Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
ТОЛЬЯТТИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра высшей математики

П. А. ШИМАРОВ

МАТРИЦЫ

Тольятти — 1972

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
ТОЛЬЯТТИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра высшей математики

П. А. ШИМАРОВ

МАТРИЦЫ

Учебное пособие

Тольятти — 1972

Пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Оно содержит теоретический курс по теме «Матрицы», включенный в программу общего курса высшей математики.

Утверждено на заседании кафедры 27 марта 1969 г.

§ 1. МАТРИЦЫ И ИХ ЧАСТНЫЕ ВИДЫ

Определение. *Система mn чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется прямоугольной матрицей типа mn.*

Мы будем записывать матрицу в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

у

или сокращенно в виде:

$$A = A_{mn} = (a_{ij})_{mn}. \tag{1'}$$

Числа a_{ij}, составляющие данную матрицу, называются ее элементами; первый индекс i указывает номер строки, в которой расположен этот элемент, а второй индекс j — номер столбца. Строки и столбцы называются ее рядами.

Две матрицы одинакового типа считаются равными, если равны их соответствующие элементы:

$$A_{mn} = B_{mn}, \quad \text{если} \quad a_{ij} = b_{ij},$$
$$(i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n). \tag{2}$$

Матрица типа $1 \times n$ называется матрицей-строкой:

$$A_{1n} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}). \tag{3}$$

Матрица типа $m \times 1$ называется матрицей-столбцом:

$$A_{m1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрицу-строку и матрицу-столбец можно рассматривать также как вектор-строку или вектор-столбец (соответственно).

Матрицу типа 1×1 принято отождествлять с ее элементом:

$$(a) = a.$$

Иначе говоря, любое число α можно рассматривать как матрицу типа 1×1:

$$\alpha = (\alpha).$$

Матрица любого типа mn, все элементы которой равны нулю, называется нуль-матрицей и обозначается буквой O.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Определение 1. *Суммой двух матриц одинакового типа* $A_{mn} = (a_{ij})$ и $B_{mn} = (b_{ij})$ *называется матрица того же типа* $C_{mn} = (C_{ij})$, *каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов данных матриц:*

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Определение 2. *Произведением матрицы* $A = (a_{ij})$ *на число* λ *(или обратно) называется матрица, элементы которой получаются умножением соответствующих элементов матрицы* A *на число* λ:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матрица называется противоположной матрице A.

$$(-1)\, A = -A \tag{7}$$

Разность матриц одинакового типа определяется следующей формулой:

$$A - B = A + (-B) = R. \tag{8}$$

Отсюда следует, что элементы матрицы R получаются вычитанием соответствующих элементов матриц A и B:

$$r_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \tag{9}$$

Легко проверить, что линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

I. $A + B = B + A$ — свойство переместительности сложения;

II. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — свойство сочетательности;

III. $\lambda A = A\lambda$ — свойство переместительности умножения матрицы на число;

IV. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ — свойство сочетательности умножения;

V. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ — свойство распределительности.

Следует запомнить также следующие формулы:

$$A + 0 = A; \qquad A - 0 = A; \qquad A - A = 0;$$

$$0 \cdot A = 0; \qquad \alpha \cdot 0 = 0; \qquad 1 \cdot A = A.$$

§ 3. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Произведение матриц A и B определяется только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй: A_{mn} и B_{np}.

Определение. *Произведением матрицы A_{mn} на матрицу B_{np} называется такая матрица C_{mp}, элементы которой определяются по следующему правилу:*

$$C_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk}, \tag{10}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$; $\kappa = 1, 2, \ldots, p$. Правило (10) можно прочитать так:

элемент c_{ik} матрицы C_{mp} равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующие элементы κ-го столбца матрицы B.

I. Из определения умножения матриц видно, что если имеет смысл произведение матриц AB, то произведение матриц BA, вообще говоря, не имеет смысла (за исключением случая, когда $m = p$). Но даже если оба произведения AB и BA имеют смысл, то отсюда еще не следует, что эти произведения совпадают.

Примеры. 1. Пусть $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, а $BA = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 18 & 11 & 3 \end{pmatrix}$ и $AB \neq BA$.

Отсюда следует, что умножение матриц не обладает свойством переместительности.

Замечание. В том случае, когда имеет место равенство

$$AB = BA,$$

матрицы A и B называются перестановочными (или коммутативными).

2. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, то

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 33 \\ 11 & 34 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 12 & 33 \\ 11 & 34 \end{pmatrix},\ \text{следовательно } AB = BA.$$

Можно проверить, что умножение матриц обладает следующими свойствами:

II. $(AB)C = A(BC)$ и $(\lambda A)B = \lambda(AB)$ — свойство сочетательности умножения.

III. $(A + B)C = AC + BC$ и $A(B + C) = AB + AC$ — свойство распределительности.

Замечание. Из равенства $AB = 0$ не следует, что $A = 0$ или $B = 0$.

3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{но}$$

$$AB = 0.$$

§ 4. КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется **квадратной**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Квадратную матрицу из n строк и n столбцов называют **матрицей n-го порядка**, а число n — **порядком матрицы**. Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется **определителем этой матрицы**. Будем обозначать его так:

$$\det A = \mathrm{d}\,(A) = \mathrm{d} = \Delta.$$

Если $\det A = 0$, то матрица A называется **вырожденной** (особой); если же $\det A \neq 0$, то матрица A называется **невырожденной**.

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называется **диагональной**:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Если все элементы диагональной матрицы равны между собой ($a_{ii} = a \neq 0$), то матрица A называется **скалярной**:

$$S=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & a \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Если $a=1$, то скалярная матрица называется единичной:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Для записи элементов единичной матрицы используют символ Кронекера:

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{при } i=j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \qquad (15)$$

Тогда единичная матрица может быть записана так:

$$E=(\delta_{ij}). \qquad (14')$$

Легко проверить следующие свойства квадратных матриц:

1. $S=aE$, если матрицы S и E одного и того же порядка.

2. Диагональные матрицы одного и того же порядка коммутативны. В самом деле,

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & 0 \\ 0 & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & & 0 \\ 0 & & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}=BA,$$

т. е. произведение двух диагональных матриц есть матрица диагональная.

3. $A\cdot 0=0\cdot A=0$.

4. $SA=AS$, т. е. скалярные матрицы коммутативны с любыми матрицами того же порядка.

5. $AE=EA=A$, т. е. любая квадратная матрица A не меняется при умножении ее на единичную матрицу E. Значит единичная матрица E играет в матричном умножении роль единицы.

6. $\det(AB)=(\det A)\cdot(\det B)$, т. е. определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.

7. $\det(\alpha A_n)=\alpha^n \det A$.

§ 5. ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦ

Пусть дана произвольная матрица (1) типа mn. Заменив в ней все строки столбцами с сохранением их номеров, получим новую матрицу типа nm:

$$A^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрица $A^{\mathrm{т}}$ называется транспонированной по отношению к матрице A. Преобразование матрицы A в матрицу $A^{\mathrm{т}}$ называется транспонированием матрицы A. Ее можно кратко обозначить

$$A^{\mathrm{т}} = (a'_{ij})_{nm}, \tag{16'}$$

очевидно $a'_{ij} = a_{ji}$. В частности при транспонировании матрицы-строки получается матрица-столбец и наоборот:

$$(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdot \\ a_{1n} \end{pmatrix}; \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}} = (a_{11}\ a_{21}\ \dots\ a_{m1}). \tag{18}$$

Легко проверить следующие свойства транспонированных матриц:

1. $(A^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}} = A$. Это свойство непосредственно следует из определения операции транспонирования матрицы A.

2. $(A+B)^{\mathrm{т}} = A^{\mathrm{т}} + B^{\mathrm{т}}$.

В самом деле, пусть $A+B=C$, тогда $C^{\mathrm{т}} = (C'_{ij})_{nm}$, причем $C'_{ij} = C_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a'_{ij} + b'_{ij}$, а $(a'_{ij})_{nm} + (b'_{ij})_{nm} = A^{\mathrm{т}} + B^{\mathrm{т}}$.

3. $(AB)^{\mathrm{т}} = B^{\mathrm{т}} A^{\mathrm{т}}$.

Доказательство. Пусть A и B матрицы типа mn и nr соответственно, тогда их произведение $AB = C$ определено. Матрицы $B^{\mathrm{т}}$ и $A^{\mathrm{т}}$ являются матрицами типа rn и nm соответственно, а потому их произведение $B^{\mathrm{т}}A^{\mathrm{т}} = D$ также определено. Матрица $AB = C$ есть матрица типа mr, матрица $C^{\mathrm{т}}$ — типа rm и матрица D — типа rm.

Имеем

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_k a_{jk}\, b_{ki} = \sum_k a'_{kj}\, b'_{ik} = \sum_k b'_{ik} a'_{kj} = d_{ij}.$$

Значит, $(C'_{ij})_{rm} = (d_{ij})_{rm}$, т. е. $C^{\mathrm{т}} = D$, что и требовалось доказать.

Замечание. Свойство [3] распространяется на любое число сомножителей:

$$(A_1 A_2 \dots A_s)^{\mathrm{т}} = A_s^{\mathrm{т}} \dots A_2^{\mathrm{т}} A_1^{\mathrm{т}}.$$

4. $det\ (A^т) = det A$, т. к. определитель не меняется от замены его строк столбцами (или обратно).

Если $A^т = A$ (19), то матрица A называется симметрической. Отсюда следует: а) симметрическая матрица квадратная; б) ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Легко проверить, что

$$E^т = E, \qquad (19)$$

т. е. единичная матрица симметрическая.

Произведение $AA^т = C$ всегда определено, так как если матрица A типа mn, то матрица $A^т$ типа nm; тогда C —квадратная матрица m-го порядка.

$C^т = (AA^т)^т = (A^т)^т A^т = AA^т = C$, т. е. матрица $C = AA^т$ симметрическая.

Если

$$A = -A^т, \qquad (20)$$

то матрица A называется кососимметрической. Отсюда следует:

а) $a_{ij} = -a_{ji}$;

б) $a_{ii} = -a_{ii}$, или $a_{ii} = 0$,

т. е. все диагональные элементы матрицы A равны нулю.

Примеры. 1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ —симметрическая матрица.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ —кососимметрическая матрица.

§ 6. ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Квадратная матрица B называется обратной для матрицы A, если, будучи умноженной на данную как справа, так и слева, даст единичную матрицу: $AB = BA = E$.

Обозначим обратную матрицу B через A^{-1}. По определению получим:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{21}$$

Из (21) следует, что матрица A является обратной для матрицы A^{-1}, значит матрицы A и A^{-1} взаимно обратны.

Следствие:

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{22}$$

Нахождение обратной матрицы A^{-1} называется **обращением матрицы** A.

Всякая ли квадратная матрица имеет обратную?

Теорема 1. *Если матрица A имеет обратную, то* $\det A \neq 0$ *(т. е. матрица A невырожденная).*

Доказательство. $AA^{-1} = E$; $\det(AA^{-1}) = \det E$, или $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ (а), следовательно, $\det A \neq 0$. Отсюда следует, что вырожденная матрица не имеет обратной.

Теорема 2. *Всякая невырожденная матрица имеет обратную.*

Доказательство. Пусть A_{ij} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя $\det A$. Заменив в матрице A все элементы a_{ij} их алгебраическими дополнениями A_{ij} и протранспонировав полученную матрицу, получим матрицу $\tilde{A}$, которая называется **союзной** (или присоединенной) матрицей для матрицы A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Рассмотрим произведения матриц $A\tilde{A}$ и $\tilde{A}A$:

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix},$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \mathrm{d} & \text{при} \quad i = j; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Далее:

$$A\tilde{A} = \mathrm{d}\,E; \quad \frac{1}{\mathrm{d}}(A\tilde{A}) = \frac{1}{\mathrm{d}}(\mathrm{d}\,E),$$

или $$\left(\frac{1}{d}A\right)\tilde{A}=\left(\frac{1}{d}d\right)E;\quad \left(A\frac{1}{d}\right)\tilde{A}=1\cdot E;$$

$$A\left(\frac{1}{d}\tilde{A}\right)=E. \tag{б}$$

Аналогично докажем:

$$\left(\frac{1}{d}\tilde{A}\right)A=E. \tag{в}$$

Из (б) и (в) следует, что матрица $\frac{1}{d}\tilde{A}$ есть обратная для A:

$$A^{-1}=\frac{1}{d}\tilde{A}. \tag{24}$$

Таким образом, мы доказали существование обратной матрицы A^{-1} и вместе с тем получили формулу для ее вычисления.

Легко проверить следующие свойства обратных матриц:

1. $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$ — следует из (а);
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. 1) Умножим матрицу AB на $(B^{-1}A^{-1})$ справа:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=(AE)A^{-1}=AA^{-1}=E. \tag{г}$$

2) Умножим (AB) на $(B^{-1}A^{-1})$ слева:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=(B^{-1}E)B=B^{-1}B=E. \tag{д}$$

Из (г) и (д) следует, что матрица $B^{-1}A^{-1}$ обратна матрице AB.

3. $(A^{т})^{-1}=(A^{-1})^{т}$.

Доказательство.

1) Умножим $A^{т}$ на $(A^{-1})^{т}$ справа:

$$A^{т}(A^{-1})^{т}=(A^{-1}A)^{т}=E^{т}=E. \tag{е}$$

2) Умножим $A^{т}$ на $(A^{-1})^{т}$ слева:

$$(A^{-1})^{т}A^{т}=(AA^{-1})^{т}=E^{т}=E. \tag{ж}$$

Из (е) и (ж) следует, что матрица $(A^{-1})^{т}$ обратна матрице $A^{т}$.

Пример. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение. $\det A=\Delta=5\neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную.

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

где

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\quad A_{21}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

§ 7. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{aligned}\right\}. \tag{25}$$

Ее можно записать в виде равенства двух матриц-столбцов (на основании определения равенства двух матриц):

$$\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}. \tag{25'}$$

Матрицу, стоящую в левой части равенства (25′), можно представить в виде произведения двух матриц:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \tag{26}$$

и

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Обозначим $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$. Тогда равенство (25′) примет вид:

$$AX=B. \tag{27}$$

Равенство (27) называется матричной записью системы (25). Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных системы (25), называется матрицей этой системы.

Если $\det A = \Delta \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножим обе части равенства (27) на матрицу A^{-1} слева: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Но $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, значит

$$X = A^{-1}B. \tag{28}$$

Формула (28) дает матричную запись решения системы (25). Отыскание решения системы (25) по формуле (28) называют матричным способом решения системы.

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Положив

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

запишем систему в матричной форме: $AX = B$.
Из примера § 6 имеем:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Подставляя в формулу (28), получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{5}\cdot 6 + \frac{3}{5}\cdot 3 - \frac{2}{5}\cdot 5 \\ -\frac{3}{5}\cdot 6 + \frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{1}{5}\cdot 5 \\ \frac{1}{5}\cdot 6 - \frac{2}{5}\cdot 3 + \frac{3}{5}\cdot 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ — решение данной системы.

Формулы Крамера. Вернемся снова к системе (25) и формуле (28).

Так как $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}$, то $X = \left(\frac{1}{\Delta}\tilde{A}\right) B = \frac{1}{\Delta}(\tilde{A}B)$. (а)

Но

$$\tilde{A}B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32} \\ b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} +$$

$$+ a_{32} A_{32} = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}.$$

Обозначим: $b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} = \Delta_1$, $b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32} = \Delta_2$, $b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33} = \Delta_3$ — определители третьего порядка, которые получаются из определителя Δ путем замены его i-го столбца столбцом B.

Получим
$$\tilde{A}B = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в (а), получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \frac{\Delta_3}{\Delta} \end{vmatrix};$$

отсюда следует:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad y_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (29)$$

Равенства (29) называются **формулами Крамера** для решения системы (25) в случае, когда $\Delta = \det A \neq 0$.

Замечание. Все изложенное в § 7 распространяется на общий случай системы n линейных уравнений с n неизвестными.

§ 8. РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим произвольную матрицу типа mn:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $l = \min(m, n)$ (а) меньшее из чисел m и n. Если в матрице A выбрать произвольно k строк и k столбцов ($k \leqslant l$), то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка матрицы A. Очевидно, что матрица имеет миноры любого порядка от 1 до l. Число миноров k-го порядка матрицы A выражается формулой $N_k = C_m^k \cdot C_n^k$ (б). Некоторые из миноров матрицы могут быть равны нулю, другие отличны от нуля.

Наибольший из порядков миноров матрицы A, отличных от нуля, называется рангом матрицы A (обозначается r или $r(A)$).

Разъяснение. Если $r = r(A)$, то это значит, что матрица A имеет минор порядка r, отличный от нуля, но всякий минор порядка большего, чем r, равен нулю.

Примеры: 1. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

имеет ранг $r = 2$, так как все ее миноры 3-го порядка равны нулю (проверьте это), а среди миноров 2-го порядка есть отличные от нуля, например $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Замечание. Матрица A относится к типу 3×4. Она имеет $N_1 = 3 \cdot 4 = 12$ миноров 1-го порядка, $N_2 = C_3^2 \cdot C_4^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 12$ миноров 2-го порядка и $N_3 = C_3^3 \cdot C_4^3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$ минора 3-го порядка.

2. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет ранг $r = 3$, так как $\det = A = 30 \quad 0$, а миноров порядка большего, чем 3, она не имеет.

Нулевая матрица 0 имеет ранг $r = 0$, так как все ее миноры от 1-го до l-го порядка равны нулю. Если же $A \neq 0$, то, очевидно, всегда выполняется соотношение $1 \leqslant r(A) \leqslant l$ (в).

Если $r(A) = l$, то матрица A называется невырожденной (не особой); если $r(A) < l$, то матрица A называется вырожденной (особой).

Примеры 1. $l = \min(3, 4) = 3$, $r(A) = 2$, т. е. $r < l$, следовательно, матрица A вырожденная.

2. $l = \min(3,3) = 3$, $r = 3$, т. е. $r = l$, значит, матрица A невырожденная.

Теорема. *Если все миноры k-го порядка матрицы A равны нулю, то все миноры ее порядков больших, чем k, также равны нулю.*

Доказательство. Пусть M_{k+1} — любой минор $(\kappa+1)$-го порядка. Разложим его по элементам какого-либо ряда $M_{\kappa+1}= = \sum_{\gamma} a_{ij}A_{ij}$. Но алгебраические дополнения элементов a_{ij} равны по абсолютной величине соответствующим им минорам, которые являются минорами κ-го порядка матрицы A; поэтому все $A_{ij}=0$, а значит любой минор $M_{+1}=0$. Аналогично доказывается: все миноры $(\kappa+2)$-го порядка равны нулю и т. д.

§ 9. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ

Мы использовали матрицы при решении систем линейных уравнений. Рассмотрим сейчас применение матриц при линейных преобразованиях переменных.

Пусть мы имеем дело с двумя системами переменных:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 - (x) \quad \text{и} \quad x_1',\ x_2',\ x_3' - (x').$$

Определение. *Линейным преобразованием переменных называется такой переход от системы (x) к системе (x'), при котором новые переменные выражаются через старые как линейные выражения:*

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

Линейное преобразование (30) вполне определяется матрицей его коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$ так как два линейных преобразования

с одинаковой матрицей A отличаются друг от друга лишь обозначением переменных; обратно, если задана произвольная матрица A, то, записав соотношения (30), получаем некоторое линейное преобразование. Поэтому вместо линейного преобразования можно говорить о матрице, а всякому свойству линейных преобразований должно соответствовать определенное свойство их матриц.

Если системы переменных (x) и (x') рассматривать как векторы-столбцы

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overline{x}' = \begin{vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{vmatrix},$$

то линейное преобразование (30) можно записать кратко в векторно-матричной форме:

$$\bar{x}' = A\bar{x}. \qquad (30')$$

Запись (30′) можно рассматривать как преобразование трехмерного векторного пространства V_3, т. е. такое отображение, которое переводит каждый вектор $\bar{x}$ пространства V_3 в некоторый вектор $\bar{x}'$ того же пространства. Вектор $\bar{x}'$ называется образом вектора $\bar{x}$, а вектор $\bar{x}$ — прообразом вектора $\bar{x}'$. Матрица A играет здесь роль оператора преобразования (30′).

Применяя свойства умножения матриц, получим:

$$A(\alpha\bar{x}) = (A\alpha)\bar{x} = (\alpha A)\bar{x} = \alpha(A\bar{x}) \text{ и } A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2.$$

Таким образом, линейные преобразования векторов обладают следующими свойствами:

$$1.\quad A(\alpha\bar{x}) = \alpha(A\bar{x}); \qquad (31)$$

$$2.\quad A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2$$

Системы чисел (x) и (x') являются координатами векторов x и x' при некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Можно записать:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \quad \text{и} \quad \bar{x}' = x_1'\bar{e}_1 + x_2'\bar{e}_2 + x_3'\bar{e}_3. \qquad (32)$$

Тогда равенство (30) называется координатным представлением линейного преобразования (30′) в данном базисе.

§ 10. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим вопрос о последовательном выполнении двух линейных преобразований переменных. Пусть даны два линейных преобразования:

1) преобразование (30), переводящее систему переменных (x_1, x_2, x_3) — (x) в систему переменных (x_1', x_2', x_3') — (x') и

2) преобразование (33), переводящее систему переменных x и x' при некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Можно записать:

$$\left.\begin{aligned} x_1'' &= b_{11}\,x_1' + b_{12}\,x_2' + b_{13}\,x_3' \\ x_2'' &= b_{21}\,x_1' + b_{22}\,x_2' + b_{23}\,x_3' \\ x_3'' &= b_{31}\,x_1' + b_{32}\,x_2' + b_{33}\,x_3' \end{aligned}\right\}, \qquad (33)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{— матрица этого преобразования.}$$

Подставляя в (33) выражения для x_1', x_2', x_3' из (30), мы получим преобразование, переводящее переменные (x) в переменные (x'').

Результат последовательного выполнения двух линейных преобразований переменных (30) и (33) называется произведением этих преобразований.

Легко показать, что произведение двух линейных преобразований с матрицами A и B есть также линейное преобразование, причем его матрица C равна произведению матриц этих преобразований:

$$C = BA. \tag{34}$$

В самом деле,

$$\left.\begin{aligned}
x_1'' &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31})\,x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \\
&\quad + b_{13}a_{32})\,x_2 + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33})\,x_3;\\
x_2'' &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31})\,x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \\
&\quad + b_{23}a_{32})\,x_2 + (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33})\,x_3;\\
x_3'' &= (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31})\,x_1 + (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + \\
&\quad + b_{33}a_{32})\,x_2 + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33})\,x_3.
\end{aligned}\right| \tag{35}$$

В векторно-матричной форме имеем: $\bar{x}' = A\bar{x}$ $(30')$ и $\bar{x}'' = B\bar{x}'$ $(33')$ — данные преобразования и $\bar{x}'' = B\bar{x}' = B(A\bar{x}) = (BA)\bar{x} = \bar{C}x$ $(35')$ — произведение преобразований. Преобразование $(30')$ переводит вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{x}'$; преобразование $(33')$ переводит вектор $\bar{x}'$ в вектор $\bar{x}''$; преобразование $(35')$ переводит вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{x}''$.

Замечание. Вообще говоря, $BA\bar{x} \neq AB\bar{x}$.

Пример. Преобразование $\bar{x}' = A\bar{x}$ называется сжатием к оси Ox_1 с коэффициентом k_1, если его матрица имеет вид:

$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. если $x'_1 = k_1x_1$, $x_2' = x_2$.

Преобразование, заданное матрицей

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ называется сжатием к оси Ox_2 с коэффициентом k_2. Произведение матриц $C = BA = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ есть матрица последовательного выполнения двух преобразований:

$$\bar{x}_1'' = C\bar{x}.$$

Таким образом, диагональная матрица C соответствует двум сжатиям к координатным осям.

§ 11. ОБРАТНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Пусть дано линейное преобразование переменных (30) с матрицей A, выражающее переменные (x') через переменные (x). Требуется найти обратное преобразование переменных, выражающее переменные (x) через переменные (x'). Очевидно, для этого требуется решить систему (30) относительно неизвестных (x).

Решение. Данное линейное преобразование (30) запишем в векторно-матричной форме:

$$\bar{x}' = A\bar{x}. \tag{30'}$$

Если $\det A \neq 0$, то уравнение (30′) имеет решение

$$\bar{X} = A^{-1}\bar{x}'. \tag{36}$$

Равенство (36) является преобразованием, которое называется обратным данному.

Итак, для каждого невырожденного линейного преобразования имеется обратное преобразование, которое также является линейным.

Пример. Дано линейное преобразование:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 7x_1 + 5x_2 \end{aligned}\right\}.$$

Найти обратное преобразование.

Решение. Имеем: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$; $\Delta = \det A = 1 \neq 0$,

следовательно, матрица A имеет обратную:

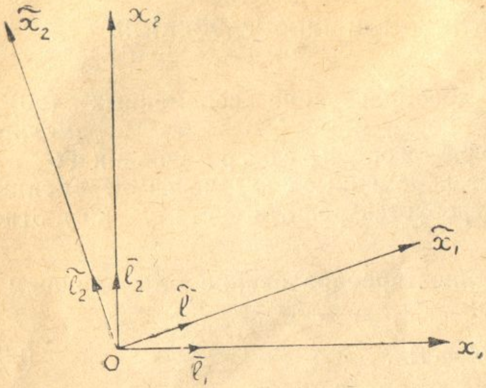
$$A^{-1} = \frac{1}{1}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}; \quad \bar{X} = A^{-1}\bar{x}',$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1' - 2x_2' \\ -7x_1' + 3x_2{}^{1\prime} \end{pmatrix},$$

или

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5x_1' - 2x_2' \\ x_2 &= -7x_1' + 3x_2' \end{aligned}\right\}.$$



Пусть даны две системы координат на плоскости: x_1Ox_2 и $\tilde{x}_1O\tilde{x}_2$; $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ — базис старой системы, а $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ — базис новой системы; x_1, x_2 — старые координаты, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ — новые координаты точки M. Взаимное расположение осей координат может быть задано косинусами углов между старыми и новыми ортами:

$$\cos(\widehat{\bar{e}_1, \tilde{e}_1}) = \bar{e}_1 \tilde{e}_1 = \alpha_{11}; \quad \cos(\widehat{\bar{e}_1, \tilde{e}_2}) = \bar{e}_1 \tilde{e}_2 = \alpha_{12}; \tag{37}$$

$$\cos(\widehat{\bar{e}_2, \tilde{e}_1}) = \bar{e}_2 \tilde{e}_1 = \alpha_{21}; \quad \cos(\widehat{\bar{e}_2, \tilde{e}_2}) = \bar{e}_2 \tilde{e}_2 = \alpha_{22}.$$

Тогда можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \alpha_{11}\bar{e}_1 + \alpha_{21}\bar{e}_2 \\ \tilde{e}_2 &= \alpha_{12}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2 \end{aligned}\right\} \text{— разложение векторов } \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \text{ по старому базису;} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \alpha_{11}\tilde{e}_1 + \alpha_{12}\tilde{e}_2 \\ \bar{e}_2 &= \alpha_{21}\tilde{e}_1 + \alpha_{22}\tilde{e}_2 \end{aligned}\right\} \text{— разложение векторов } \bar{e}_1, \bar{e}_2 \text{ по новому базису.} \tag{39}$$

Если обозначить через L матрицу разложения (39), то матрица разложения (38) получится из матрицы L транспонированием (и обратно):

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad (39') \quad \text{и} \quad L^{\text{т}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \tag{38'}$$

Матрицы L и $L^{\text{т}}$ обладают следующими свойствами:

1. Сумма квадратов элементов любого столбца и любой строки равна единице, так как она определяет квадрат длины соответствующего орта (например, $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = |\bar{e}_1|^2 = 1$ и т. д.).

2. Сумма произведений соответствующих элементов двух строк или двух столбцов равна нулю, так как определяет скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных ортов, например,

$$\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}=\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2=0.$$

$$3.\quad LL^{\text{т}}=L^{\text{т}}L=E;\ \text{значит},\quad L^{\text{т}}=L^{-1}, \tag{40}$$

$$4.\quad \det L=\pm 1.$$

В самом деле, из [3] следует, что $\det(LL^{\text{т}})=\det E$, или $\det L\cdot\det L^{\text{т}}=1$; а так как $\det L=\det L^{\text{т}}$, то получим: $(\det L)^2=1$; следовательно, $\det L=\pm 1$ (Знак + или — зависит от того, одинаково или различно ориентированы базисы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$).

Матрицы L, обладающие перечисленными свойствами, называются ортогональными.

Если $\bar{r}=OM$ — радиус-вектор точки M, то получим:

$$\bar{r}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2 \quad \text{и} \quad \bar{r}=\tilde{x}_1\tilde{e}_1+\tilde{x}_2\tilde{e}_2$$

— разложение по ортам в старой и новой системе координат.

Поэтому

$$x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2=\tilde{x}_1\tilde{e}_1+\tilde{x}_2\tilde{e}_2. \tag{а}$$

Умножая обе части этого равенства на $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, скалярно, получим:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\alpha_{11}\tilde{x}_1+\alpha_{12}\tilde{x}_2\\ x_2&=\alpha_{21}\tilde{x}_1+\alpha_{22}\tilde{x}_2\end{aligned}\right\}. \tag{41}$$

Умножая (а) скалярно на $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_1&=\alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2\\ \tilde{x}_2&=\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2\end{aligned}\right\}. \tag{42}$$

Равенства (41) и (42) суть формулы преобразования координат. В векторно-матричной форме эти формулы запишутся так:

$$X=L\tilde{X} \qquad (41') \qquad \text{и} \qquad \tilde{X}=L^{-1}X, \tag{42'}$$

где

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{X}=\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}. \tag{б}$$

Введем также транспонированные по отношению к ним матрицы:

$$X^{\text{т}}=(x_1\ x_2) \quad \text{и} \quad \tilde{X}^{\text{т}}=(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2). \tag{в}$$

Тогда из (41'): $X^{\text{т}}=\tilde{x}^{\text{т}}L^{\text{т}}$ и из (42'): $\tilde{x}^{\text{т}}=X^{\text{т}}\,(L^{-1})^{\text{т}})$. (г)

Учитывая, что $L^{-1}=L^{\text{т}}$, запишем:

$$X^{\text{т}} = \tilde{X}^{\text{т}} L^{-1} \qquad (41'') \qquad \text{и} \qquad \tilde{x}^{\text{т}} = X^{\text{т}} L. \qquad (42'')$$

Замечание. Если обозначить через α угол между осями Ox_2 и $O\tilde{x}_1$, то

$$\alpha_{11} = \cos(\widehat{\bar{e}_1, \tilde{e}_1}) = \cos\alpha; \quad \alpha_{12} = \cos(\widehat{\bar{e}_1, \tilde{e}_2}) = -\sin\alpha;$$

$$\alpha_{21} = \cos(\widehat{\bar{e}_2, \tilde{e}_2}) = \sin\alpha; \quad \alpha_{22} = \cos(\widehat{\bar{e}_2, \tilde{e}_2}) = \cos\alpha.$$

Тогда

$$L = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (39'')$$

Формулы преобразования (41) и (42) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1 \cos\alpha - \tilde{x}_2 \sin\alpha \\ x_2 &= \tilde{x}_1 \sin\alpha + \tilde{x}_2 \cos\alpha \end{aligned}\right\}, \qquad (43)$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha \\ \tilde{x}_2 &= -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{aligned}\right\}. \qquad (44)$$

§ 13. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Квадратичной формой двух переменных x_1, x_2 называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных:

$$F(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2. \qquad (45)$$

Поставим задачу: преобразовать квадратичную форму (45) к новым переменным $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ так, чтобы она не содержала члена с произведением этих переменных:

$$F = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 \qquad (46)$$

(такой вид квадратичной формы называется канонически м).

Для решения этой задачи применим средства матричной алгебры. Положив $a_{12} = a_{21}$, запишем формулу (45) так:

$$F = x_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + x_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2). \qquad (\text{а})$$

Введем в рассмотрение матрицу, составленную из коэффициентов квадратичной формы (45):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (45')$$

которую будем называть **матрицей формы**. Матрица квадратичной формы (46) будет иметь диагональный вид:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \qquad (46')$$

Чтобы привести квадратичную форму (45) к каноническому виду (46), нужно найти такое преобразование переменных, чтобы матрица формы (45) получила диагональный вид (46). Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X^{\text{т}} = (x_1 \ x_2).$$

Тогда получим:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix} \qquad (б)$$

и

$$X^{\text{т}} AX = \left(x_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + x_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2)\right). \qquad (в)$$

Таким образом,

$$F = X^{\text{т}} AX. \qquad (47)$$

Перейдем теперь к новым переменным $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ по формулам перехода от старых координат к новым:

$$X = L\tilde{X} \qquad (41') \quad \text{и} \quad X^{\text{т}} = \tilde{X}^{\text{т}} L^{-1}. \qquad (41'')$$

Подставляя в равенство (47), получим:

$$F = (\tilde{X}^{\text{т}} L^{-1}) A (L\tilde{X}),$$

или, применяя свойство сочетательности произведения, получим:

$$F = \tilde{X}^{\text{т}} (L^{-1} AL) \tilde{X}. \qquad (а)$$

Обозначим:

$$A' = L^{-1} AL. \qquad (48)$$

Тогда равенство (а) запишется в виде:

$$F = \tilde{X}^{\text{т}} A' X, \qquad (49)$$

т. е. в виде, аналогичном первоначальному (47) с помощью матрицы (48). Нам нужно, чтобы матрица A' имела диагональный вид (46′).

Для отыскания такой матрицы, а также матрицы L, осуществляющей искомое преобразование, поступаем так: умножим равенство (48) на матрицу L слева:

$$L A' = L L^{-1} A L, \qquad \text{или}$$

$$L A' = AL \qquad (50) \qquad (AL = LA').$$

Выполним умножение матриц в левой и правой частях уравнения (50):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,\alpha_{11} + a_{12}\,\alpha_{21} & a_{11}\,\alpha_{12} + a_{12}\,\alpha_{22} \\ a_{21}\,\alpha_{11} + a_{22}\,\alpha_{21} & a_{21}\,\alpha_{12} + a_{22}\,\alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1 & \alpha_{12}\lambda_2 \\ \alpha_{21}\lambda_1 & \alpha_{22}\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\,\alpha_{11} + a_{12}\,\alpha_{21} = \alpha_{11}\lambda_1 \\ a_{21}\,\alpha_{11} + a_{22}\,\alpha_{21} = \alpha_{21}\lambda_1 \end{aligned}\right\} \quad (б) \quad и \quad \left.\begin{aligned} a_{11}\,\alpha_{12} + a_{12}\,\alpha_{22} = \alpha_{12}\lambda_2 \\ a_{21}\,\alpha_{12} + a_{22}\,\alpha_{22} = \alpha_{22}\lambda_2 \end{aligned}\right\}. \quad (в)$$

Системы (б) и (в) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_1)\,\alpha_{11} + a_{12}\,\alpha_{21} = 0 \\ a_{21}\,\alpha_{11} + (a_{22}-\lambda_1)\,\alpha_{21} = 0 \end{aligned}\right\}, \\ &\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_2)\,\alpha_{12} + a_{12}\,\alpha_{22} = 0 \\ a_{21}\,\alpha_{12} + (a_{22}-\lambda_2)\,\alpha_{22} = 0 \end{aligned}\right\}. \end{aligned} \tag{51}$$

Получили однородные системы линейных уравнений с двумя неизвестными α_{11}, α_{21} (или α_{12}, α_{22}). Они имеют ненулевые решения тогда и только тогда, когда равны нулю их определители:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad и \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{52}$$

Отсюда следует, что λ_1 и λ_2, т. е. элементы искомой матрицы $A' = A$ являются корнями одного и того же квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{53}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением матрицы A, а его корни λ_1 и λ_2 — собственными значениями матрицы A*. Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = A - \lambda E \tag{54}$$

называется *характеристической матрицей* матрицы A, определитель $\det(A - \lambda E)$ — *ее характеристическим определителем.*

Подставляя найденные корни λ_1, λ_2 в системы (51) и решив их, мы найдем элементы ортогональной матрицы преобразования L, а следовательно и новый базис $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, в котором квадратичная форма имеет канонический вид (46).

Из изложенного вытекает следующий план приведения квадратичной формы (43) к каноническому виду:

1. Составляем матрицу A квадратичной формы;

2. Составляем ее характеристическое уравнение (53) и находим его корни λ_1 и λ_2;

3. Подставив λ_1 и λ_2 в (46), получим канонический вид формы F;

4. Подставив λ_1 и λ_2 в системы (51) и решив их, найдем элементы матрицы преобразования L.

Примеры 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$F = 17\,x^2 + 12\,xy + 8\,y^2.$$

Решение. 1) $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ — матрица квадратичной формы;

2) $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$ — ее характеристическое уравнение;

$\lambda^2 - 25\,\lambda + 100 = 0$; $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 5$ — собственные числа матрицы A.

3) $F = 20\,(x')^2 + 5\,(y')^2$ — канонический вид данной квадратичной формы.

4) Подставляя в (51), получим:

$$\left.\begin{aligned} -3\,\alpha_{11} + 6\,\alpha_{21} &= 0 \\ 6\,\alpha_{21} - 12\,\alpha_{21} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (б) \quad и \quad \left.\begin{aligned} 12\,\alpha_{12} + 6\,\alpha_{22} &= 0 \\ 6\,\alpha_{12} + 3\,\alpha_{22} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (в)$$

$\alpha_{11} = 2\,\alpha_{21}$ и $\alpha_{22} = -2\,\alpha_{12}$. Так как $\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1$ и $\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$, то имеем

$$4\,\alpha_{21}^2 + \alpha_{21}^2 = 5\,\alpha_{21}^2 = 1$$

и

$$\alpha_{12}^2 + 4\,\alpha_{12}^2 = 5\,\alpha_{12}^2 = 1; \qquad \alpha_{21}^2 = \frac{1}{5} \quad и \quad \alpha_{12}^2 = \frac{1}{5}.$$

Если $\alpha_{21} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\alpha_{12} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, то $\alpha_{11} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\alpha_{22} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ — матрица преобразования координат.}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}\,x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\,y' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y' \end{aligned}\right\} \text{ — формулы преобразования координат.}$$

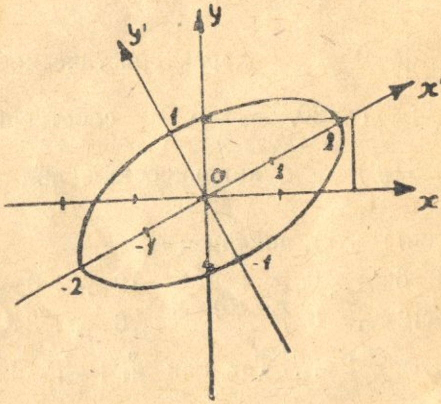
$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ — угол поворота осей координат.

2. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0.$$

Решение. $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 20$, в левой части уравнения стоит квадратичная форма. Из примера (1) следует, что она примет канонический вид $20(x')^2 + 5(y')^2$, если повернем систему координат xOy на угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. В новой системе координат уравнение данной кривой примет канонический вид:

$5(x')^2 + 20(y')^2 = 20$ или $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} = 1$—эллипс. Построим его.



Замечание. Все изложенное в § 12—13 можно распространить на систему координат в пространстве и на квадратичные формы с тремя переменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Н. В. Квадратичные формы и матрицы. Физматгиз, 1962.

2. Карпелевич Ф. И. и Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Физматгиз, 1963.

3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. «Наука», 1968.

4. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. «Просвещение», 1966.

5. Ромакин М. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. «Высшая школа», 1963.

6. Рублев А. Н. Линейная алгебра. «Высшая школа», 1968.

7. Солодовников А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. «Просвещение», 1966.

8. Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики. «Высшая школа», 1966.

9. Хедли Дж. Линейная алгебра. «Высшая школа», 1966.

ОГЛАВЛЕНИЕ

П. А. Шимаров

Матрицы

Редактор **Р. Х. Андреева**

Технический редактор **С. И. Протиковская**

Корректор **С. И. Протиковская**

ЕО18982. Подп. к печ. 28/XII 1971 г. Формат $60 \times 90^1/_{16}$, печ. л. 1,75. Уч.-и л. 1,7. Тир. 1000 экз. Цена 25 коп., г. Куйбышев, тип. им. Мяги. Заказ 7

Цена 25 коп.