

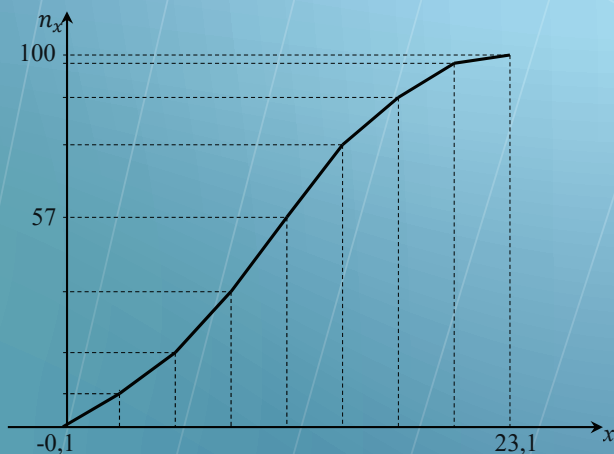


тольяттинский
государственный
университет

О.А. Кузнецова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие



Тольятти
Издательство ТГУ
2025

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет

О.А. Кузнецова

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.
СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ**

Учебно-методическое пособие

Тольятти
Издательство ТГУ
2025

УДК 519.24(075.8)

ББК 22.17я73

К891

Рецензенты:

д-р экон. наук, канд. пед. наук, профессор Высшей школы интеллектуальных систем и кибертехнологий Поволжского государственного университета сервиса *Л.В. Глухова*;
канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета *Е.С. Павлова*.

К891 Кузнецова, О.А. Математическое моделирование. Специальные разделы высшей математики : учебно-методическое пособие / О.А. Кузнецова. – Тольятти : Издательство ТГУ, 2025. – 116 с. – ISBN 978-5-8259-1744-3.

В учебно-методическом пособии структурированы методический и методологический аппараты, позволяющие изучать теоретическое содержание дисциплины, решать практические задачи, осуществлять мониторинг сформированности требуемых компетенций. Содержание издания включает материалы для контроля знаний, задания для самостоятельной работы с методическими рекомендациями по их выполнению.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.04.01 «Строительство» очной, заочной форм обучения (в том числе с использованием дистанционной образовательной технологии) высшего образования.

УДК 519.24(075.8)

ББК 22.17я73

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

ISBN 978-5-8259-1744-3

© Кузнецова О.А., 2025

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский

государственный университет», 2025

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 08.04.01 «Строительство» учебный курс «Математическое моделирование. Специальные разделы высшей математики» включен в учебные планы подготовки магистров как обязательная дисциплина, она является базовой и преподается во всех ведущих университетах мира.

Учебно-методическое пособие предназначено для изучения дисциплины «Математическое моделирование. Специальные разделы высшей математики». Цель изучения дисциплины – овладение теоретическими основами и практическими навыками математического моделирования, которые позволяют выбирать наилучшие результаты при анализе данных, полученных в ходе эмпирических наблюдений.

Задачи освоения дисциплины:

1. Формирование личности, развитие интеллекта и способностей к логическому мышлению, развитие умения оперировать абстрактными объектами.

2. Освоение математических методов, необходимых при моделировании процессов и явлений, поиске оптимальных решений, выборе рациональных способов и их реализации.

3. Выражение количественных и качественных соотношений между элементами технических объектов реального мира.

Дисциплины, на освоении которых базируется данный учебный курс: «Линейная алгебра», «Высшая математика», «Теория вероятностей и математическая статистика», также учащимся понадобится знание основ современных компьютерных технологий.

В результате изучения дисциплины «Математическое моделирование. Специальные разделы высшей математики» у студентов должна быть сформирована компетенция «способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ, математического аппарата фундаментальных наук» (ОПК-1), включающая следующие индикаторы достижения:

– ОПК-1.1. Выбор фундаментальных законов, описывающих изучаемый процесс или явление;

– ОПК-1.2. Составление математической модели, описывающей изучаемый процесс или явление, выбор и обоснование граничных и начальных условий;

– ОПК-1.3. Оценка адекватности результатов моделирования, формулирование предложений по использованию математической модели для решения задач профессиональной деятельности;

– ОПК-1.4. Применение типовых задач теории оптимизации в профессиональной деятельности.

В процессе изучения дисциплины обучающиеся должны

– знать: законы распределения, наиболее распространенные в технике и строительстве; основы вероятностных методов анализа и моделирования систем в строительстве; методы оценки результатов моделирования, прогнозирования и принятия статистических решений в строительстве; основные модели оптимизации систем в строительстве, принципы их построения;

– уметь: проводить статистическую оценку методов распределения случайных величин в строительстве; строить математические модели на основе эмпирических данных в строительстве; проводить проверку статистических гипотез, использовать методы и модели прогнозирования в строительстве;

– владеть: навыками планирования эксперимента в строительстве, обработки статистической информации в строительстве; математическими методами анализа конкретных данных в строительстве; навыками оценки результатов эксперимента, восстановления зависимостей, классификации объектов и признаков в строительстве; основными методами оптимизации систем в строительстве, навыками анализа и оценки результатов моделирования при решении задач оптимизации систем в строительстве.

Учебный курс включает выполнение шести практических работ, заданий для самостоятельной работы по вариантам, а также написание реферата и презентацию доклада по теме реферата. По практическим работам и заданиям для самостоятельной работы выставляется оценка «зачтено» в случае, если студент выполнил не менее 70 % от общего объема задания, в противном случае выставляется

оценка «не зачтено». В качестве итоговой аттестации по учебному курсу предусмотрен экзамен, который проводится в устной форме по билетам, содержащим два теоретических вопроса и задачу. К экзамену допускаются студенты, получившие зачет по практическим работам, заданиям для самостоятельной работы и за реферат. Оценка «отлично» выставляется студенту, если он ответил на теоретические вопросы билета и правильно решил задачу; оценка «хорошо», если студент ответил на теоретические вопросы билета, но решил задачу с ошибками или недочетами; оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он ответил только на один вопрос билета и правильно решил задачу; оценка «неудовлетворительно», если студент не ответил на вопросы билета и не решил задачу.

Учебно-методическое пособие содержит материал по изучению дисциплины, разделенный на пять тем, каждая из которых включает: краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач, варианты опытных данных для индивидуального выполнения практических заданий, задания для самостоятельной работы, список тем рефератов и требования к их оформлению, вопросы к экзамену, список рекомендуемой литературы. В конце пособия приведен глоссарий с основными терминами и определениями, а также добавлены приложения со статистическими таблицами и распределениями, необходимыми при выполнении практических заданий.

Каждый студент должен последовательно изучить учебный материал, акцентировать внимание на основных понятиях и терминах, ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце каждого занятия. Необходимо решить практические задания по каждой теме в соответствии с вариантом, согласованным с преподавателем. В результате студент должен научиться решать задачи, аналогичные разобранным в учебно-методическом пособии, выполнять и презентовать реферат.

Тема 1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Форма проведения занятия — практическая работа.

Вопросы для обсуждения

1. Первичная обработка экспериментальных данных.
2. Построение статистического ряда по результатам наблюдений.
3. Оценка пригодности статистического ряда для дальнейшего моделирования изучаемой случайной величины.

Методические указания по проведению занятия

Практическое задание выполняется по графику, разработанному кафедрой. Прежде чем приступить к решению задачи, следует изучить методику ее выполнения, ответить на контрольные вопросы. Задания для практической работы выполняются по вариантам, согласованным с преподавателем. При выполнении задания следует придерживаться формы, предложенной в примере. Во время защиты необходимо: уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять выполнение задания. При сдаче экзамена могут быть предложены вопросы, основанные на материале типового расчета практической работы.

Методические материалы к занятию

1.1. Основные теоретические сведения

Как известно, теория вероятностей изучает математические модели случайных явлений, при этом сама математическая модель считается заданной. Так, например, если изучается некоторое случайное событие A , то известно $P(A)$. Если же речь идет о случайной величине X , то известен закон распределения вероятностей в какой-либо форме и, как следствие, числовые характеристики исследуемой случайной величины. В практических задачах эти характеристики, как правило, неизвестны, но имеются некоторые экспериментальные данные о событии или случайной величине. Требуется на основании этих данных построить подходящую вероятностную модель изучаемого явления, то есть приближенно оце-

нить неизвестные закон распределения и числовые характеристики исследуемой случайной величины на основе экспериментальных данных. Это и является задачей математической статистики.

Математической статистикой называется наука, занимающаяся методами обработки экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений над случайными явлениями. При этом решаются следующие в порядке сложности и важности задачи:

- описание явлений, то есть упорядочение поступившего статистического материала, представление его в наиболее удобном для обозрения и анализа виде (таблицы, графики);

- анализ и прогноз, то есть приближенная оценка на основании статистических данных интересующих нас характеристик, например математического ожидания и дисперсии наблюдаемой случайной величины, и определение погрешности этих оценок;

- выработка оптимальных решений, то есть, например, определение числа опытов n , достаточного для того, чтобы ошибка от замены теоретических числовых характеристик их экспериментальными оценками была не более заданной. В связи с этим возникает задача проверки правдоподобия гипотез о параметрах распределения и о законах распределения случайной величины, решением которой является возможность сделать один из выводов:

— отбросить гипотезу как противоречащую опытным данным;

— принять гипотезу, считать ее приемлемой.

Математическая статистика, опираясь на размышляющий, оценивающий, сопоставляющий человеческий разум, помогает экспериментатору лучше разобраться в опытных данных, полученных в результате наблюдений над случайными явлениями; оценить, значимы или не значимы наблюдаемые факты; принять или отбросить те или иные гипотезы о природе случайных явлений.

Полный набор всех возможных N значений дискретной случайной величины X называют *генеральной совокупностью*. Однако в реальных условиях нельзя рассчитывать на такую подробную информацию. Часть генеральной совокупности из n элементов, отобранных случайным образом, называется *выборкой*, при этом число n называют *объемом выборки*. Различают выборки малого объема ($n < 30$) и большого объема ($n > 30$).

В начале на основе результатов эксперимента строят *простой статистический ряд* – таблицу, состоящую из двух строк, в первой – порядковый номер измерения, во второй – его результат:

i	1	2	...	n
x_i	x_1	x_2	...	x_n

Для визуальной оценки распределения случайной величины производят группировку данных. Вначале x_k располагают в порядке возрастания, затем интервал наблюдаемых значений случайной величины разбивают на k последовательных непересекающихся частичных интервалов $\tilde{x}_0 \div \tilde{x}_1, \tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_j \div \tilde{x}_{j+1}, \dots, \tilde{x}_{k-1} \div \tilde{x}_k$, далее подсчитывают числа n_j – количество x_k , попавших в j -й интервал. Полученный таким образом *группированный статистический ряд* отражают таблицами вида

$\tilde{x}_j \div \tilde{x}_{j+1}$	$\tilde{x}_0 \div \tilde{x}_1$	$\tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2$...	$\tilde{x}_{k-1} \div \tilde{x}_k$
n_j	n_1	n_2	...	n_k

или, подсчитывая частоты $p_j = \frac{n_j}{n}$,

$\tilde{x}_j \div \tilde{x}_{j+1}$	$\tilde{x}_0 \div \tilde{x}_1$	$\tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2$...	$\tilde{x}_{k-1} \div \tilde{x}_k$
p_j	p_1	p_2	...	p_k

или, определяя середину j -го интервала

$$\bar{x}_j = \tilde{x}_j + 0,5\Delta_j,$$

где $\Delta_j = \tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j$ – длина j -го интервала, получим ряд распределения в виде

\bar{x}_j	\bar{x}_1	\bar{x}_2	...	\bar{x}_k
p_j	p_1	p_2	...	p_k

При этом частоты p_j удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Деля частоту p_j на длину соответствующего интервала Δ_j , получим таблицу плотностей частоты f_j . Откладывая по оси абсцисс интервалы $\tilde{x}_j \div \tilde{x}_{j+1}$ и надстраивая на каждом интервале, как на основании, пря-

моугольник высотой f_j , то есть площадью p_j , получим ступенчатую фигуру – **гистограмму частот** – статистический аналог кривой плотности распределения. Еще более точной оценкой кривой плотности распределения является **полигон частот** – ломаная, отрезки которой соединяют точки (\bar{x}_j, f_j) . В итоге ряд распределения можно представить таблицей вида

\bar{x}_j	\bar{x}_1	\bar{x}_2	...	\bar{x}_k
f_j	f_1	f_2	...	f_k

Иногда обходятся без группировки, но, располагая x_i в порядке возрастания, затем подсчитывают n_i – число повторов каждого значения случайной величины x_i – и определяют в итоге частоту

$$p_i = \frac{n_i}{n},$$

что приводит к ряду распределения вида

x_i	x_1	x_2	...	x_m
p_i	p_1	p_2	...	p_m

Здесь m – число разных значений наблюдаемой случайной величины.

Другим способом графического представления эмпирического закона распределения является эмпирическая функция распределения – оценка функции распределения дискретной случайной величины X , вычисляемая по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

и являющаяся разрывной ступенчатой, равной нулю левее наименьшего наблюдаемого значения, испытывающей скачок величиной p_i при переходе через левую границу i -го интервала и в итоге достигающей единицы правее наибольшего наблюдаемого значения.

1.2. Типовые примеры и алгоритмы их решения

Рассмотрим в качестве конкретных данных следующие значения случайной величины X – уровня деформации железобетонных конструкций, полученные в результате 100 измерений.

10	10	7	7	9	11	6	4	5	4
9	10	13	15	12	15	10	12	14	14
12	14	13	13	18	13	13	11	23	18
9	11	10	11	3	2	8	10	11	11
9	6	11	12	13	12	16	12	17	16
16	17	9	10	12	12	7	8	15	20
7	6	18	19	5	5	16	17	1	0
13	15	0	5	15	14	1	0	19	21
5	2	19	19	7	5	21	20	10	3
7	7	7	3	7	6	5	1	7	0

Построение интервального ряда распределения

Для удобства сначала построим вариационный ряд распределения (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Вариационный ряд распределения

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	3	3	2	3	2	7	5	10	2	5	8	7
x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	23	Σ
n_i	8	8	4	4	4	3	3	4	2	2	1	100

Первая строка ряда состоит из значений случайной величины, расположенных в порядке возрастания, а вторая – из частот n_i появления соответствующего значения. Очень трудно сразу без ошибок правильно сосчитать частоты n_i , поэтому рекомендуется упорядочить все 100 значений и, после подсчета n_i , выполнить контроль: $\Sigma n_i = 100$.

Первый способ построения интервального ряда (упрощенный).

Возьмем количество частичных интервалов $l = 10$. Обычно для 100 наблюдений берут $l = 7 \div 10$. Длина частичного интервала

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l}.$$

В нашем случае $h = \frac{23-0}{10} = 2,3$. Далее принимают $\alpha_1 = x_{\min} = 0$, $\alpha_{i+1} = \alpha_i + h$, где $i = 1, 2, \dots, l-1$, α_i – границы интервалов, n_i – число значений случайной величины, попавших в i -й интервал (частота). Для расчета используется полученный вариационный ряд (табл. 1.1).

После произведенных расчетов получим следующий интервальный ряд (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Интервальный ряд для числа интервалов $l = 10$

$(\alpha_i; \alpha_{i+1}]$	0÷2,3	2,3÷4,6	4,6÷6,9	6,9÷9,2	9,2÷11,5
n_i	8	5	12	17	15
$(\alpha_i; \alpha_{i+1}]$	11,5÷13,8	13,8÷16,1	16,1÷18,4	18,4÷20,7	20,7÷23
n_i	16	12	6	6	3

Второй способ построения интервального ряда. Он включает несколько этапов.

Выбор количества интервалов l

Значение l влияет на форму эмпирических кривых. При большом количестве интервалов эмпирическая кривая может оказаться многовершинной, иметь нехарактерные для нее случайные колебания (рис. 1.1), так как в частичные интервалы попадает мало значений. При малом значении l могут быть потеряны характерные особенности распределения. От l зависит объем вычислительных работ, результат проверки гипотезы о законе распределения случайной величины. Следовательно, l надо выбирать таким образом, чтобы оно способствовало выявлению основных черт распределения и сглаживанию случайных колебаний (назовем такой ряд удачным).

Рекомендации относительно выбора l различны. Например, можно воспользоваться правилом Стерджеса:

$$l = 1 + 3,3 \lg n, \text{ если } n \leq 100;$$

$$l = 5 \lg n, \text{ если } n > 100,$$

где n – число наблюдений (объем выборки).

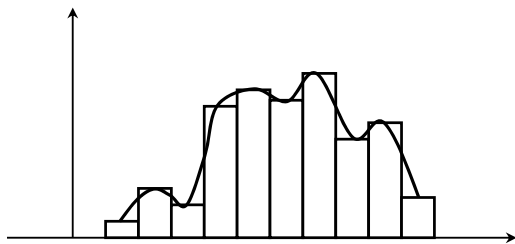


Рис. 1.1. Гистограмма многовершинной эмпирической кривой

Определение ширины частичного интервала h

Чаще всего получается удачный статистический ряд распределения, если стремиться к тому, чтобы границы частичных интервалов не совпадали с наблюдаемыми значениями. Этого добиваются за счет незначительного расширения интервала наблюдаемых значений, для чего $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l}$ округляют с избытком до наиболее удобного числа. Например, если наблюдаемые значения – целые числа, то округляют до десятых. В любом случае ширина интервала не должна быть меньше цены деления измерительного прибора. Геометрическая интерпретация данного правила представлена на рис. 1.2.

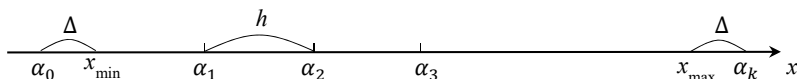


Рис. 1.2. Геометрическая интерпретация цены деления

Определение величины смещения:

$$\Delta = \frac{h \cdot l - (x_{\max} - x_{\min})}{2}.$$

Определение границ частичных интервалов:

$$\alpha_0 = x_{\min} - \Delta, \alpha_{i+1} = \alpha_i + h.$$

Если при смещении крайних границ не удастся избежать совпадения измеренных значений с границами промежуточных интервалов, то в таких случаях следует условиться, к какому из интервалов, левому или правому, отнести эти значения. Довольно часто рекомендуется значения, совпадающие с границами интервалов, делить пополам, то есть половину таких значений относить к левому, а половину – к правому интервалу. Чтобы не иметь дело с дробями при

нечетном количестве значений, совпадающих с границей интервалов, следует условиться, к какому интервалу, левому или правому, будут отнесены лишние значения (принято относить к правому).

В соответствии с указанными рекомендациями построим удачный интервальный ряд.

Определяем число интервалов по правилу Стерджеса:

$$n = 100; l = 1 + 3,3 \lg n = 1 + 3,3 \cdot 2 = 8; l = 8.$$

Определяем шаг

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l} = \frac{23 - 0}{8} = 2,875.$$

Округляя с избытком до наиболее удобного числа, получим $h = 2,9$.

Находим величину смещения Δ :

$$\Delta = \frac{h \cdot l - (x_{\max} - x_{\min})}{2} = \frac{2,9 \cdot 8 - (23 - 0)}{2} = 0,1.$$

Определяем границы частичных интервалов:

$$\alpha_0 = x_{\min} - \Delta = 0 - 0,1 = -0,1; \alpha_1 = \alpha_0 + h = -0,1 + 2,9 = 2,8;$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + h = 2,8 + 2,9 = 5,7 \text{ и т. д.}$$

Получим следующий интервальный ряд со смещенными границами (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Интервальный ряд со смещением границ

$(\alpha_i; \alpha_{i+1}]$	$-0,1 \div 2,8$	$2,8 \div 5,7$	$5,7 \div 8,6$	$8,6 \div 11,5$
n_i	8	12	17	20
$(\alpha_i; \alpha_{i+1}]$	$11,5 \div 14,4$	$14,4 \div 17,3$	$17,3 \div 20,2$	$20,2 \div 23,1$
n_i	20	11	9	3

$$\text{Контроль: } \alpha_8 = x_{\max} + \Delta = 23 + 0,1 = 23,1; \sum n_i = 100.$$

Построение эмпирических кривых

Построение гистограммы. Гистограмма – оценка графика плотности вероятностей $f(x)$. Строится по данным интервального ряда. В дальнейшем в качестве исходных данных будем пользоваться полученным удачным интервальным рядом (табл. 1.3).

Исходя из вероятностного смысла $f(x)$, имеем:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x; x + \Delta x)}{\Delta x} \approx \frac{\omega(x; x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{n_i}{n \cdot h} \sim n_i,$$

где $P(x; x + \Delta x)$ – вероятность, $\omega(x; x + \Delta x)$ – относительная частота попадания случайной величины X в интервал $(\alpha_i; \alpha_{i+1}]$, а в нашем случае в частичный интервал.

Фигура, состоящая из прямоугольников с основанием, равным длине частичного интервала, и с высотой $\frac{n_i}{h}$, называется гистограммой частот. При построении кривых распределения (гистограммы, кумуляты) рекомендуется пользоваться «правилом золотого сечения», по которому высота чертежа должна составлять $\frac{5}{8}$ основания (рис. 1.3).

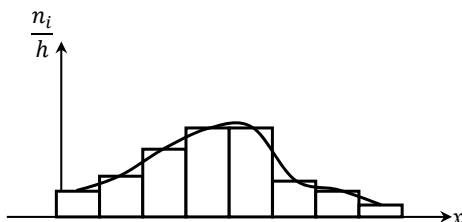


Рис. 1.3. Гистограмма интервального ряда

*Построение кумуляты, эмпирической кривой
функции распределения*

Кумулята и эмпирическая функция распределения – оценки графика функции распределения $F(x)$. Исходя из определения получим:

$$F(x) = P(X < x) \approx \omega(X < x) = \frac{n_x}{n} \sim n_x,$$

где $P(X < x)$, $\omega(X < x)$, n_x – вероятность, относительная частота (накопленная), частота попадания случайной величины X в область левее точки x (или n_x – количество таких значений).

В качестве данных используем интервальный ряд. За точку x берем граничные точки интервального ряда и находим для них соответствующие значения n_x . Для удобства построим таблицу значений n_x (табл. 1.4).

Значения накопленных частот

x	-0,1	2,8	5,7	2,6	11,5	14,4	17,3	20,2	23,1
n_x	0	8	20	37	57	77	88	97	100

На координатной плоскости строим точки с координатами $(x; n_x)$ и соединяем их отрезками прямых, получим ломаную линию, которая называется кумулятой (рис. 1.4).

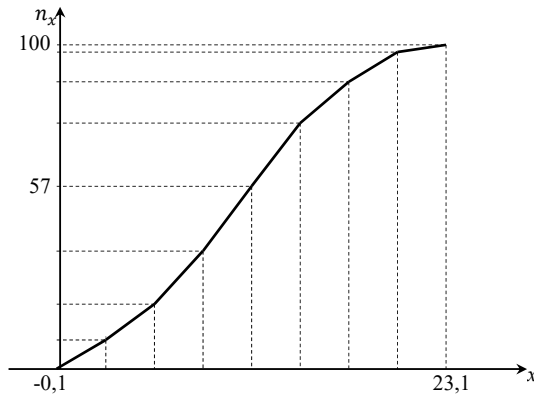


Рис. 1.4. Кумулята эмпирического ряда распределения

При построении эмпирической функции распределения за точку x берем середину частичного интервала — представитель интервала x_i^* . Считаем, что точка $x = x_i^*$ появилась n_i раз. Тогда можно определить соответствующие n_x . Результаты запишем в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Значения частот для эмпирической функции распределения

	1,35	4,25	7,15	10,05	12,95	15,85	18,75	21,65
n_i	8	12	17	20	20	11	9	3
n_x	8	20	37	57	77	88	97	100

Эмпирическая функция распределения строится аналогично функции распределения дискретной случайной величины. График эмпирической функции распределения $\tilde{F}(x)$ приведен на рис. 1.5.

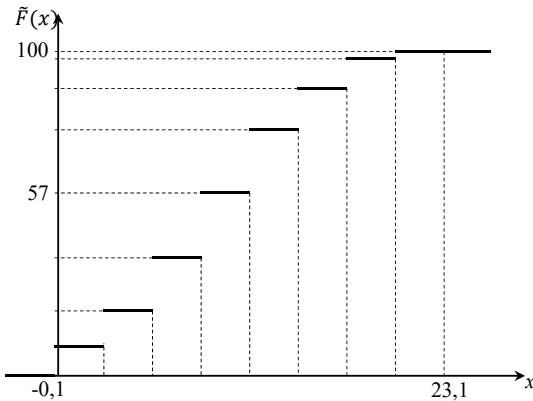


Рис. 1.5. График эмпирической функции распределения

1.3. Индивидуальные задания по теме

Проведены 100 независимых измерений непрерывной случайной величины X , результаты которых приведены ниже. Имея в виду, что грубые ошибки измерений исключены, выполнить статистическую обработку экспериментальных данных, то есть:

- построить статистический интервальный ряд распределения;
- по полученному интервальному ряду построить эмпирические кривые: гистограмму, кумуляту (или эмпирическую функцию распределения);
- определить точечные оценки математического ожидания, среднего квадратического отклонения, коэффициента асимметрии и эксцесса;
- построить интервальные ряды и оценки числовых характеристик, взяв количество частичных интервалов $l = 7, 8, 10, 12$. По полученным данным построить гистограммы и найти значение l , при котором получается наиболее удачный интервальный ряд.

Варианты с опытными данными

Вариант 1

2,1	1,9	2,6	2,2	2,4	2,5	2,5	2,1	2,5	2,6
1,8	2,4	2,6	2,4	2,4	2,4	2,5	2,6	2,2	2,5
2,4	2,5	2,4	2,4	2,6	2,3	2,6	2,9	2,4	2,6
2,6	2,4	2,6	2,4	2,6	2,9	2,4	2,5	2,7	2,2
2,5	2,6	2,7	3,0	2,4	2,4	2,5	2,7	2,3	2,4
2,6	2,7	2,3	2,4	2,6	2,7	2,4	2,3	2,8	2,3
2,2	2,5	2,4	2,5	2,5	2,4	2,5	2,3	2,7	2,5
2,3	2,4	2,5	2,5	2,8	3,2	2,4	2,3	2,7	2,4
2,5	2,6	2,5	2,6	2,6	2,4	2,7	2,2	2,4	2,5
2,3	2,2	2,2	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,7	2,9

Вариант 2

2,8	2,4	2,5	2,6	2,1	2,3	2,3	2,8	2,4	2,8
2,7	2,5	2,4	2,1	2,6	2,3	2,6	2,4	2,5	2,3
2,4	2,5	2,6	2,3	2,5	2,6	2,5	2,3	2,3	2,9
2,4	2,4	1,8	1,7	2,3	2,5	2,3	2,7	2,7	2,7
2,7	2,4	2,4	2,4	2,8	2,7	2,8	2,0	2,7	3,0
2,5	3,2	2,6	2,1	2,5	2,5	3,0	2,4	2,4	2,3
2,4	2,3	2,6	2,4	2,4	2,7	2,0	3,4	2,3	2,2
2,6	2,8	2,7	2,6	2,5	2,8	2,2	2,5	2,4	2,7
2,6	2,7	2,6	2,1	2,5	2,1	2,4	2,8	2,8	2,2
1,7	3,6	2,4	2,7	2,5	2,7	3,6	2,9	2,9	2,6

Вариант 3

1,4	1,8	2,0	1,8	1,6	1,9	1,8	2,3	1,7	1,8
1,8	1,8	2,5	1,7	1,8	2,2	1,8	1,6	1,6	2,1
1,9	1,7	1,6	1,6	1,8	1,7	2,2	1,9	1,7	1,7
1,8	1,9	1,6	1,8	2,2	1,7	1,7	1,4	2,1	1,7
1,8	1,4	1,6	1,8	1,6	1,4	1,9	1,9	2,0	1,8
1,9	2,6	1,4	1,7	1,6	2,0	1,3	1,7	1,7	2,1
1,4	1,5	1,8	2,0	1,8	1,6	1,9	1,9	1,8	1,7
2,6	1,7	1,7	2,5	2,0	1,9	1,5	1,8	2,1	2,0
1,6	2,2	2,0	1,8	1,8	2,0	1,9	2,1	2,5	1,8
1,7	1,35	1,8	1,8	1,9	1,5	2,1	1,6	2,0	1,5

Вариант 4

1,8	2,0	2,1	2,0	2,1	1,9	2,1	2,8	1,5	1,7
1,7	2,3	1,5	1,6	2,0	2,3	1,5	1,7	1,9	2,2
2,0	2,0	2,0	2,1	1,9	2,7	2,8	1,8	1,7	2,0
2,3	2,0	1,6	2,3	2,3	2,2	1,7	2,2	2,2	2,2
1,9	1,9	2,1	2,2	2,7	1,9	1,8	1,7	2,0	1,9
2,0	1,7	2,3	1,7	2,2	1,6	2,2	2,0	1,9	2,2
1,9	2,4	2,2	2,0	1,9	2,0	1,7	2,0	1,9	2,1
1,7	1,7	1,7	2,3	1,6	1,9	2,0	1,9	2,2	2,1
2,4	2,0	2,0	1,8	2,0	2,1	2,0	1,9	2,2	1,7
1,7	1,8	2,3	2,0	1,9	1,7	1,8	1,9	2,1	1,6

Вариант 5

1,5	2,7	1,5	3,6	1,4	3,6	2,3	4,3	1,3	2,7
1,6	4,2	1,3	3,1	1,4	4,4	1,4	3,8	1,7	3,7
1,9	4,0	1,4	4,0	1,1	4,2	1,4	3,1	1,7	3,7
1,6	3,6	1,6	4,0	1,5	4,4	1,4	3,3	1,4	3,5
1,4	3,2	1,6	4,3	1,4	3,7	1,3	3,2	1,3	2,5
1,2	3,2	1,3	3,0	1,8	4,5	1,6	4,1	1,4	3,8
1,6	4,0	1,6	4,5	1,1	1,1	1,7	4,1	1,1	1,1
1,3	4,3	1,1	1,1	1,2	3,4	1,1	1,0	1,5	3,4
1,0	1,0	1,5	3,8	1,5	1,3	1,4	3,0	1,4	1,3
1,2	4,4	1,3	1,2	1,4	3,5	1,4	3,3	1,3	3,5

Вариант 6

1,4	3,6	1,6	3,4	1,3	1,6	3,1	4,4	1,7	3,6
1,4	3,5	1,3	3,7	1,2	3,2	1,4	3,1	1,1	1,1
1,5	4,4	1,1	1,0	1,6	4,3	1,4	1,3	1,7	3,7
1,2	3,2	1,4	3,2	1,7	3,6	1,3	3,5	2,9	3,7
1,3	4,3	3,2	8,2	1,5	3,8	2,4	6,7	1,6	4,3
1,3	3,3	1,6	3,6	1,5	4,6	1,8	2,6	1,2	3,0
1,4	1,6	1,6	3,6	1,4	1,5	1,6	3,6	1,6	2,3
1,7	3,1	1,3	1,6	1,6	3,3	1,7	1,3	1,7	4,2
2,0	1,9	1,2	4,2	1,7	1,9	1,3	3,2	1,5	1,8
1,3	3,1	1,4	3,3	1,2	4,0	1,8	4,3	1,4	3,2

Вариант 7

6	13	15	13	8	11	18	10	15	6
12	10	12	9	10	16	24	4	14	10
11	13	18	3	4	23	19	6	6	12
12	8	11	14	17	10	12	13	15	9
9	10	11	12	6	13	6	20	4	21
12	11	14	14	11	11	9	16	6	19
8	17	8	14	12	14	11	9	14	8
7	21	12	12	13	11	18	3	8	12
22	6	11	9	19	9	11	16	18	7
8	12	15	10	11	11	18	4	12	11

Вариант 8

8	20	15	9	11	13	7	13	13	10
12	15	16	10	10	14	15	9	13	9
14	11	17	8	10	15	13	8	17	12
11	10	23	10	10	14	19	10	14	9
14	7	6	13	19	13	5	13	8	20
4	13	15	11	2	23	14	7	4	23
20	7	7	11	13	8	13	7	12	15
20	6	4	29	22	6	11	16	24	4
12	19	22	6	14	6	22	3	17	7
25	1	9	15	18	17	11	13	18	5

Вариант 9

12	8	9	8	10	11	11	10	8	8
15	15	13	11	7	6	16	14	12	7
15	9	10	6	14	12	13	11	10	9
16	14	17	14	14	13	23	14	2	3
19	16	13	12	14	8	6	6	9	7
11	10	10	8	3	3	14	14	12	8
14	12	10	7	20	14	4	3	13	11
14	13	12	11	2	2	10	10	8	7
11	10	15	14	12	9	12	10	14	10
24	18	17	14	11	10	10	10	4	3

Вариант 10

6	6	12	11	10	7	17	20	12	9
15	12	9	6	11	9	6	4	6	5
3	4	13	23	14	13	12	8	9	9
11	11	8	7	6	5	12	10	10	10
14	13	10	10	12	10	10	7	18	17
13	10	22	19	17	13	19	13	23	21
18	16	23	19	15	14	9	11	18	15
11	10	15	13	13	13	18	13	13	11
12	12	19	8	10	9	12	7	14	13
13	10	18	13	13	11	9	6	10	13

Вариант 11

10	8	15	10	25	11	17	16	15	9
19	21	3	0	13	11	9	6	6	4
27	17	5	3	19	12	18	15	40	13
15	13	5	3	16	14	13	10	13	12
15	10	14	6	17	4	10	7	8	6
6	21	5	3	11	10	14	6	15	12
9	8	8	4	10	8	13	7	12	11
11	6	16	12	3	0	7	5	7	2
11	2	21	15	13	2	13	6	17	8
17	9	19	9	15	9	15	9	10	7

Вариант 12

9	3	17	4	14	7	19	15	13	6
15	7	7	5	13	10	2	1	7	5
8	5	16	12	10	4	11	6	15	6
17	15	11	6	9	17	16	8	7	4
13	8	10	8	27	17	15	10	10	8
14	7	19	11	13	7	7	4	17	12
40	15	1	0	15	13	10	9	10	6
4	1	19	16	7	10	8	16	6	14
16	11	8	4	5	3	19	4	7	3
16	13	10	2	17	10	13	6	19	11

Вариант 13

24	36	38	36	30	27	36	40	24	40
39	36	26	33	32	39	31	33	25	32
35	40	27	31	34	39	32	35	33	42
36	24	34	33	30	34	28	38	37	43
28	29	27	36	31	34	28	44	23	40
27	40	31	33	36	33	38	39	37	34
32	29	25	37	39	30	32	29	35	29
24	43	29	28	27	34	22	38	32	35
33	26	26	41	24	34	36	40	35	26
24	43	29	30	36	35	31	36	30	38

Вариант 14

29	30	28	38	32	35	29	45	23	42
28	41	32	34	24	34	40	41	36	40
33	30	25	38	41	31	33	30	36	30
20	40	30	40	29	35	34	33	34	36
34	27	37	43	26	26	38	42	38	27
35	44	30	31	37	37	32	37	31	40
39	40	30	31	38	42	34	36	40	37
23	44	32	40	33	35	36	33	42	43
28	32	35	32	33	37	42	32	38	25
38	30	31	35	30	41	38	45	35	39

Вариант 15

7	6	12	16	17	14	10	11	10	11
9	8	7	4	8	14	5	7	14	21
6	0	0	2	13	12	11	11	10	9
4	8	0	8	8	9	8	11	10	12
12	9	13	13	18	13	10	10	9	9
12	15	0	10	8	7	11	16	11	12
10	10	8	9	5	3	9	8	11	14
20	19	11	11	11	10	10	10	10	9
5	5	13	12	7	5	15	13	4	1
10	10	6	10	16	6	6	9	7	9

Вариант 16

28	58	32	61	23	52	30	65	29	55
31	53	25	73	32	51	27	72	26	47
30	56	25	51	36	62	28	57	33	51
22	70	28	56	29	58	31	61	35	69
24	51	29	65	27	63	34	52	30	42
32	59	26	47	26	62	32	41	30	46
20	62	31	62	24	59	23	52	20	48
32	57	31	54	26	70	30	44	28	66
24	49	35	72	28	46	33	57	22	65
36	61	24	64	29	50	28	59	30	56

Вариант 17

25	61	31	66	29	55	36	31	32	37
33	73	27	49	27	64	36	52	36	48
24	49	32	68	25	63	24	55	25	62
34	57	32	48	28	73	31	48	30	69
24	46	36	13	29	51	35	61	23	59
37	69	26	61	30	51	29	64	34	61
30	64	26	69	31	69	30	59	32	55
34	72	33	53	29	51	28	58	35	53
28	58	35	53	27	44	26	51	30	59
26	67	22	72	26	66	30	61	34	38

Вариант 18

8	17	16	10	16	16	6	14	15	9
14	14	10	13	17	11	13	20	10	13
16	9	13	19	10	18	14	7	14	15
9	16	17	11	17	17	9	12	25	11
15	6	12	15	8	11	0	3	9	12
7	11	14	7	9	15	14	10	20	7
11	16	10	10	17	15	10	17	14	14
11	14	13	12	14	13	11	16	16	10
15	15	8	14	14	10	16	16	10	12
23	9	16	10	16	20	9	16	9	15

Вариант 19

2,3	1,9	3,2	2,5	2,3	2,2	2,8	2,8	1,9	2,4
2,9	2,1	2,1	3,1	2,6	2,5	2,3	2,1	2,7	2,7
3,0	2,8	2,1	2,3	2,4	2,6	2,5	2,8	2,7	2,3
2,7	2,1	2,7	2,4	2,3	2,1	2,3	1,4	2,8	2,1
2,4	2,3	2,1	2,6	2,0	2,9	2,6	2,4	2,6	2,8
2,8	2,4	2,9	2,7	2,6	2,0	2,9	2,6	2,4	2,6
2,8	2,6	2,0	3,1	2,2	2,1	2,2	2,7	2,6	2,5
2,6	2,9	2,6	2,3	3,1	3,0	2,6	2,5	2,6	2,8
2,6	2,3	3,1	2,9	2,1	2,5	2,7	2,4	2,5	3,0
2,9	2,3	2,3	2,8	2,9	2,3	2,5	2,5	2,9	2,4

Вариант 20

2,3	2,5	2,2	3,0	2,5	3,1	2,2	2,7	2,0	2,6
2,2	2,4	2,6	3,2	2,9	2,6	3,1	3,0	2,8	2,1
2,6	2,4	2,4	2,5	3,2	2,8	2,6	2,7	3,0	2,8
2,1	3,1	2,3	2,2	2,7	2,9	2,7	2,8	3,2	3,2
2,7	2,5	2,8	2,7	2,7	3,3	3,0	2,7	2,4	3,0
3,2	2,6	2,6	3,0	2,6	2,7	2,9	2,6	2,7	3,2
3,0	2,3	2,1	2,7	2,7	2,6	2,7	3,1	2,9	2,9
3,3	3,3	2,5	2,6	2,7	3,1	2,9	2,9	3,3	3,3
2,3	2,5	2,7	2,9	2,6	3,0	3,3	2,9	2,9	2,2
3,1	2,5	2,4	2,2	2,5	1,9	3,0	2,2	2,8	1,9

Вариант 21

2,5	2,7	2,5	4,6	2,4	4,6	3,3	5,3	2,3	2,7
2,6	5,2	2,3	4,1	2,4	5,5	2,4	4,8	2,7	4,7
2,9	5,0	2,4	5,0	2,1	5,2	2,4	4,1	2,7	4,7
2,6	4,6	2,8	5,0	2,5	5,4	2,4	4,3	2,4	4,3
2,4	4,2	2,6	5,3	2,4	4,7	2,3	4,2	2,3	3,5
2,2	4,2	2,3	4,5	2,3	4,0	2,8	5,5	2,6	5,1
2,4	4,8	2,6	5,0	2,6	5,5	2,1	2,1	2,7	5,1
2,1	2,1	2,3	5,3	2,1	2,1	2,2	4,4	2,1	2,0
2,5	4,4	2,0	2,0	2,5	4,6	2,5	2,3	2,4	4,0
2,4	2,3	2,2	5,4	2,3	2,2	2,4	4,4	2,4	4,3

Вариант 22

58	58	67	52	69	55	55	65	53	73
52	56	72	59	44	56	61	59	62	46
72	51	62	61	56	52	78	61	57	66
51	70	31	63	66	73	42	72	64	47
57	49	41	61	68	62	50	55	59	57
57	48	61	73	54	55	69	44	37	13
49	49	61	46	52	67	65	49	51	64
63	61	59	61	69	61	48	59	65	46
72	53	46	51	51	51	53	47	59	51
51	61	67	56	63	66	70	64	38	71

Вариант 23

11	18	13	11	17	14	12	16	14	13
16	10	11	18	13	11	16	15	10	15
15	11	14	14	13	16	15	10	17	12
10	16	14	10	15	16	12	15	16	12
14	12	11	13	15	13	14	15	14	12
14	14	13	12	16	12	18	14	12	10
15	14	12	13	14	12	15	12	19	16
12	19	16	11	15	21	11	14	15	11
12	12	10	19	11	11	18	11	11	14
13	10	17	15	12	16	18	11	11	15

Вариант 24

12	18	15	12	19	13	12	19	15	13
20	16	12	20	16	13	14	16	14	14
16	13	12	12	13	13	17	14	13	17
14	14	17	14	15	15	14	14	18	14
16	18	14	17	18	15	12	13	15	12
21	16	14	11	15	14	13	14	15	15
15	15	20	16	13	18	16	12	18	16
13	15	17	13	13	17	13	19	17	14
19	17	14	16	17	14	19	17	14	13
18	14	12	18	13	14	18	14	19	15

Вариант 25

1,2	1,0	1,7	1,3	1,2	1,1	1,7	1,4	1,2	1,2
1,7	1,5	1,2	1,3	1,7	1,5	1,3	1,1	1,7	1,6
1,3	1,1	1,7	1,7	1,4	1,0	1,8	1,6	1,3	1,2
1,8	1,4	1,3	1,3	1,8	1,5	1,4	1,0	1,8	1,6
1,4	1,8	1,8	1,1	1,4	1,0	1,9	1,6	1,4	1,2
1,9	1,6	1,4	1,2	2,0	1,7	1,5	1,1	2,0	2,8
1,5	1,3	1,4	1,8	1,5	1,4	1,4	1,5	1,5	1,4
1,2	1,3	1,6	1,6	1,3	1,1	1,6	1,4	1,3	1,2
1,6	1,5	1,5	1,2	1,6	1,3	1,5	1,5	1,6	1,5
1,4	2,1	1,5	1,5	1,4	2,1	1,6	1,6	1,6	1,7

Контрольные вопросы

1. Какова природа случайных явлений?
2. Для чего строится интервальный ряд? В чем заключается суть его построения? На что влияет выбор количества интервалов?
3. Как заметить грубые ошибки наблюдений?
4. Каков вероятностный смысл плотности распределения вероятности?
5. Как по графику плотности можно судить о поведении случайной величины при испытаниях? Покажите на примере.
6. Вероятность какого события определяет функция распределения?
7. Изображение какой эмпирической кривой соответствует графику функции распределения?

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Юрайт, 2014. — 478, [1] с. — (Бакалавр. Базовый курс) (Министерство образования и науки РФ рекомендует). — ISBN 978-5-9916-3461-8.
2. Хрущева, И. В. Основы математической статистики и теории случайных процессов : учеб. пособие / И. В. Хрущева, В. И. Щербаков, Д. С. Леванова. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. — 331 с. — URL: e.lanbook.com/book/210386 (дата обращения: 02.09.2022). — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-8114-0914-3.

Тема 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ОПЫТНЫМ ДАННЫМ

Форма проведения занятия – практическая работа.

Вопросы для обсуждения

1. Построение точечных оценок числовых характеристик случайной величины по опытным данным.
2. Оценка пригодности полученных значений.
3. Выдвижение гипотез о предполагаемом законе распределения.

Методические указания по проведению занятия

Практическое задание выполняется по графику, разработанному кафедрой. Прежде чем приступить к решению задачи, следует изучить методику ее выполнения, ответить на контрольные вопросы. Задания для практической работы выполняются по вариантам, согласованным с преподавателем. При выполнении задания следует придерживаться формы, предложенной в примере. Во время защиты необходимо: уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять выполнение задания. При сдаче экзамена могут быть предложены вопросы, основанные на материале типового расчета практической работы.

Методические материалы к занятию

2.1. Основные теоретические сведения

Случайная величина считается изученной, если известен ее закон распределения, то есть определен тип закона и найдены его параметры. В распоряжении исследователя обычно имеются данные эксперимента над случайной величиной, называемые выборкой из генеральной совокупности. Опытные данные прежде всего упорядочивают, то есть располагают в возрастающем порядке. Обработанные таким образом данные x_1, x_2, \dots, x_n называют вариационным рядом; число n – объемом выборки. По данным выборки должно быть высказано достоверное суждение о типе закона распределения и найдены оценки его параметров.

Способ обработки выборочных данных зависит от объема n выборки. При большом объеме выборки прибегают к группировке полученных значений случайной величины. Для этого вычисляют размах выборки R – разность между наибольшим и наименьшим выборочным значением ($R = x_n - x_1$). Размах R делят на равные интервалы, длина которых h определяется по формуле

$$h = \frac{R}{1+3,2 \lg n}.$$

Пусть таким образом получены интервалы разбиения $(\alpha_1, \alpha_2]$, $(\alpha_2, \alpha_3]$, $(\alpha_3, \alpha_4]$, ..., $(\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, при этом $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_{k+1} = x_n$, $k \approx 1 + \lg n$. Тогда всем элементам выборки, попавшим в i -й интервал, приписывают значение

$$x_i^* = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}, i = 1, 2, \dots, k$$

и отмечают частоту такого значения n_i , то есть количество наблюдений, расположенных в интервале $(\alpha_i, \alpha_{i+1}]$.

По выборке могут быть рассчитаны выборочные статистические характеристики (выборочные: среднее, дисперсия и т. п.), которые являются оценками соответствующих генеральных статистических характеристик (параметров распределения). Каждую выборочную характеристику также следует рассматривать как значение некоторой случайной величины, изменяющейся от выборки к выборке.

При оценке числовых характеристик следует иметь в виду, что сами оценки являются случайными величинами. Важно, чтобы эти оценки обладали «хорошими» свойствами, которыми являются состоятельность, несмещенность, эффективность, достаточность. Оценка называется состоятельной, если с увеличением объема выборки она стремится (по вероятности) к оцениваемому параметру. Оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание при любом объеме выборки равно оцениваемому параметру.

Требование несмещенности особенно важно для выборок небольшого объема.

Оценки параметров сравнивают также по эффективности. Оценка считается более эффективной, если она имеет меньшую дисперсию. С другой стороны, понятие достаточности эквивалентно требованию минимальной дисперсии. Достаточная оценка с необходимостью должна быть эффективной и, следовательно, также

и состоятельной. С учетом этих требований оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения, коэффициента вариации, третьего и четвертого центральных моментов, асимметрии и эксцесса осуществляют соответственно по формулам, приведенным в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Формулы вычисления статистических характеристик

Для негруппированного распределения		Для группированного распределения, x_i^* – представитель интервала	
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	(2.1)	$\bar{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^* \cdot n_i = \bar{x}$	(2.9)
$S^2 = \frac{1}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^2$	(2.2)	$(S^2)^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^2 \cdot n_i$	(2.10)
$S = \sqrt{S^2}$	(2.3)	$S^* = \sqrt{(S^2)^*}$	(2.11)
$V = \frac{S}{\bar{x}}$	(2.4)	$V = \frac{S}{\bar{x}}$	(2.12)
$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^3$	(2.5)	$m_3^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^3 \cdot n_i$	(2.13)
$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^4$	(2.6)	$m_4^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^4 \cdot n_i$	(2.14)
$A = \frac{m_3}{S^3}$	(2.7)	$A = \frac{m_3}{S^3}$	(2.15)
$E = \frac{m_4}{S^4} - 3$	(2.8)	$E = \frac{m_4}{S^4} - 3$	(2.16)
		$\bar{x} = \bar{x}^*$	(2.17)
		$S^2 = (S^2)^* - \frac{1}{12} \cdot h^2$	(2.18)

При группировке происходит замена действительного непрерывного распределения распределением дискретной величины со значениями $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ и вероятностями этих значений, равными вероятностям попадания в соответствующие интервалы значений

исходной непрерывной величины. Для подсчета истинных характеристик непрерывной величины вводят поправки к группировке (поправки Шеппарда). При этом истинные моменты оказываются связанными с группированными по формулам:

$$\bar{x} = \bar{x}^*; \quad (2.17)$$

$$S^2 = (S^2)^* - \frac{1}{12} \cdot h^2; \quad (2.18)$$

$$\bar{m}_3 = \bar{m}_3^*; \quad (2.19)$$

$$m_4 = m_4^* - \frac{1}{2}(S^2)^* \cdot h^2 + \frac{7}{240} \cdot h^4. \quad (2.20)$$

Вводить поправки не всегда целесообразно. Дело в том, что поправка при вычислении S сводится к 1 %, когда длина $h \approx 0,49S$, и поправка в m_4 равна 1 %, когда $h \approx 0,25S$, поэтому при $h \leq 0,25S$ вводить поправки нет смысла, группированные характеристики оказываются приближенно равными исходным.

По величине вычисленных характеристик можно судить о типе распределения.

Известно, что для нормального закона теоретические асимметрии и эксцесс равны нулю, поэтому при $A \approx 0$ и $E \approx 0$ и соответствующих эмпирических законах распределения можно выдвинуть гипотезу нормальности распределения. Для экспоненциального закона оценки среднего квадратичного отклонения и математического ожидания должны быть приблизительно равны ($\bar{x} \approx S$) и т. д.

2.2. Типовые примеры и алгоритмы их решения

На завод, изготавливающий автомобильные покрышки, поступил новый вид сырья. Для проверки качества изделий, изготовленных из этого сырья, была взята выборка объемом 400 покрышек, которая подверглась испытаниям. Измерялась длина пробега автопокрышек (в тысячах километров) до их выхода из строя, и затем подсчитывались отклонения от номинального пробега (60 тыс. км).

Полученные длины пробегов и отклонения от номинала, сгруппированные в 8 разрядов, а также частоты попадания в соответствующие интервалы приведены в табл. 2.2.

Требуется найти оценки числовых характеристик случайной величины — отклонения длины пробега от номинального. Составим табл. 2.3.

Таблица 2.2

Статистический ряд распределения пробега автопокрышек

Длина пробега, тыс. км	(52; 54]	(54; 56]	(56; 58]	(58; 60]	(60; 62]	(62; 64]	(64; 66]	(66; 68]
Отклонения от номинального пробега	(-8; -6]	(-6; -4]	(-4; -2]	(-2; 0]	(0; 2]	(2; 4]	(4; 6]	(6; 8]
Частоты n_i	9	42	92	120	91	38	6	2

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 400$$

Таблица 2.3

Вспомогательная расчетная таблица оценок числовых характеристик

№ п/п	x_i^*	n_i	$x_i^* \cdot n_i$	$x_i^* - \bar{x}$	$(x_i^* - \bar{x})^2$	$(x_i^* - \bar{x})^2 \cdot n_i$	$(x_i^* - \bar{x})^3 \cdot n_i$	$(x_i^* - \bar{x})^4 \cdot n_i$
			$(2) \times (3)$	$(2) - \bar{x}_i$	$(5)^2$	$(6) \times (3)$	$(7) \times (5)$	$(8) \times (5)$
1	-7	9	-63	-5,95	35,40	318,62	-1895,80	11280,03
2	-5	42	-210	-3,95	15,60	655,28	-2588,45	10224,40
3	-3	92	-276	-1,95	3,80	349,78	-682,17	1330,23
4	-1	120	-120	0,05	0,003	0,03	0,02	0
5	1	91	91	2,05	4,20	382,38	783,98	1607,15
6	3	38	114	4,05	16,40	623,28	2524,34	1023,60
7	5	6	30	6,05	36,60	219,61	1328,67	8038,46
8	7	2	14	8,05	64,80	129,60	1043,32	8398,73
9	Σ		$\Sigma = -420$			$\Sigma = -2678,85$	$\Sigma = -513,82$	$\Sigma = 51102,59$
10	Оценки	$\bar{x}^* =$	$\bar{x} = -1,05$			$(S^2)^* = 6,70$	$m_3^* = 1,28$	$m_4^* = 127,76$

Получены характеристики группированного распределения $\bar{x}^*, m_3^*, (S^2)^*, m_4^*$. Подсчитаем оценки истинных характеристик непрерывного распределения с учетом поправок Шеппарда по формулам (2.17)–(2.20):

$$\bar{x} = \bar{x}^* = -1,05;$$

$$S^2 = 6,697 - \frac{4}{12} = 6,697 - 0,33 = 6,37;$$

$$m_3 = m_3^* = 1,28;$$

$$m_4 = 127,76 - \frac{1}{2} \cdot 6,70 \cdot 4 + \frac{7}{240} \cdot 2^4 = 114,83.$$

Найдем оценки среднего квадратичного отклонения, асимметрии, эксцесса, коэффициента вариации:

$$S = \sqrt{6,374} = 2,51; A = \frac{1,28}{2,51^3} = \frac{1,28}{15,87} = 0,08;$$

$$E = \frac{114,83}{2,51^4} - 3 = \frac{114,83}{39,9} - 3 = 2,88 - 3 = -0,12;$$

$$V = \frac{2,52}{-1,05} = -2,61.$$

Величины асимметрии и эксцесса оказались близкими к нулю. Есть основание предположить нормальность закона распределения случайной величины. Но это предположение нуждается в тщательной проверке. Если же оно окажется справедливым, то в качестве параметров нормального закона распределения можно будет принять:

$$\alpha \approx \bar{x} = -1,05, \sigma \approx S = 2,51.$$

2.3. Индивидуальные задания по теме

Для данных части «а» варианта:

- найти характеристики группированного распределения, проведя вычисления согласно разобранному примеру, все округления производить с точностью до двух знаков после запятой;
- рассчитать истинные значения характеристики \bar{x} , S^2 , S , m_3 , m_4 , V , A , E , используя формулы (2.17)–(2.20);
- высказать предположение о возможном законе распределения.

Для данных части «б» варианта:

- построить вариационный ряд;
- вычислить оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения по формулам (2.1), (2.2), (2.3).

Варианты группированных рядов

Вариант 1

а	Интервал	4,2–4,8	4,8–5,4	5,4–6	6–6,6	6,6–7,2	7,2–7,8	7,8–8,4	8,4–9
	n_i	4	6	12	16	26	18	8	6
б	X_i : 3,4; 4,14; 4,28; 4,06; 1,08; 3,16; 2,66; 1,74; 0,12; 3,84								

Вариант 2

а	Интервал	5,6–6,4	6,4–7,2	7,2–8	8–8,8	8,8–9,6	9,6–10,4	10,4–11,2	11,2–12
	n_i	3	8	14	24	19	15	9	4
б	X_i : 2,24; 0,34; 1,96; 2,74; 3,72; 3,28; 5,26; 2,02								

Вариант 3

а	Интервал	6,3–7,2	7,2–8,	8,1–9	9–9,9	9,9–10,8	10,8–11,7	11,7–12,6	12,6–13,5
	n_i	4	6	12	16	20	18	14	6
б	X_i : 0,6; 5,96; 5,98; 2,64; 3,16; 0,38; 8,32; 4,06; 2,02; 1,78								

Вариант 4

а	Интервал	42–48	48–54	54–60	60–66	66–74	72–78	78–84	84–90
	n_i	4	8	17	28	18	13	6	2
б	X_i : 3,78; 6, 0,16; -2,44; 5,38; 7,36; 3,15; 5,78; 0,06; 0,84								

Вариант 5

а	Интервал	14–16	16–18	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28	28–30
	n_i	2	5	10	18	30	16	10	5
б	X_i : 3,86; 7,88; 1,6; 6,12; 3,54; 0,76; 2,18; 3,74; 3,75; 3,94								

Вариант 6

а	Интервал	8,4–9,6	9,6–10,8	10,8–12	12–13,2	13,2–14,4	14,4–15,6	15,6–16,8	16,8–18
	n_i	5	10	14	22	18	14	10	3
б	X_i : 4,2; 4,57; 4,64; 4,53; 3,04; 4,08; 3,83; 3,37								

Вариант 7

а	Интервал	25,2–28,8	28,8–32,4	32,4–36	36–39,6	39,6–43,2	43,2–46,8	46,8–50,4	50,4–54
	n_i	3	5	9	18	32	16	9	4
б	X_i : 3,62; 2,67; 2,48; 4,13; 4,36; 3,18; 1,1; 4,14								

Вариант 8

а	Интервал	22,4–25,6	25,6–28,8	28,8–32	32–35,2	35,2–38,4	38,4–41,6	41,6–44,8	44,8–48
	n_i	10	13	15	18	13	11	9	7
б	X_i : 2,8; 5,48; 5,49; 3,82; 4,08; 2,69; 6,66; 4,53								

Вариант 9

а	Интервал	18,9–21,6	21,6–24,3	24,3–27	27–29,7	29,7–32,4	32,4–35,1	35,1–37,8	37,8–40,5
	n_i	3	4	9	17	34	18	8	3
б	X_i : 4,39; 5,5; 2,42; 1,28; 5,19; 6,18; 4,05; 5,39								

Вариант 10

а	Интервал	29,4–33,6	33,6–37,8	37,8–42	42–46,2	46,2–50,4	50,4–54,6	54,6–58,8	58,8–63
	n_i	3	7	18	36	19	8	3	2
б	X_i : 4,43 ; 6,44; 3,3; 5,56; 4,27; 2,88; 3,59; 4,37								

Вариант 11

а	Интервал	2,1–2,4	2,4–2,7	2,7–3	3–3,3	3,3–3,6	3,6–3,9	3,9–4,2	4,2–4,5
	n_i	4	6	12	16	26	18	8	6
б	X_i : -1,8; -1,43; -1,36; -1,47; -2,96; -1,92; -2,17; -2,63; -3,56; 1,58								

Вариант 12

а	5,6–6,4	6,4–7,2	7,2–8	8–8,8	8,8–9,6	9,6–10,4	10,4–11,2	11,2–12
	3	8	14	24	19	14	9	4
б	$X_i: -2,38; -3,33; -2,52; -1,87; -1,64; -2,82; -4,9; -1,76; -0,87; -2,49$							

Вариант 13

а	12,6–14,4	14,4–16,2	16,2–18	18–19,8	19,8–21,6	21,6–23,4	23,4–25,2	25,2–27
	4	6	12	16	20	18	14	6
б	$X_i: -3,2; -0,51; -0,52; -2,18; 0,92; -3,31; 0,66; -1,47; -2,49; -2,61$							

Вариант 14

а	21–24	24–27	27–30	30–33	33–36	36–39	39–42	42–45
	4	8	17	28	18	13	6	2
б	$X_i: -1,06; 0,5; -3,58; -4,72; -0,81; 0,18; -1,95; -0,61; -3,47; -3,08$							

Вариант 15

а	14–16	16–18	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28	28–30
	2	5	10	18	30	16	10	15
б	$X_i: -1,57; 0,44; -2,7; -0,44; -1,73; 3,12; 2,41; -1,63; -1,64; -1,53$							

Вариант 16

а	16,8–19,2	19,2–21,6	21,6–24	24–26,4	26,4–28,8	28,8–31,2	31,2–33,6	33,6–36
	5	10	14	22	18	14	10	3
б	$X_i: 1,2; 1,57; 1,64; 1,53; 0,04; 1,08; 0,83; 0,37; -0,56; 1,42$							

Вариант 17

а	12,6–14,4	14,4–16,2	16,2–18	18–19,8	19,8–21,6	21,6–23,4	23,4–25,2	25,2–27
	3	5	9	18	32	16	9	4
б	$X_i: 0,62; -0,33; 0,48; 1,13; 1,36; 0,18; -1,9; 1,14; 2,13; 0,51$							

Вариант 18

а	16,8–19,2	19,2–21,6	21,6–24	24–26,4	26,4–28,8	28,8–31,2	31,2–33,6	33,6–36
	10	13	15	18	13	11	9	7
б	$X_i: -0,2; 2,48; 2,49; 0,82; 1,08; -0,31; 3,66; 1,53; 0,51; 0,39$							

Вариант 19

а	37,8–43,2	43,2–48,6	48,6–54	54–59,4	59,4–64,8	64,8–70,2	70,2–75,6	75,6–81
	3	4	9	17	34	18	8	3
б	$X_i: 1,39; 2,5; -0,58; -1,72; 2,19; 3,18; 1,05; 2,39; -0,47; -0,08$							

Вариант 20

а	14,7–16,8	16,8–18,9	18,9–21	21–23,1	23,1–25,2	25,2–27,3	27,3–29,4	29,4–31,5
	3	7	18	36	19	8	3	2
б	$X_i: 1,43; 3,44; 0,3; 2,56; 1,27; -0,12; 0,59; 1,37; 1,38; 1,47$							

Вариант 21

а	29,4–33,6	33,6–37,8	37,8–42	42–46,2	46,2–50,4	50,4–54,6	54,6–58,8	58,8–63
	4	6	12	16	26	18	8	6
б	$X_i: 1,1; 1,28; 1,32; 1,26; 0,52; 1,04; 0,915; 0,685; 0,22; 1,21$							

Вариант 22

а	25,2–28,8	28,8–32,4	32,4–36	36–39,6	39,6–43,2	43,2–46,8	46,8–50,4	50,4–54
	3	8	14	24	19	15	9	4
б	$X_i: 0,81; 0,34; 0,84; 1,06; 1,18; 0,59; -0,45; 1,07; 1,56; 0,76$							

Вариант 23

а	16,8–19,2	19,2–21,6	21,6–24	24–24,6	26,4–28,8	28,8–31,2	31,2–33,6	33,6–36
	4	6	12	16	20	18	14	6
б	$X_i: 0,4; 1,74; 1,74; 0,81; 1,04; 0,34; 2,66; 1,26; 0,76; 0,70$							

Вариант 24

а	25,2–28,8	28,8–32,4	32,4–36	36–39,6	39,6–43,2	43,2–46,8	46,8–50,4	50,4–54
	4	8	17	28	18	13	6	2
б	X_i : 1,2; 1,75; 0,21; -0,36; 1,60; 2,09; 1,02; 1,70; 0,26; 0,46							

Вариант 25

а	11,2–12,8	12,8–14,4	14,4–16	16–17,6	17,6–19,2	19,2–208	20,8–22,4	22,4–24
	2	5	10	18	30	16	10	5
б	X_i : 1,22; 2,22; 0,65; 1,78; 1,14; 0,44; 0,80; 1,18; 1,19; 1,24							

Контрольные вопросы

1. Что называется случайной величиной X ?
2. Что является наиболее полной характеристикой случайной величины X при независимых испытаниях?
3. Что характеризует математическое ожидание и как оно определяется по результатам опыта?
4. Какое свойство распределения определяет дисперсия и почему в случае малых выборок при расчетах не пользуются выборочной дисперсией?
5. Какой величиной является точечная оценка и почему?
6. Что понимают под смещенной оценкой?
7. Как определяются точечные оценки математического ожидания и дисперсии?
8. Какой вид имеет график плотности нормального распределения? Охарактеризуйте его.
9. Укажите условия, когда закон распределения случайной величины близок к нормальному.

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Юрайт, 2014. — 478, [1] с. — (Бакалавр. Базовый курс) (Министерство образования и науки РФ рекомендует). — ISBN 978-5-9916-3461-8.
2. Хрущева, И. В. Основы математической статистики и теории случайных процессов : учеб. пособие / И. В. Хрущева, В. И. Шербаков, Д. С. Леванова. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. — 331 с. — URL: e.lanbook.com/book/210386 (дата обращения: 02.09.2022). — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-8114-0914-3.

Тема 3. ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Форма проведения занятия – практическая работа.

Вопросы для обсуждения

1. Построение эмпирической функции распределения по опытным данным.
2. Выравнивание статистического распределения.
3. Выдвижение гипотез о предполагаемом законе распределения.

Методические указания по проведению занятия

Практическое задание выполняется по графику, разработанному кафедрой. Прежде чем приступить к решению задачи, следует изучить методику ее выполнения, ответить на контрольные вопросы. Задания для практической работы выполняются по вариантам, согласованным с преподавателем. При выполнении задания следует придерживаться формы, предложенной в примере. Во время защиты необходимо: уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять выполнение задания. При сдаче экзамена могут быть предложены вопросы, основанные на материале типового расчета практической работы.

Методические материалы к занятию

3.1. Основные теоретические сведения

Изучается распределение случайной величины X по данным упорядоченной выборки x_1, x_2, \dots, x_n . Считают, что имеется полная информация о случайной величине, если известна ее функция распределения $F(x) = P(X < x)$, представление о которой можно получить, оценив вероятность $P(X < x)$ по данным выборки с помощью относительных частот. Поэтому при небольшом объеме выборки n в качестве статистического аналога функции распределения используют эмпирическую функцию распределения, задаваемую формулой

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{— при } (x \leq x_1), \\ \frac{1}{n} & \text{— при } (x_1 < x \leq x_2), \\ \frac{2}{n} & \text{— при } (x_2 < x \leq x_3), \\ \frac{k}{n} & \text{— при } (x_k < x \leq x_{k+1}), \\ 1 & \text{— при } (x > x_n). \end{cases}$$

При большом объеме выборки данные группируют, как было описано в практической работе 2. При этом значения эмпирической функции распределения удобно оценивать в точках, соответствующих концам интервалов группировки. Исходные данные вместе с представителями интервалов вносят в табл. 3.1, где подсчитывают также частоты ω_i попадания выборочных значений в интервал $(\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ и накопленные частоты, то есть значения эмпирической функции распределения $F_n(\alpha_{i+1})$.

Замечаем, что сумма чисел четвертого столбца должна равняться объему выборки n , а $F_n(\alpha_{k+1})$, подсчитываемое в шестом столбце, равно 1. Графически эмпирическую функцию распределения в случае группированных данных изображают с помощью полигона (многоугольника) накопленных частостей (рис. 3.1).

Таблица 3.1

Таблица построения эмпирической функции распределения

№	Интервалы $(\alpha_i, \alpha_{i+1}]$	Середины $x_i^* = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$	Частоты n_i	Частоты $\omega_i = \frac{n_i}{n}$	Накопленные частоты $F_n(\alpha_{i+1})$
1	2	3	4	5	6
1	(α_1, α_2)	x_1^*	n_1	ω_1	$F_n(\alpha_2) = \omega_1$
2	(α_2, α_3)	x_2^*	n_2	ω_2	$F_n(\alpha_3) = \omega_1 + \omega_2$
...
k	$(\alpha_k, \alpha_{k+1}]$	x_k^*	n_k	ω_k	$F_n(\alpha_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \omega_i$
$k+1$	Σ		$\sum_{i=1}^k n_i = n$	$\sum_{i=1}^k \omega_i = 1$	

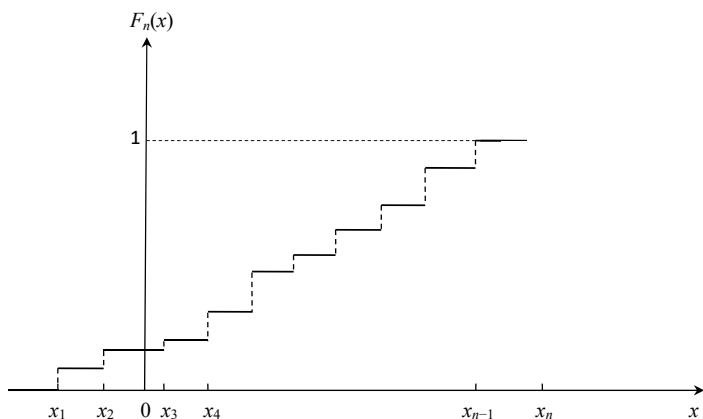


Рис. 3.1. График эмпирической функции распределения

В выбранной системе координат изображают точки $(\alpha_{i+1}, F_n(\alpha_{i+1}))$, $i = 1, 2, \dots, k$, которые затем соединяют отрезками прямыми (рис. 3.2).

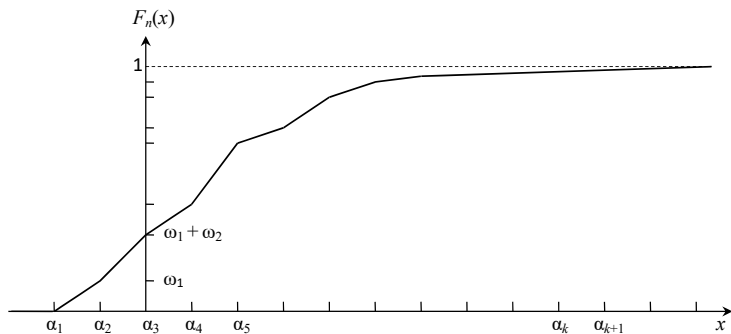


Рис. 3.2. Полигон накопленных частостей

Используя данные табл. 3.1, можно построить статистический аналог плотности распределения – гистограмму. Для этого каждый интервал разбиения $(\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ принимают за основание прямоугольника высотой $\frac{\omega_i}{h}$, где $h = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ – длина каждого интервала. Совокупность таких прямоугольников образует ступенчатую фигуру, площадь которой равна 1 (рис. 3.3)

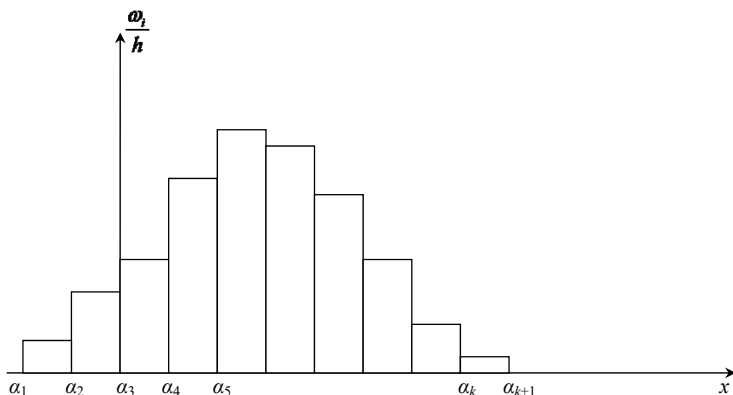


Рис. 3.3. Гистограмма

Верхний контур гистограммы и дает представление о плотности распределения случайной величины. По гистограмме можно высказать предположение о типе закона распределения (нормальный, равномерный, Рэля, треугольник и т. д.).

Если оценки числовых характеристик и вид гистограммы позволяют предположить нормальность закона, можно наглядно проверить это предположение с помощью процедуры выравнивания (сглаживания эмпирических зависимостей). Для этого записывают плотность нормального закона

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Заменив в ней a и σ их оценками по выборке \bar{x} и S .

Затем с помощью таблиц нормированной нормальной плотности распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

подсчитывают $f(x_i^*)$, то есть значения плотности в серединах интервалов разбиения. Точки $[x_i^*; f(x_i^*)]$ изображают на том же чертеже, что и гистограмму, и соединяют плавной кривой. По соответствию гистограммы и полученной кривой можно судить о справедливости нормального закона с найденными параметрами для имеющихся выборочных данных.

Вычисления координат $f(x_i^*)$ можно провести в порядке, представленном в табл. 3.2.

Вычисление значений плотности распределения

№	x_i^*	$x_i^* - \bar{x}$	$x_i = \frac{x_i^* - \bar{x}}{S}$	$\varphi(x_i)$	$f(x_i^*) = \frac{1}{S} \varphi(x_i)$
1	x_1^*	$x_1^* - \bar{x}$	x_1	$\varphi(x_1)$	$f(x_1^*)$
2	x_2^*	$x_2^* - \bar{x}$	x_2	$\varphi(x_2)$	$f(x_2^*)$
...
k	x_k^*	$x_k^* - \bar{x}$	x_k	$\varphi(x_k)$	$f(x_k^*)$

Наглядная проверка соответствия данных выборки нормальному закону значительно облегчается при наличии вероятностной бумаги. Это функциональная сетка с равномерной шкалой по оси абсцисс и функциональной – по оси ординат. Шкала на оси ординат построена для функции, обратной функции распределения нормального закона

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

(если $F(x) = p$, соответствующее x обозначаем x_p).

Изображая в такой сетке полигон накопленных частостей, при справедливости нормального закона должны получить линию, близкую к прямой. Если полигон действительно «выпрямился», значит, выборочные данные хорошо отвечают нормальному закону.

При этом легко проконтролировать оценки математического ожидания и дисперсии.

Проведя прямую, наилучшим образом приближающуюся к точкам полигона, при ординате $y = 50\% (F(x) = 0,5)$ получаем значение $x = \bar{x}$, то есть оценку математического ожидания. Если $y = 15,9\%$, $x_{15,9} = \bar{x} - S$, то $S = \bar{x} - x_{15,9}$. Такой способ можно рекомендовать для быстрого грубого подсчета оценок математического ожидания и среднего квадратичного отклонения нормального закона.

При использовании вероятностной бумаги в случае негруппированного распределения изображают обычно не саму эмпирическую функцию распределения, а наносят точки с координатами $(x_k, \frac{k-0,5}{n})$.

Если эти точки хорошо укладываются на прямую линию, то можно говорить о соответствии выборочных данных нормальному закону. Числовые характеристики оцениваются так же, как для группированного распределения.

3.2. Типовые примеры и алгоритмы их решения

Для отклонений длины пробега автопокрышек от номинального (выборочные данные приведены в примере работы 2) требуется найти эмпирические законы распределения, провести выравнивание опытных данных (двумя способами), оценить (грубо) математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение и дисперсию.

По данным эксперимента составим табл. 3.3 (по образцу табл. 3.1).

Таблица 3.3

Значения эмпирической функции распределения для отклонений длины пробега автопокрышек от номинального

№ п/п	Интервалы $(\alpha_i, \alpha_{i+1}]$	Середины интервалов x_i^*	Частоты n_i	Частоты ω_i	Накопленные частоты	Накопленные частоты в %
1	2	3	4	5	6	7
1	(-8; -6]	-7	9	0,02	0,02	2
2	(-6; -4]	-5	42	0,10	0,12	12
3	(-4; -2]	-3	92	0,23	0,35	35
4	(-2; 0]	-1	120	0,30	0,65	65
5	(0; 2]	1	91	0,23	0,88	88
6	(2; 4]	3	38	0,10	0,98	98
7	(4; 6]	5	6	0,02	1,00	100
8	(6; 8]	7	2	0,00	1,00	100
9	Σ		$\Sigma = 400$	$\Sigma = 1$	$F_n(\alpha_{i+1})$	

Построим для начала полигон накопленных частостей в системе координат с обычными равномерными шкалами (рис. 3.4).

Для построения гистограммы имеем в виду, что длина интервала разбиения $h = 2$ ед., поэтому высоты прямоугольников в два раза меньше, чем частоты, и соответственно равны 0,01; 0,05; 0,12; 0,11; 0,05; 0,01; 0. Гистограмма изображена на рис. 3.5.

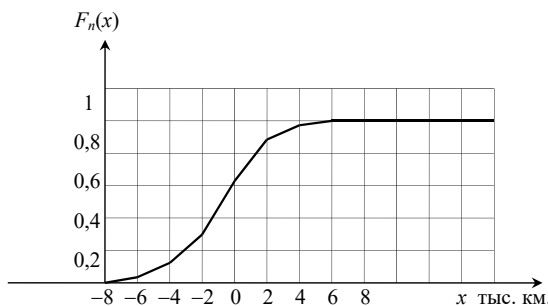


Рис. 3.4. Полигон накопленных частостей для отклонений длины пробега автопокрышек от номинального

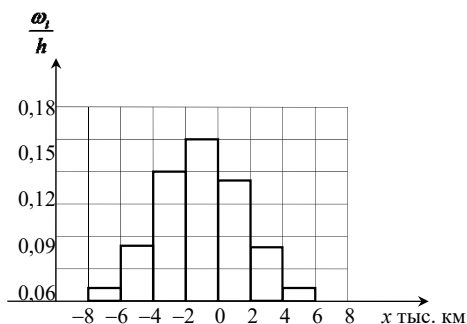


Рис. 3.5. Гистограмма для отклонений длины пробега автопокрышек от номинального

По виду гистограммы можно предположить, что отклонения длины пробега автопокрышек от номинального подчиняются нормальному закону.

В работе 2 были определены оценки математического ожидания и среднего квадратичного отклонения $\bar{x} = -1,05$, $S = 2,51$. В таком случае может быть записана предположительная плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2,51} \cdot e^{-\frac{(x+1,05)^2}{2 \cdot 2,51^2}}.$$

Проведем процедуру выравнивания. Заполним табл. 3.4, аналогичную табл. 3.2.

Таблица 3.4

Вычисление значений плотности для отклонений длины пробега автопокрышек от номинального

№	x_i^*	$x_i^* - \bar{x}$	$x_i = \frac{1}{S}(x_i^* - \bar{x})$	$\varphi(x_i)$	$f(x_i^*) = \frac{1}{S}\varphi(x_i)$
1	-7	-5,95	-2,37	0,02	0,01
2	-5	-3,95	-1,57	0,12	0,05
3	-3	-1,95	-0,78	0,29	0,12
4	-1	0,05	0,02	0,40	0,16
5	1	2,05	0,82	0,28	0,11
6	3	4,05	1,61	0,11	0,04
7	5	6,05	2,41	0,02	0,01
8	7	8,05	3,27	0,00	0,00

Полученные значения плотности распределения, отнесенные к серединам интервалов группировок, изобразим на одном чертеже с гистограммой и соединим полученные точки плавной кривой (рис. 3.6).

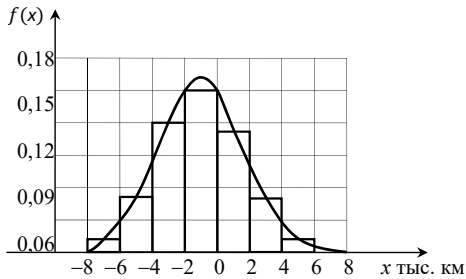


Рис. 3.6. График плотности распределения случайной величины отклонений, полученной по опытным данным

3.3. Индивидуальные задания по теме

Расчеты производить по вариантам, приведенным в практической работе 2. Все вычисления производить с округлением до двух знаков после запятой.

Для опытных данных части «а» варианта:

- заполнить табл. 3.1;
- построить полигон накопленных частот;
- изобразить гистограмму, предположить закон распределения;

- осуществить выравнивание эмпирического закона;
- определить графически значение выборочного среднего и оценку среднего квадратичного отклонения.

Для данных части «б» варианта: подсчитать значения эмпирической функции распределения и построить ее график.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции распределения, плотности распределения случайной величины.
2. Запишите выражение эмпирической функции распределения. Почему принят именно такой способ оценки функции распределения?
3. Для чего строят гистограмму при обработке статистических данных? Что это такое?
4. Какова цель процедуры выравнивания эмпирического распределения и как оно осуществляется?

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Юрайт, 2014. – 478, [1] с. – (Бакалавр. Базовый курс) (Министерство образования и науки РФ рекомендует). – ISBN 978-5-9916-3461-8.
2. Хрущева, И. В. Основы математической статистики и теории случайных процессов : учеб. пособие / И. В. Хрущева, В. И. Щербаков, Д. С. Леванова. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 331 с. – URL: e.lanbook.com/book/210386 (дата обращения: 02.09.2022). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-0914-3.

Тема 4. ОЦЕНКА СОГЛАСИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО И ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ χ^2

Форма проведения занятия – практическая работа.

Вопросы для обсуждения

1. Проверка выдвинутой гипотезы о законе распределения случайной величины по опытным данным.
2. Оценка полученного значения критерия.
3. Практические выводы по статистической проверке гипотез.

Методические указания по проведению занятия

Практическое задание выполняется по графику, разработанному кафедрой. Прежде чем приступить к решению задачи, следует изучить методику ее выполнения, ответить на контрольные вопросы. Задания для практической работы выполняются по вариантам, согласованным с преподавателем. При выполнении задания следует придерживаться формы, предложенной в примере. Во время защиты необходимо: уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять выполнение задания. При сдаче экзамена могут быть предложены вопросы, основанные на материале типового расчета практической работы.

Методические материалы к занятию

4.1. Основные теоретические сведения

С помощью построения эмпирических законов распределения и процедуры выравнивания можно наглядно оценить соответствие выборочных данных определенному теоретическому закону распределения. Но такой способ не дает возможности измерять расхождение между эмпирическим и теоретическим законами и отвергать гипотезу соответствия, если принятая мера превосходит установленный предел. Для того чтобы установить, является ли расхождение между теоретическим и экспериментальными законами случайным или обусловлено неверным подбором теоретического распределения, применяют критерий согласия.

Пусть вся область изменения случайной величины X разбита на k интервалов, $\varphi(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_c)$ — предполагаемая теоретическая плотность распределения, зависящая от параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_c$.

Будем считать, что параметры заранее не известны и оцениваются по выборке. При проверке соответствия нормальному закону плотность зависит от двух параметров — σ и m .

Пусть P_i — оценки вероятности попадания случайной величины с плотностью $\varphi(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_c)$ в i -й интервал, а n_i — частоты попадания выборочных данных в соответствующие интервалы. Эти величины удовлетворяют соотношениям:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_k = 1, n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n \quad (n - \text{объем выборки}).$$

Если выборочные данные о случайной величине, возможные значения которой — любые числа на интервале $(-\infty, +\infty)$, ранее были подвергнуты группировке, то введенную систему интервалов сохраняют, но в крайних интервалах α_1 относят в $-\infty$, а α_{k+1} — в $+\infty$.

Если оценки параметров теоретического закона достаточно точны и предложенный закон действительно справедлив, то частоты выборочные и теоретические $np_1, np_2, np_3, \dots, np_k$ мало отличаются друг от друга.

В качестве меры расхождения эмпирического и теоретического законов принимается величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (4.1)$$

Доказано, что если гипотетический закон — истинный, то распределение величины (4.1) при увеличении объема выборки стремится к распределению χ с $(k - k_1 - 1)$ степенями свободы, где k_1 — число параметров, оцениваемых по выборке.

Составлены таблицы значений q %-го верхнего предела в зависимости от вероятности

$$P(\chi^2 > \chi_q^2) = \frac{q}{100}.$$

С их помощью устанавливают критическую область — область отвержения гипотезы соответствия. Для этого задают малую вероятность $q / 100$ (уровень значимости гипотезы) и по таблицам находят χ_q^2 . Если гипотеза верна, то вероятность попадания за χ_q^2 мала,

то есть событие $\chi^2 > \chi_q^2$ практически невозможно. Поэтому, если по данным выборки величина χ^2 , подсчитанная по формуле (4.1), оказалась больше χ_q^2 , гипотезу отвергают. Если же $\chi^2 < \chi_q^2$, то говорят, что данные выборки не противоречат предположенному закону распределения.

Поскольку применение критерия χ^2 основано на предельном (при $n \rightarrow \infty$) распределении величины χ^2 , то его целесообразно использовать, когда объем выборки $n \geq 50$, а частота $np_i \geq 10$.

Если последнее требование не выполняется для некоторых интервалов, то их объединяют с соседними. Число степеней свободы вычисляется на основании количества интервалов после объединения.

4.2. Типовые примеры и алгоритмы их решения

В практической работе 2 приведены выборочные данные для отклонения X длины пробега автопокрышек от номинального:

Отклонение длины пробега от номинального	(-8; -6]	(-6; -4]	(4; -2]	(-2; 0]	(0; 2]	(2; 4]	(4; 6]	(6; 8]
Частота (n_i)	9	42	92	120	91	38	6	2

Требуется проверить соответствие приведенного выборочного распределения нормальному.

Ранее (практические работы 2 и 3) были вычислены оценки числовых характеристик этого распределения: $\bar{x} = -1,05$, $S = 2,51$ – и записана предположительная плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2,51} e^{-\frac{(x+1,05)^2}{2 \cdot 2,51^2}}. \quad (4.2)$$

Для проверки соответствия закону (4.2) по критерию χ^2 придется вычислять вероятности $P_i = P(\alpha_i < X < \alpha_{i+1})$.

Такие вероятности для нормальной случайной величины с математическим ожиданием a и средним квадратичным отклонением σ вычисляются по формуле

$$P_i = P(\alpha_i < X < \alpha_{i+1}) = \Phi\left(\frac{\alpha_{i+1} - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_i - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$ – функция Лапласа.

Таблица 4.1

Таблица расчета критерия χ^2 по опытным данным длины пробега автопокрышек

№	α_i, α_{i+1}	n_i	$z_i = \frac{\alpha_i - \bar{x}}{s}$	$\Phi(z_i)$	p_i	$n'_i = n \cdot p_i$	$ n_i - n'_i $	$ n_i - n'_i ^2$	$\frac{ n_i - n'_i ^2}{n'_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$(-\infty; -6)$	9 } 51	-1,97	-0,5	0,0244	9,76 } 48	2,6	6,76	0,13
2	$(-6; -4]$	42 } 92	-1,17	-0,4756	0,0966	38,64 } 48	1,88	3,53	0,03
3	$(-4; -2]$	92	-0,37	-0,3790	0,2347	93,88	1,36	1,85	0,01
4	$(-2; 0]$	120	0,41	-0,1443	0,3034	121,36	0,12	0,01	0
5	$(0; 2]$	91	1,21	0,1591	0,2276	91,12	0,76	0,58	0,01
6	$(2; 4]$	38 } 46	2,01	0,3869	0,0909	36,36 } 45,24	0,76	0,58	0,01
7	$(4; 6]$	6 } 2	2,80	0,4778	0,0196	7,84 } 45,24	0,76	0,58	0,01
8	$(6; \infty]$	2	2,80	0,4974	0,0026	1,04 } 45,24	0,76	0,58	0,01
9				0,5					
	Σ				1	400			$\chi^2 = 0,18$

Исходные данные и результаты вычислений вносим в табл. 4.1.

В столбце 4 таблицы подсчитаны нормированные границы интервалов, по которым в столбце 5 из таблицы функций Лапласа выписаны ее значения. При расчете теоретических частот (столбец 7) оказалось, что в 1, 7, 8-м интервалах $nP_i < 10$, поэтому были объединены 1-й и 2-й интервалы, а также 6, 7 и 8-й. Соответствующие объединения были произведены в 3-м столбце для частот. Для контроля вычислений подсчитывается сумма 6-го столбца, которая должна быть равна 1, и сумма 7-го столбца, равная объему выборки n .

Примем уровень значимости критерия равным 0,05. Подсчитаем число степеней свободы χ^2 . После объединения получаем $k = 5$, $k_1 = 2$, так как два параметра a и σ оценивались по выборке, и, следовательно, число степеней свободы χ^2 равно 2. По таблицам верхних пределов χ^2 при $P(\chi^2 > \chi_q^2) = 0,05$ для двух степеней свободы находим $\chi_q^2 = 6$. Полученное $\chi^2 = 0,18 < 6$.

Следовательно, выборочные данные не противоречат гипотезе: изучаемая величина имеет закон распределения с плотностью $f(x)$ (формула (4.2)).

Согласно приведенным исследованиям для случайной величины отклонения длины пробега автопокрышек от номинального принимаем закон (4.2). По нему, не прибегая вновь к эксперименту, можно указать, например, долю изделий, которые будут иметь длину пробега не менее заданного. Можно получить такие законы для X , соответствующих различным типам сырья, сравнить % автопокрышек, которые отслужат необходимый срок в этих различных случаях, и сделать выводы относительно типа сырья и т. д.

4.3. Индивидуальные задания по теме

Расчет производить по опытным данным, представленным в практической работе 2, согласно варианту.

Для данных части «а» варианта: проверить соответствие нормальному закону по критерию χ^2 , используя подсчитанные в практической работе 2 оценки a и σ (вычисления вести с двумя знаками после запятой).

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры статистических гипотез. В чем заключается суть статистической проверки гипотез?
2. Какой величиной является критерий проверки гипотез? Что отражает величина наблюдаемого значения критерия?
3. Что понимается под критической точкой, критической областью, уровнем значимости?
4. Как определить функции Лапласа $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ для $x > 5$ или $x < 0$, для которых нет таблиц?
5. Для чего используются критерии согласия?
6. Какова область применения критерия χ^2 (по характеристикам выборки, по решаемым задачам)?

Рекомендуемая литература

1. Гателюк, О. В. Проверка статистических гипотез : учеб. пособие / О. В. Гателюк, Н. В. Манюкова. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. — 110 с. — URL: e.lanbook.com/book/238709 (дата обращения: 02.09.2022). — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-8114-9843-7.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Юрайт, 2014. — 478, [1] с. — (Бакалавр. Базовый курс) (Министерство образования и науки РФ рекомендует). — ISBN 978-5-9916-3461-8.

Тема 5. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПО ОПЫТНЫМ ДАННЫМ

Форма проведения занятия – практическая работа.

Вопросы для обсуждения

1. Понятие интервальной оценки числовой характеристики.
2. Построение интервальных оценок математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения нормального распределения.
3. Интервальная оценка вероятности (относительной частоты) появления заданного значения (попадания в заданный промежуток).

Методические указания по проведению занятия

Практическое задание выполняется по графику, разработанному кафедрой. Прежде чем приступить к решению задачи, следует изучить методику ее выполнения, ответить на контрольные вопросы. Задания для практической работы выполняются по вариантам, согласованным с преподавателем. При выполнении задания следует придерживаться формы, предложенной в примере. Во время защиты необходимо: уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять выполнение задания. При сдаче экзамена могут быть предложены вопросы, основанные на материале типового расчета практической работы.

Методические материалы к занятию

5.1. Основные теоретические сведения

В практической работе 2 были найдены оценки для различных числовых характеристик случайной величины. Возникает вопрос о точности и надежности этих оценок.

Предположим, оценивается параметр θ с помощью оценки $\hat{\theta}$.

Тогда на основании распределения подходящим образом подобранной случайной величины, связанной с $\hat{\theta}$ и имеющей распределение, не зависящее от оцениваемого параметра, находят такое число δ , при котором

$$P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \delta\right) = P\left(\hat{\theta} - \delta < \theta < \hat{\theta} + \delta\right) = 1 - \alpha,$$

$(1 - \alpha)$ называют доверительной вероятностью. Ее выбирают близкой к 1, то есть α принимают обычно равным 0,01; 0,02; 0,05 и т. д. Интервал со случайными концами называют доверительным интервалом. Вероятность того, что этот интервал покроет значение параметра $(\hat{\theta} - \delta, \hat{\theta} + \delta)$, равна $(1 - \alpha)$, то есть при указанном выборе α построенный интервал почти достоверно покрывает значение искомого параметра. Величина $(1 - \alpha)$ характеризует надежность интервальной оценки, а число δ — точность оценки. Рассмотрим построение доверительных интервалов в некоторых конкретных случаях.

Доверительный интервал для математического ожидания

Предположим, что имеем дело с нормально распределенной случайной величиной, параметры которой a и σ оцениваются по данным выборки с помощью статистик

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ и } S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Построение доверительного интервала для математического ожидания m основано на том, что величина

$$t = \sqrt{n-1} \cdot \frac{\bar{x} - a}{S}$$

распределена по закону Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы. Поэтому для вероятности можно, пользуясь таблицами q %-х пределов распределения Стьюдента, найти такие пределы $\pm t_{q,n-1}$, при которых

$$P\left(-t_{q,n-1} < \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - a}{S} < t_{q,n-1}\right) = 1 - \frac{q}{100}.$$

Отсюда интервал

$$\left(\bar{x} - t_{q,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + t_{q,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)$$

будет доверительным интервалом для среднего a при доверительной вероятности

$$1 - \frac{q}{100} = 1 - \alpha.$$

При использовании таблиц распределения Стьюдента следует иметь в виду, что при увеличении степеней свободы распределение Стьюдента стремится к нормальному, поэтому при числе степеней свободы больше 30 и $q > 1$ % стьюдентовы пределы могут быть заменены на соответствующие нормальные пределы. Если с целью выяснения точности характеристик необходимо построить интервал для a или σ^2 при большом объеме выборки, подвергавшейся ранее группировке, то при использовании поправок Шеппарда можно считать, что \bar{x} и S найдены непосредственно, поэтому число степеней свободы определяется не по количеству интервалов группировки, а по объему выборки n .

Доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратичного отклонения нормальной совокупности

Для нахождения доверительного интервала используем то, что величина $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ распределена по закону χ^2 с $(n - 1)$ степенями свободы, где

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Пределы χ^2_1 и χ^2_2 выбираются так, чтобы

$$P(\chi^2 < \chi^2_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{100} \quad \text{и} \quad P(\chi^2 > \chi^2_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{100}.$$

Тогда

$$P\left(\chi^2_1 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2_2\right) = 1 - \frac{q}{100} = P\left(\frac{nS^2}{\chi^2_2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_1}\right).$$

Отсюда доверительный интервал для σ^2 : $\left(\frac{nS^2}{\chi^2_2}, \frac{nS^2}{\chi^2_1}\right)$, для σ : $\left(\frac{\sqrt{n}S}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n}S}{\chi_1}\right)$.

Для несмещенной оценки дисперсии по χ^2 распределена величина $\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$, отсюда ясны изменения в границах интервалов. Оба интервала имеют доверительную вероятность $1 - \frac{q}{100}$.

В таблицах q %-х верхних пределов распределения χ^2 границы χ^2_q указаны для различных $P(\chi^2 > \chi^2_q)$ и числа степеней свободы от 1 до 30.

Если необходимо найти χ^2_q при числе степеней свободы $f > 30$, следует иметь в виду, что распределение величины $\sqrt{2\chi^2}$ при увели-

чении числа степеней свободы стремится к нормальному с математическим ожиданием $\sqrt{2f-1}$ и дисперсией 1.

Отсюда величина $Z = \sqrt{2x^2} - \sqrt{2f-1}$ распределена нормально $N(0,1)$, и граница χ^2_q тогда будет вычисляться по формуле

$$x_q^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2f-1} + Z_q)^2,$$

где Z_q определяется из равенства $P(Z > Z_q) = \frac{q}{100}$.

Для

$$\begin{aligned} \frac{q}{100} < 0,05 : \frac{q}{100} &= P(Z > Z_q) = \frac{1}{2}P[|Z| > Z_q] = \\ &= \frac{1}{2}[1 - P(|Z| < Z_q)] = \frac{1}{2}[1 - 2\Phi(Z_q)]. \end{aligned}$$

Так что Z_q получаем из условия:

$$\frac{1}{2} - \Phi(Z_q) = \frac{q}{100}.$$

Для $\frac{q}{100} > 0,05$ $P(Z > Z_q) = 0,5 + \Phi(-Z_q)$ и $Z_q (<0)$ получаем из равенства: $0,5 + \Phi(-Z_q) = \frac{q}{100}$, где $\Phi(Z)$ – функция Лапласа.

Доверительный интервал для вероятности

Предположим, что производится последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых происходит или нет событие A с одной и той же неизвестной вероятностью p . Будем оценивать ее по данным опыта с помощью частоты $\frac{x}{n}$ появления события A . Известно, что частота распределена по биномиальному закону. Именно этот факт используется для нахождения доверительных границ для вероятности.

Границы $P_1(x, n)$ и $P_2(x, n)$ при доверительной вероятности $(1 - \alpha)$ являются корнями уравнений:

$$\sum_{m=0}^x C_n^m \cdot P_1^m (1 - P_1)^{n-m} = \frac{\alpha}{2}; \quad (5.1)$$

$$\sum_{m=0}^x C_n^m \cdot P_2^m (1 - P_2)^{n-m} = \frac{\alpha}{2}. \quad (5.2)$$

Уравнения (5.1) и (5.2) зачастую решаются лишь приближенно. Их решения занесены в таблицы.

При конкретных n , x и α по таблицам доверительных пределов для биномиального распределения находят пару чисел P_1 и P_2 , задающих доверительный интервал:

$$P_1(x, n) < p < P_2(x, n).$$

5.2. Типовые примеры и алгоритмы их решения

1. По выборке, состоящей из 29 величин, определены оценки математического ожидания и дисперсии: $\bar{x} = 2$, $S^2 = 5,88$, $S = 2,41$.

Построим 95 %-й доверительный интервал для a . По таблицам q %-х пределов распределения Стьюдента при $q = 5$ % и числе степеней свободы, равном 28, находим $t_{5,28} = 2,05$,

$$t_{5,28} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} = 2,05 \cdot \frac{2,41}{\sqrt{28}} = 0,93.$$

Доверительный интервал:

$$2 - 0,93 < a < 2 + 0,93;$$

$$1,07 < a < 2,93.$$

Если используется несмещенная оценка дисперсии

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

то q %-й доверительный интервал для a вычисляется по формуле

$$\left(\bar{x} - t_{q,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{q,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right).$$

2. По условиям предыдущего примера построим 98 %-й доверительный интервал для σ^2 и σ .

Здесь

$$1 - \frac{q}{100} = 0,98, \quad \frac{q}{100} = 0,02, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{100} = 0,01.$$

Для вероятностей

$$P_1 = P(\chi^2 > \chi^2_1) = 1 - 0,01 = 0,99 \text{ и } P_2 = P(\chi^2 > \chi^2_2) = 0,01$$

находим по таблицам при числе степеней свободы, равном 28, $\chi^2_1 = 13,6$ и $\chi^2_2 = 48,3$.

Используя формулы (5.1) и (5.2), находим:

$$\frac{29 \cdot 5,88}{48,3} < \sigma^2 < \frac{29 \cdot 5,88}{13,6};$$

$$3,53 < \sigma^2 < 12,53;$$

$$1,87 < \sigma < 3,53.$$

3. Пусть требуется найти 95 %-й доверительный интервал для вероятности события, если в наблюдениях ($n = 25$) частота составила $7 / 25 = 0,28$.

Решение. В таблицах 95 %-х доверительных пределов для параметра в биномиальном распределении при $x = 7$, $n - x = 25 - 7 = 18$ находим числа 0,121 и 0,494. Тогда 95 %-й доверительный интервал для вероятности p , совместимый с данными опыта, будет:

$$0,121 < p < 0,494.$$

Ответ: (0,121; 0,494).

При больших значениях n распределение частоты $\omega = x / n$ можно считать приближенно нормальным с параметрами

$$M(\omega) = p \text{ и } \sigma(\omega) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Доверительный интервал для p тогда получают из приближенного равенства

$$P \left[-t_{1-\alpha} < \frac{\omega - p}{\sqrt{p \cdot \frac{1-p}{n}}} < t_{1-\alpha} \right] = 1 - \alpha, \quad (5.3)$$

где $t_{1-\alpha}$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-t_{1-\alpha}}^{t_{1-\alpha}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha. \quad (5.4)$$

Разрешая относительно p неравенство в квадратных скобках выражения (5.3), получаем доверительный интервал (с надежностью $1 - \alpha$):

$$\frac{2n\omega + t_{1-\alpha}^2 - t_{1-\alpha} \cdot \sqrt{D}}{2(n + t_{1-\alpha}^2)} < p < \frac{2n\omega + t_{1-\alpha}^2 + t_{1-\alpha} \cdot \sqrt{D}}{2(n + t_{1-\alpha}^2)}, \quad (5.5)$$

где $D = \sqrt{4n\omega(1-\omega) + t_{1-\alpha}^2}$.

При больших n , отбрасывая в числителях левой и правой частей $t_{1-\alpha}^2$, что дает ошибку порядка $1 / n$, приходим к более простому выражению для границ интервала:

$$\omega - t_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} < P < \omega + t_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}. \quad (5.6)$$

4. При $n = 400$ частота попадания отклонений длины пробега автопокрышек от номинального в интервал $(0; 2]$ оказалась равной 91. Построить доверительный интервал для вероятности попадания в интервал $(0; 2]$ при доверительной вероятности 0,95.

Решение. Здесь $x = 91$, $\omega = 91 / 400 = 0,23$.

Согласно формуле (5.49) $2\Phi(t_{1-\alpha}) = 0,95$. По таблицам функций Лапласа находим $(t_{1-\alpha}) = 1,96$;

$$t_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,23 \cdot 0,77}{400}} = 0,04.$$

Отсюда доверительный интервал для вероятности:

$$0,19 < p < 0,27.$$

Эта вероятность оценивалась нами ранее с помощью найденного закона распределения. В табл. 4.1 (6-й столбец, 5-я строка) находим: $p = 0,2278 \approx 0,23$.

Наблюдаем согласование полученных результатов.

5.3. Индивидуальные задания по теме

Расчет производить по опытным данным, представленным в практической работе 2, согласно варианту.

Для данных части «а» варианта:

- оценить точность подсчета математического ожидания с помощью \bar{x} (надежность 0,95);
- указать точность оценки дисперсии S^2 (доверительная вероятность 0,90);
- найти доверительные границы для вероятности появления значений случайной величины, больших верхней границы интервала, содержащего \bar{x} ($1 - \alpha = 0,95$).

Для данных части «б» варианта:

- построить доверительный интервал для математического ожидания a (доверительную вероятность принять равной 0,95), имея в виду, что выборка осуществлена из значений нормальной случайной величины;
- построить доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратичного отклонения (надежность 0,90);

– построить доверительный интервал для вероятности появления значений случайной величины, больших выборочного среднего ($1 - \alpha = 0,95$).

Контрольные вопросы

1. С какой целью строят доверительные интервалы?
2. Какие законы распределения использованы при построении доверительных интервалов для среднего нормальной совокупности, для дисперсии?
3. Каков закон распределения частоты события при n независимых испытаниях?
4. На каких законах основано построение доверительных интервалов для вероятности? В каких случаях применяются эти законы?

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Юрайт, 2014. – 478, [1] с. – (Бакалавр. Базовый курс) (Министерство образования и науки РФ рекомендует). – ISBN 978-5-9916-3461-8.
2. Хрущева, И. В. Основы математической статистики и теории случайных процессов : учеб. пособие / И. В. Хрущева, В. И. Щербаков, Д. С. Леванова. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 331 с. – URL: e.lanbook.com/book/210386 (дата обращения: 02.09.2022). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-0914-3.

Тема 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Форма проведения занятия – практическая работа.

Вопросы для обсуждения

1. Постановка задачи регрессионного анализа.
2. Оценка параметров математической модели методом наименьших квадратов.
3. Условия выполнения основных предпосылок МНК-метода.
4. Проверка значимости оценок параметров модели, значимости модели в целом.

Методические указания по проведению занятия

Практическое задание выполняется по графику, разработанному кафедрой. Прежде чем приступить к решению задачи, следует изучить методику ее выполнения, ответить на контрольные вопросы. Задания для практической работы выполняются по вариантам, согласованным с преподавателем. При выполнении задания следует придерживаться формы, предложенной в примере. Во время защиты необходимо: уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять выполнение задания. При сдаче экзамена могут быть предложены вопросы, основанные на материале типового расчета практической работы.

Методические материалы к занятию

6.1. Основные теоретические сведения

Допустим, что в некотором процессе экспериментально изучается зависимость величины y (выходного параметра) от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . При этом на реально существующую зависимость

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

накладывается ошибка эксперимента ε . В результате u -го опыта получают:

$$y_u = f(x_{1u}, x_{2u}, \dots, x_{nu}) + \varepsilon_u.$$

Возникает задача:

1. По полученным значениям выходного параметра y_u ($u = 1, 2, \dots, N$) установить вид зависимости переменной y от переменных x_1, x_2, \dots, x_n (построить математическую модель изучаемого процесса).

2. Провести статистический анализ полученного уравнения математической модели. Эта задача решается при следующих предположениях:

- 1) полученные в результате опыта значения y_u — нормальные независимые случайные величины;
- 2) дисперсии $\sigma^2(y_u)$ равны друг другу при разных наборах независимых переменных;
- 3) независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n измеряются с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении переменной y .

Построение математической модели процесса

Искомую зависимость (уравнение регрессии) обычно представляют в виде полиномов различных степеней:

$$\hat{y} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i \neq j}^n a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \dots$$

Если ввести фиктивную переменную $x_0 = 1$, а произведения и квадраты обозначить через новые переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_k$, то искомое уравнение примет линейную форму

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} x_{n+1} + \dots + a_k x_k \quad (6.1)$$

и задача сведется к нахождению коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_k .

Для постановки опыта из каких-либо соображений выбирают N ($N \geq k$) точек факторного пространства (строят план) и в каждой из них проводят параллельные опыты. Дублирование опытов позволяет проверить воспроизводимость (стабильность) эксперимента, а также вычислить оценку ошибки опыта $S^2(y)$.

Результаты эксперимента оформляются в виде матриц:

– матрица планирования

$$X = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix}_{N \times k};$$

– матрица значений выходного параметра

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \dots & y_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{N1} & y_{N2} & y_{N3} & \dots & y_{Nm} \end{pmatrix}_{N \times m};$$

– матрица средних значений выходного параметра

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_N \end{pmatrix},$$

где $\bar{y}_u = \frac{\sum_{i=1}^m y_{ui}}{m}$.

Коэффициенты уравнения (6.1) находят по методу наименьших квадратов, то есть так, чтобы сумма квадратов отклонения наблюдаемых значений выходного параметра \bar{y}_u от теоретических значений \hat{y}_u , вычисленных по формуле (6.1), была наименьшей:

$$\sum_{u=1}^N \sum_{j=1}^m (y_{uj} - \hat{y}_u)^2 = \sum_{u=1}^N \sum_{j=1}^m (y_{uj} - a_0 x_{0u} - a_1 x_{1u} - \dots - a_k x_{ku})^2 \rightarrow \min,$$

что приводит к формуле

$$A = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot \bar{Y}. \quad (6.2)$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ – матрица искоемых коэффициентов.

$$\begin{aligned}
X^T \cdot X &= \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix}_{k \times N} \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix}_{N \times k} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^N x_{0u}^2 & \sum_{u=1}^N x_{0u}x_{1u} & \dots & \sum_{u=1}^N x_{0u}x_{ku} \\ \sum_{u=1}^N x_{1u}x_{0u} & \sum_{u=1}^N x_{1u}^2 & \dots & \sum_{u=1}^N x_{1u}x_{ku} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{u=1}^N x_{ku}x_{0u} & \sum_{u=1}^N x_{ku}x_{1u} & \dots & \sum_{u=1}^N x_{ku}^2 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^T \cdot \bar{Y} &= \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix}_{k \times N} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}_{N \times 1} = \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^N x_{0N} \bar{y}_u \\ \sum_{u=1}^N x_{1N} \bar{y}_u \\ \dots \\ \sum_{u=1}^N x_{kN} \bar{y}_u \end{pmatrix}_{k \times 1};
\end{aligned}$$

– матрица, обратная матрице $X^T \cdot X$ (матрица ошибок)

$$\left(X^T \cdot X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k0} & c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{pmatrix}.$$

Статистический анализ математической модели

Статистический анализ модели изучаемого процесса включает следующие моменты:

1. Проверку гипотезы об однородности дисперсий (проверку воспроизводимости, стабильности эксперимента).
2. Проверку гипотезы и незначимости коэффициентов уравнения модели.
3. Проверку гипотезы об адекватности математической модели изучаемому процессу.

Проверка гипотезы об однородности выборочных дисперсий S_u^2 ($u = 1, 2, \dots, N$) осуществляется с помощью критерия Кохрена следующим образом.

По результатам параллельных опытов находят построчные выборочные дисперсии выходного параметра

$$S_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_u)^2}{m - 1}, \quad (6.3)$$

где $u = 1, 2, \dots, N$.

И вычисляют отношение максимальной выборочной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_{\text{экср}} = \frac{S_{\text{max}}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2}. \quad (6.4)$$

Величина G имеет распределение Кохрена; по таблице пределов отношения наибольшей эмпирической дисперсии к сумме дисперсий для заданного уровня значимости q находят критическое значение G -критерия:

$$G_{\text{табл}} = G_q(m - 1, N).$$

Если $G_{\text{экср}} < G_{\text{табл}}$, то гипотеза об однородности выборочных дисперсий S_u^2 не отвергается.

Однородность дисперсий, как было сказано выше, одно из требований, на котором базируется метод регрессионного анализа, и практически проверка этой гипотезы должна предшествовать получению уравнения модели (6.1).

После того как математическая модель получена, необходимо проверить гипотезу о незначимости ее коэффициентов (требование «назначим» означает: «незначимо отличается от нуля»). Проверка гипотезы незначимости коэффициентов осуществляется с помощью критерия Стьюдента. Для этого, прежде всего, вычисляют ошибку опыта:

$$S^2(y) = \frac{\sum_{u=1}^N S_u^2}{N}. \quad (6.5)$$

Оценку дисперсии среднего значения y :

$$S^2(\bar{y}) = \frac{S^2(y)}{m},$$

а также ошибки в определении коэффициентов модели (6.1):

$$S^2(a_i) = c_{ii} \cdot S^2(y), \quad (6.6)$$

где c_{ii} — диагональные элементы матрицы ошибок $(X^T \cdot X)^{-1}$.

Для каждого из коэффициентов определяют экспериментальное значение t :

$$t_{\text{эксп}}(a_i) = \frac{|a_i|}{S(a_i)}. \quad (6.7)$$

Величина t имеет распределение Стьюдента. По таблице q % пределов критерия Стьюдента для заданного уровня значимости q и числа степеней свободы $f = (m - 1) \cdot N$ находят критическое значение t -критерия:

$$t_{\text{табл}} = t_q(f). \quad (6.8)$$

Если $t_{\text{эксп}}(a_i) < t_{\text{табл}}$, то коэффициент a_i считается статистически незначимым, им можно пренебречь, то есть исключить из уравнения (6.1). Так как коэффициенты уравнения (6.1) в общем случае коррелированы, то, исключая незначимые коэффициенты, остальные (значимые) коэффициенты пересчитываются заново.

После того как получена модель с учетом статистически значимых коэффициентов, необходимо проверить гипотезу об адекватности представления реального технологического процесса данным уравнением.

Проверка гипотезы об адекватности осуществляется с помощью критерия Фишера.

Для этого вычисляют дисперсию неадекватности:

$$S_{\text{неадекв}}^2 = \frac{m \cdot \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N - k'}, \quad (6.9)$$

где k' – число статистически значимых коэффициентов уравнения, и составляют отношение:

$$F_{\text{эксп}} = \frac{S_{\text{неадекв}}^2}{S^2(y)} \quad (6.10)$$

(в числителе стоит большая из дисперсий $S_{\text{неадекв}}^2$, $S^2(y)$).

Величина F имеет распределение Фишера. По таблице верхних пределов критерия Фишера для заданного уровня значимости q и числа степеней свободы $f_1 = N - k'$, $f_2 = (m - 1) \cdot N$ находят критическое значение F -критерия:

$$F_{\text{табл}} = F_q(f_1, f_2). \quad (6.11)$$

Если $F_{\text{эксп}} < F_{\text{табл}}$, то гипотеза об адекватности математической модели изучаемому процессу не отвергается.

6.2. Типовые примеры и алгоритмы их решения

Оценить, как влияет на площадь эрозии Q мм² паяного стыкового образца температура пайки (t^0) и время выдержки (t_c). Опыты проводились при следующих условиях: вес припоя – 2 г, содержание фосфора в припое – 8,1 %.

Решение. Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}x_1 &= t_{\text{град}} / 1 \text{ град}, \\x_2 &= t_c / 1 \text{ с}, \\y &= Q \text{ мм}^2 / 1 \text{ мм}^2.\end{aligned}$$

Исходные данные:

$$X = \begin{pmatrix} 750 & 30 \\ 750 & 50 \\ 800 & 10 \\ 800 & 50 \\ 850 & 30 \\ 850 & 10 \end{pmatrix} \text{ — матрица планирования;}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,40 & 0,39 \\ 0,38 & 0,40 & 0,39 \\ 0,46 & 0,50 & 0,51 \\ 0,48 & 0,53 & 0,52 \\ 0,61 & 0,57 & 0,68 \\ 0,62 & 0,59 & 0,62 \end{pmatrix} \text{ — матрица значений выходного параметра } y$$

при трех параллельных опытах.

Построим линейную математическую модель изучаемого процесса (линейную регрессию):

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \quad (6.12)$$

и проведем ее статистический анализ.

1. Построение математической модели процесса.

Прежде всего, по результатам параллельных опытов ($m = 3$) вычислим среднее значение выходного параметра:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^3 y_{iu}}{3}, u = 1, 2, \dots, 6; \\ \bar{y}_1 &= \frac{0,35 + 0,40 + 0,39}{3} = 0,38, \\ \bar{y}_2 &= \frac{0,38 + 0,40 + 0,39}{3} = 0,39, \\ &\dots\end{aligned}$$

Для получения элементов матриц $X^T \cdot X$ и $X^T \cdot \bar{Y}$ заполним расчетную табл. 6.1. Используя необходимые суммы последней строки табл. 6.1, получаем:

$$\begin{aligned}
 X^T \cdot X &= \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^6 x_{0u}^2 & \sum_{u=1}^6 x_{0u}x_{1u} & \sum_{u=1}^6 x_{0u}x_{2u} \\ \sum_{u=1}^6 x_{1u}x_{0u} & \sum_{u=1}^6 x_{1u}^2 & \sum_{u=1}^6 x_{1u}x_{2u} \\ \sum_{u=1}^6 x_{2u}x_{0u} & \sum_{u=1}^6 x_{2u}x_{1u} & \sum_{u=1}^6 x_{2u}^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 & 4800 & 180 \\ 4800 & 3850000 & 142000 \\ 180 & 142000 & 7000 \end{pmatrix}; \\
 X^T \cdot \bar{Y} &= \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^6 x_{0u}\bar{y}_u \\ \sum_{u=1}^6 x_{1u}\bar{y}_u \\ \sum_{u=1}^6 x_{2u}\bar{y}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,00 \\ 2423 \\ 86 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Находим обратную матрицу $(X^T \cdot X)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 (X^T \cdot X)^{-1} &= \frac{1}{\Delta(X^T \cdot X)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{72 \cdot 10^6} \begin{pmatrix} 6786 \cdot 10^6 & -804 \cdot 10^4 & -114 \cdot 10^5 \\ -804 \cdot 10^4 & 96 \cdot 10^2 & 12 \cdot 10^3 \\ -114 \cdot 10^5 & 12 \cdot 10^3 & 6 \cdot 10^4 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 6786 & -8,04 & -11,4 \\ -8,04 & 0,0096 & 0,012 \\ -11,4 & 0,012 & 0,06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94,19 & -0,11 & -0,16 \\ -0,11 & 0,00013 & 0,00017 \\ -0,16 & 0,00017 & 0,00083 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

По формуле (6.2) находим:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 6786 & -8,04 & -11,4 \\ -8,04 & 0,0096 & 0,012 \\ -11,4 & 0,012 & 0,06 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,00 \\ 2423 \\ 86 \end{pmatrix}.$$

Таблица 6.1

Расчетная таблица значений матрицы факторов X

№	x_{0u}	x_{1u}	x_{2u}	y_{1u}	y_{2u}	y_{3u}	\bar{y}_u	x_{0u}^2	x_{1u}^2	x_{2u}^2	$x_{0u} \cdot x_{1u}$	$x_{0u} \cdot x_{2u}$	$x_{1u} \cdot x_{2u}$	$x_{0u} \cdot \bar{y}_u$	$x_{1u} \cdot \bar{y}_u$	$x_{2u} \cdot \bar{y}_u$
1	1	750	30	0,35	0,40	0,39	0,39	1	562 500	900	750	30	2250	0,38	285	11,4
2	1	750	50	0,38	0,40	0,39	0,39	1	562 500	2500	750	50	37 500	0,39	292,5	19,5
3	1	800	10	0,46	0,50	0,51	0,49	1	640 000	100	800	10	8000	0,49	392	4,9
4	1	800	50	0,48	0,53	0,52	0,51	1	640 000	2500	800	50	40 000	0,51	408	25,5
5	1	850	30	0,61	0,57	0,68	0,62	1	722 500	900	850	30	25 500	0,62	527	18,6
6	1	850	10	0,62	0,59	0,62	0,61	1	722 500	100	850	10	8500	0,61	518,5	6,1
Σ								6	3 850 000	7000	4800	180	142 000	3,00	2423	86

Откуда

$$a_0 = \frac{1}{72} \cdot (6786 \cdot 3,00 - 8,04 \cdot 2423 - 11,4 \cdot 86) = -1,44;$$

$$a_1 = \frac{1}{72} \cdot (-8,04 \cdot 3,00 + 0,0096 \cdot 2423 + 0,012 \cdot 86) = 0,0024;$$

$$a_2 = \frac{1}{72} \cdot (-11,4 \cdot 3,00 + 0,012 \cdot 2423 + 0,06 \cdot 86) = 0,0005.$$

Уравнение математической модели (линейной регрессии) имеет вид

$$\hat{y} = -1,44 + 0,0024 \cdot x_1 + 0,0005 \cdot x_2.$$

2. Статистический анализ математической модели.

а) Проверяем по критерию Кохрена гипотезу об однородности дисперсий. Для этого, используя результаты расчетной табл. 6.2 и формулу (6.3), находим выборочные дисперсии S_u^2 :

$$S_1^2 = \frac{1}{2} (0,0009 + 0,0004 + 0,0001) = 0,0007,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{2} (0,0001 + 0,0001 + 0,0000) = 0,0007,$$

...

Составляем экспериментальное значение G -критерия по формуле (6.4):

$$G_{\text{экс}} = \frac{\max S_u^2}{\sum_{u=1}^6 S_u^2} = \frac{0,0031}{0,0056} = 0,55.$$

По таблице пределов отношения наибольшей дисперсии к сумме дисперсий для уровня значимости $q = 5\%$ находим критическое значение величины G ($N = 6, m - 1 = 2$):

$$G_{\text{табл}} = G_{0,05}(6,2) = 0,61.$$

Так как $G_{\text{экс}} < G_{\text{табл}}$, то гипотеза об однородности дисперсий не отвергается.

Таблица 6.2

Расчетная таблица проверки однородности дисперсий

№		\bar{y}_u	$ y_{1u} - \bar{y}_u $	$ y_{2u} - \bar{y}_u $	$ y_{3u} - \bar{y}_u $	$(y_{1u} - \bar{y}_u)^2$	$(y_{2u} - \bar{y}_u)^2$	$(y_{3u} - \bar{y}_u)^2$	S_u^2
1	0,35 0,40 0,39	0,38	0,03	0,02	0,01	0,0009	0,0004	0,0001	0,0007
2	0,38 0,40 0,39	0,39	0,01	0,01	0,00	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001
3	0,46 0,50 0,51	0,49	0,03	0,01	0,02	0,0009	0,0001	0,0004	0,0007
4	0,48 0,53 0,52	0,51	0,0,3	0,02	0,01	0,0009	0,0004	0,0001	0,0007
5	0,61 0,57 0,68	0,62	0,01	0,05	0,06	0,0001	0,0025	0,0036	0,0031
6	0,62 0,59 0,62	0,61	0,01	0,02	0,01	0,0001	0,0004	0,0001	0,0003
$\sum_{u=1}^6 S_u^2 = 0,0056$									

б) Проверим по критерию Стьюдента гипотезу о незначимости коэффициентов математической модели (6.12). Для этого находим по формуле (6.5) ошибку опыта:

$$S^2(y) = \frac{0,0056}{6} = 0,00093; \quad S^2(\bar{y}) = \frac{S^2(y)}{3} = 0,00031.$$

По формулам (6.6) находим ошибки в определении коэффициентов уравнения:

$$S(a_0) = \sqrt{c_{00}} \cdot S(\bar{y}) = \sqrt{94,19 \cdot 0,00031} = 0,17;$$

$$S(a_1) = \sqrt{c_{11}} \cdot S(\bar{y}) = \sqrt{0,00013 \cdot 0,00031} = 0,00020;$$

$$S(a_2) = \sqrt{c_{22}} \cdot S(\bar{y}) = \sqrt{0,00083 \cdot 0,00031} = 0,00051.$$

Вычисляем по формуле (6.7) экспериментальные значения величины t для каждого из коэффициентов:

$$t_{\text{эксп}}(a_0) = \frac{|a_0|}{S(a_0)} = \frac{1,44}{0,17} = 8,5;$$

$$t_{\text{эксп}}(a_1) = \frac{|a_1|}{S(a_1)} = \frac{0,0024}{0,00020} = 12;$$

$$t_{\text{эксп}}(a_2) = \frac{|a_2|}{S(a_2)} = \frac{0,0005}{0,00051} = 1.$$

По таблице q -процентных пределов критерия Стьюдента для уровня значимости $q = 5\%$ и числа степеней свободы $f = N \cdot (m - 1)$ или $f = 6 \cdot 2 = 12$ находим критическое значение t -критерия:

$$t_{\text{табл}} = t_{0,05}(12) = 2,18.$$

Так как $t_{\text{эксп}}(a_2) < t_{\text{табл}}$, то коэффициент a_2 можно считать незначимым (незначимо отличным от нуля) и из уравнения математической модели исключить. Значимые коэффициенты a_0 и a_1 пересчитываем, для чего вновь находим:

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 4800 \\ 4800 & 3850000 \end{pmatrix};$$

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \frac{1}{6 \cdot 10^4} \begin{pmatrix} 3580000 & -4800 \\ -4800 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 385 & -0,48 \\ -0,48 & 0,0006 \end{pmatrix};$$

$$X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2423 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 385 & -0,48 \\ -0,48 & 0,0006 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2423 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,34 \\ 0,0023 \end{pmatrix}.$$

Уравнение математической модели принимает вид:

$$\hat{y} = -1,34 + 0,0023x_1. \quad (6.13)$$

в) Проверяем по критерию Фишера гипотезу об адекватности полученной модели (6.13) опытным данным. Для этого, используя результаты расчетной табл. 6.3. и формулу (6.9), вычисляем дисперсию неадекватности:

$$S_{\text{неад.}}^2 = \frac{m \sum_{u=1}^6 (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{N - k'} = \frac{3 \cdot 0,0008}{4} = 0,0006.$$

Таблица 6.3

Расчетная таблица проверки значимости модели

№		\bar{y}_u		\hat{y}_u	$ \bar{y}_u - \hat{y}_u $	$(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$
1	\bar{Y}	0,38	\hat{Y}	0,40	0,02	0,0004
2		0,39		0,40	0,01	0,0001
3		0,49		0,50	0,01	0,0001
4		0,51		0,50	0,01	0,0001
5		0,62		0,62	0,00	0,0000
6		0,61		0,62	0,01	0,0001
$\sum_{u=1}^6 (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 = 0,0008$						

Вычислим экспериментальное значение величины F согласно формуле (6.10):

$$F_{\text{эксп}} = \frac{S^2(y)}{S_{\text{неад.}}^2} = 1,5$$

(в числителе стоит большая из дисперсий $S^2(y)$).

По таблице верхних пределов уклонения критерия Фишера для уровня значимости $q = 5 \%$ и числа степеней свободы $f_1 = N \cdot (m - 1) = 6 \cdot 2 = 12$ и $f_2 = N - k' = 6 - 2 = 4$ находим критическое значение F -критерия:

$$F_{\text{табл}} = F_{0,05}(12,4) = 5,91.$$

Так как $F_{\text{эксп}} < F_{\text{табл}}$, то оснований отвергать гипотезу об адекватности нет.

Вывод. Исследования показали, что в данном процессе существенное влияние на площадь эрозии (Q мм²) оказывает температура пайки (t^0). Это влияние описывается формулой

$$Q \text{ мм}^2 = [-1,34 + 0,0023(t^0 / 1^0)] \cdot 1 \text{ мм}^2.$$

Время выдержки (t_c) на выходной параметр Q практически не влияет.

6.3. Индивидуальные задания по теме

1. Написать по данной матрице планирования X и матрице значений выходного параметра Y линейную математическую модель процесса:

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2.$$

Для этого:

- внести в расчетную табл. 6.1 данные своего варианта – матрицы X и Y ;
- вычислить элементы матрицы \bar{Y} ;
- произвести расчеты в табл. 6.1 и, используя необходимые суммы, выписать матрицы $X^T \cdot X$ и $X^T \cdot \bar{Y}$;
- найти обратную матрицу $(X^T \cdot X)^{-1}$;
- вычислить по формуле (6.2) искомые коэффициенты a_i ;
- написать уравнение линейной модели.

2. Провести статистический анализ полученного уравнения математической модели:

- проверить с помощью критерия Кохрена гипотезу об однородности дисперсий ($q = 1 \%$);
- проверить с помощью критерия Стьюдента гипотезу о незначимости коэффициентов уравнения модели ($q = 1 \%$);
- исключить из уравнения незначимые коэффициенты, а значимые – пересчитать;
- проверить с помощью критерия Фишера гипотезу об адекватности уравнения математической модели опытным данным ($q = 1 \%$).

Варианты опытных данных к практической работе 6

Вариант 1

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	-0,99	-1,01	-0,98
2		1	1	0		3,01	2,89	2,85
3		1	-1	0		-3,02	-2,90	-3,05
4		1	0	-1		0,96	0,80	0,90
5		1	-1	-1		-2,01	-2,02	-2,05
6		1	0	0		0,28	0,03	0,05

Вариант 2

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	2,19	2,20	1,91
2		1	0	2		3,92	4,21	4,10
3		1	0	3		6,19	5,91	6,00
4		1	1	0		2,85	3,14	3,25
5		1	2	0		5,85	6,05	6,15
6		1	3	0		8,75	9,20	8,96

Вариант 3

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	2	Y	2,98	3,15	3,05
2		1	0	1		2,60	2,95	3,10
3		1	-1	0		4,25	4,05	3,80
4		1	-2	0		5,02	4,92	4,87
5		1	-1	2		3,98	4,09	4,00
6		1	1	0		1,98	2,01	1,99

Вариант 4

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	3,10	2,95	3,08
2		1	-1	1		2,84	2,95	3,16
3		1	2	1		1,95	2,14	1,99
4		1	0	0		0,70	0,98	1,08
5		1	0	0		4,05	3,95	4,02
6		1	1	0		1,90	1,95	2,09

Вариант 5

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	0,89	0,95	1,14
2		1	2	1		3,15	2,65	3,00
3		1	3	1		4,05	4,01	3,96
4		1	1	0		0,72	0,96	1,05
5		1	2	0		2,05	1,99	2,03
6		1	3	0		2,98	3,04	2,97

Вариант 6

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	-1,20	-0,98	-1,05
2		1	1	0		0,90	0,95	1,06
3		1	0	-1		0,98	1,03	1,01
4		1	-1	0		-1,01	-0,95	-0,90
5		1	2	0		2,01	2,10	1,97
6		1	0	2		-1,98	-2,01	-2,02

Вариант 7

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	1,02	0,99	0,95
2		1	2	1		-0,98	-0,97	-1,01
3		1	3	1		-2,05	-1,99	-2,03
4		1	1	0		-1,03	-1,00	-0,84
5		1	2	0		-1,97	-2,04	-1,98
6		1	3	0		-2,90	-2,91	-3,15

Вариант 8

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	1,98	2,05	1,95
2		1	0	2		4,04	4,09	5,03
3		1	0	3		6,05	5,95	6,10
4		1	1	0		2,02	2,05	1,99
5		1	2	0		3,98	3,95	4,28
6		1	2	1		5,68	6,04	5,99

Вариант 9

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	1,10	1,07	0,85
2		1	1	0		0,96	0,95	1,02
3		1	0	0		0,02	0,04	0,05
4		1	1	1		2,04	2,09	1,96
5		1	-1	0		-0,91	-0,92	-0,91
6		1	0	-1		-0,92	-0,93	-0,94

Вариант 10

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	2,10	2,20	1,92
2		1	0	2		3,94	3,85	4,01
3		1	0	3		6,10	5,90	6,08
4		1	1	0		2,93	2,84	3,15
5		1	2	0		6,04	6,05	5,88
6		1	3	0		8,75	8,90	9,04

Вариант 11

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	-0,99	-1,01	-0,84
2		1	1	0		3,04	2,69	3,01
3		1	-1	0		-3,02	-2,92	-2,89
4		1	0	-1		2,96	3,14	3,01
5		1	-1	-1		-2,01	-2,09	-2,02
6		1	0	0		0,03	0,05	0,01

Вариант 12

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	2	Y	3,04	2,93	2,84
2		1	0	1		2,98	2,66	3,11
3		1	-1	0		4,02	3,59	4,15
4		1	-2	0		5,11	5,15	4,93
5		1	-1	2		3,98	3,76	4,02
6		1	1	0		2,01	2,04	1,99

Вариант 13

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	3,10	2,95	3,06
2		1	-1	1		2,90	2,95	3,06
3		1	2	0		2,01	1,98	1,68
4		1	0	-1		0,98	1,02	0,93
5		1	0	2		4,14	3,82	3,96
6		1	1	0		1,90	1,95	2,01

Вариант 14

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	0,84	0,95	1,04
2		1	2	1		3,02	2,96	3,10
3		1	3	1		4,15	4,01	3,97
4		1	1	0		0,97	0,95	1,13
5		1	2	0		2,06	1,91	2,03
6		1	3	0		2,97	3,07	2,97

Вариант 15

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	-1,10	-0,95	-1,14
2		1	1	0		0,83	0,98	1,42
3		1	0	-1		0,96	0,18	0,88
4		1	-1	0		-1,13	-0,93	-0,91
5		1	2	0		2,33	2,01	1,99
6		1	0	2		-2,14	-1,98	-2,02

Вариант 16

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	0,98	0,89	1,03
2		1	2	1		-0,98	-1,04	-0,96
3		1	3	1		-1,93	-2,04	-2,15
4		1	1	0		-1,04	-1,00	-1,06
5		1	2	0		-1,97	-2,14	-1,95
6		1	3	0		-2,90	-2,88	-3,01

Вариант 17

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	1,98	2,00	2,20
2		1	0	2		3,97	4,11	3,84
3		1	0	3		6,05	5,98	5,63
4		1	1	0		2,02	2,15	1,85
5		1	2	0		3,98	3,95	4,10
6		1	3	0		5,98	6,07	5,83

Вариант 18

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	9,25	9,19	8,88
2		1	0	2		13,84	14,01	14,13
3		1	0	3		19,18	18,99	18,69
4		1	1	0		3,55	3,85	4,02
5		1	2	0		3,56	3,78	3,93
6		1	3	0		3,84	4,02	4,35

Вариант 19

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	1	1	Y	2,03	2,15	1,95
2		1	1	2		5,15	5,04	4,58
3		1	2	1		1,01	0,96	1,25
4		1	0	1		3,02	3,14	3,02
5		1	1	0		-1,05	-1,20	-0,88
6		1	0	0		0,01	0,02	0,01

Вариант 20

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	1,05	0,97	1,04
2		1	1	0		2,10	1,94	2,05
3		1	1	1		3,15	3,35	2,96
4		1	0	0		0,11	0,01	0,20
5		1	1	2		4,18	3,66	4,01
6		1	2	1		4,90	5,00	4,95

Вариант 21

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	1,10	1,05	1,15
2		1	1	0		1,06	1,05	1,14
3		1	0	0		0,04	0,08	0,03
4		1	1	1		2,04	2,08	2,11
5		1	-1	0		-1,01	-1,02	-1,01
6		1	0	-1		-1,01	-1,06	-1,03

Вариант 22

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	1	1	Y	2,03	1,96	2,13
2		1	0	1		2,96	3,14	3,00
3		1	1	0		1,95	2,15	2,01
4		1	0	0		3,02	3,14	2,99
5		1	2	1		1,02	0,95	1,12
6		1	1	2		2,19	1,93	1,87

Вариант 23

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	1	1	Y	3,55	3,01	2,96
2		1	0	1		2,96	2,73	3,12
3		1	1	0		1,93	1,96	2,16
4		1	0	0		2,13	1,98	2,00
5		1	1	2		3,96	4,12	4,01
6		1	2	0		2,04	1,93	1,99

Вариант 24

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1	X	1	0	1	Y	1,08	1,12	0,93
2		1	1	0		-0,09	0,15	0,10
3		1	0	0		1,02	0,96	0,99
4		1	1	1		-0,03	0,12	-0,01
5		1	2	1		-1,14	-0,94	-1,11
6		1	1	2		0,03	0,01	-0,02

Вариант 25

№		x_0	x_1	x_2		y_1	y_2	y_3
1		1	0	1		0,94	1,14	0,99
2		1	1	0		1,05	0,92	0,73
3	X	1	0	0	Y	0,02	0,10	-0,09
4		1	1	1		2,04	2,10	1,98
5		1	2	1		3,10	2,94	3,12
6		1	1	2		2,94	3,08	2,83

Контрольные вопросы

1. В чем заключается задача регрессионного анализа?
2. Сформулируйте основные предпосылки метода регрессионного анализа.
3. В чем заключается метод наименьших квадратов?
4. Как выглядит формула для отыскания коэффициентов математической модели (уравнения регрессии)?
5. Сформулируйте основную гипотезу H_0 об однородности дисперсий. Объясните сущность критерия Кохрена.
6. Сформулируйте основную гипотезу H_0 о незначимости коэффициентов модели. Объясните сущность критерия Стьюдента. Как поступают с незначимыми коэффициентами?
7. Сформулируйте основную гипотезу H_0 об адекватности полученного уравнения регрессии опытным данным. Объясните сущность критерия Фишера. Выдайте рекомендации на случай отвержения гипотезы об адекватности.

Рекомендуемая литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Юрайт, 2014. — 478, [1] с. — (Бакалавр. Базовый курс) (Министерство образования и науки РФ рекомендует). — ISBN 978-5-9916-3461-8.
2. Хрущева, И. В. Основы математической статистики и теории случайных процессов : учеб. пособие / И. В. Хрущева, В. И. Щербаков, Д. С. Леванова. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. — 331 с. — URL: e.lanbook.com/book/210386 (дата обращения: 02.09.2022). — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-8114-0914-3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Рекомендации по выполнению заданий

При выполнении заданий необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая работа выполняется в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной не менее 2 см для замечаний рецензента.

2. Внешнее оформление: на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы; название дисциплины; вариант; название учебного заведения; проставлена дата выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по соответствующему варианту, согласованному с преподавателем. В случае невыполнения этого требования ставится «незачет».

4. Варианты исходных данных задач приведены в таблице ниже, после формулировки задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. Решения заданий должны быть полными, с подробным описанием методики выполнения. В ответах все значения округлять с точностью до четвертого знака после запятой.

6. Работа представляется не позднее установленных сроков. В случае невыполнения этого требования проверка самостоятельной работы производится в неустановленные сроки (после сессии).

7. Если работа не зачтена, то ее необходимо переделать в соответствии с указаниями, данными в рецензии, и с надписью «повторная» сдать на проверку, приложив рецензию к работе.

8. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

9. Работа с оценкой «зачет» обязательно представляется на экзаме-не (зачете).

Формулировки заданий для самостоятельной работы

1. В книжной лотерее разыгрывается n книг. Всего в урне имеется N билетов. Первый подошедший к урне вынимает 3 билета. Определить вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

2. В круг радиуса r случайным образом брошена точка, так, что ее любое расположение в круге равновозможно. Найти вероятность того, что она окажется внутри находящегося в круге квадрата со стороной a .

3. Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны p_1 и p_2 . Найти вероятности того, что при пожаре сработает хотя бы один датчик, только один датчик.

4. В тире имеется 5 различных по точности боя винтовок. Вероятность попадания в мишень для данного стрелка из винтовки соответственно равна 0,5; 0,55; 0,7; 0,75 и P . Чему равна вероятность попасть в мишень, если стрелок делает один выстрел из случайно выбранной винтовки? Попадание произошло. Чему равна вероятность того, что была выбрана первая винтовка?

5. Вероятность того, что баскетболист при броске попадет в корзину, равна p . Определить вероятность того, что, сделав n бросков, он m раз попадет.

6. Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна p . Определить вероятность того, что в партии из N деталей будет: ровно 3 бракованных; не более 3 бракованных.

7. В жилом доме имеется n ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет заключено между m_1 и m_2 .

8. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	-1	0	1
p_i	p	p	?

Найти MY и DY , если $Y = 2X + 3$.

9. Ошибка взвешивания – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0, и среднеквадратичным отклонением, равным n грамм. Найти вероятность того, что взвешивание произведено с ошибкой, не превышающей по модулю N грамм.

10. Результаты выборочного обследования 100 рабочих крупного завода, произведенного с целью определения времени, затрачиваемого на обработку детали, приведены в таблице:

Время обработки детали (мин)	3,6–4,2	4,2–4,8	4,8–5,4	5,4–6,0	6,0–6,6
Число рабочих	10	23	m_3	21	?

Требуется найти выборочную среднюю, несмещенную дисперсию, среднеквадратичное отклонение и границы интервала, в котором с надежностью 95 % заключено среднее время обработки детали всеми рабочими завода.

Варианты исходных данных для задач самостоятельной работы

Вариант		Номер задачи																	
		1		2		3		4		5		6		7			8		9
n	N	r	a	p_1	p_2	P	p	n	m	p	N	n	m_1	m_2	p	n	N	m_3	
1	12	50	8	4	0,75	0,67	0,53	0,6	7	4	0,001	7000	6400	3160	3280	0,2	1	2	29
2	11	51	9	3	0,85	0,59	0,54	0,7	8	5	0,002	2500	6400	3200	3280	0,1	2	4	30
3	10	52	10	5	0,65	0,87	0,56	0,8	7	3	0,003	1000	6400	3120	3200	0,15	3	6	31
4	9	53	11	3	0,7	0,63	0,57	0,6	8	4	0,001	5000	6400	3160	3240	0,45	4	8	32
5	8	54	12	7	0,8	0,83	0,58	0,7	9	5	0,003	2000	6400	3200	3240	0,25	5	10	33
6	7	55	13	6	0,6	0,73	0,59	0,8	6	2	0,002	3500	2500	1200	1300	0,3	6	6	34
7	6	56	14	8	0,75	0,93	0,61	0,6	10	6	0,001	2000	2500	1225	1250	0,35	7	14	35
8	5	57	15	4	0,85	0,91	0,62	0,7	7	6	0,002	2000	2500	1250	1275	0,4	8	8	36
9	4	58	14	7	0,65	0,92	0,63	0,8	8	2	0,002	3000	2500	1200	1250	0,43	9	18	37
10	12	59	13	2	0,55	0,95	0,64	0,6	7	2	0,003	2000	2500	1250	1300	0,23	10	10	38
11	11	60	12	5	0,5	0,96	0,71	0,7	9	4	0,001	4000	2500	1225	1275	0,33	11	22	39
12	10	61	11	6	0,79	0,94	0,72	0,8	10	3	0,002	3500	1600	820	870	0,13	12	24	40
13	9	62	10	3	0,89	0,84	0,73	0,6	9	6	0,003	1000	1600	840	860	0,17	13	13	28
14	8	63	9	2	0,69	0,83	0,74	0,7	7	5	0,002	1500	1600	800	820	0,47	14	14	41

Вариант		Номер задачи																
		1	2		3		4	5			6		7			8	9	
n	N	r	a	p_1	p_2	P	p	n	m	p	N	n	m_1	m_2	p	n	N	m_3
15	7	64	8	5	0,59	0,82	0,65	6	1	0,001	5000	1600	780	800	0,37	15	30	27
16	6	65	12	7	0,5	0,87	0,66	6	4	0,002	1000	6400	3200	3280	0,38	1	3	42
17	5	66	13	3	0,78	0,83	0,67	10	4	0,003	2000	6400	3120	3140	0,48	2	6	26
18	4	67	14	5	0,88	0,79	0,68	8	6	0,003	1000	6400	3160	3200	0,28	3	9	43
19	12	68	15	6	0,68	0,78	0,69	9	3	0,001	6000	6400	3200	3260	0,18	4	4	25
20	11	69	11	5	0,67	0,59	0,76	8	3	0,002	2500	6400	3120	3180	0,14	5	5	44
21	10	70	10	4	0,87	0,91	0,77	10	5	0,001	4000	2500	1225	1250	0,44	6	18	30
22	9	71	9	4	0,77	0,92	0,78	10	1	0,002	3500	2500	1250	1350	0,34	7	14	29
23	8	72	8	3	0,76	0,86	0,79	10	2	0,003	2000	2500	1200	1255	0,24	8	16	41
24	7	73	15	3	0,86	0,84	0,8	9	3	0,001	1000	2500	1250	1280	0,36	9	27	31
25	6	74	14	4	0,66	0,82	0,81	9	6	0,001	5000	2500	1225	1575	0,46	10	30	35

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для оценки результатов обучения по данному курсу ниже приведены вопросы к экзамену, темы рефератов и требования к их оформлению, а также образец титульного листа (прил. К).

Вопросы к экзамену

1. Основы вероятностных методов и моделирования систем.
2. Элементы теории вероятностей, используемые в математической статистике.
3. Элементарные понятия о случайных событиях, величинах, функциях.
4. Числовые характеристики случайных величин.
5. Случайные величины и их законы распределения, нормальный закон распределения.
6. Статистическая оценка методов распределения случайных величин.
7. Математическая статистика, основные понятия и определения.
8. Основные законы распределения случайных величин.
9. Обработка статистической информации.
10. Выбор теоретических законов распределения случайных величин.
11. Законы распределения, наиболее распространенные в технике.
12. Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства оценок.
13. Статистический анализ информации, проверка статистических гипотез.
14. Этапы построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели.
15. Регрессионный и корреляционный анализ результатов испытаний.
16. Планирование эксперимента.
17. Характеристика методов и моделей прогнозирования.
18. Прогнозирование на основе рядов с использованием пакета прикладных программ.
19. Моделирование систем с использованием марковских процессов.
20. Марковские цепи.

21. Моделирование систем массового обслуживания.
22. Компоненты и классификация моделей массового обслуживания.
23. Определение характеристик систем массового обслуживания.
24. Моделирование потоков отказов элементов сложных технических систем.
25. Стохастический опыт.
26. Пространство элементарных событий.
27. Определение вероятности случайного события. Алгебра событий.
28. Стохастическое, классическое и геометрическое определение вероятности.
29. Основные понятия комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания.
30. Правила сложения и произведения.
31. Зависимые события.
32. Условная вероятность.
33. Формула полной вероятности.
34. Формула Байеса.
35. Повторение испытаний.
36. Схема Бернулли.
37. Асимптотические формулы.
38. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
39. Случайные величины. Закон распределения случайной величины.
40. Функция распределения вероятностей, свойства.
41. Плотность распределения вероятностей, свойства.
42. Математическое ожидание случайной величины, свойства.
43. Дисперсия случайной величины, свойства.
44. Коэффициент асимметрии и эксцесс.
45. Равномерное распределение.
46. Биномиальное распределение.
47. Распределение Пуассона.
48. Показательное распределение.
49. Нормальное распределение.

50. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.
51. Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания. Правило «трех сигм».
52. Эмпирические характеристики. Понятие несмещенной, состоятельной и эффективной оценки. Формулы вычисления точечных оценок.
53. Построение интервальных оценок.
54. Интервальная оценка для математического ожидания.
55. Интервальная оценка для дисперсии и среднего квадратичного отклонения.
56. Интервальная оценка для вероятности.
57. Проверка статистических гипотез. Основные понятия.
58. Этапы проверки статистических гипотез.
59. Проверка гипотез о числовых значениях параметров нормального распределения.
60. Критерий согласия Пирсона.

Темы рефератов по дисциплине «Математическое моделирование. Специальные разделы высшей математики»

1. Основы вероятностных методов анализа и моделирования систем.
2. Элементарные понятия о случайных событиях, величинах и функциях.
3. Случайные величины и их законы распределения: биномиальный, равномерный, показательный, Пуассона).
4. Нормальный закон распределения в двумерном пространстве.
5. Обработка статистической информации. Эмпирические характеристики.
6. Выбор теоретического закона распределения случайных величин.
7. Законы распределения, наиболее распространенные в технике.
8. Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства его оценок.
9. Проверка статистической гипотезы о законе распределения. Критерии согласия.
10. Этапы построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели.

11. Регрессионный и корреляционный анализ результатов изменений.
12. Планирование эксперимента.
13. Характеристика методов и моделей прогнозирования.
14. Моделирование систем с использованием марковских процессов.
15. Марковские цепи.
16. Моделирование систем массового обслуживания.
17. Компоненты и классификация моделей массового обслуживания.
18. Определение характеристик систем массового обслуживания.
19. Моделирование потоков отказов элементов сложных технических систем.
20. Метод наименьших квадратов построения регрессионной модели.
21. Метод наибольшего правдоподобия в регрессионном анализе.
22. Понятия «модель», «моделирование». Сущность процессов моделирования. Общая схема моделирования.
23. Случайные процессы, их характеристики и типы.
24. Этапы построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели.
25. Исходные предпосылки регрессионного анализа, свойства оценок.
26. Стохастическое программирование, основные понятия.
27. Методы исследования математических моделей.
28. Простая парная регрессия. Корреляционный анализ.
29. Многофакторный дисперсионный анализ. Адекватность модели.
30. Множественная корреляция. Понятие об автокорреляции. Корреляционная матрица.
31. Понятие доверительного интервала. Построение доверительных интервалов числовых характеристик нормального распределения.
32. Понятие о линейном программировании. Общая постановка задачи линейного программирования.
33. Оптимизационные модели. Основные понятия.
34. Имитационное моделирование. Сущность, основные понятия.

35. Методы оптимизации: основные понятия, оптимизационные задачи, оптимальное решение. Параметры. Показатели. Критерии.
36. Распределения Стьюдента, Фишера, Пирсона.
37. Этапы создания имитационных моделей. Формализация объектов. Моделирующие алгоритмы.
38. Задачи нелинейного программирования. Методы решения.
39. Многокритериальные задачи оптимизации. Методы решения.
40. Задачи динамического программирования. Рекуррентное соотношение Беллмана. Задача оптимальной стратегии использования оборудования.
41. Функция плотности и функция распределения случайной величины. Многомерные распределения.

Требования к оформлению реферата

1. Поля стандартные: левое – 3 см, верхнее и нижнее – по 2 см, правое – 1,5 см. Шрифт – 14, Times New Roman, абзацный отступ – 1,25, междустрочный интервал – 1,5. Объем реферата – 15–20 стр. Оригинальность текста – не менее 70 %, включая не более 50 % цитирований.

2. Обязательные элементы: титульный лист, содержание, введение, основная часть (раскрывается теоретическая часть исследуемой проблемы, приводятся примеры применения в практике), заключение, список использованных источников (не менее пяти, включая интернет-ресурсы). В списке источников два и более должны быть учебниками либо учебными пособиями.

В прил. К приведен образец титульного листа для оформления реферата.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алпатов, Ю. Н. Математическое моделирование производственных процессов : учеб. пособие / Ю. Н. Алпатов. — Изд. 3-е, стер. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2023. — 135 с. — URL: e.lanbook.com/book/330485 (дата обращения: 02.09.2022). — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-507-47126-3.
2. Буре, В. М. Методы прикладной статистики в R и Excel : учеб. пособие для студентов вузов / В. М. Буре, Е. М. Парилина, А. А. Седаков. — Изд. 4-е, стер. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2023. — 148 с. — URL: e.lanbook.com/book/319424 (дата обращения: 02.09.2022). — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-507-46766-2.
3. Гателюк, О. В. Проверка статистических гипотез : учеб. пособие / О. В. Гателюк, Н. В. Манюкова. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. — 110 с. — URL: e.lanbook.com/book/238709 (дата обращения: 02.09.2022). — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-8114-9843-7.
4. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Юрайт, 2014. — 478, [1] с. — (Бакалавр. Базовый курс) (Министерство образования и науки РФ рекомендует). — ISBN 978-5-9916-3461-8.
5. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2013. — 403, [1] с. — (Бакалавр. Базовый курс) (Министерство образования и науки РФ рекомендует) (Учебное пособие). — ISBN 978-5-9916-2220-2.
6. Горлач, Б. А. Исследование операций : учеб. пособие / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. — 441 с. — URL: e.lanbook.com/book/211085 (дата обращения: 02.09.2022). — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-8114-1430-7.
7. Звонарев, С. В. Основы математического моделирования : учеб. пособие / С. В. Звонарев ; Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина. — Екатеринбург :

Издательство Уральского университета, 2019. – 111 с. – URL: elarf.uafu.ru/handle/10995/68494 (дата обращения: 02.09.2022). – ISBN 978-5-7996-2576-4.

8. Свешников, А. А. Прикладные методы теории марковских процессов : учеб. пособие / А. А. Свешников. – Изд. 2-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 190 с. – (Лучшие классические учебники. Математика). – URL: e.lanbook.com/book/189439 (дата обращения: 02.09.2022). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-9341-8.
9. Хрущева, И. В. Основы математической статистики и теории случайных процессов : учеб. пособие / И. В. Хрущева, В. И. Щербаков, Д. С. Леванова. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 331 с. – URL: e.lanbook.com/book/210386 (дата обращения: 02.09.2022). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-0914-3.

Онлайн-ресурсы

10. Учебник по теории вероятности онлайн // МатБюро : Математическое бюро : [сайт]. – URL: www.matburo.ru/tv_book.php (дата обращения: 02.09.2022).
11. Теория вероятностей : электронный учебник / разработка В. Косыковой. – Братск, 2003. – URL: teoriaver.narod.ru/gl.htm (дата обращения: 02.09.2022).
12. Web-версия учебного курса «Теория вероятностей» / разработана и используется на кафедре ИИС и ФЭ, ПетрГУ ; идея проекта Л. А. Луизовой // опорный вуз Петрозаводский государственный университет : [сайт]. – URL: dims.petrstu.ru/posob/PT/ (дата обращения: 02.09.2022).
13. Чернова, Н. И. Теория вероятностей : 1 курс ЭФ, отделение экономики, весенний семестр // Новосибирский государственный университет : [сайт]. – URL: www.nsu.ru/mmfm/tvims/chernova/tv/lec/lec.html (дата обращения: 02.09.2022).

Сайты, на которых размещены электронные версии свободно распространяемых учебных пособий

14. Math-Net.Ru : Общероссийский портал / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. – URL: www.mathnet.ru (дата обращения: 02.09.2022).
15. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук : [сайт]. – URL: www.mi.ras.ru (дата обращения: 02.09.2022).
16. МЦНМО. Московский центр непрерывного математического образования : [сайт]. – URL: www.mcsme.ru (дата обращения: 02.09.2022).
17. Свободно распространяемые издания // МЦНМО. Московский центр непрерывного математического образования : [сайт]. – URL: www.mcsme.ru/free-books (дата обращения: 02.09.2022).
18. Библиотека имени Эйлера : [сайт]. – URL: lib.lenin.ru/index (дата обращения: 02.09.2022).
19. EqWorld : Мир математических уравнений : [сайт]. – Москва, 2004–2024. – URL: eqworld.ipmnet.ru (дата обращения: 02.09.2022).

ГЛОССАРИЙ

Вариационный ряд – реализации, записанные не в порядке получения, а в порядке возрастания, то есть упорядоченная выборка.

Выборка (выборочная совокупность) – совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности для исследования конкретного признака.

Выборочный метод – метод статистического обследования, при котором из совокупности выбирают ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Генеральная совокупность – совокупность объектов, подлежащих исследованию на определенные признаки с помощью статистических методов.

Гистограмма – графическое изображение эмпирической плотности, строится для группированных выборок. Столбиковая диаграмма, у которой основание есть длина частичного интервала, а высота – величина эмпирической плотности соответствующей группы.

Доверительный интервал с уровнем доверия – интервал, покрывающий значение оцениваемого параметра с доверительной вероятностью γ .

Задачи математической статистики – 1) нахождение закона распределения случайных величин по статистическим данным; 2) проверка правдоподобия гипотез; 3) определение неизвестных параметров распределения.

Квантиль k_β уровня β величины ξ , имеющей плотность распределения $f(x)$, – верхняя граница интервала, в который с заданной вероятностью β попадает случайная величина, то есть это k_β – корень решения уравнения.

Корреляционная модель – применяется в случае, когда оба признака изучаемой двумерной величины равноправны.

Критическая область – область, при попадании в которую значения статистики критерия, вычисленной по выборке, основная гипотеза отвергается.

Кумулята – график накопленных частот, сглаженное графическое изображение эмпирической функции распределения.

Линейная статистическая связь – Статистическая связь между величинами, которая может быть приближенно выражена уравнением прямой линии.

Математическая статистика – наука, изучающая методы обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью, закономерностью, с целью выявления этой закономерности.

Медиана – такая точка, что половина принимаемых значений распределения лежит слева от нее, а половина – справа (центр распределения). В случае группированного вариационного ряда эмпирическая медиана делит площадь гистограммы пополам.

$Me = L + i \left(\frac{\frac{n+1}{2} - F}{f} \right)$, где L – нижняя граница интервала, в котором находится медиана (медианный интервал); i – величина медианного интервала; n – объем выборки; f – частота медианного интервала; F – накопленная частота интервала, предшествующему медианному.

Метод моментов – метод получения оценок параметров, который состоит в том, что если оцениваемый параметр распределения является функцией от моментов распределения (в самом простом случае сам является моментом), то в эту функцию подставляются эмпирические значения моментов и полученное значение берется в качестве оценки для параметра.

Метод сплошных наблюдений – метод статистического обследования, при котором производится изучение всех элементов совокупности.

Мода – для дискретного вариационного ряда – значение x_m , эмпирическая вероятность n_i / n которого максимальна; для интервального ряда определяется графически по гистограмме или с помощью линейной интерполяции $Mo = L + i \frac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})}$, где L – нижняя граница модального интервала; i – величина модального интервала; f_{Mo} , f_{Mo-1} , f_{Mo+1} – частота модального, предшествующего модальному и следующего за модальным интервала.

Нелинейная статистическая модель – статистическая связь между величинами, которая может быть приближенно выражена уравнением кривой линии.

Несмещенная оценка параметра – такая оценка, математическое ожидание которой по всевозможным выборкам данного объема равняется истинному значению параметра.

Относительная (эмпирическая) частота значения — отношение n_i / n , где n — объем выборки, а n_i — число повторений значения x_i в выборке.

Ошибка первого рода — ее совершают, когда отвергают основную гипотезу, когда она истинна.

Ошибка второго рода — ее совершают, приняв основную гипотезу, когда она ложна.

Полигон — графическое изображение вариационных рядов, ломаная линия, соединяющая точки с координатами.

Размах вариационного ряда — расстояние $R = x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}}$ между крайними членами вариационного ряда.

Реализации — значения y_1, y_2, \dots, y_n , которые приняла случайная величина ξ в n наблюдениях.

Регрессионная модель — модель, применяемая в случае, когда один из двух признаков, например x , выступает в качестве независимой компоненты (чаще всего это время), то есть переменная x вообще не случайна, а случайна только переменная y .

Репрезентативная выборка — выборка, которая производится так, что все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Состоятельная оценка — такая оценка, которая при увеличении объема выборки сходится по вероятности к истинному значению параметра.

Статистика — любая функция $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящая от выборки; является случайной величиной.

Статистическое распределение выборки — таблица из двух строк, в верхней строке указаны в порядке возрастания наблюдаемые значения, а в нижней — соответствующие им относительные частоты.

Сходимость случайной величины по вероятности к некоторому значению — означает, что при увеличении числа испытаний могут встретиться значения случайной величины, довольно сильно отличающиеся от предельного значения, но процент таких испытаний будет с ростом n уменьшаться (вероятность отклонения с ростом n стремится к 0).

Точечная оценка параметра — оценка параметра в виде числа — точки на координатной оси.

Приложение А

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,114	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830
1,20	0,3849	1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,60	0,4953
1,21	0,3869	1,61	0,4463	2,02	0,4783	2,62	0,4956
1,22	0,3883	1,62	0,4474	2,04	0,4793	2,64	0,4959
1,23	0,3907	1,63	0,4484	2,06	0,4803	2,66	0,4961
1,24	0,3925	1,64	0,4495	2,08	0,4812	2,68	0,4963
1,25	0,3944	1,65	0,4505	2,10	0,4821	2,70	0,4965
1,26	0,3962	1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,72	0,4967
1,27	0,3980	1,67	0,4525	2,14	0,4838	2,74	0,4969
1,28	0,3997	1,68	0,4535	2,16	0,4846	2,76	0,4971
1,29	0,4015	1,69	0,4545	2,18	0,4854	2,78	0,4973

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,30	0,4032	1,70	0,4554	2,20	0,4861	2,80	0,4974
1,31	0,4049	1,71	0,4564	2,22	0,4868	2,82	0,4976
1,32	0,4066	1,72	0,4573	2,24	0,4875	2,84	0,4977
1,33	0,4082	1,73	0,4582	2,26	0,4881	2,86	0,4979
1,34	0,4099	1,74	0,4591	2,28	0,4887	2,88	0,4980
1,35	0,4115	1,75	0,4599	2,30	0,4893	2,90	0,4981
1,36	0,4131	1,76	0,4608	2,32	0,4898	2,92	0,4982
1,37	0,4147	1,77	0,4616	2,34	0,4904	2,94	0,4984
1,38	0,4162	1,78	0,4625	2,36	0,4909	2,96	0,4985
1,39	0,4177	1,79	0,4633	2,38	0,4913	2,98	0,4986
1,40	0,4192	1,80	0,4641	2,40	0,4918	3,00	0,49865
1,41	0,4207	1,81	0,4649	2,42	0,4922	3,20	0,49931
1,42	0,4222	1,82	0,4656	2,44	0,4927	3,40	0,49966
1,43	0,4236	1,83	0,4664	2,46	0,4931	3,60	0,499841
1,44	0,4251	1,84	0,4671	2,48	0,4934	3,80	0,499928
1,45	0,4265	1,85	0,4678	2,50	0,4938	4,00	0,499968
1,46	0,4279	1,86	0,4686	2,52	0,4941	4,50	0,499997
1,47	0,4292	1,87	0,4693	2,54	0,4945	5,00	0,499997
1,48	0,4306	1,88	0,4699	2,56	0,4948		
1,49	0,4319	1,89	0,4706	2,58	0,4951		
1,50	0,4332	1,90	0,4713				
1,51	0,4345	1,91	0,4719				
1,52	0,4357	1,92	0,4726				
1,53	0,4370	1,93	0,4732				
1,54	0,4382	1,94	0,4738				
1,55	0,4394	1,95	0,4744				
1,56	0,4406	1,96	0,4750				
1,57	0,4418	1,97	0,4756				
1,58	0,4429	1,98	0,4761				
1,59	0,4441	1,99	0,4767				

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ	0,95	0,99	0,999	n	γ	0,95	0,99	0,999
5		2,78	4,60	8,61	20		2,093	2,861	3,883
6		2,57	4,03	6,86	25		2,064	2,797	3,745
7		2,45	3,71	5,96	30		2,045	2,756	3,659
8		2,37	3,50	5,41	35		2,032	2,720	3,600
9		2,31	3,36	5,04	40		2,023	2,708	3,558
10		2,26	3,25	4,78	45		2,016	2,692	3,527
11		2,23	3,17	4,59	50		2,009	2,679	3,502
12		2,20	3,11	4,44	60		2,001	2,662	3,464
13		2,18	3,06	4,32	70		1,996	2,649	3,439
14		2,16	3,01	4,22	80		1,991	2,640	3,418
15		2,15	2,98	4,14	90		1,987	2,633	3,403
16		2,13	2,95	4,07	100		1,984	2,627	3,392
17		2,12	2,92	4,02	120		1,980	2,617	3,374
18		2,11	2,90	3,97	∞		1,960	2,576	3,291
19		2,10	2,88	3,92					

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ	0,95	0,99	0,999	n	γ	0,95	0,99	0,999
5		1,37	2,67	5,64	20		0,37	0,58	0,88
6		1,09	2,01	3,88	25		0,32	0,49	0,73
7		0,92	1,62	2,98	30		0,28	0,43	0,63
8		0,80	1,38	2,42	35		0,26	0,38	0,56
9		0,71	1,20	2,06	40		0,24	0,35	0,50
10		0,65	1,08	1,80	45		0,22	0,32	0,46
11		0,59	0,98	1,60	50		0,21	0,30	0,43
12		0,55	0,90	1,45	60		0,188	0,269	0,38
13		0,52	0,83	1,33	70		0,174	0,245	0,34
14		0,48	0,78	1,30	80		0,161	0,226	0,31
15		0,46	0,73	1,15	90		0,151	0,211	0,29
16		0,44	0,70	1,07	100		0,143	0,198	0,27
17		0,42	0,66	1,01	150		0,115	0,160	0,211
18		0,40	0,63	0,96	200		0,099	0,136	0,185
19		0,39	0,60	0,92	250		0,089	0,120	0,162

Критические точки z^2 распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение Е

Критические точки t -распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,70	31,82	63,70	318,30	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
Уровень значимости α (односторонняя критическая область)						

Критические точки $F_{кр}$ распределения Фишера

Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
k_2	k_1 — число степеней свободы большей дисперсии											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	40,52	49,99	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha = 0,05$

k_2	k_1 — число степеней свободы большей дисперсии											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,502	2,45	2,41	2,38

Распределение Пуассона (значения $P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$)

m	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$	$a = 0,9$	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0154	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	
m	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Образец титульного листа

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

_____ (наименование института полностью)

Кафедра « _____ »
(наименование)

_____ 08.04.01 Строительство _____
(код и наименование направления подготовки)

_____ (направленность (профиль))

РЕФЕРАТ (ЭССЕ)

на тему « _____ »

Студент _____ (И. О. Фамилия) _____ (личная подпись)

Преподаватель _____
(ученая степень, звание,
И. О. Фамилия)

Тольятти 20__

Содержание

Введение	3
Тема 1. Статистическая обработка экспериментальных данных	6
Тема 2. Вычисление статистических характеристик случайных величин по опытным данным	26
Тема 3. Построение эмпирических законов распределения по результатам экспериментальных данных	41
Тема 4. Оценка согласия теоретического и эмпирического распределений по критерию χ^2	50
Тема 5. Построение интервальных оценок числовых характеристик случайной величины по опытным данным	56
Тема 6. Математическое моделирование процесса на основе регрессионного анализа	64
Задания для самостоятельной работы	88
Заключение	93
Библиографический список	98
Глоссарий	101
Приложение А	104
Приложение Б	105
Приложение В	107
Приложение Г	108
Приложение Д	109
Приложение Е	110
Приложение Ж	111
Приложение И	113
Приложение К	114

Учебное издание

Кузнецова Ольга Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ
РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е.А. Держаева*

Технический редактор *Н.П. Крюкова*

Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*

Дизайн обложки: *И.И. Шишкина*

*При оформлении обложки использовано
изображение от freepik (сайт ru.freepik.com)*

Подписано в печать 12.05.2025. Формат 60×84/16.

Печать оперативная. Усл. п. л. 6,74.

Тираж 100 экз. Заказ № 1-85-22.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 44-91-47, www.tltsu.ru