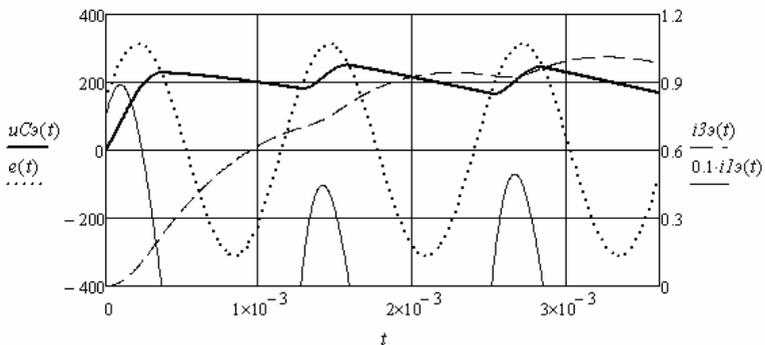


Рис. 4.51

Ограничимся шестым интервалом. Ограничим последние зависимости временем, которое меньше времени шестой коммутации.

$$u_{C6}(t) := \text{if}(tk5 \leq t \leq 3.6 \cdot 10^{-3}, u_C(t), 0) \quad i_{36}(t) := \text{if}(tk5 \leq t \leq 3.6 \cdot 10^{-3}, i_3(t), 0)$$

Склеим полученные зависимости на разных интервалах и построим зависимости, характеризующие переходный процесс.

$$u_{C9}(t) := u_{C1}(t) + u_{C2}(t) + u_{C3}(t) + u_{C4}(t) + u_{C5}(t) + u_{C6}(t)$$

$$i_{39}(t) := i_{31}(t) + i_{32}(t) + i_{33}(t) + i_{34}(t) + i_{35}(t) + i_{36}(t)$$

$$i_{l9}(t) := i_{l1}(t) + i_{l3}(t) + i_{l5}(t)$$

Недостатком исследуемой цепи является скачок первого тока в момент подключения источника, что опасно для полупроводниковых вентилях. Это связано с неправильным выбором момента подключения источника. При отрицательной начальной фазе источника момент открытия вентиля определяется моментом перехода напряжения источника через ноль. Первый ток начнёт изменяться с нулевого значения и скачка тока не будет.

4.4. Анализ переходных процессов в параметрических электрических цепях

Метод переменных состояния применим для анализа переходных процессов в параметрических электрических цепях. При составлении системы дифференциальных уравнений относительно переменных состояния электрическая цепь считается линейной, а параметры элементов постоянными. Это позволяет использовать метод наложения, рассмотренный выше. Затем в уравнения вводятся соответствующие параметрические зависимости сопротивлений, индуктивностей и емкостей от времени.

Пример 4.11. Исследуем переходный процесс в параметрическом четырёхполюснике (рис. 4.52) при подключении к нему гармонического напряжения. Нагрузкой четырёхполюсника является активное сопротивление. Зависимости индуктивностей от времени (рис. 4.53) являются также гармоническими функциями. Частота колебаний входного напряжения больше частоты колебаний параметрических индуктивностей.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$ORIGIN := 1 \quad R1 := 20 \quad R2 := 20 \quad R3 := 20 \quad R4 := 100 \quad C := 2 \cdot 10^{-8}$$

$$T := 8 \cdot 10^{-5} \quad \omega := 2 \cdot \frac{\pi}{T} = 7.854 \times 10^4 \quad u(t) := 50 \cdot \sin\left(8 \cdot \omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$L1(t) := 10^{-4} \cdot (1 + 0.8 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \quad L2(t) := L1(t)$$

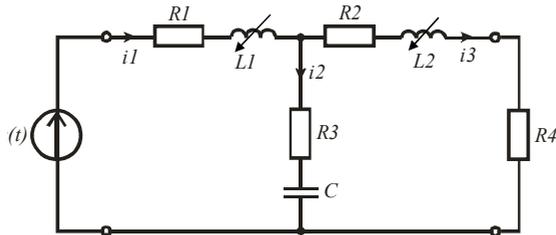


Рис. 4.52

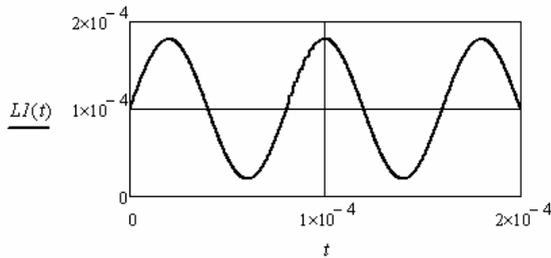


Рис. 4.53

Систему дифференциальных уравнений относительно переменных состояния возьмём из примера 4.8.

$$\begin{cases} u'_C = (i_1 - i_3)C^{-1} \\ i'_1 = (u(t) - u_C - i_1(R_1 + R_3) + i_3R_3)(L_1(t))^{-1} \\ i'_3 = (u_C + i_1R_3 - i_3(R_2 + R_3 + R_4))(L_2(t))^{-1} \end{cases}$$

Введём систему уравнений в листинг и найдём зависимости переменных состояния от времени. Начальные значения переменных состояния нулевые. Обозначим напряжение на конденсаторе x_1 , а токи в ветвях с индуктивностями x_2 и x_3 .

$$x := (0 \ 0 \ 0)^T$$

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} (x_2 - x_3) \cdot C^{-1} \\ [u(t) - x_1 - (R1 + R3) \cdot x_2 + R3 \cdot x_3] \cdot L1(t)^{-1} \\ [x_1 + R3 \cdot x_2 - (R2 + R3 + R4) \cdot x_3] \cdot L2(t)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z := Rkadapt(x, 0, 0.0004, 1000, D)$$

Найдём напряжение на выходе четырёхполюсника и построим зависимости напряжения на выходе и первого тока от времени на исследуемом интервале.

$$t := Z^{(1)} \quad i1(t) := Z^{(3)} \quad i3(t) := Z^{(4)} \quad uн(t) := i3(t) \cdot R4$$

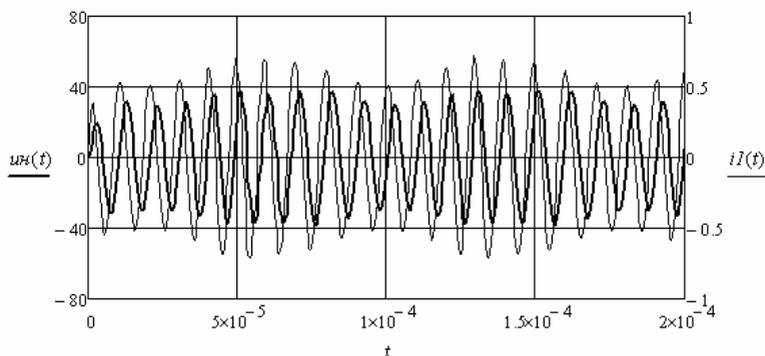


Рис. 4.54

Видно, что колебания величины индуктивностей вызывают амплитудную модуляцию токов и напряжений в четырёхполюснике (рис. 4.54).

Пример 4.12. Исследуем переходный процесс и установившийся режим в электрической цепи с параметрическим резистором (рис. 4.55). Зависимость сопротивления резистора от времени задана гармонической функцией. Напряжение, приложенное к цепи, является последовательностью прямоугольных импульсов со скважностью 2. Введём в листинг решения исходные данные.

$$ORIGIN := 1 \quad R2 := 8000 \quad L := 0.0005 \quad C := 2 \cdot 10^{-8} \quad E := 100$$

$$T := 6 \cdot 10^{-5} \quad \omega := 2 \cdot \frac{\pi}{T} \quad RI(t) := 300 \cdot (1 + 0.8 \cdot \sin(0.5 \cdot \omega \cdot t))$$

Зададим напряжение источника программным путём (рис. 4.32).

$$u(t) := \begin{cases} E & \text{if } 0 \leq t \leq T \cdot 0.5 \\ 0 & \text{if } -T \cdot 0.5 \leq t \leq 0 \\ u(t - T) & \text{if } t > T \cdot 0.5 \end{cases}$$

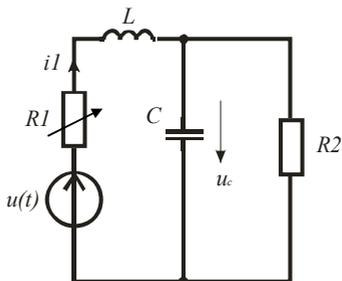


Рис. 4.55

Возьмём систему дифференциальных уравнений относительно переменных состояния из примера 4.7.

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = \frac{u(t) - i_1 R_1(t) - u_C}{L} \\ \dot{u}_C = \frac{R_2 i_1 - u_C}{R_2 C} \end{cases}$$

Начальные значения переменных состояния нулевые. Обозначим ток в ветви с индуктивностью x_1 , а напряжение на конденсаторе x_2 , и введём систему уравнений в листинг решения.

$$x := (0 \ 0)^T$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{u(t) - x_1 \cdot R1(t) - x_2}{L} \\ \left(x_1 - \frac{x_2}{R2} \right) \cdot C^{-1} \end{bmatrix}$$

Решим систему уравнений и построим зависимости переменных состояния от времени на исследуемом интервале (рис. 4.56).

$$Z := Rkadapt(x, 0, 0.0004, 1000, D) \quad t := Z^{(1)} \quad i1(t) := Z^{(2)} \quad uC(t) := Z^{(3)}$$

Видно, что более медленные колебания сопротивления первого резистора по сравнению с частотой следования импульсов входного напряжения, вызвали периодические изменения формы тока и напряжения на конденсаторе.

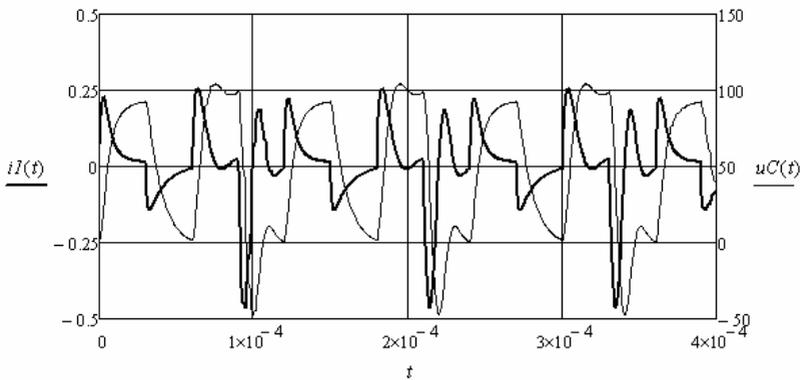


Рис. 4.56

Контрольные вопросы

1. Укажите достоинства и недостатки метода переменных состояния.
2. Какие токи и напряжения относят к переменным состояниям?
3. Поясните технологию преобразования системы уравнений, составленную по законам Кирхгофа, в систему уравнений относительно переменных состояния.
4. В чём суть использования метода наложения для составления системы уравнений относительно переменных состояния?
5. В какой форме вводятся дифференциальные уравнения в листинг численного решения системы уравнений относительно переменных состояния?
6. Как определяются начальные значения переменных состояния?
7. Всегда ли нужна аппроксимация найденных численными методами зависимостей переходных токов и напряжений?
8. Укажите способы проверки верности полученных решений.

5. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ИМПУЛЬСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

К импульсным электрическим цепям относятся цепи, в которых действуют импульсные ЭДС, причём интервал между импульсами соизмерим с временем переходного процесса, вызванного действием ЭДС. Это приводит к тому, что на достаточно длительном интервале времени после действия первого импульса начальные значения для последующих импульсов будут всё время новые. Затем наступит установившийся режим и начальные значения перестанут меняться. Анализ переходного процесса в импульсных цепях при действии нескольких первых импульсов обычно выполняется с помощью интеграла наложения (интеграла Дюамеля). Для анализа установившегося режима используется частотный метод, в основе которого лежат преобразования Фурье.

5.1. Использование интеграла наложения

Уравнение, позволяющее определить реакцию цепи на импульсное воздействие с помощью интеграла Дюамеля, имеет четыре формы:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(\tau)h(t - \tau)d\tau; \quad (5.1)$$

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(t - \tau)h(\tau)d\tau; \quad (5.2)$$

$$y(t) = \int_0^t x(t - \tau)h'(\tau)d\tau; \quad (5.3)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h'(t-\tau)d\tau, \quad (5.4)$$

где $y(t)$ – реакция цепи, которой может быть ток в заданной ветви или напряжение на заданном участке; $x(t)$ – импульсное воздействие на электрическую цепь, которое создаётся либо источником ЭДС, либо источником тока; $h(t)$ – переходная характеристика, которая находится предварительно как реакция цепи на единичный скачок напряжения или тока источника $1(t)$; τ – вспомогательная переменная; $h'(t)$ – импульсная переходная характеристика. Это реакция цепи на единичный импульс, соответствующий дельта-функции $\delta(t)$. Её удобнее находить как производную от переходной характеристики.

Пример 5.1. Необходимо найти реакцию четырёхполюсника с известной переходной характеристикой. Импульсное воздействие генерируется источником ЭДС и имеет вид отрезка гармонической функции заданной длительности.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$h(t) := \Phi(t) \cdot 0.4 \cdot \exp(-1000 \cdot t) \cdot \sin(4000 \cdot t)$$

$$t1 := 0.02 \quad u(t) := \text{if}(0 \leq t \leq t1, 20 \cdot \cos(3000 \cdot t), 0)$$

На рис. 5.1 приведён единичный скачок, который используется для ограничения переходной характеристики слева.

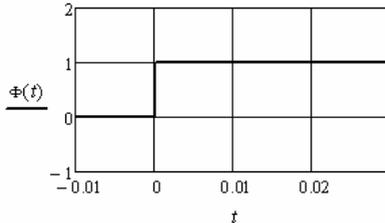


Рис. 5.1

Найдём производные переходной характеристики и входного воздействия.

$$dh(t) := \Phi(t) \cdot \frac{d}{dt} (0.4 \cdot \exp(-1000 \cdot t) \cdot \sin(4000 \cdot t)) \rightarrow$$

$$du(t) := \text{if} \left[0 \leq t \leq t1, \frac{d}{dt} (20 \cdot \cos(3000 \cdot t)), 0 \right]$$

На рис. 5.2 приведены переходная характеристика и импульсная переходная характеристика четырёхполосника.

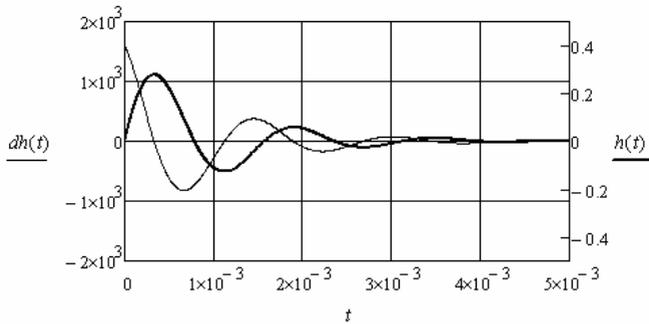


Рис. 5.2

Найдём выходное напряжение четырёхполосника, используя (5.1).

$$y(t) := u(0) \cdot h(t) + \int_0^t h(t - \tau) \cdot du(\tau) d\tau - u(tl) \cdot h(t - tl)$$

Первое слагаемое определяет реакцию четырёхполосника на передний фронт импульсного воздействия. Второе слагаемое определяет реакцию на изменяющееся напряжение импульсного воздействия на интервале его существования. Третье слагаемое определяет реакцию четырёхполосника на задний фронт импульсного воздействия.

Найдём аналогичные решения с помощью остальных форм, приведённых выше.

$$y1(t) := u(0) \cdot h(t) + \int_0^t h(\tau) \cdot du(t - \tau) d\tau - u(tl) \cdot h(t - tl)$$

$$y2(t) := \int_0^t dh(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau \quad y3(t) := \int_0^t dh(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau$$

Видно, что при использовании форм с импульсной переходной характеристикой решения более компактные. Полученные результаты приведены на рис. 5.3. Все решения дают идентичные графики.

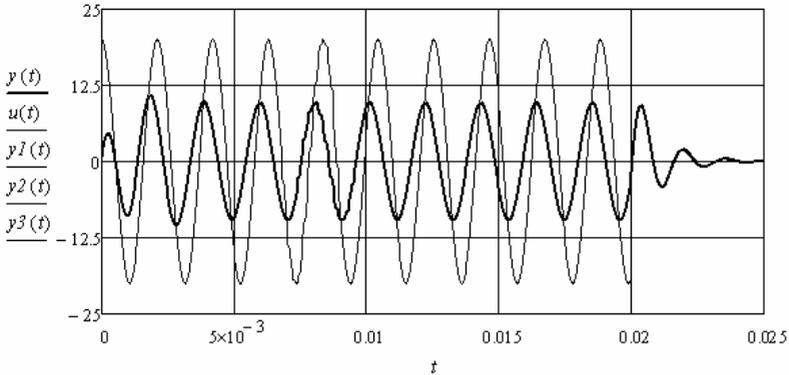


Рис. 5.3

Пример 5.2. Необходимо найти переходный ток в заданной ветви электрической цепи, если известна переходная характеристика для данного тока и импульсная ЭДС источника, действующая в цепи.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$h(t) := \Phi(t) \cdot [0.05 \cdot \exp(-1000 \cdot t) \cdot \sin(4000 \cdot t) + 0.05 \cdot (1 - \exp(-1000 \cdot t))]$$

$$t1 := 0.005 \quad t2 := 0.01 \quad u1(t) := \text{if}[0 \leq t \leq t1, \Phi(t) \cdot (100 - 8000 \cdot t), 0]$$

$$u2(t) := \text{if}[0 \leq t \leq t2, \Phi(t - t1) \cdot [-100 + 8000 \cdot (t - t1)], 0] \quad u(t) := u1(t) + u2(t)$$

Выберем для решения форму (5.4) и найдём импульсную переходную характеристику.

$$dh(t) := \Phi(t) \cdot \frac{d}{dt} [0.05 \cdot \exp(-1000 \cdot t) \cdot \sin(4000 \cdot t) + 0.05 \cdot (1 - \exp(-1000 \cdot t))] \rightarrow$$

На рис. 5.4 приведены обе характеристики. Переходный ток находим следующим образом:

$$i(t) := \int_0^t dh(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

На рис. 5.5 показано импульсное напряжение источника и соответствующий ему переходный ток.

Видно, что размах колебаний тока на втором интервале больше, чем на первом. Это связано с большей величиной скачка напряжения.

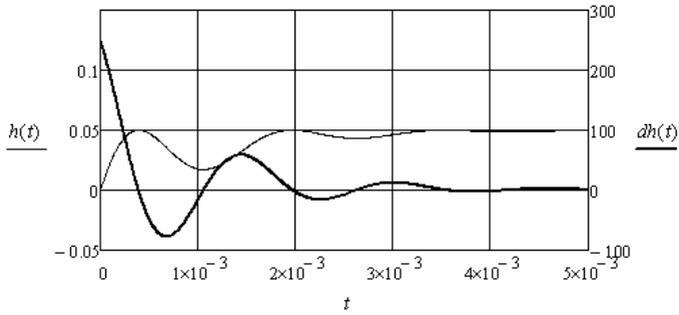


Рис. 5.4

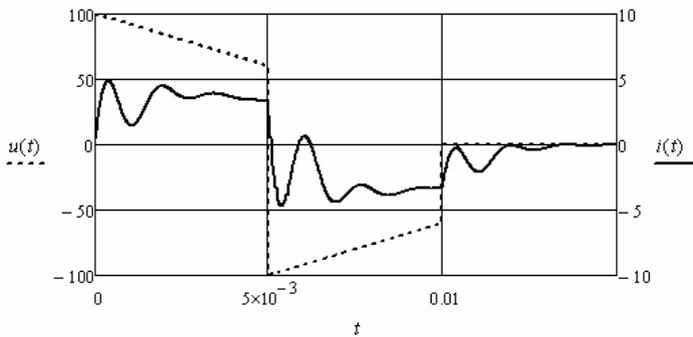


Рис. 5.5

Пример 5.3. Необходимо определить форму выходного напряжения ненагруженного четырёхполюсника, схема которого приведена на рис. 5.6, если напряжение на входе является последовательностью прямоугольных импульсов (рис. 5.7).

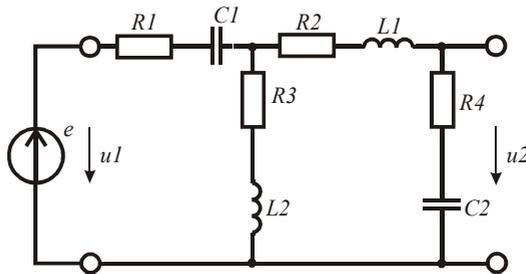


Рис. 5.6

Решим задачу в два этапа. На первом этапе найдём переходную характеристику четырёхполюсника для выходного напряжения. На втором этапе определим выходное напряжение с помощью интеграла Дюамеля.

Напряжение источника ЭДС получим программным путём.

$$u(t) := \begin{cases} 100 & \text{if } 0 \leq t \leq 2 \cdot 10^{-4} \\ 10 & \text{if } -1 \cdot 10^{-4} \leq t \leq 0 \\ u(t - 3 \cdot 10^{-4}) & \text{if } t > 2 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

$$uI(t) := \Phi(t) \cdot u(t)$$

Введём в листинг решения параметры элементов четырёхполюсника.

$$R1 := 10 \quad R2 := 100 \quad R3 := 10 \quad R4 := 100$$

$$L1 := 0.01 \quad L2 := 0.01 \quad C1 := 10^{-6} \quad C2 := 10^{-6}$$

Выходным напряжением четырёхполюсника является напряжение на ветви $R_4 C_2$. Для анализа переходного процесса при подключении к четырёхполюснику ЭДС в виде единичного скачка используем метод переменных состояния.

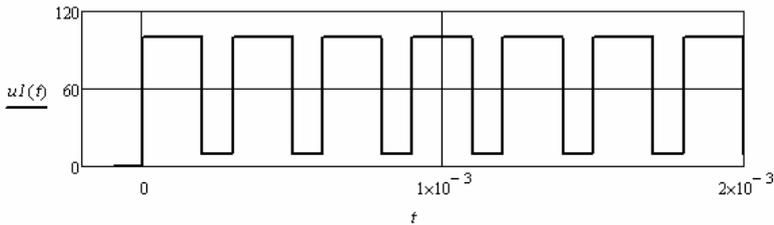


Рис. 5.7

Система дифференциальных уравнений относительно переменных состояния u_{C1} , u_{C2} , i_2 , i_3 имеет вид:

$$\begin{cases} u'_{C1} = (i_2 + i_3)/C_1 \\ u'_{C2} = i_3/C_2 \\ i'_2 = [i(t) - (i_2 + i_3)R_1 - u_{C1} - i_2 R_2]/L_1 \\ i'_3 = [i(t) - (i_2 + i_3)R_1 - u_{C1} - i_3(R_3 + R_4) - u_{C2}]/L_2 \end{cases}$$

В листинге решения переменные состояния обозначим следующим образом: $x_0 = u_{C1}$, $x_1 = u_{C2}$, $x_2 = i_2$, $x_3 = i_3$.

Решим систему уравнений при нулевых начальных значениях переменных состояния.

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t,x) := \begin{bmatrix} \frac{(x_2 + x_3)}{C1} \\ \frac{x_3}{C2} \\ \frac{[1 - (x_2 + x_3) \cdot R1 - x_0 - x_2 \cdot R2]}{L1} \\ \frac{[1 - (x_2 + x_3) \cdot R1 - x_0 - x_3 \cdot (R3 + R4) - x_1]}{L2} \end{bmatrix}$$

$$Z := Rkadapt(x, 0, 0.002, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимости напряжения на втором конденсаторе и третьего тока от времени и определим переходную характеристику.

$$X := Z^{(0)} \quad Y := Z^{(2)} \quad Y1 := Z^{(4)} \quad S1 := cspline(X, Y) \quad uC(t) := interp(S1, X, Y, t)$$

$$S2 := cspline(X, Y1) \quad i(t) := interp(S2, X, Y1, t) \quad h(t) := uC(t) + R4 \cdot i(t)$$

Найдём импульсную переходную характеристику, дифференцируя переходную характеристику через приращения. Это позволит ускорить вычисление интеграла Дюамеля. Характеристики приведены на рис. 5.8.

$$t := 0, 10^{-5} .. 2 \cdot 10^{-3} \quad \delta := 10^{-5} \quad dh(t) := \Phi(t) \cdot \frac{(h(t + \delta) - h(t - \delta))}{2 \cdot \delta}$$

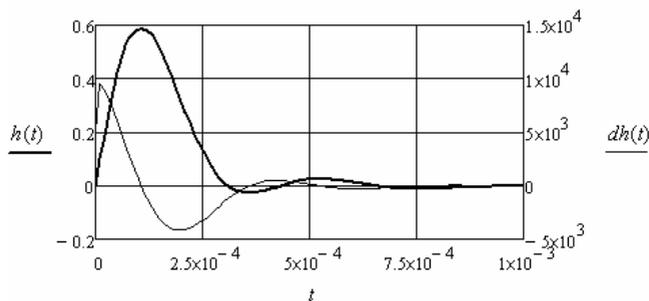


Рис. 5.8

Определим форму выходного напряжения четырёхполюсника.

$$u_2(t) := \int_0^t u(\tau) \cdot dh(t - \tau) d\tau$$

Полученный результат приведён на рис. 5.9. Определим значения выходного напряжения в разные моменты коммутации входного напряжения.

$$u_2(2 \cdot 10^{-4}) = 31.701 \quad u_2(8 \cdot 10^{-4}) = 27.503 \quad u_2(17 \cdot 10^{-4}) = 27.871$$

Очевидно, что начальные значения в моменты коммутации входного напряжения на выбранном интервале времени не остаются постоянными.

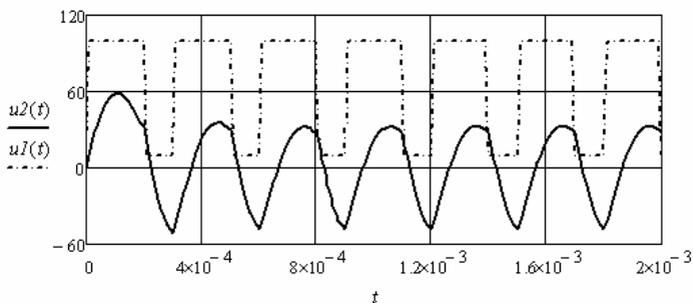


Рис. 5.9

Пример 5.4. Рассмотрим пример исследования четырёхполюсника, содержащего зависимые ключи, которые изменяют конфигурацию схемы. Это приводит к тому, что во время действия импульса напряжения на входе четырёхполюсника он описывается одной переходной характеристикой, а во время паузы другой. Обе переходные характеристики и импульсное напряжение на входе заданы. Необходимо найти форму напряжения на выходе четырёхполюсника.

Введём в листинг решения описание переходных характеристик и входного напряжения в виде двух импульсов.

$$h1(t) := \Phi(t) \cdot 0.8 \cdot (1 - \exp(-1000 \cdot t) \cdot \cos(8000 \cdot t)) \quad h2(t) := \Phi(t) \cdot 0.8 \cdot (1 - \exp(-400 \cdot t))$$

$$t1 := 2 \cdot 10^{-3} \quad u11(t) := \text{if}(0 \leq t \leq t1, 50 + 10^4 \cdot t, 0) \quad dul(t) := 10^4$$

$$u12(t) := \text{if}(2 \cdot t1 \leq t \leq 3 \cdot t1, 50 + 10^4 \cdot (t - 2 \cdot t1), 0] \quad u1(t) := u11(t) + u12(t)$$

Переходные характеристики приведены на рис. 5.10, а напряжение на рис. 5.11.

В данном случае необходимо использовать форму (5.1) и решать задачу методом наложения. Уравнения составляются для каждого временного интервала между коммутациями и после последней коммутации. Чтобы уравнения умещались на странице, будем вводить промежуточные обозначения.

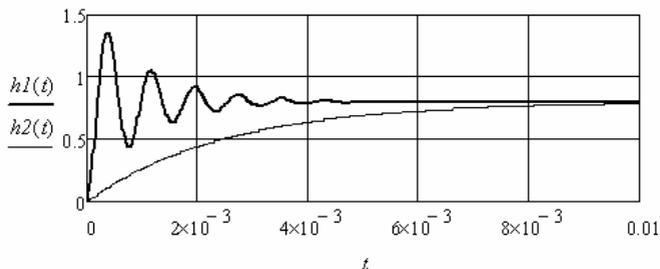


Рис. 5.10

На интервале действия первого импульса выходное напряжение определяется следующим выражением:

$$u21(t) := \text{if} \left(0 \leq t \leq t1, u1(0) \cdot h1(t) + \int_0^t du1(\tau) \cdot h1(t - \tau) d\tau, 0 \right)$$

На интервале действия первой паузы выходное напряжение определяется следующим выражением:

$$u22(t) := \text{if} \left(t1 < t \leq 2 \cdot t1, u1(0) \cdot h1(t) + \int_0^{t1} du1(\tau) \cdot h1(t - \tau) d\tau - u1(t1) \cdot h2(t - t1), 0 \right)$$

Обозначим полученное выражение для сокращения последующих выражений.

$$u3(t) := u1(0) \cdot h1(t) + \int_0^{t1} du1(\tau) \cdot h1(t - \tau) d\tau - u1(t1) \cdot h2(t - t1)$$

На интервале действия второго импульса выходное напряжение определяется следующим выражением:

$$u23(t) := \text{if} \left(2 \cdot t1 < t \leq 3 \cdot t1, u3(t) + u1(0) \cdot h1(t - 2 \cdot t1) + \int_{2 \cdot t1}^t du1(\tau) \cdot h1(t - \tau) d\tau, 0 \right)$$

Введём вспомогательное обозначение:

$$u4(t) := u3(t) + u1(0) \cdot h1(t - 2 \cdot t1)$$

На интервале действия второй бесконечной паузы выходное напряжение определяется следующим выражением:

$$u_{24}(t) := \text{if} \left(t > 3 \cdot t_1, u_{4}(t) + \int_{2 \cdot t_1}^{3 \cdot t_1} du_1(\tau) \cdot h_1(t - \tau) d\tau - u_1(t_1) \cdot h_2(t - 3 \cdot t_1), 0 \right)$$

Суммируя полученные частичные решения, получим форму выходного напряжения, которое приведено на рис. 5.11 вместе с входным напряжением.

$$u_2(t) := u_{21}(t) + u_{22}(t) + u_{23}(t) + u_{24}(t)$$

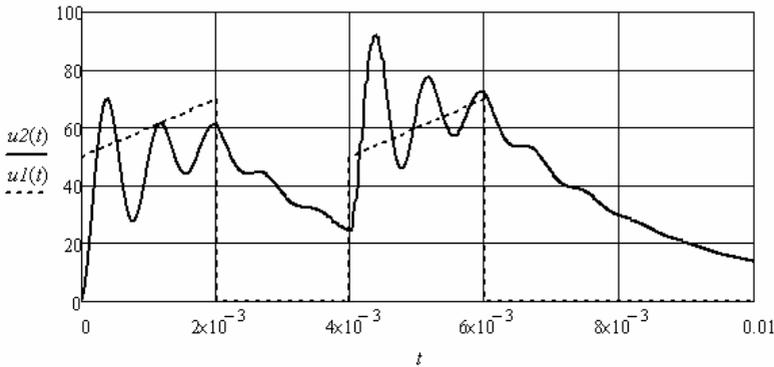


Рис. 5.11

Видно, что исчезла информация об изменении амплитуды импульса на интервале его действия и об окончании действия импульса. Это объясняется видом переходных характеристик исследуемой цепи.

5.2. Использование частотного метода

Частотный метод позволяет найти реакцию импульсной цепи на периодическую последовательность импульсов произвольной формы в установившемся режиме. При этом начальные значения для каждого импульса будут одинаковыми. В общем случае надо знать спектр периодической последовательности, которая считается бесконечной, и комплексный коэффициент преобразования входного воздействия в ток в заданной ветви или в напряжение на заданном участке. Комплексный спектр входного воздействия умножается на комплексный коэффициент преобразования. По преобразован-

ному спектру с помощью обратного преобразования Фурье восстанавливается искомым ток или напряжение в исследуемой цепи.

Данный метод может быть использован и для определения реакции цепи на одиночный импульс. В этом случае принимается, что на входе цепи действует последовательность данных импульсов. Период последовательности выбирается таким образом, чтобы переходный процесс в паузе между импульсами полностью закончился. При анализе рассматривается реакция на первый импульс.

Пример 5.5. Источник ЭДС генерирует последовательность прямоугольных импульсов с заданной частотой $\omega = 500$. Сквозность (отношение периода к длительности импульса) 1,6. Амплитуда 100. К источнику подключена RL-ветвь. $R = 50$, $L = 0,1$. Необходимо определить форму импульсов тока в ветви.

Найдём комплексный коэффициент преобразования, связывающий ЭДС и ток, вводя дискретную частоту, кратную частоте следования импульсов.

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + jn\omega_1 L} = \underline{K}\underline{E}, \quad \underline{K}(n) = \frac{R - jn\omega_1 L}{R^2 + (n\omega_1 L)^2}.$$

Введём в листинг решения исходные данные.

$$R := 50 \quad L := 0.1 \quad \omega l := 500 \quad q := 1.6 \quad E := 100$$

Опишем сигнал и найдём его дискретный спектр с помощью прямого преобразования Фурье. Возьмём на периоде 256 отсчётов.

$$k := 0..255 \quad tu := \frac{256}{q} \quad V_k := if(k \leq tu, E, 0) \quad C := FFT(V)$$

Введём комплексный дискретный коэффициент преобразования и найдём спектр тока.

$$n := 0..128 \quad K_n := \frac{R - j \cdot n \cdot \omega l \cdot L}{R^2 + n^2 \cdot \omega l^2 \cdot L^2} \quad CI := (C \cdot K)$$

Для перемножения столбцовых матриц использовалась векторизация.

Выполним обратное преобразование Фурье и линейную аппроксимацию зависимости тока, предварительно сформировав двухстолбцовую матрицу номеров отсчётов и соответствующих значений тока.

$$\begin{aligned}
 VI &:= IFFT(CI) & y_k &:= k & W &:= \text{augment}(y, VI) \\
 N &:= W^{(0)} & I &:= W^{(1)} & i(k) &:= \text{interp}(N, I, k)
 \end{aligned}$$

Полученный результат приведён на рис. 5.12. Начальное значение тока для следующего периода берётся по последнему отсчёту: Нулевой отсчёт лежит внутри периода и даёт другой результат.

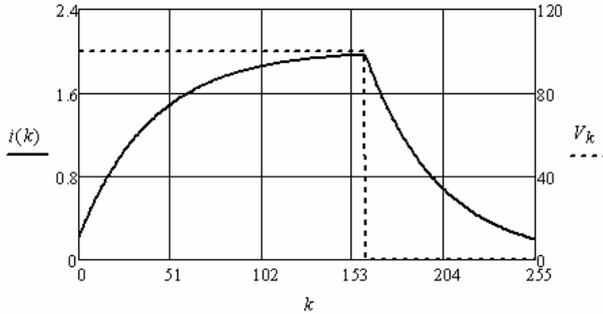


Рис. 5.12

Если необходимо определить реакцию ветви на одиночный импульс, надо увеличить период. При этом возрастёт и скажность. Например, если уменьшить частоту в два раза и увеличить скажность в два раза, получим форму тока, приведённую на рис. 5.13.

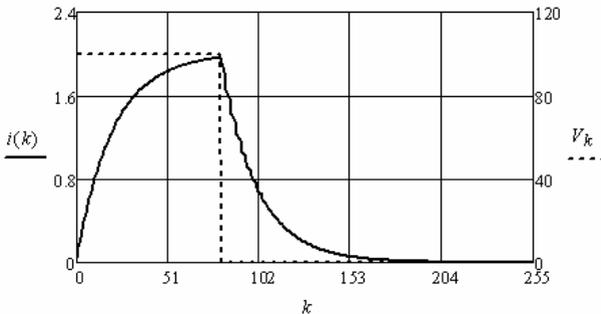


Рис. 5.13

Форма импульса осталась прежней, но начальное значение нулевое, что соответствует реакции на одиночный импульс.

Пример 5.6. На вход фильтра низких частот (рис. 5.14) поступает периодическая последовательность пакетов импульсов. В каж-

дом пакете два импульса разной длительности. Необходимо найти напряжение на выходе фильтра в установившемся режиме.

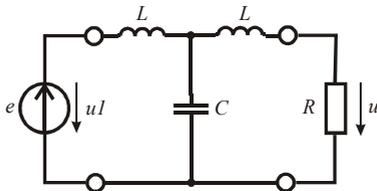


Рис. 5.14

Параметры фильтра $L = 0,02$, $C = 0,4 \cdot 10^{-6}$. Сопротивление нагрузки фильтра выбрано из условия согласования на нулевой частоте. Длительности первого импульса и паузы равны. Длительность второго импульса в два раза больше первого. Сквозность пакета $q = 2,56$. Частота следования пакетов $\omega = 2 \cdot 10^3$.

Найдём комплексный коэффициент преобразования, связывающий напряжение на входе фильтра и на его выходе, вводя дискретную частоту, кратную частоте следования пакетов импульсов.

$$\underline{K}(n) = \frac{R}{R - n\omega_1 L(n\omega_1 RC - 1) - jn\omega_1 L(n\omega_1 LC - 1)}$$

Введём в листинг решения исходные данные.

$$L := 0.02 \quad C := 0.4 \cdot 10^{-6} \quad \omega l := 2 \cdot 10^3 \quad E := 100 \quad q := 2.56$$

Определим сопротивление нагрузки фильтра и частоту среза.

$$R := \sqrt{\frac{L \cdot 2}{C}} = 316.228 \quad \omega_0 := \frac{2}{\sqrt{2 \cdot L \cdot C}} = 1.581 \times 10^4$$

Опишем входное напряжение и найдём его дискретный спектр с помощью прямого преобразования Фурье. Возьмём на периоде 256 отсчётов.

$$k := 0..255 \quad t1 := \frac{256}{4 \cdot q} \quad t2 := 2 \cdot t1 \quad t3 := 4 \cdot t1$$

$$u1_k := \text{if}(0 \leq k \leq t1, E, 0) \quad u2_k := \text{if}(t2 \leq k \leq t3, E, 0)$$

$$V_k := u1_k + u2_k \quad C := \text{FFT}(V)$$

Введём комплексный дискретный коэффициент преобразования и найдём спектр выходного напряжения с помощью обратного дискретного преобразования Фурье.

$$n := 0..128 \quad K_n := \frac{R}{R - n \cdot \omega l \cdot L \cdot (n \cdot \omega l \cdot R \cdot C - 1) - j \cdot n \cdot \omega l \cdot L \cdot (n \cdot \omega l \cdot L \cdot C - 1)}$$

$$CI := (C \cdot K) \quad VI := \text{IFFT}(CI)$$

Для перемножения столбцовых матриц использовалась векторизация.

На рис. 5.15 показана зависимость модуля коэффициента преобразования от номера гармонической составляющей спектра входного сигнала.

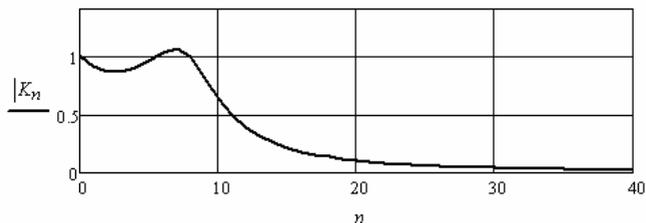


Рис. 5.15

Выполним линейную аппроксимацию зависимости выходного напряжения, предварительно сформировав двухстолбцовую матрицу номеров отсчётов и соответствующих значений напряжения.

$$y_k := k \quad W := \text{augment}(y, VI) \quad N := W^{(0)} \quad U := W^{(1)}$$

$$u2(k) := \text{linterp}(N, U, k)$$

Полученный результат приведён на рис. 5.16.

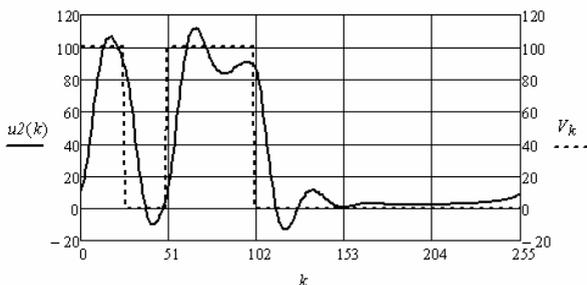


Рис. 5.16

Пример 5.7. На вход резонансного усилителя, схема замещения которого приведена на рис. 5.17, поступает периодическая последовательность пакетов импульсов.

Пакет состоит из двух импульсов, которые являются участками гармонических функций разной частоты и амплитуды. Каждый импульс состоит из десяти периодов. Частоты гармонических функций смещены симметрично в обе стороны относительно средней частоты полосы пропускания резонансного усилителя. Амплитуды отличаются в два раза.

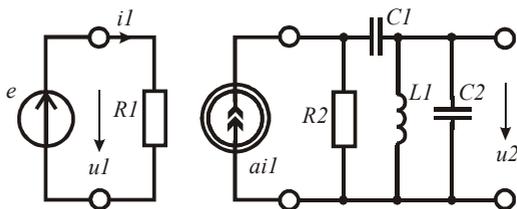


Рис. 5.17

Схема замещения усилителя содержит зависимый источник тока, управляемый током. Параметры схемы замещения следующие: $R_1 = 100$, $R_2 = 3000$, $a = 10$, $C_1 = 10^{-6}$, $C_2 = 10^{-9}$, $L_1 = 10^{-4}$.

Найдём форму выходного напряжения в установившемся режиме.

Определим комплексный коэффициент, связывающий входное и выходное напряжение в зависимости от частоты. С помощью схемы замещения (рис. 5.17), получим выражение

$$\underline{K}(\omega) = \frac{aL_1C_1R_2\omega^2}{R_1[1 - \omega^2L_1(C_2 - C_1)] + j\omega R_1R_2C_1(\omega^2L_1C_2 - 1)}$$

Зависимость модуля коэффициента преобразования в области экстремума приведена на рис. 5.18.

Введём в листинг решения исходные данные и определим резонансную частоту контура L, C ,

$$R1 := 100 \quad R2 := 3000 \quad a := 10 \quad C1 := 10^{-6} \quad C2 := 10^{-9}$$

$$L1 := 10^{-4} \quad x0 := \frac{1}{\sqrt{L1 \cdot C2}} = 3.162 \times 10^6$$

Выполним исследование резонансного усилителя.

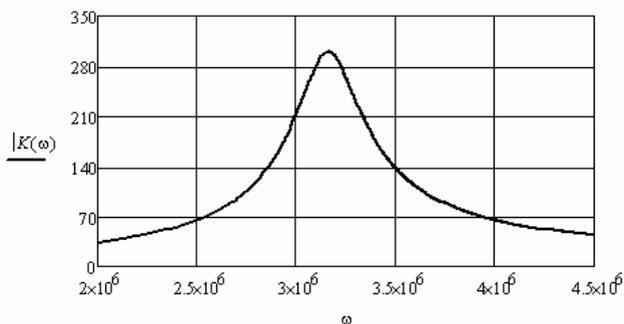


Рис. 5.18

Зададимся числом отсчётов на периоде повторения входного сигнала. Выберем период повторения в 32 раза больше округлённого значения периода резонансной частоты. Определим интервал дискретизации входного сигнала. Определим периоды и частоты гармонических функций в импульсах входного сигнала.

$$k := 0..511 \quad \omega_0 := 3.16 \cdot 10^6 \quad \omega_1 := \frac{\omega_0}{32} \quad T_1 := 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_1} \quad \Delta T := \frac{T_1}{512}$$

$$\omega_0 := 2 \cdot \frac{\pi}{\Delta T \cdot 16} \quad \omega_2 := 2 \cdot \frac{\pi}{\Delta T \cdot 15} = 3.371 \times 10^6 \quad \omega_3 := 2 \cdot \frac{\pi}{\Delta T \cdot 17} = 2.974 \times 10^6$$

Выполним описание входного периодического сигнала на периоде. Полученный результат приведён на рис. 5.19.

$$u1_k := \text{if}\left(0 \leq k \leq 150, 1 \cdot \sin\left(k \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{15}\right), 0\right) \quad u2_k := \text{if}\left(200 \leq k \leq 370, 0.5 \cdot \sin\left(k \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{17}\right), 0\right)$$

$$V_k := u1_k + u2_k$$

Найдём спектр входного сигнала и введём комплексный коэффициент преобразования в дискретной форме как функцию отсчётов спектра.

$$C := \text{FFT}(V) \quad n := 0..256$$

$$K_n := \frac{\left[a \cdot (n \cdot \omega_1)^2 \cdot L_1 \cdot C_1 \cdot R_2 \right]}{R_1 \cdot \left[1 - (n \cdot \omega_1)^2 \cdot L_1 \cdot (C_2 - C_1) \right] + j \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot (n \cdot \omega_1) \cdot C_1 \cdot \left[(n \cdot \omega_1)^2 \cdot L_1 \cdot C_2 - 1 \right]}$$

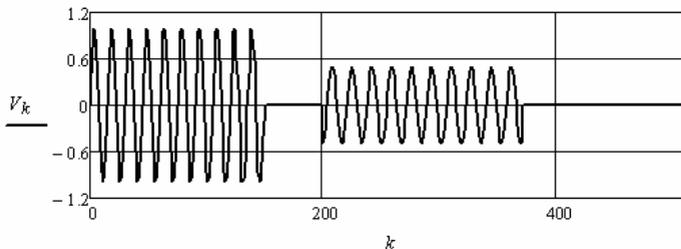


Рис. 5.19

Найдём спектр выходного сигнала. С помощью обратного преобразования Фурье, объединения матриц и линейной аппроксимации получим форму выходного сигнала в установившемся режиме (рис. 5.20).

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\quad} \\
 CI & := (C \cdot K) & VI & := \text{IFFT}(CI) & y_k & := k & W & := \text{augment}(y, VI) \\
 N & := W^{(0)} & U & := W^{(1)} & u2(k) & := \text{linterp}(N, U, k)
 \end{aligned}$$

На выходе резонансного усилителя импульсы накладываются друг на друга, так как интервал между ними меньше времени переходного процесса.

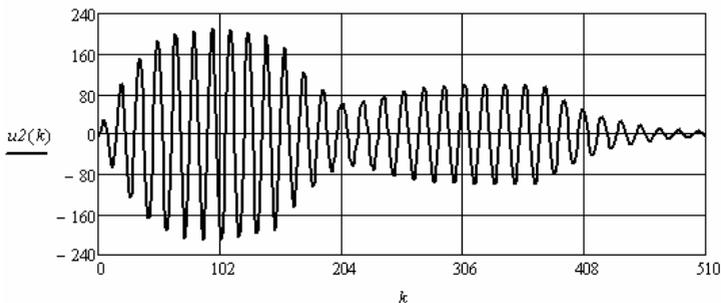


Рис. 5.20

Контрольные вопросы

1. Укажите область использования интеграла наложения (Дюамеля).
2. Укажите область использования частотного метода.
3. Какая функция в программе соответствует единичной функции?
4. Как связаны между собой единичная функция и дельта-функция?
5. Дайте определение переходным характеристикам.
6. Укажите способы определения переходных характеристик.
7. Дайте определение импульсным переходным характеристикам.
8. Укажите способы определения импульсных переходных характеристик.
9. Чем отличаются известные формы интеграла наложения?
10. Как ускорить вычисление интеграла наложения?
11. Дайте определение комплексному коэффициенту преобразования.
12. Как перейти от частоты, функцией которой является комплексный коэффициент преобразования, к номеру гармонических составляющих спектра сигнала?
13. Поясните, как работает функция программы «векторизация».
14. Поясните, как выбрать количество отсчётов сигнала при использовании частотного метода.
15. Можно ли использовать интеграл наложения и частотный метод для анализа переходных процессов в нелинейных цепях?

6. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Примером цепей с распределёнными параметрами являются длинные линии, которые используются как для передачи электрической энергии, так и для передачи электрических сигналов, несущих информацию. Переходные процессы в длинных линиях возникают при коммутациях на входе и выходе линии, а также при передаче импульсных сигналов.

Задачу анализа переходных процессов в длинных линиях решают в два этапа. На первом этапе исследуют переходные процессы на входе или выходе линии. Для этого составляется схема замещения, в которой вместо линии используется её волновое сопротивление. На втором этапе исследуется прохождение переходных токов и напряжений в длинной линии. Для этого используется частотный метод анализа переходных процессов.

6.1. Использование схем замещения входной цепи

Примеры аналитического решения

Пример 6.1. Рассмотрим пример анимации процесса распространения волны в длинной линии.

К длинной линии без потерь подключается источник постоянной ЭДС с внутренним сопротивлением, равным волновому сопротивлению линии. В линии возникают волны напряжения и тока, которые будут распространяться вдоль линии с фазовой скоростью.

Амплитуда волны напряжения будет равна половине ЭДС. Схема замещения рассматриваемой цепи приведена на рис. 6.1.

Введём в листинг решения исходные данные.

$$E := 200 \quad v := 290 \cdot 10^3 \quad Z := 150 \quad R := Z$$

Выполним анимацию во времени движения фронта напряжения и фронта тока, используя соответствующие инструменты программы и зависимости напряжения и тока в линии от времени и координаты. Для получения зависимостей используем единичную функцию. Подготовим необходимый график.

$$t := \frac{FRAME}{10^6} \quad u(x) := \frac{E}{2} \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$i(x) := \frac{E}{R + Z} \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

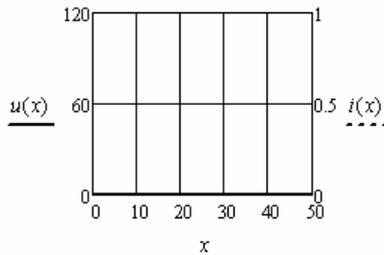


Рис. 6.1

Для анимации требуется выбрать в меню *Tools* вкладку *Animation, Record*. В появившемся окне надо указать начальное (0) и конечное (200) число кадров. Количество кадров в секунду установим равным 100. Затем необходимо выделить область, занятую выражениями и графиком (неправильное выделение приведёт к ошибке), и нажать кнопку *Animate*. После обработки программой всех кадров появится окно проигрывания. Для сохранения видеофайла следует использовать кнопку *Save*. Окно проигрывания приведено на рис. 6.3.

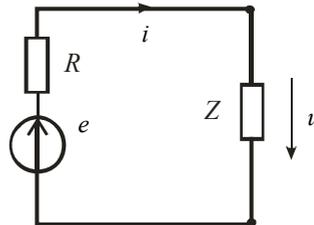


Рис. 6.2

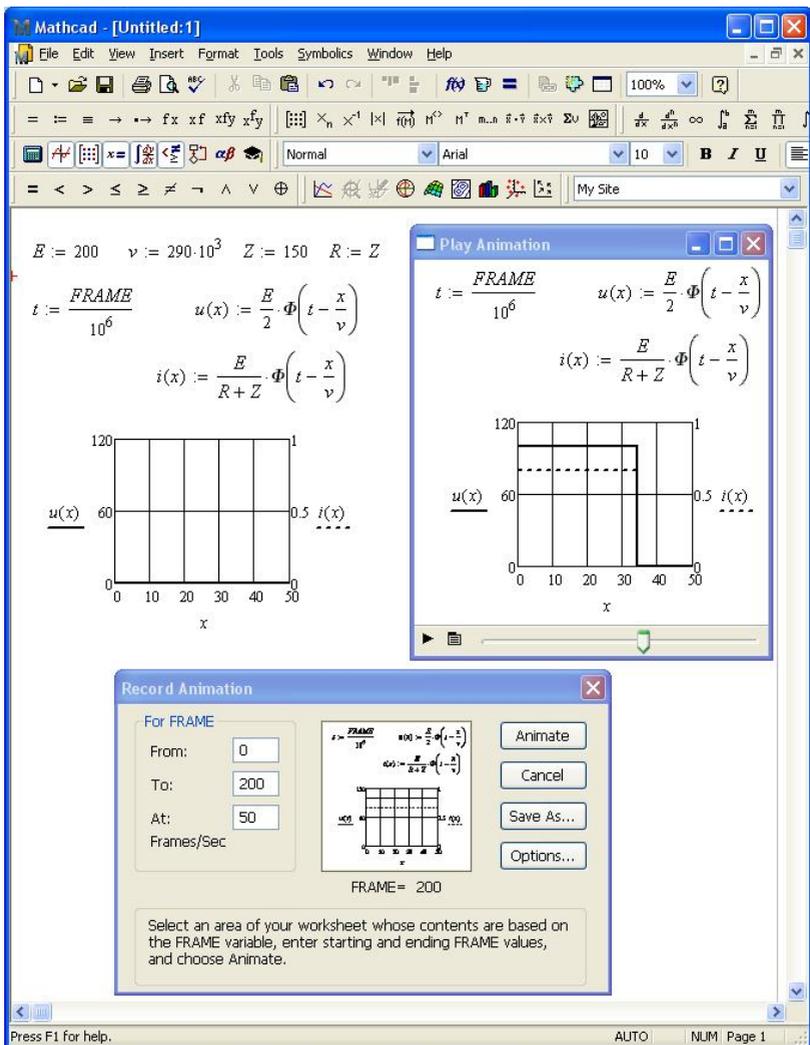


Рис. 6.3

Пример 6.2. Рассмотрим переходный процесс в линии без потерь после подключения согласованного гармонического источника: $e(t) = E \sin(\omega t + \pi/2)$.

Используем схему замещения, приведённую на рис. 6.1. Введём в листинг решения исходные данные и необходимые выражения для анимации.

$$E := 200 \quad v := 290 \cdot 10^3 \quad \omega := 10^5 \quad Z := 150$$

$$t := \frac{FRAME}{10^6} \quad u(x) := \frac{E}{2} \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \cdot \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$i(x) := \frac{E}{2 \cdot Z} \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \cdot \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

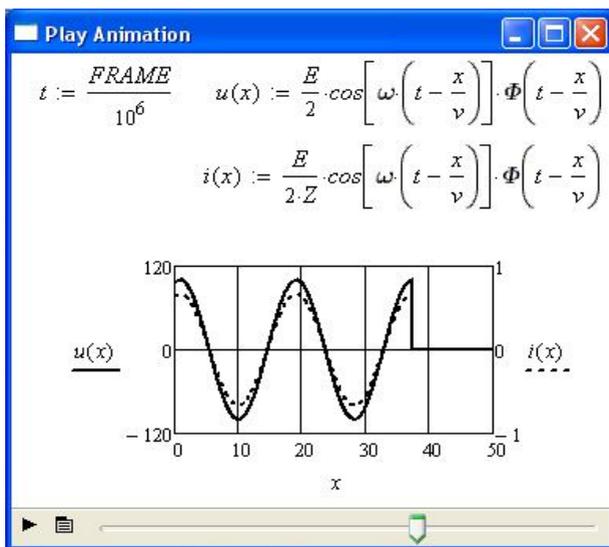
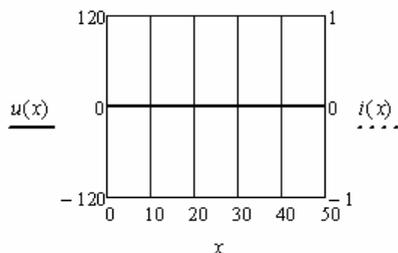


Рис. 6.4

Соответствующее окно проигрывания при тех же условиях, что и выше, приведено на рис. 6.4. Видно, что передний фронт волны прямоугольный.

Пример 6.3. Рассмотрим процесс после подключения к линии без потерь активного двухполюсника, содержащего постоянную ЭДС и активно индуктивное сопротивление. Схема замещения рассматриваемой цепи приведена на рис. 6.5. Волновое сопротивление линии активное.

Введём в листинг исходные данные.

$$E := 200 \quad R := 10 \quad L := 10^{-3} \quad Z := 50 \quad v := 290 \cdot 10^3$$

По схеме замещения классическим методом найдём выражение для переходного тока и переходного напряжения на линии:

$$i(t) = \frac{E}{R+Z} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad u(t) = Zi(t), \quad \tau = \frac{L}{R+Z}.$$

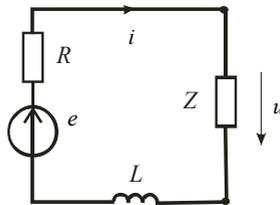


Рис. 6.5

Подготовим необходимые выражения и график для анимации.

$$\tau := \frac{L}{R+Z} \quad t := \frac{FRAME}{200000}$$

$$i(x) := \frac{E \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{\left(\frac{x}{v} - t\right)}{\tau}\right) \right]}{R+Z} \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad u(x) := Z \cdot i(x)$$

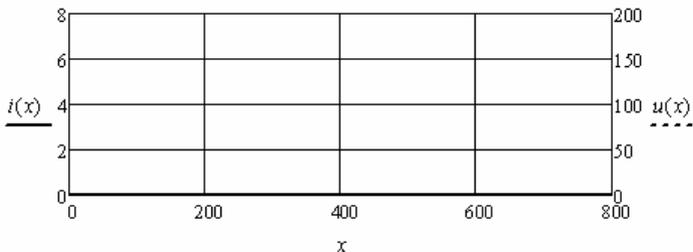


Рис. 6.6

Соответствующее окно проигрывания приведено на рис. 6.7.

Видно, что в этом случае передний фронт волны тока и напряжения не прямоугольный.

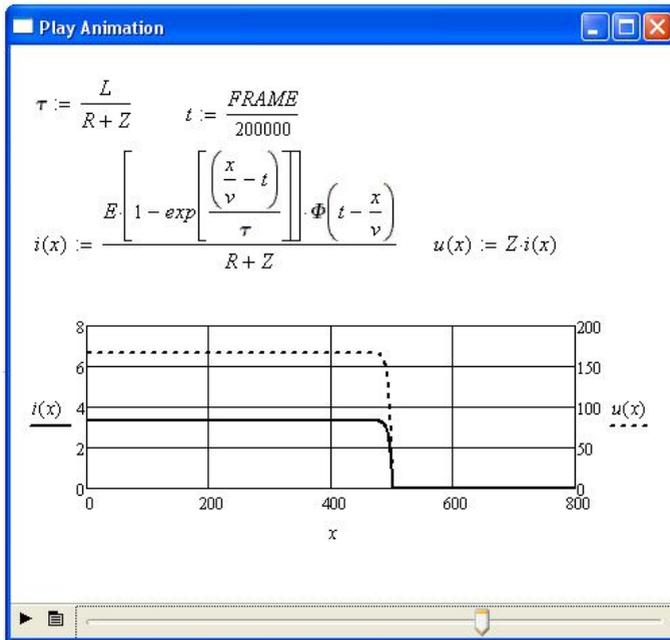


Рис. 6.7

Пример 6.4. Рассмотрим пример распространения волн тока и напряжения в длинной линии без потерь, при подключении к линии через разделительный конденсатор источника гармонической ЭДС.

Схема замещения цепи приведена на рис. 6.8.

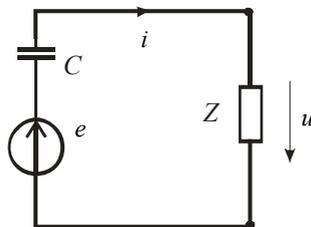


Рис. 6.8

Переходный процесс в схеме замещения рассчитаем классическим методом. Введём в листинг решения исходные данные.

$$E := 100 \quad \omega := 10^7 \quad \psi := 0.5 \cdot \pi \quad e(t) := E \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad C := 10^{-9}$$

$$Z := 50 \quad v := 290 \cdot 10^3$$

Определим начальные значения тока и напряжения на линии в момент коммутации при $t = 0$.

$$i_n := \frac{e(0)}{Z} \quad u_n := e(0)$$

Используя комплексную плоскость, найдём выражения для принуждённого тока и принуждённого напряжения на линии.

$$I := E \cdot \frac{\exp(j \cdot \psi)}{Z - \frac{j}{\omega \cdot C}} \quad U := I \cdot Z \quad inp(t) := |I| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I))$$

$$unp(t) := |U| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U))$$

Определим постоянные интегрирования, постоянную времени цепи и выражения для переходного тока и переходного напряжения на линии.

$$A := i_n - inp(0) \quad B := u_n - unp(0) \quad \tau := Z \cdot C$$

$$i(t) := inp(t) + A \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad u(t) := unp(t) + B \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

Подготовим необходимые выражения и график для анимации.

$$t := \frac{FRAME}{10^8}$$

$$i(x) := \left[|I| \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right) + \arg(I)\right] + A \cdot \exp\left[-\left(\frac{t - \frac{x}{v}}{\tau}\right)\right] \right] \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$u(x) := \left[|U| \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right) + \arg(U)\right] + B \cdot \exp\left[-\left(\frac{t - \frac{x}{v}}{\tau}\right)\right] \right] \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

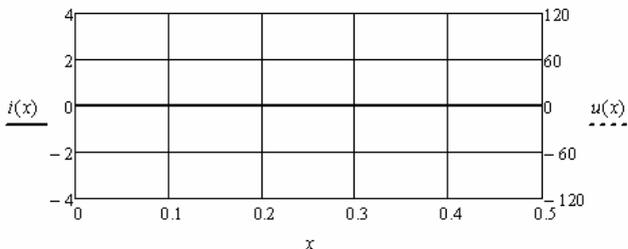


Рис. 6.9

Соответствующее окно проигрывания приведено на рис. 6.10.

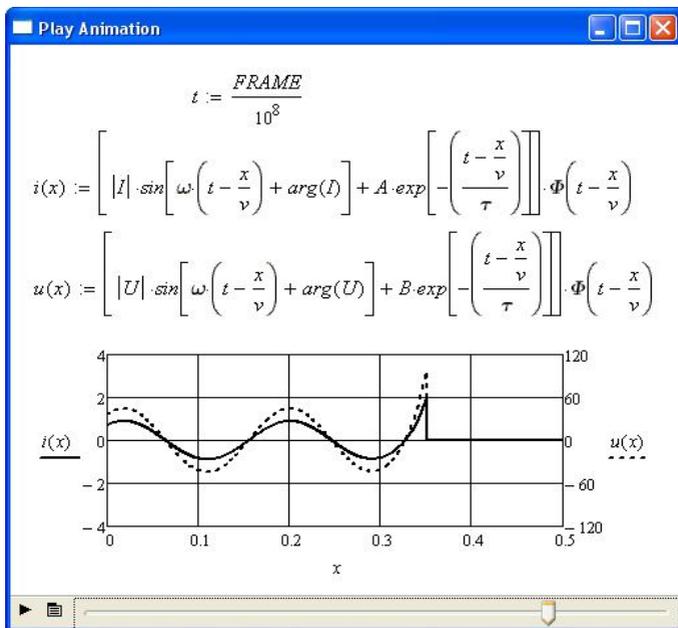


Рис. 6.10

При выбранном моменте коммутации линии скачок тока и напряжения на переднем фронте соответствующей волны заметно превышает установившиеся значения. Выбор момента коммутации (выбор начальной фазы ЭДС) позволяет оптимизировать переходный процесс.

Пример численного решения

Пример 6.5. Рассмотрим пример распространения волн тока и напряжения в длинной линии без потерь, при подключении к линии через нелинейную индуктивность источника гармонической ЭДС. Схема замещения цепи приведена на рис. 6.11.

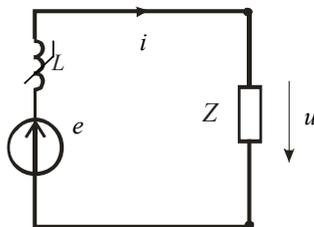


Рис. 6.11

Рассчитаем переходный процесс численным решением нелинейного дифференциального уравнения цепи.

Введём в листинг решения исходные данные. Зависимость индуктивности от тока задана таблицей соответствующих координат.

$$E := 120 \quad \psi := 0.2 \quad \omega := 2000 \quad e(t) := E \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

$$v := 290 \cdot 10^3 \quad Z := 30$$

$$L := \begin{pmatrix} -2.5 & -2 & -1.5 & -1 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0.009 & 0.01 & 0.011 & 0.024 & 0.071 & 0.1 & 0.071 & 0.024 & 0.011 & 0.01 & 0.009 \end{pmatrix}^T$$

Выполним аппроксимацию зависимости индуктивности от тока.

$$X := L^{(0)} \quad Y := L^{(1)} \quad S := \text{cspline}(X, Y) \quad L(i) := \text{interp}(S, X, Y, i)$$

Составим и решим дифференциальное уравнение относительно тока.

$$i_0 := 0 \quad D(t, i) := \frac{e(t) - Z \cdot i_0}{L(i_0)} \quad Z := \text{rkfixed}(i, 0, 0.2, 1000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимости тока от времени и найдём зависимость напряжения на линии от времени. Так как волновое сопротивление линии вещественное, то форма напряжения совпадает с формой тока.

$$A := Z^{(0)} \quad B := Z^{(1)} \quad S := \text{cspline}(A, B) \quad i(t) := \text{interp}(S, A, B, t) \quad u(t) := Z \cdot i(t)$$

Выполним анимацию тока в линии (рис. 6.13).

$$t := \frac{\text{FRAME}}{10^4} \quad i(x) := i\left(t - \frac{x}{v}\right) \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

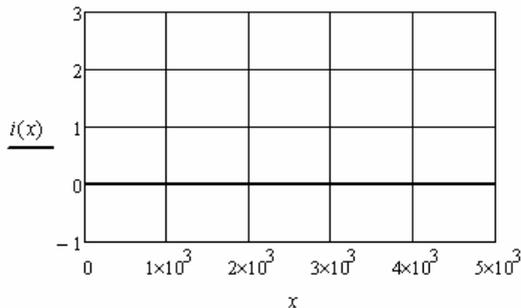


Рис. 6.12

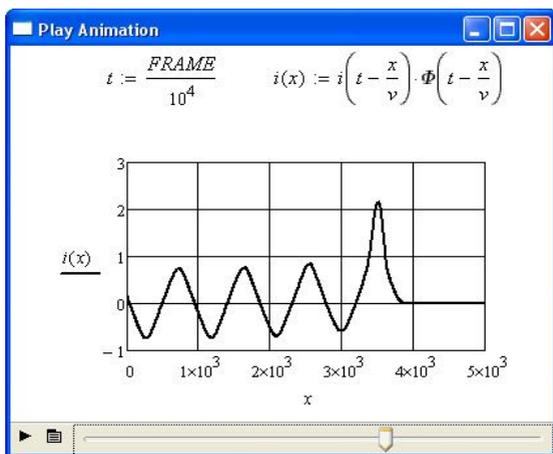


Рис. 6.13

6.2. Использование схем замещения выходной цепи

Примеры аналитического решения

Пример 6.6. К длинной линии без потерь подключается согласованный активный двухполюсник с постоянной ЭДС. Нагрузкой линии является несогласованный активно индуктивный двухполюсник. Определим состояние линии после отражения от нагрузки падающих волн напряжения и тока. Для анализа переходного процесса составим схемы замещения входной и выходной цепи линии (рис. 6.14). Введём в листинг решения исходные данные.

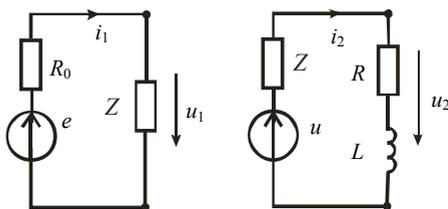


Рис. 6.14

С помощью схемы замещения входной цепи линии определим амплитуды прямых волн напряжения и тока и время движения прямых волн до нагрузки.

$l := 25 \quad v := 175 \cdot 10^3 \quad Z := 300 \quad E := 160 \quad R := 180 \quad L := 0.002$

$$UI := 0.5 \cdot E \quad II := \frac{UI}{Z} \quad T := \frac{l}{v}$$

Рассчитаем переходный процесс с помощью схемы замещения выходной цепи линии. Совместим начало координат с временем прихода прямых волн напряжения и тока. Считаем это моментом коммутации. Ток в индуктивности, равный нулю, является независимым начальным значением и определяет режим линии в момент коммутации. Это режим холостого хода. Коэффициенты отражения в момент коммутации по току -1, по напряжению 1. Введём в листинг начальные значения.

$$in := 2 \cdot UI \quad in := 0$$

Найдём коэффициенты отражения в установившемся режиме.

$$ki := \frac{Z - R}{Z + R} \quad ku := -ki$$

Найдём принуждённые значения напряжения и тока, постоянные интегрирования и постоянную времени цепи.

$$Inp := II + II \cdot ki \quad Unp := UI + UI \cdot ku \quad A := in - Unp$$

$$B := in - Inp \quad \tau := \frac{L}{Z + R}$$

Запишем выражения для переходного тока и переходного напряжения на выходе линии.

$$i(t) := Inp + B \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad u(t) := Unp + A \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

Для анимации состояния линии до и после отражения волн напряжения и тока от конца линии подготовим следующие выражения и график.

$$t := \frac{FRAME}{10^6} \quad u1(x) := UI \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad u2(x) := if(0 < t, UI, 0)$$

$$u3(x) := \left[Unp - UI + A \cdot \exp\left[\frac{-\left(-2 \cdot T + t + \frac{x}{v}\right)}{\tau}\right] \right] \cdot \Phi\left(-2 \cdot T + t + \frac{x}{v}\right)$$

$$u(x) := if(0 < t \leq T, u1(x), u2(x) + u3(x))$$

$$i1(x) := II \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad i2(x) := if(0 < t, II, 0)$$

$$i3(x) := \left[\text{Inp} \cdot \left[1 - \exp \left[\frac{-\left(-2 \cdot T + t + \frac{x}{v}\right)}{\tau} \right] \right] - \text{Il} \right] \cdot \Phi \left(-2 \cdot T + t + \frac{x}{v} \right)$$

$$i(x) := \text{if}(0 < t \leq T, i1(x), i2(x) + i3(x))$$

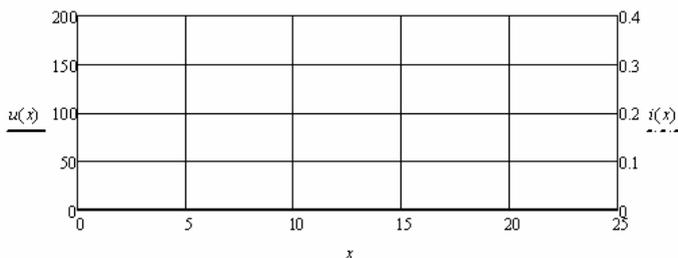


Рис. 6.15

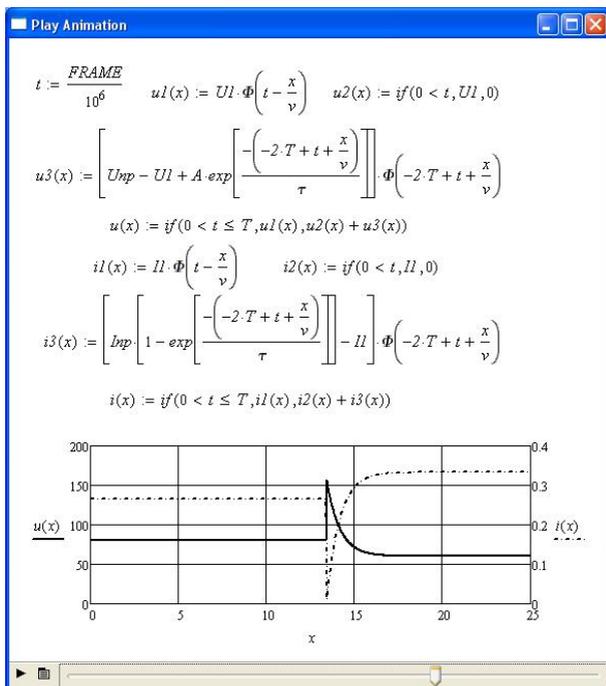


Рис. 6.16

Соответствующее окно проигрывания приведено на рис. 6.16. Зафиксирован момент времени после отражения волн от конца линии.

Пример 6.7. К длинной линии без потерь подключается согласованный активный двухполюсник с постоянной ЭДС. Нагрузкой линии является несогласованный активно-емкостный двухполюсник. Определим состояние линии после отражения от нагрузки падающих волн напряжения и тока. Для анализа переходного процесса составим схемы замещения входной и выходной цепи линии (рис. 6.17).

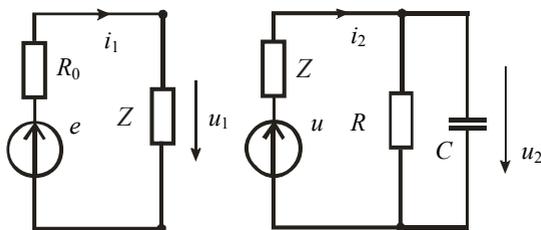


Рис. 6.17

Введём в листинг решения исходные данные.

$$l := 25 \quad v := 175 \cdot 10^3 \quad Z := 300 \quad E := 160 \quad R := 180 \quad C := 3 \cdot 10^{-8}$$

С помощью схемы замещения входной цепи линии определим амплитуды прямых волн напряжения и тока и время движения прямых волн до нагрузки.

$$U_I := 0.5 \cdot E \quad I_I := \frac{U_I}{Z} \quad T := \frac{l}{v}$$

Рассчитаем переходный процесс с помощью схемы замещения выходной цепи линии. Совместим начало координат с временем прихода прямых волн напряжения и тока. Считаем это моментом коммутации. Напряжение на конденсаторе, равное нулю, является независимым начальным значением и определяет режим линии в момент коммутации. Это режим короткого замыкания. Коэффициенты отражения в момент коммутации по току 1, по напряжению -1. Введём в листинг начальные значения.

$$u_n := 0 \quad i_n := 2 \cdot I_I$$

Найдём коэффициенты отражения в установившемся режиме.

$$k_i := \frac{Z - R}{Z + R} \quad k_u := -k_i$$

Найдём принуждённые значения напряжения и тока, постоянные интегрирования и постоянную времени цепи.

$$Inp := I1 + I1 \cdot ki \quad Unp := U1 + U1 \cdot ku \quad A := in - Unp$$

$$B := in - Inp \quad \tau := \frac{C \cdot Z \cdot R}{Z + R}$$

Запишем выражения для переходного тока и переходного напряжения на выходе линии.

$$i(t) := Inp + B \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad u(t) := Unp + A \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

Для анимации состояния линии до и после отражения волн напряжения и тока от конца линии подготовим следующие выражения и график.

$$t := \frac{FRAME}{10^6} \quad u1(x) := U1 \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad u2(x) := if(0 < t, U1, 0)$$

$$u3(x) := \left[Unp \cdot \left[1 - \exp\left[\frac{-\left(-2 \cdot T + t + \frac{x}{v}\right)}{\tau}\right]\right] - U1 \right] \cdot \Phi\left(-2 \cdot T + t + \frac{x}{v}\right)$$

$$u(x) := if(0 < t \leq T, u1(x), u2(x) + u3(x))$$

$$i1(x) := I1 \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad i2(x) := if(0 < t, I1, 0)$$

$$i3(x) := \left[Inp - I1 + B \cdot \exp\left[\frac{-\left(-2 \cdot T + t + \frac{x}{v}\right)}{\tau}\right]\right] \cdot \Phi\left(-2 \cdot T + t + \frac{x}{v}\right)$$

$$i(x) := if(0 < t \leq T, i1(x), i2(x) + i3(x))$$

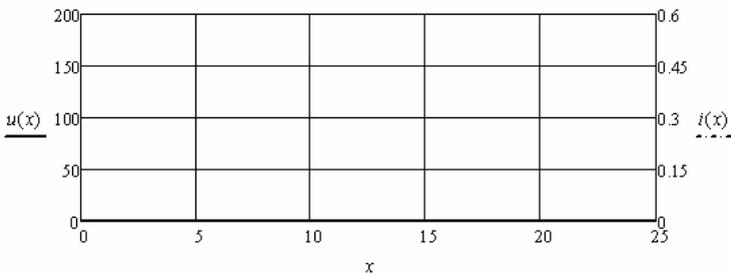


Рис. 6.18

Соответствующее окно проигрывания приведено на рис. 6.19. Зафиксирован момент времени после отражения волн от конца линии.

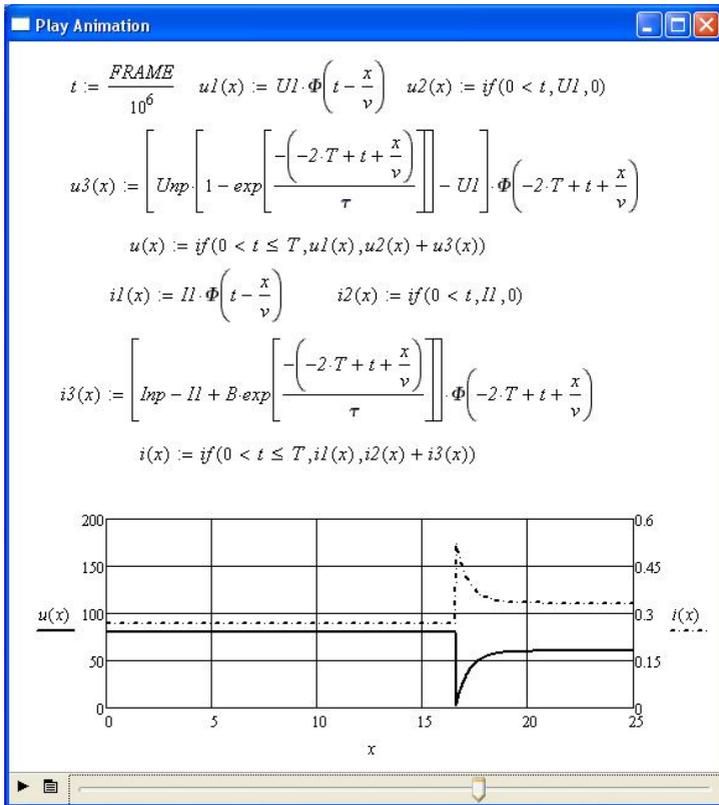


Рис. 6.19

Пример 6.8. К длинной линии без потерь подключается источник гармонической ЭДС. Нагрузкой линии является не согласованный активно индуктивный двухполюсник. Определим состояние линии после отражения от нагрузки падающих волн напряжения и тока. Для анализа переходного процесса составим схему замещения выходной цепи линии (рис. 6.20).

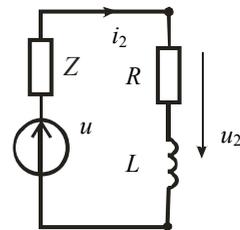


Рис. 6.20

Введём в листинг решения исходные данные.

$$l := 25 \quad v := 175 \cdot 10^3 \quad Z := 300 \quad E := 80 \quad \omega := 4 \cdot 10^5 \quad \psi := 0.5 \cdot \pi$$

$$u(t) := E \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad R := 180 \quad L := 0.002$$

Определим выражение для тока и время движения прямых волн до нагрузки.

$$i(t) := \frac{E \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)}{Z} \quad T := \frac{l}{v}$$

Рассчитаем переходный процесс с помощью схемы замещения выходной цепи линии. Совместим начало координат с временем прихода прямых волн напряжения и тока. Считаем это моментом коммутации. Ток в индуктивности, равный нулю, является независимым начальным значением и определяет режим линии в момент коммутации. Это режим холостого хода. Коэффициенты отражения в момент коммутации по току -1, по напряжению 1. Введём в листинг начальные значения.

$$u_n := 2 \cdot E \cdot \sin(\psi) \quad i_n := 0$$

Найдём принуждённые значения тока и напряжения на выходе линии с помощью символического метода.

$$ki := \frac{Z - (R + j \cdot \omega \cdot L)}{Z + R + j \cdot \omega \cdot L} \quad ku := -ki \quad U1 := E \cdot e^{j \cdot \psi} \quad U2 := U1 + U1 \cdot ku$$

$$I1 := \frac{E \cdot e^{j \cdot \psi}}{Z} \quad I2 := I1 + I1 \cdot ki \quad u2np(t) := |U2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U2))$$

$$i2np(t) := |I2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I2))$$

Определим постоянные интегрирования, постоянную времени цепи и запишем выражения для переходного тока и переходного напряжения на выходе линии.

$$A := -i2np(0) \quad B := u_n - u2np(0) \quad \tau := \frac{L}{Z + R}$$

$$i2(t) := i2np(t) + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad u2(t) := u2np(t) + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Для анимации состояния линии до и после отражения волн напряжения и тока от конца линии подготовим следующие выражения и график.

$$t := \frac{FRAME}{10^6} \quad u3(x) := E \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \cdot \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad u41(x) := E \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right]$$

$$u5(x) := \left[\left[|U2| \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right) + \arg(U2) \right] + B \cdot e^{-\tau \cdot \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right)} \right] - E \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \right] \cdot \Phi \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right)$$

$$u4(x) := \text{if} (0 \leq t, u41(x), 0) \quad u(x) := \text{if} (0 \leq t \leq T, u3(x), u4(x) + u5(x))$$

$$i3(x) := \frac{E}{Z} \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \cdot \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad i41(x) := \frac{E}{Z} \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right]$$

$$i5(x) := \left[\left[|I2| \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right) + \arg(I2) \right] + A \cdot e^{-\tau \cdot \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right)} \right] - \frac{E}{Z} \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \right] \cdot \Phi \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right)$$

$$i4(x) := \text{if} (0 \leq t, i41(x), 0) \quad i(x) := \text{if} (0 \leq t \leq T, i3(x), i4(x) + i5(x))$$

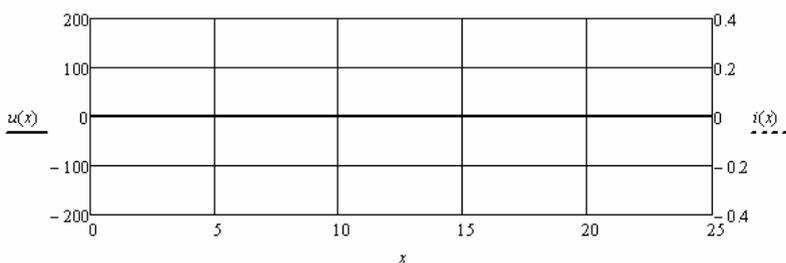


Рис. 6.21

Соответствующее окно проигрывания приведено на рис. 6.22. Зафиксирован момент времени после отражения волн от конца линии.

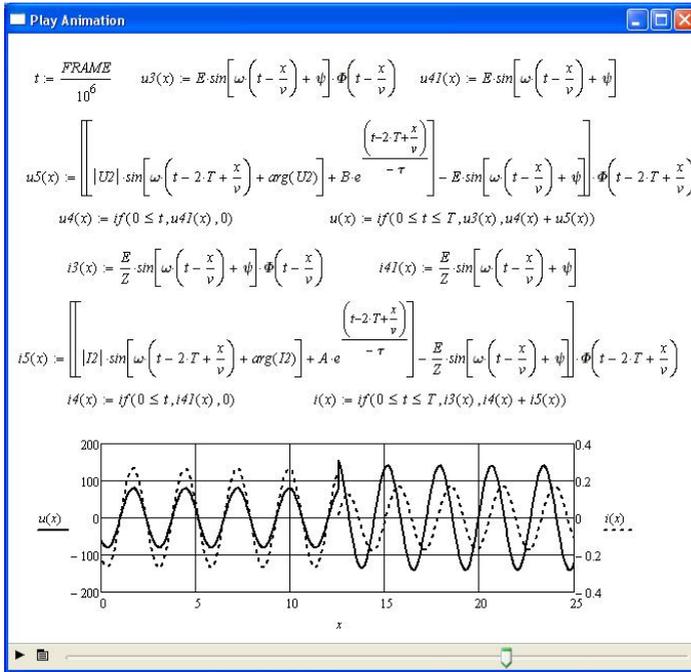


Рис. 6.22

Пример 6.9. К длинной линии без потерь подключается источник гармонической ЭДС. Нагрузкой линии является не согласованный активно емкостной двухполюсник. Определим состояние линии после отражения от нагрузки падающих волн напряжения и тока. Для анализа переходного процесса составим схему замещения выходной цепи линии (рис. 6.23).

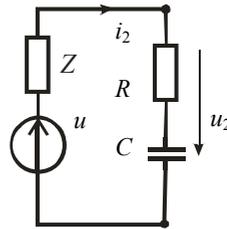


Рис. 6.23

Введём в листинг решения исходные данные.

$$l := 10 \quad v := 175 \cdot 10^3 \quad Z := 300 \quad E := 80 \quad \omega := 10^5 \cdot 5 \quad \psi := 0.5 \cdot \pi$$

$$u(t) := E \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad R := 80 \quad C := 1 \cdot 10^{-9}$$

Определим выражение для тока и время движения прямых волн до нагрузки.

$$i(t) := \frac{E \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)}{Z} \quad T := \frac{l}{v}$$

Рассчитаем переходный процесс с помощью схемы замещения выходной цепи линии. Совместим начало координат с временем прихода прямых волн напряжения и тока. Считаем это моментом коммутации. Независимым начальным значением является напряжение на конденсаторе, которое равно нулю. Определим коэффициенты отражения в момент коммутации.

$$k_i := \frac{Z - R}{Z + R} \quad k_u := -k_i$$

Определим начальные значения.

$$i_{2H} := E \cdot \sin(\psi) + k_u \cdot E \cdot \sin(\psi) \quad i_{2N} := \frac{E}{Z} \cdot \sin(\psi) + k_i \cdot \frac{E}{Z} \cdot \sin(\psi)$$

Определим коэффициенты отражения для установившегося режима.

$$K_i := \frac{Z - \left(R - \frac{j}{\omega \cdot C} \right)}{Z + R - \frac{j}{\omega \cdot C}} \quad K_u := -K_i$$

Найдём принуждённые значения тока и напряжения на выходе линии с помощью символического метода.

$$U_1 := E \cdot e^{j \cdot 0.5 \cdot \pi} \quad I_1 := \frac{E \cdot e^{j \cdot 0.5 \cdot \pi}}{Z} \quad U_2 := U_1 + K_u \cdot U_1 \quad I_2 := I_1 + K_i \cdot I_1$$

$$u_{2np}(t) := |U_2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_2)) \quad i_{2np}(t) := |I_2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_2))$$

Определим постоянные интегрирования, постоянную времени цепи и выражения для переходного тока и переходного напряжения на выходе линии.

$$A := i_{2H} - i_{2np}(0) \quad B := i_{2H} - u_{2np}(0) \quad \tau := C \cdot (Z + R)$$

$$i_2(t) := i_{2np}(t) + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad u_2(t) := u_{2np}(t) + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Для анимации состояния линии до и после отражения волн напряжения и тока от конца линии подготовим следующие выражения и график.

$$t := \frac{FRAME}{10^6} \quad u_3(x) := E \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \cdot \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad u_{41}(x) := E \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right]$$

$$u_5(x) := \left[\left[|U_2| \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right) + \arg(U_2) \right] + B \cdot e^{-\frac{t - 2 \cdot T + \frac{x}{v}}{\tau}} \right] - E \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \right] \cdot \Phi \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right)$$

$$u4(x) := if(0 \leq t, u41(x), 0)$$

$$u(x) := if(0 \leq t \leq T, u3(x), u4(x) + u5(x))$$

$$i3(x) := \frac{E}{Z} \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right) + \psi\right] \cdot \Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$i41(x) := \frac{E}{Z} \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right) + \psi\right]$$

$$i5(x) := \left[\left[|I2| \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v}\right) + \arg(I2)\right] + A \cdot e^{-\tau \cdot \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v}\right)} \right] - \frac{E}{Z} \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right) + \psi\right] \cdot \Phi\left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v}\right) \right]$$

$$i4(x) := if(0 \leq t, i41(x), 0)$$

$$i(x) := if(0 \leq t \leq T, i3(x), i4(x) + i5(x))$$

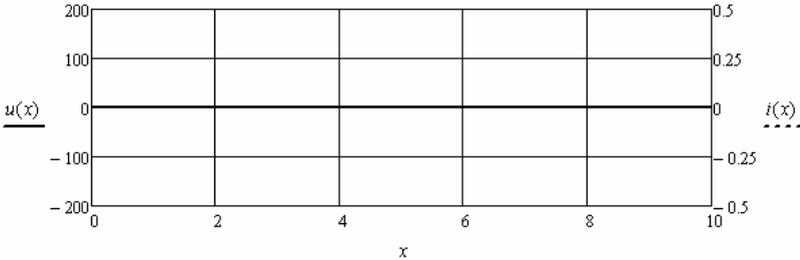


Рис. 6.24

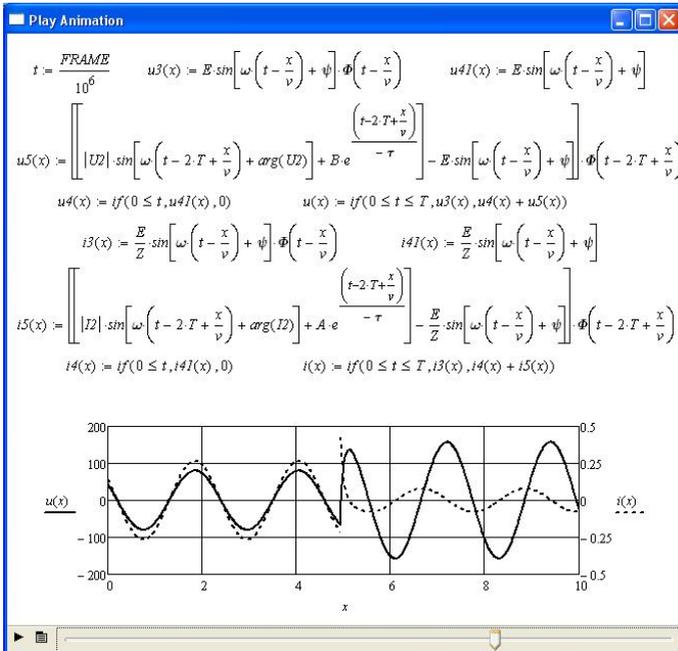


Рис. 6.25

Соответствующее окно проигрывания приведено на рис. 6.25. Зафиксирован момент времени после отражения волн от конца линии.

Пример численного решения

Пример 6.10. К длинной линии без потерь подключается источник гармонической ЭДС. Нагрузкой линии является несогласованный активно-реактивный двухполюсник. Резистор является условно нелинейным элементом. Его сопротивление зависит от времени протекания через него тока (рис. 6.27). Определим, используя численное решение дифференциального уравнения выходной цепи, состояние линии после отражения от нагрузки падающих волн напряжения и тока. Для анализа переходного процесса составим схему замещения выходной цепи линии (рис. 6.26).

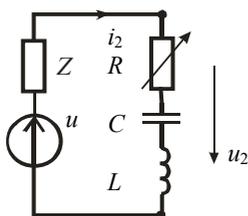


Рис. 6.26

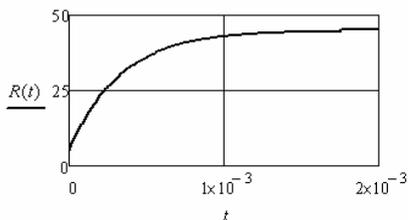


Рис. 6.27

Введём в листинг решения исходные данные.

$$\begin{aligned}
 l &:= 40 & v &:= 250 \cdot 10^3 & Z &:= 30 & R1 &:= 5 & R2 &:= 40 & a &:= 3000 \\
 R(t) &:= R1 + R2 \cdot (1 - \exp(-a \cdot t)) & L &:= 0.001 & C &:= 10^{-8} & \omega &:= (\sqrt{L \cdot C})^{-1} \\
 \omega l &:= 0.96 \cdot \omega & E &:= 120 & \psi &:= -0.5 \cdot \pi & e(t) &:= E \cdot \sin(\omega l \cdot t + \psi)
 \end{aligned}$$

Рассчитаем переходный процесс с помощью схемы замещения выходной цепи линии. Совместим начало координат с временем прихода прямых волн напряжения и тока. Считаем это моментом коммутации. Независимыми начальными значениями являются напряжение на конденсаторе и ток в индуктивности, которые равны нулю. В момент коммутации для падающих волн напряжения и тока будет режим холостого хода. Коэффициенты отражения для тока -1, а для напряжения 1. Составим дифференциальное уравнение относительно тока в выходной цепи линии.

$$i'' = \frac{u(t)'}{L} - \frac{Z + R(t)}{L} i' - \frac{i}{LC}$$

После коммутации напряжение на выходе линии будет равно двум ЭДС. Введём в листинг напряжение и определим его производную.

$$u1(t) := 2 \cdot e(t) \quad du1(t) := \frac{d}{dt} u1(t)$$

Определим начальные значения и время движения волны до конца линии, которое необходимо для определения интервала времени решения дифференциального уравнения.

$$i2n := 0 \quad di2n := \frac{u1(0)}{L} \quad T := \frac{l}{v} = 1.6 \times 10^{-4}$$

Введём начальные значения, дифференциальное уравнение в необходимой форме и решим его.

$$i := \begin{pmatrix} i2n \\ di2n \end{pmatrix} \quad D(t, i) := \begin{bmatrix} i_1 \\ \frac{du1(t)}{L} - \left(\frac{Z + R(t)}{L} \right) \cdot i_1 - \frac{i_0}{L \cdot C} \end{bmatrix}$$

$$Y := rkfixed(i, 0, 0.001, 10000, D)$$

Выполним аппроксимацию зависимости тока от времени и найдём соответствующую зависимость напряжения на выходе линии.

$$A := Y^{(0)} \quad B := Y^{(1)} \quad S := cspline(A, B) \quad i2(t) := interp(S, A, B, t)$$

$$u2(t) := u1(t) - Z \cdot i2(t)$$

Полученные зависимости приведены на рис. 6.28 и 6.29.

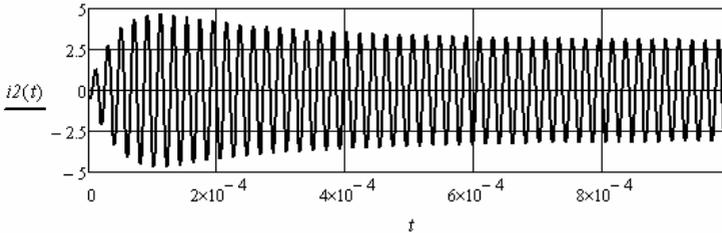


Рис. 6.28

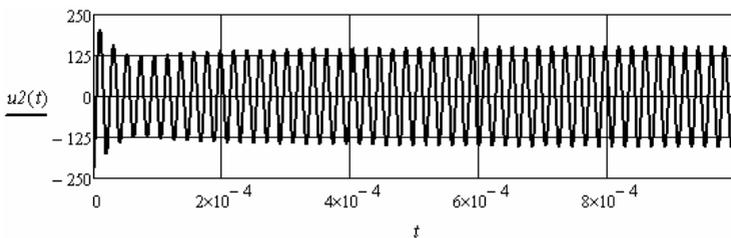


Рис. 6.29

Видно влияние изменения сопротивления резистора во время переходного процесса и после его окончания.

Для анимации состояния линии до и после отражения волн напряжения и тока от конца линии подготовим следующие выражения и график.

$$t := \frac{FRAME}{10^6} \quad i3(x) := \frac{E}{Z} \cdot \sin \left[\omega l \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \cdot \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad i41(x) := \frac{E}{Z} \cdot \sin \left[\omega l \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right]$$

$$i5(x) := \left[i2 \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right) - \frac{E}{Z} \cdot \sin \left[\omega l \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \right] \cdot \Phi \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right)$$

$$i4(x) := \text{if}(0 \leq t, i41(x), 0) \quad i(x) := \text{if}(0 \leq t \leq T, i3(x), i4(x) + i5(x))$$

$$u3(x) := E \cdot \sin \left[\omega l \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \cdot \Phi \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad u41(x) := E \cdot \sin \left[\omega l \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right]$$

$$u5(x) := \left[u2 \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right) - E \cdot \sin \left[\omega l \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi \right] \right] \cdot \Phi \left(t - 2 \cdot T + \frac{x}{v} \right)$$

$$u4(x) := \text{if}(0 \leq t, u41(x), 0) \quad u(x) := \text{if}(0 \leq t \leq T, u3(x), u4(x) + u5(x))$$

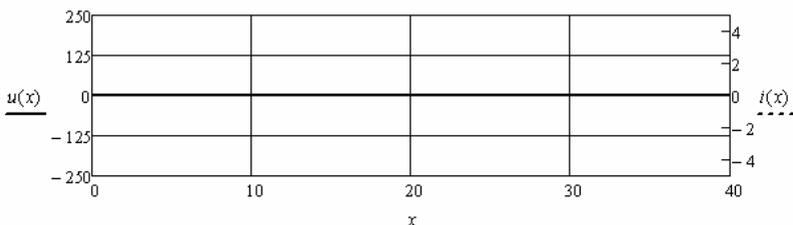


Рис. 6.30

Соответствующее окно проигрывания приведено на рис. 6.31. Зафиксирован момент времени после отражения волн от конца линии.

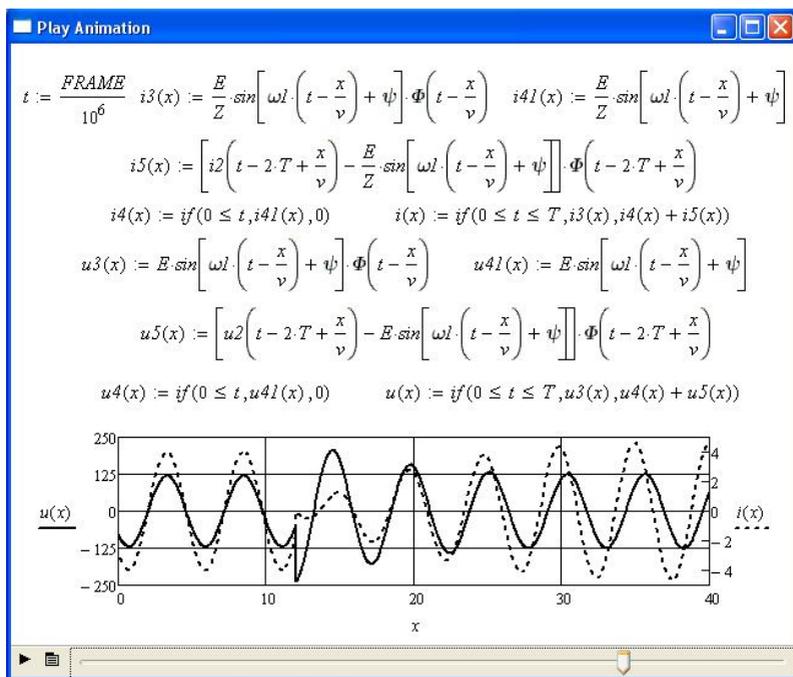


Рис. 6.31

6.3. Использование частотного метода

Частотный метод основан на анализе изменения спектра сигнала при прохождении его по длинной линии. Изменение спектра определяется комплексным коэффициентом преобразования, который связан с погонными параметрами линии и её длиной. Спектр сигнала на выходе линии определяется как произведение спектра сигнала на входе линии и коэффициента преобразования. Форма выходного сигнала находится с помощью обратного преобразования Фурье спектра сигнала.

Пример 6.11. Необходимо получить форму импульса на выходе согласованной длинной линии с известными погонными параметрами. Решим задачу частотным методом. Для этого подключим к линии генератор, формирующий периодическую последовательность

заданных импульсов. Рассмотрим изменение формы прямоугольно-го импульса напряжения. Форма импульса приведена на рис. 6.32.

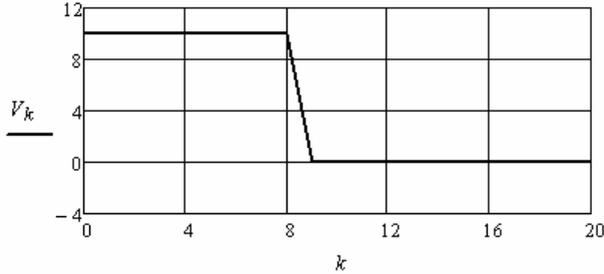


Рис. 6.32

Выберем количество отсчётов на периоде следования импульсов, скважность, амплитуду и длительность импульса.

$$T := 2^{12} \quad q := 2^9 \quad E := 10 \quad tu := \frac{T}{q}$$

Найдём спектр последовательности импульсов.

$$k := 0..T-1 \quad V_k := if(k \leq tu, E, 0) \quad A := FFT(V)$$

Введём в листинг погонные параметры и длину линии.

$$R := 0.4 \quad L := 3.5 \cdot 10^{-3} \quad C := 24.8 \cdot 10^{-9} \quad G := 18 \cdot 10^{-8} \quad l := 1000$$

Зададимся частотой и найдём постоянную передачи линии в комплексной форме.

$$n := 0..0.5 \cdot T \quad \omega l := 2500 \quad \Gamma_n := l \cdot [(R + j \cdot n \cdot \omega l \cdot L) \cdot (G + j \cdot n \cdot \omega l \cdot C)]^{0.5}$$

Используя комплексный коэффициент преобразования спектра, найдём спектр сигнала на выходе и восстановим форму сигнала с помощью обратного преобразования Фурье.

$$K_n := \exp(-\Gamma_n) \quad \xrightarrow{\quad} \quad A1 := (A \cdot K) \quad V1 := IFFT(A1)$$

На рис. 6.33 приведены импульсы на входе и выходе линии. Видно, что импульс на выходе линии меньше по амплитуде и он задержан относительно входного импульса на $0,707T$.

Форма выходного импульса показана на рис. 6.34.

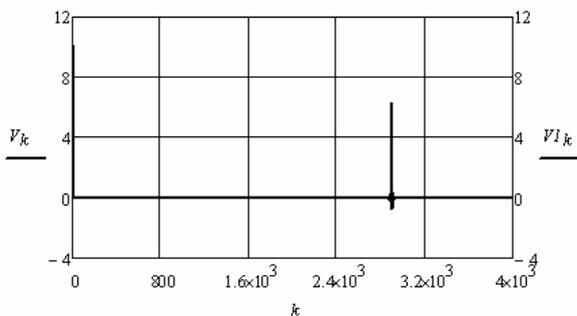


Рис. 6.33

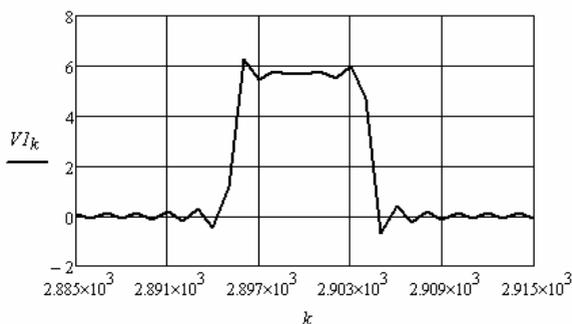


Рис. 6.34

Пример 6.12. Необходимо получить форму импульса на выходе согласованной длинной линии с известными погонными параметрами. Решим задачу частотным методом. Для этого подключим к линии генератор, формирующий периодическую последовательность заданных импульсов. Рассмотрим изменение формы импульса на напряжении, состоящего из четырёх периодов косинусоиды.

Выберем количество отсчётов на периоде следования импульсов, скважность, амплитуду и длительность импульса.

$$T := 2^{13} \quad q := 2^7 \quad E := 10 \quad tu := \frac{T}{q}$$

Форма импульса приведена на рис. 6.35.

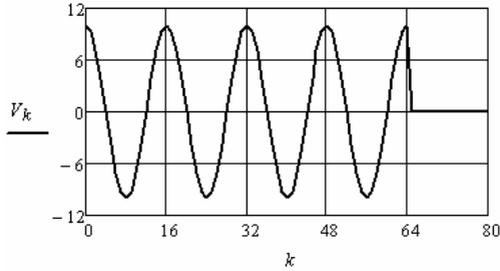


Рис. 6.35

Найдём спектр последовательности импульсов.

$$k := 0..T-1 \quad V_k := \text{if}\left(k \leq tu, E \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{8}\right), 0\right) \quad A := \text{FFT}(V)$$

Введём в листинг длину линии и её погонные параметры.

$$l := 1320 \quad R := 0.5 \quad L := 3.5 \cdot 10^{-3} \quad C := 25 \cdot 10^{-9} \quad G := 20 \cdot 10^{-8}$$

Зададимся частотой и найдём постоянную передачи линии в комплексной форме.

$$\omega l := 2500 \quad n := 0..0.5 \cdot T \quad \Gamma_n := l \cdot [(R + j \cdot n \cdot \omega l \cdot L) \cdot (G + j \cdot n \cdot \omega l \cdot C)]^{0.5}$$

Используя комплексный коэффициент преобразования спектра, найдём спектр сигнала на выходе и восстановим форму сигнала с помощью обратного преобразования Фурье.

$$K_n := \exp(-\Gamma_n) \quad A1 := (A \cdot K) \quad V1 := \text{IFFT}(A1)$$

На рис. 6.36 приведены импульсы на входе и выходе линии. Видно, что импульс на выходе линии меньше по амплитуде и он задержан относительно входного импульса на $0,913T$.

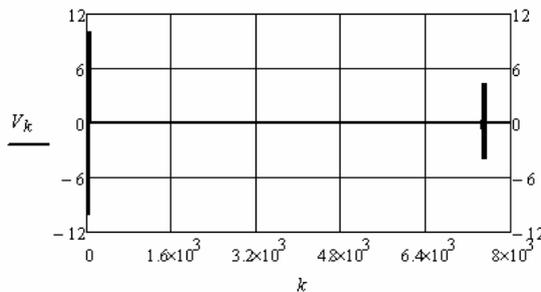


Рис. 6.36

Форма выходного импульса показана на рис. 6.37.

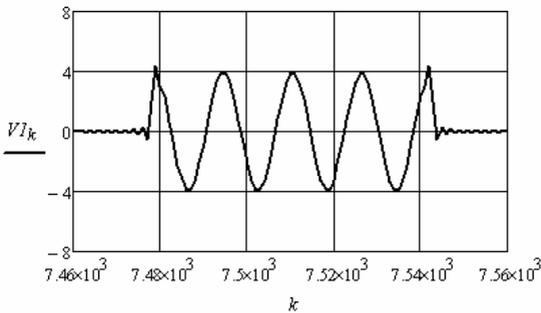


Рис. 6.37

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются цепи с распределёнными параметрами от цепей с сосредоточенными параметрами?
2. Чем отличаются переходные процессы в длинных линиях?
3. Укажите условия согласованного режима работы длинной линии.
4. Чем определяется фазовая скорость в длинной линии?
5. Как определить длину волны в линии?
6. Как определить начальные значения при несогласованном режиме работы длинной линии?
7. Как определить коэффициенты отражения для тока и напряжения?
8. Как связаны постоянная передачи линии и комплексный коэффициент преобразования?
9. Является ли линия без потерь линией без искажений?
10. Являются ли искажения формы сигнала в линии с потерями нелинейными искажениями?
11. В каких случаях возможны многократные отражения волн в длинной линии?

7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

ЗАДАНИЕ 1

Анализ переходного процесса в линейной электрической цепи классическим методом

1. Подготовить схему электрической цепи, состоящую после коммутации из трёх и более контуров, одного и более источников синусоидальной ЭДС и одного реактивного элемента. Ввести в схему ключ таким образом, чтобы независимое начальное значение при коммутации было не нулевое.
2. Задаться произвольными параметрами элементов и источников цепи. Сопротивление реактивного элемента на частоте источника должно быть одного порядка с сопротивлениями активных элементов.
3. Найти все неизвестные переходные токи и переходное напряжение на реактивном элементе классическим методом.
4. Построить графики токов и напряжений.
5. Сделать выводы.
6. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

ЗАДАНИЕ 2

Анализ переходного процесса в линейной электрической цепи операторным методом

1. Подготовить схему электрической цепи, состоящую после коммутации из трёх и более контуров, одного и более источников синусоидальной ЭДС и двух реактивных элементов с индуктивным и ёмкостным сопротивлениями. Ввести в схему ключ таким об-

разом, чтобы независимые начальные значения при коммутации были не нулевые.

2. Задаться произвольными параметрами элементов и источников цепи. Сопротивление реактивных элементов на частоте источника должно быть одного порядка с сопротивлениями активных элементов.
3. Найти все неизвестные переходные токи и переходные напряжения на реактивных элементах операторным методом.
4. Построить графики токов и напряжений.
5. Сделать выводы.
6. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

ЗАДАНИЕ 3

Анализ переходного процесса в нелинейной электрической цепи численным методом

1. Подготовить схему электрической цепи, состоящую после коммутации из трёх и более контуров, одного и более источников синусоидальной ЭДС и трёх реактивных элементов с индуктивным и ёмкостным сопротивлениями. Ввести в схему ключ таким образом, чтобы часть независимых начальных значений при коммутации были не нулевые.
2. Один из реактивных элементов считать нелинейным. Характеристику нелинейного элемента задать таблицей координат, предварительно изобразив её на бумаге в виде гладкой кривой. Выполнить аппроксимацию нелинейной характеристики.
3. Найти все неизвестные переходные токи и переходные напряжения на реактивных элементах методом переменных состояния.
4. Построить графики токов и напряжений и фазовые портреты токов или напряжений реактивных элементов.
5. Сделать выводы.
6. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

ЗАДАНИЕ 4

Анализ переходного процесса в линейной импульсной электрической цепи

1. Подготовить периодическую последовательность импульсов с произвольной огибающей и скважностью 2. Описать последовательность импульсов программным путём.
2. Задаться переходной характеристикой четырёхполюсника второго порядка. Длительность переходной характеристики должна быть примерно равна периоду последовательности импульсов.
3. Найти с помощью интеграла наложения напряжение на выходе четырёхполюсника как реакцию на первые два импульса напряжения на его входе.
4. Найти частотным методом напряжение на выходе четырёхполюсника в установившемся режиме.
5. Построить графики напряжений и сравнить их.
6. Сделать выводы.
7. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

ЗАДАНИЕ 5

Анализ переходного процесса в длинной линии

1. Задаться параметрами длинной линии без потерь. К линии подключить согласованный источник синусоидальной ЭДС с произвольной амплитудой и начальной фазой. В качестве нагрузки линии использовать несогласованный активно-реактивный двухполюсник.
2. Составить схемы замещения входной и выходной цепи длинной линии. Выбрать и определить необходимые параметры схем замещения.
3. Выбрать метод и рассчитать переходный процесс в выходной цепи линии.
4. Выполнить анимацию состояния в линии при движении прямых отражённых волн тока и напряжения.
5. Сделать выводы.
6. Оформить отчёт о выполненной задаче по правилам оформления записки к курсовой работе или проекту. Листинги с компьютерными расчётами вынести в приложение.

Библиографический список

1. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов : в 3 т. / К.С. Демирчан [и др.]. – 4-е изд. – СПб. : Питер, 2004. – Т. 1. – 463 с.
2. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов : в 3 т. / К.С. Демирчан [и др.]. – 4-е изд. – СПб. : Питер, 2004. – Т. 2. – 576 с.
3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учеб. для вузов / Л.А. Бессонов. – 11-е изд. – М. : Гардарики, 2007. – 701 с.
4. Сборник задач по теоретическим основам электротехники : учеб. пособие для вузов / Л.А. Бессонов [и др.] ; под общ. ред. Л.А. Бессонова. – 4-е изд. – М. : Высш. шк., 2003. – 528 с.
5. Основы теории электрических цепей : учеб. для вузов / Ю.А. Бычков [и др.]. – 3-е изд. – СПб. : Питер, 2005. – 304 с.
6. Шакурский, В.К. Теоретические основы электротехники : учеб.-метод. пособие. Ч. 1. Анализ установившихся режимов в линейных электрических цепях / В.К. Шакурский ; ТГУ ; каф. «Электро-снабжение и электротехника». – Тольятти : ТГУ, 2007. – 77 с.
7. Шакурский, В.К. Теоретические основы электротехники : учеб.-метод. пособие. Ч. 2. Анализ переходных режимов в линейных электрических цепях / В.К. Шакурский ; ТГУ ; каф. «Электро-снабжение и электротехника». – Тольятти : ТГУ, 2007. – 71 с.
8. Алиев, И.И. Электротехнический справочник / И.И. Алиев. – 4-е изд. – М. : РадиоСофт, 2006. – 383 с.
9. Кирьянов, Д.В. Mathcad 13 / Д.В. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 608 с.

Содержание

Условные обозначения	3
ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.....	7
1.1. Анализ переходных процессов в электрических цепях первого порядка.....	7
1.2. Анализ переходных процессов в электрических цепях второго порядка.....	25
2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.....	44
2.1. Анализ переходных процессов в электрических цепях первого порядка.....	45
2.2. Анализ переходных процессов в электрических цепях второго порядка и выше.....	58
3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ, НЕЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ.....	76
3.1. Анализ переходных процессов в электрических цепях первого порядка.....	77
3.2. Анализ переходных процессов в электрических цепях второго порядка.....	91
4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ, НЕЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.....	114
4.1. Использование законов Кирхгофа для составления системы уравнений относительно переменных состояния.....	115

4.2. Использование метода наложения для составления системы уравнений относительно переменных состояния.....	128
4.3. Анализ переходных процессов в нелинейных электрических цепях.....	138
4.4. Анализ переходных процессов в параметрических электрических цепях.....	154
5. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ИМПУЛЬСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	159
5.1. Использование интеграла наложения.....	159
5.2. Использование частотного метода.....	168
6. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	177
6.1. Использование схем замещения входной цепи	177
6.2. Использование схем замещения выходной цепи	186
6.3. Использование частотного метода	200
7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ.....	205
Библиографический список.....	208

Учебное издание

Шакурский Виктор Константинович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

В двух частях

Часть 2

Аналитические и численные методы анализа
переходных процессов в линейных, нелинейных
и параметрических электрических цепях

Редактор Е.Ю. Жданова
Технический редактор З.М. Малявина
Вёрстка: Л.В. Сызганцева
Дизайн обложки: Г.В. Карасева

Подписано в печать 27.11.2013. Формат 60×84/16.

Печать оперативная. Усл. п. л. 12,26.

Тираж 100 экз. Заказ № 1-15-13.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14

