МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общеинженерной подготовки
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Обучение тригонометрическим функциям и их свойствам в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы»

Обучающийся А.А. Козловская
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2024

Оглавление

Введение ... 3

Глава 1 Теоретические основы обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе ... 11

1.1 Исторические аспекты развития понятия функции и тригонометрических функций в школьном курсе математики ... 11

1.2 Основные цели и задачи обучения тригонометрическим функциям и их свойствам в курсе алгебры и начал математического анализа ... 20

1.3 Анализ учебно-методической литературы по обучению теме «Тригонометрические функций и их свойства» ... 28

1.4 Формы и методы организации учебной деятельности при обучении теме «Тригонометрические функции и их свойства» ... 49

Глава 2 Методические основы обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе» ... 66

2.1 Методические рекомендации по изучению числовой окружности как второй модели числового множества ... 66

2.2 Методические рекомендации по обучению тригонометрическим функциям и их свойствам ... 72

2.3 Система упражнений по теме «Тригонометрические функции и их свойства» ... 93

2.4 Описание педагогического эксперимента ... 104

Заключение ... 117

Список используемой литературы и используемых источников ... 119

Приложение А Ответы и указания к решению системы задач ... 128

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Современное образование постоянно развивается, стремясь отвечать на вызовы времени и предоставлять обучающимся знания, необходимые для успешной жизни и профессиональной деятельности в быстро меняющемся мире.

В школьном курсе математики функциональная линия играет центральную роль, так как именно функции являются основой для решения множества математических задач. Изучение тригонометрии в рамках школьного курса математики значительно расширяет понимание функциональной линии и придает ей внутрипредметный и межпредметный характер. Освоение школьниками тригонометрии очень важно не только в контексте самого предмета. Умения и навыки, приобретенные ими при изучении тригонометрических функций и их свойств, находят активное применение в таких науках, как физика, химия. Тригонометрические функции помогают описывать и изучать различные явления и законы природы, а также применяются в технических и инженерных расчетах. Овладев понятиями тригонометрических функций и их свойств, учащиеся могут успешно решать задачи, связанные с измерениями углов, расстояниями, колебаниями и другими явлениями, которые имеют практическое применение в различных областях науки и техники. Кроме того, понимание старшеклассниками функциональных зависимостей и соотношений между тригонометрическими функциями помогает развивать у них критическое мышление и аналитические способности.

Множество факторов выделяют эту тему как предмет особого методического интереса: тригонометрические функции являются одними из основных элементов алгебры и математического анализа, их освоение необходимо для дальнейшего изучения математики; знание тригонометрии необходимо во многих областях, включая физику, инженерию, архитектуру и даже компьютерные науки; с развитием цифровых технологий возникают новые методы обучения данной теме, которые могут улучшить понимание тригонометрических функций у школьников; тригонометрия связана с другими предметами, такими как геометрия и информатика, что делает её изучение важным для овладения математикой как наукой; рассматриваемая тема предоставляет широкие возможности для определения различных методик и технологий ее обучения, направленных на улучшение качества усвоения материала обучающимися старших классов.

Существует немалое количество диссертационных работ, посвященных изучению тригонометрических функций и их свойств в общеобразовательной школе.

В своих исследованиях С.Н. Суханова [62] подчеркивает, что изучение тригонометрии с использованием технологий дистантного обучения и деятельностного подхода способствует не только развитию математических способностей, но и повышению уровня мотивации обучающихся. Эти методы обеспечивают индивидуализацию обучения, что позволяет каждому ученику работать в своем темпе и стиле, учитывая свои особые потребности и интересы. Кроме того, по мнению автора, использование данных технологий помогает в организации самостоятельной работы, а также активно вовлекает учеников в процесс рефлексии, что, в свою очередь, способствует глубокому осмыслению изучаемого материала.

О.В. Захарова [23] рассматривает деятельностный подход при обучении тригонометрии, как подход, направленный на развитие самостоятельной исследовательской деятельности при решении различных заданий, связанных с практическим применением. Деятельностный подход в работе автора дополняется содержательным и личностно-ориентированным подходами, благодаря чему, происходит укрупнение значимых для каждого профиля дидактических единиц, при этом обязательно учитывается уровень знаний учащихся и их интересы.

В своём исследовании М.Г. Луканина отмечает, что в старшей школе трудности в изучении тригонометрии связаны с несоответствием большого объёма содержания темы и выделенных на изучение часов, которых часто недостаточно для отработки практических навыков, из-за чего возрастает доля самостоятельной работы обучающихся. Автором разработаны «принципы использования разноуровневого электронного учебника, позволяющего учащемуся самостоятельно выбирать познавательную модель при изучении тригонометрии в старшей школе, ориентируясь при этом на достижение предметных и метапредметных результатов, заложенных во ФГОС, в частности, на развитие представлений о математических методах познания действительности, на развитие навыков преобразований тригонометрических выражений, составляющих важную часть математической культуры школьника» [34, с. 7-8].

А.Н. Марасанов [38] так же считает, что эффективность обучения в большей степени зависит от систематизации и подбора задач, причём автор отмечает неориентированность сборников задач по тригонометрии на индивидуальные особенности учащихся.

Б.Б. Молоткова [42] считает, что дифференциация заданий с использованием интерактивности электронных образовательных ресурсов позволит повысить осознанность знаний при изучении тригонометрии.

Авторы диссертационных исследований отмечают, что «целостной концепции изучения тригонометрии в школе в связи с требованиями ФГОС к образовательным результатам не разработано; …. имеет место недостаточная разработанность соответствующего дидактического и методического обеспечения» [34]; «у большинства учащихся уровень знаний и умений по тригонометрии не соответствует предъявляемым требованиям ЕГЭ, федеральных государственных образовательных стандартов основного и среднего математического образования» [38]; «знания большинства учащихся (более 65%) по тригонометрии недостаточно осознанны» [42].

Итак, можно констатировать, что вопросы методики обучения тригонометрии в школьном курсе математики актуальны. Однако в них методика обучения тригонометрическим функциям и их свойствам не являлась предметом специальных исследований.

Актуальность данного исследования обусловлена современными изменениями в образовательной системе, связанными с внедрением Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (ФГОС СОО), при котором результаты образовательного процесса смещают на себя акцент с традиционных методов обучения. В соответствии со стандартом в школе должны быть созданы условия для выявления и раскрытия потенциала обучающихся; внедрение деятельностного подхода в преподавание математики предполагает их активное участие в образовательном процессе, что в свою очередь обуславливает внедрение современных методов и новых форм работы от учителя.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени противоречием между необходимостью обучения старшеклассников теме "Тригонометрические функции и их свойства" и недостаточным научно-методическим обеспечением этой темы в образовательном процессе.

Указанное противоречие позволило сформулировать проблему диссертационного исследования: каковы методические основы обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы?

Объектом исследования является процесс обучения алгебре и началам математического анализа общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа в общеобразовательной школе.

Цель исследования заключается в выявлении методических основ обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы и разработка соответствующей системы задач.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что специально разработанные методические материалы, включающие систему задач на формирование основных понятий темы в курсе алгебры и начал математического анализа, будут способствовать улучшению понимания школьниками основных понятий темы и повышению качества усвоения этой темы.

Для реализации поставленной цели необходимо решить ряд задач, а именно:

1. Раскрыть исторические аспекты развития понятия функции и тригонометрических функций в школьном курсе математики.
2. Выделить основные цели и задачи обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в старших классах общеобразовательной школы.
3. Проанализировать рабочие программы и содержание теоретического материала по теме «Тригонометрические функции и их свойства» в различных учебниках алгебры и начал математического анализа, а так же в учебных пособий по данной теме.
4. Описать формы и методы организации учебной деятельности при обучении теме «Тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе.
5. Разработать методику обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства», направленную на достижение планируемых результатов.
6. Разработать систему упражнений по теме «Тригонометрические функции и их свойства».
7. Провести педагогический эксперимент для проверки эффективности разработанной методики и методических материалов, описать полученные результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы Н.М. Бескина [6], Т.А. Ивановой [65], А.Г. Мордковича [44], [46], Н.И. Попова [55] - [57], Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой [53], В.В. Репьева [59], А.А. Темербековой [64], Р.А. Утеевой [69] - [71], Л.М. Фридмана [74] и других исследователей.

Базовыми для настоящего исследования явились также: работы Е.И. Лященко [32], А.Г. Мордковича [43], Ю.М. Колягина [25], В.С. Крамора [30], [31].

Методы исследования: изучение и анализ научно-методической литературы; изучение практики отечественных и зарубежных школ по рассматриваемой теме; анализ практического опыта учителей математики; анализ учебников и дидактических материалов; наблюдение и обобщение опыта работы педагогов; систематизация и обобщение результатов проведенных исследований; педагогический эксперимент.

Основные этапы исследования:

1 этап (2022/2023 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ);

2 этап (2023/2024 уч.г.): определение теоретических основ обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе;

3 этап (2023/2024 уч.г.): выявление методических основ обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе и разработка соответствующих методических рекомендаций; разработка системы упражнений по данной теме;

4 этап (2024/2025 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по главам.

Опытно-экспериментальной базой исследования явилась МБУ «Школа №13» г.о. Тольятти.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика обучения тригонометрическим функциям в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования определяется тем, что в нем:

– раскрыть исторические аспекты развития понятия функции и тригонометрических функций в школьном курсе математики;

– выделить основные цели и задачи обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в старших классах общеобразовательной школы;

– представлены результаты анализа рабочих программ и содержания теоретического материала по теме «Тригонометрические функции и их свойства» в различных учебниках алгебры и начал математического анализа, а также в учебные пособия;

– описаны формы и методы организации учебной деятельности при обучении данной теме в общеобразовательной школе.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нём приведены методические рекомендации по обучению тригонометрическим функциям и их свойствам, ориентированные на повышение качества обучения математике учащихся старших классов; представлена разработанная система упражнений по теме «Тригонометрические функции и их свойства» в рамках технологии формирования понятий Е.И. Лященко.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом практики работы в школе, а также личным опытом работы.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических особенностей обучения тригонометрическим функциям и их свойствам и соответствующих методических рекомендаций; разработке системы упражнений по данной теме; описании результатов экспериментальной работы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Результаты проведенного исследования были апробированы в ходе прохождения производственных практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета. По теме исследования имеется публикация [24].

На защиту выносятся следующие положения:

– методика обучения старшеклассников тригонометрическим функциям и их свойствам должна быть построена на основе применения системы упражнений, направленной на формирование основных понятий темы, различных форм организации учебной деятельности, что обеспечит повышение качества усвоения этой темы;

– технология формирования понятий при обучении старшеклассников тригонометрическим функциям и их свойствам направлена на повышение качества их математической подготовки.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 25 рисунков, 12 таблиц, список используемой литературы (87 источников). Основной текст работы изложен на 127 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе

1.1 Исторические аспекты развития понятия функции и тригонометрических функций в школьном курсе математики

Функциональная линия выполняет совершенно уникальную роль в образовательном процессе. Ещё в начальных классах происходит знакомство учащихся с функциональной линией: ученики сталкиваются с арифметическими зависимостями и базовыми геометрическими моделями.

Функциональная линия обеспечивает целостность и последовательность обучения, позволяя учащимся формировать устойчивые связи между темами и умениями, что способствует восприятию математики как единой структуры. Кроме того, функциональная линия способствует развитию математической грамотности, формируя умений применять знания в повседневной жизни, что имеет важное значение для подготовки к взрослой жизни и профессиональной деятельности. Интеграция математики с другими дисциплинами, такими как физика, экономика и информатика, демонстрирует важность математических знаний в различных сферах науки и повседневной жизни. В конечном итоге, понимание функциональной линии помогает учащимся осознать структуру и логику математики, что содействует развитию навыков самостоятельного обучения, что становится особенно актуальным в современном быстро меняющемся мире. Таким образом, функциональная линия в школьной математике обеспечивает структурированное и осмысленное обучение, способствует развитию ключевых навыков у учащихся и позволяет интегрировать математические знания с реальной жизнью, что в итоге повышает качество образования и формирует уверенность в своих способностях.

Одним из первых, кто исследовал тему развития понятия функции, был Н.Я. Виленкин, в своей статье [10] он отмечал, что с развитием человеческого сознания и осознанием взаимосвязи между окружающими явлениями появилась концепция изучения функциональной зависимости.

Изначально, человек, который не обладал умением производить вычисления, замечал, что уровень его жизни напрямую зависел от количества добываемой пищи. Со временем люди начали выявлять всё более сложные взаимосвязи между различными величинами. Чтобы лучше понять эти зависимости, они начали применять числовые обозначения. Например, можно привести следующий случай: за одну корову давали 8 зайцев, за две – 16 зайцев, а за три – 24 зайца. Таким образом, стало очевидным явление пропорциональности величин [10].

Для упрощения расчетов более сложных зависимостей древние жители Вавилона разработали специальные таблицы, которые можно считать предшественниками современных табличных заданий функций. Эти таблицы содержали набор числовых значений, связанных с конкретными параметрами фигур.

Путь от создания таблиц до формирования идеального понимания функциональной зависимости занял немало лет, но первые шаги уже были сделаны. Исследование взаимосвязей между различными величинами берет свое начало в XIV веке, когда французский ученый Николас Орем начал разрабатывать идеи, которые можно считать предшественниками современных графиков функций. В его работах встречаются изображения, по своему виду напоминающие графики, а также предложения по их классификации, но на тот момент, не было навыков для их реализации, так как в тот период не использовалась алгебра с буквенным обозначением.

Внедрение понятия переменных, предложенной в XVI веке Рене Декартом (1596–1650), дало возможность по-новому взглянуть на задачи, с которыми сталкивались ученые, и стало катализатором для дальнейшего развития науки, что положило начало понятия числовой функции, в которой числовой аргумент также играл значимую роль. Рене Декарт в своих записях внедрил использование букв для обозначения зависимостей и выразил соотношения через уравнения.

XVII век стал временем, когда возникла необходимость в общем понятии функции, которое появилось вместе с термином «переменная». Это связано с активным изучением процессов движения, изменений и явлений, зависящих от времени. К началу XVII века математики уже обладали знанием о таких формах, как эллипсы, гиперболы и параболы, но в тот период еще не существовало универсального метода для анализа этих фигур. Работы Рене Декарта и Пьера Ферма открыли новые перспективы для исследователей, позволяя им выводить новые кривые и анализировать их через соответствующие алгебраические уравнения [11, С. 10 – 12].

Изначально понятие функции тесно связано с геометрическими и механическими представлениями. Исаак Ньютон расширил понимание переменной величины, учитывая механические аспекты. В его представлении функция — это величина, изменяющаяся во времени. Рене Декарт и Пьер Ферма связывали идеи переменной величины с вопросами геометрии, что стало важным шагом в развитии математической науки [15, С. 99].

В своём произведении «Геометрия» Рене Декарт отмечал: «Придавая линии последовательно бесконечное множество различных значений, мы также откроем бесконечное число значений и, тем самым, получим бесконечное количество уникальных точек…; они образуют нужную линию» [15]. В его размышлениях отчетливо прослеживается геометрическая взаимосвязь между переменными x и y, что на практике соответствует графическому представлению функции и подчеркивает важность использования координатной плоскости для визуализации математических понятий. Этот подход позволял не только лучше понять взаимозависимости, но и наглядно иллюстрировать сложные зависимости между величинами.

Термин «функция» был впервые введён в 1673 году немецким математиком Готфридом Лейбницем. Изначально понятие «функция» рассматривалось в контексте отрезков касательных, кривых и их проекций, что отражало стремление математики к пониманию изменения и зависимости. В это время «функции» также соотносились с «другими типами линий, выполняющих специфическую роль для данной фигуры» [16, С. 16 – 17] и активно использовались для описания физических явлений, таких как движение и изменение. Это свидетельствует о том, что в то время понятие функции ещё не освободилась от своего геометрического объяснения и оставалась тесно связанной с визуальными представлениями, что определяло подход к решению многих математических задач. Поскольку развитие анализа продолжалось, понимание функций трансформировалось, и к XVIII веку оно стало более абстрактным.

Иоганн Бернулли (1667–1748) в 1718 году предложил понятие функции как числа, заданного определённым образом, которое зависит от независимых и зависимых переменных. Позже, в 1748 году, Леонард Эйлер, сформулировал понятие функции, как переменной. Именно Эйлер стал инициатором введения символики и обозначений функций, которые в значительной степени легли в основу современного математического языка [84].

В 1937 году немецкий математик Л. Дирихле выдвинул идею более полного определения функции. Формулировка Л. Дирихле о функции часто связывается с анализом и определением функции, как зависимости между переменными. Одно из наиболее известных определений функции было предложено Дирихле в его работе, где он акцентировал внимание на том, что функция — это правило, «которое каждому элементу из одного множества ставит в соответствие ровно один элемент из другого множества. При этом соответствие может быть установлено различными способами — через аналитическую формулу, график, таблицу или даже словесное описание» [16]. В 1834 году, русский математик Н.И. Лобачевский предложил аналогичное определение, не зная о работах Дирихле [16, С. 24]. Новизна в определении Дирихле функции как произвольного соответствия заключается в не столько в определении, сколько в его применении. Математики от Эйлера до Фурье и Коши на словах признавали «произвольную» природу функций, но на самом деле, на практике они рассматривали функции как аналитические выражения или кривые [84].

К середине XIX века уже не существовало единого подхода к определению функции с помощью формул. В середине XIX века понятие функции претерпело значительные изменения, основанные на идее соответствия. Активное развитие теории множеств в это время способствовало расширению представлений о функциях. Теперь они рассматривались не только в пределах числовых множеств, но и в связи с разнообразными объектами, что привело к пониманию функции как отображения. Таким образом, возникновение новых подходов позволило переосмыслить природу функции в математике [54, С. 8].

Г. Кантор и Р. Дедекинд, основоположники теории множеств, предложили более широкое определение для понятия отображения. Введение этого понятия в математический анализ стало важным шагом, способствующим более глубокому пониманию сложных и обратных функций. Кроме того, оно открыло новые горизонты для изучения множества других математических вопросов, что в свою очередь значительно обогатило теоретическую базу анализа и открыло новые направления для дальнейших исследований

В XX веке разгорелись активные дискуссии вокруг понятия, предложенной Дирихле. Важный вопрос о необходимости дальнейшей разработки определения функции возник в 1930 году, когда была опубликована книга «Основы квантовой механики» Поля Дирака. В ней автор ввёл новую категорию, называемую дельта-функцией. Этот новаторский шаг оказал мощное воздействие на математическое сообщество, что в свою очередь побудило ряд исследователей, включая советского математика Н.М. Гюнтера, заняться изучением более широких понятий. Вместо того чтобы ограничиваться функциями отдельных точек, учёные начали исследовать так называемые «функции области».

Понятие обобщённых функций в значительной степени возникла благодаря трудам французского математика Лорана Шварца, который заложил основы этой теории. Шварц ввёл новые методы и подходы, которые радикально изменили восприятие функции в математике, расширяя их применение и открывая новые горизонты для исследований. Однако именно в 1936 году советский математик и механик С.Л. Соболев, которому на тот момент было всего 28 лет, первым серьёзно исследовал случаи обобщённых функций, содержащих дельта-функцию. Его работа по этой теории позволила решить множество задач в области математической физики, что стало важным шагом в развитии данной области. Значительный вклад в теорию обобщённых функций внесли и ученики Шварца, такие как И.М. Гельфант и Г.Е. Шилов, которые продолжили развивать и углублять идеи, заложенные их предшественником [15].

Немецкий математик Феликс Клейн (1849-1925), стал одной из ведущих фигур, способствовавших интеграции понятия функции в школьное математическое образование. Он подчеркивал, что понятие функции занимает центральное место в современной математике, что, в свою очередь, повлияло на методы преподавания. В 1905 году Клейн предложил Меранскую программу, которая акцентировала внимание на изучении функциональных зависимостей как важнейшего элемента в математическом образовании. Эта программа была не просто теоретической — она имела практические цели и подчеркивала актуальность функциональных зависимостей в естественных науках и технике. Идеи Клейна переработали подходы к обучению математике как в Германии, так и за её пределами, включая Россию, что способствовало распространению новых методов обучения и формированию глубокого понимания математических понятий у учащихся [66].

Важно отметить, что в период между XIX и XX веками, до появления Меранской программы, в российской системе образования заметное влияние на изучение функций оказали выдающиеся педагоги, такие как М.В. Остроградский и В.П. Шереметьевский. В частности, В.П. Шереметьевский подчеркивал необходимость формирования основного курса математики на базе понятия функции, что способствовало углубленному пониманию этого важного аспекта математики у учеников. В свою очередь, М.В. Остроградский стал пионером внедрения элементов математического анализа в учебный процесс кадетских корпусов, что обозначило новый этап в образовательной практике того времени. Эти новаторские подходы, предложенные такими учеными, кардинально изменили методику преподавания математики и заложили основы для дальнейшего развития математического анализа в российских учебных заведениях. Благодаря их усилиям, важность функциональных зависимостей была значительно поднята, что, безусловно, отразилось на качестве математического образования [35].

Определено, что «историческое развитие понятия функции можно проследить через несколько ключевых этапов:

– первый этап представляет собой подготовительный период, охватывающий временной промежуток от древности до XVII века;

– второй этап отмечен введением понятия функции, основанного на механических и геометрических представлениях, что началось в начале XVII века;

– третий этап связан с формулировкой аналитического определения функции, который продолжался с XVII до XIX века» [10];

– четвертый этап рассматривает функцию как отображение, что стало актуальным в XIX веке;

– пятый этап ознаменовался дальнейшим развитием понятия функции и начался в XX веке.

В современном математическом сообществе широко используется определение функции, предложенное Ю.М. Колягиным, который утверждает, что «понятие функции является одним из основных математических понятий, имеющих непосредственную связь с реальной действительностью. В этом понятии ярко отражены изменчивость и динамика реального мира, а также взаимосвязь объектов и явлений. Свойства функций и их графики составляют основу школьного курса математики. Вокруг понятия функций строится современная школьная алгебра, начальные курсы математического анализа и, отчасти, геометрия. Уникальность данного понятия функции заключается в возможности установления как внутрипредметных, так и межпредметных связей в процессе обучения» [26]. Определение функции, предложенное Ю.М. Колягиным, акцентирует внимание на более общем понимании этого математического понятия. Колягин рассматривал функции не только как отображения между простыми множествами, но также ввёл понятие обобщённых функций, что позволяет учитывать более сложные структуры и взаимодействия.

В начале XX века в России начался пересмотр школьных учебных программ, направленный на интеграцию функциональной линии в образовательный процесс средних школ. В контексте нарастающей необходимости модернизации образовательных методик, на I и II Всероссийских съездах преподавателей математики (1912 и 1914 года), одним из ключевых предложений, выдвинутых на съездах, стало стремление пересмотреть содержание школьного курса математики. Участники согласились, что многие темы утратили свою значимость, и правильное решение состояло в том, чтобы сосредоточить внимание на понятие функциональной зависимости. Это нововведение направлено на то, чтобы сделать уроки математики не только более актуальными, но и более полезными для учащихся [50]. Таким образом, акцент на функциональных отношениях стал ключевым элементом в новой редакции учебных планов.

Осознавая важность внедрения понятия функции и ее свойств в образовательный процесс, профессор А.Я. Хинчин в своем докладе [76] выделил три ключевые причины, подтверждающие значимость этого подхода:

– функции эффективно моделируют процессы реального мира, демонстрируя «подвижность, динамичность реальных явлений и взаимосвязь действительных величин»;

– понятие функции является ярким примером диалектического подхода, который стал основой современного математического анализа. Она позволяет ученикам осваивать взаимодействие между величинами в условиях постоянного изменения, а не ограничиваться статичными представлениями.

– функциональная зависимость играет фундаментальную роль в высшей математике, так как качественная подготовка учеников к изучению математики в университетах во многом зависит от того, насколько глубоко и полно они освоили это ключевое понятие [77].

В 60-е годы XX века происходили значительные изменения в подходах к преподаванию математики в школах. Этот период характеризовался активными усилиями по обновлению школьной программы с целью сделать её более современной и подходящей для решения актуальных задач. Важную роль в этом процессе сыграл В.Л. Гончаров, который внёс значительный вклад в разработку учебных материалов по функциональному анализу, фокусируясь на числовых (алгебраических) функциях. В.Л. Гончаров показывает, что «учебный предмет, известный как «алгебра», не является первым этапом на пути к изучению алгебры как научной дисциплины. Вместо этого, он представляет собой первую подготовку к освоению математического анализа, который на протяжении многих лет служит мощным инструментом для физиков, инженеров и специалистов в области точных наук». [17, С. 6]. Идеи В.Л. Гончарова в области методики продолжают развиваться в работах Е.М. Васильевой, которая делает акцент на понятии функциональной зависимости и необходимости её визуализации для учеников. Е.М. Васильева в своих исследованиях выделяет, что «понимание функциональной зависимости играет ключевую роль в формировании диалектико-материалистического мировоззрения учащихся и демонстрации практических аспектов математики» [8, С. 3].

Определение понятия «функция» в контексте школьного образования может рассматриваться через аналитическое, графическое и табличное представление. Эти подходы не только помогают учащимся лучше понять саму природу функции, но и обогащают их математические навыки, позволяя им видеть взаимосвязи между различными способами представления информации, так как каждый из этих подходов способствует развитию определенных аспектов понимания функций, поэтому их интеграция в учебный процесс может помочь создать более полное и многогранное представление о данном математическом понятии.

Функциональная линия занимает важное место в школьном курсе математики и является основополагающим элементом в изучении данной учебной дисциплины. Графики функции не только позволяют ученикам визуализировать взаимосвязь между переменными, но и помогают глубже понять понятие функции как математического объекта. Функциональная линия играет ключевую в формировании практических навыков, необходимых в дальнейшей учебе и профессиональной жизни.

1.2 Основные цели и задачи обучения тригонометрическим функциям и их свойствам в курсе алгебры и начал математического анализа

В настоящее время осуществляется модернизация системы школьного образования, которая основывается на различных законодательных инициативах и нормативных актах. Одним из самых значимых документов, наряду с Законом об образовании [73], является Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (ФГОС СОО) [72].

Согласно требованиям, «изложенным в федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования, результаты изучения математического предмета должны включать в себя» [72]:

– «формирование у учащихся представлений о математике как способе познания действительности, который позволяет описывать и анализировать реальные процессы и явления;

– овладение системой функциональных понятий, развитие умений использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач и анализа реальных зависимостей» [72].

Результаты изучения образовательной программы определяются как на базовом, так и на углублённом уровнях [72].

Рассмотрим, какие предметные результаты получат учащиеся к концу обучения в 10-11 классе на углублённом уровне. В Федеральной рабочей программе [58] предполагается, что к концу обучения в 10 классе (углублённого уровня) обучающийся получит следующие предметные результаты:

«Числа и вычисления:

– свободно оперировать понятиями: синус, косинус, тангенс, котангенс числового аргумента;

– оперировать понятиями: арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента.

Функции и графики:

– свободно оперировать понятиями: функция, способы задания функции, взаимно обратные функции, композиция функций, график функции, выполнять элементарные преобразования графиков функций;

– свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства;

– свободно оперировать понятиями: чётные и нечётные функции, периодические функции, промежутки монотонности функции, максимумы и минимумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке;

– свободно оперировать понятиями: тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента;

– использовать графики функций для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни, выражать формулами зависимости между величинами» [72].

К концу обучения в 11 классе:

«Уравнения и неравенства:

– осуществлять отбор корней при решении тригонометрического уравнения;

– применять графические методы для решения уравнений и неравенств, а также задач с параметрами;

– Функции и графики:

– строить графики композиции функций с помощью элементарного исследования и свойств композиции двух функций;

– строить геометрические образы уравнений и неравенств на координатной плоскости;

– свободно оперировать понятиями: графики тригонометрических функций;

– применять функции для моделирования и исследования реальных процессов» [72].

В своей статье А.Г. Мордкович «подчеркивает важность функционально-графической линии в школьном курсе алгебры, алгебры и начал математического анализа» [46], акцентируя внимание на ее психологической основе. Это утверждение опирается на необходимость учета особенностей мышления учащихся. Поскольку алгебра — это дисциплина, требующая логического анализа и структурированного подхода, важно понимать влияние различных типов мышления на процесс обучения.

Левополушарное мышление, которое отвечает за последовательное и логическое рассуждение, а также за анализ информации и систематизацию знаний, играет ключевую роль в усвоении алгебраических понятий. Однако на ранних этапах изучения данной дисциплины у большинства учеников преобладает правополушарное восприятие. Это связано с тем, что именно в правом полушарии мозга находятся механизмы, способствующие интуитивному, образному и эмоциональному восприятию окружающего мира. Таким образом, учащиеся, только начинающие осваивать алгебру, могут испытывать затруднения в переходе от интуитивного понимания к более формализованному и логичному мышлению.

В этой связи использование функционально-графических подходов и материальных моделей может сыграть весьма значимую роль. Такие методы обучения способствуют формированию так называемого «моста» между логическим, последовательным анализом и творческим, интуитивным осмыслением информации. Это улучшает когнитивную интеграцию работы обоих полушарий мозга, что, в свою очередь, может значительно повысить эффективность усвоения алгебры. Применение разнообразных графических моделей и функциональных представлений позволяет учащимся не просто заучивать формулы, но и понимать их смысл, что ведет к более глубокому и устойчивому усвоению материала. Более того, данный подход не только делает обучение более увлекательным и интерактивным, но и развивает критическое мышление у учащихся, подготавливая их к более сложным математическим понятиям в будущем.

В статье [83] авторами рассматривается существующий кризис идентичности в преподавании и обучения функциям в школе. Основная проблема заключается в неясности целей образовательного процесса, что приводит к фрагментарному восприятию математических функций учениками. Чаще всего различные представления о функциях рассматриваются изолированно, без установления необходимых связей, что препятствует формированию целостного понимания данного понятия.

Авторы учебных программ и учебников, а также учителя сталкиваются с неопределенностью в вопросах акцентов, которые следует делать на внутришкольные математические цели или на задачи, связанные с практическими приложениями и моделированием. Все это создает преграды для качественного обучения, что подчеркивает важность интеграции разных аспектов изучения функций и формирования четких образовательных целей, что позволит повысить эффективность усвоения математических понятий учащимися.

В учебнике [53] авторы Н.С. Подходова и В.И. Снегурова, подчёркивают, что роль функции в математическом образовании нельзя недооценивать, т.к. это ключевой момент в изучении математики. Авторы подчеркивают, что функция является ключевым понятием в математике, поскольку она лежит в основе решения различных уравнений, неравенств и задач с параметрами. Более того, функция служит мостом между разными научными идеями и явлениями, позволяя увидеть важность математических понятий в других областях знания. Она помогает учащимся осознать взаимосвязи и динамику между изменяющимися элементами, что способствует развитию функционального мышления. Функция также способствует развитию навыков работы с абстрактными понятиями, что является важным аспектом математического образования.

Изучение тригонометрических функций и их характеристик играет ключевую роль в курсе алгебры и в начальных разделах математического анализа для учащихся старших классов. Тригонометрия имеет обширное применение в различных областях, включая геометрию, физику, химию и экономику.

Приведем результаты анализа методической литературы по обучению тригонометрии в школе.

В.С. Крамор [30], [31] акцентирует внимание на определении тригонометрических функций через единичную окружность, что помогает учащимся понять поведение синуса и косинуса. В.С. Крамор исследует их периодичность и симметрию, объясняя важность этих свойств для решения уравнений. Он также освещает графическое отображение данных функций, обсуждая их амплитуду и фазы, а также анализирует тригонометрические тождества, предлагая различные подходы к их доказательству, что развивает логическое мышление учащихся.

Аналогично, А.Г. Мордкович в своих статьях [44], [45] акцентирует внимание на важности концептуального освоения тригонометрии и ее тесной связи с геометрией, указывая, что одним из эффективных методов визуализации тригонометрических функций является использование единичной окружности. А.Г. Мордкович указывает, что данный подход дает возможность ученикам лучше понимать основные характеристики тригонометрических функций, таких как синус и косинус, акцентируя внимание на их периодической природе, симметрии и особенностях асимптотического поведения. Автор считает, что визуальный подход усиливает понимание связи между изменениями аргумента функции и ее значениями, что, в свою очередь, способствует более глубокому усвоению материала в области тригонометрии.

В своей статье А.Я. Цукарь [78] акцентирует внимание на том, что тригонометрия не только помогает развивать аналитическое мышление у школьников, но и служит основой для более сложных математических понятий. Он рассматривает методы, которые могут сделать обучение тригонометрии более доступным и увлекательным для учащихся, включая использование графиков, моделей и реальных задач. Кроме того, автор предлагает ряд практических приемов и рекомендаций для преподавателей, которые могут помочь в объяснении сложных понятий, таких как тригонометрические тождества, характеристики функций и их графическое представление.

Вопросами изучения тригонометрии и разработке учебного и методического обучения посвящены работы многих ученых, среди которых

Н.И. Попов [55], [56], [57], А.А. Панчишкин [51], Ю.Н. Макарычев [67], А.В. Дорофеев [18], Р.Г. Гилемханов [14], В.В. Репьев [59] и другие.

Проблема оптимизации процесса обучения тригонометрии остаётся актуальной на протяжении многих лет, особенно в свете современных тенденций к внедрению инновационных методов обучения и созданию адаптивных образовательных систем. Тригонометрия продолжает занимать важное место в учебных планах и курсах математики. Однако более глубокое понимание тригонометрических функций и их свойств по-прежнему не получает должного внимания в специализированных исследованиях.

В методической литературе по данной теме неоднократно упоминается о недостаточном уровне знаний и навыков учащихся в области тригонометрии, что часто приводит к поверхностному усвоению понятий, связанных с тригонометрическими функциями. Для многих учащихся эти функции сводятся лишь к запоминанию формул, что негативно сказывается на их общем понимании темы. Необходимо сосредоточить внимание на изучении тригонометрии, так как это позволит достичь несколько ключевых целей:

– введение учащихся в новый класс трансцендентных функций;

– формирование практических навыков вычислений;

– демонстрация основных свойств функций;

– установление межпредметных связей, например, с физикой и естественными науками;

– развитие логического мышления, требующего не только алгебраических преобразований, но и активного исследовательского подхода.

В связи с вышеизложенным, важно усилить акцент на изучении тригонометрии в образовательных программах, чтобы поддержать успешное усвоение данной темы учащимися и способствовать их всестороннему развитию. Задания по теме «Тригонометрические функции» может представлять значительную сложность для учащихся, даже при решении простых задач. Это подчеркивает важность последовательной постановки задач, которые помогут учащимся осознать материал, способствуя их личностному развитию.

Изучение тригонометрических функций в рамках курса алгебры и начал математического анализа занимает важное место в формировании математической культуры учащихся и развитии навыков, актуальных в современном образовательном и профессиональном контексте. Одна из главных задач этого процесса заключается в создании условий, способствующих самостоятельности учащихся и их адаптации к требованиям информационного общества сегодня. Это является мощным стимулом для повышения интереса к математике и укрепления её роли в школе.

С точки зрения метапредметного подхода, освоение тригонометрических функций углубляет понимание учениками важности математики как составной части культурного наследия человечества. Эти функции не только развивают аналитическое мышление, но и помогают формировать устойчивые навыки работы с математической информацией. Понимание основных понятий, связанных с обучением тригонометрическим функциям через решение практических задач, способствует более осмысленному подходу к обучению математике. Ключевым элементом учебного процесса становится работа с научной литературой и участие в исследовательских проектах, что помогает учащимся глубже погрузиться в изучаемый предмет и расширить их кругозор.

Тригонометрические функции являются отправной точкой для понимания обратных тригонометрических функций, подчеркивая их важность в образовательном процессе. В конечном итоге такая интеграция математических знаний создает у учащихся прочную основу, необходимую для их дальнейшего научного и профессионального роста.

Таким образом, в процессе изучения тригонометрических функций учащиеся начинают более четко воспринимать саму суть обучения понятию функции. Они осознают, что функция — это не просто набор чисел, а сложная зависимость, связывающая различные множества объектов или явлений. Это понимание позволяет им увидеть, как одна величина может изменяться в ответ на изменения другой, что особенно ярко проявляется в контексте тригонометрии. Например, изучение синуса и косинуса через единичную окружность иллюстрирует, как угловые значения соотносятся с координатами точки на окружности, тем самым открывая двери к более глубокому пониманию не только тригонометрических соотношений, но и общей природы функций в математике, что имеет значение для дальнейшего изучения более сложных понятий и позволяет развивать их аналитическое мышление.

1.3 Анализ учебно-методической литературы по обучению теме «Тригонометрические функций и их свойства»

Проанализируем содержание школьных учебников по алгебре и началам математического анализа по теме «Тригонометрические функции и их свойства». Для этого были выбраны УМК Ш.А. Алимова [2], А.Н. Колмогорова [1], А.Г. Мордковича [3], [4], А. Г. Мерзляка [39].

Анализ содержания темы «Тригонометрические функции и их свойства» в различных учебниках, рассмотрен в таблице 1.

На изучение темы «Тригонометрические функции и их свойства» в учебнике под авторством Ш.А. Алимова [1] отводится 20 часов, в учебнике под авторством А.Н. Колмогорова [2] – 19 часов, в учебнике под авторством А. Г. Мордковича [3] – 24 часа, а в учебнике под авторством А. Г. Мерзляка [39] – 21 час. Рассмотрим, какая подготовительная работа проведена в каждом из учебников перед введением тригонометрических функций.

В учебнике [3] авторы отводят большую часть времени на работу с числовой окружностью, которая при изучении тригонометрии позволяет учащимся визуализировать значения тригонометрических функций и их взаимосвязи, что в дальнейшем способствует более глубокому пониманию свойств этих функций.

Таблица 1 – Анализ содержания темы «Тригонометрические функции и их свойства» в различных учебниках алгебры и начал математического анализа

Учебник	Содержание по теме «Тригонометрические функции и их свойства»
Ш.А. Алимов [2]	«Глава VII. Тригонометрические функции §38. Область определения и множества значений тригонометрических функций. §39. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций. §40. Свойства функции $y = \sin x$ и её график. §41. Свойства функции $y = \cos x$ и её график. §42. Свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и её график. §43. Обратные тригонометрические функции» [2, С. 462].
А.Н. Колмогоров [1]	«Глава 1. Тригонометрические функции §1. тригонометрические функции числового аргумента. 1. синус, косинус, тангенс и котангенс (повторение. 2. Тригонометрические функции и их графики. §2. Основные свойства функций 3. Функции и их графики. 4. Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций. 5. Возрастание и убывание функций. Экстремумы. 6. Исследование функций. 7. Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания» [1, С. 380].
А. Г. Мордкович [3]	«Глава 3. Тригонометрические функции §11. Числовая окружность. §12. Числовая окружность на координатной плоскости. §13. Синус и косинус. Тангенс и котангенс. §14. Тригонометрические функции числового аргумента. §15. Тригонометрические функции углового аргумента. §16. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики. §17. Построение графика функции $y = mf(x)$. §18. Построение графика функции $y = f(kx)$. §19. График гармонического колебания. §20. Функции $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, их свойства и графики. §21. Обратные тригонометрические функции» [3, С. 454].
А. Г. Мерзляк [39]	«Глава 3. Тригонометрические функции. §17. Радианная мера угла. §18. Тригонометрические функции числового аргумента. §19. Знаки значений тригонометрических функций. Чётность и нечётность тригонометрических функций. §20. Периодические функции. §21. Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. §22. Свойства и графики функций $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$. §23. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента» [39, С. 475].

Введение числовой окружности происходит на примере, приведённом из жизни: «Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью…» [3, С. 94], авторами проводится «аналогия числовой окружности и числовой прямой, это помогает понять алгоритм построения точки, как на одном математическом объекте, так и на другом» [3]. Во время работы с числовой окружностью, учащихся готовят к решению простейших тригонометрических уравнений и неравенств: «На числовой окружности укажите все точки, координаты которых удовлетворяют данным условиям, и составьте формулы для всех чисел, которым соответствуют эти точки, при $y = 0$» [4, С. 86] или «Найдите на числовой окружности точки, координаты которых удовлетворяют заданному неравенству $x > 0{,}5$, и запишите (с помощью двойного неравенства), каким числам t они соответствуют» [4, С. 87]. Данный подход помогает не просто заучивать значения по таблице, но и понимать, откуда они появились, что, безусловно, сказывается на лучшем усвоении темы и упрощает работу в дальнейшем.

Линия изложения, связанная с тригонометрией, начинается с тригонометрических функций, что позволяет учащимся увидеть их наглядное представление, что помогает большинству учащихся сразу визуализировать свойства и сопоставить их с тригонометрическими функциями, но у данной методики, есть и свои минусы, т.к. без знаний о свойствах тригонометрических функций учащиеся могут сталкиваться с трудностями при анализе и интерпретации графиков.

Теоретический материал представлен максимально доступно и обстоятельно, с использованием живого литературного языка и большим количеством образцов с детальными решениями. Весь курс выстраивается с акцентом на функционально-графическую линию.

В учебнике алгебры и начал анализа под редакцией А.Н. Колмогорова [1] также придается большое значение изучению тригонометрических функций. Рассмотрим, пропедевтическую работу, которая представлена в учебнике [1]. Стоит отметить, что в сравнении с учебником [3], в котором, мы выделили большим плюсом логическую, качественную пропедевтическую работу, в учебнике [1] рассматривается лишь малая часть материала, который, на наш взгляд, стоит дать перед введением тригонометрических функций, здесь авторы немного повторяют и дополняют материал по тригонометрии, изученный в курсе 8-9 класса, напоминая о работе с основным тригонометрическим тождеством, после вводят другие основные формулы тригонометрии.

На данном этапе сразу видна разница в подходе изучения двух учебников [1] и [3]: в [3] изучают функции и их свойства, и только после простейших уравнений и неравенств, переходят к преобразованиям, которые объясняют с помощью свойств функций, то в [1] обучение выстраивается в обратном от учебника [3] порядке.

В учебнике [2] изучение блока тригонометрии запланировано на конец 10 класса, тогда как тригонометрические функции рассматриваются только в начале 11 класса, т.е. разрыв между пропедевтической работой по изучению тригонометрии и введению тригонометрических функций достаточно большой. Т.к. изучение материала в 11 классе сразу начинается со свойств ООФ и ОЗФ тригонометрических функций, то здесь будет рационально и логично вернуться к рассмотрению числовой окружности и уделить время работе с ней.

Если рассматривать пропедевтическую работу без той особенности, что темы изучаются в конце 10 и начале 11 классов, то стоит отметить, что работе с числовой окружностью в данном учебнике [2] посвящено большое количество часов, а сам учебник имеет достаточное количество практического материала, для отработки темы.

В данном учебнике тригонометрические функции изучаются после тригонометрических преобразований и решения уравнений и неравенств.

Подход к изучению тригонометрии, представленный в учебнике [2], имеет свои плюсы, если рассматривать его не обращая внимания на разрыв между 10 и 11 классом. Он обеспечивает последовательность и прогрессию в освоении материала. Начав с изучения числовой окружности, учащиеся знакомятся с основами тригонометрии, что создает прочную основу для дальнейшего изучения. Рассмотрение всех основных формул, а также углубленное внимание к тригонометрическим уравнениям и неравенствам, подготавливает учащихся к обучению более сложным понятиям.

Такой поэтапный подход позволяет учащимся не только понять, как тригонометрия связана с практическими задачами, но и развивает их аналитическое мышление. Когда они позже переходят к изучению свойств тригонометрических функций, они уже имеют базу знаний и навыков, что упрощает процесс восприятия нового материала. Это также способствует более глубокому осмыслению возникающих вопросов и задач, поскольку учащиеся могут опираться на ранее изученное и применять свои знания в новом контексте.

Кроме того, такой метод изучения помогает выявить и устранить возможные пробелы в знаниях, так как каждый новый раздел строится на предыдущем. В результате, учащиеся не просто механически запоминают формулы, а понимают их происхождение и применение, что в будущем способствует более активному использованию тригонометрии в различных областях математики и смежных дисциплинах.

В учебнике под редакцией А.Г. Мерзляка [39] процесс изучения тригонометрии организован таким образом, чтобы последовательно и доступно внедрять этот важный раздел математики. Глава 3, посвященная «Тригонометрическим функциям», охватывает ключевые темы, которые являются основой для глубокого понимания теме и свойств тригонометрических функций.

Особое внимание уделяется радианной мере углов, которая является крайне важной для понимания тригонометрии. Учебник предлагает учащимся четкие инструкции и примеры, помогающие им не только преобразовывать углы из градусов в радианы, но и осознавать, как эти две меры связаны с единичной окружностью. Понимание этой связи является фундаментальным, это знание обеспечивает глубокое понимание основных понятий, связанных с обучением тригонометрии, таких как периодичность функций, а также формирует основу для более сложных тем. Кроме того, осознание связи между углами и единичной окружностью помогает учащимся лучше справляться с задачами, связанными с графиками тригонометрических функций, и применять полученные знания на практике.

Рассмотрим определения тригонометрических функций, представленные в рассматриваемых учебниках, данная информация отражена в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты анализа определений тригонометрических функций в различных учебниках

Учебник	Определения тригонометрических функций
Ш.А. Алимов [2]	«Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается sin α)» [2, С. 126]. «Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается cos α)» [2, С. 126]. «Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается tg α)» [2, С. 127]. Определение котангенса в данном учебнике не представлено.
А.Н. Колмогоров [1]	В учебнике вместо определения синуса и косинуса, приводится фраза: «… нетрудно понять, что ордината точки P_α - это синус угла α, а абсцисса этой точки – косинус угла α» [1]. Учебник [1] не даёт точного определения тангенса, но вводит его через геометрическую интерпретацию, по сути вводя линию тангенса на числовой окружности. «Числовые функции, заданные формулами y = sin x и y = cos x, называют соответственно синусом и косинусом (и обозначают sin и cos)» [1, С. 15]. «Числовые функции, заданные формулами y = tg x и y = ctg x, называют соответственно тангенсом и котангенсом (и обозначают tg и ctg)» [1, С. 17].
А.Г. Мордкович [3]	«Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют косинусом числа t, а ординату точки M называют синусом числа t» [3, С. 113]. «Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют тангенсом числа t и обозначают tg t. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют котангенсом числа t и обозначают ctg t: $\mathrm{tg}t = \frac{\sin t}{\cos t}$; $\mathrm{ctg}t = \frac{\cos t}{\sin t}$» [3, С. 122].

Продолжение таблицы 2

Учебник	Определения тригонометрических функций
А.Г. Мерзляк [39]	«Косинусом и синусом угла поворота α называют соответственно абсциссу x и ординату y точки P(x; y) единичной окружности такой, что $P = R_o^\alpha(P_0)$» [39, С. 135]. «Тангенсом угла поворота α называют отношение синуса этого угла к его косинусу: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$» [39, С. 136]. «Котангенсом угла поворота α называют отношение косинуса этого угла к его синусу: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$» [39, С. 136].

В учебниках [2], [3], [39] синус и косинус определяются через абсциссу и ординату, единственным отличием при введении этих определений служит то, что в учебниках [2] и [39] тригонометрические функции рассматриваются как функции углового аргумента, а в [3] как функции числового аргумента, тогда как в учебнике [1] отсутствуют отдельные определения синуса и косинуса, но акцентируют внимание на геометрической интерпретации тригонометрических функций.

Стоит отметить, что в учебнике [2], котангенс не рассматривается, что на наш взгляд является большим минусом, т.к. приставка "ко" в тригонометрии указывает на связь с другими тригонометрическими функциями и подчеркивает их взаимозависимость, т.е. учащиеся видят связанные функции синуса и косинуса, но не наблюдают функции, связанной с тангенсом.

Проанализируем, как в каждом учебнике рассмотрены вопросы исследования и построения тригонометрических функций синуса и косинуса.

Начнём с учебника [3], перед построением графика каждой тригонометрической функции, авторы определяют свойства функции, как обобщение известных фактов. Первоначально авторы рассматривают изучение функции синуса и её свойств, рассматривают основные значения на отрезке $[0; \pi]$, далее выполняют построение на данном отрезке, после с учетом свойств нечётности функции синуса, отражают график относительно начала координат на отрезок $[-\pi; 0]$. После чего, происходит уточнение, что функция синуса имеет основной период, а значит, возможно достроить график на всей координатной плоскости. Построение графика заканчивается рассмотрением свойства непрерывности и выпуклости функции.

Для функции косинуса сначала выполняют построение, учитывая, что через формулу приведения, можно из функции синуса получить косинус, для чего достаточно сдвинуть график синусоиды влево на $\frac{\pi}{2}$ по оси ОХ. Только после построения графика, рассматривают свойства косинуса, такие же, как и для синуса.

После изучения функции синуса и косинуса, авторы учебника [3] рассматривают работу с преобразованиями графиков этих функций, после изучают графики гармонического колебания.

Построение и исследование функций тангенса и котангенса, происходит по аналогии с построением функций синуса и косинуса.

Другой методики построения графиков тригонометрических функций придерживаются авторы учебника [1]. Здесь, как и в предыдущем рассматриваемом учебнике [3] авторы начинают построение графиков тригонометрических функций с функции синуса, при этом график синусоиды строят с помощью единичной окружности, для этого через прямоугольный треугольник находят значения, после переносят их к соответствующим точкам на оси ОХ и ОУ.

Построение косинусоиды выполняют сразу после построения синусоиды, аналогично построению, рассмотренному в учебнике [3]. После по аналогии с построением, описанным для синусоиды и косинусоиды, выполняют построения графиков функций тангенса и котангенса. Стоит отметить, что в данном учебнике [1] все свойства, кроме области определений и области значений, рассматривают после изучения всех графиков тригонометрических функций в отдельном пункте.

В отличие от других учебников, в учебнике [1] никак не обоснован факт того, что областью определения для функций синуса и косинуса будут являться все действительные числа, что на наш взгляд, является упущением, т.к. при изучении такой сложной для понимания учениками темы, должен быть обоснован даже такой очевидный факт.

Аналогичной методики изучения графиков тригонометрических функций в учебниках [2] и [39]. Перед тем, как преступить к построению графиков, авторы изучают свойства тригонометрических функций: область определения и область значения; периодичность и чётность. Только после аналитической работы со свойствами, авторы переходят к построению графиков, данный подход помогает учащимся не привязывать свойства только к графикам, а уметь так же анализировать саму функцию, этот подход можно отметить, как плюс данного учебника, но для слабых учеников, данный подход будет несколько сложнее, чем тот, что предложен в учебниках [3] или [1], т.к. теряется принцип наглядности.

В отличие от предыдущих учебников, в учебнике [2] построение начинают с функции косинуса, перед этим вспоминая все известные свойства, построение выполняется по аналогии работы с функцией синуса в учебнике [3], а построение синусоиды авторы рассматривают через сдвиг косинусоиды по оси OX направо на $\frac{\pi}{2}$. По аналогии с построением косинусоиды, авторы рассматривают построение графика тангенса, перед этим вспомнив его основные свойства.

Стоит отметить, что функция котангенса и её график не рассматривается в данном учебнике, в отличие от остальных. В учебнике [39] авторы сначала заново рассматривают и анализируют все свойства функции синуса и косинуса, после чего выполняют построение графиков данных функций, затем делают вывод о том, что график функции косинуса можно получить через смещение графика функции синуса.

Сравним, какие свойства тригонометрических функций вводятся в различных учебниках [1], [2], [3], [39], данная информация отражена в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты анализа свойств тригонометрических функций в различных учебниках алгебры и начал математического анализа

Автор / Свойства	Ш.А. Алимов	А.Н. Колмогоров	А. Г. Мордкович	А. Г. Мерзляк
Область определения тригонометрических функций	+	+	+	+
Область значений тригонометрических функций.	+	+	+	+
Чётность тригонометрических функций.	+	+	+	+
Возрастание / убывание тригонометрических функций.	+	+	+	+
Ограниченность тригонометрических функций.			+	
Наибольшее / наименьшее значения тригонометрических функций, нули функций.	+	+	+	+
Периодичность тригонометрических функций.	+	+	+	+
Непрерывность тригонометрических функций.			+	
Выпуклость / вогнутость тригонометрических функций.			+	

Выделим некоторые моменты, относительно рассмотрения свойств тригонометрических функций, приведённых в данных учебниках.

Отсутствуют полные обоснования свойства области значений функций синуса и косинуса, авторы всех рассмотренных учебников ссылаются на числовую окружность, делая вывод о том, что область определения для этих функций будет находится в пределах от $[-1;\ 1]$, но данный факт не подразумевает, что все точки отрезка должны входить в область значений функций синуса и косинуса.

Чётность тригонометрических функций анализируется с использованием тождеств, связанных с функциями, принимающими противоположные аргументы. Доказательства этих тождеств опираются на симметрические свойства графиков функций: для косинуса рассматривается симметрия относительно оси абсцисс, в то время как синус, тангенс и котангенс подчиняются симметрии относительно начала координат. Однако в данном контексте не хватает обоснования самих свойств симметрии этих функций, что может вызвать вопросы у учащихся.

Монотонность тригонометрических функций в учебнике [1] рассматривается и доказывается через определения возрастающей и убывающей функции, причём в учебниках [2], [3] и [39] возрастание и убывание тригонометрических функций никак не доказывается, а рассматривается и вводится через иллюстрацию на числовой окружности.

Периодичность вводится во всех учебниках, через эквивалентное определение «Функция f(x) называется периодической, если существует такое число T≠0, что для любого x из области определения данной функции выполняется равенство $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. Число T называется периодом функции f(x)» [2, С. 205]. Единственное различие заключается в том, что в учебнике [3] о периодичности говорят во время построения и изучения свойств функции синуса, что может плохо отразиться на понимании самого свойства, т.к. это свойство вводится впервые, противоположная ситуация в учебниках [2] и [39], там свойство периодичности изучается до построения графиков, что помогает отработать и понять данное свойство на аналитическом уровне, авторы учебника [1] рассматривают данное свойство в отдельном пункте, уже после построения всех графиков тригонометрических функций.

В рамках изучения тригонометрических функций все рассмотренные учебники включают разнообразные примеры, задачи и наглядные иллюстрации, что позволяет учащимся видеть практическое применение тригонометрии в различных ситуациях. Эти примеры помогают связать теоретические знания с реальными задачами, например, в физике и инженерии, где тригонометрические функции находят широкое применение.

Во всех учебниках рассматриваются графики основных тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс и их обратные функции), что позволяет учащимся визуально воспринимать их поведение и основные характеристики, такие как периодичность, амплитуда и сдвиги.

В каждом из рассмотренных учебников, представлены задачи различной сложности, примеры предложенные авторами снабжены детальными решениями и пояснениями, что дает возможность учащимся не только самостоятельно проверять свои ответы, но и углублять понимание каждого шага решения. Таким образом, все учебники создают надежную основу для дальнейшего изучения более сложных тем тригонометрии, включая тригонометрические уравнения и неравенства, а также их применение в различных научных областях. Все учебники акцентируют внимание на навыках работы с числовой окружностью.

Стоит отметить, что учебник [3] предлагает наиболее полную систему задач, т.к. содержит две части и включает в себя обширный задачник [4], который является наиболее всеобъемлющей системой задач. В этом учебном материале представлены разнообразные «задачи, относящиеся к тригонометрическим функциям, как с числовыми, так и с угловыми аргументами. Особое внимание уделяется кусочным функциям, а также отработке навыков решения уравнений с тригонометрическими функциями с использованием графического метода» [3], что позволяет учащимся глубже понять и освоить материал.

Кроме того, как и в других аналогичных изданиях, здесь акцентируется внимание на различных свойствах тригонометрических функций, что дает возможность выделить важные аспекты при решении задач. К этому добавляются задания с ограничениями на переменные, что помогает развивать аналитическое мышление и умение работать с условиями.

Проведение сравнительного анализа различных учебников по тригонометрическим функциям создает дополнительные возможности для преподавателей математики в поисках наилучшего материала, соответствующего потребностям учеников.

При изучении темы "Тригонометрические функции" в курсе алгебры и начального математического анализа особое внимание, на наш взгляд, следует уделить учебнику [3], который представляет собой наиболее доступный и удобный ресурс для учеников.

Выбор учебника [3] обоснован определенными причинами. Опишем их.

Более полное представление теоретического и практического содержания темы: учебник демонстрирует последовательное и основательное изучение тригонометрических функций. Каждый раздел логически вытекает из предыдущего, что позволяет учащимся глубже понять понятия и их взаимосвязи. Начало с числовой окружности — это важный аспект, который позволяет учащимся визуализировать функциональные зависимости и понимать, как тригонометрические функции связаны с геометрией. Это способствует развитию пространственного мышления при обучении математике.

Разнообразие типов задач на формирование понятий при обучении тригонометрическим функциям и их свойствам: в нем представлены задания на:

- практическая значимость: учащиеся анализируют реальные ситуации, где тригонометрические функции могут быть применены, что показывает им, как математика лежит в основе многих аспектов жизни;
- актуализация знаний: задачи, которые требуют применения ранее изученных тем, помогают подготовить учащихся к более сложным понятиям тригонометрии, а также связывают новый материал с уже известным;

– выделение существенных признаков: задачи, способствующие выделению ключевых признаков тригонометрических функций, помогают учащимся научиться отличать их от других математических понятий;

– работа с символикой: укрепление взаимосвязи между символами и значениями, что критически важно для грамотного применения математического языка;

– установление свойств понятия: учебник включает множество задач, направленных на изучение свойств тригонометрических функций, что позволяет учащимся не только запоминать, но и понимать, почему те или иные свойства верны;

– применение понятия на практике: задачи на применение тригонометрических понятий в различных контекстах, например, в физике и инженерии, что помогает подчеркнуть важность тригонометрии как инструмента для решения реальных задач.

Структурированность и доступность: учебник отличается логичной и понятной структурой, что облегчает восприятие информации. Каждая глава начинается с ключевых понятий и терминов, что позволяет учащимся заранее подготовиться к восприятию нового материала. Кроме того, включение иллюстраций и графиков делает обучение более наглядным, а задачи с пошаговыми решениями помогают учащимся лучше понять процесс решения.

Методы визуализации: авторы уделяют внимание визуализации тригонометрических функций, что крайне важно для понимания таких понятий, как периодичность, симметрия и поведение функций. Использование графиков способствует более глубокому восприятию материала.

Учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством Просвещения Российской Федерации.

В итоге, учебник А.Г. Мордковича [3] предлагает всесторонний подход к изучению тригонометрических функций, который помогает развить аналитическое мышление, что, в свою очередь, играет важную роль в их дальнейшем образовании и понимании математики в целом.

Несмотря на это, не стоит игнорировать и другие учебники, которые могут предложить ценные знания.

Рассмотрим и проанализируем методическую литературу, помогающую при изучении тригонометрических функций, а именно: учебно-методические пособия под редакцией И.М. Гельфанда [13], И.М. Шапиро [82], Я.С. Бродского [7], Г.Г. Ельчаниновой и Р.А. Мельникова [20], С. С. Граськина [68].

В разделе 2 пособия "Тригонометрия" под редакцией Гельфанда И.М. и др. [13], особенно подробно обсуждаются понятия часового цикла, а также современные подходы к изучению тригонометрии в различных областях. В данной части уделяется внимание динамическим процессам и скоростям, что позволяет внедрить тригонометрические функции в реальную практику.

Также в разделе описываются оси тангенсов, что способствует лучшему пониманию поведения этих функций на координатной плоскости. Важной темой являются знаки тригонометрических функций в различных квадрантах, что помогает в дальнейшем решении тригонометрических уравнений. Еще одним важным аспектом являются простейшие формулы и периоды функций, которые служат основой для более сложных задач.

Книга [13] стремится опровергнуть стереотип о тригонометрии, как скучном разделе школьного курса математики, предоставляя читателю новый взгляд на знакомый материал. Изложение сопровождается множеством задач и охватывает тему от базового уровня до более сложных аспектов, выходящих за рамки школьной программы. Отдельная глава посвящена приёмам решения тригонометрических задач, которые часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы.

Пособие по тригонометрии [82] состоит из восьми разделов. Каждый содержит краткие теоретические заметки, методические рекомендации, примеры и задачи, а также ответы к большинству предложенных упражнений.

Основная задача данного пособия — оказать помощь учащимся в углублении и расширении их знаний в области тригонометрии.

Несмотря на то, что это пособие [82] не является исчерпывающим учебником и не охватывает все темы тригонометрии, изучаемые в образовательных учреждениях, фокус на преобразованиях тригонометрических выражений и работе с уравнениями и неравенствами подчеркнуто демонстрирует богатый опыт автора, как в школьном, так и в вузовском обучении. Таким образом, благодаря продуманной структуре и разнообразию задач, пособие способствует более глубокому осмыслению тригонометрических понятий и развитию аналитического мышления, что является ключевым для успешного изучения математики в целом.

Пособие [7] предназначено для развития способностей исследования тригонометрических функций, применять их свойства для решения уравнений и неравенств, а также для изучения периодических процессов. Это пособие может быть использовано для самостоятельного изучения математики учащимися 10 классов, как дополнение к школьному курсу.

Первая часть пособия включает рекомендации для учащихся, которые помогут эффективно подходить к решению задач и контрольных работ. В первой части представлены короткие теоретические сведения, несмотря на краткость, материал охватывается в полном объёме, с примерами решения задач и вопросами для самопроверки. Вторая часть содержит три варианта тренажёров с подсказками к заданиям, а третья включает задания для проверки освоенных обучающимися действий и приёмов из первой части. Данное пособие может быть использовано на факультативных занятиях.

В учебно-методическом пособии [20] две главы посвящены тригонометрическим и обратным тригонометрическим функциям и их свойствам. Издание может быть полезным для учителей средних школ при разработке элективных курсов и для учащихся, готовящихся к урокам и экзаменам, так как в пособии подробно изложен теоретический материал и приведены примеры с детальным решением. Однако следует отметить, что в книге отсутствуют самостоятельные задания для отработки изученного материала.

Авторы учебного пособия [68] представляют труд, который «можно рассматривать как расширенный курс лекций и семинаров, целью которого является углубленное изучение тригонометрии» [68], специально разработанный для студентов СУНЦ МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Книга включает в себя множество разнообразных упражнений, которые подходят как для коллективных занятий, так и для индивидуального изучения. Качественное оформление и структурированность материала делают данный сборник особенно полезным для всех, кто желает систематизировать свои знания и уверенно углубиться в специфику тригонометрии. Пособие не ограничивается исключительно теорией, но и предлагает практические задания, что способствует наиболее эффективному усвоению непростых понятий, связанных с обучением тригонометрическим функциям, и методов в тригонометрии. Таким образом, данный ресурс предоставляет возможность читателям значительно расширить свой кругозор и повысить уровень подготовки в данной дисциплине.

Данное пособие [68] охватывает темы "Тригонометрические функции и их свойства" и предоставляет примеры и задания для самостоятельного обучения, а также варианты графического решения уравнений и неравенств. На наш взгляд, это пособие будет полезным для учителей, работающих с 10-11 классами, и может быть рекомендовано для разработки элективных курсов и подготовки к экзаменам.

Подходы и методы, которые предлагают учебные пособия по тригонометрическим функциям, различны, но все они играют важную роль в формировании целостного представления о теме. Каждое из пособий заслуживает внимания при подготовке и изучении темы "Тригонометрические функции и их свойства".

Опишем опыт учителей математики по теме исследования.

В своей статье А.И. Намазов [47] рассматривает определение тригонометрических функций на разных этапах.

Автор подчёркивает тесную связь тригонометрии и физики, тригонометрии и астрономии, большое влияние тригонометрии, как помощника при дальнейшем изучение дифференциальных уравнений. Так же А.И. Намазов делает упор на том, что изначально тригонометрия применялась для решения практических задач курса планиметрии.

В одном из конспектов урока, представленных на сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок», авторы Т.Б. Замковая и Н.В. Нечаева [21] обсуждают важность использования единой графической модели, такой как тригонометрический круг.

Авторы также отмечают, что введение в тригонометрию начинается в 8-м классе и продолжается в 9-м и 10-м классах, где учащиеся должны усвоить много новой информации и терминологии. В работе представлена система фактов, заданий и наработок учителя, которая помогает подготовить учащихся к использованию тригонометрических функций, повторяя и закрепляя предшествующие знания.

Кроме того, авторы описывает серию уроков с презентациями, содержащими упражнения и дидактические игры, которые помогают учащимся освоить основы тригонометрии. Презентации в PowerPoint с анимацией предназначены для использования в разных классах и позволяют учителю адаптировать материал под уровень подготовки учащихся. Важным аспектом является активное использование презентаций на уроках, что способствует более глубокому пониманию и усвоению материала.

В своём конспекте урока Т.Н. Овчинникова [49] большое внимание уделяет актуализации знаний изученных во время темы «Тригонометрические функции их свойства и графики». Автором проводится фронтальный опрос, где группы по очереди выбирают вопросы из таблицы, что помогает актуализировать теоретические знания, необходимые для выполнения практических заданий. Учащиеся выполняют задание, которые способствует закреплению понятий, на это направлены все задания и формы работы, используемые на уроке.

М.Г. Шайхлисламова [81] использует формат научно-практической конференции для введения определения тригонометрических функций, что позволяет учащимся глубже понять историю и развитие этой области математики. Автор открывает конференцию, подчеркивая важность тригонометрии и ее применение в различных сферах жизни. Она создает атмосферу интереса и вовлеченности, приглашая учащихся в "страну Тригонометрии". В ходе конференции вводятся определения тригонометрических функций, таких как синус, косинус, тангенс и другие. М.Г. Шайхлисламова объясняет, как эти функции возникли и как они используются для решения практических задач. В конце конференции автор предлагает учащимся поучаствовать в игре, где они должны угадать тригонометрические функции на основе загадок. Это способствует активному вовлечению и закреплению знаний. Автор эффективно использует конференцию как метод для представления тригонометрических функций, сочетая исторический контекст с интерактивными элементами, что способствует лучшему усвоению материала учащимися.

В статье журнала «Педагог» О.А. Мерзлякова [41] сосредоточена на разработке и внедрении инновационных технологий обучения математике, особенно в рамках темы «Тригонометрические функции». Основное внимание уделяется новым подходам, которые соответствуют современным требованиям образования и способствуют не только усвоению знаний, но и развитию математического мышления у учащихся. Автор подчеркивает, что развивающиеся научные и технические области требуют от математического образования нового подхода к обучению, который включает не только передачу знаний, но и формирование у учащихся навыков осознанного применения математических принципов к реальным жизненным задачам. В своей работе автор определяет ряд задач, которые должны быть решены через практические задания. Эти задачи направлены на освещение ключевых вопросов темы «Тригонометрические функции» через практические примеры, развитие учебных умений и диагностику качества знаний, формирование прочных умений и навыков, связанных с темой, а также создание интересного и увлекательного обучения для учащихся. В работе [41] проводится тщательное структурирование учебного материала, составление граф-схем и аналитическое планирование норм и распределения времени, необходимые для изучения каждого раздела темы. Это позволяет эффективно организовать процесс обучения и способствует более глубокому пониманию предмета. В результате внедрения таких подходов, по мнению автора, обучение математике становится более интерактивным и направленным на активное участие учащихся в учебном процессе, что положительно сказывается на качестве знаний и умений учащихся.

Г.А. Саганова [60] в своем авторском элективном курсе “Тригонометрия в ЕГЭ” разрабатывает программу, направленную на углубленное изучение тригонометрии с целью подготовки учащихся 11-х классов к единому государственному экзамену. Данный курс охватывает как теоретические, так и практические аспекты тригонометрии, предоставляя учащимся необходимые знания и навыки для успешного выполнения экзаменационных заданий.

На первом занятии курс предлагает учащимся освежить и систематизировать знания о тригонометрических функциях и их значениях, что является основой для последующего изучения. На следующих занятиях рассматриваются свойства тригонометрических функций, включая знаки, формулы приведения и простейшие тригонометрические уравнения. В рамках семинаров и практикумов учащиеся учатся строить графики функций, таких как синус, косинус, тангенс и котангенс, и анализировать их, что является важным инструментом для понимания поведения функций.

Текущие практические занятия насыщены задачами различной сложности, включая как простые, так и более сложные задачи, которые требуют креативности и аналитического мышления. В ходе подготовки к ЕГЭ также акцентируется внимание на типичных ошибках, которые могут возникнуть у учащихся, и на стратегиях их избегания. В целом, курс “Тригонометрия в ЕГЭ” от Г.А. Сагановой нацелен на создание прочной базы знаний, которая позволит учащимся уверенно чувствовать себя на экзамене и достигать высоких результатов.

В своей статье А.Ю. Беляева [5] анализирует и демонстрирует особенности олимпиадных заданий по математике, а также направлена на выявление конкретных приемов и методов, которые могут облегчить процесс решения этих задач. Автор подчеркивает, что олимпиадные задачи требуют от участников нестандартного мышления и творческого подхода, способствующих расширению их математического кругозора. Автор акцентирует внимание на важности развития интереса учащихся к математике, особенно через участие в олимпиадах, что может способствовать их дальнейшему обучению и профессиональному росту. Мероприятия по математике помогают выявить учащихся, которые способны к нестандартному подходу и креативному решению задач. А. Ю. Беляева рассматривает олимпиадные задания как таковые, которые требуют более глубоких знаний и оригинальных решений, нежели стандартные учебные задачи. Автор акцентирует внимание на том, что тригонометрические функции имеют ряд важных свойств, таких как ограниченность, периодичность, монотонность и чётность. Для иллюстрации этих свойств автор предлагает несколько конкретных примеров задач, цикл которых демонстрирует использование свойств тригонометрических функций как инструмента для нахождения решений.

Опубликованные материалы свидетельствуют о разнообразии подходов и методов, которые используются для более глубокой интерпретации тригонометрии и её применения в различных предметных областях, таких как физика и астрономия.

Авторы статей [5], [14,] [37], [47] и конспектов уроков [21], [41], [49], [60], [81] подчеркивают важность систематизирования и визуализации знаний для учащихся, а также актуализации ранее изученных тем, что способствует лучшему усвоению материала, так же подготовки школьников к математическим олимпиадам. Особенно актуальным является использование современных технологий и методических инноваций, направленных на создание активной и продуктивной образовательной среды.

1.4 Формы и методы организации учебной деятельности при обучении теме «Тригонометрические функции и их свойства»

Ключевой особенностью ФГОС [72] нового поколения является смещение фокуса на деятельностный подход, основной целью которого является всестороннее развитие личности ученика. В условиях современного обучения наблюдается постепенный отказ от традиционных представлений о результатах образовательного процесса, которые сводятся к набору знаний, умений и навыков. Вместо этого современные стандарты акцентируют внимание на практических видах деятельности, которые активно вовлекают учащихся и способствуют их комплексному развитию.

Такой подход образует новую парадигму образования, в которой главная задача заключается в том, чтобы не просто передать информацию, а вовлечь учеников в реальные процессы, способствующие развитию критического мышления, креативности и умения работать в команде. Данная трансформация ориентирована на создание эффективной среды, где каждый ученик имеет возможность проявить свои способности и навыки в практической деятельности, что обеспечивает более глубокое усвоение знаний и их применение в реальной жизни.

Множество известных ученых исследовали формы обучения.

И.М. Чередов [79] в своих исследованиях акцентирует внимание на разнообразии форм учебной работы в средней школе. Он подчеркивает важность интеграции различных методов обучения, таких как лекции, семинары, лабораторные занятия и индивидуальные проекты, что способствует более глубокому усвоению материала. Чередов также отмечает значимость активных методов, включая групповые обсуждения и практические задания, которые помогают учащимся развивать критическое мышление и навыки сотрудничества.

В.К. Дьяченко [19] акцентирует внимание на важности форм обучения, как ключевых структурных составляющих учебного процесса. Он выделяет традиционные и современные формы, такие как лекции, семинары, групповая и проектная деятельность, особенно выделяя коллективную работу, подчеркивая, что выбор формы должен зависеть от целей обучения, особенностей предмета и потребностей учащихся. В своей работе он также отмечает, что эффективные формы обучения способствуют активному взаимодействию между преподавателем и учащимися, создавая условия для повышения мотивации и вовлеченности.

Ю.К. Бабанский [52] подчеркивает, что методы должны быть обоснованными, целенаправленными и способствовать активному участию учащихся, что усиливает их мотивацию. Ю.К. Бабанский акцентирует внимание на необходимости «использования различных методов в зависимости от содержания и индивидуальных особенностей учащихся. Методы должны адаптироваться к конкретным условиям, что позволяет эффективно организовать учебный процесс. Таким образом, методы обучения в понимании Ю.К. Бабанского представляют собой системный подход, создающий эффективную образовательную среду для достижения целей» [52].

Л.М. Фридман [74] в своих исследованиях подчеркивает, что формы обучения играют ключевую роль в образовательном процессе, так как они определяют организацию взаимодействия между преподавателем и учащимися. Он выделяет различные типы форм обучения, отражая важность адаптации подхода к конкретным условиям и целям обучения. Автор считает, что правильный выбор формы обучения может значительно улучшить качество образования и обеспечить более продуктивное взаимодействие в образовательной среде.

В своём подходе к организации образовательного процесса М.И. Махмутов [40] при обучении темы «Тригонометрические функции и их свойства», акцентирует внимание на использовании различных форм обучения для «повышения эффективности ее усвоения. Суть методологии автора заключается в том, что формы обучения должны быть адаптированы к содержанию учебного материала и соответствовать потребностям учащихся» [40]. Эффективность усвоения материала напрямую зависит от активного вовлечения учащихся в учебный процесс через разнообразные методы и подходы, что позволяет не только накопить знания, но и развить критическое мышление и практические навыки, необходимые для дальнейшего обучения и профессиональной деятельности.

Р.А. Утеева [71] анализирует различные типы форм работы, включая фронтальную, коллективную, групповую и индивидуальную деятельность, подчеркивая их уникальные характеристики и важность в образовательном процессе. Автор акцентирует внимание на том, что понимание содержания каждой из этих форм является ключевым для учителей, стремящихся повысить качество и эффективность обучения.

Рассмотрим различные формы учебной деятельности, которые можно использовать в процессе изучения темы «Тригонометрические функции и их свойства», опираясь на конкретные фрагменты урока.

Фронтальная форма организации учебного процесса представляет собой один из наиболее распространенных методов обучения, особенно в контексте изучения новых тем в школьном курсе алгебры. Структура фронтальной работы включает три основных компонента: действия учителя, деятельность каждого ученика и групповое взаимодействие среди учащихся.

Преподаватель осуществляет руководство процессом, а ученики активно вовлекаются в изучение материала. Такой подход позволяет создать динамичную и интерактивную атмосферу, где каждый ученик может не только получать информацию, но и участвовать в ее осмыслении и закреплении.

Фронтальная работа при изучении темы "Тригонометрические функции и их свойства" имеет множество преимуществ и позволяет эффективно задействовать весь класс. Рассмотрим плюсы данного подхода, а также способы его применения:

– активное вовлечение учащихся: фронтальная работа способствует тому, что все ученики находятся в центре образовательного процесса. это повышает уровень вовлеченности и интереса к теме;

– систематизация знаний: занятия в формате фронтальной работы позволяют структурировать информацию и дать учащимся целостное представление о тригонометрических функциях, их свойствах и взаимосвязях;

– мгновенная обратная связь: учитель может сразу же оценивать уровень понимания материала обучающимися, задавая вопросы и провоцируя обсуждение. это помогает корректировать обучение в реальном времени;

– развитие коммуникативных навыков: работа в группе и обсуждение тем способствуют развитию навыков общения, аргументации и критического мышления;

– работа с различными источниками информации: фронтальная работа может включать использование учебников, презентаций, видео, онлайн-ресурсов и других материалов, что делает процесс обучения более разнообразным и интересным;

– комбинация теории и практики: позволяет сразу применять теоретические знания на практике, решая задачи и проводя эксперименты, что способствует лучшему усвоению материала.

Использование фронтальной работы не только позволит углубить знания учащихся о тригонометрических функциях, но и поможет создать положительную и активную атмосферу на уроке. Работая в группе, ученики смогут обмениваться мнениями и улучшать свои навыки, что является важным аспектом образовательного процесса.

В таблице 4 приведен фрагмент урока по теме «««Тригонометрические функции» с фронтальной формой деятельности учеников на уроке алгебры и начал математического анализа при актуализации изученного материала (10 класс).

Таблица 4 – Фрагмент урока фронтальной формы деятельности учащихся

3. Актуализация изученного материала – 5 мин.		
Деятельность		
учителя	ученика (учащихся)	Записи на доске
Выборочно спрашивает учащихся	Отвечают на вопросы	Чему равно значение: 1) $\sin\frac{\pi}{4}$; 2) $\cos 0$; 3) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$; 5) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; 6) $\cos -\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\pi$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Групповая форма контроля на уроках алгебры представляет собой эффективный способ оценки знаний и навыков учащихся, позволяющий активно вовлекать их в учебный процесс [69].

В.В. Котов [28] подчеркивает важность групповой деятельности в образовательном процессе, отмечая, что группа должна иметь ясные и конкретные цели, направленные на выполнение заданий или обучение навыкам. Свободный обмен мнениями и разрешение конфликтов способствуют улучшению координации и понимания задач. Четкое разделение обязанностей позволяет использовать сильные стороны каждого участника, повышая общую эффективность работы. Совместное принятие решений создает демократичную атмосферу и увеличивает значимость каждого члена группы. Кроме того, анализ результатов и обратная связь после завершения задач помогают извлекать уроки и улучшать навыки участников, что в итоге повышает продуктивность и результативность групповой работы.

Групповая работа при изучении темы "тригонометрические функции и их свойства" предоставляет ученикам уникальную возможность для сотрудничества и глубокого понимания материала. Этот метод обучения активно вовлекает учащихся, помогает развивать критическое мышление и улучшает навыки командной работы. Рассмотрим основные плюсы групповой работы и способы ее использования в классе:

– кооперативное обучение: ученики учатся работать в команде, обсуждать идеи и приходить к совместным решениям, что способствует развитию навыков сотрудничества;

– углубление понимания: обсуждение материала в группе помогает каждому ученику взглянуть на проблему под разными углами, углубляя общее понимание тригонометрических функций и их свойств;

– развитие коммуникативных навыков: участие в групповых обсуждениях и презентациях развивает у обучающихся способность ясно выражать свои мысли и аргументировать свою точку зрения;

– разнообразие точек зрения: групповая работа позволяет участникам делиться разными подходами и методами решения задач, что расширяет их взгляд на учебный материал;

– поддержка взаимопомощи: ученики могут помогать друг другу в понимании сложных тем, что создает поддерживающую атмосферу обучения;

– повышение мотивации: совместная работа над проектами или задачами может повысить интерес к теме и мотивировать обучающихся достигать лучших результатов.

Как можно использовать групповую работу на уроках:

– исследовательские проекты: разделить класс на группы, каждая из которых будет исследовать определённый аспект тригонометрических функций (например, синус, косинус, тангенс, их графики и применения). в конце группы могут представить свои результаты;

– решение практических задач: дать каждой группе набор задач, связанных с реальными ситуациями, где применяются тригонометрические функции. это может включать задачи из физики, архитектуры или инженерии;

– обсуждение теорем и свойств: каждой группе можно поручить изучить и подготовить обсуждение одной из теорем, связанных с тригонометрическими функциями (например, теорема Пифагора в тригонометрии);

– создание визуальных материалов: попросить группы создать плакаты, модели или презентации, объясняющие тригонометрические функции и их свойства. это помогает им визуализировать информацию и делиться ею с классом;

– ролевые игры: для более активного вовлечения можно организовать ролевые игры, где ученики будут представлять различные математические понятия и свойства, общаясь как "математические исследователи" или "научные эксперты";

– соревнования: проведение математических соревнований, где группы будут состязаться в решении задач на время. это может быть как индивидуальное участие в группах, так и командные турниры;

– кросс-групповое обсуждение: позволить группам встретиться вместе для обмена мнениями и мнениями о своих исследованиях или решениях задач, что способствует более широкой дискуссии.

Групповая работа по изучению тригонометрических функций и их свойств не только способствует более глубокому пониманию математики, но и развивает важные жизненные навыки. Метод позволяет создать активное и продуктивное образовательное пространство, где каждый ученик может внести свой вклад и получить ценный опыт.

Приведем фрагмент урока, представленный в таблице 5, по теме «Тригонометрические функции и их свойства», с групповой формой деятельности учеников на уроке алгебры и начал математического анализа, во время актуализации и закрепления знаний (10 класс).

Таблица 5 – Классные групповые задания

	Группа №1	Группа №2	Группа №3	Группа №4
Теоретический вопрос	Тангенс. Свойства функции	Косинус. Свойства функции	Синус. Свойства функции	Котангенс Свойства функции
Найдите область определения функции без построения графика:				
Задание 1	$y = \frac{1}{\cos x}$	$y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$	$y = \operatorname{ctg} 4x$	$y = -\frac{2}{\sin x}$
Решите графически неравенство				
Задание 2	$\sin x > -\frac{1}{2}$	$\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

При выполнении работы, внутри группы, учащиеся могут оказывать друг другу помощь и давать подсказки, оценка за работу выставляется индивидуально каждому ученику.

Коллективная форма работы на уроке представляет собой метод обучения, в основе которого лежит совместная деятельность учащихся. Такая форма работы способствует не только углублению знаний по предмету, но и развитию навыков взаимодействия и командной работы [12].

Основная цель коллективной работы — создать пространство для обмена идеями и решениями, где каждый ученик может внести свой вклад и получить обратную связь от товарищей по команде. В своих исследованиях В.К. Дьяченко отмечал, что «в процессе коллективного обучения воспитание и обучение каждого участника происходят благодаря усилиям всего коллектива, и каждый его член вносит свой вклад в обучение всех остальных» [19].

Х.Й. Лийметса [33] отмечает, что коллективная форма работы в образовательном процессе строится на принципах дифференцированной групповой деятельности. Такой подход позволяет учитывать индивидуальные особенности учащихся, их уровень подготовки, интересы и предпочтения, что способствует более глубокому и полному усвоению учебного материала.

Коллективная форма обучения при изучении темы "тригонометрические функции и их свойства" предлагает множество преимуществ и открывает новые горизонты для усвоения материала. Рассмотрим основные плюсы коллективного обучения и предложим разнообразные способы его использования для достижения лучших результатов:

– углубленное понимание материала: обсуждение тригонометрических функций и их свойств в группе позволяет учащимся находить более глубокие и разнообразные решения, что обогащает их знания;
– совместное решение задач: в процессе совместного решения уравнений и задач учащиеся могут обмениваться методами и приемами, что ведет к выработке оптимальных подходов к решению;
– развитие навыков критического мышления: при обсуждении различных подходов к одному и тому же упражнению учащиеся учатся анализировать и критически оценивать идеи других, что способствует развитию логического мышления;
– формирование командной работы: коллективное обучение развивает навыки работы в команде. учащиеся учатся делиться обязанностями, принимать решения совместно и поддерживать друг друга;
– повышение мотивации и заинтересованности: работа в группе создает более динамичную и интерактивную атмосферу, что может значительно повысить уровень заинтересованности учащихся в предмете;
– обратная связь: дискуссии в группе позволяют учащимся получать и давать обратную связь, что важно для понимания своих сильных и слабых сторон.

Способы использования коллективной формы обучения:

– групповые проекты: разделить класс на небольшие группы и поручить каждой из них разработать проект на тему «Тригонометрические функции», это может быть исследование применения этих функций в реальной жизни или создание интерактивной презентации по свойствам функций;

– обсуждение примеров: применять методы группы для обсуждения реальных примеров использования тригонометрии (например, в архитектуре или астрономии). это поможет связать теорию с практикой;

– командные соревнования: организовать соревнования, где группы будут решать задачи на скорость и точность. это не только повысит мотивацию, но и создаст элементы игры в обучении;

– ролевые игры: учащиеся могут принять на себя роли экспертов по различным тригонометрическим функциям и обсуждать их с другими "экспертами" в группе, делясь своими знаниями;

– дискуссии и дебаты: провести дискуссии на темы, связанные с тригонометрическими функциями, например, о том, какие функции наиболее полезны в определенных областях науки и техники;

– использование технологий: включить в занятия использование образовательных платформ и онлайн-инструментов, где учащиеся могут работать над задачами в группах и обмениваться результатами;

– работа с текстами: предложить группе изучить определенные учебные материалы или исследовательские статьи о тригонометрических функциях и представить результаты своей работы остальным участникам.

Коллективная форма обучения является мощным инструментом в преподавании тригонометрии, который может заметно повысить уровень вовлеченности обучающихся и привести к более глубокому пониманию материала. Интеграция различных методов работы в группе позволит учащимся не только лучше усваивать теорию, но и развивать жизненно важные навыки, такие как критическое мышление, сотрудничество и коммуникация.

В таблице 6, приведем фрагмент урока по теме «Тригонометрические функции и их свойства», для коллективной формы деятельности учащихся на уроке алгебры и начал математического анализа, во время обобщающего урока – соревнования (10 класс).

Таблица 6 – Фрагмент урока коллективной формы деятельности учащихся

3. Математическое соревнование – 20 мин.			
	I команда	II команда	III команда
Задание 1. Определить знак числа, если известно, что:			
Учитель оценивает ответ	1) $\sin\frac{5\pi}{4}$ 2) $\cos 4{,}5$ 3) $\sin(-1)$ 4) $\cos\frac{2\pi}{5}$	1) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ 2) $\cos 1{,}2$ 3) $\sin(5{,}4)$ 4) $\cos\frac{3\pi}{8}$	1) $\sin\frac{4\pi}{3}$ 2) $\cos(-0{,}5)$ 3) $\sin(12{,}4)$ 4) $\cos\frac{12\pi}{7}$
Задание 2. Определить, какое из чисел больше?			
Учитель оценивает ответ	$\sin\frac{3\pi}{8}$ и $\sin\frac{11\pi}{8}$	$\cos\frac{5\pi}{7}$ и $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$	$\sin\frac{4\pi}{5}$ и $\sin\frac{11\pi}{5}$
	$\cos(-1)$ и $\cos(-2)$	$\sin 4{,}1$ и $\sin 3{,}01$	$\cos(-3)$ и $\cos(-5)$
Задание 3. Могут ли одновременно выполняться равенства?			
Учитель оценивает ответ	$\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$	$\cos\alpha = \frac{3}{4}$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$	$\sin\alpha = \frac{1}{6}$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{35}}$

Р.А. Хабиб [75] подчеркивает важность сочетания индивидуального и коллективного обучения в педагогике. Он отмечает, что эффективное обучение достигается через гармоничное взаимодействие этих форм: индивидуальная работа углубляет понимание материала, тогда как групповые взаимодействия развивают навыки коммуникации и сотрудничества. Учитель играет ключевую роль в этом процессе, используя дифференцированный подход для учета индивидуальных потребностей учащихся и создания условий для обмена опытом в группах. Таким образом, синергия обоих методов способствует более глубокому и комплексному обучению.

Индивидуальная работа на уроке способствует самостоятельному обучению учащихся, помогает оценить уровень усвоения материала и развивает навыки организации. Она может включать тесты, практические задания, исследовательские работы и рефлексии. Такая работа позволяет детям глубже понять тему и развивать критическое мышление.

Преимущества индивидуальной работы: учащиеся могут двигаться в своем темпе, что особенно важно для различных уровней подготовки; стимулирует личную ответственность за результаты образовательной деятельности; позволяет выявить сильные и слабые стороны каждого учащегося, что является основой для дальнейшей работы.

Рассмотрим в таблице 7 фрагмент урока по теме «Тригонометрические функции» с индивидуальной формой деятельности учеников в 10 классе, на примере математического диктанта, во время закрепления новых знаний.

Таблица 7 – Фрагмент урока индивидуальной формы деятельности учащихся

3. Математический диктант –15 мин.	
I вариант	II вариант
1) Найдите значение выражения: а) $\sin 0 + \cos\pi$; б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 1$; в) $\sin 270°$; г) $2\sin\frac{\pi}{6}$; д) $\cos\frac{19}{3}\pi$;	1) Найдите значение выражения: а) $2\cos\frac{\pi}{3}$; б) $\cos\frac{\pi}{2} + \sin\pi$; в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;г) $\sin 720°$; д) $\cos\frac{13}{6}\pi$;
2) Вычислить: $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ 3) Ответьте на вопросы: 1. Какая область значений функции $y = \cos x$ 2. Запишите область определения функции $= \operatorname{tg} x$. 3. Запишите множество значений функции $= \operatorname{ctg} x$. 4. Функция $y = \cos x$ является чётной или нечётной? 5. Каков период функции $y = \operatorname{ctg} x$ 6. Запишите нули функции $= \sin x$. 7. Каков характер монотонности функции $y = \operatorname{tg} x$	2) Вычислить: $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 3) Ответьте на вопросы: 1. Какая область значений функции $y = \sin x$ 2. Запишите область определения функции $y = \cos x$ 3. Запишите множество значений функции $= \operatorname{tg} x$. 4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ является чётной или нечётной? 5. Каков период функции $y = \sin x$ 6. Запишите нули функции $= \cos x$. 7. Каков характер монотонности функции $y = \operatorname{ctg} x$

Дифференцированная работа на уроке — это подход, учитывающий индивидуальные особенности учащихся, их способности и интересы.

Основные цели этого метода включают учет различий между учениками, повышение мотивации и эффективность обучения.

Данный подход включает, как групповые, так и индивидуальные задания, использование материалов с различной сложностью, а также гибкую систему оценок, соответствующую индивидуальным достижениям учащихся. Такой подход помогает каждому ученику максимально раскрыть свой потенциал и способствует лучшему усвоению материала.

Методы дифференциации могут проявляться в разных уровнях сложности заданий, типах заданий (например, письменно или в форме проектов) и выборе содержания.

Р.А. Утеева в своих работах [70], [71], затрагивающих методику дифференцированного обучения, акцентирует внимание на индивидуализации и осознанном подходе к изучению математики. Эти аспекты служат фундаментом для улучшения качества образования и обеспечения достижения каждым учеником своих личных образовательных целей. Задания в рамках данного подхода разрабатываются с учетом специфики четырех типологических групп, что позволяет учитывать индивидуальные различия учащихся и более эффективно организовывать учебный процесс.

Ю.К. Бабанский [52] выделяет три группы учащихся: группу слабоуспевающих, группу наиболее подготовленных и группу остальных учеников. При этом автор отмечает, что данный подход не снижает сложность материала, а позволяет усилить помощь при обучении для слабоуспевающих учеников.

В статье [85] представлены практические примеры дифференциации содержания, процесса и результатов обучения, а также методы группировки учащихся, стратегии оценивания и подходы к многоуровневым урокам, что позволяет эффективно учитывать индивидуальные потребности каждого ученика.

Приведем в таблице 8, фрагмент урока по теме «Использование основных свойств тригонометрических функций для решения задач» с дифференцированной формой деятельности учеников на уроке алгебры, на уроке закрепления полученных знаний (10 классе).

Здесь учащимся предлагается решение разноуровневых упражнений.

Таблица 8 – Фрагмент урока дифференцированной формы деятельности учащихся

3. Закрепление полученных знаний – 15 мин.		
I уровень (типовой для учащихся)	II уровень (последовательное выполнение нескольких тождественных преобразований I уровня, известных учащимся)	III уровень (разбор ранее не встречавшейся ситуации)
1. Дана функция: $y = 0{,}5\sin x$ а) указать нули функции; б) построить график заданной функции; в) указать область значений и промежуток возрастания функции, используя построенный график.	1. Дана функция: $y = 2\cos x - 1$ а) указать нули функции; б) построить график заданной функции; в) указать область значений и промежуток возрастания функции, используя построенный график; г) при каких значениях график не пересекает ось абсцисс	1. Дана функция: $y = \lvert 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) \rvert$ а) указать нули функции; б) построить график заданной функции; в) указать область значений и промежуток возрастания функции, используя построенный график; г) при каких значениях график не пересекает ось абсцисс
2. Решить графически уравнение: $\sin x = 1 - x$.	2. Решить графически уравнение: $\sin x - 2\cos x = 2$.	2. Решить графически уравнение: $\operatorname{tg} x - \cos^2 x + 0{,}8 = 0$.

В большинстве случаев урок математики представляет собой смешанную форму обучения.

Каждая форма организации учебного процесса направлена на активизацию познавательной деятельности учащихся и способствует углубленному усвоению материала.

Индивидуальная работа позволяет ученикам концентрироваться на собственных знаниях и умениях, решая задачи самостоятельно.

Партнерская работа стимулирует обмен идеями и совместное решение задач, что повышает уровень взаимодействия среди учащихся.

Групповая форма организует коллективную активность, позволяя учащимся делиться мнениями и опытами, что развивает их кооперативные навыки.

Коллективная работа под контролем учителя объединяет усилия всех учащихся для достижения общей цели, углубляя межличностные связи и командный дух.

Фронтальная форма позволяет организовать процесс на уровне всего класса, обеспечивая системный контроль и обратную связь.

Дифференцированный подход учитывает индивидуальные потребности и уровни подготовки учащихся, что способствует повышению их мотивации и улучшению качества усвоения материала.

Таким образом, комплексное применение этих форм организации учебной деятельности создает условия для активного и осознанного освоения тригонометрических функций в школьной математике, отвечая современным образовательным стандартам.

Выводы по первой главе

Установлено, что термин «функция» был впервые введён в 1673 году немецким математиком Готфридом Лейбницем. Исторический путь развития понятия функции в математике повлиял на методику преподавания математики в школе и заложил основы для дальнейшего развития математического анализа в российских учебных заведениях.

Изучение функциональной зависимости создает целостное представление о математических понятиях, связывая различные темы и углубляя понимание учащихся. Это способствует развитию математической грамотности и улучшает способности к самостоятельному обучению, что особенно актуально в условиях современного общества, где необходимы навыки критического мышления и анализа.

Функциональная линия занимает важное место в школьном курсе математики и является основополагающим элементом в изучении данной учебной дисциплины. Графики функции не только позволяют ученикам визуализировать взаимосвязь между переменными, но и помогают глубже понять понятие функции как математического объекта. Функциональная линия играет ключевую в формировании практических навыков, необходимых в дальнейшей учебе и профессиональной жизни.

Актуальные требования ФГОС среднего (полного) общего образования подчеркивают необходимость формировать у учащихся представления о тригонометрических функциях, исходя из реальных процессов и зависимостей.

Определено, что левополушарное мышление, которое отвечает за последовательное и логическое рассуждение, а также за анализ информации и систематизацию знаний, играет ключевую роль в усвоении алгебраических понятий у школьников. Однако на ранних этапах изучения данной дисциплины у большинства учеников преобладает правополушарное восприятие. Это связано с тем, что именно в правом полушарии мозга находятся механизмы, способствующие интуитивному, образному и эмоциональному восприятию окружающего мира. Таким образом, учащиеся, только начинающие осваивать алгебру и начала математического анализа, могут испытывать затруднения в переходе от интуитивного понимания к более формализованному.

Важно концептуальное освоение тригонометрии и учитывание ее тесной связи с геометрией; одним из эффективных методов визуализации тригонометрических функций является использование единичной окружности.

Существуют методы, которые могут сделать обучение тригонометрии более доступным и увлекательным для учащихся, включая использование графиков, моделей и реальных задач. В современных образовательных условиях необходима адаптация традиционных методов обучения к новым стандартам.

Эффективное усвоение материалов по тригонометрическим функциям требует не только теоретических основ, но и практической работы, в том числе решения задач различной сложности и получения обратной связи. Это способствует формированию устойчивых знаний и навыков, необходимых для дальнейшего изучения более сложных математических понятий.

Таким образом, результаты исследования подтверждают необходимость обучения тригонометрическим функциям в школьном курсе математики. Важно, чтобы изучение тригонометрии было тесно связано с практическими применениями, способствовало развитию логического мышления и аналитических навыков, что в конечном итоге повысит качество математического образования.

Глава 2 Методические основы обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе»

2.1 Методические рекомендации по изучению числовой окружности как второй модели числового множества

Курс школьной тригонометрии основан на понятии числовой окружности, которая служит основой для дальнейшего изучения тригонометрических функций с числовыми аргументами. Иллюстрация этой окружности с радиусами и угловыми мерами позволит учащимся лучше понять взаимосвязи между углами и значениями тригонометрических функций. Установление связи между функциональными значениями и их графическими представлениями способствует более глубокому пониманию материала и облегчает его усвоение. Визуализация, как процесс создания и интерпретации изображений, становится всё более актуальной в математике и учебном процессе, играя важную роль в обучении [86].

В прямоугольной системе координат, введём окружность, с центром в начале координат (рисунок 1).

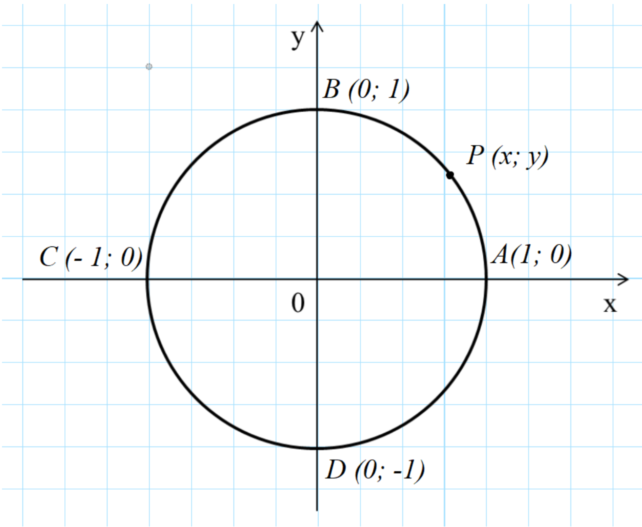


Рисунок 1 – Числовая окружность с центром в начале координат

Точки, пересекающие оси координат, будут обозначены как A (1; 0), B (0; 1), C (–1; 0) и D (0; –1), за начальную для удобства возьмём точку A. Эти точки играют ключевую роль в понимании тригонометрических функций, так как они соответствуют основным значениям синуса и косинуса.

Так же на окружности следует отметить точку P. При этом важно отметить, что для произвольной точки P(x, y) на окружности выполняются условия $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

На окружности единичного радиуса выбрана точка A (1; 0), которую принимаем за начало отсчёта и числовую прямую с множеством R. Соединяем точку A (1; 0) на окружности, с точкой числовой прямой, значение которой равно нулю, далее начинаем «наматывать» прямую на окружность, теперь можно сделать вывод о направлении движения по окружности: «обычно в качестве положительного направления выбирают направление обхода против часовой стрелки» [9, С. 234], отрицательное направление – движение по часовой стрелки (рисунок 2).

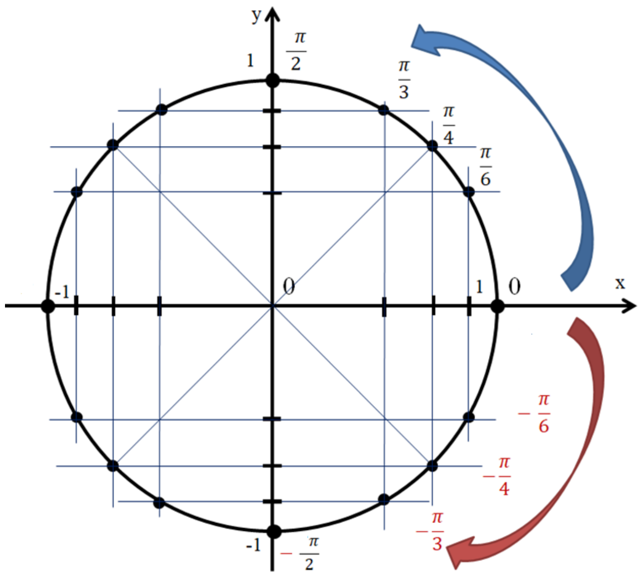


Рисунок 2 – Положительное и отрицательное направление движения по числовой окружности

В процессе работы с числовой окружностью в классе необходимо повесить два макета, на которых будет изображено движение в положительном и отрицательном направлениях, с указанием основных точек промежутка [0; 2π] для первого случая, и промежутка [-2π; 0] для второго.

Прежде чем вводить данные макеты, нужно рассмотреть с учащимися процесс деления окружности на разные равные части: в первом случае (рисунок 3), когда деление четверти выполняется на 2 равные части (окружности на 8 частей), т.е. за основу берут точку $\frac{\pi}{4}$ (нужно обсудить с учащимися, что для этого достаточно провести прямые $y = x$ и $y = -x$, чтобы получить точки на окружности); во втором случае (рисунок 4), когда деление четверти выполняется на 3 равные части (окружности на 12 частей), то есть за основу берут точку $\frac{\pi}{6}$ (искомые точки на окружности можно получить изобразив прямые $y = \pm 0{,}5$ и $x = \pm 0{,}5$). Второй макет, с отрицательным направлением, на котором отмечены точки промежутка [-2π; 0], лучше вывесить после того, как будет рассмотрен вопрос о движении точки в отрицательном направлении.

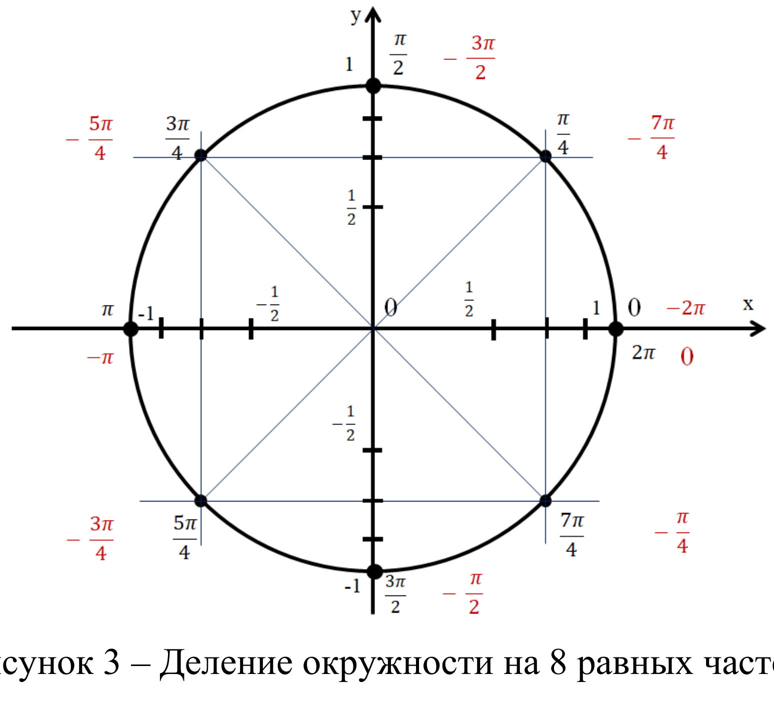


Рисунок 3 – Деление окружности на 8 равных частей

Стоит задать вопрос о том, какие значения будут принимать точки, если будет выбрано отрицательное направление движения.

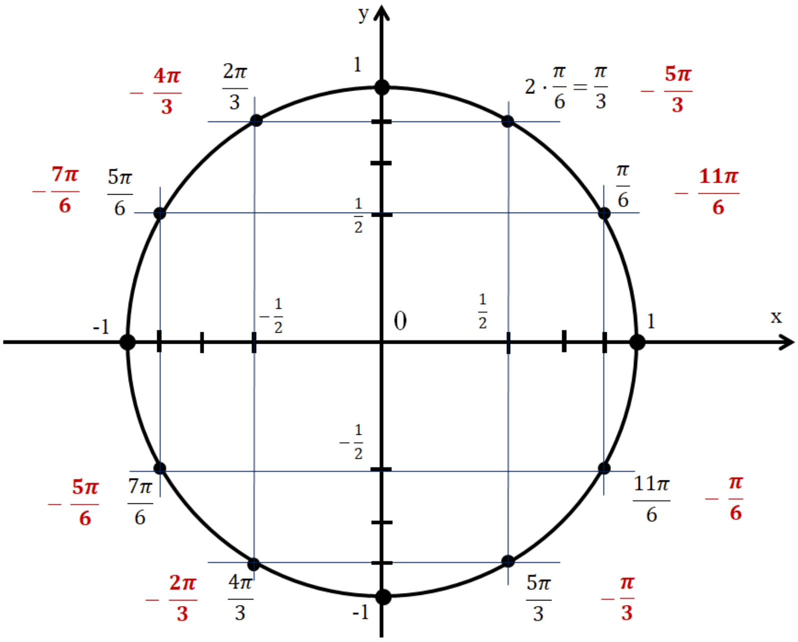


Рисунок 4 – Деление окружности на 12 равных частей

Учащихся нужно подвести к тому, что когда мы совершаем полный оборот по окружности, наше движение не завершается, и мы можем перейти на второй, третий и следующие круги. Стоит задать учащимся вопрос: «Какое расстоянии мы проходим каждый раз при полном обороте по окружности?» Учащиеся должны сделать вывод о том, что каждый раз мы проходим расстояние равное 2π и таких оборотов может быть бесконечно много. Учащимся нужно ответить на вопрос: «Какое будет расстояние при двух полных оборотах, трёх, четырёх, n – оборотах?», после чего учащиеся делают вывод о том, что таких оборотов для начальной точки может быть бесконечно много и для того, чтобы показать данное действие, к значению начальной точки мы будет прибавлять 2πk, где k ∈ Z. Обязательно стоит акцентировать внимание на том, что k – целое число, т.к. чтобы попасть в начальную точку, нужно совершить оборот в полный круг либо в положительном, либо в отрицательном направлении. После чего следует сделать вывод о том, что любая точка на окружности принимает бесконечно много значений, все из которых отличаются друг от друга на 2πk, где k ∈ Z.

В дальнейшем это позволит ученикам вывести понятие периодичности тригонометрических функций и обсудить, как значения углов продолжают повторяться с каждым полным циклом, создавая аналогичные точки на окружности, например, 2π, 4π и так далее. Таким образом, учащиеся будут готовы понять, что тригонометрические функции являются периодическими, и это поможет им разобраться в зависимости между углами и их значениями.

Рассмотрим пример, демонстрирующий применение периодичности тригонометрических функций: «Найдите на числовой окружности точки с ординатой большей $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и определите, каким числам они соответствуют» [2].

В данном случае первым действием рекомендуется выделить точки на окружности для уравнения $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ из основного промежутка $[0; 2\pi]$, вторым действием выделить дугу, где y принимает значения больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$, так у нас будет сформирована основная запись решения, так сказать «опорная» запись $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$, при которой мы получаем нужное решение из основного промежутка $[0; 2\pi]$. Последнее, третье действие, это добавление общего вида решения, путём прибавления к левой и правой части неравенства $2\pi k$, где $k \in Z$, в итоге получаем: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $к \in Z$.

В своей книге В.И. Зарецкий [22] пишет, что уточнение «где $к \in Z$» можно опускать, «записывая его только в парадных случаях – на контрольных или экзаменационных работах», но на наш взгляд, нельзя согласиться с данным утверждением, т.к. запись «$k \in Z$», является важным аспектом в изучении тригонометрических функций, и её нельзя пропускать по нескольким причинам:

– периодичность тригонометрических функций: тригонометрические функции, такие как синус и косинус, имеют периодичность. Например, $\sin(x) = \sin(x + 2\pi k)$ и $\cos(x) = \cos(x + 2\pi k)$ для любых целых k. Это означает, что все решения, полученные для одного значения угла, повторяются через заданный период. Указание, что $k \in Z$, помогает обозначить эти бесконечно много решений;

– полнота решения: если не указать, что k — целое число, то решение будет неполным. Если не уточнить о принадлежности k к целым числам, решение будет восприниматься как неполное, и не будет учтено множество значений, которые действительно являются решениями;

– контекст задачи: В научных и инженерных применениях важно учитывать все возможные решения, так как в ряде случаев только некоторые из них могут быть физически или практически значимыми. Ясное указание на множество решений помогает избежать недопонимания;

– устранение двусмысленности: В математике важно избегать неоднозначностей. Запись $k \in Z$ чётко обозначает, что переменная k принимает целочисленные значения, минимизируя риск ошибки или недопонимания.

Таким образом, запись, что $k \in Z$, является формальным, но важным аспектом, который усиливает точность и полноту математического ответа.

Смысл данной записи крайне важен для понимания учениками. В начале работы с числовой окружностью нужно делать акцент на данной записи, т.к. любой момент, который учащиеся могут упустить и не проработать, со временем приведёт к серьезным пробелам в знаниях, когда речь будет идти о тригонометрических функциях.

Работа с числовой окружностью предлагает множество интересных заданий, которые могут помочь учащимся развить свои математические навыки и лучше понять понятия, связанные с разделом тригонометрии.

Задания по работе с числовой окружностью помогают учащимся отработать навыки пространственного мышления и геометрической визуализации. Они развивают понимание связи между угловыми и декартовыми координатами, а также учат анализировать положения точек в разных координатных системах. Кроме того, такие задания способствуют умению работать с неравенствами и интервалами, усиливая навыки логического мышления и математической аналитики. В итоге учащиеся становятся более уверенными в своих знаниях о тригонометрии и геометрии, что важно для дальнейшего изучения математики.

Так же для лучшего понимания темы, на уроках стоит включать и рассмотрение решённых задач т.к., анализ и использование решенных задач играют важную роль в обучении алгебре, так как они помогают учащимся развивать более глубокое понимание логических процедур, применяемых при решении задач [87].

Рассматривая примеры решения, ученики могут увидеть, какие шаги необходимо предпринять для достижения результата, и осознать структуру решения.

Кроме того, работа с неполными или неправильными решениями задач может стимулировать критическое мышление учащихся. Когда учащиеся сталкиваются с ошибками, им предоставляется возможность проанализировать, в чем заключалась проблема, и найти альтернативные пути решения. Это не только укрепляет их понимание материала, но и развивает навыки самооценки и аналитического мышления, что имеет большое значение не только в математике, но и в других областях обучения.

2.2 Методические рекомендации по обучению тригонометрическим функциям и их свойствам

А.Г. Мордкович [43] и Е.А. Суховиенко [63] в своих работах поднимают вопросы, касающиеся сокращения часов, отводимых на изучение тригонометрии, и его влияния на образовательный процесс. Они подчеркивают, что уменьшение времени, выделяемого на эту тему, может негативно сказаться на глубине понимания учащимися основных понятий, методов и их взаимосвязей в тригонометрии.

А.Г. Мордкович акцентирует внимание на том, что тригонометрия является важной частью математического образования, поскольку она не только развивает логическое мышление, но и служит основой для понимания более сложных тем, таких как аналитическая геометрия и математический анализ.

Е.А. Суховиенко также отмечает, что сокращение часов может ограничить возможность учащихся освоить практические навыки решения задач, что в результате может сказаться на их способности применять тригонометрические методы в различных областях науки и техники.

Оба автора согласны с тем, что сокращение учебного времени должно быть тщательно обдумано, и что подходы к обучению тригонометрии необходимо адаптировать, чтобы сохранить не только объем знаний, но и качество их усвоения.

Ю.М. Колягин предлагает вводить изучение тригонометрических функций с формулировки определения, а построение графика выполнять по точкам, полученным в составленной таблице [25, С. 82].

Р.Г. Гилемханов утверждает, что: «если какое-нибудь важное понятие вводится в первый раз, то ассоциации, сопутствующие ему, врезаются в сознание учащегося чрезвычайно прочно. Последующие впечатления бывают слабее и не могут стереть того обличия, в котором это понятие явилось впервые» [14, С. 27], Это подтверждает, что начальная форма представления тригонометрических функций может оказывать значительное влияние на дальнейшее их восприятие и понимание. Именно из-за «первого впечатления», когда тригонометрические функции вводились через прямоугольный треугольник, учащимся может быть сложно переключиться на их определение через числовую окружность. Для того, чтобы минимизировать данный переход, нужно показать связь числовой окружности и прямоугольного треугольника при введении тригонометрических функций.

Изобразим прямоугольную координатную плоскость, с размещённой на ней окружностью, центр которой, будет находиться в точке О (0; 0). На дуге окружности, расположенной в первой четверти откладываем угол α – получили на окружности точку P_α (рисунок 5).

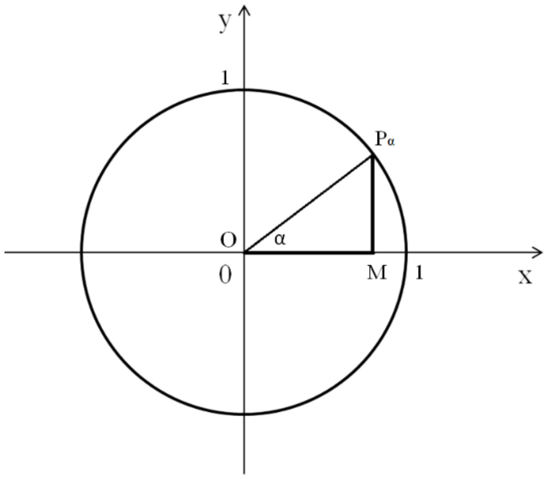


Рисунок 5 – Установление связи между прямоугольным треугольником и числовой окружностью

Опустив из данной точки перпендикуляр $P_\alpha M$ к оси OX, получим прямоугольный треугольник, в котором $\sin\alpha = \frac{MP_\alpha}{OP_\alpha}$, но т.к. окружность единичного радиуса, то перейдём к равенству $\sin\alpha = MP_\alpha$, аналогично вводим равенство для $\cos\alpha = OM$. Т.к. координаты точки $P_\alpha(OM; MP_\alpha)$, делаем вывод, что данную запись можно представить, через синус и косинус угла P_α $(\sin\alpha;\ \cos\alpha)$.

Для того чтобы объяснить учащимся переход от тригонометрических функций углового аргумента, к функциям числового аргумента, можем воспользоваться связью центрального угла и длиной дуги, на которую опирается данный угол. Этот шаг важно сделать, т.к. связь центрального угла и длины дуги помогает учащимся визуализировать, как тригонометрические функции могут быть связаны не только с углами, но и с длиной, что расширяет их понимание.

Понимание функциональной зависимости между углами и длинами дуги является основой для изучения более сложных понятий, таких как периодичность функций, их преобразования и графики. Геометрическая интерпретация поможет нам показать, что полученные выводы работают для любого значения угла α, а не только для того, который был расположен в первой четверти.

Ввести понятие тангенса и котангенса можно двумя способами:

Способ 1. Через отношение синуса к косинусу.

Тангенс.

Для угла α определим тангенс как $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

Синус угла отвечает за ординату (высоту), а косинус — за абсциссу (основание) точки. Таким образом, если: P_α имеет координаты $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, тогда тангенс определяется как:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{высота}}{\text{основание}} = \frac{\text{противолежащая сторона}}{\text{прилежащая сторона}} \text{ или } \text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Способ 2. Геометрическая интерпретация.

Геометрической интерпретацией тангенса служит касательная к тригонометрической окружности, проведённая в точке T(1; 0), которую называют линией тангенсов, данная линия изображена на рисунке 6.

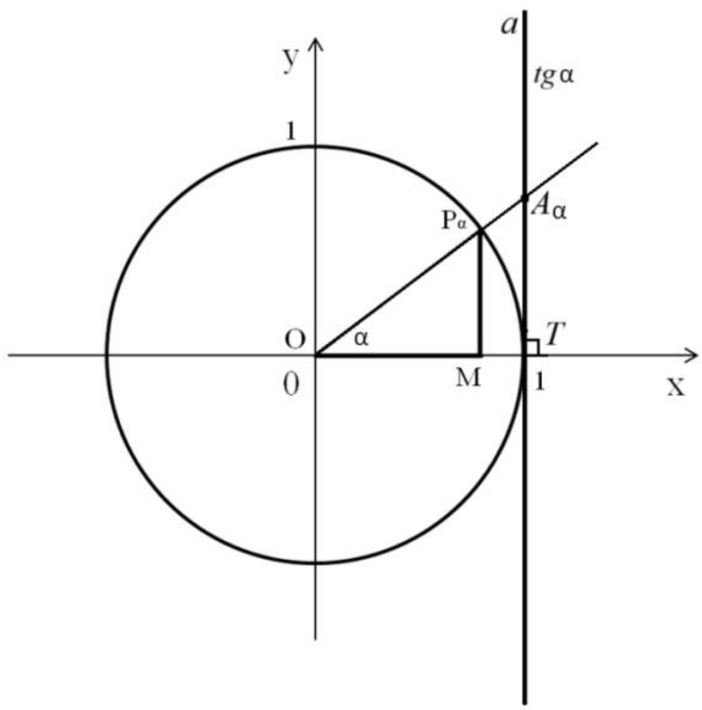


Рисунок 6 – Линия тангенсов

Рассмотрим точку P_α, полученную поворотом точки P(1; 0) на угол α. Через данную точку P_α и начало координат проведём прямую, которая пересекает линию тангенсов в точке A_α.

Тогда тангенс угла α равен ординате точки A_α. С учётом знаков x и y из подобия треугольников Oxα и O A_αT легко установить, что отношение $\frac{y}{x}$ (равное по определению $\operatorname{tg} \alpha$) в каждом случае оказывается равно ординате точки A_{α}.

Аналогично, можно ввести линию котангенса, изобразим его геометрическую интерпретацию (рисунок 7)

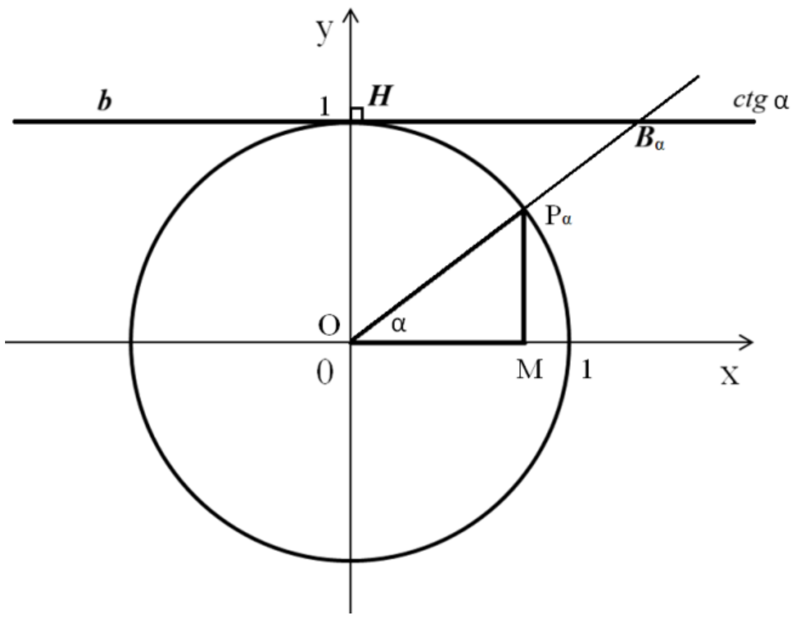


Рисунок 7 – Линия котангенсов

Таким образом, мы имеем два способа введения понятий тангенса и котангенса. Важно убедиться, что у учащихся отработаны следующие навыки:

Навык 1. Нахождение значений всех тригонометрических функций в «главных» точках.

Для удобства можно использовать вспомогательную таблицу (рисунок 8) [36], либо, что на наш взгляд предпочтительнее – тригонометрическую окружность (рисунок 9) со значениями для функций синуса и косинуса.

Угол / Функция	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Рисунок 8 – Вспомогательная таблица для запоминания значений тригонометрических функций

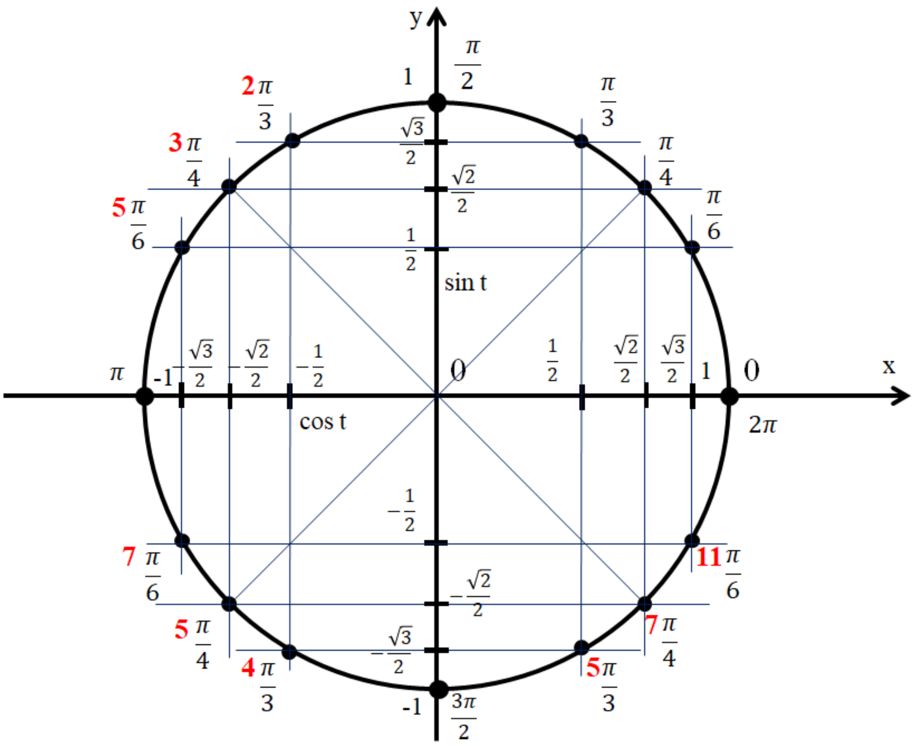


Рисунок 9 – Тригонометрическая окружность со значениями для функций синуса и косинуса

Отметим, почему работа с тригонометрической окружностью предпочтительнее: визуализация: графическое представление углов и значений тригонометрических функций помогает лучше понять взаимосвязи; интуитивное понимание: ясно сопоставление синуса и косинуса с координатами точки на окружности облегчает запоминание; связь с другими функциями: позволяет увидеть соотношения между различными тригонометрическими функциями (тангенс, котангенс и пр.); решение задач: упрощает нахождение значений для углов, которые не включены в таблицы; геометрический подход: развивает пространственное мышление и помогает решать геометрические задачи; обобщение знаний: связывает тригонометрию с другими разделами математики и физики.

В целом, тригонометрическая окружность обеспечивает более глубокое и интуитивное понимание тригонометрии.

Навык 2. Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

Решение уравнений, таких как $\sin x = a$ или $\cos x = b$, позволяет не только находить значения углов, но и понимать, как эти функции ведут себя на различных интервалах, что постепенно приводит учащихся к пониманию незнакомого им свойства периодичности.

Навык 3. Определение знаков тригонометрических функций в заданных точках.

Определение знаков тригонометрических функций в различных квадрантах на единичной окружности имеет важное значение в математике. Эти знания необходимы для решения уравнений, анализа колебательных процессов и нахождения максимумов и минимумов. Также они важны для интегрирования и дифференцирования тригонометрических функций и помогают понять периодичность и симметрию, что облегчает работу с тригонометрическими уравнениями и неравенствами.

Навык 4. Упрощение тригонометрических выражений.

Упрощение тригонометрических выражений имеет большое значение, поскольку оно помогает упростить вычисления и сделать более ясным анализ математических задач. Кроме того, упрощенные выражения облегчают работу с интегралами и производными, давая возможность быстрее находить пределы и определять поведение функций. Это знание также применимо в физике и инженерии, где тригонометрические функции моделируют различные колебательные процессы, а их упрощение помогает в оптимизации решений и интерпретации результатов. В итоге, умение упрощать тригонометрические выражения и правильно оценивать их знаки является необходимым навыком для успешного выполнения задач в математике и смежных областях.

Данные навыки помогут лучше усвоить знания о тригонометрических функциях и их свойствах.

Введение графиков тригонометрических функций можно осуществить в два подхода: сначала строить график, а затем исследовать его свойства, или же сначала исследовать свойства функции, чтобы затем построить график.

Первый подход, при котором сначала строится график, а затем исследуются свойства функции, имеет свои недостатки, которые могут ограничивать его эффективность:

– поверхностное понимание, так как строя график в первую очередь, учащиеся могут сосредотачиваться на визуальной стороне, и, как следствие, их понимание основных математических свойств функции может быть менее глубоким. это может привести к неполному осознанию природы функции и ее типов поведения;

– неполное изучение свойств, так как если исследование функции начинается с графика, то некоторые свойства, могут быть упущены или недооценены. разные учащиеся могут по–разному воспринимать график, что может привести к ошибочным выводам или неправильным интерпретациям;

– сосредоточение на графике может отвлекать учащихся от важности алгебраических манипуляций и их значимости в математике. это может привести к недостаточной подготовке в решении более сложных задач;

– если смотреть на график, учащиеся могут не задумываться о формальных математических свойствах функций, таких как производные или интегралы, которые являются важными для понимания более сложных понятий и дальнейшего изучения.

Мы будем рассматривать методику работы со вторым подходом, так как считаем его целесообразным по следующим причинам:

– глубокое понимание: исследуя функцию до построения графика, учащиеся получают более глубокое понимание её свойств, таких как периодичность, монотонность и асимптоты, что способствует осознанному восприятию материала;

– все свойства тригонометрических функций иллюстрируются на обеих моделях. использование числовой окружности помогает визуализировать значения тригонометрических функций, что делает изучение более интуитивным и доступным для понимания;

– исследование функций на числовой окружности требует от учащихся логического и аналитического мышления, а также способности делать выводы на основе полученных данных;

– применение к различным задачам, так как такой подход облегчает применение полученных знаний к широкому спектру задач, включая нахождение значений и решение уравнений, что особенно полезно в контексте реальных примеров.

Хотя анализ поведения функции на числовой окружности служит лишь иллюстрацией определённых свойств, важно подчеркнуть, что для школьников визуализация через окружность может быть решающим и наиболее доступным способом обоснования и осознания ряда математических фактов. Визуальное представление функциональных зависимостей позволяет учащимся легче воспринимать абстрактные понятия, так как многие из них могут быть трудны для понимания без наглядных примеров.

Демонстрация на числовой окружности не только помогает учащимся увидеть, как различные функции ведут себя в различных точках, но и способствует формированию интуитивного понимания периодичности, симметрии и других фундаментальных свойств. Например, изучение тригонометрических функций на окружности делает наглядными такие свойства, как четность и нечетность функций, а также их симметрию.

Благодаря геометрическим иллюстрациям, ученики могут легче запомнить ключевые моменты и взаимосвязи между математическими понятиями, что значительно упрощает процесс обучения. Кроме того, такая форма представления может служить отправной точкой для углубленного анализа и более сложных тем, таких как комплексные числа или аналитическая геометрия.

Таким образом, использование числовой окружности как метода обоснования математических фактов не только облегчает понимание темы, но и подготавливает учеников к дальнейшему изучению более сложных аспектов математики, развивая их аналитические навыки и творческое мышление.

Рассматривать свойства тригонометрических функций с учащимися предлагаем в следующем порядке:

Свойство 1. Область определения функции.

Свойство 2. Область значения функции.

Свойство 3. Чётность функции.

Свойство 4. Периодичность.

Свойство 5. Монотонность.

Свойство 6. Нули функции и промежутки знакопостоянства.

Изучение свойств тригонометрических функций в предложенном порядке представляется целесообразным по нескольким причинам, которые помогут структурировать процесс обучения и углубить понимание этих математических объектов. Начинать с области определения функции — это логичный шаг, так как он устанавливает рамки существования функции и предоставляет учащимся четкое представление о значениях, при которых тригонометрические функции имеют смысл. Понимание области определения необходимо для корректного анализа других свойств функций.

Следующий шаг — изучение области значений функции. Зная, какие значения может принимать функция, учащиеся могут адекватно воспринимать графики и лучше понять, как свойства функции связаны с ее визуальным представлением. После этого важно рассмотреть чётность функции, поскольку это свойство сразу же дает представление о симметрии функции и о её поведении относительно оси Y. Чётность служит основой для дальнейшего анализа.

Далее разумно переходить к периодичности. Периодичность является ключевым свойством тригонометрических функций и позволяет ученикам понять, как функция повторяется, что имеет важное значение для анализа её поведения на всей числовой оси. Поняв периодичность, учащиеся в состоянии выявлять закономерности и предсказывать значения функции на основе её предыдущих значений.

После изучения периодичности логично рассмотреть монотонность функции. Это свойство способствует пониманию того, как функция изменяется между периодами, и помогает выявить интервал, на котором функция возрастает или убывает. Объединение этих свойств в предложенном порядке создает целостную картину тригонометрических функций, позволяя методически и последовательно углубляться в их изучение и проводить более глубокий анализ, который может быть применен в различных областях математики и её приложений. Такой подход обеспечивает не только систематическое осознание свойств, но и развитие критического мышления у учеников, что является важным аспектом в обучении математике.

Рассмотрим методические рекомендации по введению свойств тригонометрических функций:

Свойство 1. Область определения.

Перед тем, как говорить об области определения тригонометрических функций, нужно напомнить учащимся, что область определения функции – это множество всех значений независимой переменной (обычно x), для которых функция задана и имеет смысл.

Область определения функции синуса и косинуса охватывает все действительные числа и может быть легко обоснована использованием числовой окружности. На числовой окружности, представляющей единичный круг, каждый угол α, измеряемый от положительного направления оси абсцисс, соответствует определённой точке с координатами P(cosα, sinα). Поскольку угол может принимать любое значение — как положительное, так и отрицательное, что обеспечивает возможность вращения, как против часовой стрелки, так и по часовой стрелке — функции синуса и косинуса можно вычислять для всех углов. Таким образом, значения sinα и cosα всегда будут определены, независимо от конкретного значения угла. Это указывает на то, что область определения синуса и косинуса составляет множество всех действительных чисел, что подтверждает их непрерывный и циклический характер, а также их фундаментальную роль в тригонометрии и математическом анализе. Область определения функции тангенса и котангенса можно рассмотреть через отношения функций синуса и косинуса, либо через линию тангенса на числовой окружности.

Свойство 2. Область значений функции.

Область значений функций y = sin x и y = cos x определяется отрезком [-1; 1]. Для подтверждения этого факта достаточно выбрать произвольное действительное число x_1 в пределах указанного интервала, то есть такое, что $-1 \leq x_1 \leq 1$ (рисунок 10). Отметим это значение на оси абсцисс OX и обозначаем точку, соответствующую x_1. После этого проведём перпендикуляр к оси OX. Этот перпендикуляр пересечёт единичную окружность в некоторой точке P_α.

Поскольку единичная окружность определяется уравнением $x^2 + y^2 = 1$, необходимо заметить, что любые точки на этой окружности всегда будут удовлетворять условию, что их абсцисса находится в пределах от -1 до 1. Таким образом, координата x_1 будет являться абсциссой точки P_α, что подразумевает, что x_1 также будет значением функции y = cos x для соответствующего угла, определяющего положение точки P_α на окружности.

Аналогично можно провести рассуждения и для функции y = sin x. Проанализировав высоту, соответствующую этому же значению x_1, мы также можем установить, что x_1 будет равно значению функции $y = \sin x$ для некоторого угла.

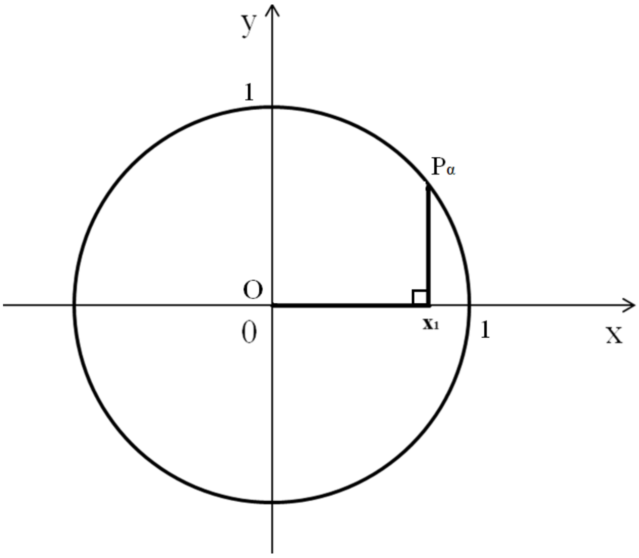


Рисунок 10 – Визуальная демонстрация того, что все точки отрезка $[-1; 1]$ являются значениями функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Таким образом, обе функции, синус и косинус, ограничивают свои значения только до диапазона [-1; 1], что подчеркивает их периодическую природу и связь с тригонометрией.

Данное свойство функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ не только делает их важными в математическом анализе, но и объясняет множество наблюдаемых явлений в физике, таких как колебания и волны. Следовательно, можно уверенно утверждать, что области значений этих функций совпадают и составляют отрезок [-1; 1].

Свойство 3. Чётность и нечётность.

Обоснование того, что $\sin(-x) = -\sin x$, а $\cos(-x) = \cos x$ для любых действительных значений x, часто связано с симметрией окружности, где точки, соответствующие углам t и $-t$, имеют определенные характеристики в зависимости от этапа объяснения. «Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу – t соответствует точка P, симметричная точке M относительно горизонтального диаметра окружности (то есть относительно оси абсцисс). У таких точек одна и та же абсцисса, а ординаты равны по модулю, но отличаются знаком. Следовательно, $\sin(-t) = -\sin t$, а $\cos(-t) = \cos t$» [3]. После данного обоснования, можно сделать выводы о равенствах $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg}(t)$ и $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg}(t)$.

При разговоре о чётности функций, следует сделать акцент на симметрии графиков таких функций и сделать вывод о симметрии области определения относительно начала координат.

Чётность тригонометрических функций играет ключевую роль в их анализе и применении в математике и смежных науках. Чётность позволяет установить симметрию функции относительно оси ординат. Например, свойство $\sin(-x) = -\sin x$, указывает на нечётность синуса, тогда как $\cos(-x) = \cos x$ демонстрирует чётность косинуса. Использование этих свойств позволяет облегчить работу с тригонометрическими формулами и упрощает процесс доказательства различных тождеств.

Понимание чётности функций также имеет практическое применение в различных областях, таких как физика, где синус и косинус используются для описания волновых процессов и периодических явлений. Знание свойств чётных и нечётных функций помогает в нахождении амплитуд и фазовых сдвигов, а также в решении задач, связанных с гармоническим движением.

Чётность тригонометрических функций не только углубляет понимание их свойств и графиков, но и открывает дополнительные возможности для упрощения математических операций и анализа реальных физических процессов, что делает это знание неотъемлемой частью изучения тригонометрии и ее применения в практике.

Свойство 4. Периодичность.

Ещё раз остановимся на том, почему изучение свойств периодичности тригонометрических функций перед освоением их монотонности является разумной стратегией. Давайте рассмотрим их более подробно:

Периодичность — это одно из ключевых свойств тригонометрических функций, позволяющее понять, как они ведут себя в разных диапазонах.

Осознание того, что тригонометрические функции повторяются с определёнными интервалами, укореняет базовые знания и предоставляет ученикам инструмент для дальнейшего анализа [77].

Зная период функции, можно сразу сказать, что поведение функции в пределах одного периода будет аналогично поведению в любом другом периоде.

Графическое представление тригонометрических функций напрямую связано с их периодичностью. Ученики, которые сначала изучают периодичность, могут более легко интерпретировать графики и видеть, как функции повторяются. Это визуальное понимание делает изучение монотонности более доступным.

Понимание периодичности помогает провести связь между различными свойствами тригонометрических функций. Функция может быть монотонной в пределах одного периода, а также ее поведение можно экстраполировать на все остальные периоды.

Изучение тригонометрических функций начинается с простых аспектов и переходит к более сложным. Периодичность — это более базовое понятие, которая формирует основные навыки анализа функций и готовит учеников к более сложным понятиям, таким как монотонность и экстремумы.

В целом, логика изучения периодичности перед монотонностью позволяет лучше структурировать знания и делает процесс обучения более последовательным и понятным. Учитывая все вышесказанное, безопаснее и эффективнее ввести учеников непосредственно в основы тригонометрии через её периодические свойства, что затем углубит их понимание монотонности и других связанных тем.

После того, как были рассмотрены некоторые свойства тригонометрических функций, нужно указать на то, что эти функции обладают важным свойством, о котором ранее не говорилось, так как не было соответствующих функций. Это свойство периодичности.

Далее формулируется определение: «функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называется периодом функции $f(x)$» [2, С. 205]

При изучении периодичности функции нужно сделать акценты на том, что: если у функции есть период, то таких периодов у функции будет бесконечное множество, а основным периодом для удобства выбирают наименьший положительный период; если разделить график функции на отрезки равные длине периода, то получим на этих промежутках идентичные участки, которые являются отражением или сдвигом друг относительно друга. Эти свойство периодических функций становится особенно важным в тригонометрии, где оно позволяет упростить анализ и построение графиков функций.

Рассмотрим пример работы с учениками, в котором нужно доказать, что 2π – наименьший положительный период функции $y = \cos x$.

Пример работы с учениками.

Нам нужно доказать, что 2π – наименьший положительный период функции $y = \cos x$. Мы разрешим задачу, используя визуальные и логические приемы.

Шаг 1: Определение периода.

Если функция $f(x)$ имеет период T, это означает, что для любого значения x выполняется равенство:

$$f(x + T) = f(x).$$

В нашем случае, для функции y=cos$x$ мы говорим, что это равенство должно выполняться. Итак, мы ищем положительное значение T такое, что:

$$\cos(x + T) = \cos x.$$

Шаг 2: Применение формулы косинуса суммы:

$$\cos(x + T) = \cos x \cdot \cos T - \sin x \cdot \sin T.$$

Чтобы это равенство выполнялось для любого x, необходимо, чтобы:

$\cos T = 1$ и $\sin T = 0$.

Шаг 3: Решение уравнений.

Рассмотрим первое уравнение $\cos T = 1$. Это уравнение выполняется, когда $T = 2\pi k$ ($k \in Z$). Это значит, что T может принимать значения 0, 2π, 4π, 6π и т.д. Далее, посмотрим на второе уравнение $\sin T = 0$, оно выполняется также, когда $T = n\pi$ (где $n \in Z$). Но для нас более интересна связь с первым уравнением.

Шаг 4: Положительный период.

Таким образом, у нас есть два списка возможных значений для T:

Из первого уравнения: 0, 2π, 4π, 6π …

Из второго уравнения: 0, π, 2π, 3π …

Теперь давайте проанализируем, какой из этих периодов наименьший. Наименьшее значение среди всех положительных периодов — это, конечно же, 2π.

Шаг 5: Заключение.

Таким образом, мы пришли к выводу, что наименьший положительный период функции $\cos x$ равен $T = 2\pi$.

Это означает, что если мы возьмем значение функции при любом x, то через 2π мы получим такое же значение. Это свойство делает функцию косинуса периодической и позволяет нам точно узнать, как она поведет себя при увеличении x на 2π. Подводя итог, можно сказать, что эта уникальная особенность косинуса помогает нам предсказывать поведение функции на всей числовой оси.

Для отработки понятия периодичности функции можно использовать ряд заданий, направленных на практическое применение теории, которые помогут закрепить данный материал: на основании предоставленного графика, который иллюстрирует часть функции на определённом интервале, требуется построить продолжение этого графика на других участках; проанализировать, как преобразования некоторой функции влияют на периодичность и т.д.

Свойство 5. Монотонность.

При анализе свойств монотонности тригонометрических функций, таких как y = sin x и y = cos x, важно обратить внимание на их поведение на определенных промежутках.

Свойство монотонности часто иллюстрируются с помощью единичной окружности, где можно наглядно наблюдать за изменением угла и соответствующих значений функций, что делает такое объяснение интуитивно понятным, но не всегда удобным для формального математического обоснования. Однако в классах с углубленным изучением математики или с высоким уровнем подготовки учащихся, возможно, использовать более строгие математические доказательства [9].

Так же обоснование возрастания функции y = sin x на интервале $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ можно объяснить с помощью производной, т.к. производная sin x равна cos x, и на данном промежутке cos x остается положительной, что подтверждает возрастание синуса. В свою очередь, функция y = cos x на интервале $[-\pi; 0]$ демонстрирует убывание. Аналогично, можно провести обоснование для возрастания и убывания функции y = cos x.

Свойство 6. Нули функции и промежутки знакопостоянства.

Далее следует объяснить, что нули тригонометрических функций — это углы, при которых функция принимает значение ноль, например, для синуса $y = \sin x$ нули находятся в точках $x = \pi k$, где $k \in Z$. После этого следует определить промежутки знакопостоянства, основываясь на найденных нулях функции, чтобы установить, на каких интервалах функция положительна или отрицательна.

Решение тригонометрических неравенств также играет ключевую роль: например, для неравенства $\sin x > 0$ учащиеся должны определить промежутки, в которых синус положителен, что происходит в первом и втором квадрантах.

Использование числовой окружности поможет визуализировать, где тригонометрические функции меняют знак и где находятся их нули.

После изучения свойств тригонометрических функций, учащиеся получают необходимые знания для перехода к построению графиков этих функций.

Нужно ещё раз указать, что каждое свойство несёт определённую роль.

Область определения функции позволяет определить допустимые значения аргумента, что является основой для корректного построения графика.

Область значения, в свою очередь, указывает на возможные значения функции, что также важно для визуализации графика.

Чётность функции помогает установить симметрию графика относительно оси ординат, упрощая его построение.

Периодичность, характерная для тригонометрических функций, указывает на повторяющиеся участки графика, что позволяет сократить усилия при его построении, так как можно использовать один период для воспроизведения всей функции.

Наконец, анализ монотонности функции помогает определить, на каких интервалах график возрастает или убывает, что важно для правильного отображения его формы.

Таким образом, понимание перечисленных свойств создает прочный фундамент для успешного построения графиков тригонометрических функций, что является важным навыком в математическом образовании.

После этого желательно проиллюстрировать все свойства тригонометрических функций на графике, чтобы наглядно продемонстрировать их особенности. Это поможет глубже понять, как функции ведут себя в зависимости от изменений аргумента. Также, сводя все свойства в одну таблицу, можно создать удобный справочный материал (рисунок 11), который будет легко использовать для быстрого сравнения различных тригонометрических функций и их характеристик. Такая визуализация и систематизация информации способствуют лучшему усвоению понятий и позволяют ученикам более эффективно анализировать и применять эти знания в дальнейших математических задачах.

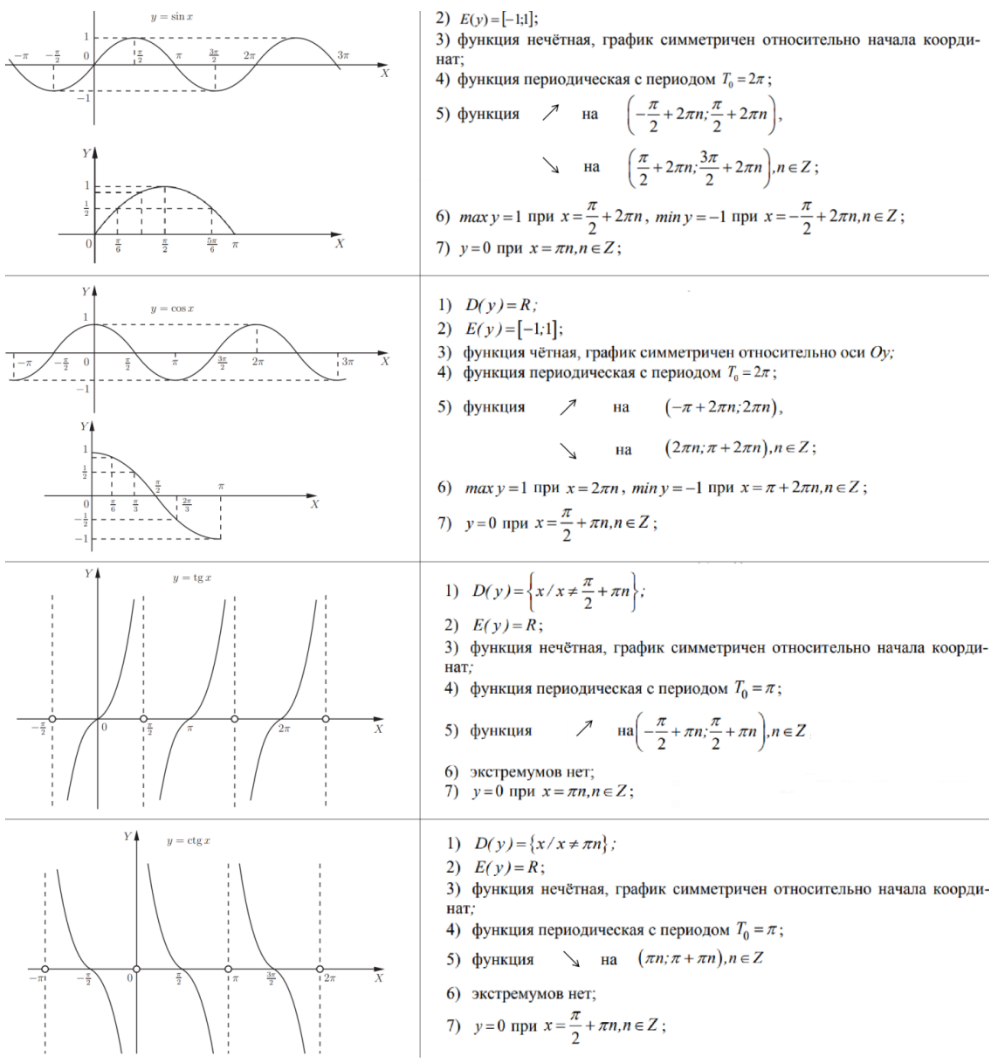


Рисунок 11 – Справочный материал по тригонометрическим функциям и их свойствам

Далее решаются традиционные упражнения на чтение графиков, использование свойств функций:

Упражнение 1: Чтение графика.

На графике представлена функция f(x) и даны следующие задания:

Задание 1. Определите максимальные и минимальные значения функции, а также соответствующие точки.

Задание 2. В каких интервалах функция положительна, а в каких — отрицательна?

Задание 3. Найдите период функции и кратко объясните, как он меняется при изменении аргумента.

Упражнение 2: Исследование свойств.

Дана функция $g(x)$:

Задание 1. Найдите период функции.

Задание 2. Укажите точки максимума и минимума, а также значения функции в этих точках.

Задание 3. Определите, на каком интервале функция убывает.

Упражнение 3: Графическое представление.

На графике функции $h(x)$:

Задание 1. Найдите точки разрыва (если есть) и определите их причины.

Задание 2. Во сколько раз изменяется значение функции, когда x увеличивается на $\pi/2$?

Упражнение 4: Применение свойств.

Для функции $f(x)$:

– найдите период функции и кратко обоснуйте его;

– определите точки, в которых функция равна нулю;

– исследуйте симметрию функции относительно оси OY и точки;

– выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной;

– доказать, что данная функция является периодической с заданным периодом;

– найти наименьший положительный период функции;

– используя свойства возрастания/убывания, сравнить значения функции в разных точках.

Упражнение 5: Построение графика и его чтение.

Построить график функции и выяснить её основные свойства.

Далее вводятся графики гармонического колебания, которые имеют вид $y = A\sin(wt + a)$ и $y = A\cos(wt + a)$. Основной целью введения гармонических колебаний является наглядная демонстрация того, как изменяются свойства функций в зависимости от значения коэффициентов A,w и a.

Перед тем, как начать изучать данную тему, учитель должен провести необходимую пропедевтическую работу и напомнить основные правила, связанные с преобразованиями графиков.

Создание проблемной ситуации на уроке и вовлечение учащихся в исследовательскую работу также играют важную роль в обучении. Однако стоит помнить, что акцент следует делать не на алгебраических преобразованиях, а на основном понимании тригонометрических функций.

Главная задача педагога заключается в развитии умственных способностей учащихся, чтобы они могли не только выполнять вычисления, но и осмысленно относится к изучаемому материалу. Это обеспечит более успешное применение тригонометрии в различных областях знаний.

2.3 Система упражнений по теме «Тригонометрические функции и их свойства»

Т.А. Иванова [65, С. 151] считает, что система упражнений и задач должна опираться на ряд принципов, которые обеспечивают эффективность обучения, а именно:

Принцип однотипности подразумевает, что упражнения должны быть сгруппированы по одному и тому же типу, что способствует лучшему усвоению материала.

Принцип непрерывного повторения обеспечивает постоянную практику знаний для их закрепления.

Принцип вариативности предполагает внедрение разнообразия элементов в систему задач, чтобы учащиеся могли столкнуться с различными подходами и методами.

Принцип единственного различия помогает учащимся сосредоточиться на одном конкретном отличии между задачами, что способствует глубинному пониманию.

«Принцип наличия контрпримера включает задания, содержащие неполные или противоречивые условия, провоцируя тем самым ошибки и стимулируя учащихся к анализу.

Принцип полноты требует охвата всех важных аспектов, связанных с изучаемым понятием, чтобы дать целостное представление.

Принцип сравнения ориентирован на чередование прямых и обратных операций, а также других задач, что позволяет выявить их взаимосвязь, сходства и различия» [65, С. 151].

Постепенное нарастание сложности активно используется для адаптации темпа и усложнения материала по мере повышения уровня знаний учащихся.

Принцип цикличности предполагает регулярное повторение пройденного материала через определенные промежутки времени, что способствует его лучшему запоминанию и систематизации.

Эти принципы, в совокупности, создают условия для более глубокого и эффективного освоения учебного материала.

Технология формирования понятий Е.И. Лященко [32] представляет собой методический подход к обучению, направленный на углубление и систематизацию знаний учащихся через активное взаимодействие с понятийным аппаратом предмета. В основе этой технологии лежат несколько ключевых принципов и этапов, которые помогают учащимся более полно постичь изучаемый материал, в частности, в математике и, в частности, в тригонометрии.

Технология формирования понятий является одной из наиболее эффективных методик обучения, позволяющей углубить понимание учащимися сложных математических понятий, таких как тригонометрические функции и их свойства.

Проектирование изучения темы «Тригонометрические функции и их свойства» в рамках технологии формирования понятий предполагает структурированный подход, который обеспечивает глубокое усвоение материала и развитие навыков критического мышления у учащихся. Основная идея данной технологии заключается в поэтапном, последовательном формировании новых понятий через практические примеры, активные методы обучения и рефлексию. «Технология отличается от методик своей воспроизводимостью, устойчивостью результатов, отсутствием многих «если»» [61, С. 17].

«Сформировать понятие об объекте – это значит раскрыть все существенные свойства объекта в их целостной совокупности. Деятельность ученика (субъекта) при этом направлено на изучение математического объекта, а продуктом этой деятельности будет правильное понятие» [32].

Для эффективного усвоения теоретических знаний учащимися важно «создать комплекс упражнений, способствующий полному овладению учебным материалом. В учебном пособии Е.И. Лященко обсуждаются как общие, так и специфические характеристики обучающих задач, которые помогают формировать теоретические представления» [32, С. 69].

После анализа разных методических подходов к созданию системы упражнений и изучения требований к ним, была разработана система заданий по теме «Тригонометрические функции и их свойства», основанная на технологии формирования понятий Е.И. Лященко. В соответствии с чем, в предлагаемую систему должны быть включены следующие типы заданий:

«1. Наличие задач, связанных с показом практической значимости нового понятия или с его значимостью для дальнейшего продвижения в изучении математики.

2. Наличие задач на актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия.

3. Наличие задач на выделение существенных признаков понятия.

4. Наличие задач на распознавание формируемого понятия.

5. Наличие задач на усвоение текста определения понятия.

6. Наличие задач на использование символики, связанной с понятием.

7. Наличие задач на установление свойств понятия.

8. Наличие задач на применение понятия» [32, С. 69].

Рассмотрим систему упражнений, спроектированную в рамках технологии формирования понятий Е.И. Лященко.

«Задачи, подчеркивающие практическую значимость нового понятия и его роль в дальнейших исследованиях в области математики» [32].

Задача 1. Сила переменного электрического тока является функцией, зависящей от времени и выражается формулой $I(t) = 5\sin 20\pi t$ (сила тока измерена в амперах, время – в секундах)

Найдите: а) амплитуду, б) период, в) частоту силы тока.

Задача 2. «Сила переменного электрического тока является функцией, зависящей от времени, и выражается формулой $I = A\sin(\omega t + \varphi)$, где A – амплитуда колебания, ω – частота, φ – начальная фаза. Построить график этой функции, если A = 2, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ »[2].

«Задачи на актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия» [32].

Задача 3. «Может ли $\sin\alpha$ быть равным:

1) 0,049; 2) – 0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2 + \sqrt{2}$?

Задача 4. Найти значение выражения: $2\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3} - \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$»[2].

Задача 5. «Упростить выражение: $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$ »[4].

Задача 6. «По заданному значению тригонометрической функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

1) $\sin t = 0{,}8, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi$; 2) $\mathrm{ctg}\, t = \frac{7}{24}, \quad 2\pi < t < \frac{5\pi}{2}$» [4].

Задача 7. «Определите знак выражение:

1) $\cos\frac{5\pi}{9} - \mathrm{tg}\frac{25\pi}{18}$; 2) $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \mathrm{tg}3 \cdot \mathrm{ctg}4$» [4].

Задача 8. «Докажите равенство:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\pi-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$» [4].

Задача 9. Докажите тождество:

$$\frac{1-4\sin^2 t\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t-\sin^2 t}=\cos 2t.$$

Задача 10. Упростите выражение [27]:

$$\frac{\mathrm{tg}^2(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\mathrm{tg}(-\alpha)}-\mathrm{tg}(-\alpha).$$

Задача 11. Найдите ошибку (ошибки) в решении:

$\frac{\mathrm{ctg}^2(-\alpha)-\cos(-\alpha)}{\mathrm{ctg}(-\alpha)}-\mathrm{ctg}(-\alpha)=\frac{-\mathrm{ctg}^2\alpha+\cos\alpha}{-\mathrm{ctg}\alpha}+\mathrm{ctg}\alpha=-\left(\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}\right)+$

$+\mathrm{ctg}\alpha=-\left(\mathrm{ctg}\alpha-\cos\alpha:\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+\mathrm{ctg}\alpha=-\mathrm{ctg}\alpha+\cos\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=\cos\alpha.$

«Задачи на выделение существенных признаков понятия» [32].

Задача 12. «Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\sin\frac{\pi}{7}$; $\sin\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{2\pi}{3}$; $\sin\frac{7\pi}{6}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$.

2) 1, $\sin 1$, $\cos 1$, $\mathrm{tg}1$» [2].

Задача 13. «Используя свойство возрастания или убывания функции $y=\cos x$ и $y=\mathrm{tg}x$, сравнить числа:

1) $\cos 1$ и $\cos 3$; 2) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}$» [1].

Задача 14. «Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y=\sin x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $[0;\ \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$» [2].

Задача 15. «По графику функции y = sin x определить (приближённо):

1) $\sin 2$; 2) $\sin(-3)$ » [29].

Задача 16. «Построить график функции [2, 4]:

1) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y=2\sin x-1$; 3) $y=2\,\mathrm{tg}\,x$» [4].

Задача 17. «Изобразить схематически график функции $y=\cos x+1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$» [80].

Задача 18. Построить график функции $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Указать промежутки монотонности функции.

Задача 19. Составьте алгоритм построения графика функции

$$y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}5$$

Задача 20. «Постройте график функции $y = \sin x$ по точкам на отрезке $[0; \pi]$. Относительно какой прямой симметричен график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$?» [4].

«Задачи на распознавание формируемого понятия» [32].

Задача 21. «Наибольшее значение функции равно 1. Для каких функций это утверждение верно?

а) $y = \cos x$ и $y = \operatorname{ctg} x$;

б) $y = \sin x$ и $y = \cos x$;

в) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \cos x$;

г) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$»[4].

Задача 22. «Какие утверждения верны для функции $y = \operatorname{ctg} x$?

а) область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел $\pi n, n \in Z$;

б) функция монотонно убывает;

в) функция четная;

г) область значений $(-\infty;\infty)$» [4].

Задача 23. «Верно ли, что область определения функции $y = \sin 2x$ равна множеству всех действительных чисел?» [4].

Задача 24. Верно ли, что максимальное значение функции $y = 1 + \cos x$ равно 1?

Задача 25. Верно ли, что функция $y = x \cdot |\operatorname{tg} 3x|$ является чётной?

Задача 26. Определите по графику чётность функции (рисунок 12, рисунок 13):

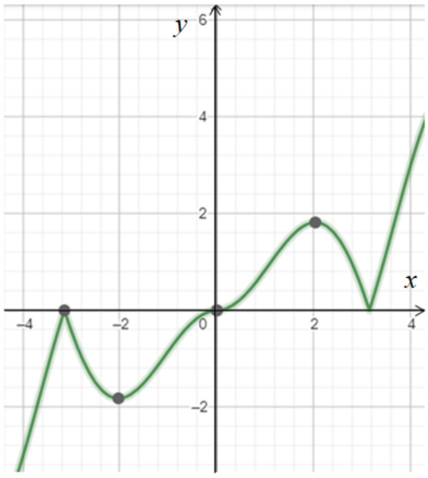


Рисунок 12 – График к заданию 6

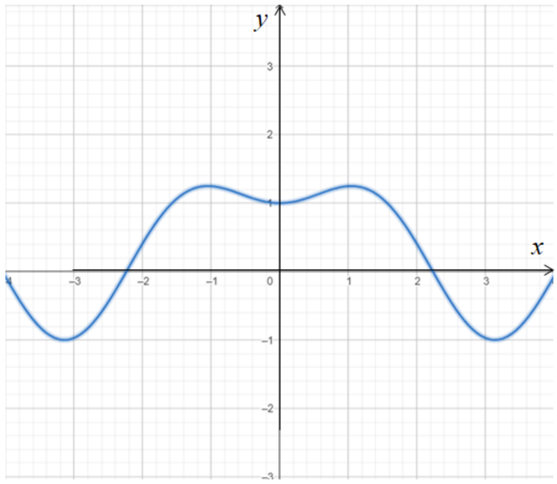


Рисунок 13 – График к заданию 6

Задача 27. «Верно ли, что точка с координатами принадлежит графику функции $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

1) $\left(0;\ \sqrt{3} + 1\right)$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$?» [4]

Задача 28. «Среди заданных функций укажите те, которые являются нечётными:

1) $y = \operatorname{ctg} x - 3x^2$; 2) $y = x \cdot |\operatorname{tg} 3x|$;

3) $y = \cos x - x^2$; 4) $y = (1 + \sin 4x)\sin 4x$;

5) $y = \sin(3x + x^3)$; 6) $y = \sin|x|$» [4].

Задача 29.

Среди заданных графиков функций укажите ту, которая является чётной (рисунки 14-17):

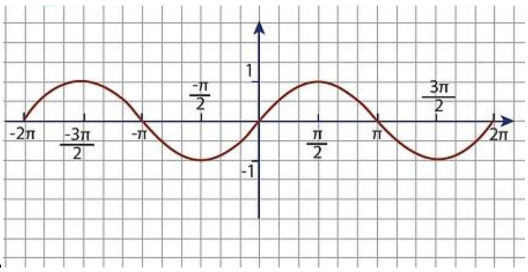
1. 

Рисунок 14 – График к заданию 9

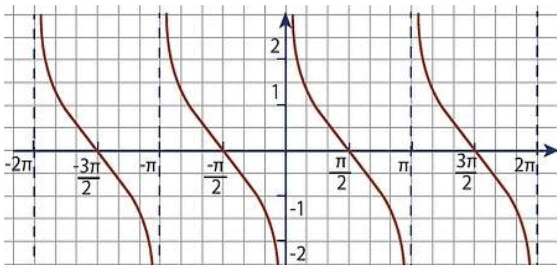
2. 

Рисунок 15 – График к заданию 9

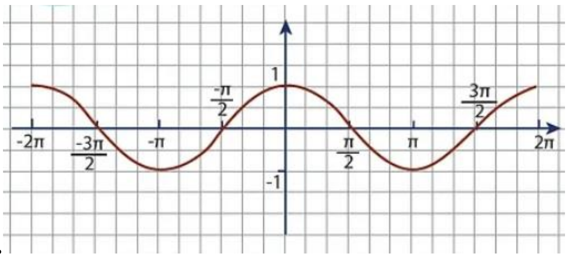
3. 

Рисунок 16 – График к заданию 9

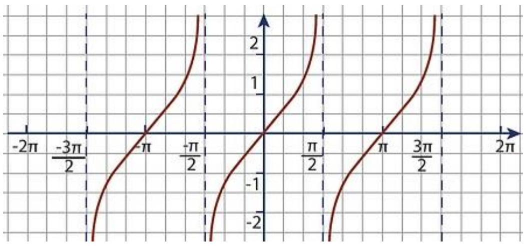
4. 

Рисунок 17 – График к заданию 9

«Задачи на усвоение текста определения понятия» [32].

Заполните пропуски:

Задача 30. Наибольшее значение sin a равно _______, где a = ___________ радиан.

Задача 31. Наименьшее значение sin a равно _______, где a = ___________ радиан.

Задача 32. Наибольшее значение cos a равно _______, где a = ___________ радиан.

Задача 33. Наименьшее значение cos a равно _______, где a = ___________ радиан.

Задача 34. _________ угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается _________).

Задача 35. ____________ угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается __________).

Задача 36. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют ____________ числа t и обозначают ____________

Задача 37. Отношение ____________ числа t к ____________ того же числа называют котангенсом числа t и обозначают ____________.

«Задачи на использование символики, связанной с понятием» [32].

Задача 38. «Известно, что $f(x) = 3\sin x$.

Найдите: 1) $f(-x)$; 2) $2f(x)$; 3) $2f(x) + 1$; 4) $f(-x) + f(x)$» [4].

Задача 39. Пусть $f(\cos x) = \cos 13x$. Доказать, что $f(\sin x) = \sin 13x$

Задача 40. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{если} -\pi \le x \le 0, \\ \sqrt{x} + 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

Вычислите: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f(0), f(4), f(\pi^2)$;

Задачи на установление свойств понятия.

Задача 41. «Найдите область определения функции:

1) $y = \cos\frac{x}{2}$; 2) $y = \sin\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 4) $y = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$» [2].

Задача 42. Найти множество значений функции [2, 4]:

1) $y = 1 - 4\cos 2x$; 2) $y = \sin 2x \cdot \cos 2x + 2$;

3) $y = 10 - 9\sin^2 3x$; 4) $y = 1 - 2|\cos x|$.

Задача 43. «Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения:

1) $-3\cos t$; 2) $\sqrt{7\cos^2 t + 9}$; 3) $\frac{5\sin^2 t + 5\cos^2 t}{3|\cos t| + 2}$» [4]

Задача 44. «Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 3\sin x \cdot \cos x + 1$; 2) $y = \sin^2 t - 2\cos^2 t$ » [2].

Задача 45. Исследовать на чётность функцию [2, 4]:

1) $y = \operatorname{ctg} x - 3x^2$; 2) $y = x \cdot |\operatorname{tg} 3x|$;

3) $y = \cos x - x^2$; 4) $y = (1 + \sin 4x)\sin 4x$;

5) $y = \sin(3x + x^3)$; 6) $y = \sin|x|$.

Задача 46. Исследуйте функцию $y = \sin x$ на монотонность на промежутке $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Задача 47. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Задача 48. Докажите, что $T = \frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = 3\cos 4x$.

Задача 49. «Найти период функции $y = \sin 3x + \cos 5x$» [48].

Задача 50. «Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{если} -\pi \le x \le 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

Вычислите: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f(0), f(1), f(\pi^2)$; постройте график функции $y = f(x)$; прочитайте график функции $y = f(x)$» [1].

Задача 51. Подберите коэффициенты a и b так, чтобы на данном рисунке был изображен график функции $y = a\sin x + b$ или $y = a\cos x + b$ [4].

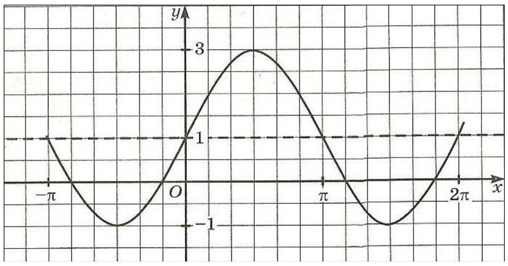


Рисунок 18 – График к заданию 12

«Задачи на применение понятия» [32].

Задача 52. «Используя графики функций y = tg x и y = ctg x, найти все корни уравнений:

1) $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$; 2) $\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$» [29].

Задача 53. Решить графически уравнение [2,4]:

1) $\cos x = x + \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin x = x + \pi$;

Задача 54. Решить неравенство [48]:

1) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\mathrm{tg}x < 1$;

3) $\sin x - 2x + 1 < 0$; 4) $\cos x - x^2 - 2x - 1 \geq 0$.

Задача 55. «Решить уравнение $\frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2\sin x - 1}} = 0$» [27].

Задача 56. «Решите уравнение $2\sin\frac{\pi}{2}x = \frac{x^2+1}{x}$» [5].

Задача 57. «Сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \frac{1}{x}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = -x^2 + 2x - 3 \end{cases}$» [4].

Задача 58. «Дана система уравнений:

$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = 1, \\ \sin\alpha + \sin\beta = a. \end{cases}$ Докажите, что $a \leq \sqrt{3}$» [5].

Ответы и решения к системе задач приведены в Приложении А.

Каждая из групп заданий имеет свою образовательную направленность и способствует глубокому усвоению материала.

При использовании предложенной системы задач ожидаются следующие результаты и успехи учащихся:

– глубокое понимание материала: учащиеся не только запоминают формулы и определения, но и понимают, как и в каких ситуациях они применяются. это связано с активным вовлечением в процесс и практикой;

– развитие критического мышления: решение задач на применение полученных знаний, способствуют развитию аналитических навыков, что поможет учащимся в дальнейшем принимать обоснованные решения в различных ситуациях;

– увеличение мотивации: интеграция практических задач показывает учащимся значимость изучаемого материала, что, в свою очередь, повышает их интерес к предмету;

– устойчивые навыки: регулярная практика через многообразие заданий помогает формировать устойчивые навыки, которые учащиеся могут применять в будущих курсах математики и смежных областях;

– способность к самооценке: учащиеся учатся оценивать не только свои успехи, но и приводить аргументы и примеры в подтверждение своих выводов, что также полезно для их дальнейшего обучения.

Таким образом, предложенная система задач и упражнений не только способствует усвоению тригонометрических функций, но и развивает несколько ключевых навыков, необходимых для будущих успехов учащихся как в учебной деятельности, так и в практической жизни.

В целом, система заданий разработана таким образом, чтобы последовательно развивать навыки учащихся, начиная от элементарных понятий и заканчивая их практическим применением. Каждый тип задания способствует созданию комплексного представления о тригонометрических функциях, что, безусловно, значительно повысит качество обучения и интерес учащихся к данной теме.

2.4 Описание педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент проводился на базе МБУ «Школа №13», г.о. Тольятти. В эксперименте участвовало 38 учеников 11 классов, которые учатся по программе для классов с углублённым изучением математике по УМК А.Ш. Алимова. В 11 «А» классе, который был выбран экспериментальным классом – 18 учащихся, в 11 «Б» классе, который являлся контрольным классом – 20 учащихся.

Констатирующий этап эксперимента по теме "Тригонометрические функции и их свойства" преследует несколько ключевых целей, направленных на оценку реального уровня знаний и умений учащихся. Этот этап предоставляет возможность учителю проанализировать, насколько хорошо учащиеся усвоили материал, а также выявить пробелы в их понимании. Основные аспекты, которые следует учитывать:

– оценка базовых понятий: выявление уровня понимания основных понятий тригонометрии;

– понимание свойств функций: оценка знания учащимися свойств тригонометрических функций, таких как периодичность, четность/нечетность, симметрия и диапазоны значений. важно, чтобы ученики могли применять эти свойства при решении задач;

– графическая интерпретация: оценивается умение строить графики тригонометрических функций и читать их; обучающиеся должны уметь находить амплитуду, период, максимумы и минимумы функций;

– применение тригонометрии в задачах: проверка навыков применения тригонометрических функций для решения практических задач, что может включать геометрические задачи, физические задачи или задачи на моделирование;

– идентификация проблемных областей: выявление конкретных тем или понятий, в которых учащиеся испытывают трудности, что позволит учителю адаптировать дальнейшее обучение и разработать более целенаправленные стратегии для устранения этих пробелов.

Результаты исследования были апробированы этапе эксперимента учителем математики МБУ «Школа №13» К.О. Мышкиной.

Для достижения этих целей в рамках констатирующего этапа была разработана контрольная работа, состоящая из 6 заданий, направленных на исследование навыков, которые учащиеся должны были получить для успешного усвоения темы.

Данная контрольная работа была предложена учащимся на итоговом уроке изучения темы «Тригонометрические функции и их свойства».

Вариант 1.

Задание 1. Найти область определения и множество значений функции $y = 2\sin 3x$.

Задание 2. Исследовать на чётность функцию:

а) $y = \cos x - x^2$; б) $y = (1 + \sin 4x)\sin 4x$.

Задание 3. Изобразить схематически график функции $y = \cos x - 1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{1}{3}\cos^2 x - \frac{1}{3}\sin^2 x + 1$.

Задание 5. Найти наименьший положительный период функции: $y = \cos\left(-7x + \frac{\pi}{4}\right)$. Докажите, что $T = \frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = 3\cos 4x$.

Задание 6. Построить график функции $y = \frac{1}{2}\sin 2x + 1$. Указать промежутки монотонности функции, точки экстремума.

Вариант 2

Задание 1. Найти область определения и множество значений функции $y = \frac{1}{3}\sin 4x$.

Задание 2. Исследовать на чётность функцию:

а) $y = \sin x - 3x^2$; б) $y = x \cdot |\operatorname{tg} 3x|$

Задание 3. Изобразить схематически график функции $y = \sin x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

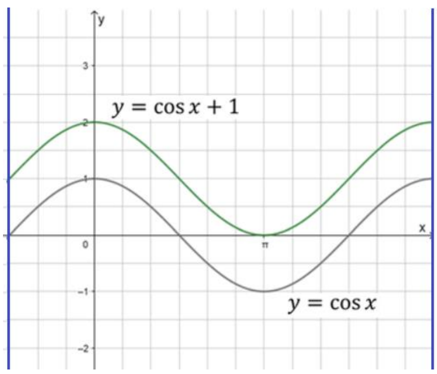
Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3\sin x \cdot \cos x + 1$.

Задание 5. Найти наименьший положительный период функции: $y = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$. Докажите, что Т = 8π является периодом функции $y = \cos\frac{x}{4}$.

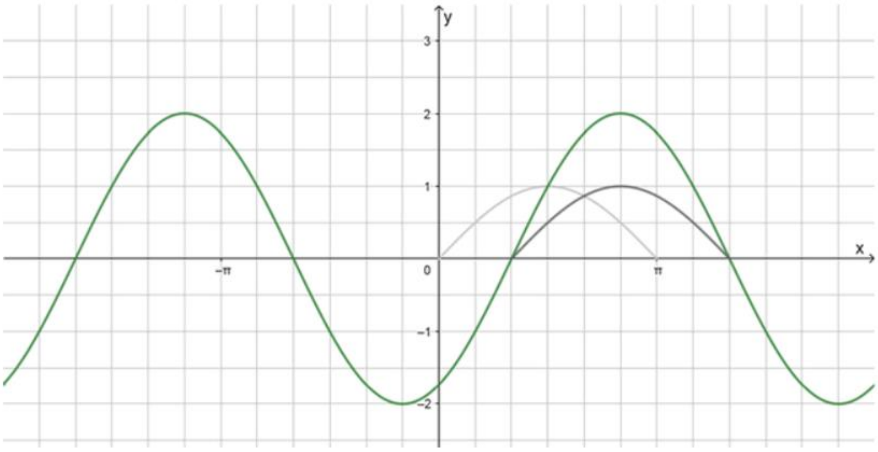
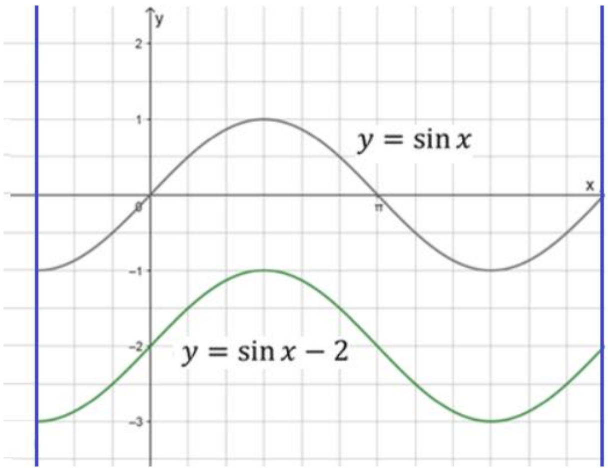
Задание 6. Построить график функции $y = \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$. Указать промежутки монотонности функции, точки экстремума.

В таблице 9 приведены ответы к работе.

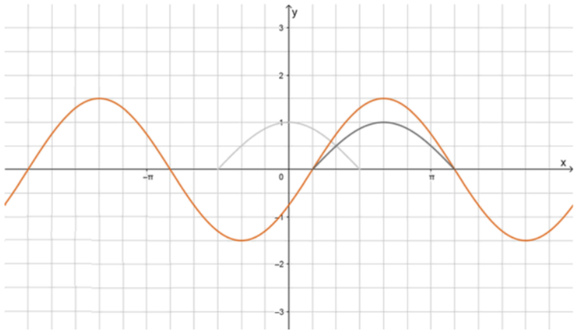
Таблица 9 – Ответы к контрольной работе.

№ задания	Вариант 1
1	О.О.Ф.: $x \in R$, О.З.Ф.: $y \in [-2; 2]$
2	а) чётная; б) общего вида.
3	 Рисунок 19 – Схематическое изображение графика функции $y = \cos x + 1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

Продолжение таблицы 9

№ задания	Вариант 1
4	наименьшее = 0,75; наибольшее =1,25
5	а) $T = \frac{2\pi}{7}$; б) $f\,(x + \frac{\pi}{2}) = 3\cos(4(x+ \frac{\pi}{2})) = 3\cos(4x+2\pi) = 3\cos(4x)$.
6	 Рисунок 20 – График функции $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ Функция возрастает на $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, убывает на $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.
	Вариант 2
1	О.О.Ф.: $x \in R$, О.З.Ф.: $y \in [-\,0{,}5; 0{,}5]$
2	а) общего вида; б) нечётная.
3	 Рисунок 21 – Схематическое изображение графика функции $y = \sin x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
4	наименьшее = − 0,5; наибольшее = 2,5
5	а) $T = \frac{\pi}{4}$; б) $f\,(x + 8\pi) = \cos\frac{x+8\pi}{4} = \cos\left(\frac{x}{4} + 2\pi\right) = \cos\frac{x}{4}$

Продолжение таблицы 9

№ задания	Вариант 2
6	 Рисунок 22 – График функции $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ Функция возрастает на $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, убывает на $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in Z$.

Результаты контрольной работы отображены в таблице 10.

Таблица 10 – Результаты выполнения контрольной работы 11 «А» класса

	Выполнили верно, среди учащихся 11 «А»		Выполнили верно, среди учащихся 11 «Б»	
	Кол-во	%	Кол-во	%
№1. Задание на нахождение ООФ и ОЗФ функции аналитически	14	78	14	70
№2. Задание на исследование функции на чётность	15	83	13	65
№3. Задание на схематическое построение графика на заданном отрезке	14	78	13	65
№4. Задание на нахождение максимального и минимального значения функции аналитически	12	67	12	60
№5. Задание на нахождение периода функции	9	50	8	40
№6. Задание на построение графика гармонического колебания и исследования графика на свойства монотонности и экстремумов.	10	56	9	45

Представим результаты выполнения контрольной работы для каждого класса в виде гистограмм (рисунок 23, рисунок 24)

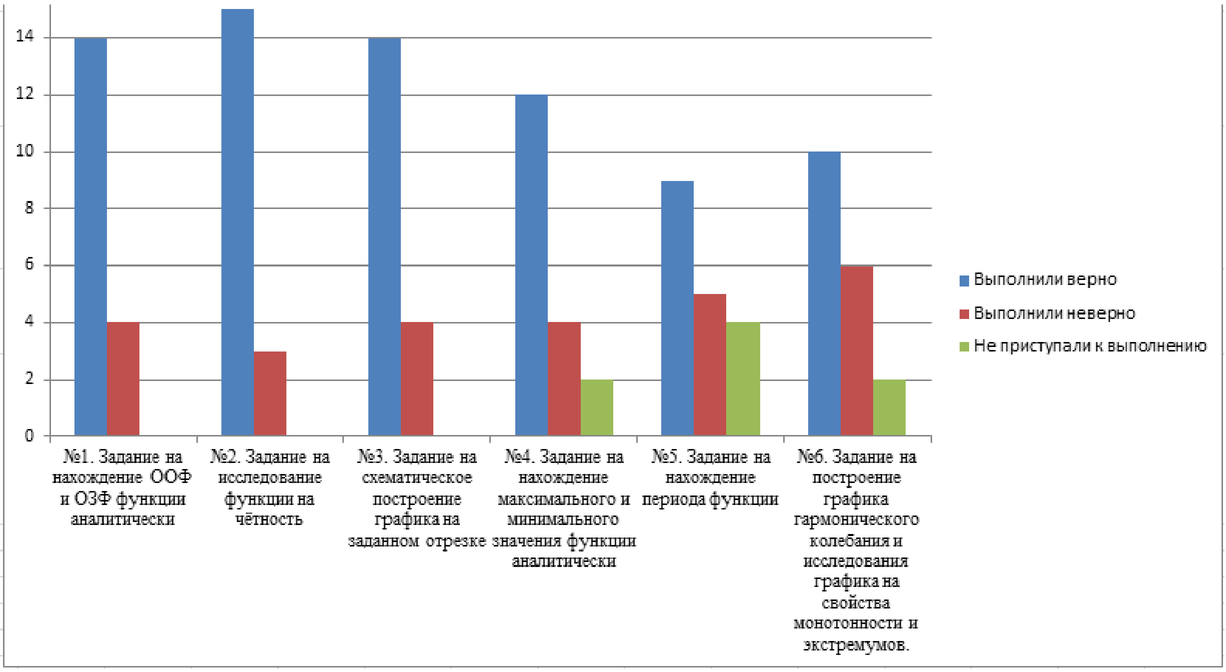


Рисунок 23 – Графическое представление выполнения заданий контрольной работы экспериментального класса.

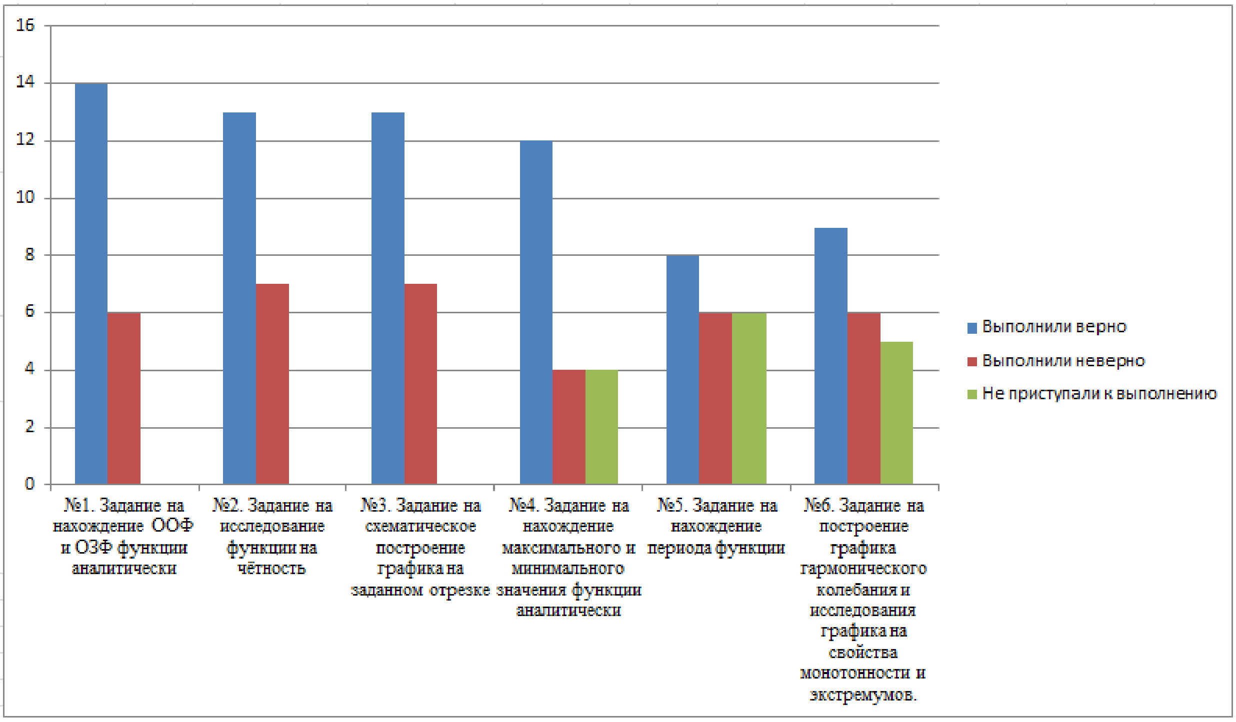


Рисунок 24 – Графическое представление выполнения заданий контрольной работы контрольного класса.

Количественный анализ контрольной работы приведен в таблице 11.

Таблица 11 – Количественный анализ контрольной работы

Оценка	Количество учеников, получивших данную отметку в 11 «А»	
	Кол-во	%
«5»	5	28
«4»	6	33
«3»	5	28
«2»	2	11
Оценка	Количество учеников, получивших данную отметку в 11 «Б»	
	Кол-во	%
«5»	3	15
«4»	5	25
«3»	7	35
«2»	5	25

Представим анализ отметок в виде гистограммы – рисунок 25.

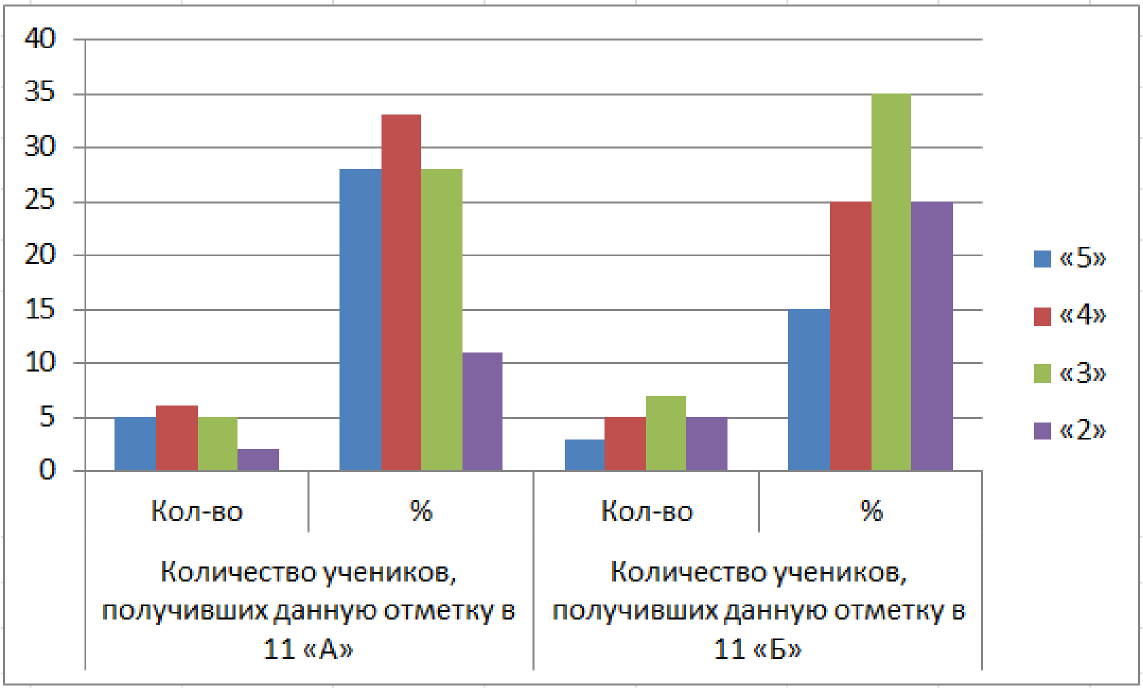


Рисунок 25 – Графическое представление результатов контрольной работы

Виды ошибок, допущенных учащимися при выполнении контрольной работы по каждому из шести предложенных заданий, представлены в таблице 12.

Таблица 12 – Виды ошибок учащихся

№1. Задание на нахождение ООФ и ОЗФ функции аналитически							
Вычислительная ошибка		Неверно применена формула (правило)		Неверно рассмотрено влияние аргумента на область значений функции		Не доведено до ответа	
11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»
1	2	0	2	3	2	0	0

№2 . Задание на исследование функции на чётность							
Допущена ошибка в вычислениях		Ошибка при преобразовании выражения		Ошибка при работе с чётностью отдельной тригонометрической функции		Не доведено до ответа	
11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»
1	1	1	3	1	3	0	0

№3. Задание на схематическое построение графика на заданном отрезке							
Неверно записано условие		Ошибка в построении основной функции		Ошибка в построении преобразованной функции		Не построен график	
11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»
0	1	2	3	2	3	0	0

№4. Задание на нахождение максимального и минимального значения функции аналитически					
Неверно применена формула (правило)		Ошибка при преобразовании выражения		Не приступали к заданию	
11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»
1	2	3	2	2	4

№5. Задание на нахождение периода функции									
Неверно записано условие		Допущена ошибка в вычислениях		Неверно применена формула (правило)		Ошибка при работе с периодичностью основной тригонометрической функции		Не приступали к заданию	
11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»
0	0	0	0	2	4	3	2	4	6

№6. Задание на построение графика гармонического колебания и исследования графика на свойства монотонности и экстремумов.									
Неверно записано условие		Ошибка в построении основной функции		Ошибка в построении преобразованной функции		Ошибка при работе со свойствами функции		Не приступали к заданию	
11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»	11 «А»	11 «Б»
1	0	1	3	3	2	1	1	2	5

Анализ допущенных ошибок показал, что учащиеся часто сталкиваются с проблемами, связанными с пониманием и применением различных математических понятий. Наиболее распространенные ошибки включают неправильное нахождение области определения (ООФ) и области значений функции (ОЗФ), а также неумение корректно применять необходимые формулы.

Распространенные ошибки:

– неверное нахождение ООФ и ОЗФ: учащиеся не всегда правильным образом рассматривают влияние аргумента на область значений функции, что может приводить к потерям информации и ошибочным выводам;

– ошибки в исследовании функции на чётность: часто возникают проблемы с выполнением проверки на четность функций. Ошибочные выводы возникают из-за недостаточного понимания свойств тригонометрических функций;

– сложности со схематическим построением графиков: незнание того, как строятся основные тригонометрические функции;

– неправильное нахождение экстремумов функции: ошибки в преобразовании выражений также приводили к неправильной интерпретации значений функции в заданных интервалах;

– трудности с периодом функции: учащиеся часто не могли адекватно определить периодичность тригонометрических функций, что мешает пониманию их свойств;

– ошибки при построении графиков гармонических колебаний: проблемы возникали не только с построением графиков, но и с анализом монотонности и нахождением экстремумов на них.

Замечания: недостаточное знание свойств тригонометрических функций приводит к ошибкам в исследовании и построении функций; неумение самостоятельно преобразовывать выражения затрудняет решение задач, связанных с упрощением тригонометрических выражений; вычислительные ошибки из-за невнимательности и недостаточного опыта.

Результаты контрольной работы показали, что 61% учащихся экспериментальной группы успешно справились с заданиями, а 39% учеников смогли выполнить лишь часть заданий, допуская ошибки при упрощении тригонометрических выражений, так как проблема заключалась в недостаточном знании необходимых формул и неправильном их применении, из-за чего учащиеся получили не те оценки за контрольную работу, на которые могли бы рассчитывать. Для учащихся контрольной группы эти показатели практически обратные: 40% учащихся успешно справились с заданиями, а 60% смогли выполнить лишь часть заданий. Проблема, на наш взгляд, заключалась в отсутствии пропедевтической работы, так как данная тема является первой по алгебре и началам математического анализа, с момента начала учёбы в 11 классе.

На поисковом этапе эксперимента была апробирована разработанная методика по обучению теме «Тригонометрические функции и их свойства» и система задач.

Целью контрольного этапа эксперимента была проверка эффективности разработанной методики по изучению темы «Тригонометрические функции и их свойства».

Проверка эффективности разработанной методики является важным этапом образовательного процесса, поскольку позволяет оценить, насколько предложенные подходы способствуют более глубокому пониманию и усвоению материала учащимися; может сильно повлиять на дальнейшее усовершенствование процесса обучения. Это не только помогает улучшить понимание конкретной темы, но и развивает у учащихся базовые навыки, необходимые для успешного изучения других более сложных тем в математике.

Анализ результатов позволит создать более эффективные методы преподавания, что, в свою очередь, способствует повышению общего уровня знаний учащихся и их интересу к математике, как к предмету.

Разработанная методика преподавания темы "Тригонометрические функции и их свойства" была применена при работе с экспериментальным классом, контрольный класс участвовал на констатирующем этапе эксперимента.

Проверка гипотезы подтвердила, что использованная методика обучения по теме "Тригонометрические функции и их свойства" и система задач действительно положительно сказалась на качестве знаний учащихся, так же результаты контрольной работы подтвердили необходимость пропедевтической работы, при изучении тригонометрических функций и их свойств.

Экспериментальный класс, в котором было уделено время пропедевтической работе по теме "Тригонометрические функции и их свойства" показали лучшие и более стабильные результаты на констатирующем этапе, анализ контрольной работы показал, что у данных учащихся больше развит навык работы со свойствами тригонометрических функций и их графиками.

Данные результаты открывают новые перспективы для дальнейшей работы по улучшению образовательных методик, включая их адаптацию для других тем и предметов. Важным выводом является необходимость систематической пропедевтической работы, крайне важной для успешного усвоения материала и дальнейшего изучения, более сложных тем в математике.

Выводы по второй главе

В результате проведенного исследования, описанного во второй главе, можно выделить несколько ключевых выводов:

– необходимость комплексного подхода к обучению тригонометрическим функциям. Введение тригонометрических функций в школьный курс математики требует целостного и последовательного подхода, который включает как геометрические, так и алгебраические методы. Это позволит учащимся глубже понять сущность тригонометрических функций и их свойства;

– значение пропедевтики. Перед изучением тригонометрических функций важно проводить пропедевтическую работу, направленную на освоение основных понятий, таких как угол, радиан и работа с числовой окружностью. Это поможет учащимся избежать трудностей в дальнейшем освоении темы, связанных с отсутствием базовых знаний;

– актуальность использования числовой окружности. Данный аспект заключается в её способности служить мощным инструментом для визуализации тригонометрических функций и их свойств. Каждый угол соответствует определенной точке на окружности, где абсцисса представляет косинус угла, а ордината — синус. Это помогает запомнить значения для стандартных углов и осваивать периодичность функций, а также их симметрии в разных квадрантах. Кроме того, числовая окружность облегчает решение тригонометрических уравнений и неравенств, предлагая графическое представление, что делает процесс более наглядным и интуитивным;

– создание системы упражнений. Разработанная система упражнений, направленная на формирование понятий по Е.И. Лященко, способствует также закреплению теоретических знаний и практическому применению тригонометрических функций, показывает эффективность в процессе обучения. Упражнения, учитывающие различные типы заданий, помогают учащимся формировать необходимые навыки и углублять понимание темы;

– результаты педагогического эксперимента показали, что большинство обучающихся экспериментального класса продемонстрировало уровень усвоения материала, удовлетворяющий образовательным стандартам;

– выявление типичных ошибок. Анализ выполненных контрольных работ в ходе констатирующего этапа эксперимента показывает основные проблемы, с которыми сталкиваются учащиеся, что подчеркивает важность дальнейшей работы над этими аспектами на уроках;

– необходимость систематического повторения. Для успешного освоения тригонометрических функций и их свойств рекомендуется организовать систематическое повторение пройденного материала, что будет способствовать более глубокому усвоению знаний и умений.

Таким образом, результаты исследования подчеркивают важность комплексного подхода к обучению тригонометрии.

Заключение

В работе все поставленные задачи были решены:

– раскрыты исторические аспекты развития понятия функции и тригонометрических функций в школьном курсе математики. Определено, что исторический путь развития понятия функции в математике повлиял на методику преподавания математики в школе и заложил основы для дальнейшего развития математического анализа в российских учебных заведениях; термин «функция» был впервые введён в 1673 году немецким математиком Готфридом Лейбницем;

– выделены основные цели и задачи обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в старших классах общеобразовательной школы. Установлено, что изучение функциональной зависимости создает целостное представление о математических понятиях, связывая различные темы и углубляя понимание учащихся. Это способствует развитию математической грамотности и улучшает способности к самостоятельному обучению, что особенно актуально в условиях современного общества, где необходимы навыки критического мышления и анализа;

– проанализированы учебники алгебры и начал математического анализа. Так, сравнительный анализ этих учебников показал, в рамках изучения тригонометрических функций все рассмотренные учебники включают разнообразные примеры, задачи и наглядные иллюстрации, что позволяет учащимся видеть практическое применение тригонометрии в различных ситуациях. Эти примеры помогают связать теоретические знания с реальными задачами, например, в физике и инженерии, где тригонометрические функции находят широкое применение; во всех учебниках рассматриваются графики основных тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс и их обратные функции), что позволяет учащимся визуально воспринимать их поведение и основные характеристики, такие как периодичность, амплитуда и сдвиги;

– описаны методические аспекты организации учебной деятельности при обучении рассматриваемой теме;

– описана методика обучения теме «Тригонометрические функции и их свойства» в старших классах.

– разработана система упражнений по технологии формирования понятий Е.И. Лященко;

– проведен педагогический эксперимент и описаны его результаты, где определено, что использованная методика обучения по теме "Тригонометрические функции и их свойства" действительно положительно сказалась на качестве знаний школьников.

Следовательно, поставленные цель исследования достигнута.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учрежд. / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др. М.: Просвещение, 2023. 384 с.

2. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. М.: Просвещение, 2022. 464 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2018. 311 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровень) / А.Г. Мордкович и др. М.: Мнемозина, 2019. 264 с.

5. Беляева А.Ю. Применение свойств тригонометрических функций в решении олимпиадных задач / А.Ю. Беляева, Д.А. Душин // Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образоваания: Материалы XXI Всероссийской (IX с Международным участием) научно-практической конференции, Самара, 20 ноября – 2018 года. Самара: Самарский государственный социально-педагогический университет, 2018. С. 157 – 160.

6. Бескин Н.М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания [Текст] / Бескин Н.М. Москва: Учпедгиз, 1950. 140 с.

7. Бродский Я.С., Павлов А.Л. Тригонометрические функции, их свойства и применение. Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов. Донецк, 2023. 164 с.

8. Васильева Е.М. Графические работы в курсе алгебры VI – VII классов: автореф. дис. канд. пед. наук / Акад. пед. наук РСФСР. Науч.-исслед. ин-т методов обучения; науч. рук. В.Л. Гончаров. М., 1955. 15 с.

9. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 кл.: учеб. для углубл. изуч. математики в общеобраз. учрежд. / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. 13-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2016. 335 с.

10. Виленкин Н.Я. Как возникло и развивалось понятие функции / Н.Я. Виленкин // Квант. 1977. №7. С. 41 – 45.

11. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике [Текст]: книга для внеклас. чтения IX – X кл. / Н.Я. Виленкин. 2-е изд., испр. М.: Просвещение, 1985. 192 с.

12. Виноградова М.Д. Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников / М.Д. Виноградова, И.Б. Первин. М.: Просвещение, 1977. 159 с.

13. Гельфанд И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л. Тригонометрия. М.: МЦНМО. 2014. 200 с.

14. Гилемханов Р.Г. О преподавании тригонометрии в 10 классе по курсу В [Текст] / Гилемханов Р.Г. // Математика в школе. 2001. № 6. С 26 – 28.

15. Глейзер Г.И. История математики в школе IV – VI кл. [Текст]: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. М.: Просвещение, 1981. 239 с.

16. Глейзер Г.И. История математики в школе IX – X кл. [Текст]: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. М.: Просвещение, 1983. 351 с.

17. Гончаров В.Л. Начальная алгебра / Акад. пед. наук РСФСР, Ин-т методов обучения; [под ред. и с предисл. И.Н. Шевченко]. 2-е изд. М.: изд-во АПН РСФСР, 1960. 452 с.

18. Дорофеев Г. Периодичность и не периодичность функций [Текст] / Дорофеев Г., Розов Н. // Квант. 1977. №1. С. 43 – 48.

19. Дьяченко В.К. Организационная структура учебного процесса и ее развитие / В.К. Дьяченко. М.: Просвещение, 1989. 156 с.

20. Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А. Тригонометрия. Методика изучения и решения задач: учебно-методическое пособие. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2018. 100 с.

21. Замковая Т.Б., Нечаева Н.В. От окружности до тригонометра // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/articles/596859 (дата обращения: 03.11.2024)

22. Зарецкий В.И. Изучение тригонометрических функций в средней школе [Текст] / Зарецкий В.И. Минск: Народная асвета, 1970. 160 с.

23. Захарова О.В. Методические особенности обучения тригонометрии учащихся профильных классов: автореф. дис. … канд. пед. наук.: 13.00.02 / Астрахан. гос. ун-т. Астрахань, 2010. 20 с.

24. Козловская А.А. Методические аспекты обучения тригонометрическим функциям и их свойствам в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы // Вестник магистратуры. №12(159).

25. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе / Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1977. 480 с.

26. Колягин Ю.М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю.М. Колягин // Математика в школе. 1990. №4. С. 21 – 27.

27. Корянов А.Г., Прокофьев А.А.: подготовка к ЕГЭ: тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней: типовые задания С1: Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ» / А.А. Прокофьев, А.Г. Корянов. Ростов-на-Дону: Легион, 2014. 141 с.

28. Котов В.В. Организация на уроках коллективной деятельности учащихся. Рязань, 2012. 100 с.

29. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции: учеб. пособие для учащихся 9 класса средней школы / под ред. О.Н. Головина. Ч.1. 9-е изд. М.: Просвещение, 1974. 352 с.

30. Крамор В.С. Тригонометрические функции [Текст] / Крамор В.С., Михайлов П.А. Москва: Просвещение, 1979. 163 с.

31. Крамор В.С. Тригонометрические функции: (Система упражнений для самост. изучения). Пос. для учащихся / Крамов В.С., Михайлов П.А. М.: Просвещение, 1983. 159 с.

32. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко [и др.]; под ред. Е.И. Лященко. М.: Просвещение, 1988. 223 с.

33. Лийметс Х.Й. Понятие коллективной работы в советской дидактике // Актуальные проблемы индивидуализации обучения. Тарту, 1970. С. 18 – 21.

34. Луканина М.Г. Методика создания и использования разноуровневого электронного учебника при изучении тригонометрии в старшей школе: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Ин-т содержания и методов обучения Рос. акад. образования. Москва, 2012. 23 с.

35. Ляпин С.Е. и др. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С.А. Гастева, Б.И. Крельштейн, С.Е. Ляпин, М.М. Шидловская; под. общ. ред. С.Е. Ляпина. М.: Просвещение, 1965. 742 с.

36. Мамонтова Т.С., Мусякова Е.И. Приёмы запоминания значений тригонометрических функций // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2018. № V8. С. 51 – 56.

37. Марасанов А.Н. Об особенностях предвузовской подготовки школьников к экзамену по математике по разделу «Тригонометрия» / А.Н. Марасанов // Математика. Образование: Материалы XV междунар. конф. 28 мая – 2 июня 2007 г. Чебоксары, 2007. С. 153.

38. Марасанов А.Н. Система задач по тригонометрии в обучении математики учащихся средних общеобразовательных учреждений: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. Саранск, 2012. 20 с.

39. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровен: 10 класс: учебник / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков. М.: Вентана-Граф, 2020. 447 с.

40. Махмутов М.И. Теория и практика проблемного обучения. М.: Просвещение, 1975. 368 с.

41. Мерзлякова О.А. Реализация инновационных технологий обучения математике в теме «Тригонометрические функции» [Электронный ресурс] // Журнал "Педагог" URL: https://zhurnalpedagog.ru/servisy/publik/publ?id=9099 (дата обращения: 02.11.2024)

42. Молоткова Б.Б. Методика использования электронных образовательных ресурсов при изучении тригонометрии как средство повышения уровня осознанности знаний: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. Санкт-Петербург, 2014. 23 с.

43. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики: Учеб. – метод. Пособие / А.Г. Мордкович. 2-е изд., доп. и перераб. М.: ОНИКС 21 век, 2015. 336 с.

44. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе [Текст] / Мордкович А.Г. // Математика в школе. 2002. №6. С. 32 – 38.

45. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2016. №3. С.6 – 12.

46. Мордкович А.Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // Математика в школе. 2012. №10. С. 35 – 43.

47. Намазов А.И. О формировании общей теории тригонометрических функций и операции над тригонометрическими уравнениями / А.И. Намазов // Проблемы современной науки и образования. 2016. № 28(70). С. 6 – 11.

48. Нестандартные методы решения тригонометрических неравенств: Учебно-методическое пособие / Е.Р. Садыкова, О.В. Разумова. Казань: Казан. ун-т, 2013. 69 с.

49. Овчинникова Т.Н. Тема урока: «Тригонометрические функции, их свойства и графики». 10-й класс // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» URL: https://urok.1sept.ru/articles/630123 (дата обращения 3.11.2024)

50. Павлидис В.Д. Общеобразовательные реформы и математическое образование в средней школе России в начале XX века // Историко-педагогический журнал. 2013. №4. С. 97 – 107.

51. Панчишкин А.А., Шавгулидзе Е.Т. Тригонометрические функции в задачах. М.: издательство "Наука", 1986 г. 160 с.

52. Педагогика [Текст]: учебное пособие для студентов педагогических институтов / [Ю. К. Бабанский и др.]; под редакцией [и с предисловием] Ю. К. Бабанского; [послесловие В.А. Сластенина], 1988. 478 с.

53. Подходова Н.С. Методика обучения математике. В 2 ч. Часть 1: учебник для академического бакалавриата / Н.С. Подходова, В.И. Снегурова. М.: Издательство Юрайт, 2017. 274 с.

54. Покровский В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия [Текст]: учеб.-метод. пособие / В.П. Покровский. Владимир: Изд-в ВлГУ, 2014. 143 с.

55. Попов Н.И. Методика обучения тригонометрии на основе когнитивно-визуального подхода / Н.И. Попов // Сибирский педагогический журнал. 2008. №11. С. 34 – 42.

56. Попов Н.И. О выявлении внутрипредметных связей при изучении тригонометрии / Н.И. Попов, А.Н. Марасанов // Наука и школа. 2009. №5. С. 37 – 39.

57. Попов Н.И. О методологическом подходе в обучении тригонометрии / Н.И. Попов, А.Н. Марасанов // Знание. Понимание. Умение. 2008. №4. С. 139 – 141.

58. Рабочие программы [Электронный ресурс]. URL: https://edsoo.ru/rabochie-programmy/ (дата обращения: 25.12.2023).

59. Репьев В.В. Методика тригонометрии /В.В. Репьев. М.: Учпедгиз, 1937. 152 с.

60. Саганова Г.А. Авторская программа элективного курса «Тригонометрия в ЕГЭ» [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/articles/562872 (дата обращения: 29.10.2024).

61. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие. М.: Народное образование, 1998. 256 с.

62. Суханова С.Н. Изучение тригонометрии на основе деятельностного подхода и технологии дистантного обучения как способ развития математических способностей: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Новосиб. гос. пед. ун-т. Новокузнецк, 2002. 21 с.

63. Суховиенко Е.А. Теория и методика обучения математике: общая методика: учеб. пособие / Е.А. Суховиенко, З.П. Самигуллина [и др.]; Челябинск: Образование, 2010. 65 с.

64. Темербекова А.А. Методика обучения математике: Учебное пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунов, Г.А. Байгонакова. СПб.: Издательство «Лань», 2015. 512 с.

65. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева; под ред. Т.А. Ивановой. Н. Новгород, 2009. 355 с.

66. Терновая Н.А. История школьного математического образования в России и за рубежом: [Текст] / Н.А. Терновая. Саратов, 2012. 76 с.

67. Тригонометрия. 10 класс: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Тепляковского. 10-е изд. М.: Просвещение, 2012. 61 с.

68. Тригонометрия: теория и практика решения задач: учеб. пособие / С.С. Граськин, А.В. Афанасьева, М.Е. Гутнер, С.Х. Гутнер, Н.В. Кулинич; под ред. С.С. Граськина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 325 с.

69. Утеева Р.А. Групповая работа как одна из форм деятельности учащихся на уроке / Р.А. Утеева // Математика в школе. 1985. №2. С. 33 – 35.

70. Утеева Р.А. Дифференцированное обучение математике учащихся средней школы: пособие по спецкурсу и спецсеминару для студентов математических специальностей пед. вузов. М.: Прометей, 1996. 118 с.

71. Утеева Р.А. Формы учебной деятельности учащихся на уроке / Р.А. Утеева // Математика в школе. 1995. №2. С. 57 – 61.

72. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Утвержден приказом Минобрнауки России от 17.05.2012 №413 (с изменениями на 27 декабря 2023 г.) [Электронный ресурс]. URL: https://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 18.10.2024).

73. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями на 08.08.2024 г.) [Электронный ресурс]. URL: https://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 19.10.2024).

74. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математики: Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений. Москва: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998 г. 224 с.

75. Хабиб Р.А. Организация учебно-познавательной деятельности учащихся (на примере математики): аспект сочетания и взаимодействия коллективной и индивидуальной форм обучения / Р.А. Хабиб. М.: Педагогика. 1979. 176 с.

76. Хинчин А.Я. Педагогические статьи / А.Я. Хинчин, под ред. Б.В. Гнеденко. М.: АПН РСФСР, 1963. 204 с.

77. Храмов А.В. О периодичности тригонометрических выражений / А.В. Храмов // Математика в школе. 2004. №1. С. 9 – 10.

78. Цукарь А.Я. Упражнения практического характера по тригонометрии [Текст] / Цукарь А.Я. // Математика в школе. 1993. №3. С. 12 – 15.

79. Чередов И.М. Формы учебной работы в средней школе: книга для учителя / И.М. Чередов. М.: Просвещение, 1988. 160 с.

80. Шабунин М.И. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы к учебнику Ш.А. Алимова и других. 10 кл.: учеб.

пос. для общеобразоват. орг-ций: базовый и углубл. уровни / М.И. Шабунин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова. 8-е изд. М.: Просвещение, 2017. 207 с.

81. Шайхлисламова М.Г. Научно-практическая конференция "История развития тригонометрии" [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/articles/577364 (дата обращения: 2.11.2024)

82. Шапиро И.М. Пособие по тригонометрии. Барнаул: Изд-во БГПУ. 1999. 80 с.

83. Denbel D.G. Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum / D.G. Denbel // Journal of Education and Practice. 2015. № 1. P. 77 – 81.

84. Holli M.L. Meeting the Needs of All Students through Differentiated Instruction: Helping Every Child Reach and Exceed Standards. Clearing House 81 no4 Mr/Ap 2008. *URL:* https://www.researchgate.net/publication/254350508_Meeting_the_Needs_of_All_Students_through_Differentiated_Instruction_Helping_Every_Child_Reach_and_Exceed_Standards.

85. Kleiner I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey / I. Kleiner // The Colltge Mathematics Journal, 1989. №4. P. 282 – 300.

86. Natsheh I. Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. / Intisar Natcheh, Ronnie Karsenty // ZDM Mathematics Education, 2014. №46. P. 109 – 122.

87. Star J. R. Teaching Strategies for Improving Algebra Knowledge in Middle and High School Students / P. Caronongan, F. Foegen, J. Furgeson, B. Keating, M.R. Larson, J. Lyskawa, W.G. McCallum, J. Porath, R.M. Zbiek. Washington. DC. 2015. 64 p. URL: https://ies.ed.gov/nctt/wwc/Docs/PractictGuide/wwc_algebra_040715.pdf.

Приложение А

Ответы и указания к решению системы задач

«Задачи, подчеркивающие практическую значимость нового понятия и его роль в дальнейших исследованиях в области математики» [32].

Задача 1. Решение:

$I(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, где I_m — амплитуда тока, $\omega = 2\pi f$ — его угловая частота, ψ_i — начальная фаза.

В уравнении $I(t) = 5\sin 20\pi t$, амплитуда $I_m = 5А$, угловая частота $2\pi f = 20\pi$, значит $\omega = 10$ Гц, а период равен $f = \frac{1}{T}$, значит $f = 0{,}1$ с.

Ответ: а) 5А; б) 10 Гц; в) 0,1 с.

Задача 2. Решение: $I = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Для построения графика данной функции (рисунок А.1), нужно построить график синусоиды $y = 2\sin t$, после сместить график влево на $\frac{\pi}{4}$.

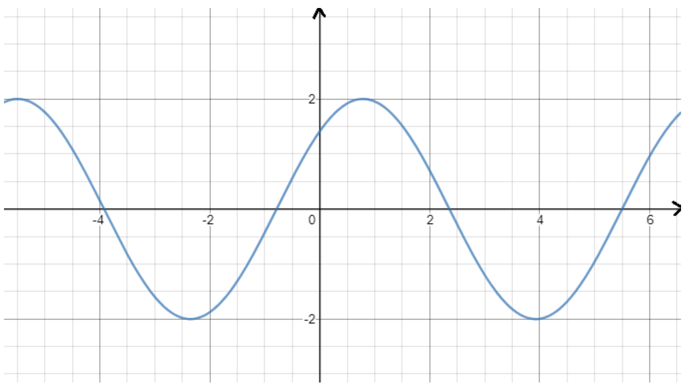


Рисунок А.1 – График функции $I = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

«Задачи на актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия» [32]:

Задача 3. Ответ: 1) да; 2) да; 3) нет; 4) нет.

Задача 4. Ответ: 2,75.

Задача 5. Ответ: $1 - \cos \alpha$.

Задача 6. Ответ: 1) cos t = – 0,6, tg t = $-\frac{4}{3}$, ctg t = – 0,75; 2) tg t = $\frac{24}{7}$; cos t = $\frac{7}{25}$; sin t = $\frac{24}{25}$.

Задача 7. Ответ: 1) минус; 2) плюс.

Задача 8. Доказательство.

Рассмотрим левую часть: $\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\pi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1-1}{2\cdot\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

левая часть равна правой части, ч.т.д.

Задача 9. Доказательство:

Рассмотрим левую часть:

$$\frac{1-4\sin^2 t\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t-\sin^2 t} = \frac{1-\sin^2 2t}{\cos 2t} = \frac{\cos^2 2t}{\cos 2t} = \cos 2t$$

левая часть равна правой части, ч.т.д.

Задача 10. Ответ: $\cos\alpha$.

Задача 11. Ошибки в решении:

Ошибка 1: $\operatorname{ctg}^2(-\alpha) = \operatorname{ctg}^2(\alpha)$;

Ошибка 2: $-\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$;

Ошибка 3: $\frac{-\operatorname{ctg}^2\alpha+\cos\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

Ошибка 4: $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \cos\alpha : \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha$.

«Задачи на выделение существенных признаков понятия» [32]:

Задача 12. Ответ: 1) $\sin\frac{4\pi}{3}, \sin\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{7}, \sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{3}$; 2) $\cos 1, \sin 1$, 1, tg1.

Задача 13. Ответ: 1) $\cos 1 > \cos 3$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$.

Задача 14. Решение:

Построим график функции $y = \sin x$ (рисунок А.2).

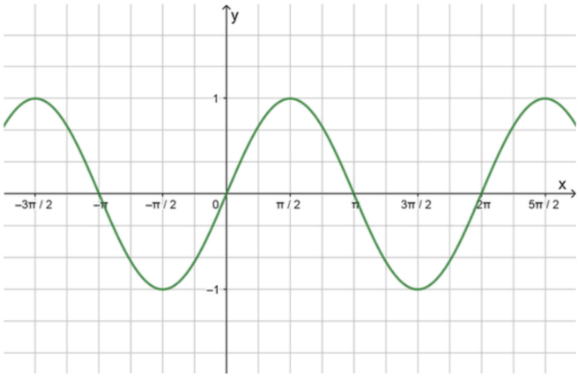


Рисунок А.2 – График функции $y = \sin x$

1) для промежутка $[0;\ \pi]$: функция возрастает на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$;

2) для промежутка $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$: функция возрастает на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$ и убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 15. Решение:

Построим график функции $y = \sin x$ (рисунок А.2).

Отметим приближённые значения по оси абсцисс и найдём значение, которое принимает функция при данных аргументах (рисунок А.3):

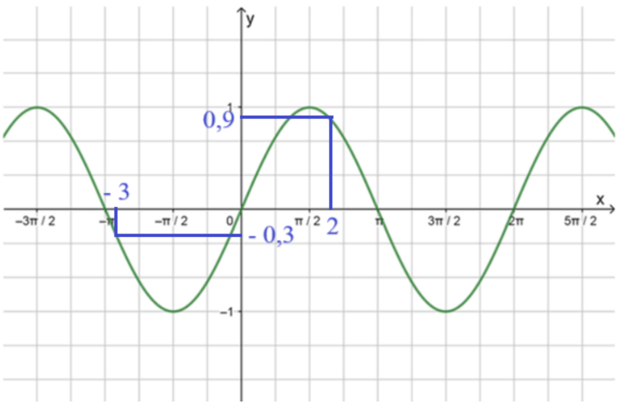


Рисунок А.3 – Нахождение приближённых значений функции синуса по графику

Получаем, что sin 2 ≈ 0,9, а sin (− 3) ≈ − 0,3.

Ответ: 1) sin 2 ≈ 0,9; 2) sin (− 3) ≈ − 0,3.

Задача 16. Ответы к заданию (рисунки А.4-6):

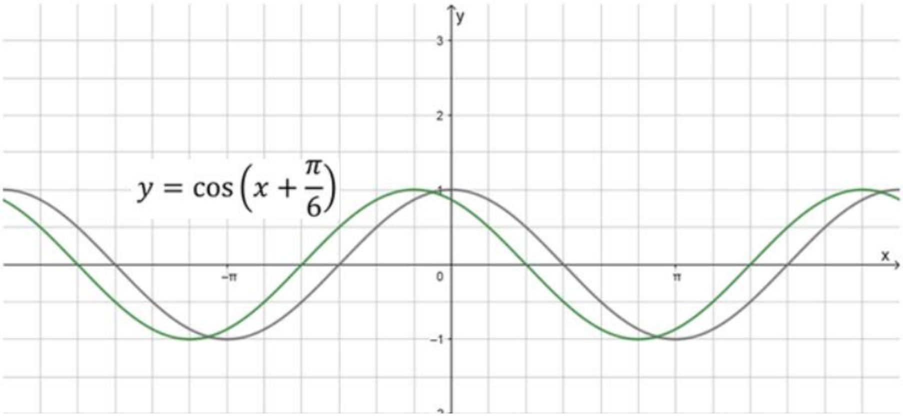
1) 

Рисунок А.4 – График функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

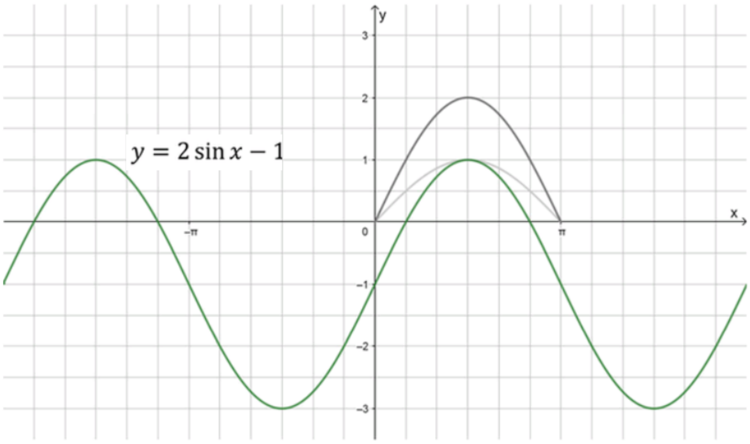
2) 

Рисунок А.5 – График функции $y = 2\sin x - 1$

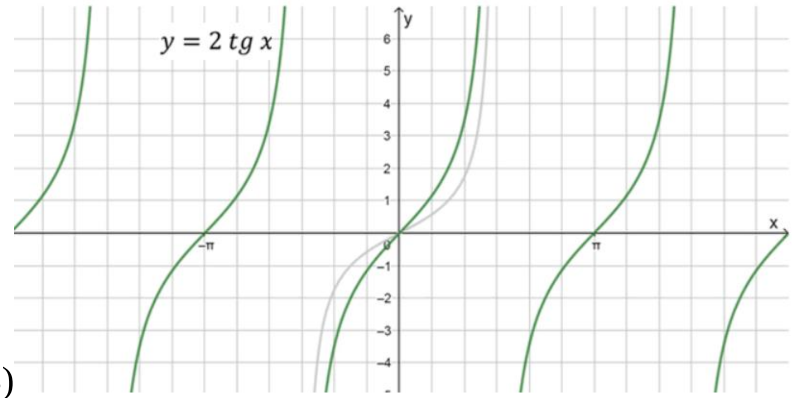
3) 

Рисунок А.6 – График функции $y = 2\,\mathrm{tg}\,x$

Задача 17. Решение:

Выделим нужный промежуток.

Построим схематически график функции y = cos x (рисунок А.7).

Сместим данный график вверх на один единичный отрезок.

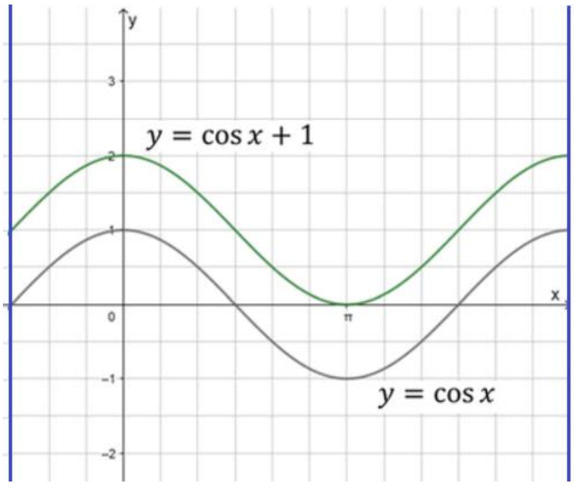


Рисунок А.7 – График функции $y = \cos x + 1$, полученный переносом из графика функции y = cos x

Задача 18. Решение:

Построим часть графика y = sin x на промежутке от $[0; \pi]$.

Сдвинем данную часть графика на $\frac{\pi}{3}$ вправо вдоль оси OX.

Растягиваем график по оси ОУ с коэффициентом равным 2.

Достраиваем график на всей координатной плоскости (рисунок А.8).

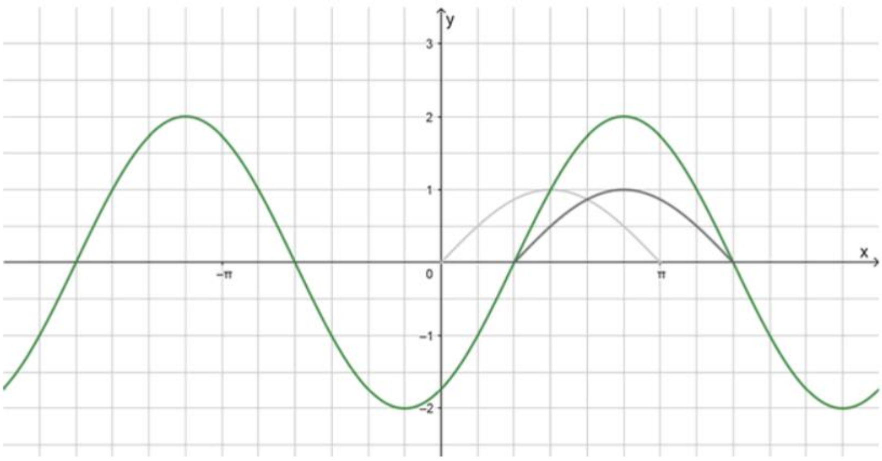


Рисунок А.8 – График функции $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Функция возрастает на $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, убывает на $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Задача 19. Алгоритм построения:

Шаг 1. Построение графика функции y = cos x.

Шаг 2. Сдвиг графика y = cos x влево на $\frac{\pi}{3}$.

Шаг 3. Растяжение полученного графика по оси ОУ в 3 раза.

Шаг 4. Отображение симметрично относительно оси ОХ.

Шаг 5. Сдвиг вверх на 1,5 единичных отрезка.

Задача 20. Решение. Заполним таблицу А.1 для функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$.

Таблица А.1 – таблица значений для построения функции $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Расставим на отрезке $[0; \pi]$ основные точки и построим часть графика $y = \sin x$ (рисунок А.9).

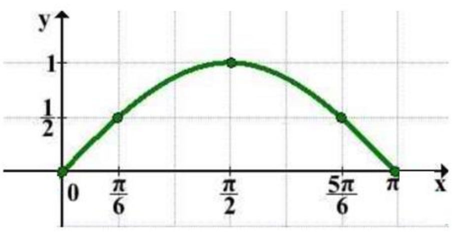


Рисунок А.9 – График функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$

График функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$.

Задачи на распознавание формируемого понятия.

Задача 21. Ответ: б.

Задача 22. Ответ: а, б, г.

Задача 23. Ответ: да.

Задача 24. Ответ: нет.

Задача 25. Ответ: нет.

Задача 26. Ответ: рисунок 10 - нечётная; рисунок 11 – чётная.

Задача 27. Ответ: 1) верно; 2) верно.

Задача 28. Ответ: 2; 5.

Задача 29. Ответ: 3 (симметрична относительно оси ОУ).

Задачи на усвоение текста определения понятия.

Решение:

Задача 30. Наибольшее значение sin a равно 1, где a = 0,5π радиан.

Задача 31. Наименьшее значение sin a равно – 1 , где a = 1,5π радиан.

Задача 32. Наибольшее значение cos a равно 1, где a = 0 радиан.

Задача 33. Наименьшее значение cos a равно – 1, где a = π радиан.

Задача 34. «Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается sin α)

Задача 35. Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается cos α).

Задача 36. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют тангенсом числа t и обозначают tg t.

Задача 37. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют котангенсом числа t и обозначают ctg t» [3].

Задачи на использование символики, связанной с понятием.

Задача 38. Решение:

1) $f(-x)$ = 3 sin $(-x)$ = −3 sin x;

2) $2f(x)$ = 2 · 3 sin x= 6 sin x;

3) $2f(x)$ + 1 = 2 · 3 sin x + 1= 6 sin x+1;

4) $f(-x)$ + $f(x)$ = 3 sin $(-x)$ + 3 sin x=–3 sin x+3 sin x = 0.

Ответ: 1) −3 sin x; 2) 6 sin x; 3) 6 sin x+1; 4) 0.

Задача 39. Решение:

По формуле приведения: sin x = cos ($\frac{\pi}{2}$ – x), значит f (sin x) = f (cos ($\frac{\pi}{2}$ – - x)). По условию f (cos ($\frac{\pi}{2}$ – x)) = cos 13($\frac{\pi}{2}$ – x)= cos ($\frac{13\pi}{2}$ – 13x), используя свойство периодичности, получаем: cos ($\frac{13\pi}{2}$ – 13x) = cos (6π + $\frac{\pi}{2}$ – 13x) = = cos ($\frac{\pi}{2}$ – 13x), по формуле приведения получаем: cos ($\frac{\pi}{2}$ – 13x) = sin 13x, следовательно f (sin x) = sin 13x, ч.т.д.

Задача 40. Решение:

$\mathrm{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\mathrm{f}(0) = \cos 0 = 1$; $\mathrm{f}(4)=\sqrt{4}+1=3$; $\mathrm{f}(\pi^2)=$

$= \sqrt{\pi^2} + 1 = \pi + 1.$

Ответ: $\mathrm{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\mathrm{f}(0) = 1$; $\mathrm{f}(4)=3$; $\mathrm{f}(\pi^2)= \pi + 1$.

Задачи на установление свойств понятия.

Задача 41. Решение:

2) $\mathrm{y} = \sin\sqrt{\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}}$,

О.О.Ф: $\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1} \geq 0$, Нули неравенства (рисунок А.10): $\frac{x-1}{x+1} = 0,$

$x - 1 = 0, \quad x + 1 \neq 0$

$x = 1, \qquad x \neq -1.$

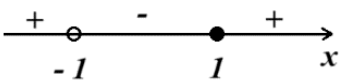


Рисунок А.10 – Изображение решения неравенства на координатной прямой

$x \in (-\infty;\ -1) \cup [1;\ +\infty)$

4) $y = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

О.О.Ф:

$\cos^2 x\ -\ \sin^2 x \neq 0,$

$\cos 2x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$.

Ответ: 1) $x \in R$; 2) $x \in (-\infty;\ -1) \cup [1;\ +\infty)$; 3) $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$.

Задача 42. Решение:

3) $y = 10 - 9\sin^2 3x;$

О.З.Ф:

$-1 \leq \sin 3x \leq 1,$

$0 \leq \sin^2 3x \leq 1,$

$-9 \leq -9\sin^2 3x \leq 0,$

$1 \leq 10 - 9\sin^2 3x \leq 10,$

$1 \leq y \leq 10$, значит $y \in [1; 10]$.

Ответ: 1) $y \in [-3; 5]$; 2) $y \in [1,5; 2,5]$; 3) $y \in [1; 10]$; 4) $y \in [-1; 3]$.

Задача 43. Решение:

3) Упростим выражение: $\frac{5\sin^2 t+5\cos^2 t}{3|\cos t|+2} = \frac{5\,(\sin^2 t+\cos^2 t\,)}{3|\cos t|+2} = \frac{5}{3|\cos t|+2}$

Проанализируем:

$-1 \le \cos t \le 1$,

$0 \le |\cos t| \le 1$,

$0 \le 3|\cos t| \le 3$,

$2 \le 3|\cos t| + 2 \le 5$,

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{3|\cos t| + 2} \le \frac{1}{2}$,

$1 \le \frac{5}{3|\cos t| + 2} \le 2{,}5$, значит, наименьшее значение равно 1, а наибольшее равно 2,5.

Ответ: 1) наименьшее = − 3; наибольшее = 3; 2) наименьшее = 3; наибольшее = 4; 3) наименьшее = 1; наибольшее = 2,5.

Задача 44. Решение:

1) $y = 3\sin x \cdot \cos x + 1$,

$y = 1{,}5 \sin 2x + 1$,

$-1 \le \sin 2x \le 1$,

$-1{,}5 \le 1{,}5 \sin 2x \le 1{,}5$,

$-0{,}5 \le 1{,}5 \sin 2x + 1 \le 2{,}5$,

$-0{,}5 \le y \le 2{,}5$, значит, наименьшее значение функции = − 0,5; наибольшее = 2,5.

Ответ:

1) наименьшее = − 0,5; наибольшее = 2,5; 2) наименьшее = − 2; наибольшее = 1;

Задача 45. Решение:

2) $y(-x) = -x \cdot |\mathrm{tg}(-3x)| = -x \cdot |-\mathrm{tg}(3x)| = -x \cdot |\mathrm{tg}(3x)| = -y(x)$ – нечётная;

5) $y(-x) = \sin(3(-x) + (-x)^3) = \sin(-3x - x^3) = -\sin(3x + x^3) = -y(x)$ – нечётная.

Ответ:

1) общего вида; 2) нечётная; 3) чётная; 4) общего вида; 5) нечётная; 6) чётная.

Задача 46. Решение.

В силу периодичности функции: $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] = \left[\frac{5\pi}{2} - 2\pi; \frac{7\pi}{2} - 2\pi\right] = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ $y = \sin x$ убывает, значит и убывает на $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: убывает.

Задача 47. Решение:

1) $y(x + T) = \sin\left(7(x + T) + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(7x + 7T + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + +7T\right)$, значит $7T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{7}$ – наименьший положительный период.

Ответ: 1) $T = \frac{2\pi}{7}$; 2) $T = \frac{\pi}{4}$.

Задача 48. Доказательство:

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\cos(4x+2\pi) = 3\cos(4x) = f(x)$, ч.т.д.

Задача 49. Решение:

$y(x + T_1) = \sin 3(x + T_1) = \sin(3x + 3T_1)$, значит $3T_1 = 2\pi$, $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, аналогично $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Приведём к общему знаменателю: $T_1 = \frac{10\pi}{15}$ и $T_2 = \frac{6\pi}{15}$, НОК числителей равен 30π, значит общий период $T = \frac{30\pi}{15} = 2\pi$.

Ответ: $T = 2\pi$.

Задача 50. Решение:

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1;\ \ f(0) = \sin 0 = 0;\ \ f(1) = \sqrt{1} = 1;$

$f(\pi^2) = \sqrt{\pi^2} = \pi.$

Построим график функции (рисунок А.11)

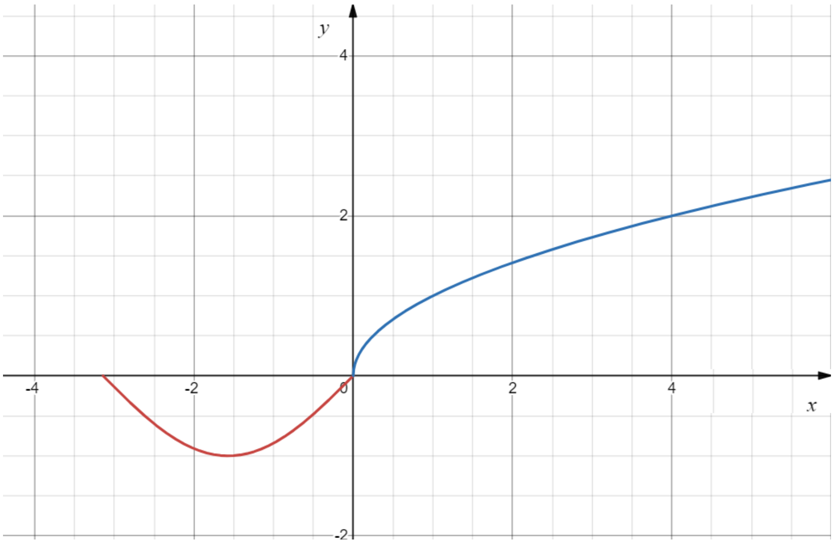


Рисунок А.11 – График кусочно-заданной функции

$$(x) = \begin{cases} \sin x, \text{если} - \pi \le x \le 0, \\ \sqrt{x}, \qquad \text{если } x > 0. \end{cases}$$

О.О.Ф: D(y) = [− π; + ∞];

О.З.Ф.: E(y) = [− 1; + ∞];

функция возрастает на $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$, убывает на $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;

функция общего вида;

функция не является периодической;

функция ограничена снизу прямой y = 1;

наибольшего значения не существует, наименьшее y = 1, при $x = -\frac{\pi}{2}$.

Задача 51. Решение. График симметричен относительно точки (0; 1), значит b = 1.

$y_{наим} = -1$, $y_{наиб} = 3$, расстояние между этими значениями равно 4, значит a = 4:2 = 2, а функция записана следующим образом: $y = 2\sin x + 1$

Ответ: $y = 2\sin x + 1$.

Задачи на применение понятия.

Задача 52. Ответ: 1) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in Z$.

Задача 53. Решение:

Построим функции $y = \cos x$ и $y = x + \frac{\pi}{2}$ в одной системе координат (рисунок А.12)

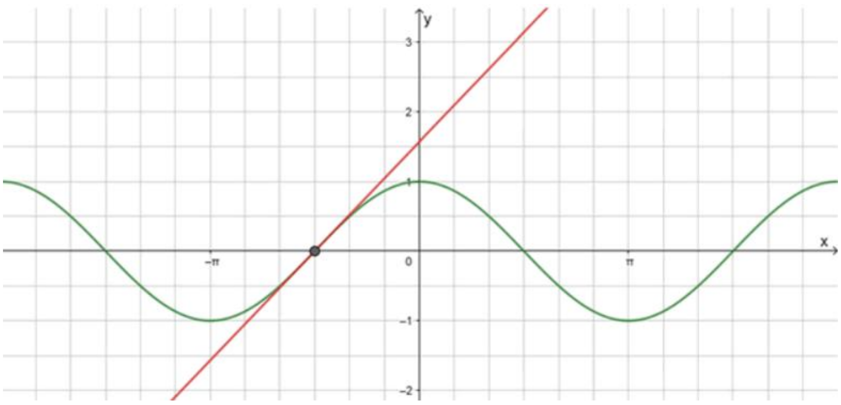


Рисунок А.12 – Графическое решение уравнения $\cos x = x + \frac{\pi}{2}$

Точка пересечения $(-\frac{\pi}{2}; 0)$, значит решением данного уравнения является корень $x = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) $-\pi$.

Задача 54. Решение:

4) Преобразуем: $\cos x \geq x^2 + 2x + 1$.

Построим функции y = cos x и y = $x^2 + 2x + 1$ в одной системе координат (рисунок А.13).

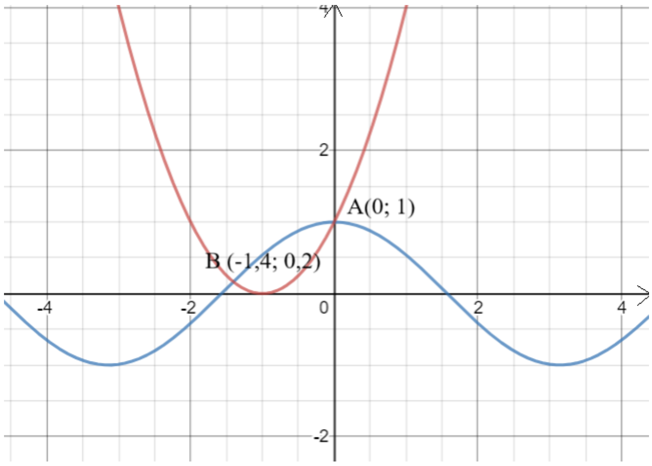


Рисунок А.13 – Графическое решение неравенства $\cos x - x^2 - 2x - 1 \geq 0$

Графики пересеклись в двух точках А и В, на промежутке от [–1,4; 0] точки графика функции y = $x^2 + 2x + 1$ ниже точек графика y = cos x, значит cos x ≥ $x^2 + 2x + 1$ при x ∈[–1,4; 0].

Ответ:

1) x $\in[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k]$, где $k \in Z$; 2) x $\in[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k]$, где $k \in Z$; 3) x ∈[0,9; + ∞]; 4) x ∈[–1,4; 0].

Задача 55. Решение: $\begin{cases} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ 2\sin x - 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x > \frac{1}{2}; \end{cases}$

Рассмотрим решение системы с использованием числовой окружности (рисунок А.14).

Получаем, что решением уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ являются серии корней: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi m$, при $k, m \in Z$.

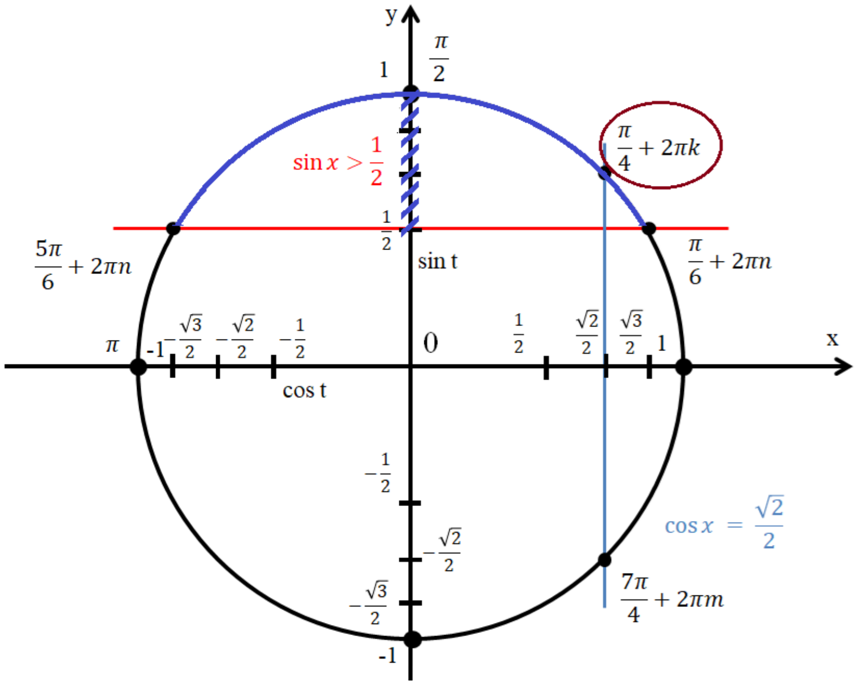


Рисунок А.14 – Изображение графического решения уравнения $\frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2\sin x - 1}}$

Решением неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$ будет промежуток $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + +2\pi n\right]$, при $n \in Z$, на данном промежутке находится серия корней $x = \frac{\pi}{4} + +2\pi k$, при $k \in Z$, значит, она и будет являться решением системы уравнений.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, при $k \in Z$

Задача 56. Решение. Рассмотрим левую часть.

По свойству области значений функции синуса:

$-1 \le \sin\frac{\pi}{2}x \le 1,$

$-2 \le 2\sin\frac{\pi}{2}x \le 2 \;\Rightarrow$ левая часть уравнения находится в пределах $[-2; 2]$.

Рассмотрим правую часть: $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$,

по свойству суммы двух обратных чисел: $x + \frac{1}{x} \ge 2$.

Левая часть принимает значения не больше 2, правая – не меньше 2, что возможно только тогда, когда левая и правая часть будет равна 2 одновременно. Значит, решим уравнение:

$$x + \frac{1}{x} = 2, \quad \frac{x^2+1-2x}{x} = 0, \quad \frac{(x-1)^2}{x} = 0,$$

корнем уравнения является $x = 1$. При $x = 1$ выражение $2\sin\frac{\pi}{2}x = 2$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2\sin\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2+1}{x}$ нечётная, то значение, противоположное найденному $x = -1$ будет являться корнем уравнения $f(x) = 0$, равносильного исходному.

Ответ: $x = \pm 1$.

Задача 57. Решение:

1) Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{x}$ в одной системе координат (рисунок А.15):

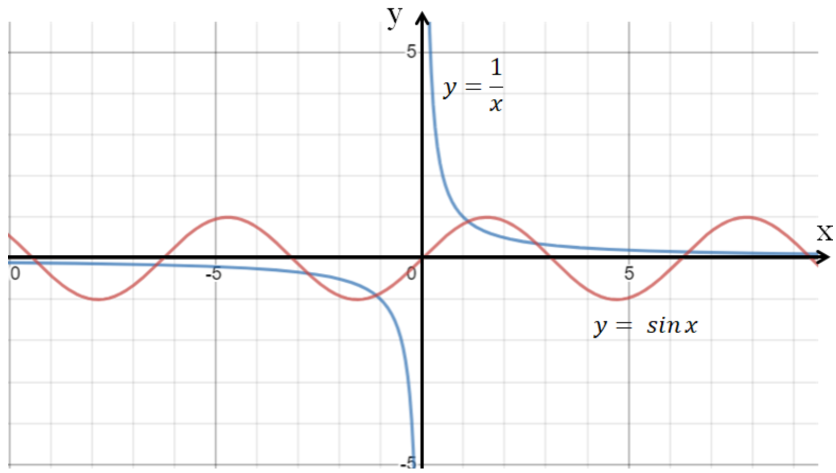


Рисунок А.15 – Графическое решение системы уравнений $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \frac{1}{x}; \end{cases}$

Получаем, что точек пересечения графиков двух функций бесконечно много, значит, система имеет бесконечно много решений.

Ответ: 1) бесконечно много решений; 2) ответ: нет решений.

Задача 58. Доказательство:

$$\begin{cases}(\cos\alpha+\cos\beta)^2=1^2,\\ (\sin\alpha+\sin\beta)^2=a^2;\end{cases}\quad \begin{cases}\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1,\\ \sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=a^2;\end{cases}$$

$$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=1+a^2$$

$$1+2\cos(\alpha-\beta)+1=a^2+1,$$

$$2\cos(\alpha-\beta)+1=a^2,$$

Учитывая область значений косинуса:

$-1\le\cos(\alpha-\beta)\le 1,$

$-2\le 2\cos(\alpha-\beta)\le 2,$

$-1\le 2\cos(\alpha-\beta)+1\le 3,$

Значит, $-1\le a^2\le 3$, получаем, что $a\le\sqrt{3}$, ч.т.д.