МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общеинженерной подготовки
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения старшеклассников решению опорных задач по теме «Конус» в курсе геометрии общеобразовательной школы»

Обучающийся И.В. Бородина
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2024

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В век информационной глобализации, стремительного роста и доступности информации, динамичности информационного мира, человека начинают вытеснять с производственной работы. Трудовой человек уходит на второй план, а на его смену приходит человек знающий, владеющий необходимой информацией по созданию технологического производства. Для современного мира человек, умеющий творчески решать производственные задачи в большей степени необходим, чем тот, кто умеет обучаться.

Раньше, еще лет 20 назад, важной задачей образования подрастающего поколения было строгий контроль за усвоением определенных знаний и умений, которые можно будет прочно зафиксировать на практике. То на сегодняшний момент акцент сместился на самого учащегося, на его личностное развитие, возможности самостоятельно реализовывать потенциал и быстро приспосабливаться и адаптироваться к современному изменчивому миру. Поэтому, выпускник современной школы должен уметь быть конкурентоспособным, и для этого школьника нужно приучать к самостоятельному изучению полезных навыков, находить и осваивать новые знания и навыки для успешного решения возникающих перед ним задач.

Согласно ФГОС среднего общего образования обучение геометрии в школе должно быть направлено на «…развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности…» [51].

Теоретические аспекты обучения старшеклассников решению задач в школьном курсе геометрии отражены в работах Г.И. Саранцева [44], Т.А. Ивановой [15], Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой, В.В. Орлова [25] - [26], В.А. Смирнова, И.М. Смирновой [46] и других.

Имеются диссертационные исследования, в которых описаны вопросы методики обучения геометрии старшеклассников с использованием компьютера (М.Г. Мехтиев [27], 2002 г.) или компьютерных технологий на примере темы «Поверхности и тела вращения» как средства качественного усвоения учебного материала (З.Н. Исмаилова [17], 2010 г.) на уроках, а также методики обучения геометрии старшеклассников в рамках элективных курсов (Н.Н. Зепнова [12], 2005 г.; Е.А. Ермолаев [10], 2010 г.).

Освоением старшеклассниками тем о телах вращения заканчивается их знакомство с геометрическими телами. Здесь обобщаются знания об основных понятиях курса планиметрии, о круге и окружности. Школьники решают опорные задачи на фигуры вращения, на решении которых базируется решение задач неалгоритмического типа. Так, в учебниках Л.С. Атанасяна [1], А.В. Погорелова [34] школьный курс геометрии завершается изучением круглых тел, таких как конус и усечённый конус, цилиндр, шар. В учебнике под авторством А.Д. Александрова [3] данные темы изложены в 11 классе одними из первых.

Отметим, что тела вращения имеют важное значение для практической жизни, а также для освоения старшеклассниками других школьных предметов. Трехмерные объекты, также известные как 3D-объекты, окружают нас повсюду. От карандаша и книжной полки до глобуса классе – эти объекты имеют длину, ширину и высоту, что придает им глубину и объем. В курсе геометрии в общеобразовательной школе на изучение материала, связанного непосредственно с телами вращения, к сожалению, отводится недостаточно учебного времени.

Анализ методической литературы показал, что иногда при решении геометрических задач, в том числе стереометрических, у обучающихся возникают трудности, поэтому одной из главных задач при обучении школьников геометрии в школе является обучение их решению опорных задач. В профильных классах старшеклассники должны овладеть умениями и навыками по решению задач на нахождение объемов и площадей фигур, которые встречаются также в качестве задач в Едином государственном экзамене как базового, так и профильного уровней.

Вместе с этим, при решении опорных задач на тела вращения, также на объем конуса или усеченного конуса и их площади поверхностей, а также практико-ориентированных, обучающиеся развивают у себя такие операции мышления, как анализ, сравнение, учатся устанавливать связи между объектами, делать умозаключения [51]; развивают пространственное воображения, формируют абстрактное мышление. Задачи с комбинациями многогранников с фигурами вращения способствуют формированию глубоких геометрических представлений у старшеклассников.

Таким образом, актуальность темы исследования «Методика обучения старшеклассников решению опорных задач по теме «Конус» в курсе геометрии общеобразовательной школы» обусловлена сложившимся противоречием между необходимостью обучения старшеклассников решению опорных задач по теме «Конус» в курсе геометрии общеобразовательной школы и фактическим состоянием методики обучения их решению на практике.

Сформированное противоречие определило проблему исследования: каковы методические основы обучения старшеклассников решении опорных задач по теме «Конус» в общеобразовательной школе?

Объектом исследования являются процесс обучения геометрии в старших классах общеобразовательной школы.

Предметом исследования является методика обучения старшеклассников решении опорных задач по теме «Конус» в общеобразовательной школе.

Целью исследования является выявление методических основ обучения старшеклассников решении опорных задач по теме «Конус» в общеобразовательной школе на базовом и углубленном уровнях.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что методика обучения старшеклассников решении опорных задач по теме «Конус» в общеобразовательной школе будет более эффективной, если уроки по обучению решению задач по данной теме будут спроектированы и внедрены на основе технологии поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича; реализовывать на практике элективный курс по теме «Конус в задачах» для обучающихся старших классов.

Для исследования были сформулированы следующие задачи:

- раскрыть понятие опорной задачи и ее роль при обучении геометрии;
- представить анализ теоретического и задачного материала по теме «Конус» в учебниках геометрии для математического профиля;
- изучить проведенные исследования и опыт работы учителей по обучению решению опорных задач по теме «Конус» на уроках геометрии;
- описать технология поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича при обучении решению задач по теме «Конус»;
- разработать элективный курс по теме «Конус в задачах» для обучающихся старших классов;
- экспериментально проверить эффективность разработанного элективного курса «Конус в задачах» в старших классах.

Теоретическо-методологическая база исследования: составили работы В.А. Далингера [9], Н.И. Зильберберга [13] - [14], Т.А. Ивановой, Ю.М. Колягина [20] - [21], А.Е. Малых [24], Л.А. Осипенко [30], Д. Пойа [35] – [36].

Базовыми для настоящего исследования явились работы: М.Б. Воловича [6], С.М. Саакяна, В.Ф. Бутузова [42], Е.В. Потоскуева [38].

Методами исследования были выделены: анализ научно-методической литературы по обучению решению задач при изучении геометрии в школе; анализ учебников геометрии; анализ опыта работы учителей и заданий ЕГЭ по математике по теме «Конус»; анализ личного опыта работы в школе;

обобщение результатов проведенного педагогического эксперимента; проверка основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

- 1 этап (2022/2023 уч.г.): анализ программ, анализ теоретического и задачного материала по теме «Конус» в учебниках геометрии для математического профиля; анализ проведенных исследований по теме диссертации; анализ различных нормативных документов; анализ исследований и опыт работы учителей по обучению решению опорных задач по теме «Конус» на уроках геометрии;
- 2 этап (2022/2023 уч.г.): определение теоретических основ обучения старшеклассников решению опорных задач по теме «Конус» в школьном курсе геометрии;
- 3 этап (2023/2024 уч.г.): определение методических обучения старшеклассников решению опорных задач по теме «Конус» в школьном курсе геометрии; проектирование уроков по обучению решению опорных задач по теме «Конус» в рамках технологии поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича; разработка элективного курса по теме «Конус в задачах» для обучающихся старших классов;
- 4 этап (2024/2025 уч.г.): оформление магистерской диссертации, корректировка материалов проведенного исследования и его методологического аппарата, описание результатов педагогического эксперимента, изложение выводов по главам и заключения.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБУ «Школа № 2», г. Урай, Тюменская область.

Научная новизна диссертации заключается в том, что в нем раскрыта методика обучения старшеклассников решении опорных задач по теме «Конус» в общеобразовательной школе.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- раскрыто понятие опорной задачи и ее роль при обучении геометрии;

− представлен анализ теоретического и задачного материала по теме «Конус» в учебниках геометрии для математического профиля;

− изучены проведенные исследования и опыт работы учителей по обучению решению опорных задач по теме «Конус» на уроках геометрии.

Практическая значимость работы заключается в том, что в нем представлен вариант проектирования уроков по обучению решению опорных задач по теме «Конус» в рамках технологии поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича и обоснован ее выбор; разработан элективный курс «Конус в задачах», которые могут быть использованы в старших классах в практике работы в школе.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивались: анализом научно-методической литературы и практических методов исследования по обучению решению опорных задач по теме «Конус» на уроках геометрии, анализом педагогической практики в старших классах и опытом работы в МБУ «Школа № 2», г. Урай Тюменской области.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических основ обучения старшеклассников решению опорных задач по теме «Конус» в школьном курсе геометрии; проектировании уроков по обучению решению опорных задач по теме «Конус» в рамках технологии поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича и обосновании ее выбора; разработке элективного курса «Конус в задачах» для обучающихся 10-11 классов.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Экспериментальная проверка материалов исследования была осуществлена в ходе выступления с докладом на секции «Математика. Физика» на Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции с международным участием «Математика. Наука. Общество» в декабре 2024 г. (Тольятти, ТГУ), на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование», а также в период работы учителем математики в МБУ «Школа №2» (г. Урай, Тюменская область).

Результаты проведенного исследования отражены в публикации в научном журнале «Вестник магистратуры» [4].

На защиту выносятся:

- методика обучения старшеклассников решении опорных задач по теме «Конус» в общеобразовательной школе;
- элективный курс «Конус в задачах» для обучающихся старших классов математического профиля.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения. Содержит 57 рисунков, 14 таблиц, список используемой литературы и используемых источников (66 источников). Основной текст работы изложен на 112 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения старшеклассников решению опорных задач по теме «Конус» в школьном курсе геометрии

1.1 Понятие опорной задачи и ее роль в обучении геометрии

Отметим, что геометрия – это раздел математики, который занимается размером, формой и положением фигур в пространстве. Этот раздел математики появился тысячи лет назад в Египте и Месопотамии. В то время люди использовали эти концепции для обследования земли, строительства зданий и измерения контейнеров для хранения. Слово «геометрия» происходит от греческих слов «Земля» и «измерение». Это уместно, поскольку геометрия имеет дело со свойствами и отношениями форм вокруг нас. Сегодня архитекторы и инженеры используют геометрию для строительства домов и мостов. Астрономы используют ее для расчета положения звезд. Даже художники и дизайнеры видеоигр используют геометрию в своей работе. Данный математики занимается формой отдельных объектов, пространственными отношениями между различными объектами и свойствами окружающего пространства. Это один из старейших разделов математики, возникший в ответ на такие практические проблемы, как те, которые встречаются в геодезии, и его название происходит от греческих слов, означающих «измерение Земли». В конце концов было осознано, что геометрия не должна ограничиваться изучением плоских поверхностей (планиметрия) и жестких трехмерных объектов (стереометрия), но что даже самые абстрактные мысли и образы могут быть представлены и развиты в геометрических терминах.

Самый базовый элемент в геометрии – это точкой. Связанный набор точек образует линию. Пересекающиеся линии образуют углы. Три или более соединенных отрезка линии создают фигуры, называемые многоугольниками, такие как треугольники и квадраты. Эти и другие плоские фигуры имеют только два измерения: длину и ширину. Трехмерные объекты, такие как кубы и сферы, имеют дополнительное измерение глубины.

Геометрия позволяет людям измерять, анализировать и сравнивать фигуры в 2-мерном и 3-мерном пространстве. Одним из полезных инструментов для получения выводов о фигурах в геометрии является математическое доказательство. Доказательство – это способ показать, что некоторое математическое утверждение верно. Оно начинается с известных истин, называемых аксиомами или постулатами. Например, все прямые углы равны 90 градусам. И между любыми двумя точками можно провести прямую линию. Эти истины самоочевидны. Их не нужно доказывать. Но можно создать ряд логических аргументов, используя эти факты, чтобы доказать новую истину. Теоремы – это утверждения, которые можно доказать. Возможно, самым известным является теорема Пифагора. Эта теорема утверждает, как найти длину самой длинной стороны треугольника, содержащего прямой угол.

Рассмотрев некоторые исторические аспекты развития геометрических понятий, перейдем к различным подходам к понятию опорной задачи и ее роли в обучении школьников геометрии.

Т.А. Иванова в пособии указывает, что при обучении решению математических задач необходимо формировать у учащихся умение «владеть способами решения исходных стандартных, опорных, обучающих и т.д. задач, к которым сводится решение неалгоритмических задач. В последнее время такие задачи называются ключевыми (Н.И. Зильберберг, Н.Х. Розов, Р.Г. Хазанкин)» [15]; далее приводит следующее определение: «ключевая задача – это задача, которая наиболее ярко иллюстрирует новую идею, новый метод, приём решения, или содержит новый факт, или и то, и другое вместе» [15]. Автор видит связь опорной задачи с теорией формирования умственных действий П.Я. Гальперина. В работе отмечается, что «в теории формирования умственных действий алгоритм, правило есть не что иное как ориентировочная основа умственного действия, соответствующая общему методу решения однотипных задач» [15].

Н.И. Зильберберг даёт следующее определение ключевым задачам: «Эти задачи – своеобразные опоры для решения других, в том числе и нестандартных математических задач» [14].

А.Е. Малых при определении термина «опорная задача» пишет, что: при решении задач используются «чертёж и алгебраический метод, вспомогательные геометрические факты и теоремы…; есть необходимость в выделении множества опорных задач, состоящего из набора дополнительных теорем или встречающиеся часто приемы решения задач, которые обучающиеся должны усвоить и освоить…; в процессе усложнения решаемых задач может расширяться и список опорных задач» [24, с. 5]. В своем учебном пособии автор раскрывает возможности опорных планиметрических задач при овладении системой знаний и умений решения задач, в процессе формирования и развития интереса к геометрии, привития исследовательских навыков, совершенствования математической культуры обучаемых. Также в нем представлены опорные задач по семи темам из планиметрии. Далее на основе каждой из этих задач приведены образцы решения разных типов задач, сложность которых постепенно возрастает. По мере овладения приемами и методами решения выводятся новые опорные задачи.

Л.А. Осипенко приводит следующее определение ключевой (опорной) задачи: «Ключевая задача - это задача, идея расширения которой применяется при решении других задач и позволяет школьнику справится с более сложными задачами по данной теме» [30].

И.Ф. Шарыгин под опорными (ключевыми) задачами понимает «задачи, в которых формулируется некоторый факт, достаточно часто используемый в задачах, либо иллюстрируется какой-либо метод или приём решения задач» [55]. Как утверждает автор: «… умение решать геометрические задачи во многом зависит от знания достаточного количества геометрических фактов, в большинстве своём не содержащихся в учебнике, от знакомства с некоторыми частными приемами, о которых трудно догадаться самостоятельно. Вот эти факты и приёмы могут быть введены через систему опорных задач. Как показывает практика, количество опорных задач, нужных хорошему ученику, вовсе не так велико, как это может показаться. Всего за время обучения ему вполне достаточно накопить 20 – 30 опорных задач. Повышение уровня геометрической подготовки школьника требует и увеличения числа опорных задач, входящих в его арсенал» [55].

Отметим, что большинство задач в курсе геометрии являются нестандартными. В связи с этим возрастает значение обучения опорным (ключевым) задачам, которые иллюстрируют методы или приемы решения задач; у геометрической задачи может быть не один способ решения, каждый из которых может быть направлен на определенные знания и умения.

В.А. Далингер на основе анализа практики работы в школе отмечает, что обучающиеся владеют формальными теоретическими знаниями по геометрии, часто затрудняются в решении задач. Автор выделил причины затруднений в решении геометрических задач:

– «понимание роли задач в учебном процессе в узком смысле;

– обучающему процессу наносится ущерб количество решаемых задач учащимися;

– повышенное внимание не к процессу решения, а к оформлению задачи;

– задачи решаются по образцу;

– задачи предлагаются обучающимся в готовом варианте, не ведется работа на составление задач и их решения в дальнейшем;

–предлагаются типичные задачи;

– почти отсутствуют рефлексивные задачи, которые могут помочь учащимся понять разные способы их решения;

– в учебниках прописаны однообразные формы подачи задач;

– в школьных учебниках не достаточное количество задач с варьированным содержанием, с сохранением методов их решения;

– большое количество задач однородной структуры, особенно низкой сложности, этот факт снижает интерес школьника к решению задач» [9].

Д. Пойа выделил этапы решения задач: «анализ условия и требований задачи, поиск плана решения, реализация намеченного плана и обоснование того, что полученный результат удовлетворяет требованиям задачи; анализ проведенного решения и полученного результата»;… «Умение решать задачи – это сложное составное умение, предполагающее от учащегося умение осуществлять деятельность на каждом этапе решения задачи» [35].

В методической литературе отмечается роль геометрии в обучении решению задач, в том числе опорных задач.

Так, геометрия развивает навыки решения задач, помогая учащимся распознавать формы, анализировать взаимосвязи между объектами и применять логико-математический или визуально-пространственный интеллект для эффективного решения геометрических задач; улучшает навыки решения проблем у учащихся, подчеркивая важность метакогнитивных навыков. Учащиеся с высокими метакогнитивными навыками преуспевают в решении геометрических задач по сравнению с теми, у кого навыки ниже. Геометрия развивает у учащихся навыки критического мышления при решении задач, требуя понимания определений, формул и концепций, что позволяет им эффективно решать сложные нестандартные вопросы.

Обучать школьников решению задач, геометрических в том числе необходимо через обучение определенным действиям (развитие умений) на каждом этапе решения задачи.

Вместе с этим, И.М. Смирнова писала о том, что «процесс решения задач по геометрии с практическим содержанием помогает увеличить практическую направленность в изучении учебного курса геометрии, способствует вырабатыванию необходимых навыков решения практических задач, умению давать оценку величинам и находить их близкие значения, повышению интереса, мотивации, и таким образом способствуют эффективному изучению геометрии» [46].

Таким образом, под ключевыми (опорными) задачами мы будем понимать задачи, содержание или метод решения которых используется для решения других задач. Опорные задачи являются уникальными задачами, помогающими в решении целого ряда более сложных задач. Применение опорных задач способствует поиску более простых, «красивых» решений, отличных от стандартных. Более того, решение подобных задач позволяет развивать логическое мышление старшеклассников.

1.2 Анализ теоретического и задачного материала по теме «Конус» в учебниках геометрии для математического профиля

Согласно Федеральной образовательной программе среднего общего образования (ФОП СОО) от 2024 года определяются следующие цели и задачи изучения программы курса геометрии (в том числе и темы «Конус») на углублённом уровне:

Цель освоения программы учебного курса «Геометрия» на углублённом уровне – развитие индивидуальных способностей обучающихся при изучении геометрии, как составляющей предметной области «Математика и информатика» через обеспечение возможности приобретения и использования более глубоких геометрических знаний и действий, специфичных геометрии, и необходимых для успешного профессионального образования, связанного с использованием математики.

Приоритетными задачами курса геометрии на углублённом уровне, расширяющими и усиливающими курс базового уровня, являются:

- «расширение представления о геометрии как части мировой культуры и формирование осознания взаимосвязи геометрии с окружающим миром;
- формирование представления о пространственных фигурах как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные явления окружающего мира, знание понятийного аппарата по разделу «Стереометрия» учебного курса геометрии;
- формирование умения владеть основными понятиями о пространственных фигурах и их основными свойствами, знание теорем, формул и умение их применять, умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;
- формирование умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире многогранники и тела вращения, конструировать геометрические модели;
- формирование понимания возможности аксиоматического построения математических теорий, формирование понимания роли аксиоматики при проведении рассуждений;
- формирование умения владеть методами доказательств и алгоритмов решения, умения их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения стереометрических задач и задач с практическим содержанием, формирование представления о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;
- развитие и совершенствование интеллектуальных и творческих способностей обучающихся, познавательной активности, исследовательских умений, критичности мышления, интереса к изучению геометрии;
- формирование функциональной грамотности, релевантной геометрии: умения распознавать проявления геометрических понятий, объектов и закономерностей в реальных жизненных ситуациях и при

изучении других учебных предметов, проявления зависимостей и закономерностей, моделирования реальных ситуаций, исследования построенных моделей, интерпретации полученных результатов» [52].

Так же, согласно ФОП СОО обучающиеся к концу 11 класса должны научиться:

- «свободно оперировать понятиями, связанными с конической поверхностью, объяснять способы получения;
- оперировать понятиями, связанными с телом вращения - конусом;
- распознавать тело вращения (конус) и объяснять способы получения тел вращения;
- вычислять величины элементов многогранников и тел вращения, объёмы и площади поверхностей многогранников и тел вращения, геометрических тел с применением формул;
- свободно оперировать понятиями, связанными с комбинациями тел вращения и многогранников;
- вычислять соотношения между площадями поверхностей и объёмами подобных тел;
- изображать изучаемые фигуры, выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу, строить сечения тел вращения;
- извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках;
- выполнять изображения многогранников и тел вращения при параллельном переносе, центральной симметрии, зеркальной симметрии, при повороте вокруг прямой, преобразования подобия;
- строить сечения многогранников и тел вращения: сечения конуса (параллельные основанию и проходящие через вершину);
- доказывать геометрические утверждения;

– применять геометрические факты для решения стереометрических задач, предполагающих несколько шагов решения, если условия применения заданы в явной и неявной форме;

– решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин;

– применять программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении стереометрических задач;

– применять полученные знания на практике: сравнивать, анализировать и оценивать реальные ситуации, применять изученные понятия, теоремы, свойства в процессе поиска решения математически сформулированной проблемы, моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин;

– иметь представления об основных этапах развития геометрии как составной части фундамента развития технологий» [52].

Для анализа теоретического и задачного материала по теме «Конус» нами выбраны учебники геометрии предназначенные для математического профиля. Выбор математического профиля связан с тем, что задачи на вычисление элементов, площадей поверхности и объема конуса, а также задачи на доказательство по данной теме встречаются в заданиях ЕГЭ.

Методический анализ темы.

Базовые знания:

– «понятие круга; понятие площади круга;

– понятие радиуса окружности; понятие диаметра окружности; понятие длины окружности;

– понятие прямоугольного треугольника и его свойства; понятие равнобедренного треугольника и его свойства;

– теорема Пифагора;

− понятие трапеции и ее свойства, виды трапеций, прямоугольная трапеция;

− понятия площади, понятие объёма;

− понятие развертки боковой поверхности» [1].

Рассматриваемые сведения:

− «понятие конической поверхности;

− понятие конуса; вершина конуса; основание конуса; образующая конуса; высота конуса; ось конуса;

− понятие усеченного конуса и его элементов;

− понятие прямого конуса; понятие прямого кругового конуса;

− понятие осевого сечения конуса; понятие конического сечения конуса;

− боковая поверхность конуса; полная поверхность конуса;

− развертка боковой поверхности конуса;

− теорема об объеме конуса; теорема об объеме усеченного конуса;

− теорема о площади боковой поверхности конуса; теорема о площади боковой поверхности усеченного конуса;

− теорема о сечении конуса плоскостью, параллельной основанию;

− формулы для вычисления площади боковой и полной поверхности конуса; объёма конуса; формулы для вычисления площади боковой и полной поверхности усеченного конуса; объёма усеченного конуса» [1];

− решение основных типов задач по данной теме.

Теоретический материал.

Тема «Конус» представлена в различных учебниках геометрии для старших классов, рекомендованных Министерством просвещения Российской Федерации: Л.С. Атанасян и др. [1], Е.В. Потоскуев [39], И.М. Смирнова, В.А. Смирнов [47]. На изучение темы «Конус» в этих учебниках отводится по 7 часов в учебнике Л.С. Атанасяна и учебнике Е.В. Потоскуева, в учебнике И.М. Смирновой, В.А. Смирнова – 6 часов. Все авторы перечисленных учебников предлагают изучение данной темы в 11 классе.

Рассмотрим понятие конуса (определение, элементы), представленные в учебниках геометрии данных авторов.

Атанасян Л.С. и др. Учебник по геометрии 10-11 классы [1].

Определение конуса: «Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется конусом» (рисунок 1, 2) [1].

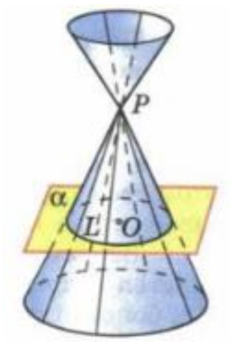


Рисунок 1 – Коническая поверхность

Рисунок 2 – Конус

Элементы конуса. «Круг называется основанием конуса, вершина конической поверхности – вершиной конуса, вершина конической поверхности – вершиной конуса, отрезки образующих, заключенные между вершиной и основанием, - образующими конуса, а образованная ими часть конической поверхности – боковой поверхностью конуса. Ось конической поверхности называется осью конуса, а её отрезок, заключенный между вершиной и основанием, - высотой конуса» [1] (рисунок 2).

Е.В. Потоскуев. Учебник по геометрии 11 класс [39].

Определение конуса: «Тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет, называется прямым круговым конусом» (рисунок 3) [39].

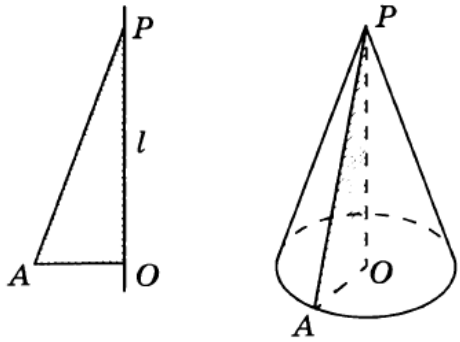


Рисунок 3 – Прямой круговой конус

Элементы конуса. «Ось конуса – отрезок оси вращения, заключённый внутри конуса (PO). Основание конуса – круг, образованный при вращении второго катета (AO). Вершина конуса – вершина острого угла вращающегося треугольника (P). Высота конуса – отрезок, проведённый из вершины конуса перпендикулярно его основанию (PO). Образующие конуса – отрезки, соединяющие вершину конуса с точками его основания» [39].

И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Учебник по геометрии, 10-11 классы [47].

Определение конуса: «Фигура, образованная отрезками, соединяющими точку S с точками круга F, называется конусом» (рисунок 4) [47].

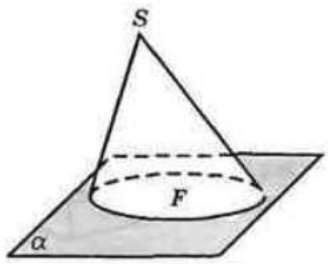


Рисунок 4 – Конус

Элементы конуса. «Круг F называется основанием конуса, а точка S – вершиной конуса. Высота конуса – Расстояние между вершиной конуса и плоскостью основания. Образующие конуса – отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности его основания» [47].

Рассмотрим понятие сечения конуса, представленные в учебниках геометрии данных авторов.

В учебнике Л.С. Атанасяна рассматриваются осевое сечение и сечение полученное плоскостью, перпендикулярной к его оси: «Если секущая плоскость проходит через ось конуса (рисунок 5), то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого – диаметр основания конуса, а боковые стороны – образующие конуса. Это сечение называется осевым» [1].

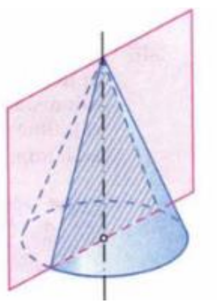


Рисунок 5 – Осевое сечение конуса плоскостью α,

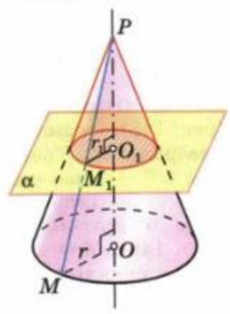


Рисунок 6 – Сечение конуса перпендикулярной к его оси

Отмечается, что «если секущая плоскость перпендикулярна к оси OP конуса (рисунок 6), то сечение конуса представляет собой круг с центром O_1, расположенным на оси конуса. Радиус r_1 этого круга равен $\frac{PO_1}{PO}r$, где r – радиус основания конуса» [1].

Е.В. Потоскуев даёт следующее определение: «Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось, называется осевым сечением конуса» [39].

Отмечается, что «так как все образующие конуса равны, то его осевым сечением является равнобедренный треугольник, боковыми сторонами которого являются образующие конуса, а основанием – диаметр конуса. При этом все осевые сечения – равнобедренные треугольники. На рисунке 7 осевым сечением конуса является треугольник ABP (AP = BP). Угол APB называют углом при вершине осевого сечения конуса.

Конус, в осевом сечении которого правильный треугольник, называется равносторонним конусом» [39].

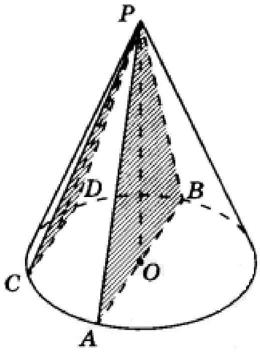
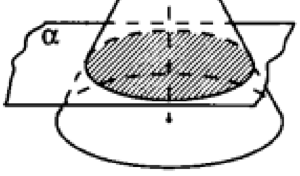


Рисунок 7 – Сечение конуса

Кроме того, «если секущая плоскость проходит через вершину конуса, пересекает конус, но не проходит через ось, то в сечении конуса так же получается равнобедренный треугольник (рисунок 7: Δ DCP).

Так как конус – тело вращения, то любое сечение конуса плоскостью, перпендикулярной его оси (т.е. параллельной основанию конуса), есть круг, а сечение боковой поверхности конуса такой плоскостью – окружность этого круга; центром круга (окружности) является точка пересечения оси конуса и секущей плоскости (рисунок 8).

Если секущая плоскость не параллельна плоскости основания конуса и не пересекает основание, то сечением является эллипс (рисунок 9). Поэтому эллипс называют коническим сечением» [39].



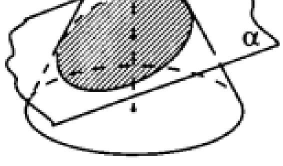


Рисунок 8 – Сечение – окружность

Рисунок 9 – Сечение – эллипс

В учебнике Смирновой И.М, Смирнова В.А. сечения конуса представлены в следующем виде: «Если конус пересечён плоскостью, параллельной основанию, то его часть, заключённая между этой плоскостью и основанием, называется усечённым конусом (рисунок 10). Само сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, называется также основанием усеченного конуса» [47].

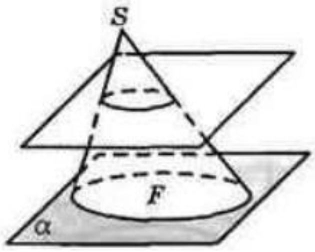


Рисунок 10 – Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию

Рисунок 11 – Осевое сечение

«Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется осевым сечением» [47] (рисунок 11).

Рассмотрим площадь поверхности конуса, объём.

Определение, представленное в учебнике Л.С. Атанасян: «Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую» [1]. А площадь полной поверхности определяется как: «Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания» [1].

Площадь боковой и полной поверхностей конуса, а также его объём можно вычислить по формулам:

$$S_{бок} = \pi RL; \qquad S_{кон} = \pi RL + \pi R^2; \qquad V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

Определение, представленное Е.В. Потоскуевым: «За площадь боковой поверхности конуса принимают площадь её развёртки» (рисунок 12) [39].

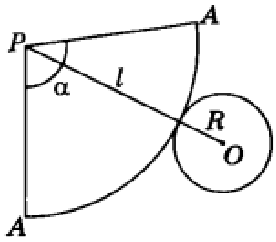


Рисунок 12 – Развёртка конуса

Определение объёма возьмём из учебника Л.С. Атанасяна: Теорема. «Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту» [1]. Доказательство данной теоремы можно посмотреть в учебнике [1, с. 129].

Усеченный конус. Рассмотрим понятия (определения, элементы) усеченного конуса, представленные в учебниках тех же авторов.

Л.С. Атанасян и др. Учебник по геометрии 10-11 классы [1].

Определения усеченного конуса: «возьмём произвольный конус и проведём секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей (верхняя на рисунке 13) представляет собой конус, а другая называется усечённым конусом» [1]; «усечённый конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг её боковой стороны, перпендикулярной к основаниям» [1] (рисунок 14).

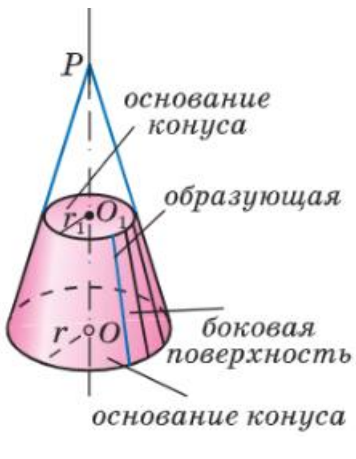


Рисунок 13 – Усечённый конус

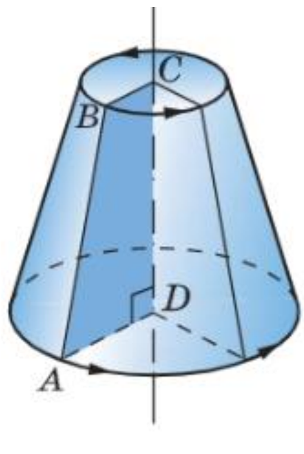


Рисунок 14 – Усечённый конус

Элементы усечённого конуса.

«Основание усечённого конуса – основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью

Высота усечённого конуса – отрезок, соединяющий центры оснований

Боковая поверхность усечённого конуса – часть конической поверхности, ограничивающая усечённый конус

Образующие усечённого конуса – отрезки, образующих конической поверхности, заключённые между основаниями» [1].

Е.В. Потоскуев. Учебник по геометрии 11 класс [39].

Определения усечённого конуса: «усечённый конус представляет собой часть полного конуса, заключённую между его основанием и параллельной ему плоскостью» (рисунок 15); «усечённый конус может быть образован также вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны трапеции, перпендикулярной её основанию» [39] (рисунок 16).

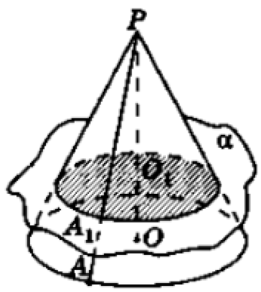


Рисунок 15 – Усечённый конус

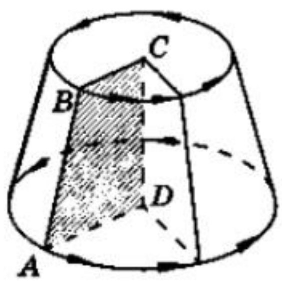


Рисунок 16 – Усечённый конус

Элементы усечённого конуса.

«Основание усечённого конуса – основание данного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью

Высота усечённого конуса – перпендикуляр, проведённый из какой-либо точки одного основания к плоскости другого

Боковая поверхность усечённого конуса – часть боковой поверхности, ограничивающая усечённый конус

Образующие усечённого конуса – отрезки, образующих конуса, заключённые между основаниями усечённого конуса» [39].

И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Учебник по геометрии 10-11 классы [47].

Определения усечённого конуса: «часть конуса, заключённая между плоскостью сечения и основанием, называется усечённым конусом» [47]; «усечённый конус получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, вокруг боковой стороны, прилегающей к этому углу» (рисунок 17) [47].

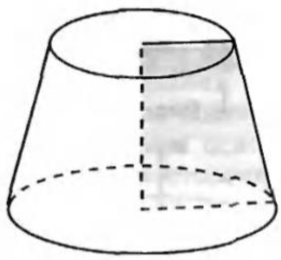


Рисунок 17 – Усечённый конус

Элементы усечённого конуса. «Основание усечённого конуса – сечение конуса плоскостью. Высота усечённого конуса – расстояние между плоскостями оснований» [47].

Площадь поверхности усечённого конуса, объём.

Определение, представленное в учебнике Л.С. Атанасян: «Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин окружностей основания на образующую» [1].

«Площадь боковой поверхности усечённого конуса можно вычислить по формуле: $S_{бок} = \pi(r + r_1)l;$ объём V усечённого конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{3} h\,(S + S_1 + \sqrt{S * S_1})$» [1].

Определение, представленное в учебнике Е.В. Потоскуева: «Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин окружностей основания на образующую» [39].

Площадь полной поверхности усечённого конуса находится по формуле: $S_{\text{полн}} = \pi * (R + r) * l + \pi * R^2 + \pi * r^2$.

Задачный материал.

В таблице 1 представлена типология задач по данной теме.

Таблица 1 – Результаты анализа практического (задачного) содержания по теме «Конус»

Атанасян Л.С. и др. Учебник по геометрии 10-11 кл. [1]	Потоскуев Е.В. Задачник по геометрии 11 кл. [37]	Смирнова И.М, Смирнов В.А. Учебник по геометрии 10-11 кл [47].
	Задачи на вычисление	
«Вычислить элементы конуса: образующую, площадь основания, высоту» [1].	«Найти: площадь полной поверхности конуса; площадь осевого сечения; площадь осевого сечения усечённого конуса по данным образующей, высоты и площади боковой поверхности» [37].	«Вычислить элементы конуса: образующую, площадь основания, высоту» [47].
«Найти площадь сечения, проведенного через две образующие конуса по данным угла между ними; площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две взаимно перпендикулярные образующие» [1].	«Найти радиус основания, высоту конуса по данным угла наклона образующей к плоскости основания» [37].	«Найти радиус основания и высоту по данным осевого сечения; Вычислить высоту усечённого конуса по данным его объёма и радиусам оснований; Вычислить радиус основания полного конуса по данным усечённого конуса» [47].
«Вычислить площади боковой и полной поверхности конуса; объём конуса (усеченного конуса) по данным его элементам» [1].	«Найти угол наклона образующей к плоскости основания по данным отношения площади основания конуса к площади осевого сечения» [37].	«Найти площадь осевого сечения по данным образующей и угла при вершине осевого сечения» [47].
«Найти α, где α- дуга сектора; угол при вершине осевого сечения» [1].	«Найти наибольшее расстояние от плоскости точек конуса по данным образующей и радиуса основания» [37].	«Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от всех образующих конуса» [47].

Продолжение таблицы 1

Атанасян Л.С. и др.	Потоскуев Е.В.	Смирнова И.М., Смирнов В.А.
	«Найти длину отрезка прямой, параллельной основанию, заключённой внутри конуса по данным образующей, высоты, расстоянию от основания и высоты» [37].	«Вычислить объём конуса, площадь его поверхности; найти объём тела вращения по данным: равнобедренная трапеция вращается относительно оси симметрии; равнобедренны треугольник вращается вокруг катета; равносторонний треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника» [47].
	Задачи на вычисление	
	«Найти длину отрезка прямой, параллельной основанию, заключённой внутри конуса по данным образующей, высоты, расстоянию от основания и высоты» [37].	«Вычислить объём конуса, площадь его поверхности; найти объём тела вращения по данным: равнобедренная трапеция вращается относительно оси симметрии; равнобедренный треугольник вращается вокруг катета; равносторонний треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте» [47].
	«Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади его основания по данным угла между образующими» [37].	«Найти объём средней части конуса, разделённого на три равные части плоскостями, параллельными основанию» [47].
	«Найти дугу сектора, представляющего собой развёртку боковой поверхности этого конуса» [37].	«Найти зависимость между радиусами оснований усечённого конуса по данным объёма» [47].
	«Найти стороны треугольника по данным его периметра и площади полной поверхности тела вращения» [37].	
	«Найти площади боковой и полной поверхностей усечённого конуса, образованного вращением трапеции, данным её сторонам и углам» [37].	

Продолжение таблицы 1

Атанасян Л.С. и др.	Потоскуев Е.В.	Смирнова И.М., Смирнов В.А.
Задачи на доказательство		
«Доказать, что площади сечений конуса, перпендикулярных к оси, относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до этих плоскостей» [1].	«Доказать, что отношение объёмов шара и описанного около него усечённого конуса равно отношению площадей их поверхностей» [37].	«Доказать, что около конуса можно описать сферу» [47].
«Доказать, что образующая конуса в четыре раза больше радиуса основания» [1].		«Доказать, что около наклонного конуса можно описать сферу» [47].

Большинство задач на вычисление представлены на нахождение элементов конуса (усечённого конуса), на вычисление площадей поверхности и объёма. Среди задач на доказательство, встречаются комбинации объёмных фигур (конус и сфера, конус и шар). Задачи на построение в учебниках представленных авторов отсутствуют.

В таблице 2 представлена типология задач по данной теме в ГИА. Среди задач на вычисление представлены задачи первой и второй части Единого Государственного Экзамена по математике профильного уровня, а также задачи на доказательство из второй части ЕГЭ профильного уровня.

Таблица 2 - Результаты анализа практического (задачного) содержания по теме «Конус» в ГИА

Задачи ЕГЭ профильного уровня 1 части [40], [45], [61]	Задачи на вычисление ЕГЭ профильного уровня 2 части [45], [53], [59]-[61]	Задачи на доказательство ЕГЭ профильного уровня 2 части [45], [53], [61]
«Найти объём меньшего конуса, отсекаемого плоскостью параллельной основанию через середину высоты, по данным объём конуса» [40].	«Различные точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S. Отрезок AB является её диаметром. Дан угол между образующей конуса и плоскостью основания, найти объём тетраэдра SABC, по данным образующей и косинусу угла ASC» [53]	«Различные точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S. Отрезок AB является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60°. Докажите, что $\cos \angle ASC + \cos \angle BSC = 1{,}5$» [53].

Продолжение таблицы 2

Задачи ЕГЭ профильного уровня 1 части	Задачи на вычисление ЕГЭ профильного уровня 2 части	Задачи на доказательство ЕГЭ профильного уровня 2 части
«Определить во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высота уменьшится в определённое количество раз, а радиус основания останется прежним» [45].	«На окружности основания конуса с вершиной P выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых даны в определённом отношении. Найти площадь сечения конуса плоскостью ABP, по данным радиуса и образующей» [45].	«Радиус основания конуса с вершиной S и центром O равен 13, а его высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B – концы образующих, M – середина SA, N – точка плоскости основания такая, что MN параллельна SB. Докажите, что ANO – прямой угол» [53].
«Вычислить объём конуса, делённый на π по данным диаметра и углу при вершине осевого сечения» [40].	«Даны радиус основания конуса с вершиной S и центром O и высота. Точки A и B – концы образующих, M – середина SA, N – точка плоскости основания такая, что MN параллельна SB. Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания, по данным AB» [60].	«Радиус основания конуса равен 6, а его высота 8. Плоскость сечения содержит конус и хорду основания, длина которой равна 4. Докажите, что сечение является остроугольным треугольником» [61].
«Найти площадь осевого сечения конуса по данным высоты и образующей» [60].	«В конус вписан шар. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания конуса, если дано отношение объёма конуса к объёму вписанного и отношение радиуса шара к радиусу основания конуса» [60].	«Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:5. Докажите, что сечение конуса плоскостью ABP – равнобедренный остроугольный треугольник» [45].
Найти объём части конуса, изображённого на рисунке	«Плоскость сечения содержит конус и хорду основания определённой длины. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, по данным радиуса основания конуса и его высоты» [61].	«Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса - треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение, перпендикулярное одной из образующих. Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный» [45].

Продолжение таблицы 2

Задачи ЕГЭ профильного уровня 1 части	Задачи на вычисление ЕГЭ профильного уровня 2 части	Задачи на доказательство ЕГЭ профильного уровня 2 части
«Найти радиус сферы, описанной около конуса, если центр сферы совпадает с центром основания конуса по данным образующей конуса» [40].	«Через вершину S конуса проходит плоское сечение SAB. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в определённом отношении. По данным угла SAB и площади SAB, найти объём конуса» [59].	«Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M – середина BC. Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC» [45].
«Найти объём конуса, вписанного в цилиндр, имеющего с ним общие основания и высоту, по данным объёма цилиндра» [60].	«Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 1:3. Найти площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, по данным радиуса их общего основания» [53].	«Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 1:3. Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 4:1, считая от вершины конуса» [53].

В качестве примера, приведём решения по одной из задач каждого типа.

Задача ЕГЭ профильного уровня 1 части: «Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса» [40] (рисунок 18).

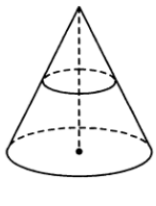


Рисунок 18 – Сечение конуса

Решение. «Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем меньшего конуса в восемь раз меньше объема большего конуса.

$\frac{V_1}{V_2} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{16}{8} = 2$» [40]. Ответ: 2.

Задача на вычисление ЕГЭ профильного уровня 2 части: «На окружности основания конуса с вершиной P выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:2. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP, если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 7» [45].

Решение. Построим конус с центром основания в точке O и вершиной P. Сечение ABP – равнобедренный треугольник. PM – высота треугольника ABP (рисунок 19).

Рассмотрим треугольник AOM: AO = OB = 6. ∠AOB = 120° (центральный угол, опирающийся на дугу 120°). OM = 3 (катет, лежащий против угла 30°). По теореме Пифагора найдём AM = $\sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{36-9} =$ = $3\sqrt{3}$ → AB = $6\sqrt{3}$. Отрезок PM – высота треугольника APB. По теореме Пифагора: $PM^2 = 49 - (3\sqrt{3})^2 = 49 - 27 = 22$ → PM = $\sqrt{22}$.

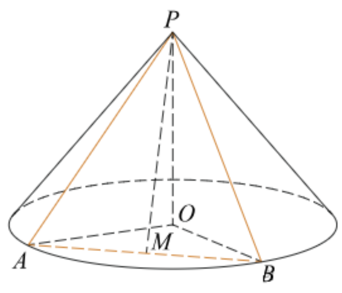


Рисунок 19 – Сечение конуса

Площадь искомого сечения $S = \frac{1}{2} PM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{22} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{66}$.

Ответ: $3\sqrt{66}$.

Задача на доказательство ЕГЭ профильного уровня 2 части.

«Различные точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок AB является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60°. Докажите, что cos ∠ASC + cos ∠BSC = 1,5» [53].

Доказательство. Выполним необходимые построения (рисунок 20).

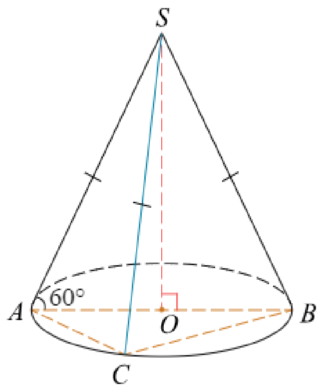


Рисунок 20 – Конус

AB – диаметр. ∠SAB = 60°. Пусть O – центр основания конуса. Тогда ∠OAS = ∠OBS = 60°, следовательно, треугольник ABS равносторонний. По теореме косинусов, cos ∠ASC = $\frac{AS^2+CS^2-AC^2}{2AS\cdot SC}$ = $\frac{2AB^2-AC^2}{2AB^2}$, cos ∠CSB = = $\frac{CS^2+BS^2-CB^2}{2CS\cdot BS}$ = $\frac{2AB^2-CB^2}{2AB^2}$. Заметим, что поскольку угол ACB опирается на диаметр, он равен 90°. Тогда $AC^2+CB^2=AB^2$. Тогда cos ∠ASC + ∠CSB = $\frac{4AB^2-AC^2-CB^2}{2AB^2}=\frac{4AB^2-(AC^2+CB^2)}{2AB^2}=\frac{4AB^2-AB^2}{2AB^2}=\frac{3AB^2}{2AB^2}=$ 1,5.

Таким образом, рассмотрев в данном параграфе анализ учебного материала, необходимо представить результаты исследований по выявлению методических особенностей обучения решению задач.

1.3 Анализ исследований и опыта работы учителей по обучению решению опорных задач по теме «Конус» на уроках геометрии

Теоретические аспекты обучения решению опорных (ключевых) задач описаны в работах Т.А. Ивановой, Н.И. Зильберберг, Л.А. Осипенко, А.Е. Малых, Е.В. Потоскуева и других исследователей. Опишем их ниже более подробно.

Так, Т.А. Иванова показывает связь опорной задачи с теорией формирования умственных действий П.Я. Гальперина. В работе отмечается, что «в теории формирования умственных действий алгоритм, правило есть не что иное как ориентировочная основа умственного действия, соответствующая общему методу решения однотипных задач» [15]. Автор для обучения решению опорных (ключевых) задач рекомендует использовать технологию работы с правилом, так как: «Если ключевая задача - задача алгоритмического типа, то работа над ней аналогична технологии работы с правилом. По окончании её решения необходимо проанализировать основную идею решения, сделать выводы, раскрывающие ориентировочную основу действий или суть нового приёма, зафиксировать их каким-либо из возможных способов» [15].

Н.И. Зильберберг подчеркивает, что так как «ключевые задачи являются опорой для решения других задач, включая нестандартные задачи, то методику обучения их решению надо строить на основе следующих принципов: учителю можно отобрать определённый минимум задач, овладев методами решения которых ученик будет в состоянии решить любую задачу на уровне программных требований по изучаемой теме» [14]. Автор предлагает несколько методов выбора ключевых задач:

- «метод, основанный на умениях, которые должны быть сформированы у учеников после изучения темы;
- метод исключения и дополнения;
- комбинаторный метод» [14].

Н.И. Зильберберг приводит методические рекомендации по обучению решению ключевым (опорным) задачам на уроках математики:

- «начинать лучше всего с самых простых ключевых задач;
- задачи, при решении которых приходится выходить за рамки школьной программы, которые наиболее удалены от обязательных результатов обучения, лучше всего разбирать в конце урока;
- если при решении какой-либо ключевой задачи может быть использована другая ключевая задача (или метод ее решения), то эта

задача должна разбираться ранее (в этом случае учащиеся тренируются в распознавании и применении ключевых задач);

− самые красивые и яркие задачи лучше отнести на вторую часть урока, чтобы под влиянием работы с ними ученики преодолели естественную усталость;

− желательно чередовать задачи, требующие обширных записей, с теми, которые не предполагают громоздких письменных обоснований.

− те ключевые задачи, которые как-то связаны с предыдущей темой, лучше включить в число первых, а активно используемые в последующих темах желательно разбирать позднее» [14, с. 56].

Л.А. Осипенко предлагает несколько способов решения опорных задач: «Чтобы научиться решать геометрические задачи, надо их решать. Можно предложить и некоторые приемы, которые могут помочь найти «ключ» к геометрическим задачам. Например, полезно начать решение с того, что отметить на чертеже все равные элементы (углы, отрезки), затем вычислить «все, что можно», то есть найти те величины, которые легко определяются исходя из условия задачи. Затем продолжить решать задачу «с конца»: ответить на вопрос, что надо знать, чтобы получить искомую величину. Возможно, окажется, что все необходимые элементы вы уже знаете или можете легко их получить. Можно попробовать решить задачу с помощью алгебры. Для этого обозначить все неизвестные элементы за x, y, z и т.д., а затем составить систему уравнений и/или неравенств, связывающих эти неизвестные. Конечно, наиболее красивые и короткие решения получаются, если удается провести удачные дополнительные построения» [30].

Е.В. Потоскуев в методическом пособии к задачнику описывает методику обучения решению опорных задач по определенным темам школьного курса геометрии так: «Прежде всего старшеклассникам необходимо решить все простейшие опорные задачи изучаемой темы. Этими задачами ни в коем случае не следует пренебрегать, какими бы простыми они ни казались. Кроме того, следует учитывать, что методика решения таких задач в классах с углублённым изучением математики, вообще говоря, отличается от методики их решения в общеобразовательных классах и классах гуманитарной направленности. Только после решения всех опорных задач стоит переходить к более сложным задачам. Разумеется, сам отбор этих задач не только непрост, но и неоднозначен» [38].

В задачнике автора выделены значком «☺» те задачи, которые считаются основными (среди них, в частности, находятся и все опорные). Естественно, что такой выбор в определённом смысле является условным и, возможно, будет изменён учителем в процессе работы по учебнику и задачнику.

Приведем задачи, которые рассматривает Е.В. Потоскуев в задачнике в качестве опорных задач.

Тема 1. «Определение конуса и его элементов. Сечения конуса. Касательная плоскость к конусу. Изображение конуса. Развертка и площадь поверхности конуса».

Задача 1. «Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину конуса, если расстояние от центра основания конуса до секущей плоскости равно 12» [37].

Задача 2. «Радиус основания конуса 4 м, высота 3 м. Найдите: а) образующую; б) площадь боковой поверхности конуса» [37].

Пояснение: при решении задачи 1 используются геометрический и аналитический методы, также - метод дополнительного построения, при решении задачи 2 - метод площадей и аналитический метод.

Тема 2. «Свойства параллельных сечений конуса. Вписанные в конус и описанные около конуса пирамиды. Усечённый конус. Поверхность усечённого конуса».

Задача 3. «Радиусы оснований усечённого конуса R и r, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности» [37].

Задача 4. «Площади оснований усеченного конуса 4 $м^2$ и 16 $м^2$. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найдите площадь сечения» [37].

При решении данных задач используются формулы, изучаемые в данной теме, то есть - аналитический метод; метод дополнительного построения.

Тема 3. «Объем конуса и усеченного конуса».

Задача 5. «Треугольник со сторонами 13 см, 37 см и 40 см вращается вокруг прямой, проходящей через вершину большего угла параллельно большей стороне. Найдите объём и площадь поверхности тела вращения» [37].

Задача 6. «Докажите, что объём конуса равен одной шестой произведения площади осевого сечения на длину окружности основания» [37].

При решении данных задач используются аналитический и геометрический методы.

Вместе с этим, по данной теме может решена следующая задача повышенной сложности:

«Дана трапеция ABCD, в которой угол A = 90°, угол D = 45°, BC = 4 см, CD = $3\sqrt{2}$ см. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усечённого конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны AB (рисунок 21)» [1].

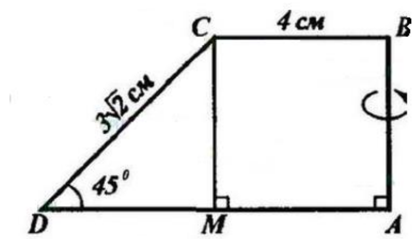


Рисунок 21 – Трапеция

Решение: DM = $3\sqrt{2}\cos 45° = \frac{3\sqrt{2}*\sqrt{2}}{2}$ = 3; DA = r = 3 + 4 = 7;

$S_{бок} = \pi(r + r_1)l \to S_{бок} = \pi(4 + 7)\,3\sqrt{2} = 33\sqrt{2}\,\pi$;

$S_{полн} = S_{бок} + \pi\,(r_1{}^2 + r_2{}^2) \to S_{полн} = 33\sqrt{2} + \pi\,(16 + 49) = 33\sqrt{2}\pi + 65\pi$

Ответ: $33\sqrt{2}\,\pi$; $33\sqrt{2}\pi + 65\pi$.

Г.И. Саранцев в статье «Развитие задачи как средство формирования универсальных учебных действий» [43] при решении задач, в том числе опорных задач, употребляет термин «развитие задачи».

По мнению автора, эффективность обучения решению задач зависит от количества решенных задач. Учителя необходимо особое внимание уделять заключительному этапу решения задачи, на котором надо провести ее исследование, а также анализ процесса поиска способа решения данной задачи. Указывается, что на заключительном этапе решения задачи должно осуществляться: «рассмотрение различных изменений задачной ситуации, построение на ее основе новых задач, выполнение логических операций с задачей (таких, как обобщение, конкретизация, аналогия), выявление различных способов решения задачи. Выполнение всех указанных операций с задачей обозначим термином «развитие задачи»» [43].

Н.Н. Зепнова в диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук «Формирование и развитие пространственного мышления учащихся на элективных курсах по геометрии», предлагает использование разноуровневой системы задач, учитывающие тип и уровень развития пространственного мышления, «обеспечивающего формирование и дальнейшее его развитие учащихся; разработала методику формирования и развития у учащихся пространственного мышления на элективных курсах по геометрии» [12].

А.Н. Земляков, в методических рекомендациях к учебнику А.В. Погорелова для математического профиля при решении опорных задач предлагает использовать методику конфигурации: «приём, помогающий решать задачи с фигурами вращения: рассмотрение многогранника или другой «прямолинейной» пространственной конфигурации, при котором «круглая фигура» как бы отбрасывается (она нужна лишь при анализе условия, то есть на предварительном эскизе к задаче)». Рассмотрим пример решения задачи, которая представлена в учебнике:

«…Разберем задачу потруднее, при решении которой появляется более сложная конфигурация. Используя эскиз конуса, переходим к прямолинейной конфигурации – в случае конуса это будет, как правило, пирамида (если не сразу некоторое плоское сечение) – далее решаем задачу уже «безотносительно» к конусу» [11].

Задача: «Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведённого через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равна 12» [11].

Решение. Пусть PO – высота конуса, PAB – указанное сечение. Рассмотрим пирамиду POAB с вершиной P и основанием OAB (рисунок 22; от конуса на чертеже взята только высота PO!). В ней известны отрезки PO = H = 20, OA = OB = R = 25, расстояние от O до грани PAB равно d = 12. Требуется найти площади грани PAB. Прежде всего введём конфигурацию расстояния d. Пусть M – середина AB, тогда по свойству медианы в равнобедренном треугольнике OM $\perp$ AB и PM $\perp$ AB, поэтому плоскость POM перпендикулярна прямой AB и, следовательно, проходящей через неё плоскости PAB.

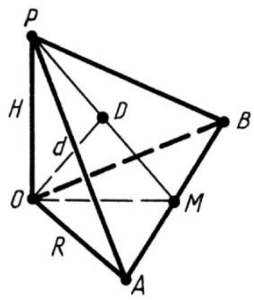


Рисунок 22 – Пирамида

Значит, если в плоскости POM провести перпендикуляр OD $\perp$ PM, то он будет и перпендикуляром к плоскости PAB; таким образом, OD = d = 12. Все данные в условии задачи параметры теперь присутствуют на чертеже. Перейдём к искомому – к площади S = S_{PAB}. Чтобы её найти, достаточно вычислить длины отрезков AB и PM. Высоту PM сечения PAB находим из треугольника POM: отрезок PD = $\sqrt{PO^2 - OD^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} =$ = 16, и из подобия треугольников POD и POM (из пропорции PM : PO = = PO : PD). Получим, что: PM = PO · PO : PD = $\sqrt{25^2 - 20^2}$ = 15, поэтому основание AB сечения равно AB = 2 · AM = $2\sqrt{AO^2 - OM^2} = 2\sqrt{25^2 - 15^2}$ = = 2 · 20 = 40. Остается записать ответ: S = $\frac{1}{2}$ AB · PM = $\frac{1}{2}$ · 40 · 25 = 500.

В статье магистра М.В. Брюховой «Изучение многогранников в школьном курсе математики», автор так же для наглядности изучения объёмных фигур предлагает использование специальных компьютерных программ: «…для развития пространственного мышления учащихся, в процессе изучения геометрии, были выбраны компьютерные математические программы «КОМПАС- 3D LT» и «DG - геометрия», использование которых заполнило некоторый пробел в процессе формирования пространственного образа геометрического объекта, они позволили осуществить плавный переход от натуральной вещественной модели к условному графическому изображению - чертежу, что в значительной степени повышает уровень объективности пространственных представлений обучаемого» [5].

Далее опишем результаты анализа практического опыта учителей по теме «Конус», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

В статье О.В. Стоговой [49] рассматривается задача на вычисление объема усечённого конуса по его элементам на четырёх различных уровнях подготовки учащихся. Автором предложен алгоритм решения задачи с помощью понятий из курса алгебры и начал математического анализа: автор пишет, что «…учащимся следует предварительно напомнить уже известные им знания из начал анализа и по применению свойств производной для исследования функции» [49].

В статье Е.А. Калабугиной «Инновационный подход к изучению тел вращения в школьном курсе геометрии» для наглядного изучения темы, автор предлагает использование интерактивной доски и ряда компьютерных программ, отмечается, что «…данная программа («Geogebra») позволяет представить тела вращения в пространстве, рассмотреть подробно их сечения. Благодаря анимации в данной программе развивается пространственное воображение учащихся. Ученики уже представляют, как именно вращается тело, и как строятся сечения в телах вращения» [18].

В.М. Имайкина [16] описывает экспериментальный курс по теме «Длина, площадь и объем геометрических тел», где рассматривается и понятие конуса.

В журнале «Математика в школе имеются статьи по теме «Конус» авторов: С.М. Саакяна, В.Ф. Бутузова «Изучение темы «Цилиндр. Конус. Шар» в XI классе [41]; А.Я. Цукаря «Какой след оставит сечение конуса на плоскости? [54]; В.А. Петрова «Три карты (о методах картографии и картах Земли на сфере, цилиндре, конусе)» [32]; Т.С. Гришиной «Логический прием сравнения в стереометрических задачах (на примере темы «Прямые круговые цилиндр и конус»)» [8].

Различные конспекты уроков учителей математики по теме «Конус» можно найти на сайте «Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [31], в том числе по учебнику Л.С. Атанасяна [1].

Задачи на вычисление из двух частей единого государственного экзамена и доказательство по теме «Конус» представлены в сборниках для подготовки к ЕГЭ (профильного уровня) под редакцией И.В. Ященко [59] – [61]. Кроме того, материал для подготовки к ЕГЭ по математике можно найти на сайте «Решу ЕГЭ» [45]: задание №3 (стереометрия) и задание №14 (стереометрическая задача) «Круглые тела: Цилиндр. Конус. Шар» в разделе «Ученику».

Методические аспекты обучения старшеклассников решению опорных задач отражены также в иностранной литературе [62] - [66].

Выводы по первой главе

Описаны некоторые исторические аспекты развития геометрических понятий. Так, указано, что геометрия – это раздел математики, который занимается размером, формой и положением фигур в пространстве. Этот раздел математики появился тысячи лет назад в Египте и Месопотамии.

Определено, что большинство задач в курсе геометрии являются нестандартными. В связи с этим возрастает значение обучения опорным (ключевым) задачам, которые иллюстрируют методы или приемы решения задач; у геометрической задачи может быть не один способ решения, каждый из которых может быть направлен на определенные знания и умения.

Рассмотрев трактовки определения «опорной» («ключевой») задачи разных авторов, пришли к выводу, что под ключевыми (опорными) задачами мы будем понимать задачи, содержание или метод решения которых используется для решения других задач.

Опорные задачи являются уникальными задачами, помогающими в решении целого ряда более сложных задач.

Применение опорных задач способствует поиску более простых, «красивых» решений, отличных от стандартных. Более того, решение подобных задач позволяет развивать логическое мышление старшеклассников.

Выделены основные цели и задачи изучения программы курса геометрии (в том числе и темы «Конус») на углублённом уровне, согласно Федеральной образовательной программе среднего общего образования.

Произведён анализ теоретического и задачного материала учебников по геометрии для 10 – 11 классов разных авторов по теме «Конус». Такой анализ позволяет выделить преимущества и недостатки каждого из них.

Установлено, что в этих учебниках отводится по 7 часов в учебнике Л.С. Атанасяна и учебнике Е.В. Потоскуева, в учебнике И.М. Смирновой, В.А. Смирнова – 6 часов. Все авторы перечисленных учебников предлагают изучение данной темы в 11 классе.

Выполнен сравнительный анализ практического (задачного) содержания по теме «Конус» в учебниках тех же авторов и типов задач по данной теме в ГИА.

Большинство задач на вычисление представлены на нахождение элементов конуса (усечённого конуса), на вычисление площадей поверхности и объёма. Среди задач на доказательство, встречаются комбинации объёмных фигур (конус и сфера, конус и шар).Задачи на построение в учебниках представленных авторов отсутствуют.

Произведён анализ исследований и практического опыта работы учителей по обучению решению опорных задач по теме «Конус», опубликованных в статьях и учебно-методических пособиях.

Определено, что теоретические аспекты обучения решению опорных (ключевых)задач описаны в работах Т.А. Ивановой, Н.И. Зильберберг, Л.А. Осипенко, А.Е. Малых, Е.В. Потоскуева и других исследователей.

Так, Т.А. Иванова для обучения решению опорных (ключевых) задач рекомендует использовать технологию работы с правилом.

Г.И. Саранцев связывает эффективность обучения решению задач с количеством решенных задач; необходимо особое внимание уделять заключительному этапу решения задачи, на котором надо провести ее исследование, а также анализ процесса поиска способа решения данной задачи.

Л.А. Осипенко предлагает несколько способов решения опорных задач.

А.Н. Земляков в методических рекомендациях к учебнику А.В. Погорелова для математического профиля при решении опорных задач предлагает использовать методику конфигурации.

Е.В. Потоскуев в методическом пособии к задачнику описывает методику обучения решению опорных задач по определенным темам школьного курса геометрии. В его задачнике автора выделены значком «☺» те задачи, которые считаются основными (среди них, в частности, находятся и все опорные). Естественно, что такой выбор в определённом смысле является условным и, возможно, будет изменён учителем в процессе работы по учебнику и задачнику.

Н.И. Зильберберг подчеркивает, что методику обучения их решению надо строить на основе определенных принципов. Автор предлагает несколько методов выбора ключевых (опорных) задач.

Глава 2 Методические основы обучения старшеклассников решению опорных задач по теме «Конус» в школьном курсе геометрии

2.1 Технология поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича при обучении решению задач по теме «Конус»

Поиски результативного обучения детей подтолкнули практиков и ученых к мысли о «технологизации» учебного процесса, то есть привнести в обучение технологический прогресс для гарантированного результата. Были выделены пара источников педагогических технологий – педагогическая практика и производственный процесс. Макаренко А.С. говорил, что педагогический процесс – это организованный особым образом педагогическое производство.

Еще раньше Я.А. Коменский в своей «Великой дидактике» говорил о том, что «... нужно желать, чтобы метод человеческого образования стал механическим, то есть предписывающим все столь определено, чтобы все, чему будут обучать, ... не могло не иметь успеха, как это бывает в хорошо сделанных часах, в телеге, корабле, мельнице и во всякой другой сделанной для движения машине». Для реализации такого замысла долгие годы велись поиски дидактических подходов, средств, которые подробно раскрываются в книге М.В. Кларина «Технология обучения: идеал и реальность».

Рассмотрим содержание технологического подхода в обучении математике.

В процессе решения математических задач возникает понятие «образовательные технологии или педагогика» рассматривается с нескольких точек зрения: научной, описательной и практической, где имеет место применение технологического (педагогического) процесса, реализация методический и педагогический инструментарий.

Таким образом, педагогическая технология – это еще и наука, обеспечивающая оптимальные способы обучения, исследования, как система методов, принципов, используемых в образовании и выступает в качестве образовательного процесса.

Образовательная технология должна отвечать ряду методических требований:

- концептуальность;
- системность. Педагогическая технология должна иметь все признаки системы: логичность процесса, взаимосвязанность всех его частей, единство;
- контроль. Возможность планирования, оценки учебного процесса, контроля шаг за шагом меняя средства и методы, чтобы изменить результаты;
- результативность, так как технология должна гарантировать желаемые результаты;
- применимость. Возможность использования педагогической технологии в других учреждениях аналогичное образование другими организациями.

Во время занятий по математике целесообразно использование следующих технологий: технология формирования отношения к усвоению правил, определений и теорем, инструментов для алгоритмизации действий учащихся (М. Волович); технология обучения, основанная на решении задач (Р. Хазанкин); технология обучения, основанная на системе эффективных занятий (А. Окунев); технология развивающего обучения (Д.Б. Эльконин, В.В. Давыдов); информационные и коммуникационные технологии.

В данном исследовании нами будет описана технология М.Б. Воловича, на основе которой нами будет спроектировано изучение темы «Конус». Данная технология базируется на исследованиях Гальперина П.Я., который изучал теорию поэтапного формирования умственных действий.

П.Я. Гальперин является автором теории поэтапного формирования умственных действий и понятий [7]. Автор указывает, что «вопрос об умственных действиях, то есть о том, что представляют собой наши умения решать «в уме» разные задачи, входит в более широкую проблему активности человеческого сознания, взятую не в философском или общественно- историческом, а в конкретно психологическом её содержании. Описывается путь формирования умственных действий, составляющих значительную часть того, чему обучают в школе, как последовательный переход от освоения действий с предметами через действие в плане слышимой речи к перенесению действия в умственный план. Выделяются этапы этого процесса: 1. Составление предварительного представления о задании. 2. Освоение действия с предметами. 3. Освоение действия в плане слышимой речи. 4. Перенесение действия в умственный план. 5. Окончательное становление умственного действия. Даётся подробная характеристика каждого этапа. Автор подчеркивает, что поэтапное формирование умственных действий остается действительным содержанием процесса усвоения новых умений вне зависимости от индивидуального или коллективного характера обучения, а шкала основных параметров сохраняет значение для оценки усвоенного действия вне зависимости от фактического содержания и качества этого обучения» [7].

П.Я. Гальперин впервые выделил элемент действия и назвал его «ориентировочная основа действий (ООД) – ясный, четко дифференцированный план, в который входят: строение и характеристика исходного материала действия, затем его орудий и, наконец, его самого, то есть состав, последовательность и способ выполнения его отдельных операций» [7].

Этапы теории поэтапного формирования умственных действий:

Этап 1. «Предварительное знакомство с действием, создание ООД. Происходит предварительное ознакомление с действием, т. е. построение в сознании обучаемого ориентировочной основы действия.

ООД – текстуально или графически оформленная модель изучаемого действия, система условий правильного его выполнения. Различают несколько типов ООД: полный, неполный, инвариантный» [6] (рисунок 23).

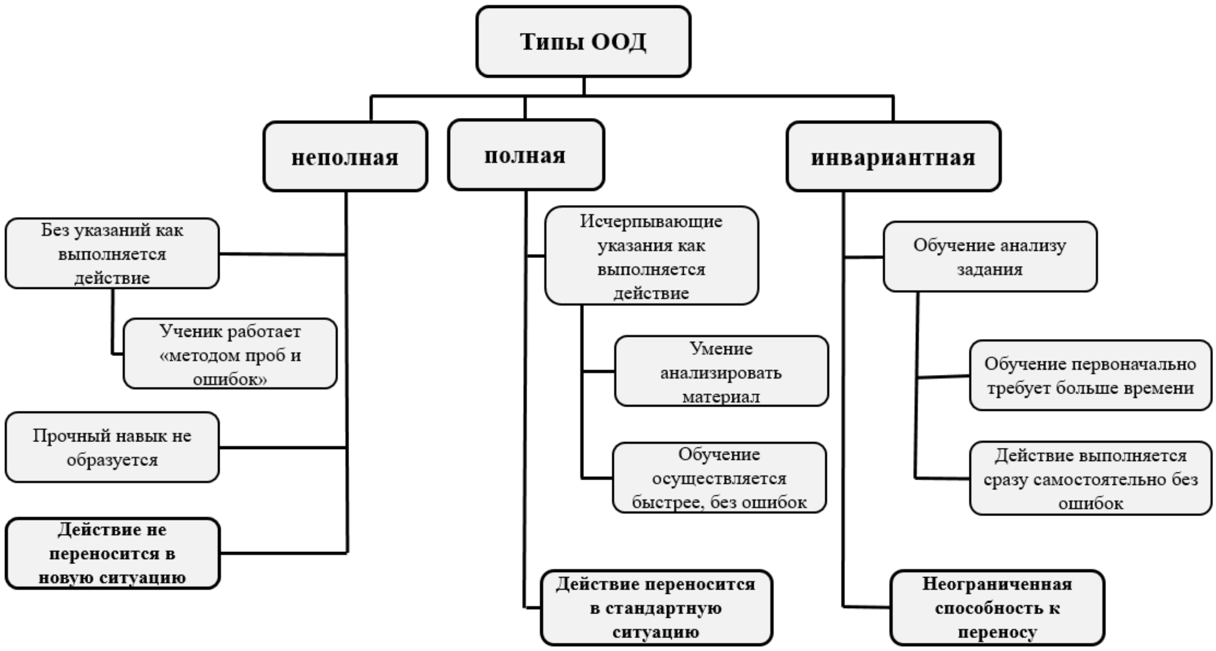


Рисунок 23 – Типы ООД

Этап 2. «Материальное (материализованное) действие. Обучаемые выполняют материальное (материализованное) действие в соответствии с учебным заданием во внешней материальной, развернутой форме. Они получают и работают с информацией в виде различных материальных объектов: реальных предметов или их моделей, схем, макетов, чертежей и т. д., сверяя свои действия с ООД (инструкцией).

Этап 3. Этап внешней речи. После выполнения нескольких поэтапных действий необходимость обращаться к инструкции отпадает и функцию ориентировочной основы выполняет внешняя речь. Обучаемые проговаривают в слух то действие, ту операцию, которую в данный момент осваивают. В их сознании происходит обобщение, сокращение учебной информации, а выполняемое действие начинает автоматизироваться.

Этап 4. Этап внутренней речи. Обучаемые проговаривают выполняемое действие, операцию про себя, при этом проговариваемый текст необязательно должен быть полным, обучаемые могут проговаривать только самые сложные, значимые элементы действия, что способствует его дальнейшему мысленному свертыванию и обобщению.

Этап 5. Этап автоматизированного действия. Обучаемые автоматически выполняют отрабатываемое действие, даже мысленно не контролируя себя, правильно ли оно выполняется. Это свидетельствует о том, что действие интериоризировалось, перешло во внутренний план и необходимость во внешней опоре отпала» [6].

Особенностью технологии поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича [6] является то, что устного счета очень мало, но каждое вычислительное задание начинается с прикидки.

Прикидка нужна, чтобы оценить возможные результаты задачи. Например, при решении задачи на вычисление объёма конуса, нам необходимо прикинуть, достаточно ли у нас сведений об элементах данной фигуры, не нужно ли нам дополнительно что-то найти и какую формулу применить для её поиска. Или, например, если в условии задачи сказано, что конус разделён сечением, параллельным основанию фигуры через середину высоты, и зная объём исходного конуса, необходимо вычислить объём меньшего, нам необходимо прикинуть, во сколько раз должен быть меньше объём искомого, чем объем данного, а затем уже применяя знания о подобных фигурах и коэффициенту подобия выполнить необходимые вычисления и сравнить с ранее прикинутым вариантом ответа. Если ответы расходятся не значительно или же вовсе не расходятся, то мы всё сделали верно, если расхождения значительные, то необходимо найти и разобрать ошибку.

Ещё одна особенность технологии М.Б. Воловича - каждая новая тема «начинается с повторения изученного, необходимого на данном этапе. Целью такого повторения является выявление пробелов и устранение их до момента объяснения нового. К каждой теме мы должны подобрать вопросы, которые могут проявить пробелы. В качестве материала для повторения служат математические диктанты, которые состоят из 5 заданий (вопросов) на повторение ранее изученного. Это задания, позволяющие вспомнить пройденный материал, выявить и ликвидировать пробел. Они не выполняют функцию контроля, поэтому за математические диктанты оценка ставится либо только положительная, либо не ставится» [6]. Для изучения темы «Конус», например, необходимо вспомнить теорему Пифагора, площадь круга, признаки подобия и т.д.

Технология М.Б. Воловича рассчитана на преподавание четырехурочными циклами.

Урок 1. Объяснение нового материала с проведением математического диктанта.

Урок 2. Работа парами. Учитель не говорит, а дети учат пройденный материал.

Урок 3. Урок общения. Работами группами.

Урок 4. Урок самостоятельной работы.

Преподавание в старших классах целесообразнее выстраивать изменив последовательность уроков: вначале урок общения, потом урок решения задач. Наряду с этим могут появиться совершенно иные «многоурочные» циклы. Появление таких циклов и частота появления зависят главным образом от учителя и от подготовленности класса. Время на изучение материала в ходе многоурочного цикла может быть распределено так:

Урок объяснения, на котором преподаватель должен познакомить с наиболее важным и наиболее трудным в изучаемом материале; точно указать, какой минимум материала должен быть усвоен к середине следующего урока – времени, с которого преподаватель может приступить к проверке этой части теории; какой материал должен быть самостоятельно изучен и сдан в течение каждого из следующих уроков, отведённых на его изучение.

Уроки общения могут начинаться непосредственно после завершения объяснения, то есть на первом уроке цикла. Школьники самостоятельно изучают материал. Учитель постепенно опрашивает учеников, ставя оценки за каждую часть в заранее подготовленные таблицы, регламентирующие последовательность изучения и его темпы. Например, на самостоятельное изучение темы «Конус» может отводиться три урока общения.

Таблица 3, которая может выдаваться ученикам на первом уроке цикла, имеет вид:

Таблица 3 – Таблица, регламентирующая последовательность изучения темы.

№ урока	Подлежащий усвоению материал	Оценка
1	Понятие конуса, его элементы.	
2	Площадь поверхности конуса.	

Уроки решения задач. Школьники самостоятельно решают и, работая парами, проверяют правильность решения задач, номера или тексты которых учитель сообщил на первом уроке цикла. Тогда же даётся таблица, фиксирующая тот минимум задач, которые каждый ученик должен прорешать на каждом из отведённых для этого уроков. Решение каждой порции задач оценивается отдельно.

При рассмотрении темы «Конус» будем использовать технологию поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича.

Опишем основные цели и задачи изучения темы «Конус».

Цель: рассмотреть понятия конуса и усеченного конуса, формировать представления об основных элементах конуса и усеченного конуса; развивать пространственное и конструктивное мышление, внимание и математическую речь в процессе решения геометрических задач на вычисление (нахождение элементов конуса, вычисление объёма, площадей полной и боковой поверхностей) и доказательство; воспитывать аккуратность при построении объёмных фигур и тел вращения (конус, усечённый конус).

Задачи: формировать понятие конической поверхности, конуса; навыки решения задач на вычисление и доказательство по данной теме.

Спроектируем уроки по темам «Понятие конуса», «Площадь поверхности конуса» по учебнику Л.С. Атанасяна на основе технологии поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича.

Урок 1. Тема урока: «Конус».

Тип урока: урок объяснения.

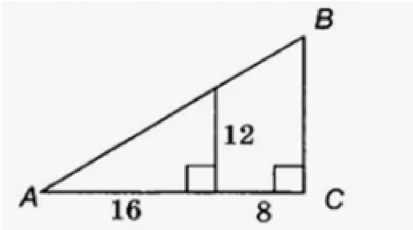
Цель урока – формирование понятий: конус и его элементы, усечённый конус; площадь полной и боковой поверхностей.

Этапы 1 и 2 теории формирования умственных действий: учащиеся выстраивают в сознании ориентировочную основу действий; выполняют материализованное действие в соответствии с полученным заданием.

В начале урока учитель раздаёт маленькие листочки для проведения математического диктанта, состоящего из 5 вопросов (время, отведённое на написание и проверку диктанта 5-7 минут).

Математический диктант (составлен на основе изученных тем в курсе Геометрии 7-9 класса УМК Атанасяна Л.С. [2]):

1. Какой треугольник называется прямоугольным? Напишите, как называются стороны прямоугольного треугольника.
2. Треугольник называется равнобедренным, если...
3. Диаметр окружности равен 5 дм. Найдите его радиус, ответ дайте в сантиметрах.
4. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол 40°, а другого – угол, равный: а) 50°; б) 60°?
5. «Найдите катет ВС треугольника, изображённого на рисунке:



» [2].

6. Верно ли утверждение, что площадь круга можно вычислить по формуле: S = 2πr? Ответ обоснуйте.

7. Найдите площадь круга, делённого на π, если радиус равен 9.

8. Чему будет равен радиус окружности, если ее длина 18 π.

9. Найдите площадь кругового сектора, если радиус круга равен 3, а угол сектора равен 120°. В ответе укажите площадь, деленную на π.

10. Из круга, радиус которого 10 см, вырезан сектор с дугой в 60°.

Найдите площадь оставшейся части круга.

Ответы к математическому диктанту: 1) прямоугольным называется треугольник, в котором один из углов прямой. Сторона, лежащая против прямого угла называется гипотенузой, две другие – катеты; 2) если у него две стороны равны; 3) 25 см; 4) а) треугольники подобны (50 + 40 = 90); б) треугольники не подобны (40 + 60 = 100) ; 5) Из отношения сторон подобных треугольников: 2 BC = 12 · 3; BC = 18; 6) нет, площадь круга можно вычислить по формуле S = πr^2; 7) 81; 8) 9; 9) 3; 10) $S_{\text{ост}} = S_{\text{кр}} - S_{\text{сек}}$ → $S_{\text{кр}}$ = 100π ≈ 314; $S_{\text{сек}} = \frac{100\pi}{360} * 60$ ≈ 52,3 → $S_{\text{ост}}$ ≈ 314 – 52,3 ≈ 261,7.

После проведения математического диктанта, учитель выводит на экран слайд с правильными ответами, после чего учащиеся проверяют свои ответы и обсуждают правильность выполнения каждого задания. В случае, если диктант написан неудовлетворительно, учитель принимает решение о повторении западающих тем.

Следующим этапом проведения урока является ознакомление учащихся с заданием, которое им необходимо выполнить самостоятельно.

Учитель: «Откройте учебник на странице 135, параграф №2. Прочитайте внимательно пункт 61 «Понятие конуса». Вам необходимо в течение следующих 10 минут записать в тетрадь определения: «Конус», «Коническая поверхность». Перенести в тетрадь рисунок 149, подписать элементы конуса. Перенести в тетрадь рисунок 151 и записать определение осевого сечения. Определить вид треугольника, полученного осевым сечением конуса. Ответ обосновать. Изобразить осевое сечение конуса. Рассмотреть сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси. Доказать, что радиус сечения $r_1 = \frac{PO_1}{PO} * r$ Какой признак используется при доказательстве?». Перед тем, как учащиеся приступят к выполнению задания, учитель раздаёт листочки с таблицей 4 для заполнения хода выполнения заданий.

Таблица 4 – Раздаточный материал для урока №1

№ задания	Формулировка задания	Отметка о выполнении
1	Прочитать пункт 61 «Понятие конуса», с. 135-136	
2	Записать в тетрадь определения понятий «конус», «коническая поверхность».	
3	Перенести в тетрадь рисунок 149, подписать элементы конуса	
4	Определить вид треугольника, полученного осевым сечением конуса. Ответ обосновать. Изобразить осевое сечение конуса.	
5	Рассмотреть сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси. Доказать, что радиус сечения $r_1 = \frac{PO_1}{PO} * r$ Какой признак подобия используется при доказательстве?	
6	Перенести в тетрадь рисунок 153 на странице 136. Записать определение боковой поверхности конуса. Изучить и записать подробно вывод формулы площади боковой поверхности конуса.	
7	Записать в тетрадь определение полной поверхности конуса. Пояснить полученную формулу площади полной поверхности конуса.	

После выполнения заданий вам необходимо отметить в таблице «плюсом» или «галочкой» выполнение заданий 1 – 5. Проверьте у соседа по парте, верно ли он всё выполнил. После взаимной проверки учащихся, учитель приступает к проверке, проходя по рядам и убедившись, в выполнении всего задания, приступает к озвучиванию следующего, на выполнение которого отводится 7 минут:

Прочитайте внимательно пункт 62 «Площадь поверхности конуса». Запишите определение площади боковой поверхности конуса. Выведете из определения формулу площади боковой поверхности конуса. Перенесите в тетрадь рисунок 153, запишите определение полной поверхности конуса. Запишите в тетрадь определение полной поверхности конуса. Выведете из определения формулу площади конуса. После выполнения заданий вам необходимо отметить в таблице «плюсом» или «галочкой» выполнение заданий 5 – 8. Проверьте у соседа по парте, верно ли он всё выполнил. После взаимной проверки учащихся, учитель приступает к проверке, проходя по рядам и убедившись, в выполнении всего задания, приступает к озвучиванию следующего, на выполнение которого отводится так же 10 минут:

Урок 2. Тема урока: «Конус».

Тип урока: урок общения.

Цель урока – закрепить изученный материал, провести проверку знаний по теоретическому материалу темы.

Этап 3 теории формирования умственных действий: учащиеся проговаривают вслух тот материал, что подлежит усвоению.

Урок общения начинается сразу, после завершения урока объяснения. Учащиеся самостоятельно учат теоретический материал, записанный в тетрадях, устраивая взаимную проверку. Для отслеживания результатов, учитель раздаёт заранее подготовленный именной оценочный лист с таблицей 5, который печатается в двух экземплярах (для ученика и учителя), в котором ученик также вписывает свою имя и фамилию.

Таблица 5 – Раздаточный материал для урока №2

№ темы	Подлежащий усвоению материал	Оценка
1	Понятие конуса, его элементы.	
2	Площадь поверхности конуса.	

На изучение каждой темы и взаимной проверки учитель отводит время, ориентируясь на уровень знаний и темпа работы класса. Озвучивает временные рамки учащимся до начала выполнения заданий. После того, как учащиеся сообщают о готовности и после того как проведена взаимная проверка и оценивание друг друга, учитель приступает к опросу учащихся и выставлении оценок в свои оценочные листы.

Урок 3. Тема урока: «Конус».

Тип урока: урок решения задач.

Цель урока – закреплять умения решения задач разных типов.

Этап 4 теории формирования умственных действий: при решении задач учащиеся проговаривают про себя выполняемое действие.

На уроке решения задач, учитель определяет минимальное количество заданий, необходимых выполнить учащимся самостоятельно. Проговаривает уровень сложности и критерии оценивания. Задания могут быть взяты как из учебника, так и из других источников.

Для самостоятельного решения можно предложить опорные задачи из учебника №№ 547, 550, 562, 563, 567. Для работы в парах, опорные задачи: 548, 551, 554, 555 (один решает под буквой, а, другой под буквой б), 557 общая для каждой пары. Дополнительная задача (повышенной сложности) в учебнике под номером 571. Дополнительные задачи на получение дополнительной оценки, либо для учащихся, которые справились раньше остальных, можно приготовить на карточках самостоятельно.

Задачи из учебника Л.С. Атанасяна [1] для самостоятельного решения:

№ 547. «Высота конуса равна 15 см, а радиус основания равен 8 см. Найдите образующую конуса» [1].

Решение: AB = $\sqrt{AO^2 + OB^2}$ = $\sqrt{255 + 64}$ = $\sqrt{289}$ = 17. Ответ: 17 см.

№550. «Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. Найдите площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см» [1].

Решение: $\sqrt{AB^2 + AC^2}$ = 10 → AB$\sqrt{2}$ = 10 → AB = 5$\sqrt{2}$ → AO = 5 → AO *OB = 25. Ответ: 25 $см^2$.

№562. «Угол между образующей и осью конуса равен 45°, а образующая равна 6,5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса» [1].

Решение: sin 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ → $S_{бок} = \pi * \frac{6,5 * \sqrt{2}}{2} * 6,5 = \frac{169\pi\sqrt{2}}{8}$. Ответ: $\frac{169\pi\sqrt{2}}{8}$ $см^2$.

№563. «Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 $см^2$. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса» [1].

Решение: S = $\frac{1}{2} * 2r * h = r * h$ → 0,6 = r * 1,2 → r = $\frac{1}{2}$; $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ = $\sqrt{1,44 + 0,25}$ → l = 1,3; $S_{полн}$ = π · 0,5 (0,5 + 1,3) = 0,9 π. Ответ: 0,9 π $см^2$.

№567. «Найдите образующую усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см» [1].

Решение: «$A_1M = H = 4$, AM = 3 → A_1A = $\sqrt{H^2 + AM^2}$ = $\sqrt{16 + 9}$ = 5» [1].

Ответ: 5 см.

Задачи для работы в парах:

№ 548. «Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания конуса, если: а) α = 30°; б) α = 45°» [1].

Решение:

а) R = AO = AS cos 30° = $\frac{12\sqrt{2}}{2}$ $6\sqrt{2}$; $S_{осн}$ = $\pi(6\sqrt{3})^2$ = 36 · 3 · π = 108π.

б) R = 12 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $6\sqrt{2}$; $S_{осн}$ = $\pi(6\sqrt{2})^2$ = 72π. Ответ: а) 108 π $см^2$; б) 72 π $см^2$.

№ 551. «Осевое сечение конуса – правильный треугольник со стороной 2r. Найдите площадь сечения, проведённого через две образующие конуса, угол между которыми равен: а) 30°; б) 45°» [1].

Решение:

а) $S = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \frac{1}{2} = r^2$;

б) $S = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = r^2\sqrt{2}$.

Ответ: а) r^2; б) $r^2\sqrt{2}$

№ 554. «Образующая конуса равна l, а радиус основания равен r. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающего дугу: а) в 60°; б) в 90°» [1]. (рисунок 24).

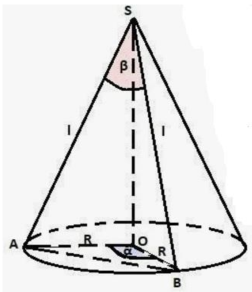


Рисунок 24 – Сечение конуса

Решение:

а) BC = r. PK = $\sqrt{PO^2 + OK^2}$; PK = $\sqrt{CP^2 + CK^2}$; PK = $\sqrt{l^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2}$;

$S_{сеч} = \frac{1}{2} * r * \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2} = \frac{r\sqrt{4l^2 - r^2}}{4}$;

б) CB = $r\sqrt{2}$; PK = PK = $\sqrt{l^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}}$; $S_{сеч} = \frac{1}{2} * r * \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2l^2 - r^2}}{2}$

Ответ: а) $\frac{r\sqrt{4l^2 - r^2}}{4}$; б) $\frac{r\sqrt{2l^2 - r^2}}{2}$

№ 555. «Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающего дугу 60°, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол: а) 30°; б) 45°» [1] (рисунок 24).

Решение: а) $PA = \frac{h}{\sin 30°}$; BC_1 = 2CA; $\frac{CA}{OA} = tg30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; CA = $\frac{OA}{\sqrt{3}}$ → CA =

$= \frac{h\sqrt{3}}{3} = h$; BC = 2h. $S_{сеч} = \frac{1}{2} * BC * PA = \frac{1}{2}\, 2h * 2h$ = 2*100= 200;

б) PA = $h\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$; OA = h, CA = $\frac{h}{\sqrt{3}}$; BC = $\frac{2h}{\sqrt{3}}$;

$S_{сеч} = \frac{1}{2} * \frac{2h}{\sqrt{3}} * h\sqrt{2} = \frac{h^2}{3} * \sqrt{6} = \frac{100}{3}\sqrt{6}$. Ответ: а) 200 $см^2$; б) $\frac{100}{3}\sqrt{6}$ $см^2$;

№ 557. «Две секущие плоскости перпендикулярны к оси конуса. Докажите, что площади сечений конуса этими плоскостями относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до этих плоскостей» [1] (рисунок 25).

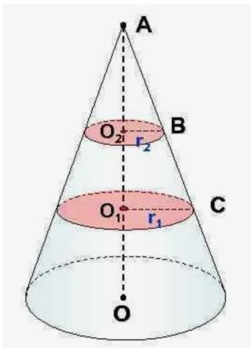


Рисунок 25 – Секущие конуса

Доказательство: $\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{PO_1}{PO_2}$; $\frac{r_1}{r_2} = \frac{PO_1}{PO_2}$; $S_1 = \pi r_1{}^2$; $S_2 = \pi r_2{}^2 \rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{PO_1{}^2}{PO_2{}^2}$; $\frac{\frac{\pi}{S_2}}{\pi} = \frac{PO_1{}^2}{PO_2{}^2}$ Ч.т.д.

Критерии оценивания (задачи для самостоятельного решения):

Отметка «2» выставляется, если решено 0 – 2 задачи;

Отметка «3» выставляется, если верно решено 3 задачи;

Отметка «4» выставляется, если верно решено 4 задачи

Отметка «5» выставляется, если решены все 5 задач или 4 задачи из основных плюс дополнительная задача № 571.

Критерии оценивания (задачи в парах):

Отметка «2» выставляется, если решено 0 – 2 задачи;

Отметка «3» выставляется, если верно решено 3 задачи;

Отметка «4» выставляется, если верно решено 4 задачи;

Отметка «5» выставляется, если верно решены все пять задач.

Для взаимной проверки, ответы и критерии оценивания, учащиеся берут у учителя после того, как обменяются оценочными листами, в которых приведены таблицы 6 и 7 с заполненными в них ответами.

Таблица 6 - Оценочный лист №1 задач для самостоятельного решения

Фамилия Имя ________________________________		
№ задачи	Ответ	Отметка « + » или « - »
547		
550		
553		
562		
563		
571		
Итоговая оценка:		

Таблица 7 – Оценочный лист №2 задач для самостоятельного решения

Фамилия Имя ________________________________		
№ задачи	Ответ	Отметка « + » или « - »
548		
551		
554		
555		
557		
Итоговая оценка:		

Карточки с дополнительными заданиями учитель раздаёт на своё усмотрение (по одной, либо все три), оценивает отдельно и так же на своё усмотрение.

Урок 4. Тема урока: «Конус».

Тип урока: самостоятельная работа.

Цель урока – выявить уровень усвоения изученного материала посредством проведения самостоятельной работы.

Этап 5 теории формирования умственных действий: автоматическая отработка выполняемого действия.

Урок самостоятельной работы или зачёт учитель проводит по окончанию всех трёх этапов изучения темы.

Самостоятельная работа может быть представлена в виде задач по вариантам, либо комбинированная работа, состоящая из теоретических вопросов и нескольких задач.

Например,

Задача 1. Напишите формулу для вычисления площади боковой поверхности конуса.

Задача 2. Напишите формулу для вычисления полной поверхности конуса.

Задача 3. Дайте определение понятия «конус», перечислите элементы конуса.

Задача 4. Решите задачу: «На окружности основания конуса с вершиной P выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:2. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP, если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 7» [45] (рисунок 26).

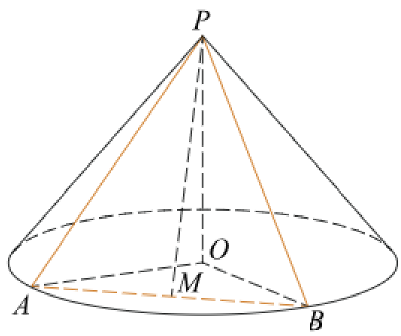


Рисунок 26 – Сечение конуса.

Задача 5. Решите задачу: «Дан прямой круговой конус с вершиной М. Осевое сечение конуса - треугольник с углом 120° при вершине М. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку М проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих. Найдите площадь сечения» [45] (рисунок 27).

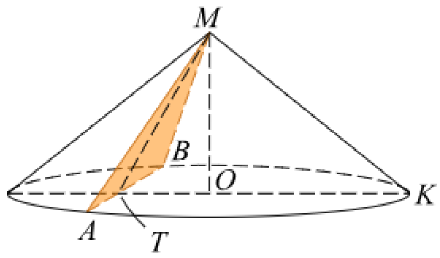


Рисунок 27 – Сечение конуса, перпендикулярное образующей.

Задача 6. Решить задачу: «Радиус основания конуса с вершиной S и центром O равен 13, а его высота равна $3\sqrt{41}$. Точки А и В – концы образующих, M – середина SA, N – точка плоскости основания такая, что MN параллельна SB. Докажите, что ANO – прямой угол» [45].

Приведем решения к задачам №4-6.

Решение к задаче 4. Построим конус с центром основания в точке О и вершиной Р. Сечение АВР – равнобедренный треугольник. РМ – высота треугольника АВР. Рассмотрим треугольник АОМ: АО = ОВ = 6. $\angle AOB$ = 120° (центральный угол, опирающийся на дугу 120°). ОМ = 3 (катет, лежащий против угла 30°), по теореме Пифагора найдём AM = $\sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$ →AB = $6\sqrt{3}$. Отрезок РМ – высота треугольника АРВ. По теореме Пифагора: $PM^2 = 49 - (3\sqrt{3})^2 = 49 - 27 = 22 \rightarrow PM = \sqrt{22}$.

Площадь искомого сечения $S = \frac{1}{2} PM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{22} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{66}$.

Ответ: $3\sqrt{66}$;

Решение к задаче 5. Построим сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих. Пусть треугольник AMB – искомое сечение, перпендикулярное образующей МК, где АМ и ВМ – образующие конуса и равны $2\sqrt{3}$. Пусть Т – точка его пересечения с диаметром, проходящим через точку К. В треугольнике МТК $\angle$К = 30° $\to$ МТ = 2. Рассмотрим Δ АМТ: $\angle$АТМ = 90° $\to$ АТ = $\sqrt{12-4}$ = $2\sqrt{2}$ $\to$ АВ = $4\sqrt{2}$. $S_{AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot MT$ = $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$. Ответ: $4\sqrt{2}$.

Решение к задаче 6. Доказательство: Отрезок *MN* — средняя линяя треугольника *ASB*, так как он проходит через середину стороны *AS* параллельно стороне *BS*. Поэтому точка *N* — середина *AB*, и тогда отрезки *ON* и *AB* перпендикулярны, поскольку отрезок *ON* лежит на диаметре основания конуса, а диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Таким образом, угол *ANO* прямой. Что и требовалось доказать.

Для получения «зачёта» старшеклассникам необходимо минимум ответить на два любых вопроса и решить любые две задачи.

По теме «Конус» была разработана контрольная работа из четырех задач на вычисление и одной на доказательство. Приведем вариант работы.

Вариант 1

Задача 1. «Объём конуса равен 12 π, а радиус его основания равен 3. Найдите высоту конуса» [53].

Задача 2. «Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей – 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса» [40].

Задача 3. «Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения» [45].

Задача 4. «Радиус основания конуса с вершиной *S* и центром основания *O* равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка *M* – середина образующей *SA* конуса, а точки *N* и *B* лежат на основании конуса, причём прямая *MN* параллельна образующей конуса *SB*. Найдите угол между прямой *BM* и плоскостью основания конуса, если *AB* = 8» [45].

Задача 5. «Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4:7. Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33:32, считая от вершины конуса» [45].

Указания к решению задач варианта 1: Задача 1. H = $\frac{3V}{\pi R^2}$; h = $\frac{3*12\pi}{9\pi}$ = 4.

Задача 2: h = $\sqrt{100-36}$ = 8 , $S_{сеч}$ = 0,5·12·8 = 48. Задача 3. SH = $\sqrt{SA^2-AH^2}$ =

= 4$\sqrt{10}$; OH = $\sqrt{OA^2-AH^2}$ = 4; OM = $\frac{OH*SO}{SH}$ = $\frac{6\sqrt{10}}{5}$. Задача 4. Cos угла OAB =

= $\frac{AN}{AO}$ = $\frac{4}{5}$; BH = $\sqrt{AH^2+AB^2-2AH*AB*\cos OAB}$ = $\frac{\sqrt{153}}{2}$. MH = $\frac{\sqrt{51}}{2}$, tg MBH =

= $\frac{MH}{HB}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ → угол MBH = 30°. Задача 5. Пусть радиус основания равен 4t, тогда

высота конуса равна 7t. По теореме Пифагора в треугольнике ABO найдём AB= t$\sqrt{65}$. Далее воспользуемся свойством секущих: AK · t$\sqrt{65}$ = 3t · 11t →

AK = $\frac{33\sqrt{65}}{65}$t. Тогда: AK : KB = $\frac{33\sqrt{65}}{65}$: $\frac{65\sqrt{65}-33\sqrt{65}}{65}$ = 33:32. Что и требовалось

доказать.

Опишем критерии оценивания письменной контрольной работы.

Работа оценивается отметкой «отлично», если набрано 8 баллов; отметкой «хорошо», если набрано 6-7 баллов; отметкой «удовлетворительно», если набрано 4-5 баллов; отметкой «неудовлетворительно», если набрано менее 4 баллов.

Задания 1-2 оцениваются в 1 балл, если:

− задачи оформлены верно (выполнены все необходимые построения, прописаны условия, решения и ответ);

− задачи решены верно, нет математических ошибок.

Задания 1-2 оцениваются в 0 баллов, если: допущены существенные ошибки, что привели к неверному ответу.

Задания 3-5 оцениваются в 2 балла, если:

- задачи оформлены верно (выполнены все необходимые построения, прописаны условия, решения и ответ);
- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обоснованиях решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Задания 3-5 оцениваются в 1 балл, если:

- задачи оформлены верно (выполнены все необходимые построения, прописаны условия, решения и ответ);
- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;
- допущены одна ошибка или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах.

Задания 3-5 оцениваются в 0 баллов, если: допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Ответы приведены в таблице 8.

Таблица 8 - Ответы и критерии оценивания контрольной работы

1 вариант		
№ задания	ответ	Кол-во баллов
1	4	1
2	48	1
3	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$	2
4	30°	2
5	Ч.т.д.	2

2.2 Элективный курс по теме «Конус в задачах»

Программа элективного курса (ЭК) «Конус в задачах» предназначена для математического профиля. «Курс направлен на расширение и углубление знаний и умений обучающихся 11 класса, развитие у них логического мышления и пространственного воображения, повышение качества подготовки к сдаче ЕГЭ по математике на профильном уровне.

В ходе занятий школьники решают задачи ЕГЭ базового и профильного уровней; также задачи повышенной сложности и олимпиадные задачи по теме «Конус»» [4].

При разработке программы ЭК были использованы материалы факультативных курсов, материалы подготовки к итоговой аттестации по математике [23], [40], [45], [53], [59] - [61].

Цель ЭК «Конус в задачах»:

- «повышение мотивации учащихся к изучению школьного курса геометрии;
- профессиональная ориентация учащихся 11 классов;
- углубление знаний учащихся в области стереометрии, в частности темы «Конус»;
- развитие пространственного воображения учащихся;
- создание условий для саморазвития и самореализации учащихся» [4].

Задачи ЭК «Конус в задачах»:

- «познакомить старшеклассников с историей развития понятия конуса;
- обучать принципам пространственного изображения тел вращения;
- обучать решению различных типов задач, встречающихся в итоговой аттестации, в том числе опорных; решению олимпиадных задач;
- вырабатывать способности к сотрудничеству и коммуникации, развитию логического мышления и творческих способностей,

самостоятельному поиску информации и приобретению знаний при выполнении учебного проекта» [4].

Новизна программы ЭК заключается в рассмотрении актуальных задач различных уровней сложности итоговой аттестации, а также задач ЕГЭ прошлых лет; также в рамках курса предполагается обучение школьников решению олимпиадных задач.

«Практическая значимость программы заключается в подготовке старшеклассников к сдаче итоговой государственной аттестации.

Программа ЭК рассчитана на 17 часов в рамках профильной подготовки в 11 классе (1 ч. в неделю). Учебно-тематическое планирование курса приведено в таблице 9» [4].

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны: «знать основные понятия и теоремы по теме «Конус»; уметь изображать тела вращения; уметь решать задачи на вычисление и доказательство по теме «Конус», входящие в итоговую аттестацию, в том числе опорные; решать олимпиадные задачи» [4].

Таблица 9 – Учебно-тематическое планирование элективного курса «Конус в задачах»

Содержание	Кол-во часов	Виды занятий
1. «Практическое значение изучения курса для учащихся. История развития понятия конуса» [4].	1	Вводное занятие
2. «Решение задач базового уровня и 3. профильного уровня 1 части ЕГЭ» [4].	2	Урок-лекция, Урок-практикум
3. «Решение задач на вычисление 2 части ЕГЭ профильного уровня» [4].	3	Урок-практикум
4. «Решение задач на доказательство 2 части ЕГЭ профильного уровня» [4].	4	Урок-практикум
5. Олимпиадные задачи.	3	Урок-практикум
6. Контрольная работа.	2	Урок самостоятельного решения задач
7. Защита проектов.	2	Учебно-исследовательская конференция
Итого:	17	

Данная программа может быть использована и в общеобразовательных классах. Опишем содержание элективного курса.

Тема 1. Практическое значение изучения курса для учащихся. История развития понятия конуса (1 ч.)

Основная цель – знакомство учащихся с целями и задачами данного элективного курса, организацией занятий, требованиями к усвоению курса, а также формирование мотивации школьников к решения задач различных уровней сложности по теме «Конус».

На вводном занятии учащиеся знакомятся с содержанием курса, получают информацию о практическом применении предлагаемого к изучению материала.

В результате проведённого занятия учащиеся должны проявить интерес к изучению объёмных тел, в том числе конуса, осознать необходимость научения решения задач различного уровня сложности.

Тема 2. Решение задач ЕГЭ базового уровня и профильного 1 части (2 ч.)

Основная цель - повторить с учащимися определение конуса, его элементов и сечения; повторить формулы на вычисление площадей и объёма конуса; разобрать решение задач базового и профильного (1 части) уровней, встречающихся в едином государственном экзамене.

На первом уроке – лекции предоставлены теоретические сведения по теме «Конус» из трёх разных учебников, на своё усмотрение, учитель может использовать все или только два, за исключением учебника их программы обучения.

На втором и третьем уроках учащиеся разберут различные задачи на вычисление площадей и объёма конуса. Для этого в программе элективного курса представлены по пять задач: ЕГЭ базового уровня, ЕГЭ профильного уровня 1 части; ЕГЭ профильного уровня 1 части прошлых лет (2013 - 2020гг); Сборника задач по геометрии Литвиненко В.Н. [22]. На своё усмотрение, учитель может рассмотреть решение всех или каких-то отдельных задач.

В результате изучения данной темы учащиеся должны научиться решать задачи на вычисление базового и профильного (1 части) уровней.

Тема 3. Решение задач на вычисление 2 части ЕГЭ профильного уровня (3 ч.)

Основная цель – разобрать с учащимися задачи на вычисление единого государственного экзамена профильного уровня (второй части), собранные из различных источников подготовки учащихся к сдаче итоговой аттестации: Сборники задач Ященко И.В., Лысенко Ф.Ф., открытый банк заданий сайта ФИПИ, сайт «Сдам ГИА: решу ЕГЭ» и других источников.

На изучение данной темы в курсе представлены 12 задач (по 3 на каждый урок).

В результате изучения данной темы учащиеся должны умень решать различные задачи на вычисление профильного уровня повышенной сложности.

Тема 4. Решение задач на доказательства 2 части ЕГЭ профильного уровня (4 ч.)

Основная цель – разобрать с учащимися задачи на доказательства единого государственного экзамена профильного уровня (второй части), собранные из различных источников подготовки учащихся к сдаче итоговой аттестации: Сборники задач Ященко И.В., Лысенко Ф.Ф., открытый банк заданий сайта ФИПИ, сайт «Сдам ГИА: решу ЕГЭ» и других источников.

На изучение данной темы в курсе представлены 12 задач (по 3 на каждый урок).

В результате изучения данной темы учащиеся должны умень решать различные задачи на доказательства профильного уровня повышенной сложности.

Тема 5. Олимпиадные задачи (3 ч.)

Основная цель - развитие особого, творческого подхода к решению задач стереометрии, развитие математического мышления и исследовательских умений.

При изучении данной темы учащиеся знакомятся с формулировками и решениями олимпиадных задач.

В результате изучения данной темы учащиеся должны научиться решать нестандартные задачи на нахождение площади сечения и комбинацию тел: конуса и цилиндра, конуса и шара.

Контрольная работа (2 ч).

Основная цель - закрепление знаний учащихся по пройденному курсу.

Учащимся предлагается решить контрольную работу, состоящую из 5 заданий из тем 2 - 4.

По результатам контрольной работы учащимся выставляются оценки по пятибалльной шкале.

Защита проектов (2 ч).

Старшеклассники на учебно-исследовательской конференции защищают проекты.

Задачи базового уровня «Стереометрия», «Прикладная стереометрия».

Задача 1. «В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём сосуда равен 120 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах» [40] (рисунок 28).

Рисунок 28 – Конус

Решение. «Меньший конус подобен большему с коэффициентом $\frac{1}{2}$ высоты. Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия.

Поэтому объём меньшего конуса равен $(\frac{1}{2})^3$ = 0,125 объёма большего конуса. Таким образом, объём налитой жидкости равен 120 · 0,125 = 15» [40].

Ответ: 15.

Задача 2. «Объём конуса равен 25 π, а его высота равна 3. Найдите радиус основания конуса» [40]. (рисунок 29)

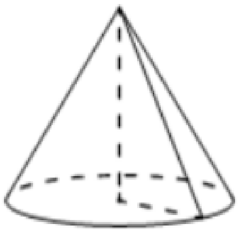


Рисунок 29 – Конус

Решение: Объём конуса можно вычислить по формуле V = $\frac{1}{3} S_{осн} \cdot$ h, где S- площадь основания, h – высота конуса. Формула площади круга: S = π R^2. Тогда Объём конуса V = $\frac{1}{3}$ π $R^2 \cdot$ h. Выразим радиус из формулы и получим: $R^2 = \frac{3\,V}{\pi\,h} = \frac{3 \cdot 25\,\pi}{\pi \cdot 3}$ = 25, откуда R = $\sqrt{25}$ = 5. Ответ: 5.

Задача 3: «Даны два конуса. Радиус основания и высота первого конуса равны соответственно 6 и 5, а второго – 3 и 2. Во сколько раз объём первого конуса больше объёма второго?» [53] (рисунок 30).

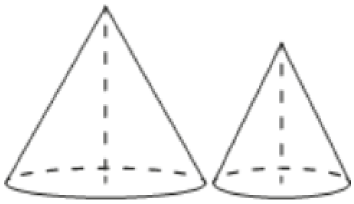


Рисунок 30 – Два конуса

Решение: Объём конуса можно вычислить по формуле V = $\frac{1}{3} S_{осн} \cdot$ h, где S- площадь основания, h – высота конуса. Формула площади круга: S = π R^2.

Тогда Объём конуса V = $\frac{1}{3}$ π $R^2\cdot$ h. Найдём отношение первого конуса ко второму: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 5}{\frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot\ 2} = \frac{36\cdot 5}{9\cdot 2}$ = 2 · 5 = 10. Ответ: 10.

Задача 4: «Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 3 и 6, а второго – 4 и 9. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?» [40] (рисунок 31).

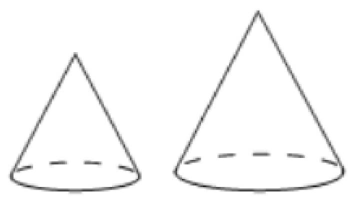


Рисунок 31 – Два конуса

Решение. «Площадь боковой поверхности конуса можно найти по формуле: S = πrl. Найдём площадь боковой поверхности первого конуса: S_1 = π · 3 · 6 = 18π. Найдём площадь боковой поверхности второго конуса: S_2 = π · 4 · 9 = 36π. Найдём отношения двух площадей этих конусов: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{36\pi}{18\pi}$ = 2» [40]. Ответ: 2.

Задача 5: «Объём конуса равен 27. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 1:2, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью» [53] (рисунок 32).

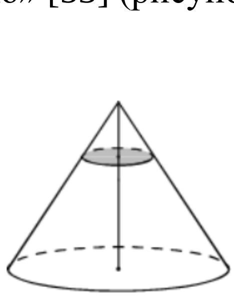


Рисунок 32 – Конус

Решение. «Отношение объемов конусов равно кубу их коэффициента подобия. Точка делит высоту в отношении 1:2, следовательно, высоты конусов относятся как 1:3, поэтому их объемы относятся как 1:27. Следовательно, объем отсекаемого конуса равен 27 : 27 = 1» [53]. Ответ: 1.

Задачи 1 части ЕГЭ профильного уровня.

Задача 1: «Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса» [7] (рисунок 33).

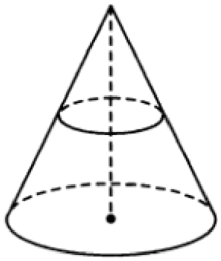


Рисунок 33 – Конус

Решение. «Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем меньшего конуса в восемь раз меньше объема большего конуса.

$\frac{V_1}{V_2} = = (\frac{1}{2})^3 = \frac{16}{8} = 2$» [7]. Ответ: 2.

Задача 2: «Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?» [45] (рисунок 34).

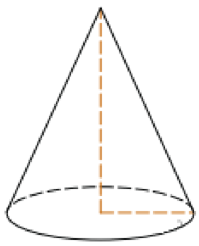


Рисунок 34 – Конус

Решение. «Объём конуса можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$, где S- площадь основания, h – высота конуса. При уменьшении высоты в 3 раза объем конуса также уменьшится в 3 раза» [45].

Ответ: 3.

Задача 3: «Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на π.» [45] (рисунок 35)

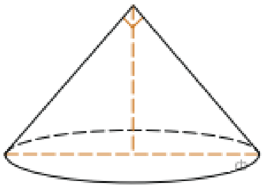


Рисунок 35 – Осевое сечение конуса

Решение. «В треугольнике, образованном радиусом основания r, высотой h и образующей конуса l, углы при образующей равны, поэтому высота конуса равна радиусу его основания: h = r. Тогда объем конуса, деленный на π вычисляется следующим образом:

$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot$ r $= \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$» [45]. Ответ: 9.

Задачи на вычисление 2 части ЕГЭ профильного уровня.

Задача 1. «Различные точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок AB является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60°» [45].

Найдите объём тетраэдра SABC, если SC = 1, cos $\angle$ASC = $\frac{2}{3}$.

Решение. Построим конус с центром основания в точке O и вершиной S. AB – диаметр. $\angle$SAB = 60°. (рисунок 36)

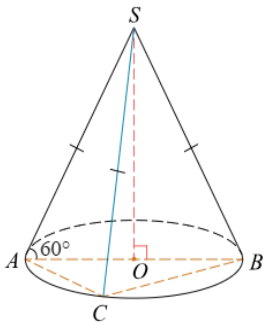


Рисунок 36 – Конус

По условию, $\cos \angle ASC = \frac{2}{3}$. Тогда применив теорему косинусов получим: $\frac{2AB^2 - AC^2}{2AB^2} = \frac{2}{3}$, $3AC^2 = 2AB^2 = 2SC^2 = 2$ откуда $AC = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Далее, $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. $\leftrightarrow BC = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Отрезок SO – высота тетраэдра. $SO = SA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Окончательно, найдём объём тетраэдра: $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{36}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{36}$

Задача 2. «На окружности основания конуса с вершиной P выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:2.

Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP, если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 7» [45].

Решение: Построим конус с центром основания в точке O и вершиной P. Сечение ABP – равнобедренный треугольник. PM – высота треугольника ABP (рисунок 37).

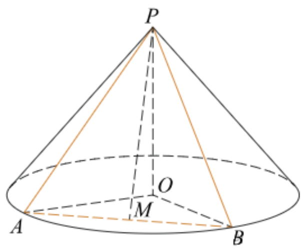


Рисунок 37 – Сечение конуса.

Рассмотрим треугольник AOM: AO = OB = 6. $\angle AOB = 120°$ (центральный угол, опирающийся на дугу 120°). OM = 3 (катет, лежащий против угла 30°), по теореме Пифагора найдём $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3} \rightarrow AB = 6\sqrt{3}$. Отрезок PM – высота треугольника APB. По теореме Пифагора: $PM^2 = 49 - (3\sqrt{3})^2 = 49 - 27 = 22$

$\rightarrow$ PM = $\sqrt{22}$. Площадь искомого сечения $S = \frac{1}{2}$ PM $\cdot$ AB $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{22} \cdot 6\sqrt{3} =$ $= 3\sqrt{66}$. Ответ: $3\sqrt{66}$

Задача 3. «Радиус основания конуса с вершиной S и центром O равен 13, а его высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B – концы образующих, M – середина SA, N – точка плоскости основания такая, что MN параллельна SB.

Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания, если AB = 10.

Решение. Построим конус с центром основания в точке O и вершиной S. Проведём высоту OS. M – середина SA» [61]. (рисунок 38)

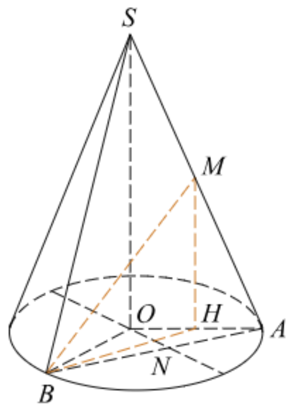


Рисунок 38 – Конус

Проведём в плоскости SOA отрезок MH параллельно SO, тогда MH – средняя линия треугольника BOA, а тогда угол между MB и плоскостью основания это угол MBH. Заметим, что BH – медиана треугольника OBA и воспользуемся формулой для длины медианы:

$$BH = \frac{1}{2}\sqrt{2BO^2 + 2AB^2 - OA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 169 + 2 \cdot 100 - 169} = \frac{1}{2}\sqrt{369} = \frac{3\sqrt{41}}{2}.$$

Тем самым, треугольник BHM прямоугольный и равнобедренный, поэтому угол MBH равен 45°. Ответ: 45°.

Задача 4. «В конус вписан шар. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания конуса, если отношение объёма конуса к объёму вписанного шара равно $\frac{9}{4}$, а отношение радиуса шара к радиусу основания конуса меньше $\frac{3}{5}$ » [45].

Решение. «Построим шар, вписанный в конус (рисунок 39) и осевое сечение конуса – треугольник ABC (рисунок 40).

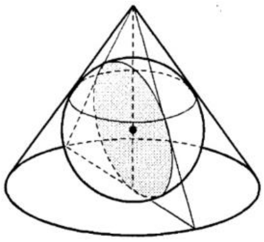


Рисунок 39 – Шар, вписанный в конус

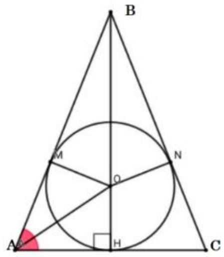


Рисунок 40 – Сечение конуса

Рассмотрим Δ ABC – осевое сечение данного конуса (равнобедренный треугольник), тогда точка O – центр вписанного шара, точка H – центр основания конуса, OH = OM = ON = r, AH = HC = R, ∠A – искомый угол между образующей и основанием конуса» [45]. Точка O является центром вписанной окружности в треугольнике ABC → точка O – точка пересечения биссектрис → $\angle BAO = \angle HAO = \frac{1}{2}\angle A$.

В Δ AHB: $BH = AH \cdot \mathrm{tg}\,\angle A$;

В Δ HAO: $OH = AH \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\angle A}{2} = R \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\angle A}{2}$

$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BH = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot R \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\angle A}{2} = = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\angle A}{2}$

$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi \cdot OH^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \cdot tg^3\,\frac{\angle A}{2}$

$\frac{V_{кон}}{V_{шара}} = \frac{tg\angle A}{4tg^3\frac{\angle A}{2}}$; $\mathrm{tg}\,\angle A = \frac{2tg\frac{\angle A}{2}}{1-tg^2\frac{\angle A}{2}} \rightarrow \frac{V_{кон}}{V_{шара}} = \frac{2tg\frac{\angle A}{2}}{4tg^3\frac{\angle A}{2}(1-tg^2\frac{\angle A}{2})} = \frac{1}{2tg^2\frac{\angle A}{2} - 2tg^4\frac{\angle A}{2}} = k$

$2k \cdot tg^4\frac{\angle A}{2} - 2k \cdot tg^2\frac{\angle A}{2} + 1 = 0$

$D = (2k)^2 - 8k = 4(k^2 - 2k)$

$4(k^2 - 2k) \geq 0 \rightarrow k \geq 2$

$tg^2\frac{\angle A}{2} = \frac{2k \pm \sqrt{(k^2-2k)}}{4k} = \frac{k \pm \sqrt{(k^2-2k)}}{2k} \rightarrow k = \frac{9}{4}$

$tg_1^2 \frac{\angle A}{2} = \frac{2}{3} \to tg_1 \frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82,\ tg_2^2 \frac{\angle A}{2} = \frac{1}{3} \to tg_2 \frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}58.$

Из условия следует, что $\text{tg}\ \frac{\angle A}{2} = \frac{r}{R} < 0{,}6 \to \text{tg}\ \frac{\angle A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \frac{\angle A}{2} = \frac{\pi}{6} \to$ $\angle A = \frac{\pi}{3} = 60°$. Δ ABC – равносторонний, AB = BC = AC → L = 2R = D, $r = \frac{\sqrt{3}R}{3}$

Ответ: 60°.

Задача 5. «Радиус основания конуса равен 6, а его высота 8. Плоскость сечения содержит конус и хорду основания, длина которой равна 4» [45].

Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение. Построим конус и его сечение (рисунок 41).

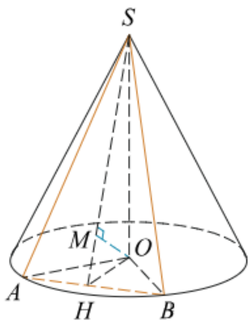


Рисунок 41 – Сечение конуса

Пусть SH – высота и медиана равнобедренного треугольника ASB,

$SH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}$.

Прямые SH и OHперпендикулярны прямой AB, поэтому плоскость SOH перпендикулярна плоскости ASB. Следовательно, расстояние от точки O до плоскости ASB равно высоте OM прямоугольного Δ SOH, проведённой к гипотенузе: $OM = \frac{OH \cdot SO}{SH} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Задача 6. «В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара» [45].

Решение. Построим осевое сечение комбинации цилиндра и шара. (рисунок 42).

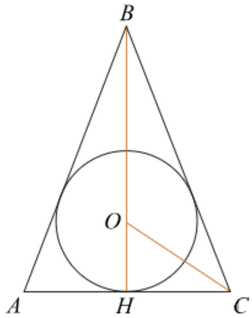


Рисунок 42 – Сечение комбинации цилиндра и шара.

Введём обозначения, как показано на рисунке. Пусть O – центр вписанной окружности, отрезок CO – биссектриса угла ACB и пусть ∠HCO = α, имеем:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OH}{HC} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\angle HCB = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$.

Тогда BH = HC $\operatorname{tg}\angle HCB$ = 4, BC = $\sqrt{3^2+4^2}$ = 5.

Для площадей поверхностей конуса и шара имеем:

$S_{\text{кон}} = \pi R^2 + \pi Rl = 9\pi + 15\pi = 24\pi$,

$S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = 4\pi\,(1{,}5)^2 = 9\pi$.

Тем самым, искомое отношение равно $\frac{24}{9}$ или 8:3. Ответ: 8:3

Задача 7. «Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса- треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих. Найдите площадь сечения» [45].

Решение. Построим сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих (рисунок 43).

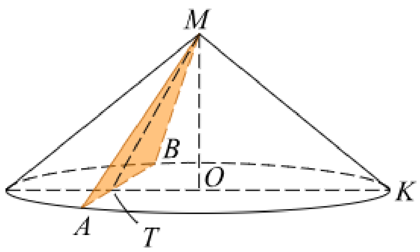


Рисунок 43 – Сечение конуса, перпендикулярное образующей.

Пусть треугольник AMB – искомое сечение, перпендикулярное образующей MK, где AM и BM – образующие конуса и равны $2\sqrt{3}$. Пусть T – точка его пересечения с диаметром, проходящим через точку K.

В треугольнике MTK ∠K = 30° → MT = 2.

Рассмотрим Δ AMT: ∠ATM = 90° → AT = $\sqrt{12-4} = 2\sqrt{2}$ → AB = $4\sqrt{2}$.

$S_{AMB} = \frac{1}{2}\,AB \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$

Задача 8. «Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M – середина BC. Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если AB = 6, BC = 8 и SC = $5\sqrt{2}$» [45].

Решение. Выполним необходимое построение (рисунок 44).

Синусом искомого угла является число $\frac{h}{SA} = \frac{h}{5\sqrt{2}}$, где h – расстояние от точки A до плоскости SBC. Расстояние от точки O до плоскости SBC равно $\frac{h}{2}$ (так как O – середина CA). Это расстояние – высота OT прямоугольного треугольника SOM, которая равна $\frac{SO \cdot OM}{SM}$.

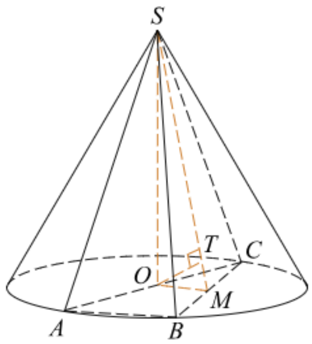


Рисунок 44 – Конус

Далее имеем: OM = $\frac{AB}{2}$ = 3. SM $=\sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{34}$ и SO = $\sqrt{SM^2 - MO^2} = 5$, поэтому $\frac{h}{2} = \frac{SO \cdot OM}{SM} = \frac{15}{\sqrt{34}}$. Следовательно, синус искомого угла равен $\frac{h}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$. Ответ: arcsin $\frac{3}{\sqrt{17}}$

Задача 9. «Дан прямой круговой конус с вершиной М. Осевое сечение конуса – треугольник с углом 120° при вершине М. Образующая конуса равна $6\sqrt{3}$. Через точку М проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих. Найдите расстояние от центра О основания конуса до плоскости сечения» [45].

Решение. Выполним необходимые построения. (рисунок 45)

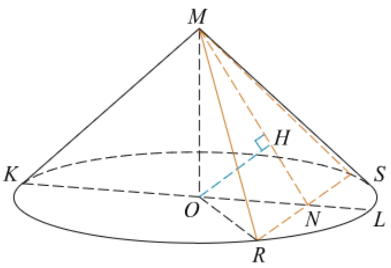


Рисунок 45 – Осевое сечение конуса.

Из центра основания О опустим на MN перпендикуляр OH. Заметим, что OH лежит в плоскости KMN. «Так как прямая KM перпендикулярна плоскости MRS, следовательно, прямая KM перпендикулярна прямой RS, и, по теореме о трёх перпендикулярах, прямая KL перпендикулярна прямой RS. Следовательно, прямая OH перпендикулярна прямой RS» [45].

Таким образом, OH – искомое расстояние.

Имеем: $\angle OMH = \angle KMN - \angle KMO = 30°$, $OH = \frac{1}{2}MO = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Задача 10. «Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 1:3.

Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 5» [45].

Решение. «Выполним построение сечения комбинации конуса и полусферы (рисунок 46).

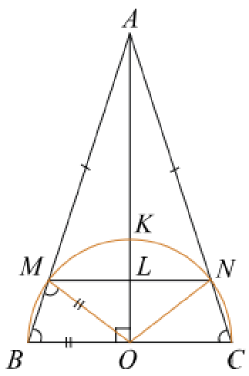


Рисунок 46 – Сечение комбинации конуса и полусферы.

Пусть высота конуса AO пересекается со сферой в точке K, а с отрезком MN – в точке L. Тогда из подобия треугольников ABC и AMN, следует, что $\frac{OL}{AL} = \frac{BM}{AM} = \frac{4}{1}$, откуда OL = $\frac{1}{5}$ AO = $\frac{3}{5}$ R, а значит, KL = OK – OL = $\frac{2}{5}R$.

Часть сферы, заключенная в конусе, представляет собой шаровой сегмент радиусом R = 5 и высотой h = 2, поэтому S = 2πRh = 20π» [57].

Ответ: 20π.

Задача 11. «Грань ABCD куба ABCD$A_1B_1C_1D_1$ является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью $A_1B_1C_1$ является круг, вписанный в четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями ABC и SD_1D, где S– вершина конуса» [40].

Решение. Выполним необходимое построение (рисунок 47). Найдём линию пересечения плоскости SA_1D с плоскостью ABC. Для этого найдём точку пересечения прямой SA_1 с плоскостью ABC – это точка X = SA_1∩OA. Тогда DX – искомая линия пересечения.

«Пусть OH ⊥ DX, тогда по теореме о трёх перпендикулярах SH ⊥ DX. Следовательно, α = ∠SHO – угол между (SA_1D) и (ABC). Δ S$A_1$$O_1$ подобен ΔSXO → $\frac{SO_1}{XO} = \frac{A_1O_1}{XO}$ → $\frac{(1+\sqrt{2})\,a}{(2+\sqrt{2})\,a} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{XO}$ ↔ XO = a. Из Δ DOX по теореме

Пифагора: DX = $\sqrt{\frac{1}{2}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. По свойству высоты, опущенной из вершины прямого угла треугольника, получаем» [40]: OH = $\frac{DO \cdot XO}{DX} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}a}{\sqrt{\frac{3}{2}}a} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

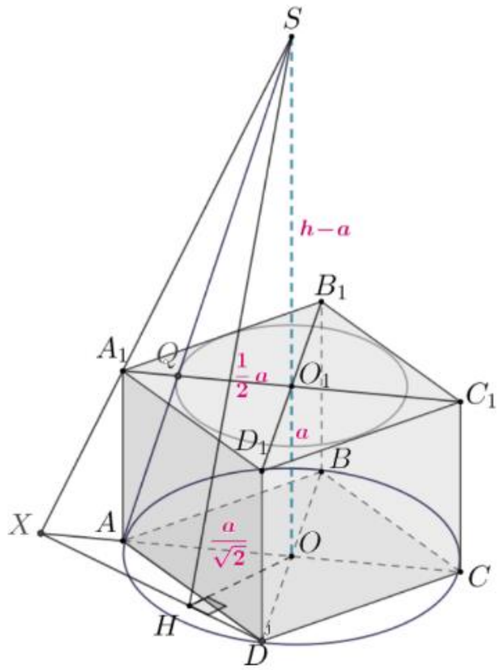


Рисунок 47 – Комбинация конуса и куба

Тогда из Δ SHO: tg α = $\frac{SO}{HO} = \frac{(2+\sqrt{2})a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{6} \rightarrow$ α = arctg ($2\sqrt{3} + \sqrt{6}$).

Ответ: arctg ($2\sqrt{3} + \sqrt{6}$)

Задача 12. «Через вершину S конуса проходит плоское сечение SAB. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в отношении 1:5. Угол SAB = arccos $\frac{3}{\sqrt{58}}$. Найдите объём конуса, если площадь SAB равна 42» [53].

Решение. Выполним необходимое построение. (рисунок 48)

Пусть O – центр основания конуса. Так как A и B делят окружность основания на две дуги, которые относятся как 1:5, то можно меньшую дугу принять за x, а большую за 5x. Тогда вся окружность равна 6x, следовательно, меньшая дуга составляет 60°.

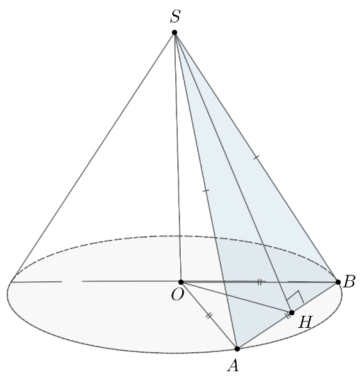


Рисунок 48 – Сечение конуса

Таким образом, ∠AOB = 60° (как центральный угол). Так как AO = BO – радиусы, то Δ AOB равносторонний и AB = AO = BO.

Проведём SH ⊥ AB, SH так же является и медианой. Тогда для прямоугольного треугольника SAH и треугольника SAB имеем:

AH = 3a; AS = $\sqrt{58}a$; $\frac{3}{\sqrt{58}}$ = cos ∠SAB = $\frac{AH}{AS}$ → AB = 2AH = 6a →

→SH = $\sqrt{AS^2 - AH^2}$ = 7a = $\frac{7}{6}$ AB → S_{SAB} = $\frac{1}{2}$ SH · AB = $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6}$ AB · AB = $\frac{7}{12}$ AB^2

Из формулы площади треугольника SAB находим радиус основания конуса: 42 = S_{SAB} = $\frac{7}{12}$ AB^2 → AO = AB = 6$\sqrt{2}$ = 6a → a = $\sqrt{2}$.

Тогда по теореме Пифагора в треугольнике SOA: SO = $\sqrt{AS^2 - AO^2}$ = a$\sqrt{22}$ → → SO = 2$\sqrt{11}$. Тогда объём конуса равен $V_{\text{кон}}$ = $\frac{1}{3}$ SO · π · AB^2 = = 48π $\sqrt{11}$. Ответ: 48π $\sqrt{11}$.

Задачи на доказательство 2 части ЕГЭ профильного уровня.

Задача 1. «Различные точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок AB является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60°. Докажите, что cos ∠ASC + cos ∠BSC = 1,5» [45].

Доказательство. Выполним необходимые построения (см. рисунок 36 выше). AB – диаметр. ∠SAB = 60°.

Пусть O – центр основания конуса. Тогда ∠OAS = ∠OBS = 60°, следовательно, треугольник ABS равносторонний. По теореме косинусов,

$$\cos \angle ASC = \frac{AS^2+CS^2-AC^2}{2AS \cdot SC} = \frac{2AB^2-AC^2}{2AB^2}, \ \cos \angle CSB = \frac{CS^2+BS^2-CB^2}{2CS \cdot BS} = \frac{2AB^2-CB^2}{2AB^2}.$$

Заметим, что поскольку угол ACB опирается на диаметр, он равен 90°. Тогда $AC^2 + CB^2 = AB^2$. Тогда $\cos \angle ASC + \angle CSB = \frac{4AB^2-AC^2-CB^2}{2AB^2} = \frac{4AB^2-(AC^2+CB^2)}{2AB^2} = \frac{4AB^2-AB^2}{2AB^2} = \frac{3AB^2}{2AB^2} = 1{,}5$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. «Радиус основания конуса с вершиной S и центром O равен 13, а его высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B – концы образующих, M – середина SA, N – точка плоскости основания такая, что MN параллельна SB. Докажите, что ANO – прямой угол» [61] (см. рисунок 38).

Доказательство. Отрезок MN – средняя линяя треугольника ASB, так как он проходит через середину стороны AS параллельно стороне BS. Поэтому точка N – середина AB, и тогда отрезки ON и AB перпендикулярны, поскольку отрезок ON лежит на диаметре основания конуса, а диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Таким образом, угол ANO прямой. Что и требовалось доказать.

Задача 3. «В конус вписан шар (см. рисунок 39 выше). Докажите, что отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно отношению их объёмов» [45].

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение ABC (см. рисунок 40 выше). Опустим высоту BH ⊥ AC, BH = h – высота конуса; AB = BC = l, значит Δ ABC – равносторонний, отсюда OH = R – радиус вписанной в Δ ABC – окружности; AH = HC = r – радиус основания конуса.

$$\frac{S_{\text{кон}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{\pi r^2+\pi r l}{4\pi R^2} = \frac{r(r+l)}{4R^2};$$

Δ ABH и Δ BOM подобны, поэтому $\frac{AH}{AB} = \frac{OM}{OB} \rightarrow \frac{r}{l} = \frac{R}{h-R}$; rh – rR = Rl, отсюда rh = R (r +l).

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^2 h}{4R^3} = \frac{r\,(r+l)R}{4R^3} = \frac{r\,(r+l)}{4R^2} = \frac{S_{\text{кон}}}{S_{\text{шара}}}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 4. «Радиус основания конуса равен 6, а его высота 8. Плоскость сечения содержит конус и хорду основания, длина которой равна 4. Докажите, что сечение является остроугольным треугольником» [45].

Доказательство. «Построим конус и его сечение (см. рисунок 41 выше).

Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину S и хорду AB = 4, - треугольник ASB. Две стороны сечения это образующие конуса. Они равны, поэтому треугольник SAB равнобедренный. В равных прямоугольных треугольникахSOA и SOB» [45], где O – центр основания конуса, OA = OB = 6, SO = 8, откуда SA = SB = $\sqrt{OB^2 + SO^2}$ = 10.

Тогда в треугольнике SAB угол S наименьший (так как лежит против меньшей стороны), а следовательно, острый. Два других угла равны между собой, поэтому тоже острые. Таким образом, Δ SAB остроугольный.

Что и требовалось доказать.

Задача 5. «Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:5. Докажите, что сечение конуса плоскостью ABP – равнобедренный остроугольный треугольник» [45].

Доказательство. Построим конус с вершиной P и его сечение ABP (см. рисунок 37 выше).

Пусть O – центр основания конуса, M – середина хорды AB. Дуга AB составляет шестую часть окружности основания, поэтому ∠AOB = 60°. Треугольник AOB – равносторонний, следовательно, AB = AO = 6.

Треугольник APB – искомое сечение. AP = PB, как образующие конуса. Треугольник равнобедренный, значит, его углы при основании – острые. Но угол P меньше угла B, так как он лежит напротив меньшей стороны, поэтому и угол P тоже острый. Таким образом получается - Δ APB равнобедренный и остроугольный. Что и требовалось доказать.

Задача 6. «Дан прямой круговой конус с вершиной М. Осевое сечение конуса- треугольник с углом 120° при вершине М. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку М проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих. Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный» [45].

Доказательство. Пусть треугольник АМВ – искомое сечение, перпендикулярное образующей МК (см. рисунок 43 выше). Пусть Т – точка его пересечения с диаметром, проходящим через точку К.

В треугольнике МТК ∠К = 30° → МТ = 2, ТК = 4.

В треугольнике МТВ образующая конуса МВ = $2\sqrt{3}$, АВ = 2ТВ = $2\sqrt{12-4}$ = = $4\sqrt{2}$. $AM^2 + BM^2 = 2(2\sqrt{3})^2 = 24 < 32 = (4\sqrt{2})^2 = AB^2$.

Следовательно, ∠АМВ > 90°. Что и требовалось доказать.

Задача 7. «Точки А, В и С лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём А и С диаметрально противоположны. Точка М – середина ВС. Докажите, что прямая SM образует с плоскостью АВС такой же угол, как и прямая АВ с плоскостью SBC» [45].

Доказательство. Выполним необходимые построения (см. рисунок 44 выше).

Проекция точки S на плоскость основания конуса – центр О его основания. Так как ОМ и BS, SM и ВС перпендикулярны, угол наклона SM к АВС – это угол SMO. Этот же угол является углом между прямой ОМ и плоскостью SBC. Угол между прямой АВ и SBC такой же, так как прямые ОМ и АВ параллельны. Что и требовалось доказать.

Задача 8. «Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 1:3. Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 4:1, считая от вершины конуса» [45].

Доказательство. Выполним построение сечения комбинации конуса и полусферы (см. рисунок 46 выше).

Пусть точка A – вершина конуса, точка O – центр, а отрезок AB – диаметр основания. Пусть радиус основания равен R. Рассмотрим осевое сечение конуса ABC, точка M и N – точки пересечения прямых AB и AC со сферой соответственно. Тогда AO = 3R и AB = AC = $\sqrt{AO^2 + BO^2}$ = $R\sqrt{10}$.

Заметим, что треугольник BMO и ABC – равнобедренные с общим углом B, следовательно, они подобны. Значит, $\frac{BM}{BO} = \frac{BC}{AB} = \frac{2R}{R\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, откуда

BM = $\frac{R\sqrt{10}}{5}$. Таким образом, $\frac{AM}{BM} = \frac{AB-BM}{BM} = \frac{4}{1}$. Что и требовалось доказать.

Задача 9. «Грань ABCD прямоугольного параллелепипеда ABCD$A_1B_1C_1D_1$ является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью $A_1B_1C_1$; AB = a, AA_1 = $\sqrt{2}$a. Высота конуса равна h, ребро куба равно a. Докажите, что 3a < h < 3,5a» [45].

Доказательство. Выполним необходимое построение (см. рисунок 47 выше).

Радиус основания конуса равен половине диагонали квадрата ABCD, то есть равен R = $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Радиус окружности, вписанный в $A_1B_1C_1D_1$, равен половине стороны этого квадрата, то есть r = $\frac{a}{2}$. Треугольники SQO_1 и SAO подобны, следовательно, $\frac{SO_1}{SO} = \frac{QO_1}{AO} \rightarrow \frac{h-a}{h} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a}{\sqrt{2}}} \leftrightarrow$ h = (2 + $\sqrt{2}$) a.

Так как 1< $\sqrt{2}$ < 1,5, то h ∈ (3a; 3,5 a). Что и требовалось доказать.

Задача 10. «Через вершину S конуса проходит плоское сечение SAB. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в отношении1:5. Угол SAB = arccos $\frac{3}{\sqrt{58}}$. Докажите, что площадь сечения SAB равна $\frac{7}{12}AB^2$» [53].

Доказательство. Выполним необходимое построение (см. рисунок 48 выше).

Пусть O – центр основания конуса. Так как A и B делят окружность основания на две дуги, которые относятся как 1:5, то можно меньшую дугу принять за x, а большую за 5x. Тогда вся окружность равна 6x, следовательно, меньшая дуга составляет 60°.

Таким образом, ∠AOB = 60° (как центральный угол). Так как AO = BO – радиусы, то Δ AOB равносторонний и AB = AO = BO.

Проведём SH ⊥ AB, SH так же является и медианой. Тогда для прямоугольного треугольника SAH и треугольника SAB имеем:

AH = 3a; AS = $\sqrt{58}a$; $\frac{3}{\sqrt{58}}$ = cos ∠SAB = $\frac{AH}{AS}$ → AB = 2AH = 6a →

→SH = $\sqrt{AS^2 - AH^2}$ = 7a = $\frac{7}{6}$ AB → S_{SAB} = $\frac{1}{2}$ SH · AB = $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6}$ AB · AB =

= $\frac{7}{12}$ AB^2. Что и требовалось доказать.

Задача 11. «Конус вписан в правильную пирамиду. Общая высота пирамиды и конуса равна $\frac{9}{4}$, а радиус вписанной в конус сферы равен 1. Докажите, что данная сфера касается боковых граней пирамиды, причём точки касания лежат на апофемах» [53].

Доказательство. Выполним необходимое построение (рисунок 49).

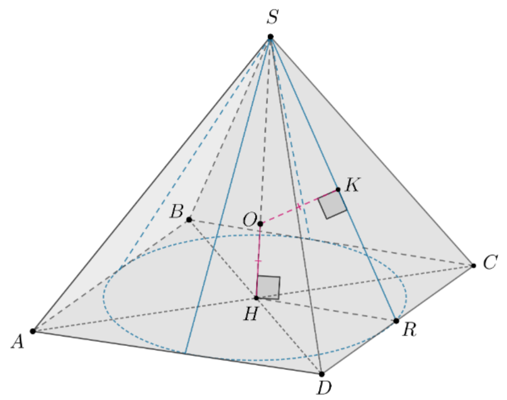


Рисунок 49 – Конус вписан в пирамиду

Пусть дана пирамида SABCD, H – точка пересечения диагоналей основания ABCD. По свойству правильной пирамиды SH – её высота, следовательно, и высота конуса. Пусть O – центр сферы, вписанной в конус, следовательно, лежащий на SH. Тогда OH- радиус этой сферы.

Окружность основания конуса касается стороны CD в её середине. Назовём эту точку касания R. Тогда HR ⊥ CD, HR – радиус основания конуса. Рассмотрим ∆ SHR. Проведём ОК ⊥ SR. Так как HR – проекция ОК на плоскость АВС и HR ⊥ CD, то по теореме о трёх перпендикулярах и ОК ⊥ CD. Следовательно, ОК ⊥ (SCD). Значит, К – точка касания сферы с гранью SCD, лежащая на SR. А так как R – середина CD, то по определению SR – апофема грани SCD. Для других граней пирамиды доказательство аналогично, так как пирамида правильная. Что и требовалось доказать.

Задача 12. «Дан конус с вершиной М, радиус основания равен 6. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB прямые. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, так, что объём пирамиды MABFC наибольший. Докажите, что AF – диаметр» [61].

Доказательство. Выполним необходимые построения (рисунок 50).

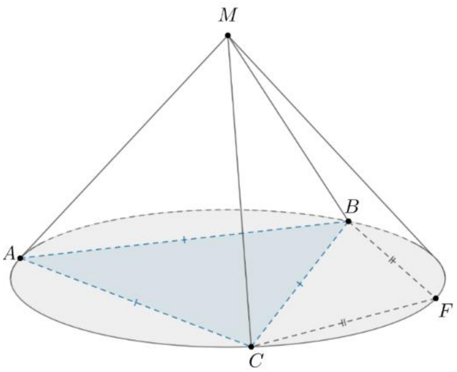


Рисунок 50 – Пирамида, вписанная в конус

«Боковые рёбра пирамиды MABC равны, так как это образующие конуса. Так как плоские углы при вершине M равны, то пирамида правильная, следовательно, ∆ ABC равносторонний.

Рассмотрим основание. Наибольший объём пирамида MABFC имеет тогда, когда наибольшую площадь имеет ∆ BFC. Так как основание этого треугольника фиксировано, то наибольшую площадь он имеет, когда высота к AC наибольшая. Следовательно, точка F – середина дуги BC. Тогда ∠BFC =

=120°, следовательно, ∠ABF = 90°, следовательно, AF – диаметр» [30]. Что и требовалось доказать.

Олимпиадные задачи.

Задача 1. «В конус, высота которого равна h, а радиус основания r, вписать цилиндр, имеющий наибольшую полную поверхность» [19].

Решение. «Обозначив радиус основания искомого цилиндра через x, а его высоту через y, сначала найдём, что $\frac{x}{r} = \frac{h-y}{h}$, отсюда y = $\frac{h(r-x)}{r}$.

Пусть полная поверхность будет z, тогда z = 2πx^2 + 2πxy, или

z = $\frac{2\pi r x^2 + 2\pi h r x - 2\pi h x^2}{r}$. Исследуем функцию f(x) – (h-r)x^2 + hrx. Наибольшее значение она достигнет при x =$\frac{hr}{2(h-r)}$, и тогда получим y = $\frac{h(h-2r)}{2(h-r)}$; z = $\frac{\pi r h^2}{2(h-r)}$; при этом h > 2r» [19].

Задача 2. «У прямого кругового конуса длина образующей равна 5, а диаметр основания равен 8. Найдите наибольшую площадь треугольного сечения, которая может получиться при пересечении конуса плоскостью» [50].

Решение. Выполним необходимое построение (рисунок 51).

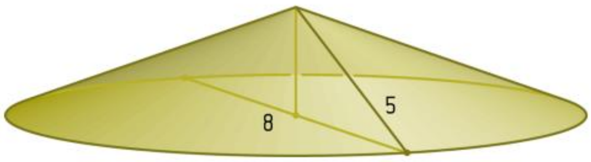


Рисунок 51 – Треугольное сечение конуса

«Две из трёх сторон треугольного сечения конуса – это образующие, а треугольник с двумя сторонами 5 имеет максимальную площадь, когда угол между этими сторонами равен 90◦» [50]. Действительно, если сложить из двух таких треугольников ромб, то легко понять, что его площадь максимальна, когда его угол прямой (рисунок 52).

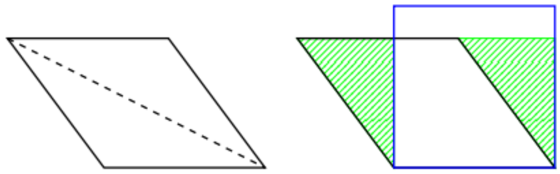


Рисунок 52 – Ромб, полученный методом сложения двух треугольников

Осталось доказать, что у «конуса есть сечение с прямым углом. Диаметр основания равен 8, поэтому в нём можно найти хорду длины $5\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ < 1,5, поэтому $5\sqrt{2}$ < 7,5 < 8). Проведём сечение через эту хорду и вершину конуса – получится треугольник со сторонами 5, 5, $5\sqrt{2}$. Так как $5^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2$, этот треугольник будет прямоугольным (по теореме, обратной теореме Пифагора), его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$» [50]. Ответ: 12,5.

Задача 3. «Около (или внутри) конуса с углом при вершине в осевом сечении равном 2α расположены n шаров радиуса r, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса» [29].

Решение. «Пусть O – центр окружности основания конуса, радиуса R, Q_1 – центр одного из шаров радиуса r, H_1 – точка касания этого шара с плоскостью основания (шар либо внутри, либо вне конуса см. рисунок 53), H_2 – точка касания соседнего шара с плоскостью основания конуса (см. рисунок 54).

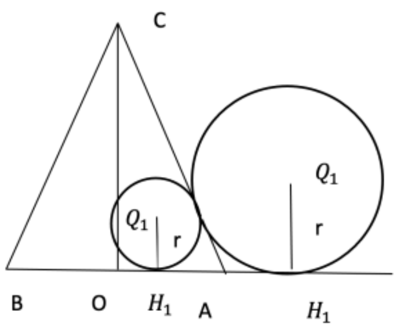


Рисунок 53 – Точка касания шара с плоскостью основания

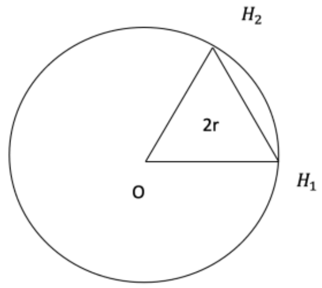


Рисунок 54 – Точка касания соседнего шара с плоскостью основания

Значит, для внешнего касания $AH_1 = \frac{r}{tg\,(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}$ (см. рисунок 40). Так как каждый шар касается двух соседних, то точки касания этих шаров с плоскостью основания конуса расположены в вершинах правильного -угольника, вписанного в окружность с центром в точке О, радиуса OH_1 и стороной, равной 2r » [31]. Поэтому r = OH_1 sin $\frac{\pi}{n}$, где OH_1 = R + AH_1 или OH_1 = R − AH_1. Ответ: R = r $(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)})$.

Приведем примерный вариант контрольный работы для ЭК:

Задача 1. «Объём конуса равен 12 π, а радиус его основания равен 3. Найдите высоту конуса» [53].

Задача 2. «Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей – 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса» [40].

Задача 3. «Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения» [45].

Задача 4. «Радиус основания конуса с вершиной *S* и центром основания *O* равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка *M* – середина образующей *SA* конуса, а точки *N* и *B* лежат на основании конуса, причём прямая *MN* параллельна образующей конуса *SB*. Найдите угол между прямой *BM* и плоскостью основания конуса, если *AB* = 8» [45].

Задача 5. «Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4:7. Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33:32, считая от вершины конуса» [45].

Ответы приведены в Таблице 10.

Таблица 10 – Ответы к заданиям контрольной работы.

№ задания	ответ
1	4
2	48
3	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$
4	30°

Защита проектов.

В качестве тем исследовательских работ старшеклассникам могут быть предложены определенные темы, описанные ниже.

Тема 1. Конусы в природе и технике.

План работы:

- выявить, где встречаются конические поверхности в природе (в биологии, геологии, географии), выяснить почему;
- привести примеры применения конических поверхностей в строительстве, архитектуре, технике.

Рекомендуемая литература: [57], [58].

Тема 2. Конус максимального объёма.

План работы:

- дать определение прямого кругового конуса, развёртки конуса;
- вырезать из нескольких бумажных кругов одинакового диаметра развёртки конусов с различными центральными углами, склеить из них конусы, попытаться определить из какой развёртки получается конус максимального объёма;
- аналитически определить центральный угол β в развёртке боковой поверхности конуса максимального объёма;
- аналитически определить объём конуса максимального объёма.

Рекомендуемая литература: [32], [33], [48].

Тема 3. Конусы вокруг нас.

План работы:

- история изучения тела конус;
- конус и его составляющие;
- конус в моём городе;
- самые известные конусы в мире.

Рекомендуемая литература: [28], [56], [58].

Таким образом, «изучение старшеклассниками этого элективного курса позволит школьникам качественно подготовиться к сдаче ЕГЭ по математике, научившись изображать пространственные фигуры, решать опорные задачи по теме «Конус», задачи базового и профильного уровня, в том числе задачи повышенной сложности, задачи на комбинации тел вращения, развивая тем самым свой логическое мышление и пространственное воображение» [4].

2.3 Результаты педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент проводился на базе МБУ «Школа №2» города Урай Тюменской области. В нашем исследовании принимали участие ученики 11 классов в количестве 40 человек. Учащиеся были поделены на две группы: 1 группа – экспериментальная, 2 группа – контрольная. Исследование проходило в три этапа.

На констатирующем этапе осуществлялось выявление уровня сформированности знаний и умений по теме «Конус». На формирующем этапе, в экспериментальной группе проходила апробация разработанного элективного курса по теме «Конус в задачах». На третьем этапе обе группы вновь получили задание решить геометрические задачи по теме «Конус».

Ниже представлены задачи примерного варианта контрольный работы, используемой при проведении ЭК для констатирующего и контрольного исследования.

Задача 1. «Объём конуса равен 9 π , а радиус его основания равен 3. Найдите высоту конуса» [53].

Задача 2. «Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения» [53].

Задача 3. «Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения» [40].

Задача 4. «Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M – середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причём прямая MN параллельна образующей конуса SB. Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 8$» [45].

Задача 5. «Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4:7. Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33:32, считая от вершины конуса» [61].

В таблице 11 приведены ответы к заданиям.

Таблица 11 – Ответы и максимальное количество баллов за задания

№ задания	ответ	Кол-во баллов
1	3	1
2	12	1
3	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$	2
4	30°	2
5	Ч.т.д.	2

После проведения констатирующего этапа эксперимента, было выявлено, что учащиеся обеих групп находятся на одном уровне знаний в решении геометрических задач по теме «Конус».

В экспериментальной и контрольной группах ни один из учащихся не справился полностью со всеми заданиями. На отметку «хорошо» в экспериментальной группе решили задачи 3 ученика, что составило 15% от общего числа учащихся данной группы. В контрольной группе тот де результат показали 2 учащихся, что составило 10%.

Отметку «удовлетворительно» в экспериментальной группе получили 15 старшеклассников, что составило 75% от общего числа учащихся данной группы. В контрольной группе тот же результат показали 16 старшеклассников, что составило 80% от общего числа группы.

«Неудовлетворительно» решили задачи в экспериментальной и контрольной группе по два старшеклассника, что составило 10% в каждой группе от общего числа испытуемых в группах.

Данные констатирующего исследования были обобщены в таблицу 12 в количественном и процентном соотношении, а также представлены на диаграмме (рисунок 55).

Таблица 12 – Результаты констатирующего этапа исследования

	Эксп. группа		Контр. группа	
Отлично	0%	0 уч.	0%	0 уч.
Хорошо	15%	3 уч.	10%	2 уч.
Удовлетворительно	75%	15 уч.	80%	16 уч.
Неудовлетворительно	10%	2 уч.	10%	2 уч.

После проведения контрольного этапа эксперимента, было выявлено, что учащиеся экспериментальной группы лучше справились с заданиями в решении геометрических задач по теме «Конус». А именно:

В экспериментальной группе в сумме балов отметку «отлично» получил 1 старшеклассник, а в контрольной группе ни один из учащихся не справился полностью со всеми заданиями, как и на констатирующем этапе исследования.

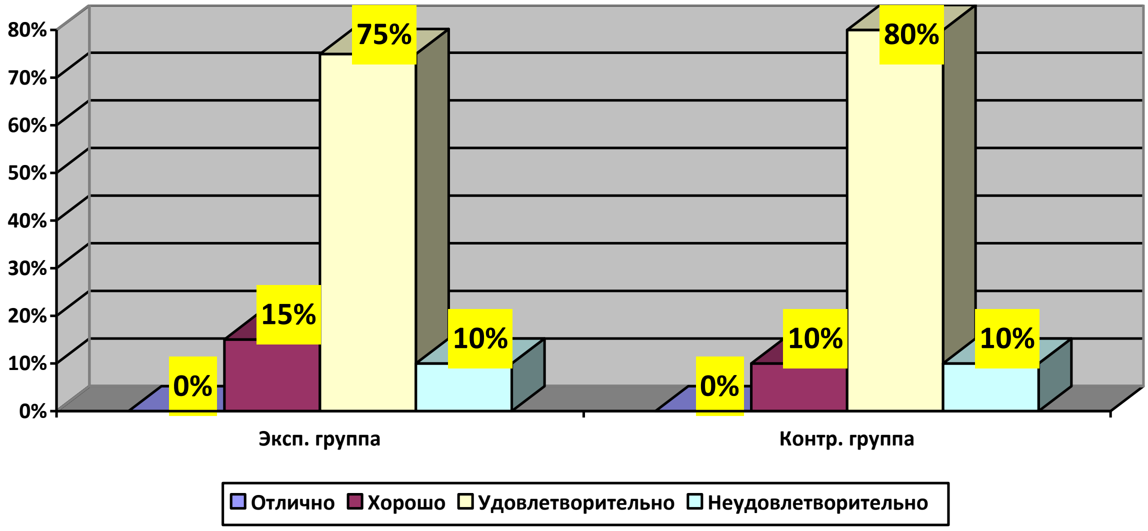


Рисунок 55 – Результаты констатирующего этапа исследования

На отметку «хорошо» в экспериментальной группе решили задачи 12 учеников, что составило 60% от общего числа учащихся данной группы, что на 45% выше констатирующего исследования. В контрольной группе тот же результат показали 3 учащихся, что составило 15%, по сравнению с констатирующим этапом, этот результат на 5% выше.

Отметку «удовлетворительно» в экспериментальной группе получили 3 старшеклассника, что составило 15% от общего числа учащихся данной группы, что на 605 ниже констатирующего исследования. В контрольной группе тот же результат показали 16 старшеклассников, что составило 80% от общего числа группы, и этот результат не изменился с констатирующего этапа.

«Неудовлетворительно» решили задачи в экспериментальной группе ни одного учащегося, а контрольной группе один старшеклассник, что составило 5% от общего числа испытуемых в данной группе и меньше констатирующего исследования на 5%.

Данные контрольного исследования были обобщены в таблицу 13 в количественном и процентном соотношении, а также представлены на диаграмме (рисунок 56).

Таблица 13 – Результаты контрольного этапа исследования

	Эксп. группа		Контр. группа	
Отлично	5%	1 уч.	0%	0 уч.
Хорошо	60%	12 уч.	15%	3 уч.
Удовлетворительно	15%	3 уч.	80%	16 уч.
Неудовлетворительно	0%	0 уч.	5%	1 уч.

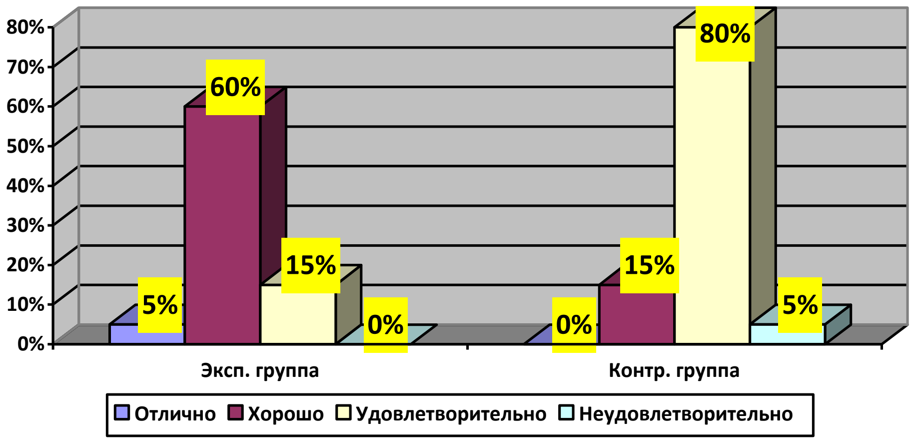


Рисунок 56 – Результаты контрольного этапа исследования

В таблице 14 и на рисунке 57 представлены обобщающие результаты констатирующего и контрольного исследования.

Таблица 14 – Обобщенные результаты исследования

	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
Эксп. гр. конст. иссл.	0%	15%	75%	10%
Эксп. гр. контр. иссл.	25%	60%	15%	0%
Контр. гр. конст. иссл.	0%	10%	80%	10%
Контр. гр. контр. иссл.	0%	15%	80%	5%

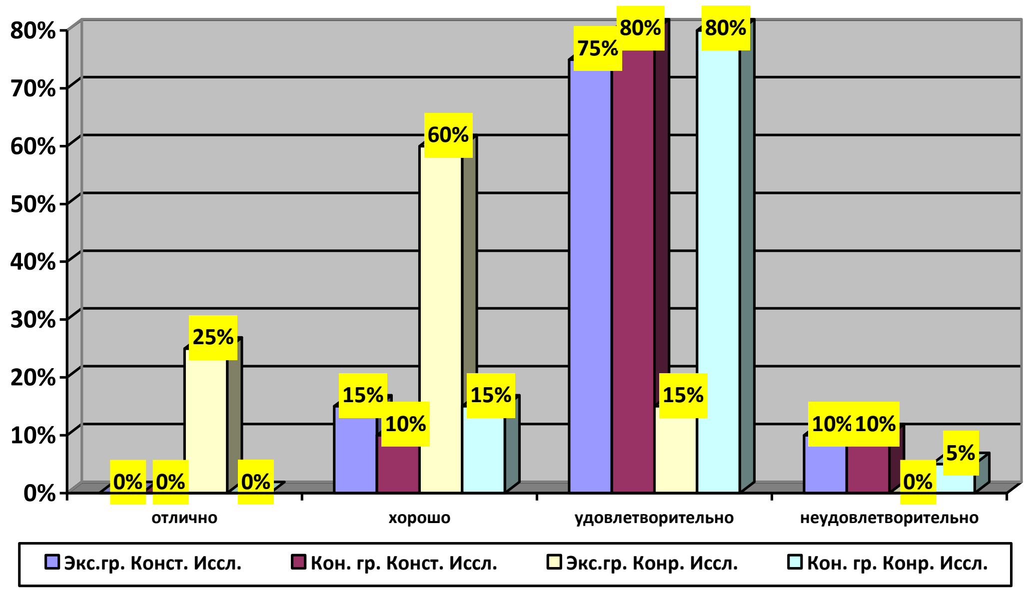


Рисунок 57 – Обобщенные результаты исследования

Таким образом, мы видим, что результаты решения геометрических задач в экспериментальной группе после прохождения элективного курса по теме «Конус» гораздо выше, чем в контрольной группе. Хорошие показатели «отлично» и «хорошо» в среднем увеличились на 35%. В то время как в контрольной группе эти изменения улучшились лишь на 5%. А значит, что предложенный элективный курс помогает учащимся в освоении знаний в решении опорных геометрических задач по теме «Конус».

Выводы по второй главе

Во время занятий по математике целесообразно использование следующих технологий: технология формирования отношения к усвоению правил, определений и теорем, инструментов для алгоритмизации действий учащихся (М. Волович); технология обучения, основанная на решении задач (Р. Хазанкин); технология обучения, основанная на системе эффективных занятий (А. Окунев); технология развивающего обучения (Д.Б. Эльконин, В.В. Давыдов); информационные и коммуникационные технологии.

Изучена технология поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича, которая построена на основе теории П.Я. Гальперина. На её основе спроектированы уроки по темам «Понятие конуса» и «Площади поверхности конуса» по учебнику Л.С. Атанасяна, состоящие из четырёх циклов:

Урок 1. Объяснение нового материала с проведением математического диктанта.

Урок 2. Работа парами. Учитель не говорит, а дети учат пройденный материал.

Урок 3. Урок общения. Работами группами.

Урок 4. Урок самостоятельной работы.

Определено, что преподавание в старших классах целесообразнее выстраивать изменив последовательность уроков: вначале урок общения, потом урок решения задач. Наряду с этим могут появиться совершенно иные «многоурочные» циклы. Появление таких циклов и частота появления зависят главным образом от учителя и от подготовленности класса. Время на изучение материала в ходе многоурочного цикла может быть распределено так: урок объяснения, на котором преподаватель должен познакомить с наиболее важным и наиболее трудным в изучаемом материале; точно указать, какой минимум материала должен быть усвоен к середине следующего урока – времени, с которого преподаватель может приступить к проверке этой части теории; какой материал должен быть самостоятельно изучен и сдан в течение каждого из следующих уроков, отведённых на его изучение. Уроки общения могут начинаться непосредственно после завершения объяснения, то есть на первом уроке цикла. Школьники самостоятельно изучают материал. Учитель постепенно опрашивает учеников, ставя оценки за каждую часть в заранее подготовленные таблицы, регламентирующие последовательность изучения и его темпы.

Разработан элективный курс по теме «Конус в задачах» на 17 часов. Новизна его программы заключается в рассмотрении актуальных задач различных уровней сложности итоговой аттестации, а также задач ЕГЭ прошлых лет; также в рамках курса предполагается обучение школьников решению олимпиадных задач. После его изучения обучающиеся старших классов будут уметь решать задачи на вычисление и доказательство по теме «Конус», входящие в итоговую аттестацию, в том числе опорные; решать олимпиадные задачи.

Проведён педагогический эксперимент по апробации разработанного элективного курса по теме «Конус в задачах».

На констатирующем этапе учащиеся двух групп (экспериментальная и контрольная) решали задачи по теме «Конус», осуществлялось выявление уровня сформированности знаний и умений по теме. На формирующем этапе экспериментальная в экспериментальной группе проходила апробация разработанного элективного курса по теме «Конус в задачах» на 17 часов. На контрольном этапе была проведена повторная проверочная работа, состоящая из задач по теме «Конус».

Установлено, что результаты решения геометрических задач в экспериментальной группе после прохождения элективного курса по теме «Конус» гораздо выше, чем в контрольной группе. Хорошие показатели «отлично» и «хорошо» в среднем увеличились на 35%. В то время как в контрольной группе эти изменения улучшились лишь на 5%. Значит, что предложенный элективный курс помогает учащимся в освоении знаний в решении опорных геометрических задач по теме «Конус».

Заключение

Отметим, что геометрия - это значимый предмет, изучение которого помогает развить пространственное мышление школьника.

В ходе проведенного исследования:

- раскрыто понятие опорной задачи и ее роль при обучении геометрии. Определено, что, рассмотрев трактовки определения «опорной» («ключевой») задачи разных авторов, пришли к выводу, что под ключевыми (опорными) задачами мы будем понимать задачи, содержание или метод решения которых используется для решения других задач. Опорные задачи являются уникальными задачами, помогающими в решении целого ряда более сложных задач. Применение опорных задач способствует поиску более простых, «красивых» решений, отличных от стандартных. Более того, решение подобных задач позволяет развивать логическое мышление старшеклассников;
- представлен анализ теоретического и задачного материала по теме «Конус» в учебниках геометрии для математического профиля. Так, нами были выделены цели и задачи изучения темы «Конус». После проведения содержательного анализа учебников по геометрии 10-11 классов, а затем и сравнительного анализ практического (задачного) материала, был определён в качестве основного учебник Л.С. Атанасяна, на основе которого, впоследствии, были спроектированы уроки по теме «Конус».
- изучены проведенные исследования и опыт работы учителей по обучению решению опорных задач по теме «Конус» на уроках геометрии. Так, определено, что Т.А. Иванова для обучения решению опорных (ключевых) задач рекомендует использовать технологию работы с правилом. Г.И. Саранцев связывает эффективность обучения решению задач с количеством решенных задач; необходимо особое

внимание уделять заключительному этапу решения задачи, на котором надо провести ее исследование, а также анализ процесса поиска способа решения данной задачи. Л.А. Осипенко предлагает несколько способов решения опорных задач. А.Н. Земляков в методических рекомендациях к учебнику А.В. Погорелова для математического профиля при решении опорных задач предлагает использовать методику конфигурации. Е.В. Потоскуев в методическом пособии к задачнику описывает методику обучения решению опорных задач по определенным темам школьного курса геометрии. Н.И. Зильберберг подчеркивает, что методику обучения их решению надо строить на основе определенных принципов. Автор предлагает несколько методов выбора ключевых (опорных) задач;

- описана технология поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича при обучении решению задач по теме «Конус»; подобрали и разобран задачный материал разного уровня сложности, для самостоятельного решения, работы в парах, проведения самостоятельной и контрольной работ.
- разработан элективный курс по теме «Конус в задачах» для обучающихся старших классов;
- экспериментально проверена эффективность разработанного элективного курса «Конус в задачах» в старших классах, результаты которого показали его эффективность.

Таким образом, цель данной работы достигнута, все поставленные задачи решены.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Атанасян, Л.С. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Л.С. Атанасян и др.]. 9-е изд. М.: Просвещение, 2021. 287 с.

2. Атанасян, Л.С. Геометрия 7–9: учеб. для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. М.: Просвещение, 2021. 257 с.

3. Александров, А.Д. Геометрия для 10-11кл.: учеб. пособие для уч-ся шк. и классов с углубл. изуч. Математики / А.Д. Александров, А.Л. Венер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 2020. 464 с.

4. Бородина, И.В. Элективный курс «Задачи по теме «Конус» в итоговой аттестации» для обучающихся математического профиля // Вестник магистратуры. №10-1 (157). С.15-17.

5. Брюхова, М.В. Изучение многогранников в школьном курсе математики // Вестник магистратуры. 2024. №3.2(150). С. 83-86.

6. Волович, М.Б. Наука обучать: технология преподавания математики. М.: Linka – Press, 1995. 250 с.

7. Гальперин, П.Я. Опыт изучения формирования умственных действий // Вестник Московского университета. Серия 14. Психология. 2017. №4. С. 3-20.

8. Гришина, Т.С. Логический прием сравнения в стереометрических задачах [на примере темы «Прямые круговые цилиндр и конус»] // Математика в школе. 1991. №6. С. 12-13.

9. Далингер, В.А., Кузьмин, С.Г. Проблемы обучения геометрии в средней и высшей российской школе // Актуальные проблемы преподавания математики в школе и педвузе: [межвуз. сб. науч. Трудов.] Вып. 25. М.: МПГУ, 2015. С. 239 – 244.

10. Ермолаев, Е.А. Элективные курсы по геометрии в условиях профильного обучения математике в старших классах: на примере темы «Площадь. Равновеликие и равносоставленные многоугольники»: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евстевьева. Саранск, 2010. 22 с.

11. Земляков, А.Н. Геометрия в 11 классе: Метод. рекомендации к учеб. А.В. Погорелова: Пособие для учителя / А.Н. Земляков. 3-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2003. 272 с.

12. Зепнова, Н.Н. Формирование и развитие пространственного мышления учащихся на элективных курсах по геометрии: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Омский гос. пед. ун-т. Омск, 2005. 22 с.

13. Зильберберг, Н.И. Урок математики: Подготовка и проведение: Кн. для учителя. М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.». 1995. 178 с.

14. Зильберберг, Н.И. Ключевые задачи в обучении математике / Н.И. Зильберберг, Р.Г. Хазанкин. М.: Мир, 2022. 179 с.

15. Иванова, Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе. Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева. Под ред. Т.А. Ивановой, 2-е изд., Н.Новгород: НГПУ, 2009. 355 с.

16. Имайкина, В.М. О теме «Длина, площадь, объём» в старших классах гуманитарного профиля // Математическое образование, 2014. №4. С.16-28.

17. Исмаилова, З.Н. Компьютерные технологии как средство качественного усвоения учебного материала по математике старшеклассниками : автореф. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Астрахан. гос. ун-т. Астрахань, 2010. 25 с.

18. Калабугина, Е.А. Инновационный подход к изучению тел вращения в школьном курсе геометрии // Научная электронная библиотека

«Киберленика» [сайт]. URL: https://cyberleninka.ru/ (дата обращения: 15.04.2024). 2012. № 2. С. 36 - 38.

19. Колмогоров, Н.А. Сборник задач для подготовки учащихся средних школ к математическим олимпиадам / Н.А. Колмогоров, Ф.Ф. Нагибин, В.В. Чудиновских, под общ. ред. проф. Н.А. Колмогорова. Горький: Волго- Вятское кн. изд-во, 1968. 136 с.

20. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Н.И. Мерлина, А.В. Мерлин, О.А. Саввина, Т.К. Авдеева, Л.П. Терентьева. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2009. 732 с.

21. Колягин, Ю.М. Учись решать задачи / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян. М.: Просвещение, 1980. 96 с.

22. Литвиненко, В.Н. Практикум по решению задач школьной математики / Моск. гос. заоч. пед. ин-т. – Вып. 4: Геометрия: учеб. пособие для студентов-заочников V курса физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / В.Н. Литвиненко. Москва: Просвещение, 1982. 160 с.

23. Лысенко, Ф.Ф. ЕГЭ 2023. Математика. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов. Под ред. Лысенко Ф.Ф. 2020. 368 с.

24. Малых, А.Е. Опорные планиметрические задачи. Треугольники и многоугольники: учеб. пособие / А.Е. Малых. Пермь: ПГГПУ, 2010. 251 с.

25. Методика и технология обучения математике: курс лекций: учеб. пособие для студентов мат. фак. вузов, обучающихся по направлению 540200 (050200) Физ.-мат. образование / [Н.Л. Стефанова и др.; науч. ред. Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова]. М.: Дрофа, 2005. 416 с.

26. Методика и технология обучения математике: лабораторный практикум: пособие для пед. вузов / [Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др.; под науч. ред. В.В. Орлова]. М.: Дрофа, 207. 320 с.

27. Мехтиев, М.Г. Методика обучения геометрии в 10-11 классах общеобразоательной школы с использованием компьютера: автореферат дис. … докт. пед. наук: 13.00.02 / Моск. пед. гос. ун-т. Москва, 2002. 35 с.

28. Нелепин, Е.П. Геометрия в таблицах. 7 – 11 классы., М.: 2012. 80 с.

29. Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.: [сайт]. URL: https://rsr-olymp.ru/upload/files/tasks/348/2021/23219592-sol-math-11-final-21-22.pdf (дата обращения: 04.02.2023). Текст: электронный.

30. Осипенко, Л.А., Стацевичуте, Е.Э., Опорные задачи в планиметрии: методическое пособие. Иркутск, 2010. 48 с.

31. Открытый урок [сайт]. URL: https://urok.1sept.ru/ (дата обращения: 19.04.2024). Текст: электронный.

32. Петров, В.А. Три карты [о методах картографии и картах Земли на сфере, цилиндре и конусе] // Математика в школе. 2003. № 5. С. 77-79.

33. Петров, С.М. Конус максимального объёма в природе // Квант, 1972. №4. С. 28-29.

34. Погорелов, А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. М.: Просвещение, 2004. 161 с.

35. Пойа, Д. Как решить задачу. М.: Учпедгиз, 1958. 208 с.

36. Пойа, Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1970. 456 с.

37. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 11 кл.: задачник для классов с углуб. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. 7-е изд., стереотип. Москва: Дрофа, 2010. 235 с.

38. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 11 кл.: методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. 2-е изд., стереотип. Москва: Дрофа, 2007. 220 с.

39. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. 5-е изд., стереотип. Москва: Дрофа, 2007. 368 с.

40. Распечатай и реши: Математика ЕГЭ 2024: Образовательный портал для подготовки к экзаменам: [сайт]. URL: https://www.time4math.ru/_files/ugd/3fbc02_5b26b047ba534f73b34a791fdfcdebb6.pdf (дата обращения: 04.06.2024). Текст: электронный.

41. Саакян, С.М., Бутузов, В.Ф. Изучение темы «Цилиндр. Конус. Шар» в XI классе // Математика в школе, 2002. №5. С. 25.

42. Саакян, С.М. Геометрия. Поурочные разработки. 10-11 классы: учебное пособие для общеобразовательных организаций: [издание в pdf-формате] / С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов. 2-е изд., перераб. Москва: Просвещение, 2021. 232 с.

43. Саранцев, Г.И. Развитие задачи как средство формирования универсальных учебных действий // Актуальные проблемы обучения физико-математическим и естественнонаучным дисциплинам в школе и вузе: материалы VI Межрегиональной научно-практической конференции учителей, посвященной 75-летию Педагогического института им. В.Г. Белинского. Под общей редакцией М.А. Родионова. Пенза: изд-во ПГУ, 2015. С. 13-17.

44. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. 2-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2005. 254 с.

45. Сдам ГИА: решу ЕГЭ: Образовательный портал для подготовки к экзаменам: [сайт]. URL: https://ege.sdamgia.ru/test?category_id=206&filter=all (дата обращения: 03.01.2024). Текст: электронный.

46. Смирнов, В.А., Смирнова, И.М. О научности и доступности в обучении геометрии // Геометрия и геометрическое образование: сборник трудов IV Международной научной конференции (к 80-летию Е.В. Потоскуева). Под общей редакцией Р.А. Утеевой. Тольятти, изд-во ТГУ, 2020. С. 71-77.

47. Смирнова, И.М. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для учащихся общеобразоат. учреждений (базовый и углубленный уровни) / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. 5-е изд., испр. и доп. Москва: Мнемозина, 2008. 228 с.

48. Спивак, А. Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские / А. Спивак, В. Тихомиров // Квант, 2000. № 6. С. 3-11.

49. Стогова, О.В. Отдельные аспекты методики обучения теме №Тела вращения» и решению задач на вычисление объемов круглых тел // Вестник науки, 2020. №11 (32). С. 24-31.

50. Турнир Ломоносова. Олимпиада по математике: [сайт]. URL: https://turlom.olimpiada.ru/ (дата обращения: 04.02.2023). Текст: электронный.

51. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Утвержден приказом Минобрнауки России от 17.05.2012 №413 (с изменениями на 27 декабря 2023 г.) [Электронный ресурс]. URL: https://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 15.02.2024). Текст: электронный.

52. Федеральная образовательная программа среднего общего образования. Утверждена приказом Минпросвещения России от 18.05.2023 №371 (с изменениями на 19 марта 2024 г.) [Электронный ресурс]. URL: https://sudact.ru/law/prikaz-minprosveshcheniia-rossii-ot-18052023-n-371/federalnaia-obrazovatelnaia-programma-srednego-obshchego/iii/112/ (дата обращения: 15.02.2024). Текст: электронный.

53. ФИПИ: открытый банк заданий: [сайт]. URL: http://ege.fipi.ru/os11/xmodules/qprint/index.php?theme_guid=f6ec29149541e311bacb001fc68344c9&proj_guid=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B (дата обращения: 04.01.2024). Текст: электронный.

54. Цукарь, А.Я. Какой след оставит сечение конуса на плоскости? // Математика в школе. 1996. №4. С. 63 – 66.

55. Шарыгин, И.Ф. Стандарт по математике: 500 геометрических задач: кн. для учителя / И.Ф. Шарыгин. М.: Просвещение, 2005. 205 с.

56. Шергин, В.С. Что такое. Кто такой: детская энциклопедия. В 3 т. Ч-80 Т. 1 А – Ж / сост. В.С. Шергин, А.И. Юрьев. – 5-е изд., перераб. И доп. М.: АСТ, 2007. 519 с.

57. Электронные учебные материалы: Studme [сайт]. URL: https://studme.org/54938/tovarovedenie/analiticheskie_poverhnosti_arhitekture_zdaniy_konstruktsiy_izdeliy (дата обращения: 06.01.2023). Текст: электронный.

58. Яглом, И.М. Математика и реальный мир / И.М. Яглом. Москва: Зание, 1978. 64 с.

59. Ященко, И.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Национальное образование», 2019. 256 с.

60. Ященко, И.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. 10 вариантов. Типовые тестовые задания / под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2020. 63 с.

61. Ященко, И.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Национальное образование», 2024. 224 с.

62. Baron, Lois M. Do the math! Decorate with Geometry // Math Horizons. 2018. V. 26. P. 14-15.

63. Brenton, L. A. Bigger Altar: geometry and Ritual // Math Horizons. 2017. V. 25. P. 8-11.

64. Marion, C. Proof without words: filling in Pythagorean Gaps // Mathematics Magazine. 2018. V. 91. P. 260-261.

65. Oates, G., Hunter R., Bicknell B., Burgerss T. Relative values of curriculum in undergraduate mathematics in an integrated technology environment. Proceedings of the 32^{nd} Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Palmerston North. 2009.

66. Ryan, R.M., Deci E.L Self- determination theory: Basics psychological needs in motivation, development, and wellness. N.Y.; London: Guilford Press, 2017.