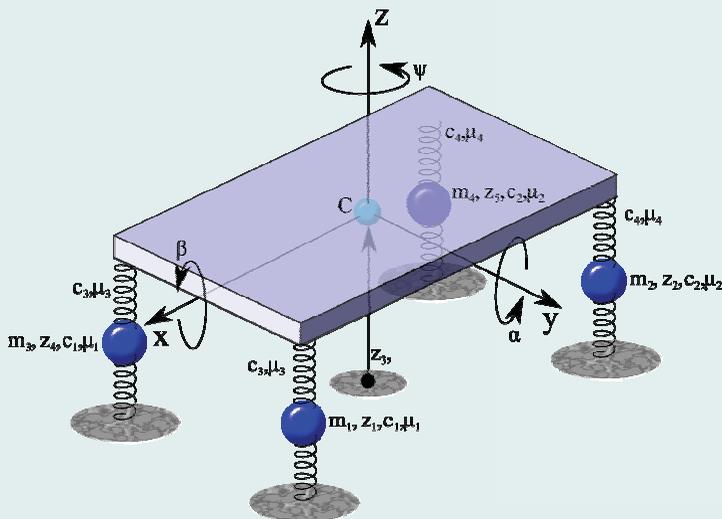


Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Проектирование и эксплуатация автомобилей»

А.И. Глейзер

КОЛЕБАНИЯ АВТОМОБИЛЯ

Электронное учебное пособие



© ФГБОУ ВПО «Тольяттинский
государственный университет», 2014

ISBN 978-5-8259-0811-3

УДК 629.3.017(075.8)
ББК 34.41я73

Рецензенты:

д-р экон. наук, канд. техн. наук, профессор Волжского
университета им. В.Н. Татищева *А.Д. Немцев*;
канд. техн. наук, доцент Тольяттинского государственного
университета *Л.А. Черепанов*.

Глейзер, А.И. Колебания автомобиля : электронное учеб. пособие / А.И. Глейзер. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014. – 78 с. – 1 опт. диск.

Учебное пособие предназначено для изучения дисциплины «Основы теории колебаний механических систем».

Адресовано студентам, обучающимся по направлению подготовки бакалавра 190100.62 «Наземные транспортно-технологические комплексы».

Текстовое электронное издание

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер; Windows XP/Vista/7/8; ПИП 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; Adobe Reader.

Номер государственной регистрации электронного издания

© ФГБОУ ВПО «Тольяттинский
государственный университет», 2014

Редактор *Г.В. Данилова*
Технический редактор *З.М. Малявина*
Компьютерная вёрстка: *И.И. Шишкина*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию 26.11.2014.
Объем издания 4,9 Мб.
Комплектация издания: CD-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-66-13.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел.: 8 (8482) 53 91 47, www.tltsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	8
1.1. Число степеней свободы колебательной системы	8
1.2. Кинематика колебательных процессов	9
1.3. Свободные колебания систем с одной степенью свободы	10
1.4. Вынужденные колебания при силовом, полигармоническом и кинематическом возбуждениях	12
1.5. Виброизоляция	15
1.6. Уравнение Лагранжа II рода	16
1.7. Импульсная реакция. Движение под действием силы, произвольно зависящей от скорости	16
2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ И БОЛЕЕ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	18
2.1. Дифференциальное уравнение свободных колебаний	18
2.2. Свободные колебания без учёта сил сопротивления	19
2.3. Динамическое гашение вынужденных колебаний	22
2.4. Вынужденные колебания без учёта сил сопротивления	24
2.5. Вынужденные колебания с учётом сил сопротивления	25
2.6. Колебания стержней постоянного сечения	26
2.7. Расчет свободных колебаний по методу Релея	28

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ АВТОМОБИЛЯ	30
3.1. Расчетная схема и дифференциальные уравнения	31
3.2. Свободные колебания автомобиля	34
4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	36
4.1. Дисбаланс и балансировка вращающихся тел	36
4.2. Вибрация автомобиля, возбуждаемая статическим дисбалансом	38
4.3. Колебания, возбуждаемые моментными дисбалансами колес	44
4.4. Колебания, возбуждаемые переменной толщиной тормозных дисков в условиях торможения	45
5. О СУПЕРПОЗИЦИИ КОЛЕБАНИЙ	52
6. УЧЕТ ИМПЕДАНСА ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ АНАЛИЗЕ И РАСЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ АВТОМОБИЛЯ	53
7. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АВТОМОБИЛЯ	57
8. ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ РУЛЕВОГО МЕХАНИЗМА	61
9. ГАСИТЕЛИ КОЛЕБАНИЙ	63
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	73
ГЛОССАРИЙ	74

ВВЕДЕНИЕ

Изобретения автомобиля и двигателя внутреннего сгорания произошли практически одновременно на рубеже XIX–XX столетий. Привычный всем нам облик автомобиля явился результатом тех великих открытий, которые были сделаны гениальными учеными, инженерами и изобретателями 120–150 лет тому назад. Именно тогда были найдены практически все основные научные, инженерные и конструкторские решения, предвосхитившие последующее развитие автомобилестроения на многие годы вперед: двигатель внутреннего сгорания, пневматическая шина, рессорная подвеска, механизмы сцепления, дифференциала, коробки перемены передач и рулевого управления, подшипники качения, новые топлива и конструкционные материалы, разработаны научные принципы взаимозаменяемости в машиностроении и принципиально новые подходы к организации серийного и массового производства.

Последующая эволюция автомобиля происходит под знаком непрерывно нарастающих требований к совершенствованию его надежности, безопасности, экономичности и экологичности, в частности, динамических характеристик по шуму, вибрации, плавности хода, устойчивости движения и управляемости, усталостной прочности и надежности.

Решение возникающих в этой связи задач так или иначе связано с вопросами механических колебаний (вибраций) автомобиля. Вибрацией обусловлены нарушения установленных норм плавности хода и шума автомобиля, снижение показателей устойчивости и активной безопасности движения, усталостные дефекты трансмиссии и кузова, в конечном счете – снижение конкурентоспособности автомобиля.

Значительные трудности при решении указанных проблем вызваны отсутствием некоторой общей теории колебаний, позволяющей решать множество локальных задач,

возникающих в связи с вибрацией отдельных узлов и систем автомобиля. Применяемые с этой целью упрощенные (парциальные) колебательные системы с весьма ограниченным числом степеней свободы и, соответственно, числом обобщенных координат имеют то преимущество, что они позволяют значительно упростить количественный и качественный анализ исследуемых процессов. Но при этом и выводы, получаемые при таком анализе, будут, очевидно, иметь недостаточную точность и ограниченную область применения. Кроме того, необходимо иметь в виду существование такого класса задач, решение которых возможно только с учетом кинематических и динамических связей, объединяющих эти элементы в единую колебательную систему.

1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1.1. Число степеней свободы колебательной системы

Число степеней свободы любой механической системы задается числом независимых друг от друга параметров, однозначно определяющих положение данной системы в пространстве в любой момент времени.

В качестве таких независимых параметров могут приниматься декартовы координаты отдельных точек системы; тогда координаты других точек могут быть найдены с помощью уравнений связей, налагаемых на систему. Чаще в качестве независимых параметров принимаются не декартовы координаты, а величины другой физической природы и размерности. Эти величины (они обозначаются q) носят название обобщенных координат.

Все реальные колебательные системы, обладающие непрерывно распределенной массой и деформируемые по всему объему, имеют бесчисленное множество степеней свободы, и их представление в виде систем с конечным числом степеней свободы возможно только при определенных допущениях. Обычно предполагается, что масса системы сосредоточена в ее отдельных звеньях, принимаемых абсолютно твердыми; в то же время упругие свойства приписываются другим звеньям, массой которых пренебрегается. Такая схематизация, если она выполнена грамотно, позволяет достаточно точно описать динамические свойства колебательной системы, по крайней мере, в ограниченном диапазоне частот.

1.2. Кинематика колебательных процессов

Простейшим колебательным процессом является гармоническое колебание, протекающее по закону:

$$x = a \sin(\omega t),$$

где a – амплитуда; ω – круговая частота (ее размерность $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$); φ – начальная фаза.

Период и циклическая частота колебаний будут равны:

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

В инженерной практике встречаются случаи сложения (суперпозиции) гармонических колебаний с очень близкими частотами:

$$x(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin(\omega + \Delta\omega)t.$$

Результирующее движение представляет собой колебательный процесс, основная (несущая) частота которого близка к ω и который модулируется более низкой частотой, равной $\frac{\Delta\omega}{2}$. Размах колебаний периодически изменяется в пределах от $|a_1 - a_2|$ до $|a_1 + a_2|$. Подобные процессы называют **биениями**.

1.3. Свободные колебания систем с одной степенью свободы

Свободные колебания происходят под действием восстанавливающей силы, силы сопротивления и описываются уравнением

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0, \quad (1.1)$$

где m – масса; μ – коэффициент сопротивления; c – коэффициент жёсткости.

С учётом обозначений: $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, $n = \mu/2m$ (1.1) приводится к стандартному виду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.2)$$

где ω_0 – частота свободных незатухающих колебаний; n – коэффициент демпфирования.

Уравнение (1.2) допускает три варианта решения:

1) при $n > \omega_0$ (случай «большого» сопротивления):

$$x = C_1 e^{-(n+\sqrt{\omega_0^2-n^2})t} + C_2 e^{-(n-\sqrt{\omega_0^2-n^2})t}; \quad (1.3)$$

2) при $n = \omega_0$ (случай критического сопротивления):

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (1.4)$$

Движение в этих двух случаях не является колебательным, это так называемое аperiодическое или релаксационное движение;

3) при $n < \omega_0$

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t), \quad (1.5)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$ – круговая частота свободных затухающих колебаний; C_1 и C_2 определяются из начальных условий: $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0 + nx_0}{\omega_1}$, x_0 , v_0 – начальное смещение и начальная скорость.

Решение (1.5) можно представить в другом виде:

$$x = ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi); \quad (1.6)$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Движение представляет собой свободные затухающие колебания, причём скорость затухания характеризуется коэффициентами:

$$\psi = \frac{a_\kappa}{a_{\kappa+1}} = e^{nT_1}, \quad \delta = \ln \psi = nT_1, \quad (1.7)$$

где ψ – коэффициент затухания; a_κ и $a_{\kappa+1}$ – два последовательных амплитудных смещения; $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ – период свободных затухающих колебаний; δ – логарифмический декремент колебаний.

Если процесс свободных затухающих колебаний записан на осциллограмму, то логарифмический декремент можно определить по формуле

$$\delta = \frac{1}{z} \ln \frac{a_1}{a_z}, \quad (1.8)$$

где z – число полных циклов колебаний; a_1 и a_z – амплитуды на первом и последнем циклах.

При отсутствии сопротивления движение представляет собой свободные незатухающие колебания.

Отметим следующие свойства свободных затухающих и незатухающих колебаний линейных систем:

- амплитуда и начальная фаза свободных колебаний определяются начальными условиями;
- статические (постоянные) силы, например силы веса, не оказывают никакого влияния на протекание свободных колебаний, но смещают центр колебаний на величину, равную статической деформации упругой связи;
- круговая частота свободных колебаний не зависит от начальных условий; это параметр системы, определяемый только её массой, жёсткостью и коэффициентом сопротивления;
- при отсутствии сопротивления свободные колебания продолжаются неограниченно долго.

1.4. Вынужденные колебания при силовом, полигармоническом и кинематическом возбуждениях

Рассмотрим движение колебательной системы при воздействии гармонической возбуждающей силы $Q = Q_0 \cdot \sin \omega t$. Это наиболее простой и вместе с тем наиболее важный случай. Действительно, любая другая периодическая зависимость возбуждающей силы от времени может быть представлена с помощью рядов Фурье в виде суммы отдельных гармонических составляющих. Исследуя влияние каждой из них в отдельности и применяя затем принцип суперпозиции, мы найдём движение колебательной системы при любом циклическом возбуждении.

Дифференциальное уравнение движения, приведённое к стандартной форме, имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{Q_0}{m} \sin \omega t, \quad (1.9)$$

его решение находится как сумма

$$x = x_1 + x_2, \quad (1.10)$$

где x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения, имеющего вид (1.5) или (1.6); x_2 – частное решение неоднородного уравнения

$$x_2 = A \sin(\omega t - \beta), \quad (1.11)$$

где A – амплитуда, β – начальная фаза вынужденных колебаний:

$$A = \bar{A} \cdot \Delta, \quad \Delta = \frac{Q_0}{c}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\bar{n}^2 \bar{\omega}^2}}, \quad (1.12)$$

$$\beta = \begin{cases} \alpha, & \bar{\omega} \leq 1; \\ 180^\circ - \varepsilon, & \bar{\omega} > 1; \end{cases} \quad \alpha = \arctg \left| \frac{2\bar{\omega} \cdot \bar{n}}{1 - \bar{\omega}^2} \right|; \quad (1.13)$$

$$\bar{\omega} = \omega / \omega_0, \quad \bar{n} = n / \omega_0.$$

Зависимости $\bar{A}(\bar{\omega})$, $\beta(\bar{\omega})$ называются амплитудно-частотными и фазочастотными характеристиками системы.

В целом движение описывается уравнением

$$x = a e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi) + A \sin(\omega t - \beta) \quad (1.14)$$

и представляет собой результат наложения (суперпозиции) свободных колебаний с частотой ω_1 и вынужденных колебаний с частотой возбуждения ω .

Амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума в условиях резонанса при $\omega \approx \omega_0$:

$$\bar{A}_{рез} = \frac{1}{2\bar{n}} = \frac{\omega_0}{2n}, \quad (1.15)$$

при $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда вынужденных колебаний неограниченно стремится к нулю. Угол β определяет эффект отставания по фазе вынужденных колебаний от возбуждающей силы.

В случае периодической, но не гармонической возбуждающей силы задача о вынужденных колебаниях решается путём разложения этой силы в ряд Фурье. Если основной период изменения возбуждающей силы равен T , то гармонический анализ приводит к следующему её представлению:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (F_k \sin kpt + S_k \cos kpt), \quad (1.16)$$

где $p = 2\pi/T$ – основная частота; $k = 1, 2, \dots, \infty$,

$$Q_0 = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt; \quad F_k = \frac{2}{T} \int_0^T Q(t) \sin kpt dt;$$

$$S_k = \frac{2}{T} \int_0^T Q(t) \cos kpt dt.$$

Тогда движение определяется как результат сложения (суперпозиции) колебаний, вызываемых каждой гармонической составляющей в отдельности:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(kpt - \varphi_k) + B_k \sin(kpt - \varphi_k)],$$

где A_k, B_k, φ_k находятся с помощью (1.12), (1.13), (1.16).

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{F_k}{C} \bar{A}(\varpi_k); \quad B_k = \frac{S_k}{C} \bar{A}(\varpi_k); \\ \varphi_k &= \operatorname{arctg} \frac{2\varpi_k \bar{n}}{1 - \varpi_k^2}; \quad \varpi_k = \frac{kp}{\omega_0}. \end{aligned} \right\}$$

Вынужденные колебания могут возбуждаться не только возбуждающей силой, но и заданным извне движением некоторых точек системы, т. е. при кинетическом возбуждении.

Если $\xi(t)$ – задаваемое извне перемещение точки крепления упругого и демпфирующего элементов в рассматриваемой

выше системе, то дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = \mu\dot{\xi} + c\xi. \quad (1.17)$$

Таким образом, задача о кинематическом возбуждении решается так же, как и задача о силовом возбуждении, если значение возбуждающей силы выразить через параметры кинематического возбуждения:

$$P(t) = c \cdot \xi(t) + \mu\dot{\xi}(t). \quad (1.18)$$

1.5. Виброизоляция

Виброизоляция — набор упругих или упруго-демпфирующих элементов, устанавливаемых между изделием и основанием и предназначенных для защиты изделия от чрезмерной вибрации.

Различают два типа виброзащитных систем:

1) системы, в которых вибрация колеблющегося объекта вызывается силовым возбуждением. Главной задачей таких систем является уменьшение амплитуды динамического усилия, передаваемого на фундамент;

2) системы, где вибрация колеблющегося объекта вызывается кинематическим возбуждением, т. е. вибрационным движением основания. Для таких систем главной задачей является уменьшение амплитуды колебаний самого объекта по сравнению с амплитудой колебаний основания.

Обе задачи решаются путём такого подбора жёсткости упругих элементов, при которых частота собственных колебаний изделия, установленного на виброизоляции, будет намного ниже частоты возбуждения.

Можно показать, что виброизоляция выполняет виброзащитную функцию при условии: $\omega_0 < 0,707\omega$. Для практических же целей необходимо, чтобы $\omega_0 < (0,5 \dots 0,25)\omega$.

Демпфирование несколько ухудшает виброзащитные свойства. Тем не менее оно весьма полезно в периоды разгона

или остановки изделия, когда частота возбуждения в течение небольшого времени становится близкой к ω_0 .

1.6. Уравнение Лагранжа II рода

Одним из методов получения дифференциальных уравнений движения является метод Лагранжа, основу которого составляют знаменитые уравнения Лагранжа II рода. Приведём некоторые модификации этих систем уравнений, которые мы используем для анализа колебательного движения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Y}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1.19)$$

$$i = 1, 2 \dots n.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1.20)$$

$$i = 1, 2 \dots n,$$

где q_i, \dot{q}_i – обобщённые координаты и скорости; Π, T – потенциальная и кинетическая энергии системы; $R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \mu_j \cdot v_j^2$ – диссипативная функция Релея; v_j – скорости тех точек, в которых действуют силы сопротивления, пропорциональные скорости; Q_i – обобщённые силы.

1.7. Импульсная реакция. Движение под действием силы, произвольно зависящей от скорости

Импульсной реакцией или весовой функцией называется реакция некоторой системы в момент времени t при условии, что в момент времени τ на вход системы был подан сигнал

в форме δ -функции. Последующее движение одномассовой системы, вызванное таким импульсом, определится формулой

$$h(t, \tau) = e^{-n(t-\tau)} \cdot \sin \omega_1(t - \tau) \cdot \frac{1}{m \cdot \omega_1}. \quad (1.21)$$

Это и есть импульсная реакция колебательной системы с одной степенью свободы. При отсутствии сопротивления

$$h(t, \tau) = \frac{1}{m \cdot \omega_0} \cdot \sin \omega_0(t - \tau). \quad (1.22)$$

Теперь движение под действием силы, произвольно зависящей от времени, определится интегрированием

$$x(t) = \int_0^t P(\tau) \cdot h(t, \tau) d\tau. \quad (1.23)$$

Рассмотрим пример.

Одномассовая колебательная система приводится в движение импульсом S прямоугольной формы длительностью τ_0 (с). По (1.23) находим закон движения

$$x(t) = \frac{P}{m \cdot \omega_0^2} \cdot (1 - \cos \omega_0 t),$$

причем $P = S/\tau_0$. При этом максимальное смещение отвечает длительности импульса $\tau_0 = 0,372 T_0$. Локальные максимумы будут отмечены в точках $\tau_0 = 1,16 T_0$ и др.

2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ И БОЛЕЕ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

2.1. Дифференциальное уравнение свободных колебаний

Дифференциальные уравнения движения многомассовых систем могут быть получены тремя методами:

1) *методом Лагранжа*;

2) *методом сил*. Согласно методу сил перемещения характерных точек системы определяются из матричного уравнения

$$A \cdot \Phi = X, \quad (2.1)$$

где X – матрица-столбец, составленная из элементов x_i – перемещений указанных точек, $\Phi_j = -m_j \ddot{x}_j$ – силы инерции, которые мысленно прикладываются к тем же точкам; A – квадратная матрица коэффициентов статической подат-

ливости $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$

3) *методом деформаций*. В некотором смысле метод деформаций является обратным по отношению к методу сил. Согласно методу, определяются не перемещения по заданным силам, а действующие силы (в данном случае это силы инерции) по заданным перемещениям. В матричной форме уравнения движения записываются в виде

$$\Phi = CX, \quad (2.2)$$

где C – квадратная матрица, элементами которой являются коэффициенты статических жёсткостей C_{ij} .

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ - & - & - & - \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая (2.1) и (2.2), приходим к соотношению, связывающему коэффициенты статической жёсткости и статической податливости:

$$C = A^{-1}. \quad (2.3)$$

Для определения коэффициентов C_{ij} на все точки, кроме i -й, накладываются связи, исключающие их перемещения. Тогда значения усилий, приложенных к указанным точкам со стороны наложенных на них связей, и определяют значения указанных коэффициентов.

Заметим, что для линейных систем имеют место равенства:

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}. \quad (2.4)$$

Хотя дифференциальные уравнения, полученные разными методами, вполне эквивалентны, однако трудоёмкость их получения в общем неодинакова. Например, при составлении дифференциальных уравнений для цепных систем удобнее пользоваться методом деформаций, для балочных систем — методом сил, для более сложных систем — методом Лагранжа.

2.2. Свободные колебания без учёта сил сопротивления

Решение дифференциальных уравнений свободных колебаний и некоторые особенности движения многомассовых систем в этом режиме рассмотрим на следующем примере. Масса m_1 связана пружиной жёсткостью c_1 с неподвижным

основанием, а пружиной c_2 – с массой m_2 . Обе массы совершают поступательное движение в направлении горизонтальной оси x . Дифференциальные уравнения движения, которые могут быть получены любым из указанных методов, и их решения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 - c_1 x_1 &= 0. \end{aligned} \right\}, \quad (2.5)$$

$$x_1 = a_1 \sin \omega t; \quad x_2 = a_2 \sin \omega t. \quad (2.6)$$

После подстановки (2.6) в (2.5) приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений. Приравнявая к нулю определитель этой системы, что является необходимым условием существования нетривиальных решений, получим частотное уравнение, действительные корни которого представляют две различные собственные частоты:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left(1 + \alpha - \bar{\omega}^2\right) - \alpha a_2 &= 0; \\ -a_1 \cdot \alpha + a_2 \left(1 - \beta \bar{\omega}^2\right) &= 0; \end{aligned} \right\}, \quad (2.7)$$

$$\Delta = \left(1 + \alpha - \bar{\omega}^2\right) \left(1 - \beta \bar{\omega}^2\right) - \alpha^2 = 0, \quad (2.8)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}},$$

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \alpha + 1 \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \alpha + 1 \right)^2 - \frac{\alpha}{\beta}} \right], \quad (2.9)$$

где $\alpha = \frac{c_2}{c_1}$, $\beta = \frac{m_2}{m_1}$, $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Например, при $\alpha = \beta = 1$ найдём $\omega_1 = 0,6 \cdot \omega_0$, $\omega_2 = 1,6 \cdot \omega_0$.

Подставим в первое из уравнений (2.7) $a_1 = A_{11}$, $a_2 = A_{21}$, $\omega = \omega_1$ и найдём отношение

$$\eta_1 = A_{21} / A_{11}. \quad (2.10)$$

Аналогично, принимая $a_1 = A_{12}$, $a_2 = A_{22}$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2$, найдём:

$$\eta_2 = A_{22} / A_{21}. \quad (2.11)$$

Здесь первый индекс соответствует номеру массы, второй – номеру собственной частоты. Соотношения (2.10), (2.11) характеризуют формы собственных колебаний или конфигурацию системы при колебаниях её с той или иной собственной частотой. Так, в примере, рассмотренном выше, найдём:

$$\omega_1 = 0,6\omega_0, \quad \eta_1 = 1,62,$$

$$\omega_2 = 1,6\omega_0, \quad \eta_2 = -0,62.$$

Знаки при η_1 и η_2 показывают, что при колебаниях с первой собственной частотой обе массы колеблются в одной фазе, а при колебаниях с частотой ω_2 – в противофазе.

Собственные формы колебаний обладают чрезвычайно важным свойством – **взаимной ортогональностью**, которое выражается уравнением

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^z m_i a_{ik} a_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (2.12)$$

где a_{ik} , a_{ij} – амплитудные смещения массы m_i при колебаниях системы по k -й и j -й собственным формам.

2.3. Динамическое гашение вынужденных колебаний

Динамическое гашение является одним из примеров практического приложения теории вынужденных колебаний многомассовых систем.

Рассмотрим вынужденные колебания двухмассовой системы, описанной в п. 2.2, под воздействием возбуждающей силы $P_0 \cdot \sin \omega t$, приложенной к массе m_1 .

Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= P_0 \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Принимая $x_1 = a_1 \sin \omega t$, найдём амплитуды вынужденных колебаний:

$$a_1 = \frac{P_0 (c_2 - m_2 \omega^2)}{\Delta}; \quad a_2 = \frac{P_0 c_2}{\Delta}, \quad (2.14)$$

где $\Delta = (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2$.

Первое из полученных выражений указывает на возможность полностью исключить вынужденные колебания первой массы. Для этого достаточно так подобрать параметры системы, чтобы выполнялось условие:

$$c_2 - m_2 \omega^2 = 0. \quad (2.15)$$

В этом случае парциальная частота динамического гасителя будет равна частоте возбуждения $\omega_0^{(r)} = \sqrt{c_2/m} = \omega$ и $a_1 = 0$.

Устройство, состоящее из некоторой дополнительной массы, упруго связанной с изделием так, чтобы выполнялось найденное условие, называется динамическим гасителем колебаний. Эффект динамического гашения объясняется тем, что масса m_2 колеблется в противофазе с возбуждающей силой и действие последней полностью компенсируется реакцией упругой связи c_2 .

Принцип динамического гашения колебаний широко применяется в автомобилестроении, в конструкции летательных аппаратов и двигателей. Обычная область применения – гашение вибрации различных приборов, агрегатов, валов, трубопроводов, пластин, режущего инструмента и других элементов конструкции. В своём классическом исполнении динамический гаситель представляет собой инертную массу, упруго связанную с основной колебательной системой. Как правило, это компактный, достаточно технологичный резинометаллический модуль, в котором роль упругого, демпфирующего и связующего элементов выполняется резиной или аналогичным материалом.

Главный недостаток динамического гашения заключается в следующем. Динамический гаситель, особенно без трения или с очень малым трением, нуждается в точной настройке, при которой его парциальная частота была бы в точности равна частоте возбуждения. Если частота возбуждающей силы не постоянна, то с её изменением возможно появление резонансов с дополнительными, так называемыми «боковыми» собственными частотами, которые неизбежно появляются с установкой самого гасителя по обе стороны от точки настройки.

Наличие резонансных «боковых» частот крайне нежелательно для многорежимных машин, имеющих широкий частотный диапазон возбуждающих нагрузок. В этих условиях динамический гаситель не только не приносит пользы, но оказывается даже вредным. Для устранения указанного недостатка могут быть использованы следующие методы:

- введение демпфирования в систему гасителя, например, за счёт внутреннего трения в материале упругого элемента;
- применение самонастраивающихся динамических гасителей, парциальные частоты которых автоматически изменяются вслед за изменением частоты возбуждения; таковы, например, маятниковые гасители крутильных колебаний коленвалов двигателей внутреннего сгорания;

– применение пакета динамических гасителей, установленных параллельно и несколько отличающихся друг от друга частотой настройки;

– введение в системы гасителей гидравлического сопротивления.

Вопросы оптимизации динамического гашения рассмотрены в разделе 9.

2.4. Вынужденные колебания без учёта сил сопротивления

Рассмотрим движение колебательной системы с r степенями свободы, к каждой массе которой прикладывается возбуждающая сила $P_k = P_k(t)$. Дифференциальные уравнения движения, полученные по методу сил, запишем в виде:

$$x_i = \sum_{k=1}^r \Phi_k \alpha_{ik} + \sum_{k=1}^r P_{ko} \sin \omega t, \quad \Phi_k = -m_k \ddot{x}_k. \quad (2.16)$$

Принимая $x_i = a_i \sin \omega t$ и подставляя в (2.16), получим систему линейных алгебраических колебаний:

$$\left. \begin{aligned} a_1(1 - m_1 \omega^2 \alpha_{11}) - a_2 m_2 \omega^2 \alpha_{12} - \dots - a_r m_r \omega^2 \alpha_{1r} &= \sum_{k=1}^r P_{ko} \alpha_{1k}; \\ a_1 m_1 \omega^2 \alpha_{r1} - a_2 m_2 \omega^2 \alpha_{r2} - \dots - a_r(1 - m_r \omega^2 \alpha_{rr}) &= \sum_{k=1}^r P_{ko} \alpha_{rk}; \end{aligned} \right\} (2.17)$$

Отсюда по формуле Крамера найдём амплитуды вынужденных колебаний a_i :

$$a_i = \Delta_i / \Delta,$$

где Δ – определитель системы (2.14); Δ_i – определитель, полученный из Δ путём замены в последнем i -го столбца столбцом свободных членов.

Определитель системы остаётся тем же, что и при свободных незатухающих колебаниях. Это означает, что при частоте

возбуждающей нагрузки, приближающейся к одной из собственных частот, значение определителя уменьшается до нуля и амплитуда вынужденных колебаний формально становится бесконечно большой.

2.5. Вынужденные колебания с учётом сил сопротивления

При наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости, дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^r \Phi_j \cdot \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^r F_{cj} \cdot \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^r P_{jo} \sin \omega t \cdot \alpha_{ij}, \quad (2.18)$$

где $\Phi_j = -m_j \ddot{x}_j$ – силы инерции; $F_{cj} = -\mu_j \dot{x}_j$ – силы сопротивления; $P_j(t)$ – возбуждающая нагрузка.

Характер влияния сил сопротивления на вынужденные колебания многомассовых систем в общем остаётся тем же, что и для систем с одной степенью свободы. Это означает, что амплитуды вынужденных колебаний конечны на всех режимах возбуждения, включая резонансные, а фазы вынужденных колебаний различных точек отличаются от фазы возбуждающей силы и не совпадают между собой. Найдём решение в виде:

$$x_i = a_i \sin \omega t + b_i \cos \omega t. \quad (2.19)$$

Подставив (2.19) в (2.18), приходим к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_i - \sum_{j=1}^r a_j m_j \omega^2 \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^r \mu_j \omega b_j \alpha_{ij} &= \sum_{j=1}^n P_{jo} \alpha_{ij}; \\ b_i - \sum_{j=1}^n b_j m_j \omega^2 \alpha_{ij} - \sum_{j=1}^n \mu_j \omega a_j \alpha_{ij} &= 0. \end{aligned} \right\}, \quad i, j = 1 \dots r. \quad (2.20)$$

При этом амплитуды A_i и фазы вынужденных колебаний будут равны:

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad \varphi_i = \arctg \frac{b_i}{a_i}. \quad (2.21)$$

2.6. Колебания стержней постоянного сечения

А. Свободные продольные и крутильные колебания

Дифференциальные уравнения, описывающие свободные, продольные или крутильные колебания стержней постоянного сечения, относятся к классу уравнений математической физики и имеют вид:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (2.22)$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ – в случае продольных колебаний, $a = \sqrt{G_1/\rho}$ – при крутильных колебаниях; E , G_1 – модули упругости при растяжении и сдвиге; ρ – удельная плотность материала. Решение будем искать в виде:

$$u(x, t) = \eta(x) \cdot B \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.23)$$

причём первый сомножитель определяет форму свободных колебаний, второй – зависимость деформаций по времени; ω – угловая частота свободных колебаний; B и φ – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Ограничимся в дальнейшем определением собственных частот и форм колебаний. После подстановки (2.23) в (2.22) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \eta(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a^2} \cdot \eta(x) = 0 \quad (2.24)$$

и его решению

$$\eta(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x, \quad (2.25)$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных (не начальных) условий, причем

$$\lambda = \frac{\omega}{a}. \quad (2.26)$$

При исследовании свободных крутильных колебаний в уравнении (2.22) следует заменить параметр a на $(a_1): a_{12} = G/\rho$, G – модуль упругости второго рода.

В. Свободные изгибные колебания

Приведём дифференциальное уравнение свободных изгибных колебаний:

$$\frac{EJ}{m} \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{d^2 u}{dt^2} = 0, \quad (2.27)$$

где m – погонная масса стержня.

После подстановки данного решения приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению четвёртого порядка:

$$\frac{d^4 \eta(x)}{dx^4} - \alpha^4 \cdot \eta(x) = 0, \quad (2.28)$$

$$\alpha^4 = \frac{m\omega^2}{EJ}. \quad (2.29)$$

Решения (2.29) находятся в виде комбинаций функций А.Н. Крылова:

$$\eta(x) = AS(\alpha x) + BT(\alpha x) + CU(\alpha x) + DV(\alpha x), \quad (2.30)$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий;

$$\left. \begin{aligned} S(\alpha x) &= \frac{1}{2}(ch\alpha x + \cos \alpha x); \\ T(\alpha x) &= \frac{1}{2}(sh\alpha x + \sin \alpha x); \\ U(\alpha x) &= \frac{1}{2}(ch\alpha x - \cos \alpha x); \\ V(\alpha x) &= \frac{1}{2}(sh\alpha x - \sin \alpha x). \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

2.7. Расчет свободных колебаний по методу Релея

К числу наиболее простых и эффективных приближённых методов расчёта свободных колебаний относится метод Релея. Согласно методу, формы колебаний задаются практически произвольно, но так, чтобы они не противоречили реально действующим граничным условиям. Итак, примем, что колебания всех точек системы синфазны и определяются уравнением:

$$u(x, t) = A \cdot \eta(x) \sin \omega_0 t. \quad (2.32)$$

Обозначим T_0 и P_0 – амплитудные значения кинетической и потенциальной энергий системы, причём:

$$T_0 = \frac{1}{2} A^2 \cdot \omega_0^2 \sum_{\kappa=1}^N m_{\kappa} \cdot \eta^2(x_{\kappa}), \quad (2.33)$$

где m_{κ}, x_{κ} – масса и координата некоторой точки.

В момент максимального отклонения обращается в ноль кинетическая энергия, а потенциальная энергия будет максимальной и равной P_0 .

Из условия сохранения механической энергии можно записать:

$$T_0 = P_0, \quad (2.34)$$

$$\omega_0^2 = \frac{2P_0}{A^2 \sum_{\kappa=1}^N m_{\kappa} \eta^2(x_{\kappa})}. \quad (2.35)$$

Очевидно, чтобы подсчитать кинетическую и потенциальную энергии, необходимо знать форму колебаний, которая заранее неизвестна. Поэтому может показаться, что энергетический подход к определению собственных частот является бесперспективным. Однако мы имеем возможность

определить частоту не для точной формы колебаний, а для некоторой аппроксимирующей её формы, достаточно близкой к истинной. При этом оказывается, что частота, полученная по (2.34), будет мало отличаться от своего точного значения. Данное обстоятельство и легло в основу метода Релея.

Приведём необходимые формулы для определения потенциальной энергии при изгибных, продольных и крутильных колебаниях стержневых систем:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 dx; \quad (2.36)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 dx; \quad (2.37)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l GJ_p(x) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2.38)$$

где $J(x)$, $A(x)$, J_p – некоторые зависимости момента инерции, или полярного момента инерции поперечного сечения от продольной координаты x . В реальных условиях эти зависимости могут быть достаточно сложными, и для определения интегралов следует прибегать к численным методам интегрирования.

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ АВТОМОБИЛЯ

Множество задач теории колебаний автомобиля требуют рассмотрения их в рамках единой колебательной системы, определяемой всей его конструкцией. Мы показали, что такой подход является чрезвычайно эффективным при решении множества задач свободных и вынужденных колебаний, допускающих линейную аппроксимацию. В то же время использование принципа разбиения целого на составные элементы позволяет упростить анализ и сопутствующие расчеты, но при этом неизбежно игнорируются кинематические и динамические связи, определяющие движение самих этих элементов и колебательной системы в целом. Упрощенные (парциальные) колебательные системы с весьма ограниченным числом степеней свободы и, соответственно, обобщенных координат имеют то преимущество, что они позволяют значительно упростить количественный и качественный анализ исследуемых процессов. Но и выводы, получаемые при таком анализе, будут иметь недостаточную точность и ограниченную область применения. Кроме того, необходимо иметь в виду существование такого класса задач, решение которых возможно только с учетом кинематических и динамических связей, объединяющих все элементы в единую колебательную систему.

Ниже приводятся краткое описание линейной теории свободных и вынужденных колебаний легкового автомобиля, единой колебательной системы легкового автомобиля, дифференциальные уравнения ее движения, т. е. математическая модель, и решение этих уравнений применительно к некоторым актуальным задачам теории колебаний автомобиля.

3.1. Расчетная схема и дифференциальные уравнения

Расчетная схема колебательной системы показана на рис. 1. Здесь обозначено: x, y, z – центральная система координат с началом в центре масс автомобиля; z_i – вертикальные перемещения колес и центра поддрессоренных масс, $i = 1...5$; α, β, ψ – углы поворота кузова; φ – угол поворота управляемых колес; φ_{pk} – угол поворота рулевого колеса; m_k, m – массы колес и суммарная масса автомобиля; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – моменты инерции поддрессоренных масс; c_z, c_y, c_k – коэффициенты жесткости шин в направлении координатных осей и на «верчение» относительно площадки контакта; c_3, μ_3, c_4, μ_4 – коэффициенты жесткости и сопротивления передней и задней подвесок; θ_k – момент инерции колеса относительно оси поворота.

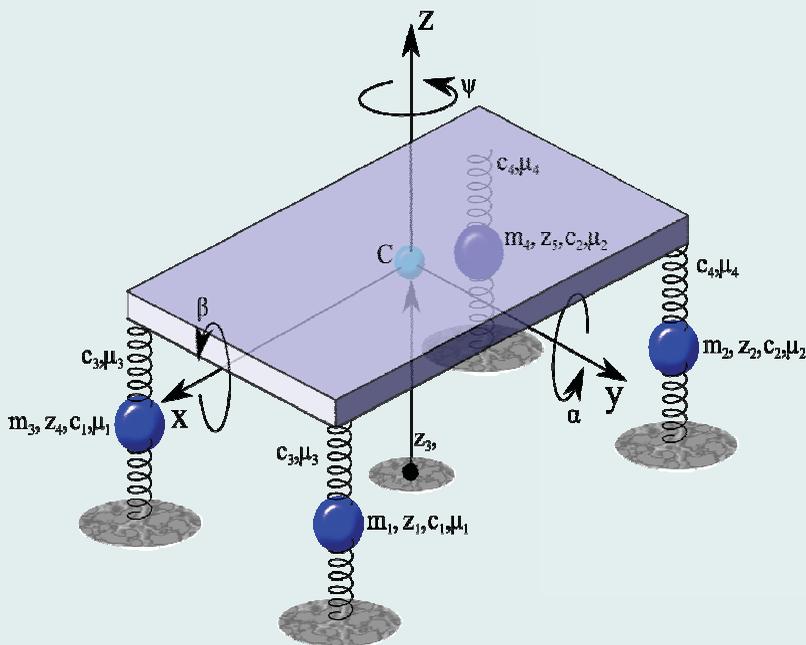


Рис. 1. Расчетная схема колебательной системы

Система дифференциальных уравнений (табл. 1), описывающих связанные колебания кузова, колес и рулевого механизма автомобиля, получена с учетом следующих допущений.

1. Углы поворотов плоскостей вращения колес и кузова вокруг продольной оси равны между собой.

2. Колебательная система принимается линейной относительно показателей жесткости и демпфирования.

3. Учитываются гироскопические моменты колес, а также центробежная сила, возникающая при поворотах управляемых колес и направленная от мгновенного центра скоростей:

$$Q_{цб} = m\omega^2 l\varphi.$$

4. Учитываются дополнительные угловые и поперечные смещения кузова, линейно связанные с поворотами управляемых колес.

Таблица 1

1.	$m_1 \ddot{z}_1 + z_1(c_1 + c_3) - c_3 z_3 - 0.5c_3 B \beta + c_3 a \alpha + (\mu_1 + \mu_3) \dot{z}_1 - \mu_3 \dot{z}_3 - 0.5\mu_3 B \dot{\beta} + \mu_3 a \dot{\alpha} = Q_1;$
2.	$m_2 \ddot{z}_2 + z_2(c_2 + c_4) - c_4 z_3 - 0.5c_4 B \beta - c_4 b \alpha + (\mu_2 + \mu_4) \dot{z}_2 - \mu_4 \dot{z}_3 - 0.5\mu_4 B \dot{\beta} - \mu_4 b \dot{\alpha} = Q_2;$
3.	$m_3 \ddot{z}_4 + z_4(c_1 + c_3) - c_3 z_3 + 0.5c_3 B \beta + c_3 a \alpha + (\mu_1 + \mu_3) \dot{z}_4 - \mu_3 \dot{z}_3 + 0.5\mu_3 B \dot{\beta} + \mu_3 a \dot{\alpha} = Q_3;$
4.	$m_4 \ddot{z}_5 + z_5(c_2 + c_4) - c_4 z_3 + 0.5c_4 B \beta - c_4 b \alpha + (\mu_2 + \mu_4) \dot{z}_5 - \mu_4 \dot{z}_3 - \mu_4 b \dot{\alpha} + 0.5\mu_4 B \dot{\beta} = Q_5;$
5.	$m \ddot{z}_3 + 2(c_3 + c_4)z_3 - c_3 z_1 - c_4 z_2 - c_3 z_4 - c_4 z_5 + 2\alpha(ac_3 - bc_4) + 2(\mu_3 + \mu_4)\dot{z}_3 - \mu_3 \dot{z}_1 - \mu_4 \dot{z}_2 - \mu_3 \dot{z}_4 - \mu_4 \dot{z}_5 + 2\dot{\alpha}(a\mu_3 - b\mu_4) = Q_5;$

6.	$\theta_y \ddot{\alpha} - 2z_3(c_3a - c_4b) + 2\alpha(c_3a^2 + c_4b^2) + c_3az_1 - c_4bz_2 +$ $+ c_3az_4 - c_4bz_5 - 2\dot{z}_3(\mu_3a - \mu_4b) - 2\dot{\alpha}(\mu_3a^2 + \mu_4b^2) +$ $+ \mu_3a\dot{z}_1 - \mu_4b\dot{z}_2 + \mu_3a\dot{z}_4 - \mu_4b\dot{z}_5 = Q_6;$
7.	$\theta_x \ddot{\beta} + 2Hc_y y_c + 2Hac_y \psi + 2Hhc_y \varphi - 0.5c_3Bz_1 + 0.5c_3Bz_4 -$ $- 0.5c_4Bz_2 + 0.5c_4Bz_5 - 0.5\mu_3B\dot{z}_1 + 0.5B\mu_3\dot{z}_4 - 0.5B\mu_4\dot{z}_2 +$ $+ 0.5B\mu_4\dot{z}_5 - 2\theta_p \omega \dot{\phi} - 4\theta_p \omega \dot{\psi} + 2c_y Hy_c - 2c_y b\psi H = Q_7;$
8.	$m(\ddot{y}_c + \dot{\phi} h \frac{b}{l}) - m\omega^2 \frac{r^2}{l} \varphi + 4c_y y_c + 2\phi h \frac{l}{h+l} c_y +$ $+ 2\psi c_y (a - b) + 4\mu_y \dot{y}_c + 2\dot{\phi} \frac{l}{h+l} h\mu_y + 2\dot{\psi} \mu_y (a - b) = Q_8;$
9.	$\theta_z \ddot{\psi} + \theta_z \ddot{\phi} \frac{h}{l} + 4c_k \psi + 2c_k \varphi + 2(y_c + \psi a + \phi h \frac{l}{h+l}) ac_y -$ $- 2(y_c - \psi b) bc_y + 4\mu_k \dot{\psi} + 2\mu_k \dot{\phi} + 2(\dot{y}_c + \dot{\psi} a + \dot{\phi} h \frac{l}{h+l}) a\mu_y -$ $- 2(\dot{y}_c - \dot{\psi} b) b\mu_y - 4\theta_p \omega \dot{\beta} = Q_9;$
10.	$\theta_k (\ddot{\psi} + \ddot{\phi}) + c_{22} \varphi + c_{22} \psi - c_y \psi ah - c_y \phi h^2 \frac{l}{l+h} + \mu_k \dot{\phi} + \mu_k \dot{\psi} -$ $- \mu_y \dot{y}_h - \mu_y \dot{\psi} ah - \mu_y \dot{\phi} h^2 \frac{l}{l+h} + c_{21} \varphi_{pk} - \theta_p \omega \dot{\beta} = Q_{10};$
11.	$\theta_{pk} \ddot{\phi}_{pk} + c_{11} \varphi_{pk} - c_{11} \frac{h}{r} \varphi + \mu_{pk} \dot{\phi}_{pk} = Q_{11}.$

Здесь дополнительно обозначено: Q_i – обобщенные силы, определяемые конкретными условиями задачи; c_{11} , c_{12} , c_{22} – коэффициенты статической жесткости рулевого механизма, где первый индекс относится к рулевому колесу, а второй – к управляемому колесу автомобиля; h – расстояние от центра опорной поверхности до точки пересечения оси поворота управляемого колеса с дорогой; u – передаточное число рулевого механизма; H – высота расположения центра подвесочных масс.

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые с учетом полученных уравнений.

3.2. Свободные колебания автомобиля

Устойчивость движения автомобиля в значительной степени определяется характером свободных угловых колебаний управляемых колес.

Численное решение полученных уравнений выполнялось в MathCAD методом Рунге – Кутты с использованием блоков Given...Odesolve. Все обобщенные силы приравнялись нулю, варьировались параметры: h и относительное демпфирование $n = \delta/2\omega$, где δ – логарифмический декремент колебаний в системе рулевого управления. В табл. 2 указан характер колебаний при различных сочетаниях параметров относительного демпфирования и плеча стабилизации h (знаком «+» здесь отмечены автоколебательные режимы, знаком «-» – свободные затухающие колебания).

Таблица 2

$n \backslash h, \text{ мм}$	-4	4	6	8	10	12	20	30	50
0,002	+	-	-	-	-	-	-	+	+
0,004	+	-	-	-	-	-	-	+	+
0,006	+	-	-	-	-	-	-	+	+
0,01	+	-	-	-	-	-	-	+	+
0,02	+	-	-	-	-	-	-	-	+
0,05	+	-	-	-	-	-	-	-	-

При малых h (<0,4 мм) и тем более при отрицательных значениях этой величины возникают автоколебания, т. е. процесс неустойчив. С увеличением h до значений 10...20 мм колебания становятся затухающими, но при чрезмерном увеличении h (>30 мм) вновь оказываются неустойчивыми.

На рис. 2, 3 приводятся графики свободных затухающих и незатухающих колебаний управляемых колес.

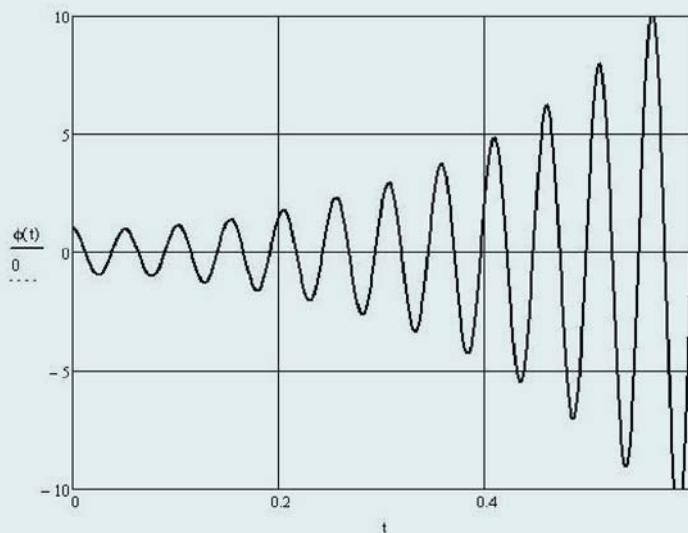


Рис. 2. График свободных затухающих колебаний управляемых колес

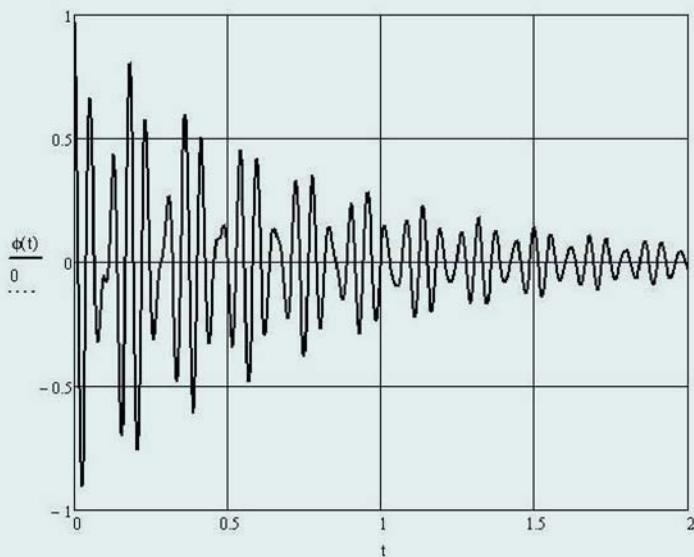


Рис. 3. График свободных незатухающих колебаний управляемых колес

4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вынужденные колебания автомобиля, возбуждаемые дисбалансами колес, а также переменной по окружности толщиной тормозных дисков, относятся, по-видимому, к числу наименее изученных задач теории колебаний автомобиля. Между тем влияние данных факторов на уровень вибрации, показатели плавности хода и, главное, на устойчивость и активную безопасность движения является, как это показано ниже, чрезвычайно весомым, определяющим общий уровень вибрации автомобиля.

Приведем вначале некоторые основные определения и положения из области балансировочной техники.

4.1. Дисбаланс и балансировка вращающихся тел

Основные термины, используемые в балансировочной технике, регламентируются ГОСТ 19534–74 «Балансировка вращающихся тел» (термины).

1. Точечная неуравновешенная масса — материальная точка, расположенная с заданным эксцентриситетом относительно оси вращения.

2. Дисбаланс точечной массы — векторная величина, равная произведению неуравновешенной массы на ее эксцентриситет

$$U = m\varepsilon.$$

Таким образом, одно и то же значение дисбаланса может быть получено при различных сочетаниях точечной массы и ее эксцентриситета.

3. Центробежная сила, возбуждаемая дисбалансом

$$P = U\omega^2.$$

Единицы измерения дисбаланса: кгм (основная единица), кгмм и т. д. Корректирующая масса – масса, используемая для уменьшения влияния дисбаланса на уровень вибрации роторной машины.

4. Плоскость коррекции – плоскость, перпендикулярная оси ротора, в которой располагается центр корректирующей массы.

5. Балансировка ротора – технологический процесс, в ходе которого определяются значения и угловые положения имеющихся дисбалансов, а также значения и угловые положения корректирующих масс, с помощью которых вредное воздействие дисбалансов снижается до допустимых пределов. Различают два способа балансировки:

1) путем установки на роторе дополнительных корректирующих масс;

2) путем удаления некоторого количества материала в отдельных точках. При этом те точки ротора, в которых устанавливаются дополнительные массы, принято называть «легкими» местами; те точки, в которых производится снятие материала, – «тяжелыми» местами. С точки зрения достигаемых результатов оба способа равноценны.

6. Начальный дисбаланс – система дисбалансов, имеющих на роторе до балансировки.

7. Остаточный дисбаланс – система дисбалансов, имеющих на роторе после балансировки.

8. Главный вектор дисбалансов – вектор, перпендикулярный оси ротора и проходящий через центр масс и равный геометрической сумме всех имеющихся дисбалансов.

9. Главный момент дисбалансов – вектор, перпендикулярный оси ротора и равный геометрической сумме моментов всех дисбалансов относительно его центра масс.

В соответствии с известными положениями механики, систему дисбалансов недеформируемого (так называемого «жесткого») ротора можно эквивалентно заменить главным

вектором дисбалансов, приложенным в центре масс ротора, и главным моментом относительно того же центра.

Статическая неуравновешенность ротора – неуравновешенность, при которой главный вектор дисбалансов не равен, а главный момент равен нулю.

Моментная неуравновешенность ротора – неуравновешенность, при которой равен нулю главный вектор, а главный момент дисбалансов не равен нулю.

Динамическая неуравновешенность ротора – неуравновешенность, при которой и главный вектор, и главный момент дисбалансов не равны нулю.

Удельный дисбаланс – отношение главного вектора дисбалансов к массе ротора. Удельный дисбаланс имеет размерность длины.

Если $\vec{U}_A, \vec{U}_B, \vec{M}_C(\vec{U}_A), \vec{M}_C(\vec{U}_B)$ – дисбалансы корректирующих масс в плоскостях коррекции А и В и их моменты относительно центра масс ротора (т. С), то значения указанных дисбалансов определяются из следующих условий равновесия:

$$\vec{U}_A + \vec{U}_B = -\vec{U}_0;$$

$$\vec{M}_C(\vec{U}_A) + \vec{M}_C(\vec{U}_B) = -\vec{V}_C;$$

где \vec{U}_0, \vec{V}_C – главный вектор и главный момент дисбалансов.

Современные балансировочные станки позволяют определять все входящие в эти уравнения величины в автоматическом режиме.

4.2. Вибрация автомобиля, возбуждаемая статическим дисбалансом

Следует учитывать, что влияние статического и моментного дисбалансов на динамические характеристики автомобиля различны. Здесь рассматривается вибрация

автомобиля в вертикальном направлении, возбуждаемая статическим дисбалансом.

Для анализа использована так называемая плоская модель автомобиля, задаваемая обобщенными координатами $z_1 \dots z_3$, т. е. вертикальными перемещениями колес и центра масс кузова, и углом поворота кузова α (рис. 4).

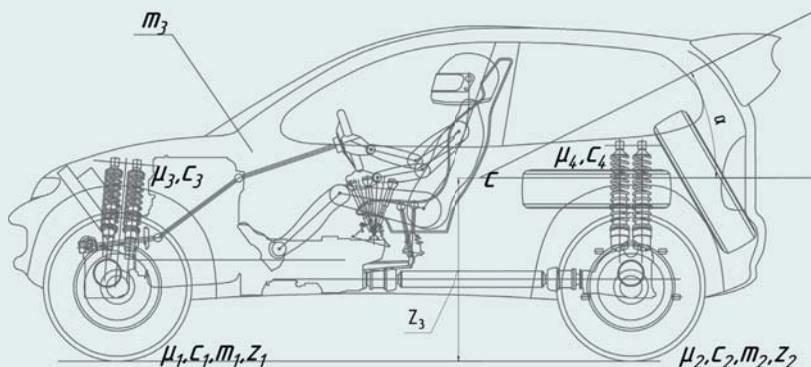


Рис. 4. Плоская модель автомобиля

Дифференциальные уравнения движения получены с помощью одной из модификаций уравнений Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i,$$

где T , Π – кинетическая и потенциальная энергии системы; R – диссипативная функция Релея; q_i, \dot{q}_i – обобщенные координаты и скорости.

Для плоской модели были получены следующие выражения для указанных функций:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k \dot{z}_k^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_c^2 \dot{\alpha}^2;$$

$$P = \frac{1}{2}c_1 z_1^2 + \frac{1}{2}c_2 z_2^2 + \frac{1}{2}c_3 (z_3 - z_1 + a\alpha)^2 + \frac{1}{2}c_4 (z_3 - z_2 - b\alpha)^2;$$

$$R = \frac{1}{2}\mu_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}\mu_3 (\dot{z}_3 - \dot{z}_1 + a\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}\mu_4 (\dot{z}_3 - \dot{z}_2 + b\dot{\alpha})^2.$$

Здесь обозначено: $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, $\mu_1 = \mu_2$ – массы, коэффициенты жесткости и приведенные коэффициенты сопротивления колес; m_3 , ρ_c – суммарная масса. Здесь обозначено: $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, $\mu_1 = \mu_2$ – массы, коэффициенты жесткости и приведенные коэффициенты сопротивления колес; m_3 , ρ_c – суммарная масса и радиус инерции поддресоренных масс; c_3 , μ_3 – жесткость и коэффициент сопротивления передней подвески; c_4 , μ_4 – жесткость и коэффициент сопротивления задней подвески; a , b – расстояния от передних и задних колес до центра масс автомобиля.

Обобщенные силы, соответственно, равны:

$$Q_1 = Q_2 = U\omega^2 \sin \omega t; \quad Q_3 = Q_4 = 0.$$

Значение статического дисбаланса принимаем равным $U = 0,01$ кг·м, что примерно соответствует его максимальным значениям, наблюдаемым в эксплуатации. Взаимное угловое расположение колес подвергается непрерывному тренду, и время от времени их дисбалансы будут располагаться в одной фазе. В дальнейшем рассматривается именно этот случай, как наиболее неблагоприятный.

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{z}_1 + \mu_1 \dot{z}_1 - \mu_3 \dot{z}_3 + \mu_3 a \dot{\alpha} + c_1 z_1 - c_3 z_3 + c_3 z_1 - c_3 a \alpha = U_1 \omega^2 \sin \alpha t \\ m_2 \ddot{z}_2 + \mu_2 \dot{z}_2 - \mu_4 \dot{z}_3 + \mu_4 \dot{z}_2 + \mu_4 b \dot{\alpha} + c_2 z_2 - c_4 z_3 + c_4 z_2 + c_4 b \alpha = U_2 \omega^2 \sin \alpha t \\ m_3 \ddot{z}_3 + z_3 (c_3 + c_4) - c_3 z_1 - c_4 z_2 + \alpha (c_3 a - c_4 b) + (\mu_3 + \mu_4) \dot{z}_3 - \mu_3 \dot{z}_1 - \mu_4 \dot{z}_2 + \dot{\alpha} (\mu_3 a - \mu_4 b) = 0 \\ m_3 \rho^2 \ddot{\alpha} + z_3 (c_3 a - c_4 b) - c_3 a z_1 + c_4 b z_2 + \alpha (c_3 a^2 + c_4 b^2) + (a^2 \mu_3 + b^2 \mu_4) \dot{\alpha} - \mu_3 a \dot{z}_1 - \mu_4 b \dot{z}_2 + \\ + \dot{z}_3 (\mu_3 a - \mu_4 b) = 0 \end{array} \right.$$

Укажем, что данная система уравнений может быть легко получена из общей системы путем исключения некоторой части обобщенных координат и их производных.

Решения уравнений, описывающие вынужденные колебания, принимались в виде:

$$\begin{cases} z_1 = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t \\ z_2 = a_3 \sin \omega t + a_4 \cos \omega t \\ z_3 = a_5 \sin \omega t + a_6 \cos \omega t \\ \alpha = a_7 \sin \omega t + a_8 \cos \omega t \end{cases}$$

где $a_1 \dots a_8$ определяются из уравнения

$$X = A^{-1}B;$$

$$B = (U\omega^2 \quad 0 \quad U\omega^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T;$$

$$X = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8)^T;$$

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega^2 & -\omega(\mu_1 + \mu_2) & 0 & 0 & -c_3 & \omega \mu_3 & -a \cdot c_3 & a \cdot \omega \mu_3 \\ \omega(\mu_1 + \mu_2) & c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega^2 & 0 & 0 & -\omega \mu_3 & -c_3 & -a \cdot \omega \mu_3 & -a \cdot c_3 \\ 0 & 0 & c_3 + c_4 - m_2 \cdot \omega^2 & -\omega(\mu_3 + \mu_4) & -c_4 & \omega \mu_4 & b \cdot c_4 & -b \cdot \omega \mu_4 \\ 0 & 0 & \omega(\mu_3 + \mu_4) & c_3 + c_4 - m_2 \cdot \omega^2 & -\omega \mu_4 & -c_4 & b \cdot \omega \mu_4 & b \cdot c_4 \\ -c_3 & \mu_3 \cdot \omega & -c_4 & \mu_4 \cdot \omega & c_3 + c_4 - m_3 \cdot \omega^2 & -\omega(\mu_3 + \mu_4) & c_3 \cdot a - c_4 \cdot b & -\omega(\mu_3 \cdot a - \mu_4 \cdot b) \\ -\mu_3 \cdot \omega & -c_3 & -\mu_4 \cdot \omega & -c_4 & \omega(\mu_3 + \mu_4) & c_3 + c_4 - m_3 \cdot \omega^2 & \omega(\mu_3 \cdot a - \mu_4 \cdot b) & c_3 \cdot a - c_4 \cdot b \\ -c_3 \cdot a & \mu_3 \cdot a \cdot \omega & c_4 \cdot b & -\mu_4 \cdot b \cdot \omega & c_3 \cdot a - c_4 \cdot b & -\omega(a \cdot \mu_3 - b \cdot \mu_4) & a^2 \cdot c_3 + b^2 \cdot c_4 - m_3 \cdot \rho^2 \omega^2 & -\omega(\mu_3 \cdot a^2 + \mu_4 \cdot b^2) \\ -\mu_3 \cdot a \cdot \omega & -c_3 \cdot a & \mu_4 \cdot b \cdot \omega & c_4 \cdot b & \omega(a \cdot \mu_3 - b \cdot \mu_4) & c_3 \cdot a - c_4 \cdot b & \omega(\mu_3 \cdot a^2 + \mu_4 \cdot b^2) & a^2 \cdot c_3 + b^2 \cdot c_4 - m_3 \cdot \rho^2 \cdot \omega^2 \end{pmatrix}$$

Полученные уравнения исследовались численно, причем амплитудные значения обобщенных координат находились по формулам:

$$A_1 = (a_1^2 + a_2^2)^{0,5}; \quad A_2 = (a_3^2 + a_4^2)^{0,5};$$

$$A_3 = (a_5^2 + a_6^2)^{0,5}; \quad A_4 = (a_7^2 + a_8^2)^{0,5}.$$

Одновременно определялась амплитуда колебаний места водителя:

$$A_0 = [(a_5 + a_7 \cdot l_0)^2 + (a_6 + a_8 \cdot l_0)^2]^{0,5}.$$

Исходные данные, принятые в расчете:

$$m_1 = m_2 = 20 \text{ кг}; \quad m_3 = 900 \text{ кг}; \quad a = 1 \text{ м}; \quad b = 1,5 \text{ м}; \quad \rho = 1 \text{ м};$$

$$c_1 = c_2 = 0,4 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{М}}; \quad c_3 = c_4 = 4 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{М}};$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 100 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}}; \quad \mu_3 = \mu_4 = 3500 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}}.$$

Некоторые результаты расчета представлены на рис. 5 в виде графиков зависимостей амплитуды виброускорения водительского места ($a_{\text{вод}}$) и центра подрессоренных масс (a_c), а также в табл. 3.

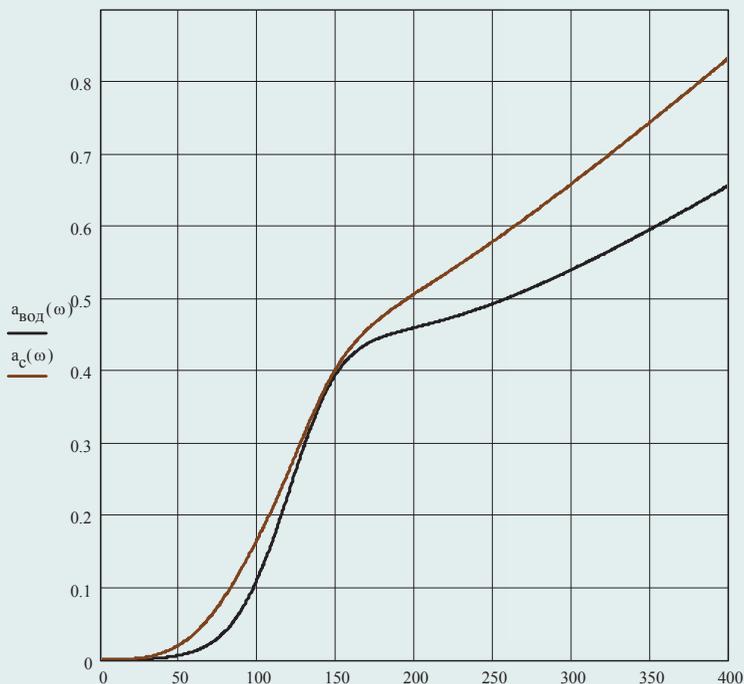


Рис. 5. График зависимостей амплитуды виброускорения водительского места и центра подрессоренных масс

Таблица 3

$\omega, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$v, \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	$a_{\text{вод}}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$a_c, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
100	72	0,1	0,17
150	108	0,4	0,4
200	144	0,47	0,5
250	180	0.49	0,58

Сравним полученные результаты с принятыми в настоящее время нормами на показатели плавности хода автомобиля. Согласно ОСТ 37.001.291–89 предельный уровень виброускорения при движении по цементобетонной дороге не должен превышать $0,6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. По нормам VDI-2057 вибрация при уровне $0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ уже становится непереносимой при много часовом воздействии и может выдерживаться не более одного часа; вибрация с уровнем $0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ является чрезвычайно неприятной и переносится человеком не более 10 мин.

Итак, статические дисбалансы колес являются фактором, существенно ухудшающим показатели плавности хода легкового автомобиля.

4.3. Колебания, возбуждаемые моментными дисбалансами колес

Вынужденные колебания автомобиля, возбуждаемые моментными дисбалансами колес, имеют значительно более сложную природу, чем колебания, возбуждаемые статическими дисбалансами. Угловые колебания управляемых колес вокруг осей поворота, возбуждаемые моментными дисбалансами, при наличии «плеча обката» и благодаря воздействию гироскопических моментов колес, вовлекают в единый колебательный процесс всю конструкцию автомобиля целиком. Следовательно, для описания этого результирующего процесса необходимо использовать обобщенную систему дифференциальных уравнений, приведенную выше.

Определенная трудность при решении данной задачи связана с тем обстоятельством, что фазы всех статических и моментных дисбалансов представляют собой случайные величины, изменяющиеся в диапазоне $(0...2\pi)$. Суперпозиция колебаний, приходящих в данную точку от различных возбудителей, имеющих различные модули и фазы, равномерно распределенные в интервале $(0...2\pi)$, представляет собой вероятностную задачу. Здесь мы рассматриваем вынужденные колебания автомобиля, возбуждаемые моментным дисбалансом левого переднего (управляемого) колеса. Для этого случая все обобщенные силы, кроме Q_{10} , принимаются равными нулю, и

$$Q_{10} = V_0 \times \omega^2,$$

где V_0 – некоторое значение моментного дисбаланса, отвечающее заданной вероятности p_0 .

На рис. 6 показаны результаты расчета амплитуд вынужденных колебаний, возбуждаемых моментным дисбалансом.

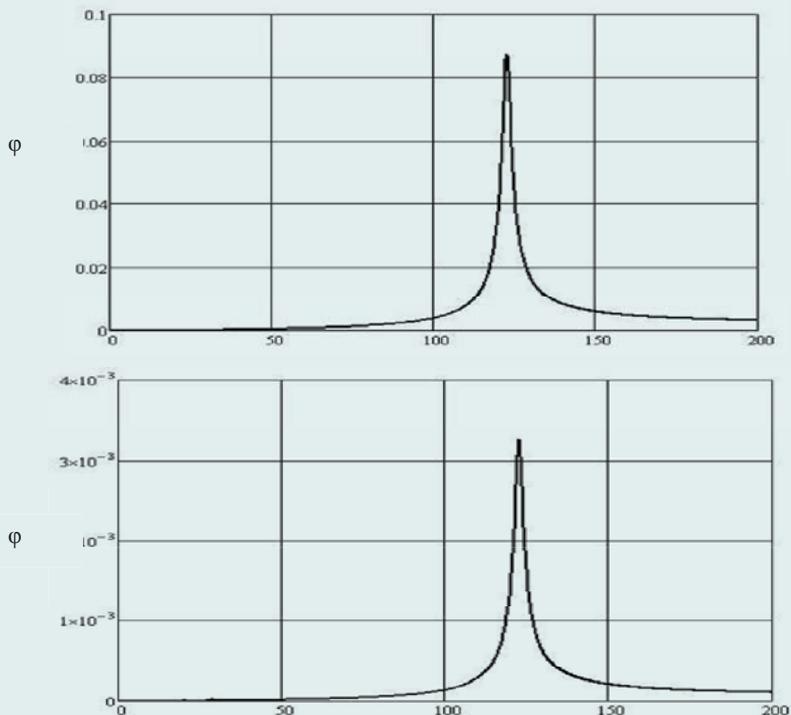


Рис. 6. Амплитуды вынужденных колебаний, возбуждаемых моментным дисбалансом

4.4. Колебания, возбуждаемые переменной толщиной тормозных дисков в условиях торможения

Вибрация, возникающая при торможении автомобилей, оснащенных дисковым тормозом, – явление, хорошо известное широкому кругу автомобилистов. Известна также причина этого явления – случайные погрешности изготовления тормозного диска: торцевое биение и разнотолщинность. Последовательность событий, вызывающих такую вибрацию, выглядит следующим образом: переменная по окружности

толщина тормозного диска; вибрационное перемещение поршня тормозного цилиндра, происходящее с частотой вращения колеса; пульсация давления тормозной жидкости в цилиндре с той же частотой; циклическое изменение момента сил трения на тормозном диске и, соответственно, — тормозной силы, передаваемой на колесо со стороны дорожного полотна. Так возникают циклически изменяемые с частотой вращения колеса моменты тормозной силы, передаваемые как на колесо, так и на автомобиль в целом. Указанные моменты и являются конечной причиной вибрации автомобиля, возникающей в процессе торможения.

Переменная составляющая тормозной силы F , передаваемой на колесо, и моменты этой силы относительно оси поворота колеса (V_2) и относительно центра масс автомобиля (V_1) будут соответственно равны:

$$F = 2Q \frac{r}{R} f;$$

$$V_1 = F \cdot \frac{B}{2}; V_2 = F \cdot h,$$

где Q — переменная составляющая силы давления тормозной жидкости на поршень и дно цилиндра; r — определяет положение центра тормозных колодок на тормозном диске; R — радиус качения колеса; f — коэффициент трения между диском и накладками; h — плечо тормозной силы относительно оси поворота колеса; B — ширина колеи автомобиля. Переменная составляющая силы давления Q определяется амплитудой пульсации давления тормозной жидкости в цилиндре, возбуждаемой вибрационным перемещением поршня:

$$Q = \sigma(p' + p''),$$

где σ — площадь поршня; p' — составляющая пульсации, определяемая по формуле Бернулли (модель идеальной

жидкости); p'' – составляющая, определяемая по формуле Пуазейля (модель ламинарного течения вязкой жидкости):

$$p' = \frac{1}{2} \rho u^2 \left(\frac{D}{d} \right)^2; p'' = \frac{128 \mu l \sigma}{\pi d^4} \cdot V,$$

где ρ и μ – удельная плотность и динамическая вязкость тормозной жидкости; D – диаметр поршня; d и l – внутренний диаметр и длина трубопровода подвода тормозной жидкости к цилиндру; V – виброскорость движения поршня:

$$V = 0,5 \cdot \Delta \cdot \omega \cdot \sin \omega t,$$

здесь Δ – максимальная разнотолщинность тормозного диска; ω – угловая скорость колеса.

Составляющая давления p' , найденная для типичных на данный момент параметров тормозной системы, сравнительно мала, а определяемая ею величина тормозной силы на колесе не превышает 5...10 Н. В дальнейшем расчете принимается во внимание только составляющая p'' .

Таким образом, мы найдем:

$$Q = \gamma \cdot V,$$

где $\gamma = \frac{128 \mu l \sigma^2}{\pi d^4}$ – коэффициент сопротивления движению поршня (Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. Курс теоретической механики, т. II. ГИТТЛ, М., 1955).

В табл. 4 приводятся некоторые данные, характеризующие кинематическую вязкость одной из марок тормозных жидкостей.

Таблица 4

t°, C	-40	50	100
ν, cSt	≤ 1450	≥ 5	≥ 2

Как видим, вязкость тормозной жидкости обнаруживает чрезвычайно сильную зависимость от окружающей температуры. Аппроксимируя эту зависимость экспонентой

$$\nu(t) = 85,4 \cdot \exp(-7,094 \cdot 10^{-2} t),$$

мы найдем, например, что при $t = 10^\circ\text{C}$ $\nu = 40$ сСт; при $t = 0^\circ\text{C}$ $\nu = 174$ сСт.

Для сравнения укажем, что кинематическая вязкость воды при $t = 20^\circ\text{C}$ составляет $\nu = 1$ сСт.

Числовой анализ выполнен при следующих исходных данных: $t = 10^\circ\text{C}$; $\nu = 40$ сСт; $\mu = 0,04$ Па·с; $\frac{r}{R} = 0,5$; $f = 0,5$; $d = 3,35 \cdot 10^{-3}$ м; $l = 1,2$ м; $\sigma = 18,1 \cdot 10^{-4}$ м²; $\Delta = 1 \cdot 10^{-4}$ м; $h = 0,1$ м; $H = 1$ м.

Далее мы найдем:

$$Q = \gamma \cdot V; F_{\text{тр}} = 2\gamma V \frac{r}{R} f; V_1 = 2\gamma V \frac{r}{R} fH; V_2 = 2\gamma V \frac{r}{R} fh,$$

причем при указанных параметрах $\gamma = 5,08 \cdot 10^4$ Нс / м.

Параметры вибрации автомобиля, возбуждаемой моментами V_1 и V_2 , гармонически изменяющимися с частотой ω , определим по результатам решения приведенной выше системы дифференциальных уравнений, причем обобщенные силы для этого случая будут равны:

$$Q_9 = V_1 \omega^2 \sin \omega t;$$

$$Q_{10} = V_2 \omega^2 \sin \omega t.$$

Все остальные обобщенные силы принимаются равными нулю.

Результаты расчетов представлены на рис. 7, где обозначено: A_1 и A_3 – амплитуды поперечных колебаний автомобиля и угловых колебаний управляемых колес; G_1 и G_3 – амплитуды, полученные с учетом динамического гашения колебаний.

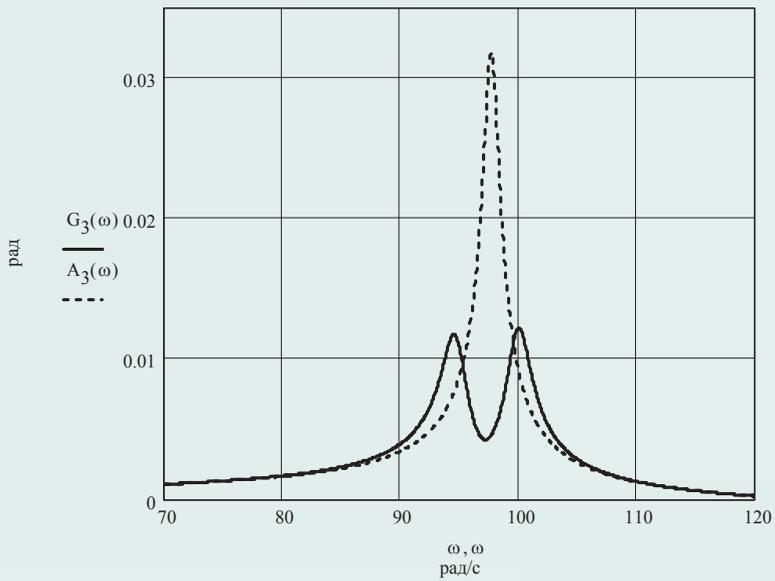
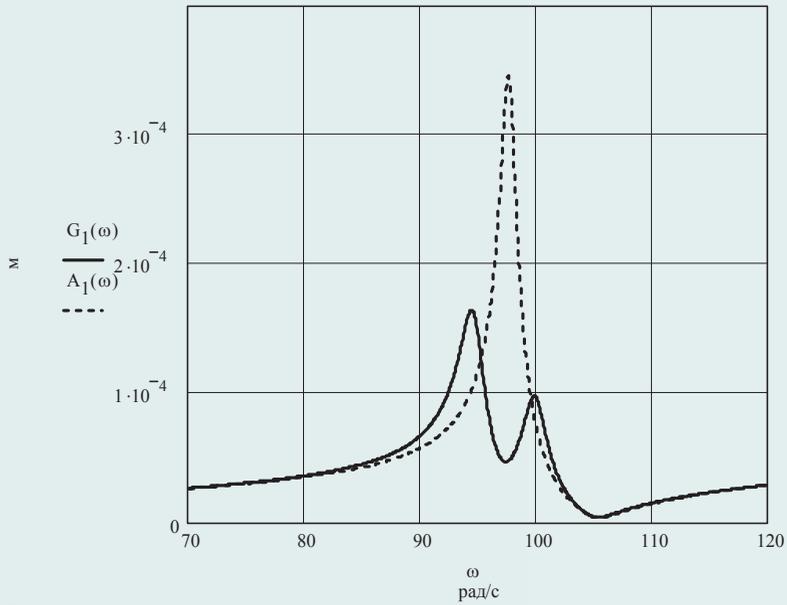


Рис. 7. Результаты расчетов

Вибрация, возникающая при торможении, имеет отчетливо выраженный резонансный характер, причем резонансный максимум приходится на скорость порядка 100 км/ч. На этом режиме амплитуда поперечных колебаний достигает 0,4 мм, а амплитуда угловых колебаний управляемых колес – 0,07 рад. Соответственно, амплитуда колебаний рулевого колеса, полученная с учетом передаточного отношения $U \approx 10$, достигает 0,7 рад, что не может не сказаться на условиях безопасности движения. Напомним, что предоставленные результаты относятся к температуре окружающего воздуха +10 °С; при снижении температуры на каждые 10° показатели вязкости и показатели вибрации практически удваиваются.

В свете сказанного становятся очевидными и некоторые способы устранения данного чрезвычайно опасного с точки зрения безопасности движения явления. К ним относятся следующие: применение менее вязких тормозных жидкостей; увеличение внутренних диаметров трубопроводов подвода тормозной жидкости к цилиндрам; повышение точности изготовления и установки тормозных дисков. Наконец, динамическое гашение колебаний, которое является универсальным средством, в равной степени устраняющим как вибрацию, возникающую при торможении, так и вибрацию, возбуждаемую моментным дисбалансом колес.

При соответствующей модификации представленная математическая модель может применяться для решения многих задач теории колебаний автомобиля, в частности:

- о колебаниях, возбуждаемых статическими и моментными дисбалансами колес;
- колебаниях, возбуждаемых разнотолщинностью тормозных дисков в условиях торможения;
- устойчивости угловых колебаний управляемых колес;
- колебаниях при кинематическом возбуждении, идущем со стороны дороги;

- движении автомобиля, преодолевающего одиночное препятствие;
- динамическом гашении вынужденных колебаний;
- учете импеданса человеческого тела и кузова автомобиля;
- крутильных колебаниях трансмиссии и др.

5. О СУПЕРПОЗИЦИИ КОЛЕБАНИЙ

Задача о суперпозиции колебаний, приходящих в данную точку от различных источников, приводит к схеме суммирования случайных векторных величин, при которой фазы слагаемых распределены по закону равномерной плотности в интервале $(-\pi; \pi)$, а их модули детерминированы и определяются из соответствующего динамического расчета. Можно показать, что при таких условиях модуль результирующего вектора R подчиняется закону распределения Релея:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}},$$

где α – параметр распределения. Для принятой схемы суммирования параметр распределения суммарного вектора будет равен:

$$\alpha(R) = \sqrt{0,5 \sum_{i=1}^n r_i^2},$$

где r_i , n – модули слагаемых векторов и их число.

Пусть R_0 – вероятность события, состоящего в том, что случайная величина R (в нашем случае общий уровень вибрации в заданной точке) превышает некоторое предельное значение R_0 . Тогда мы найдем:

$$R_0 = \alpha(R) \sqrt{2 \ln \frac{1}{P_0}};$$

$$k = \frac{R_0}{\alpha(R)} = \sqrt{2 \ln \frac{1}{P_0}}.$$

Задавая различные значения вероятностей R_0 , мы находим соответствующий этим вероятностям предельный уровень суммарной вибрации.

6. УЧЕТ ИМПЕДАНСА ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ АНАЛИЗЕ И РАСЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ АВТОМОБИЛЯ

Качество автомобиля, его конкурентоспособность определяются множеством равнозначных показателей – топливной экономичностью, надежностью, технологичностью, управляемостью и устойчивостью, экологичностью, акустической активностью и т. д.

Плавность хода автомобиля есть отражение чувствительности человеческого организма к воздействию вибрации, генерируемой во время движения.

О воздействии вибрации на человека можно судить по следующим данным, приведенным в нормали VDI-2057 (табл. 5)

Таблица 5

Виброускорение, $\text{м/с}^2 \cdot 10^{-3}$	Субъективная оценка воздействия вибрации
2...5	Едва ощутима, хорошо переносится при много- часовом воздействии
10...20	Хорошо ощутима при многочасовом воздействии, умеренно неприятна, переносима
50...100	Сильно ощутима, при многочасовом воздействии довольно неприятна, еще переносима
200...500	Неприятна, при многочасовом воздействии непереносима, выдерживается около 1 часа
1000...2000	Очень неприятна, переносится около 10 минут
4000...5000	Исключительно неприятна, переносится около 1 минуты

Согласно отраслевому стандарту на автотранспортные средства ОСТ 37001 291–84 «Технические нормы плавности хода» предельные технические нормы вибрации легковых автомобилей должны соответствовать данным табл. 6.

Таблица 6

Характеристика дороги	a_z	a_x, a_y
1	0,8	0,6
2	1,1	0,8
3	2	1,3

Здесь 1 – дорога с цементобетонным покрытием; 2 – булыжная мощеная дорога; 3 – булыжник с выбоинами; a_x, a_y, a_z – средние квадратические значения виброускорений в продольном, поперечном и вертикальном направлениях, замеренных в заданных точках контроля.

Чувствительность человеческого организма к вибрации очень индивидуальна. Тем не менее установлен общепринятый количественный критерий для оценки плавности хода автомобилей, а именно среднее квадратичное значение виброускорений, замеряемых в заранее оговоренных точках в диапазоне частот 0,5...30 Гц. Данное обстоятельство позволяет использовать методы численного анализа для проектирования автомобилей с заранее заданными характеристиками плавности хода.

Однако при выполнении соответствующих расчетов необходимо учитывать, что масса человека (водителя или пассажира) составляет заметную часть массы легкового автомобиля, и, следовательно, такой расчет необходимо выполнять с учетом динамических характеристик (импеданса) человеческого тела. Такая вспомогательная задача может быть решена только эмпирически с использованием необходимого вибрационного оборудования (вибростендов) и соответствующей виброизмерительной аппаратуры.

Схема подобного эксперимента может быть следующей. Пусть имеется сравнительно легкая и достаточно жесткая упруго закрепленная платформа, способная совершать свободные или вынужденные колебания в вертикальном направлении. На платформе располагается тестируемый человек, сидящий на неподвижно закрепленном автомобильном кресле. Под действием заданной гармонической возбуждающей силы

$$F(t) = F_0 \cdot \cos \omega t$$

платформа вводится в режим вынужденных колебаний, совершая движение по закону

$$x(t) = a(\omega) \cdot \cos \omega t + b(\omega) \cdot \sin \omega t,$$

где линейные коэффициенты $a(\omega)$ и $b(\omega)$ подлежат непосредственному измерению на каждой заданной круговой частоте ω в ходе эксперимента.

Конечно, амплитуда возбуждающей силы должна выбираться из условия безопасности тестируемого человека. В качестве генератора колебаний может быть использован дисбалансный, электромагнитный или любой другой вибратор, способный поддерживать заданное значение возбуждающей силы и легко регулируемый в достаточных пределах по амплитуде возбуждающей силы и по частоте.

Динамические характеристики, или импеданс тела человека, могут быть аппроксимированы зависящими от частоты параметрами некоего упруго-демпфирующего элемента — $c(\omega)$ и $\mu(\omega)$, т. е. коэффициентами динамической жесткости и сопротивления, которые могут быть найдены из условия равновесия сил:

$$F(t) + c(\omega) \cdot x(t) + \mu(\omega) \cdot \dot{x}(t) + c_0 \cdot x(t) = 0,$$

где c_0 — жесткость подвески платформы;

$$c(\omega) = F_0 \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - c_0, \quad \mu(\omega) = \frac{F_0 \cdot b}{\omega \cdot (a^2 + b^2)},$$

причем величины F_0 , a , b , ω определяются из условий эксперимента.

Теперь динамические коэффициенты жесткости и сопротивления могут использоваться при расчетах вынужденных колебаний. Для этого найденные дифференциальные уравнения модернизируются следующим образом. В левую часть уравнения (5) (табл. 1) включается группа слагаемых:

$$+c(\omega) \cdot (z_3 - \alpha \cdot x_A + \beta \cdot y_A) + \mu(\omega) \cdot (\dot{z}_3 - \dot{\alpha} \cdot x_A + \dot{\beta} \cdot y_A);$$

в левую часть уравнения (6) (табл. 1) включаются слагаемые:

$$c(\omega) \cdot (z_3 - \alpha x_A + \beta y_A) \cdot x_A + \mu(\omega) \cdot (\dot{z}_3 - \dot{\alpha} x_A + \dot{\beta} y_A) \cdot x_A;$$

в левую часть уравнения (7) (табл. 1) включаются слагаемые:

$$c(\omega) \cdot (z_3 - \alpha x_A + \beta y_A) \cdot y_A + \mu(\omega) \cdot (\dot{z}_3 - \dot{\alpha} x_A + \dot{\beta} y_A) \cdot y_A;$$

здесь дополнительно обозначено x_A , y_A – координаты центров масс водителя или пассажиров.

7. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АВТОМОБИЛЯ

Наиболее мощным возбудителем колебаний автомобиля является кинематическое возбуждение, идущее со стороны неровностей дорожного полотна. Будучи хаотично расположенными в пространстве, они являются одной из основных причин случайных колебаний, которым подвержены все узлы автомобиля.

Случайными называют колебания, возникающие при воздействии на колебательную систему возбуждающей силы или кинематического возбуждения, зависимость которых от времени носит случайный характер.

Приведем некоторые основные сведения о случайных величинах и случайных функциях, позволяющие решить следующую основную задачу: определить вероятностные характеристики движения колебательной системы по заданным вероятностным характеристикам силового или кинематического возбуждения.

Случайная величина — величина, принимающая в результате опыта то или иное заранее не предсказуемое значение. Различают случайные величины *дискретные*, т. е. принимающие произвольные значения из заданного ряда значений (например, число попаданий в цель в серии из заданного числа выстрелов), а также *непрерывные случайные величины*, т. е. величины, принимающие произвольные значения из заданного интервала значений (например, фактический размер детали, возможный в пределах указанного допуска).

Случайные события — события, которые могут либо произойти, либо не произойти при самом строгом выполнении условий данного опыта.

Вероятность события есть численная мера его объективной возможности, которая может варьироваться в пределах от нуля до единицы. *Достоверное событие* — событие,

вероятность которого равна единице, *невозможное* событие – событие, вероятность которого равна нулю.

Функция распределения непрерывной случайной величины X есть вероятность события, состоящего в том, что эта величина не превысит некоторого значения x : $F(x) = p(X < x)$; $F(x)$ – неубывающая функция, изменяющаяся в пределах от нуля до единицы.

Плотность распределения или дифференциальный закон распределения есть первая производная от интегральной функции $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Вероятность такого события, что случайная величина X окажется в пределах $(a; b)$, определится следующим образом:

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

$$D(x) = \int (x - M(x))^2 \cdot f(x) dx.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}.$$

Нормальный закон распределения (закон распределения Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-M(x))^2}{2\sigma^2}}.$$

Случайная функция, т. е. такая функция, определяющая зависимость некоторой величины x от аргумента t , которая

в результате каждого опыта принимает заранее неизвестный вид. Например, высота и расположение дорожного покрытия, которыми и определяется уровень кинематического возбуждения автомобиля.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной функции. Пусть получено n реализаций случайной функции $x(t)$. Для некоторого фиксированного момента времени значения этих функций определяют некоторую случайную величину, для которой можно определить ее характеристики – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Каждая из этих величин представляет собой некоторые функции времени, характеризующие указанные реализации случайной функции.

Корреляционная функция есть математическое ожидание произведений

$$K(t, t + \tau) = M[(x(t) - m(t)) \cdot (x(t + \tau) - m(t + \tau))].$$

Корреляционная функция характеризует степень зависимости между сечениями случайной функции при различных моментах времени: t и $t + \tau$.

Коэффициент корреляции есть отношение корреляционной функции к произведению соответствующих среднеквадратичных значений случайной функции.

Стационарный случайный процесс. Случайная функция или случайный процесс называются стационарными, если все указанные выше характеристики этого процесса не зависят от времени. В частности, корреляционная функция зависит только от интервала времени τ .

Эргодическое свойство случайных функций состоит в том, что каждая отдельная реализация случайной функции при условии ее достаточной продолжительности может заменить множество ее реализаций при той же общей продолжительности.

Спектральная плотность $S(\omega)$ описывает распределение дисперсий случайного процесса по частотам его непрерывного спектра.

Корреляционная функция и спектральная плотность связаны между собой преобразованием Фурье:

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} s(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

$$s(\omega) = \frac{2}{\pi} \int K(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Спектральная плотность вынужденных колебаний при случайном возбуждении. Рассматривается задача по определению вероятностных характеристик движения колебательной системы по заданной спектральной плотности возбуждающей силы или кинематического возбуждения. Здесь основными являются соотношения, связывающие спектральные плотности возбуждения и самого колебательного процесса:

$$S_q(\omega) = S_Q(\omega) |W|^2,$$

где q – обобщенная координата колебательной системы; Q – обобщенная возбуждающая сила; W – амплитудно-частотная характеристика системы.

Таким образом, используется следующее правило: *при преобразовании случайной функции стационарной линейной системой спектральная плотность исходной функции умножается на квадрат модуля частотной характеристики системы.*

В целом решение задачи включает два этапа: определение спектральной плотности неровностей дорожного полотна и расчет амплитудно-частотной характеристики. При этом решение второй части задачи достигается с помощью приведенной выше системы дифференциальных уравнений и обобщенных сил:

$$Q_1 = c_1, Q_2 = \dots = Q_{11} = 0.$$

8. ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ РУЛЕВОГО МЕХАНИЗМА

Дисбалансы колес и переменная по окружности толщина тормозных дисков существенно влияют на показатели плавности хода и виброкомфорта рулевого управления. Последнее обстоятельство является особенно важным, поскольку непосредственно связано с вопросами активной безопасности движения. Казалось бы, для решения данной проблемы достаточно ужесточить допуски на величину остаточных дисбалансов и повысить точность изготовления тормозных дисков. Однако и дисбалансы, и разнотолщинность тормозных дисков сравнительно быстро и неконтролируемо возрастают со временем, являясь, по существу, постоянно действующими факторами эксплуатации. Поэтому решением могут стать конструкционные методы гашения вибрации, в данном случае это демпфирование и (или) динамическое гашение.

Рассматривалась схема установки динамического гасителя на поперечной тяге рулевого механизма. Соответственно, в систему дифференциальных уравнений вводится дополнительное уравнение (12) (табл. 1), описывающее колебания инертной массы:

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \varphi_{pk} r + \mu_2 \dot{x}_2 - \mu_2 \dot{\varphi}_{pk} r = 0;$$

в левую часть уравнения (11) (табл. 1) вводится группа дополнительных слагаемых: $(c_2 r \dot{\varphi}_{pk} - c_2 \dot{x}_2 + \mu_2 r \dot{\varphi}_{pk})$. Конструкция гасителя колебаний выполнена в соответствии с патентом «Гидравлический виброгаситель» № 77372.

Выполненные расчеты и эксперименты позволяют сделать следующие выводы.

1. Представленная математическая модель достаточно точно аппроксимирует свободные и вынужденные колебания легкового автомобиля.

2. Дисбалансы колес, а в условиях торможения – окружная разнотолщинность тормозного диска относятся к числу наиболее мощных и постоянно действующих возбудителей вибрации легкового автомобиля.

3. Динамическое гашение колебаний рулевого механизма позволяет уменьшить уровень вибрации отдельных узлов автомобиля, в том числе рулевого колеса, в 1,5...2 раза; при этом суммарная масса самого гасителя не превышает 2 кг.

4. Разработан общий подход к решению широкого круга задач свободных и вынужденных колебаний на основе представленной математической модели колебательной системы легкового автомобиля.

9. ГАСИТЕЛИ КОЛЕБАНИЙ

Проблемы гашения шума и вибрации относятся к числу наиболее актуальных в машиностроении. Теория колебаний устанавливает общие приемы решения данной проблемы: демпфирование, динамическое гашение, снижение уровня возбуждающих нагрузок, частотная отстройка от резонансов.

Рассмотрим особенности проектирования, оптимизации и расчета виброгасящих устройств, использующих принципы динамического гашения и демпфирования колебаний.

Демпфирование и динамическое гашение колебаний являются одними из основных методов борьбы с вибрацией машин и механизмов. Конструкции применяемых с этой целью упруго-демпфирующих опор (УДО) и динамических гасителей (ДГ) колебаний отличаются большим разнообразием, которое диктуется конкретными условиями их применения. Ниже рассматриваются некоторые конструкции виброгасящих устройств, а также методы расчета и оптимизации их упругих и демпфирующих характеристик.

Каждое из указанных устройств обладает определенным демпфированием, создаваемым либо за счет внутреннего трения в материалах, либо за счет сухого трения между элементами конструкции, либо за счет гидравлического сопротивления.

Способ создания гидравлического сопротивления за счет продавливания вязкой жидкости через малые отверстия или узкие щели позволяет получить сколь угодно большое сопротивление. Однако анализ показывает, что уровень сопротивления имеет определенный оптимум, с превышением которого эффективность виброгасящих устройств может уменьшаться. Подобный оптимум характерен как для динамических гасителей колебаний, так и для разного рода демпфирующих опор.

Главный недостаток принципа динамического гашения заключается в следующем. Динамический гаситель, особенно

без трения или с малым трением, нуждается в точной настройке, при которой его парциальная частота была бы в точности равной частоте возбуждения. Если частота возбуждения не постоянна, то с ее изменением возможно появление дополнительных резонансных пиков, расположенных по обе стороны от точки настройки. Наличие резонансных, так называемых «боковых частот», крайне нежелательно для многорежимных машин, имеющих широкий диапазон частот возбуждающих нагрузок. В подобных условиях применение динамического гашения может оказаться нежелательным и даже вредным. Данный недостаток в значительной степени устраняется за счет применения динамических гасителей с достаточно большим сопротивлением, обеспечить которое не всегда удается. Во многих случаях гаситель выполняется в виде компактного модуля, в котором роль упругого, демпфирующего и связующего элементов выполняется каким-либо резиноподобным материалом, обладающим большим внутренним сопротивлением. К сожалению, такая конструкция не всегда позволяет обеспечить оптимальное соотношение главных параметров системы – частоты настройки, величины инертной массы и необходимой степени демпфирования. В подобных ситуациях следует использовать конструкции с гидравлическим сопротивлением, возникающим, например, при продавливании рабочей жидкости через малые калиброванные отверстия или небольшие зазоры между подвижными и неподвижными поверхностями. Такие конструкции позволяют варьировать коэффициентами сопротивления в весьма широких пределах, а использование в качестве рабочей жидкости силиконовых масел обеспечивает постоянство этих коэффициентов в широком диапазоне температур, возможных в эксплуатации.

Очевидно, что эффект динамического гашения исключается при очень малых или, напротив, при очень больших коэффициентах сопротивления. Отсюда возникает проблема

оптимизации вязкого сопротивления: чрезмерное увеличение сопротивления сверх оптимального может привести к существенному снижению эффективности динамического гашения.

Дифференциальные уравнения, описывающие вынужденные колебания системы в условиях динамического гашения, имеют вид:

$$m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) + (c_1 + c_2) \cdot \dot{x}_1(t) + \mu \cdot (v_1(t) - v_2(t)) - c_2 \cdot x_2(t) = Q \cdot \sin(\omega \cdot t);$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 + c_2(x_2(t) - x_1(t)) + \mu(v_2(t) - v_1(t)) = 0,$$

здесь $m_1, m_2, c_1, c_2, x_1, x_2$ – массы, коэффициенты жесткости и обобщенные координаты основной системы и системы гасителя; ω – частота возбуждения; μ – коэффициент сопротивления в системе гасителя; v_1, v_2 – виброскорости масс; $\beta = m_2/m_1$; $\alpha = c_2/c_1$; $n_0 = \mu/(2m_2)$ – коэффициент демпфирования в системе гасителя; $n = n_0/\omega_0$ – коэффициент относительного демпфирования; $\omega_0 = (c_1/m_1)^{0,5}$ – собственная частота колебаний основной системы (без гасителя); A – амплитуда колебаний основной системы. Некоторые результаты численного анализа полученных уравнений представлены в табл. 7, где показано, как трансформируются амплитудно-частотные характеристики системы по мере увеличения коэффициента относительного демпфирования от $n = 0,029$ до $n = 0,09$. Частота настройки гасителя принималась близкой к ω_0 и корректировалась таким образом, чтобы при уровне относительного демпфирования $n = 0,02$ оба резонансных пика имели бы одинаковую высоту. В табл. 7 приводятся также значения оптимальных коэффициентов относительного демпфирования $n_{\text{опт}}$, которым соответствуют минимальные амплитуды вынужденных колебаний основной системы.

Таблица 7

α	β	n_{omn}	A
0,0195	0,02	0,09	10,8
0,046	0,05	0,12	6,69
0,091	0,10	0,18	5,34
0,15	0,20	0,22	3,22

Можно отметить, что уровень оптимального сопротивления возрастает с увеличением массы гасителя, причем эта зависимость носит почти линейный характер. При этом возрастает и эффективность динамического гашения, которая характеризуется здесь амплитудой колебаний основной системы – A . Следовательно, эффективность динамического гашения определяется не только сопротивлением, но и массой самого гасителя.

Рассмотрим некоторые из устройств, использующих гидравлическое сопротивление для создания необходимого оптимального уровня демпфирования.

Гидравлический виброгаситель

Виброгаситель выполнен в виде герметично закрытого цилиндра, заполненного рабочей жидкостью, в котором может совершать вибрационное перемещение инертная масса в виде поршня, связанного с цилиндром системой пружин. Эквивалентная жесткость системы пружин определяется по формуле $C_{\text{э}} = \omega_{\text{н}}^2 m_{\text{п}}$, где $m_{\text{п}}$ – масса поршня; $\omega_{\text{н}}$ – круговая частота настройки гасителя.

Коэффициент сопротивления в системе гасителя находится по формуле

$$\mu = 128 \eta L \sigma^2 / \pi n d^4,$$

где L – длина продольных сквозных отверстий, выполненных в поршне; n и d – число и диаметр таких отверстий;

η – динамическая вязкость рабочей жидкости; σ – площадь поперечного сечения поршня. Чтобы исключить влияние температурных деформаций, рабочая жидкость должна находиться под некоторым избыточным давлением, которое создается при сборке и поддерживается за счет упругой деформации самого цилиндра.

Демпфер угловых колебаний

Демпфер угловых колебаний, например, рулевого колеса автомобиля включает внутренний корпус, выполненный с возможностью закрепления демпфера на валу, наружный корпус, крышку наружного корпуса, причем эти детали образуют замкнутую кольцевую полость, заполненную рабочей жидкостью. В кольцевой полости установлен ряд неподвижных дисков, жёстко связанных с наружным корпусом, и вращающихся дисков, зафиксированных на внутреннем корпусе, причём подвижные диски чередуются с неподвижными с некоторыми осевыми зазорами (рис. 7).

При угловых колебаниях рулевого колеса с валом каждый элемент подвижного диска площадью $dS = r \cdot dr \cdot d\varphi$ начинает двигаться с относительной окружной скоростью $v = r \cdot \omega$, где r – радиус выделенного элемента; ω – круговая частота угловых колебаний; $d\varphi$ – элемент центрального угла подвижного диска. Так как движение происходит в вязкой жидкости, то оно приводит к появлению элементарной силы сопротивления, направленной против скорости v и равной $dF = \eta \cdot v \cdot ds \cdot \frac{1}{\Delta}$, и соответствующему моменту сопротивления $dM = r \cdot dF$.

После интегрирования в соответствующих пределах находим коэффициент сопротивления демпфера:

$$\mu = \frac{\pi \cdot z}{64 \cdot \Delta} \cdot \eta \cdot (D^4 - d^4), \quad (9.1)$$

где η – коэффициент динамической вязкости рабочей жидкости; z – число подвижных дисков; D и d – наружные и внутренние диаметры дисков.

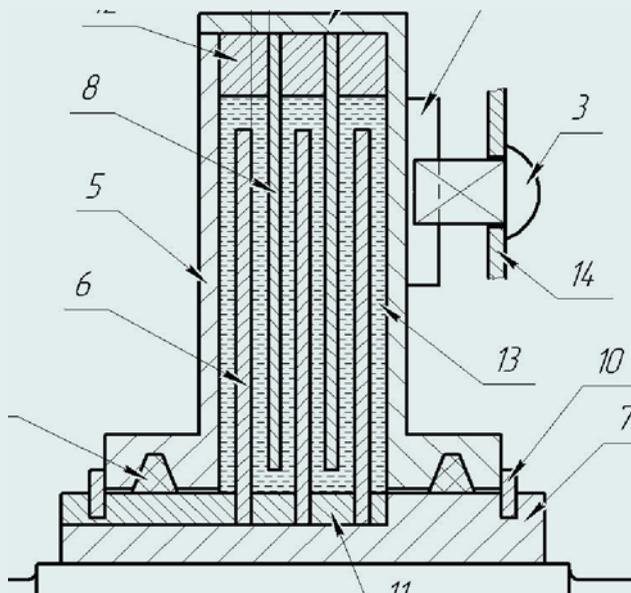


Рис. 7. Демпфер угловых колебаний

Динамический гаситель крутильных колебаний

Гаситель (рис. 8) включает внутренний корпус, который неподвижно связан с валом посредством, например, стопорных колец и шпоночного соединения, наружный корпус, который выполняет также роль инертной массы, входящей в состав динамического гасителя, торцевые крышки, образующие вместе с корпусами кольцевую полость, заполненную рабочей жидкостью, радиальные уплотнения, герметизирующие эту же полость, систему чередующихся наружных и внутренних дисков, установленных с заданным осевым зазором друг

относительно друга и не препятствующих поворотам одного корпуса относительно другого. Кроме того, гаситель содержит один или более упругих элементов, работающих на кручение и упруго соединяющих указанные корпуса, а также систему дистанционных втулок, устанавливающих заданное взаимное расположение всех деталей в осевом направлении.

Полярный момент инерции θ_p наружного корпуса, т. е. полярный момент инерции инертной массы в составе гасителя, и суммарная жёсткость комплекта упругих элементов на кручение C_0 связаны соотношением

$$C_0 = \theta_p \cdot \omega_n^2,$$

где ω_n – круговая частота настройки гасителя.

Упругий элемент может быть выполнен в виде неразъемной детали, имеющей наружный и внутренний ободы, связанные между собой радиальными гибкими спицами. Жёсткость такого упругого элемента на кручение определяется по формуле

$$C_{кр} = \frac{12 \cdot E \cdot J \cdot R^2}{l^3} \cdot Z,$$

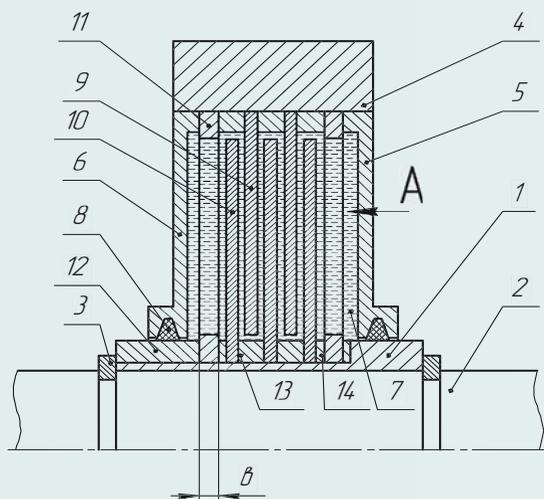
где l – рабочая длина спицы; R – внутренний радиус наружного обода; $J = \frac{b \cdot h^3}{12}$; E – модуль упругости; Z – число спиц.

Суммарная жёсткость комплекта упругих элементов будет равна:

$$C_0 = n \cdot C_{кр},$$

где n – общее число упругих элементов в составе гасителя.

Система чередующихся наружных и внутренних дисков, погружённых в рабочую жидкость, необходима для создания определённого коэффициента сопротивления.



Вид А (на упругий элемент)

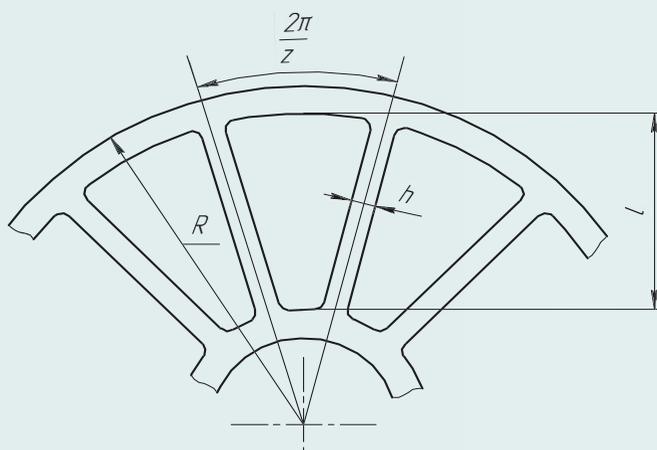


Рис. 8. Динамический гаситель крутильных колебаний

Виброопора

Виброопора (рис. 9) содержит наружную и внутреннюю обоймы, одна из которых связана с вибрирующим объектом, а другая с неподвижным основанием, упругий элемент,

соединяющий обоймы, в виде гофрированной по радиальным направлениям пластины или пакета таких пластин, согнутых в кольцо и помещённых с некоторым предварительным, создаваемым при сборке натягом, в кольцевую полость, образованную обоймами. Опора имеет также уплотнительные кольца, изготовленные из эластичного материала, например, резины, герметизирующие по торцам указанную полость, и вязкую рабочую жидкость, целиком заполняющую эту полость. Наружная обойма имеет цилиндрическую выточку, соответствующую ширине гофрированного пакета и служащую для фиксации данного пакета в осевом направлении. Предполагается, что гофры равномерно располагаются по окружности.

Радиальная жёсткость опоры определяется по формуле

$$C = Z \cdot V \cdot C_0, \quad (9.2)$$

где Z – число гофров; N – число пластин; $C_0 = 12EJ / L^3$; EJ – изгибная жёсткость одной пластины; L – половина окружного шага гофров.

Демпфирование создаётся в результате выдавливания в осевом направлении рабочей жидкости через торцевые поверхности гофров. Таким образом, создаваемое демпфирование имеет преимущественно гидравлическую природу, причём сила сопротивления оказывается пропорциональной виброскорости, как это имеет место при вязком сопротивлении.

При проектировочном расчёте сила сопротивления опоры определяется по формуле

$$\mu = 25,1 \cdot \eta \cdot \frac{B^3}{H^2}, \quad (9.3)$$

где η – коэффициент динамической вязкости рабочей жидкости; B – ширина пакета; H – высота гофров в собранном состоянии.

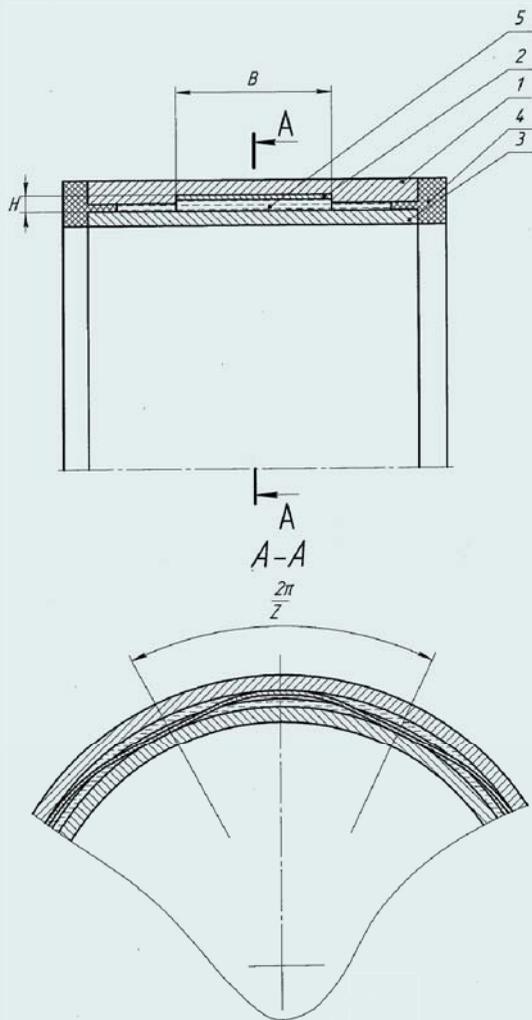


Рис. 9. Вибропора

Гасители колебаний с жидкостным трением обладают линейностью характеристик, которые легко поддаются расчету и могут изменяться в широких пределах, что чрезвычайно важно при анализе и оптимизации динамических процессов в колебательных системах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М. : Наука, 1968. – 560 с.
2. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М. : Наука, 1959.
3. Ден-Гартог, Дж. Механические колебания / Дж. Ден-Гартог. – М. : Физматгиз, 1960. – 495 с.
4. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1967. – 543 с.
5. Мандельштам, Л.И. Лекции по теории колебаний / Л.И. Мандельштам. – М. : Наука, 1972. – 470 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания : справочник / под ред. И.А. Биргера. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.
7. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М. : Высш. шк., 1980. – 407 с.
8. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М. : Высш. шк., 1983. – 670 с.
9. Светлицкий, В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко. – М. : Высш. шк., 1979. – 365 с.
10. Глейзер, А.И. Теория колебаний механических систем : учеб. пособие / А.И. Глейзер. – Тольятти : ТГУ, 2007.

ГЛОССАРИЙ

№ п/п	Понятие	Содержание
1.	Число степеней свободы колебательной системы	Равно числу обобщенных координат данной системы
2.	Свободные колебания	Колебания, протекающие под действием восстанавливающих сил и сил сопротивления в соответствии с начальными условиями движения
3.	Вынужденные колебания	Колебания, протекающие под действием восстанавливающих сил, сил сопротивления и возбуждающих сил, циклически изменяющихся с течением времени
4.	Параметрические колебания	Колебания в системах, вызванные и поддерживаемые параметрическим возбуждением
5.	Автоколебания	Колебания, питаемые постоянными источниками энергии и протекающие в системах, имеющих некоторый «клапан», управляемый движением самой системы и циклически открывающий доступ энергии к системе от указанного источника
6.	Критическая скорость ротора	Частота вращения, на которой динамический прогиб достигает максимума
7.	Гармонические колебания	Колебания, протекающие по закону синуса или косинуса
8.	Виброперемещение	Составляющая перемещения какой-либо точки механической системы, описывающая вибрацию
9.	Виброскорость	Первая производная по времени от вибросмещения
10.	Виброускорение	Первая производная по времени от виброскорости или вторая производная по времени от вибросмещения

№ п/п	Понятие	Содержание
11.	Период колебаний	Наименьший интервал времени, через который при периодических колебаниях повторяется каждое значение колеблющейся величины
12.	Начальная фаза гармонических колебаний	Фаза гармонических колебаний в начальный момент времени
13.	Фаза гармонических колебаний	Аргумент синуса (косинуса), которому пропорционально значение колеблющейся величины
14.	Амплитуда гармонических колебаний	Максимальное значение колеблющейся величины при гармонических колебаниях
15.	Круговая частота гармонических колебаний	Первая производная по времени от фазы гармонических колебаний. Единица измерения [рад/с]
16.	Сила сопротивления	Сила (момент), возникающая при движении механической системы и вызывающая рассеяние механической энергии
17.	Циклическая частота колебаний	Величина, обратная периоду и характеризующая число полных колебаний за 1 с. Измеряется в Гц (герцах)
18.	Коэффициент сопротивления	Отношение силы (момента) сопротивления к соответствующей обобщенной скорости для линейных систем
19.	Коэффициент жесткости	Производная зависимости восстанавливающей силы (момента) от соответствующей обобщенной координаты по указанной координате
20.	Затухающие колебания	Колебания с уменьшающимися значениями амплитуд. Описываются зависимостью $Ae^{-ht} \sin(\omega t + \varphi)$

№ п/п	Понятие	Содержание
21.	Нарастающие колебания	Колебания с увеличивающимися значениями амплитуд. Описываются зависимостью $Ae^{ht} \sin(\omega t + \varphi)$. Нарастающие колебания характерны для автоколебательных процессов
22.	Вынуждающая сила (момент)	Переменная по времени внешняя сила (момент), не зависящая от состояния системы и поддерживающая ее вибрацию
23.	Силовое возбуждение колебаний	Возбуждение вибрации системы вынуждающими силами и/или моментами, не зависящими от состояния системы
24.	Кинематическое возбуждение колебаний	Возбуждение вибрации системы сообщением каким-либо ее точкам заданных движений, не зависящим от состояния системы
25.	Демпфирование вибрации	Уменьшение вибрации вследствие рассеяния механической энергии
26.	Восстанавливающая сила (момент)	Сила (момент), возникающая при отклонении системы от состояния равновесия и направленная противоположно этому отклонению
27.	Относительное демпфирование системы	Отношение коэффициента демпфирования к частоте свободных незатухающих колебаний
28.	Коэффициент затухания	Есть отношение двух последовательных амплитудных смещений времени, равных периоду колебаний
29.	Логарифмический декремент колебаний	Натуральный логарифм коэффициента затухания

№ п/п	Понятие	Содержание
30.	Амплитудно-частотная характеристика	Зависимость амплитуды вынужденных колебаний системы от частоты гармонического возбуждения
31.	Фазочастотная характеристика	Зависимость сдвига фаз между вынужденными колебаниями системы и гармоническим возбуждением от частоты возбуждения
32.	Резонансные колебания	Вынужденные колебания системы, соответствующие одному из максимумов амплитудно-частотной характеристики
33.	Динамическое гашение колебаний	Метод вибрационной защиты посредством присоединения к защищаемому от вибрации объекту дополнительной колебательной системы, реакция которой уменьшает размах вибрации объекта
34.	Параметрическое возбуждение колебаний	Возбуждение колебаний системы не зависящим от состояния системы изменением во времени одного или нескольких ее параметров (массы, момента инерции, коэффициента жесткости, коэффициента сопротивления)
35.	Линейное демпфирование	Демпфирование вибрации при линейной характеристике диссипативной силы
36.	Дорезонансные колебания	Вынужденные колебания системы, частота которых меньше резонансной
37.	Зарезонансные колебания	Вынужденные колебания системы, частота которых больше резонансной
38.	Коэффициент демпфирования системы	Отношение коэффициента сопротивления к удвоенной массе или удвоенному моменту инерции

№ п/п	Понятие	Содержание
39.	Критический коэффициент демпфирования	Коэффициент демпфирования, при котором система перестаёт быть колебательной
40.	Диссипативная сила (момент)	Сила (момент), возникающая при движении механической системы и вызывающая рассеивание механической энергии
41.	Апериодическое (релаксационное движение)	Асимптотическое приближение системы к положению равновесия, которое не носит колебательного характера
42.	Относительное демпфирование	Отношение коэффициента демпфирования системы к её критическому коэффициенту демпфирования
43.	Коэффициент поглощения энергии	Отношение рассеиваемой за один период энергии гармонических колебаний линейной системы к максимальной потенциальной энергии
44.	Механические колебания	Процесс поочерёдного возрастания и убывания какой-либо величины, характеризующей положение механической силы
45.	Вибрация (не допускается – вибрации)	Движение элементов механической системы, при котором происходят механические колебания
46.	Виброизоляция	Метод вибрационной защиты посредством устройств, помещаемых между источником возбуждения и защищаемым объектом
47.	Виброизолятор	Устройство, осуществляющее виброизоляцию
48.	Демпфер	Устройство, создающее демпфирование вибрации