

А.И. ГЛЕЙЗЕР

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ТОЛЬЯТИ 1995

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
ТОЛЬЯТИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ
Учебное пособие

БИБЛИОТЕКА
Тольяттинского
политехнического института
Инв. №

Тольятти 1994

УДК 534

Глейзер А.И. Теория колебаний: Учебн.пособие.- Тольятти: ТолПИ,
1995. С. 144.

Изложены вопросы свободных и вынужденных колебаний линейных систем с одной или несколькими степенями свободы, а также стержневых систем с непрерывно распределенными параметрами – массой и плоскостью.

Подробно рассмотрены вопросы динамики вращающихся валов.

Уделено значительное внимание практическим приемам управления вибрацией машин, которые находят широкое применение в инженерном деле.

Для студентов спец. I201, I202, I209, I302, I501, I502.

Ил. 56. Табл. 5. Библиогр.: 12 назв.

Рецензенты: кафедра "Технология машиностроения" ТолПИ (зав.кафедрой д.т.н.профессор Драчев О.И.);
к.т.н.доцент зав.кафедрой ОНД ПАСБиУ Жулидов А.В.

Научный редактор Прасолов С.Г.

АКВАТОНГАЗ

отделение газа

Учебное отделение газа

Утверждено редакционно-издательской секцией методического совета института.

С Тольяттинский политехнический
институт, 1995.

Мир, в котором мы живем, удивительно склонен к колебаниям

Р.Бишоп

I. ВВЕДЕНИЕ

Трудно назвать явление более распространенное, чем колебания. Действительно, уже самый поверхностный анализ легко убедит нас, что мы живем как бы в непрерывно пульсирующем мире. Вот несколько примеров колебательных процессов:

движение маятника;

движение электрических зарядов в колебательном контуре;

вибрация крыла самолета;

колебания струны;

биеение сердца;

периодическая миграция животных, например полярных мышей (леммингов);

колебания воздуха (звук) и т.д.

Ясно, что общим во всех этих чрезвычайно различных по физической природе процессах является цикличность, движение туда и обратно.

Невозможно рассмотреть все аспекты колебательных процессов в объеме данного пособия. Цель пособия — ознакомить читателя с некоторыми техническими приложениями теории колебаний, наиболее необходимыми инженеру-механику в повседневной практике.

I.I. О пользе и вреде механических колебаний

Как и всякое явление, колебания могут быть либо полезными, либо опаснейшим врагом. Вот несколько примеров успешного применения вибраций:

вибропогружение свай при строительстве фундаментов;

виброуплотнение бетона в строительстве и формовочных смесей в литейном производстве;

поверхностное виброупрочнение металлических деталей (так называемая "вibrogalтовка");

вибротранспортировка деталей и т.д.

Вместе с тем механические колебания, или вибрации, могут приносить и весьма ощутимый вред. Достаточно сказать, что 70–80% всех поломок авиационных газотурбинных двигателей вызываются именно вибрациями; аналогичная картина наблюдается и в других областях машиностроения.

Но дело не только в прочности. Часто вибрации, не вызывая явных дефектов, тем не менее препятствуют нормальной работе изделий. Например, вибрации существенно ухудшают качество механической обработки деталей на металлообрабатывающих станках. На транспорте вибрации способны создавать серьезную опасность для здоровья пассажиров и экипажей или существенно уменьшать степень комфорта.

Вспомним, например, путешествие И.Ильфа и Е.Петрова на трансатлантическом лайнере "Нормандия". "Вибрация парохода была столь сильной, что начали издавать звуки даже такие предметы, от которых никак этого нельзя было ожидать. Впервые в жизни мы слышали, как звучит полотенце, мыло, ковер на полу, бумага на столе, занавески. Звучало и гремело все, что находилось в каюте. Достаточно было пассажиру на секунду задуматься и ослабить мускулы лица, как у него начинали стучать зубы. Всю ночь казалось, что кто-то ломится в двери, стучит в окна, тяжело хохочет".

Ясно, что борьба с вибрациями в подобных обстоятельствах является непременным условием обеспечения надежности и высокого качества работы изделий.

I.2. Некоторые особенности механического воздействия

вибраций

Зададимся вопросом, почему вибрации способны оказывать столь решающее воздействие на работу изделий? Укажем следующие причины:

I. Одна и та же конструкция совершенно по-разному сопротивляет-
ся действию статических и динамических нагрузок.

Пусть мы имеем две одинаковые балки, одна из которых нагружается статической силой P_0 , а другая – силой, изменяющейся по гармоническому закону $P = P_0 \sin \omega t$. Тогда статическая деформация первой δ_{ct} и амплитудное значение динамической деформации δ_d второй балки

$$\delta_{ct} = P_0 e_{ct}, \quad \delta_d = P_0 e_d, \quad (I.I)$$

где e_{ct} и e_d – статический и динамический коэффициенты податли-
вости балок.

Но если коэффициент податливости e_{cr} есть некоторая постоянная величина, определяемая только конструкцией и материалом балки, то величина e_d зависит и от частоты изменения динамической нагрузки. Примерный вид этой зависимости показан на рис. I. Обратим внимание на те точки, где динамическая податливость достигает максимальных значений. Частоты возбуждения, соответствующие этим точкам, называются критическими или резонансными. Если частота возбуждения будет равной или близкой к одной из резонансных частот, то жесткость конструкции уменьшается и амплитуда динамического прогиба резко увеличивается по сравнению с прогибом, который был бы зафиксирован при статическом (т.е. бесконечно медленном) приложении нагрузки.

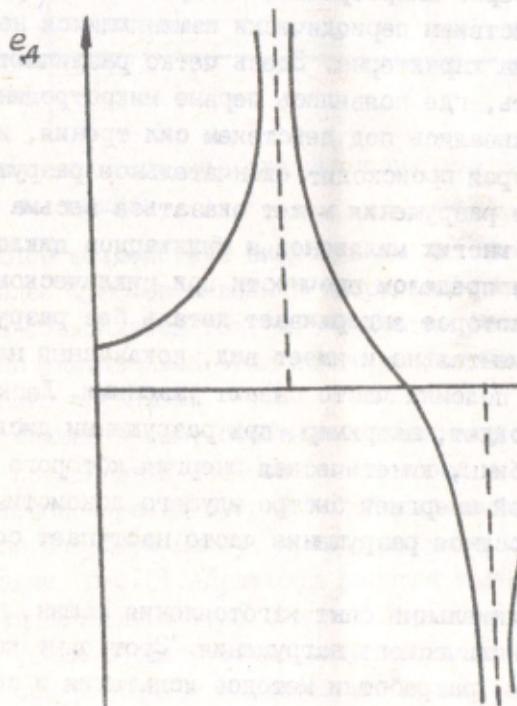


Рис. I. Зависимость динамической податливости от частоты

Таким образом, при частотах, равных или близких к критическим, конструкция перестает эффективно противодействовать прикладываемой нагрузке. Именно поэтому работа на резонансных или критических режимах всегда представляет определенную опасность и еще до недавнего времени считалась абсолютно недопустимой.

2. Все конструкционные материалы по-разному сопротивляются действию статических и динамических нагрузок.

Известно, что при статическом нагружении деталь разрушается лишь в том случае, если напряжения превысят предел прочности материала, из которого она изготовлена (для хорошей конструкционной стали эти предельные напряжения достигают $150\text{--}250 \text{ кг}/\text{мм}^2$). Если же деталь подвержена циклически изменяющимся напряжениям, возникающим при вибрациях, то при достаточно большом числе циклов деталь будет разрушена при напряжениях, в 5-10 раз меньших предела прочности. Здесь сказывается так называемое явление "усталости материалов". Исследования показывают, что обычно разрушение начинается с появления в нагруженной зоне серии микротрещин, которые затем прогрессивно увеличиваются под действием периодически изменяющихся нагрузок. Поверхность излома весьма характерна. Здесь четко различаются две зоны: гладкая поверхность, где появились первые микротрешины, края которых постепенно сглаживались под действием сил трения, и зернистая поверхность, по которой происходит окончательное разрушение.

Процесс усталостного разрушения может оказаться весьма длительным и завершиться после многих миллионов и миллиардов циклов нагружения. Зависимость между пределом прочности при циклическом нагружении и числом циклов, которое выдерживает деталь без разрушения, устанавливается экспериментально и имеет вид, показанный на рис. 2. Последствия усталостной поломки часто бывают ужасными. Легко представить себе, что произойдет, например, при разрушении диска рабочего колеса паровой турбины, кинетическая энергия которого вполне соизмерима с кинетической энергией быстро идущего локомотива. Особенно опасно, что усталостное разрушение часто наступает совершенно внезапно.

Сейчас накоплен значительный опыт изготовления машин, надежно работающих в условиях циклического нагружения. Этот опыт касается принципов проектирования, разработки методов испытания и соответствующего оборудования, обработки поверхностей, развития методов дефектоскопии и т.д. Однако вопросы снижения уровня циклических напряжений и методов их расчетной оценки представляются особенно важными. Чаще всего они решаются с позиций теории механических колебаний.

3. Большая сложность динамического расчета по сравнению со статическим.

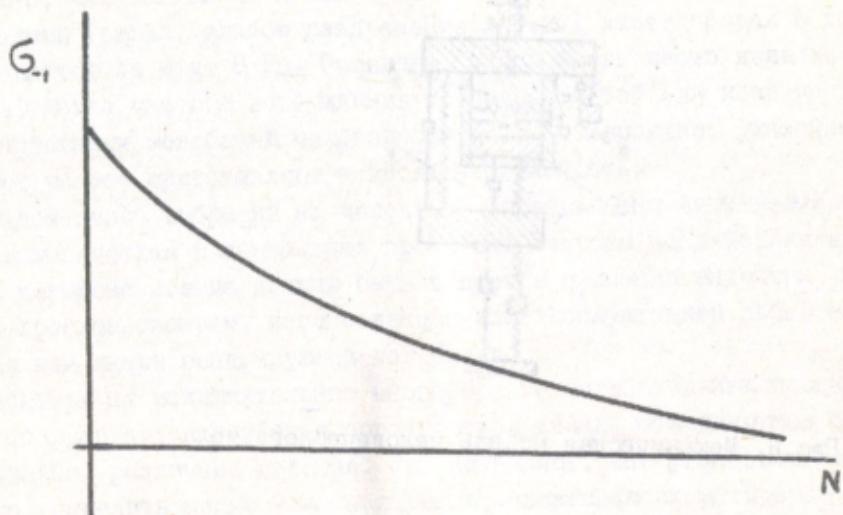


Рис.2. Зависимость предела выносливости материала от количества циклов

4. Вредное воздействие вибраций на человеческий организм.

Наиболее чувствительным к вибрациям является человеческий организм. Это объясняется тем, что вибрации относятся к числу факторов, которые не учитывались (или почти не учитывались) в процессе эволюции живого организма.

В последнее время, особенно в связи с развитием авиации и космонавтики, проявляется все больший интерес к динамике человеческого тела. С точки зрения теории колебаний человеческое тело представляет собой аморфную массу, армированную проходящими изнутри упругими стержнями (рис.3). Делаются попытки математического описания динамики человеческого тела с использованием различных динамических моделей. Таким образом можно рассчитать относительное движение частей тела при различных частотах колебаний, оценить величины его деформаций. Еще большую сложность представляет динамика внутренних органов. Исследователям еще предстоит ответить на вопросы, как работает сердце в условиях вибраций, как при этом изменяется кровяное давление и т.д.

Выполненные исследования позволили установить зависимость между субъективными ощущениями человека и параметрами вибраций (рис.4).

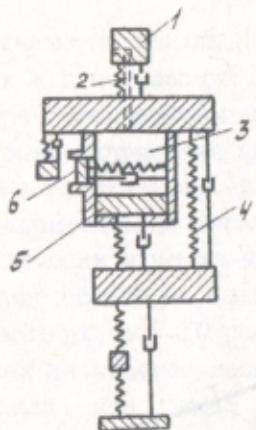


Рис.3. Механическая модель человеческого тела

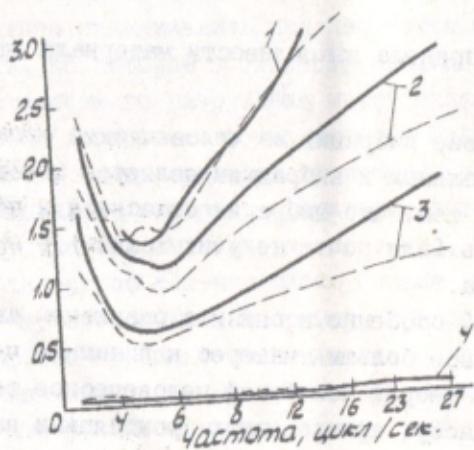


Рис.4. Кривые субъективных реакций:

— испытуемые стояли; - - - испытуемые сидели;
 1 — страх; 2 — весьма сильное раздражение; 3 — слабое раздражение; 4 — ощущимые вибрации

Любопытно, что каждая из кривых, соответствующих определенному типу ощущений (страх, слабое раздражение и т.д.), имеет провал в диапазоне частот от 4 до 8 Гц. Очевидно, здесь имеет место явление резонанса, когда частота возбуждения совпадает с той или иной частотой собственных колебаний человеческого тела. Вероятно, указанный диапазон частот представляет наибольшую опасность.

Воздействие вибраций на человека - чрезвычайно важная инженерная, биологическая и социальная проблема. Вопросы воздействия вибраций на человека всегда должны быть в центре внимания инженера, занятого проектированием, изготовлением или эксплуатацией любой машины, так или иначе генерирующей колебания.

Несмотря на исключительное многообразие колебательных процессов, обнаруживается глубокая органическая связь, объединяющая самые, казалось бы, различные явления. Это позволяет, как указывает Я.Г. Пановко, выделить целые классы явлений, охватывающих множество частных задач. Можно назвать 6 категорий различных по своей природе колебательных процессов:

1. Свободные колебания, т.е. колебания, протекающие без притока энергии извне и определяемые заданными начальными условиями.
2. Вынужденные колебания, т.е. колебания, возбуждаемые периодически изменяющимися силами.
3. Критические состояния вращающихся валов.
4. Параметрические колебания, вызываемые периодическим изменением параметров самой колеблющейся системы - массы, жесткости, моментов инерции и т.д.
5. Автоколебания, т.е. колебательные процессы, поддерживаемые с помощью постоянных (не меняющихся по времени) источников энергии.
6. Случайные колебания, т.е. колебания, возбуждаемые силами, зависимость которых от времени носит случайный характер.

Целью пособия является ознакомление читателя (преимущественно студента технического вуза, начинающего инженера) с методами решения некоторых задач, наиболее часто возникающих в связи с вибрациями машин. Наибольшее внимание уделяется колебательным процессам, относящимся к первым трем классам, т.е. свободным, вынужденным колебаниям и критическим состояниям вращающихся валов. Рассматриваемые решения тех или иных задач и методы расчета достаточно просты и находят широкое применение в инженерной практике.

2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

2.1. Число степеней свободы колебательной системы

Число степеней свободы любой механической системы определяется числом независимых друг от друга параметров, однозначно определяющих положение данной системы в пространстве в любой момент времени.

В качестве таких независимых параметров могут иногда приниматься декартовы координаты отдельных точек системы; тогда координаты других точек могут быть найдены с помощью уравнений связей, налагаемых на систему. Чаще в качестве независимых параметров принимаются не декартовы координаты, а некоторые величины другой физической природы и размерности. Эти величины (здесь они обозначаются q_t) носят название обобщенных координат.

Таким образом, если положение системы определяется одной, двумя и т.д. обобщенными координатами, то такая система обладает соответственно одной, двумя и т.д. степенями свободы.

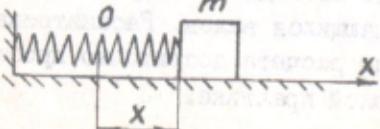
Все реальные колебательные системы, обладающие непрерывно распределенной массой и деформируемые по всему объему, обладают бесконечным множеством степеней свободы, а их представление в виде систем с конечным числом степеней свободы возможно только при определенных допущениях. Обычно предполагается, что масса системы сосредоточена в ее отдельных звеньях, принимаемых абсолютно твердыми: в то же время упругие свойства приписываются другим звеньям, массой которых пренебрегается.

Такая схематизация, если она выполнена грамотно, позволяет достаточно точно описать динамические свойства колебательной системы по крайней мере в ограниченном диапазоне частот.

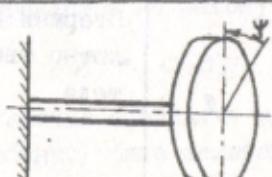
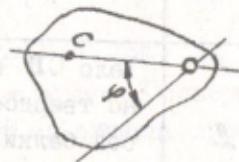
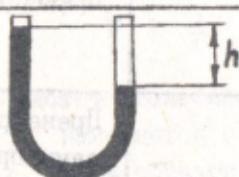
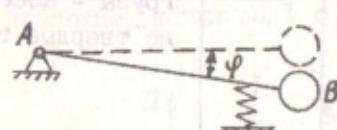
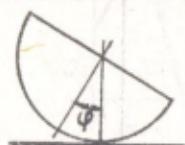
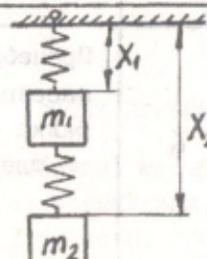
В табл. I приводятся некоторые часто встречающиеся схемы колебательных систем с одной, двумя и более степенями свободы.

Таблица I

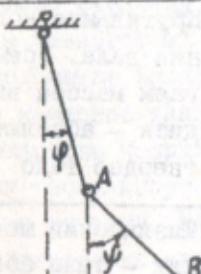
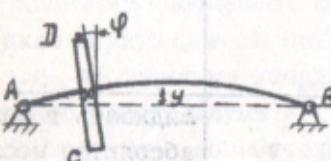
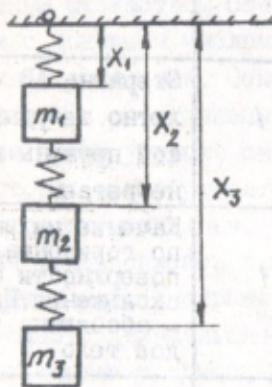
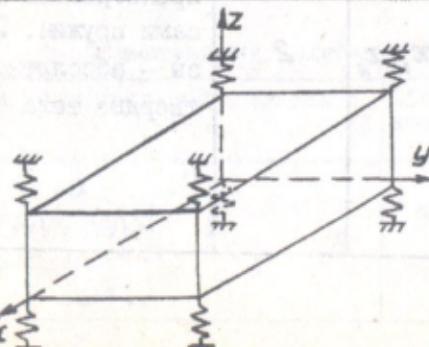
Схематизация колебательных систем

Схема колебательной системы	Обобщ. коорд.	Число степеней свободы	Примечание
	x	1	Пренебрегаем массой пружины. Груз M - абсолютно твердое тело

Продолжение табл. I

Схема колебательной системы	Обобщ. коорд.	Число степеней свободы	Примечание
	φ	1	Крутильные колебания вала. Пренебрегаем массой вала, диск - абсолютно твердое тело
	φ	1	Физический маятник - тело абсолютно твердое
	h	1	Жидкость в колене абсолютно несжимаема
	φ	1	Стержень АВ - абсолютно твердый. Массой пружины пренебрегаем
	φ	1	Качение цилиндра по горизонтальной поверхности без скольжения. Цилиндр - абсолютно твердое тело
	x_1, x_2	2	Пренебрегаем массами пружин. Грузы - абсолютно твердые тела

Окончание табл. I

Схема колебательной системы	Обобщ. коорд.	Число степеней свободы	Примечание
	φ, ψ	2	Стержни - абсолютно твердые тела
	y, φ	2	Тело CD абсолютно твердое. Массой балки AB пренебрегаем
	X_1, X_2, X_3	3	Пренебрегаем массами пружин. Грузы - абсолютно твердые тела
	$x_1; y_1; x_2; y_2; \theta; \varphi$	6	Пренебрегаем массами пружин. Балка - абсолютно твердое тело

2.2. Кинематика колебательных процессов

Простейшим колебательным процессом является гармоническое колебание, протекающее по закону

$$x = a \cdot \sin (\omega t + \varphi). \quad (2.1)$$

График колебаний изображен на рис.5. По истечении времени T (периода колебаний) фаза колебаний увеличивается на 2π , и колебательный процесс начинает повторяться, т.е.

$$\omega(t+T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi, \quad (2.2)$$

$$\omega T = 2\pi, \quad T = 2\pi/\omega.$$

Так как за время T совершается одно полное колебание, то число колебаний за единицу времени определяется по формуле

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (2.3)$$

где ν – частота колебаний.

Если T измеряется в секундах, то частота колебаний измеряется в герцах. Таким образом, частота, равная 1 Гц, соответствует такому движению, когда за 1 с совершается одно полное колебание.

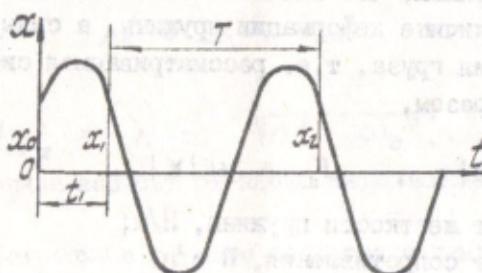


Рис.5. График движения при гармоническом колебании

2.3. Движение материальной точки под действием силы сопротивления, пропорциональной скорости и силы упругости, пропорциональной деформации

На рис.6. изображена одна из простейших колебательных систем с одной степенью свободы: тело закреплено на пружине и может пере-

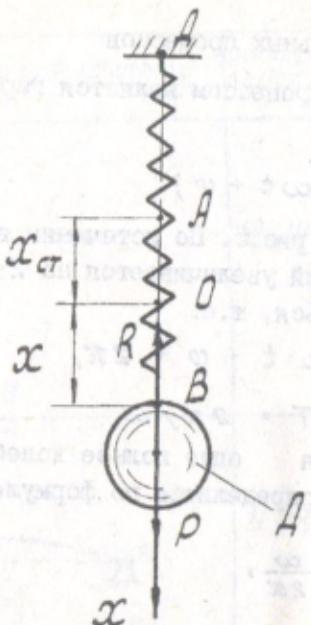


Рис.6. Система с одной степенью свободы

мещаться по вертикали вдоль оси x . Движение происходит под действием силы веса P , восстанавливающей силы R (силы упругости) и силы сопротивления. Примем, что значение восстанавливающей силы прямо пропорционально величине деформации пружины, а силы сопротивления — скорости движения груза, т.е. рассматриваемая система является линейной. Таким образом,

$$|R| = c |D|, \quad F_c = \mu |v|, \quad (2.4)$$

где c — коэффициент жесткости пружины, Н/м;
 μ — коэффициент сопротивления, Н с/м.

Нанесем на оси x три риски: А — положение ненагруженной пружины, О — статического равновесия груза (сила веса в точности уравновешивается натяжением пружины), В — текущее положение груза. Статическая деформация пружины

$$AO = \Delta_{ct} = P/c. \quad (2.5)$$

Если принять точку О за начало отсчета, то отрезок OB определит текущую координату движущейся точки ($OB = x$). Дифференциальное

уравнение движения

$$m\ddot{x} = P - R - F_{co}. \quad (2.6)$$

Принимая $F_c = \mu \dot{x}$, $R = c|\Delta| = c \cdot |AO| = c |\Delta_{ct} + x|$, найдем

$$m\ddot{x} + \mu \dot{x} + cx = 0. \quad (2.7)$$

Введем обозначения

$$\omega_0^2 = c/m, \quad 2n = \mu/m. \quad (2.8)$$

Определим размерность полученных величин:

$$[\omega_0] = [n] = \frac{\rho \omega \theta}{c \theta \kappa}.$$

С учетом обозначений (2.8) уравнение (2.7) приводим к виду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) называют стандартным в том смысле, что оно описывает движение любой колебательной системы с одной степенью свободы независимо от ее конструктивного облика.

Принимая решение полученного однородного линейного дифференциального уравнения в виде

$$x = e^{kt}, \quad \dot{x} = ke^{kt}, \quad \ddot{x} = k^2 e^{kt}$$

и подставляя эти выражения в (2.9), найдем так называемое характеристическое уравнение

$$k^2 + 2nk + \omega_0^2 = 0 \quad (2.10)$$

и его корни

$$k_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}. \quad (2.11)$$

Дальнейшее решение зависит от знака дискриминанта. Здесь возможны три случая:

I. $n > \omega_0$ (системы с большим сопротивлением).

Оба корня характеристического уравнения выражаются действительными отрицательными числами, а общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2})t}, \quad (2.12)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad v = v_0. \quad (2.13)$$

Движение (рис.7) не носит колебательного характера и представляет собой процесс асимптотического движения материальной точки к положению статического равновесия. Такое движение называют релаксационным или апериодическим.

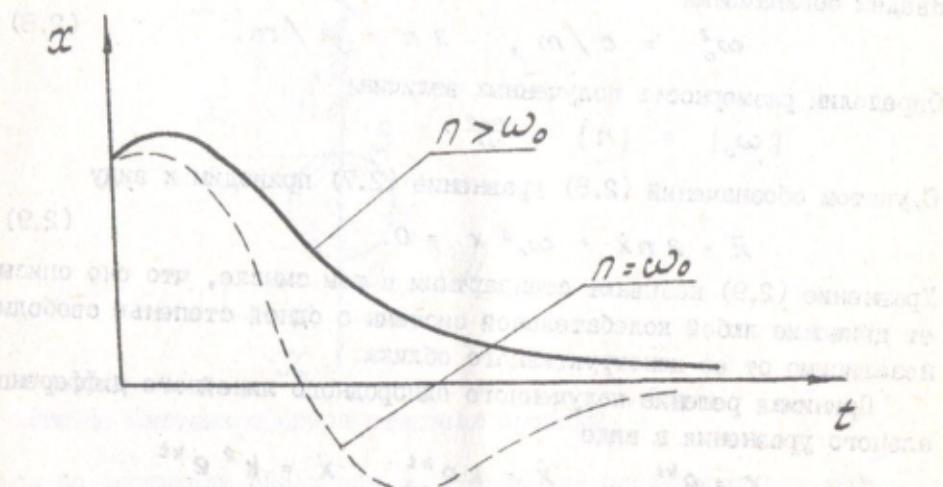


Рис.7. Движение системы с одной степенью свободы при сопротивлении, пропорциональном скорости

2. $n = \omega_0$. Корни характеристического уравнения одинаковы:

$k_1 = k_2 = -n$. Движение описывается уравнением

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t).$$

Движение (рис.7) является апериодическим.

3. $n < \omega_0$. Корни характеристического уравнения выражаются комплексными числами

$$k_{1,2} = -n \pm i\omega_0, \quad (2.14)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}. \quad (2.15)$$

Общее решение уравнения (2.9)

$$x = e^{-nt} (A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}), \quad (2.16)$$

где A и B - произвольные постоянные, которые должны быть представлены в комплексном виде:

$$A = a_1 + i a_2, \quad B = b_1 + i b_2. \quad (2.17)$$

В соответствии с известной формулой Эйлера запишем следующее равенство:

$$e^{\pm i\omega_1 t} = \cos \omega_1 t \pm i \sin \omega_1 t. \quad (2.18)$$

Подставив равенства (2.17) и (2.18) в (2.16) и группируя отдельно действительные и мнимые члены, найдем

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + i e^{-nt} (C'_1 \cos \omega_1 t + C'_2 \sin \omega_1 t), \quad (2.19)$$

где C_1, C_2, C'_1, C'_2 - некоторые новые произвольные постоянные. Так как начальные условия (2.13) выражаются только действительными числами, то $C'_1 = C'_2 = 0$. Окончательное решение будет иметь вид

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t). \quad (2.20)$$

Произвольные постоянные

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_0 + n x_0}{\omega_1}. \quad (2.21)$$

Решение дифференциального уравнения можно представить в другой форме:

$$x = a e^{-nt} \sin (\omega_1 t + \varphi), \quad (2.22)$$

где произвольные постоянные a и φ могут быть выражены через C_1, C_2 :

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad (2.23)$$

$$\varphi = \arctan \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.24)$$

Движение носит характер свободных затухающих колебаний (рис.8). Амплитуда колебаний с течением времени уменьшается по экспоненциальному закону, причем скорость затухания характеризуется множителем e^{-nt} .



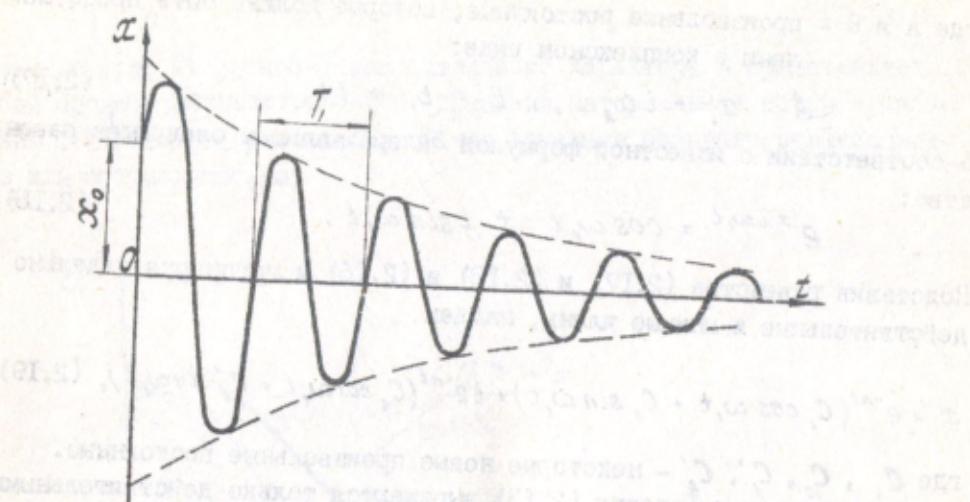


Рис.8. График свободных затухающих колебаний

Возьмем отношение двух последовательных амплитудных смещений a_k и a_{k+1} , наблюдаемых в момент времени t_k и $t_k + T$, (T - период свободных затухающих колебаний, $T = 2\pi/\omega_0$):

$$\psi = \frac{a_k}{a_{k+1}} = e^{-nT}, \quad (2.25)$$

Найденная величина называется коэффициентом затухания: чем больше ψ , тем интенсивней гасятся колебания. Чаще интенсивность затухания характеризуется другой величиной, равной натуральному логарифму ψ :

$$\delta = \ln \psi = nT, \quad (2.26)$$

Эта величина называется логарифмическим декрементом колебаний.

Сопротивление, пропорциональное скорости, несколько снижает частоту свободных колебаний и соответственно увеличивает период по сравнению со свободными колебаниями без сопротивления.

Рассмотрим пример. Пусть амплитуда свободных затухающих колебаний уменьшается в 2 раза за каждый период. Требуется найти частоту затухающих колебаний, если частота свободных колебаний той же системы без сопротивления равна ω_0 . Найдем коэффициент затухания и логарифмический декремент:

$$\psi = 2, \quad \delta = \ln \psi = 0,693 = nT,$$

Поскольку $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, последнее равенство представим в виде

$$\frac{2\pi n}{\omega_1} = 0,693.$$

Отсюда $n = 0,11 \omega_1$.

Подставив n в (2.15), найдем $\omega_1 = 0,994 \omega_0$.

Здесь мы рассмотрели систему с очень большим сопротивлением. В большинстве реальных систем уменьшение амплитуды колебаний в 2 раза наблюдается не за один период, а за десятки и даже сотни периодов. Но и при таком большом сопротивлении его влияние на частоту (или на период) свободных колебаний совершенно незначительно (менее 0,6%). Это позволяет при вычислении частоты и периода свободных колебаний в большинстве случаев (когда $\delta \leq 0,6$) не считаться с наличием трения. В то же время любое сопротивление приводит к затуханию свободных колебаний. Следовательно, для любой реальной системы свободные колебания можно считать исчезнувшими по истечении достаточно большого промежутка времени.

Если сопротивление сравнительно невелико, то коэффициент затухания или логарифмический декремент легко оценить энергетическим методом. Пусть a_k и a_{k+1} два последовательных амплитудных смещения системы. Тогда

$$\Pi_k = \frac{ca_k^2}{2}, \quad \Pi_{k+1} = \frac{ca_{k+1}^2}{2} \quad (2.27)$$

значения потенциальной энергии, накопленные в упругой связи, при указанных смещениях; если трение отсутствует, то, как это следует из закона сохранения механической энергии, полная энергия системы, равная сумме кинетической и потенциальной энергии, остается все время постоянной, равной Π . В данном случае разность

$$\Delta \Pi = \Pi_k - \Pi_{k+1} \quad (2.28)$$

представляет собой часть энергии, потерянную за один цикл колебаний и равную работе сил сопротивления. Отношение

$$\varphi = \Delta \Pi / \Pi \quad (2.29)$$

называется коэффициентом поглощения или рассеяния энергии.

С учетом (2.27), (2.28) получим

$$\varphi = \frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_k^2} = 1 - \frac{a_{k+1}^2}{a_k^2} = 1 - e^{-2\delta} \quad (2.30)$$

Раскладывая $e^{-2\delta}$ в степенной ряд и ограничиваясь двумя членами этого ряда (в силу сделанного предположения о малом затухании), найдем

$$e^{-2\delta} \approx 1 - 2\delta,$$

$$\text{и } \varphi \approx 2\delta, \quad \delta \approx \frac{\varphi}{2}. \quad (2.31)$$

Следовательно, логарифмический декремент численно равен половине коэффициента поглощения энергии. Таким образом, мы получили возможность оценивать интенсивность затухания по известной циклической работе сил сопротивления.

Если процесс затухающих колебаний записан с помощью соответствующей аппаратуры на осциллограмму в виде кривой (рис.8), то логарифмический декремент может быть найден следующим образом. Выбирается участок кривой, включающий Z полных циклов колебаний, и измеряются амплитудные смещения a_1 и a_z на первом и последнем циклах. Далее выполняется расчет по формуле

$$\delta = \frac{1}{Z} \ln \frac{a_1}{a_z}, \quad (2.32)$$

причем с увеличением Z точность расчета повышается.

2.4. Свободные незатухающие колебания

Рассмотрим движение колебательной системы при отсутствии сил сопротивления: $\mu = n = 0$. Дифференциальные уравнения движения для этого частного случая могут быть получены из (2.7), (2.8), (2.9):

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (2.33)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.34)$$

а решения этих уравнений - из (2.20) или (2.21):

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (2.35)$$

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = v_0 / \omega_0 \quad (2.36)$$

или

$$x = a \sin(\omega_0 t + \beta), \quad (2.37)$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \beta = \arctg \frac{C_2}{C_1}. \quad (2.38)$$

Движение носит характер гармонических незатухающих колебаний (рис.5). Такие колебания, раз начавшись, могут продолжаться неограниченно долго. Частота колебаний определяется только массой и жесткостью упругой связи и является одним из основных параметров колебательной системы, не зависящим от начальных условий.

Отметим следующие свойства свободных затухающих и незатухающих колебаний:

амплитуда и начальная фаза свободных колебаний зависят от начальных условий;

статические (постоянные) силы, например силы веса, не оказывают никакого влияния на протекание свободных колебаний, но смещают центр колебаний на величину, равную статической деформации упругой связи;

круговая частота свободных колебаний не зависит от начальных условий; это параметр системы, определяемый только ее массой, жесткостью и коэффициентом сопротивления;

свободные колебания без сопротивления продолжаются неограниченно долго.

2.5. Вынужденные колебания

Более сложным является движение колебательной системы под воздействием сил, периодически изменяющихся по времени. Обычно такие силы возникают при вращении неуравновешенных роторов, взаимодействии элементов машин с возмущенной внешней средой (жидкостью, газом) и т.д.

Рассмотрим вначале действие гармонической возбуждающей силы. Это наиболее простой и вместе с тем наиболее важный случай. Действительно, любая другая периодическая зависимость возбуждающей силы от времени может быть представлена с помощью рядов Фурье в виде суммы отдельных гармонических составляющих. Исследуя влияние каждой из них отдельно и применяя затем принцип суперпозиции, мы легко найдем движение колебательной системы при любом возбуждении.

2.5.1. Вынужденные колебания в системе с сопротивлением, пропорциональным скорости

Вновь обратимся к системе (рис.5), присоединив к действующим силам гармоническую возбуждающую силу $Q_B = Q_0 \sin \omega t$. Дифференциальное уравнение движения в этом случае

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = Q_0 \sin \omega t. \quad (2.39)$$

После сокращения на m оно приводится к стандартной форме

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{Q_e}{m} \sin \omega t, \quad (2.40)$$

где $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, $2n = \mu/m$.

Решение полученного неоднородного уравнения находится как сумма

$$x = x_1 + x_2, \quad (2.41)$$

где x_1 - общее решение (2.20) или (2.22) соответствующего однородного уравнения;

x_2 - решение неоднородного уравнения:

$$x_2 = A \sin(\omega t - \beta). \quad (2.42)$$

Подставив (2.42) в (2.40), после некоторых преобразований получим

$$-A\omega^2 \sin \psi + 2A\omega n \cos \psi + A\omega_0^2 \sin \psi = \frac{Q_e}{m} \sin(\psi + \beta), \quad (2.43)$$

где $\psi = \omega t - \beta$.

Записав (2.43) для моментов времени, при которых $\psi = 0$ и $\psi = 90^\circ$, придем к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2A\omega n &= \frac{Q_e}{m} \sin \beta; \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) &= \frac{Q_e}{m} \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

откуда

$$A = \frac{Q_e}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (2.45)$$

$$\operatorname{tg} \beta = 2\omega n / (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (2.46)$$

Обычно в технических расчетах интенсивность сил сопротивления задается логарифмическим декрементом. Учитывая это, несколько преобразуем полученные формулы. Принимая период свободных затухающих колебаний таким же, что и в системе без сопротивления, найдем

$$\delta = n T_1 \approx \frac{2\pi n}{\omega_0}, \quad (2.47)$$

$$A = \alpha \cdot x_{cr}, \quad (2.48)$$

где $x_{cr} = \frac{Q_0}{c}$; α - коэффициент динамического усилия:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (2.49)$$

В целом движение определяется уравнением

$$x = \alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi) + A \sin(\omega t - \beta) \quad (2.50)$$

и представляет собой наложение свободных затухающих колебаний с частотой ω_0 , и вынужденных колебаний с частотой ω (рис.9).

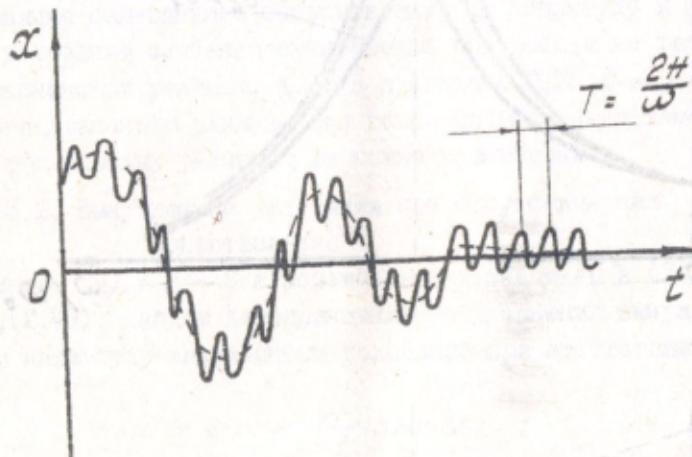


Рис.9. График движения при сопротивлении, пропорциональном скорости, и гармоническом возбуждении

Начальная амплитуда A и фаза φ свободных колебаний определяются из начальных условий, а амплитуда и фаза вынужденных колебаний по уравнениям (2.45), (2.46) или (2.48), (2.49).

Свойства вынужденных колебаний рассмотрим более подробно.

На рис.10 представлен график зависимости амплитуды и фазы вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы. Анализ этих графиков и уравнений (2.49), (2.45), (2.46) позволяет отметить следующие свойства вынужденных колебаний:

I. Амплитуда вынужденных колебаний определяется тремя факторами: амплитудой возмущающей силы Q_0 , отношением частоты возбуждения к собственной частоте системы, интенсивностью сил вязкого сопротивления (логарифмическим декрементом колебаний).

(20.2)

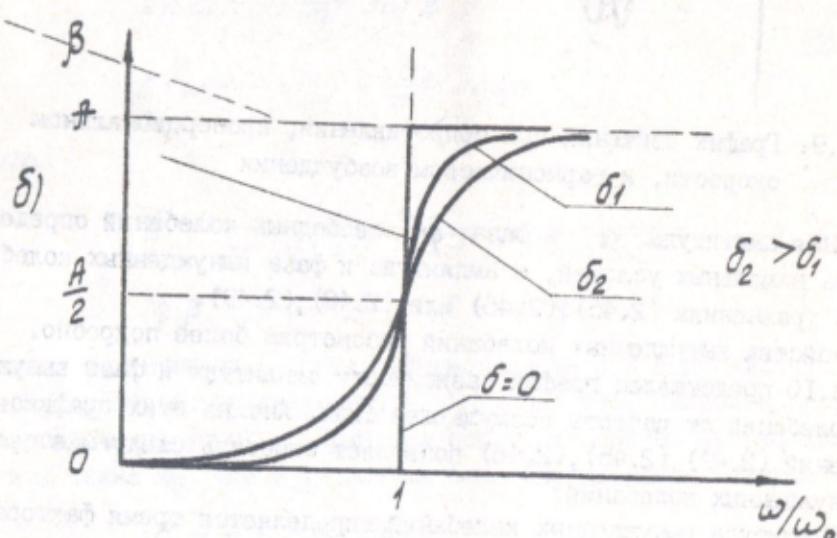
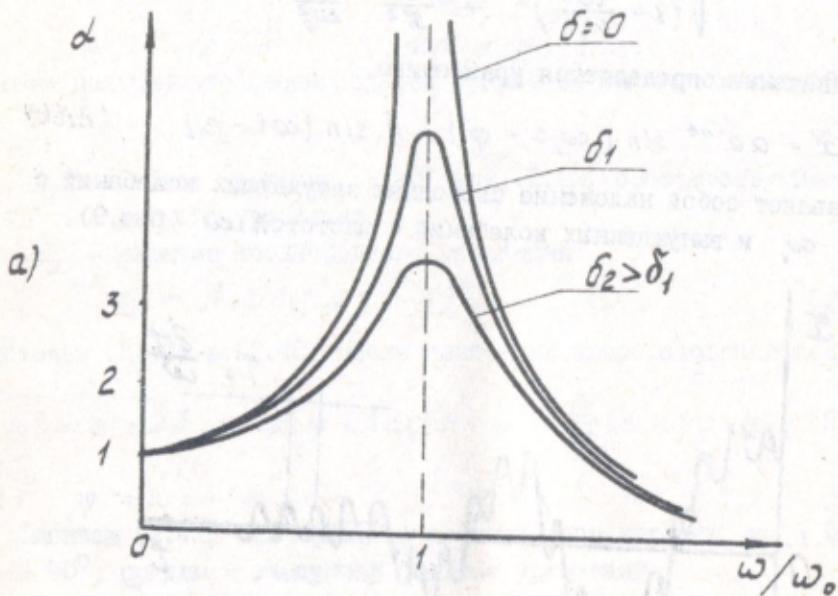


Рис.10. Зависимость коэффициента усиления и угла сдвига в фазе от частоты возбуждения

2. Амплитуда вынужденных колебаний достигает своего максимального значения в условиях резонанса, т.е. при $\omega \approx \omega_0$. Как видно из (2.49), при $\omega = \omega_0$

$$A_{\text{рас}} = \frac{A}{\delta} x_{\text{cr}} .$$

3. Амплитуда вынужденных колебаний при $\omega \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к нулю, как бы ни была велика возбуждающая сила.

4. Вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на угол β , который определяется декрементом колебаний и отношением ω/ω_0 . В частности, при $\omega = \omega_0$, т.е. в условиях резонанса, $\beta = \pi/2$, а при $\omega \rightarrow \infty$ $\beta = \pi$.

5. Влияние сил вязкого сопротивления на амплитуду и фазу вынужденных колебаний особенно существенно при работе на резонансных и окорезонансных режимах, т.е. в диапазоне $0,75 \leq \omega/\omega_0 \leq 1,25$. Вне этого диапазона влияние сил сопротивления мало заметно, и во многих технических расчетах им можно пренебречь.

2.5.2. Вынужденные колебания при отсутствии сил сопротивления

Приняв $\mu = n = 0$ и подставив эти значения в (2.39), (2.40), (2.45), (2.49), найдем дифференциальные уравнения вынужденных колебаний и амплитуду вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления:

$$m\ddot{x} + cx = Q_0 \sin \omega t ; \quad (2.51)$$

$$m\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{Q_0}{m} \sin \omega t ; \quad (2.51a)$$

$$A = \frac{Q_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{x_{\text{cr}}}{1 - \omega^2/\omega_0^2}. \quad (2.52)$$

Фаза вынужденных колебаний, как это следует из (2.46),

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \omega_0 ; \\ \pi & \text{при } \omega > \omega_0 . \end{cases} \quad (2.53)$$

При отсутствии сил сопротивления и в условиях резонанса ($\omega = \omega_0$) амплитуда вынужденных колебаний может стать сколько угодно большой (рис. I0a). На рис. II приведен график движения системы при воздействии гармонической возбуждающей силы, представляющей результат суперпозиции двух колебаний: свободных незатухающих с частотой ω_0 и вынужденных - с частотой ω .

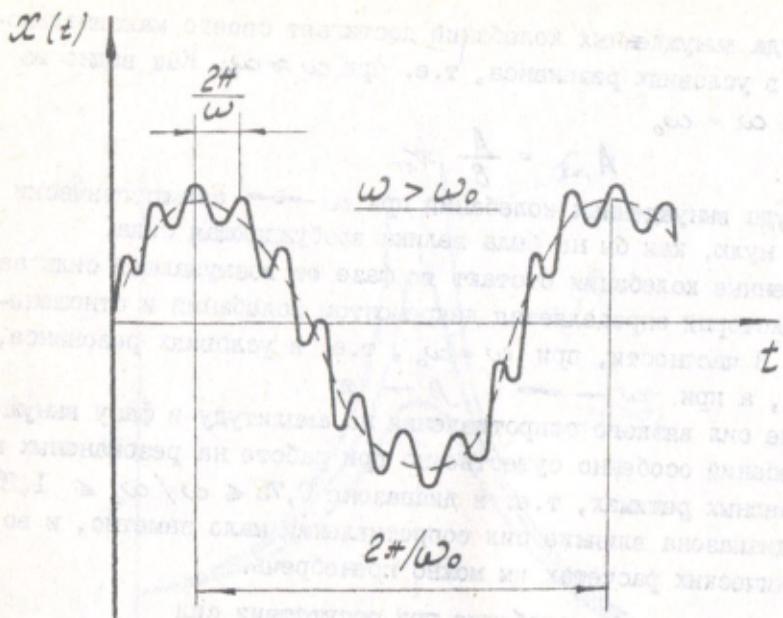


Рис. II. График вынужденных колебаний (при отсутствии сил сопротивления)

2.5.3. Импульсная реакция (весовая функция), колебательной системы с одной степенью свободы. Движение под действием возмущающей силы, произвольно зависящей от времени. Движение в условиях резонанса

Импульсной реакцией, или весовой функцией, называется величина, равная реакции, измеряемой на выходе какой-либо системы в момент времени t , при условии, что сигнал на входе (т.е. возмущение) подан в момент времени τ и имеет вид δ -функции, отвечающей условиям

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \tau; \\ \infty & \text{при } t = \tau; \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\int \delta(t - \tau) dt = 1.$$

Понятие импульсной реакции применяется особенно широко при исследовании линейных систем, для которых справедлив принцип суперпозиции. Согласно этому принципу реакция линейной системы на сумму отдельных входных сигналов равна сумме ее реакций на каждый из сигналов в отдельности.

Мы воспользуемся этим обстоятельством для изучения движения колебательных систем под действием возмущающей силы, произвольно зависящей от времени.

Ранее было получено общее решение (2.20) для свободных затухающих колебаний. Определив произвольные постоянные C_1 и C_2 из начальных условий (2.13) и подставив эти значения в (2.20), найдем

$$x = e^{-nt} \left\{ x_o (\cos \omega_0 t + \frac{n}{\omega_0} \sin \omega_0 t) + \frac{v_o}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right\}, \quad (2.55)$$

где первое слагаемое в фигурных скобках определяет свободные колебания, вызванные начальным отклонением системы, а второе – колебания, вызванные начальной скоростью.

К системе приложена возмущающая нагрузка в виде δ -функции

$$F(t) = \delta(t - \tau), \quad (2.56)$$

вследствие чего скорость получила мгновенное приращение

$$\Delta V = \frac{1}{m}. \quad (2.57)$$

Дальнейшее движение описывается уравнением

$$x = e^{-nt} \left\{ x_o (\cos \omega_0 t + \frac{n}{\omega_0} \sin \omega_0 t) + \frac{v_o}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right\} + e^{-n(t-\tau)} \frac{\Delta V}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau),$$

где первое слагаемое – движение, определяемое начальными смещением и скоростью; второе – колебания, вызванные возмущающим импульсом $\delta(t - \tau)$.

В случае нулевых начальных условий ($v_o = x_o = 0$) найдем движение, вызванное только этим импульсом:

$$h(t, \tau) = e^{-n(t-\tau)} \frac{1}{m \omega_0} \sin \omega_0(t - \tau). \quad (2.58)$$

Это и есть импульсная реакция рассматриваемой системы. При отсутствии сопротивления ($n = 0$)

$$h(t, \tau) = \frac{1}{m \omega_0} \sin \omega_0(t - \tau). \quad (2.59)$$

Любую нагрузку, изменяющуюся с течением времени, можно представить в виде бесконечной последовательности элементарных импульсов $P(\tau) \times \delta(t - \tau)$ (рис.12). Реакция системы на такой импульс

$$x(t) = P(\tau) h(t, \tau) d\tau. \quad (2.60)$$

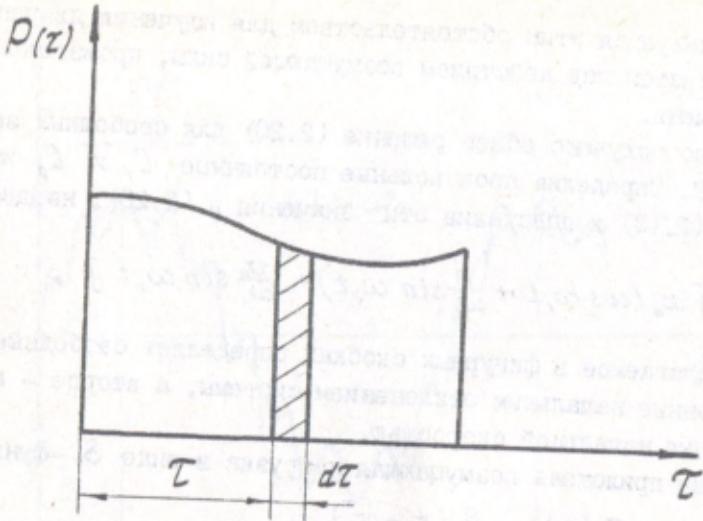


Рис.12. Возбуждающий импульс

Суммарное движение под действием этой нагрузки согласно принципу суперпозиции определяется интегрированием:

$$x = \int_0^t P(\tau) h(t, \tau) d\tau. \quad (2.61)$$

Равенство (2.61) позволяет определить движение одномассовой системы при любом законе изменения возмущающей силы по времени, причем, если это необходимо, вычисление определенного интеграла может быть выполнено и численными методами.

Используем полученное уравнение для изучения особенностей одномассовой системы в условиях резонанса при отсутствии сил сопротивления. Для этого примем

$$P(\tau) = P_o \sin \omega_o \tau \quad (2.62)$$

и подставим выражения (2.59), (2.62) в (2.61):

$$x(t) = \frac{P_o}{m\omega_o} \int_0^t \sin \omega_o \tau \sin \omega_o (t - \tau) d\tau. \quad (2.63)$$

После интегрирования и некоторых преобразований найдем

$$x(t) = \frac{P_o}{2m\omega_o} \left(t \cos \omega_o t + \frac{1}{\omega_o} \cdot \sin \omega_o t \right). \quad (2.64)$$

Как видим, время t входит в (2.64) как множитель. График движения (рис. I3) представляет колебательный процесс с амплитудой, которая непрерывно возрастает прямо пропорционально времени. Отсюда следует, что процесс установления вынужденных колебаний требует определенного времени, причем это время тем больше, чем меньше декремент колебаний. При отсутствии сопротивления процесс установления длится неограниченно долго, так что бесконечно больших значений амплитуда колебаний достигает только спустя бесконечно большое время.

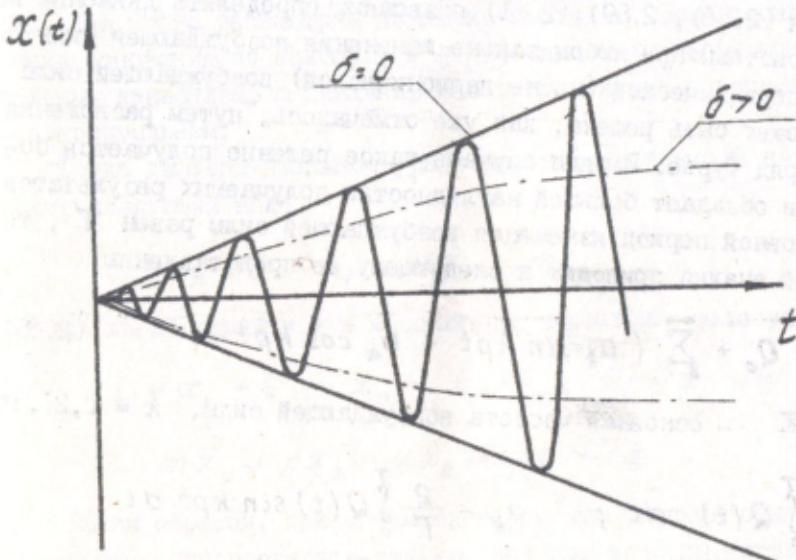


Рис. I3. Процесс установления колебаний при резонансе

Эти результаты указывают на принципиальную возможность прохождения резонанса с достаточно малыми значениями амплитуды вынужденных колебаний при быстром изменении частоты возмущающей силы, причем такая возможность сохраняется даже при полном отсутствии сил сопротивления. Исследования этого процесса, проведенные многими авторами, показывают, что амплитуда вынужденных колебаний в этом случае будет тем меньшей, чем выше скорость изменения частоты возмущающей силы. Это и понятно, ибо с увеличением темпа изменения этой частоты время работы системы на резонанском режиме будет уменьшаться.

Академик Л.И. Мандельштам, касаясь резонанса, отмечает [5] : "До сих пор в этих вопросах делаются грубые ошибки. Возьмем, например, Флеминга. Это крупный радиоспециалист, член Королевского об-

щества. Его книга "Волны в воде, воздухе и эфире" в общем неплохая. Но по поводу резонанса там имеется явный вздор. Говорится, например, что мальчик, стреляя из рогатки, может разрушить железнодорожный мост через Темзу. Это невозможно из-за сопротивления". Отметим, что это невозможно и при отсутствии сопротивления: ведь для раскачки моста столь слабыми импульсами (стрельбой из рогатки!) потребовалось бы десятилетия.

2.5.4. Вынужденные колебания при полигармоническом возбуждении

Уравнения (2.58), (2.59), (2.61) позволяют определить движение колебательной системы при любом законе изменения возбуждающей силы. Но в случае периодической (но не гармонической) возбуждающей силы эта задача может быть решена, как уже отмечалось, путем разложения этой силы в ряд Фурье. В ряде случаев такое решение получается более простым и обладает большей наглядностью получаемых результатов.

Если основной период изменения возбуждающей силы равен T , то гармонический анализ приводит к следующему ее представлению:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kpt + b_k \cos kpt), \quad (2.65)$$

где $p = \frac{2\pi}{T}$ — основная частота возбуждающей силы, $k = 1, 2, \dots, \infty$,

$$Q_0 = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) \cdot dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T Q(t) \sin kpt \cdot dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T Q(t) \cos kpt \cdot dt.$$

Тогда движение системы определяется как результат сложения (суперпозиций) колебаний, вызываемых каждой гармонической составляющей в отдельности:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(kpt - \varphi_k) + B_k \sin(kpt - \varphi_k)], \quad (2.66)$$

где A_k, B_k, φ_k находятся путем подстановки a_k, b_k в (2.40):

$$A_k = \frac{a_k}{m} \cdot \alpha_k; \quad B_k = \frac{b_k}{m} \cdot \alpha_k; \quad (2.67)$$

α_k, φ_k определяются по (2.45) и (2.46) при подстановке $\omega = kpt$.

Подчеркнем, что применение принципа суперпозиции возможно только для линейных систем, т.е. систем с линейной зависимостью сил упругости и сопротивления от деформации.

2.5.5. Вынужденные колебания при кинематическом возбуждении

Вынужденные колебания массы m (рис.6) могут вызываться не только действием возмущающей силы (силовое возбуждение), но и колебаниями точки подвеса этой массы. Такое возбуждение называется кинематическим. Покажем, что задача о вынужденных колебаниях при кинематическом возбуждении может быть сведена к задаче о силовом возбуждении. Для этого рассмотрим движение массы m как сложное, где движение основания по закону $\xi = \xi(t)$ является переносным поступательным движением, а движение массы относительно основания $x_r(t)$ – относительным.

Тогда дифференциальное уравнение относительного движения будет иметь следующий вид:

$$m \ddot{x}_r = -c x_r - \mu \dot{x}_r - m \ddot{\xi} . \quad (2.68)$$

Отсюда легко перейти и к абсолютному движению, если учесть, что

$$x_a = x_r + \xi , \quad \dot{x}_a = \dot{x}_r + \dot{\xi} , \quad \ddot{x}_a = \ddot{x}_r + \ddot{\xi} :$$

$$m \ddot{x}_a + c x_a + \mu \dot{x}_a = \mu \dot{\xi} + c \ddot{\xi} . \quad (2.69)$$

Таким образом, при кинематическом возбуждении относительное перемещение определяется так же, как при силовом, если возбуждающую силу принять равной силе инерции переносного движения: $P_f = -m \ddot{\xi}$. При определении абсолютного перемещения возбуждающая сила

$$P_f = c \dot{\xi} + \mu \ddot{\xi} .$$

2.6. Колебания составных систем с одной степенью свободы

Не всегда колебательные системы с одной степенью свободы имеют такой простой вид, как на рис.6. Часто кинематические цепи приборов, различных машин и механизмов образуют чрезвычайно сложные системы, которые тем не менее обладают одной степенью свободы (их движение определяется одной обобщенной координатой).

В этом случае бывает очень трудно получить дифференциальные уравнения на основании тех физических соображений, которые применя-

лись по отношению к простым системам. Наиболее просто задача решается с помощью уравнений Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i(t), \quad (2.70)$$

где T и Π - кинетическая и потенциальная энергия системы;
 Φ - диссипативная функция Релея (учитывается при наличии сил сопротивления);

$Q_i(t)$ - обобщенная возмущающая сила;

q_i, \dot{q}_i - обобщенные координаты и скорости;

n - число степеней свободы.

Если рассматривается линейная колебательная система с одной степенью свободы и ее отклонения от положения равновесия являются малыми, то кинетическая и потенциальная энергия и диссипативная функция сводятся к квадратичным формам:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2, \quad (2.71)$$

где a - обобщенный инерционный коэффициент (аналог массы m в системе (рис.6));

c - обобщенный коэффициент упругости (аналог жесткости пружины на (рис.6));

b - обобщенный коэффициент сопротивления.

Дифференцируя (2.71) в соответствии с (2.70), получим дифференциальное уравнение движения в знакомой нам форме:

$$a \ddot{q} + b \dot{q} + cq = Q(t). \quad (2.72)$$

Величина обобщенной возмущающей силы определяется по общему правилу. В случае силового возмущения, вызываемого силами $F_k(t)$,

$$Q(t) = \sum_{k=1}^N \delta A_k / \delta q, \quad (2.73)$$

где $\delta A_k = \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k$ - работа, производимая силой \vec{F}_k , приложенной в k -й точке системы, на возможном перемещении этой точки;

N - число точек приложения возмущающих нагрузок.

В случае кинематического возбуждения обобщенная сила определяется путем учета соответствующих возмущений в выражениях для потенциальной энергии и функции Релея.

Поясним вышесказанное на примере.

Требуется найти дифференциальное уравнение движения системы, показанной на рис. I.4. Момент инерции вертикального стержня относительно оси вращения I_o , масса этого стержня m_1 , центр тяжести приложен на расстоянии h от оси вращения. Стержень связан с колеблющейся на основании D массой m_2 , соединенной с основанием пружиной жесткостью C_o и демпфером, создающим силу сопротивления, пропорциональную скорости движения массы относительно основания. Движение системы происходит под действием возбуждающей силы $P_f = P_0 \sin \omega t$ и кинематического возбуждения $S(t) = S_0 \sin \omega t$

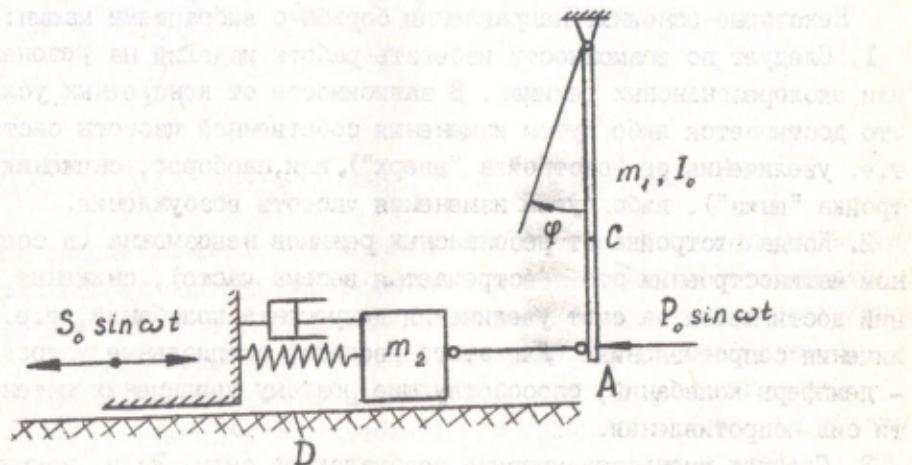


Рис. 14. Механическая система с одной степенью свободы

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что в результате изучения геномной РНК цитомегаловируса у больных симптоматической инфекцией было выявлено 12 положительных образцов.

Пример

$$T = \frac{1}{2} (I_2 + m_2 t^2) \dot{\phi}^2 ,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} ((t\varphi - s)^2 c_0 + m_1 g h (t - \cos \varphi)).$$

$$\text{При } \cos \varphi \approx \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (l\varphi - s)^2 c_0 + mgh \cdot \frac{\varphi^2}{2};$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu (l \dot{\phi} - s)^2.$$

Подставив найденные значения T и Π в (2.70), получим дифференциальное уравнение типа (2.72), где

$$a = \frac{1}{2} (I_0 + m L^2) , \quad b = \mu L^2 ,$$

$$c = c_0 L^2 + mgh ,$$

$$Q = P_0 L \sin \omega t + c_0 L s_0 \sin \omega t + \mu L \cdot \dot{s} .$$

2.7. Некоторые технические приложения теории вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы

Некоторые основные направления борьбы с вибрациями машин:

1. Следует по возможности избегать работы изделий на резонансных или окорезонансных режимах. В зависимости от конкретных условий это достигается либо путем изменения собственной частоты системы, т.е. увеличения ее (отстройка "вверх"), или, наоборот, снижения (отстройка "вниз"), либо путем изменения частоты возбуждения.

2. Когда отстройка от резонансных режимов невозможна (в современном машиностроении это встречается весьма часто), снижение вибраций достигается за счет увеличения декремента колебаний, т.е. увеличения сопротивления. Для этого вводятся специальные устройства - демпферы колебаний, способствующие резкому увеличению интенсивности сил сопротивления.

3. Следует уменьшать уровень возбуждающей силы. Если, например, вибрация возбуждается вращающимся ротором, то эта задача решается путем введения или усовершенствования балансировки ротора (разд.5.8). В ряде случаев того же эффекта можно достичь нарушением цикличности возбуждающей нагрузки (разд.2.7.1) и т.д.

2.7.1. Виброзащитные системы

На рис.15 показана схема простейшей виброзащитной системы, основными элементами которой являются упругие амортизаторы (3), устанавливаемые между основанием (1) и колеблющимся объектом (2).

Различают два типа виброзащитных систем:

активные системы, в которых вибрации колеблющегося объекта вызываются силовым возбуждением. Главной задачей таких систем является уменьшение амплитуды динамического усилия, передаваемого на фундамент;

пассивные системы, где вибрации колеблющегося объекта вызывают-
ся кинематическим возбуждением, т.е. вибрационным движением основа-
ния. Для этих систем главной задачей является уменьшение амплитуды
колебаний объекта (2) по сравнению с амплитудой колебаний основания.

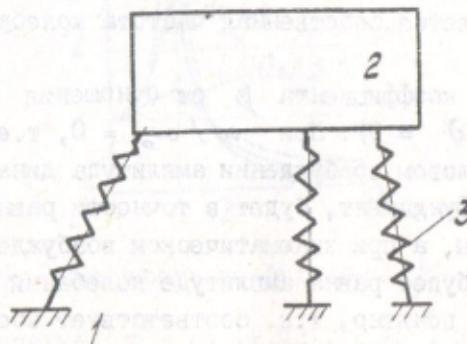


Рис.15. Схема простейшей виброзащитной системы

Обе задачи решаются путем такого подбора жесткости упругой связ-
и, при которой частота собственных колебаний системы оказывается
намного ниже частоты вынужденных колебаний. Это позволяет исключить
из рассмотрения силы сопротивления, влияние которых наиболее су-
щественно лишь на окорорезонансных и резонансных режимах.

Амплитуда вынужденных колебаний при силовом возбуждении выражается равенством (2.52). Умножив эту величину на жесткость упругой
связи, найдем величину усилия, передаваемого на фундамент:

$$R = cA = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \cdot Q_0 . \quad (2.74)$$

Аналогично определяется амплитуда вынужденных колебаний (в абсолютной системе отсчета) при кинематическом возбуждении

$$A_k = \xi_0 \cdot \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2} . \quad (2.75)$$

Равенство (2.74) и (2.75) запишем в виде

$$R = \beta(\omega) \cdot Q_0 , \quad A_k = \beta(\omega) \cdot \xi_0 , \quad (2.76)$$

где ξ_0 - амплитуда кинематического возбуждения; $\beta(\omega)$ - коэффициент динамического усиления:

$$\beta(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2}. \quad (2.77)$$

Если частота возбуждения ω задана, то величиной, которой мы можем варьировать, является собственная частота колебаний ω_0 изделия на амортизаторах.

График зависимости коэффициента β от отношения ω/ω_0 приведен на рис. I6 (кривая $\vartheta = 0$). При $\omega/\omega_0 = 0$, т.е. при $\omega_0 \rightarrow \infty$ $\beta = 1$. Значит, при силовом возбуждении амплитуда динамического усилия, передаваемого на фундамент, будет в точности равна Q_0 - амплитуде возмущающей силы, а при кинематическом возбуждении амплитуда колеблющегося объекта будет равна амплитуде колебаний основания. Физически это совершенно понятно, т.к. соответствует абсолютно жесткому креплению колеблющегося объекта к основанию.

При $\omega_0 = \omega$ $\beta \rightarrow \infty$. Это случай резонанса, который здесь совершенно недопустим. При дальнейшем увеличении отношения ω/ω_0 коэффициент β снижается, и при $\omega_0 = \omega/\sqrt{2}$ $\beta = 1$.

Таким образом, в диапазоне $0 \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq \sqrt{2}$ амортизация не дает положительного эффекта. При $\omega_0 = 1/4\omega$ $R_0 = 1/15 Q_0$ или $A_k = 1/15 \xi_0$, т.е. достигается уменьшение амплитуды динамической реакции по сравнению с амплитудой возбуждающей силы Q_0 (и следовательно, амплитуды A_k по сравнению с амплитудой колебания основания) в 15 раз. Таким образом, амортизация выполняет виброзащитные функции только при выполнении условия

$$\omega_0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega.$$

Для практических же целей необходимо, чтобы

$$\omega_0 < \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \omega. \quad (2.78)$$

Учет сил сопротивления не изменяет принципиально сделанных выводов. Найдем, например, реакцию амортизатора при силовом возбуждении, которая определяется здесь в виде суммы:

$$R = R_{\text{упр.}} + R_c,$$

где $R_{\text{упр.}} = cx$ - упругая составляющая реакции;

$R_c = \mu \dot{x}$ - составляющая, определяемая силами сопротивления.

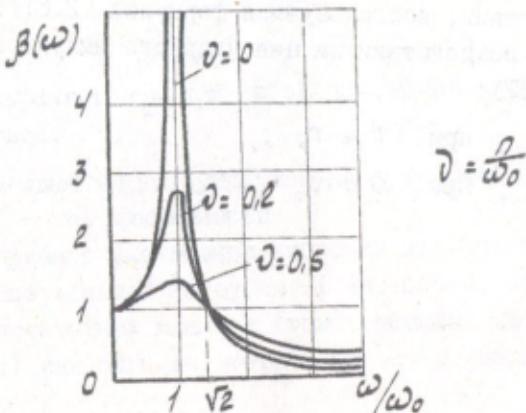


Рис. I.6. Зависимость коэффициента β от частоты

Подставляя значение x из (2.42), (2.45), найдем

$$R = cA \sin(\omega t - \beta) + \mu A \omega \cos(\omega t - \beta).$$

Отсюда амплитудное значение реакции

$$R_o = A \sqrt{c^2 + \mu^2 \omega^2}, \quad (2.79)$$

$$\beta(\omega) = \frac{R_o}{Q_o} = \left(\frac{1 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2})^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right)^{0.5}. \quad (2.80)$$

График зависимостей $\beta(\omega)$ при различных значениях декремента приведены на рис. I.6. Условие, при котором амортизация оказывается эффективной, и в этом случае определяется неравенством (2.78). Демпфирование несколько ухудшает виброзащитные свойства в указанном диапазоне частот. Тем не менее слабое демпфирование все же желательно, т. к. оно ограничивает амплитуду колебаний в период разгона или остановки изделия, когда частота вынужденных колебаний в течение небольшого времени становится близкой к ω_c .

При полигармоническом вибрационном воздействии амортизация эффективна лишь тогда, когда для каждой гармоники возбуждающей нагрузки выполняются условия (2.78); для этого необходимо, чтобы соблюдалось неравенство

$$P > \omega_c \sqrt{2}. \quad (2.81)$$

Для определения условий, при которых амортизация будет эффективной и при ударном воздействии, воспользуемся формулой (2.61). Найдем движение системы при воздействии на нее ударного импульса прямоугольной формы (рис. I7):

$$Q(\tau) = \begin{cases} Q_0, & \text{при } \tau \leq \tau_0; \\ 0, & \text{при } \tau > \tau_0. \end{cases}$$

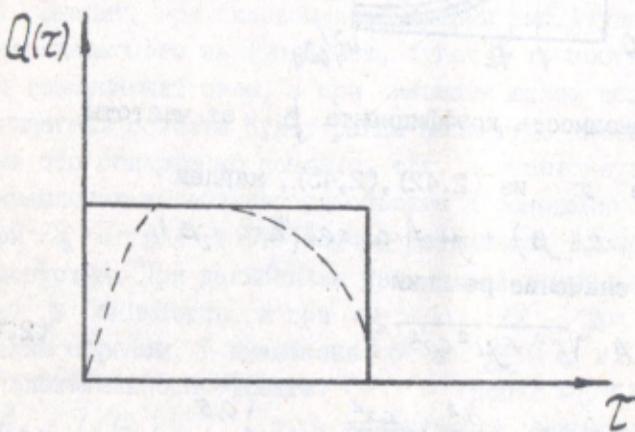


Рис. I7. Ударный импульс

В линейных виброзащитных системах со слабым демпфированием при исследовании удара можно с достаточной точностью пренебречь влиянием сил сопротивления. Поэтому, принимая $n = 0$, получим

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau. \quad (2.82)$$

Реактивная сила, передаваемая через амортизатор на фундамент

$$R(t) = cx(t) = \omega_0 \int_0^t Q(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau. \quad (2.83)$$

Для ударного импульса прямоугольной формы

$$R(t) = Q_0 (1 - \cos \omega_0 t), \quad \text{при } t \leq \tau_0; \quad (2.84)$$

$$R(t) = 2Q_0 \sin \omega_0 \left(t + \frac{\tau_0}{2}\right) \sin \frac{\omega_0 \tau_0}{2}, \quad \text{при } t > \tau_0.$$

Условие эффективности амортизации при ударном воздействии

$$\omega_0 < \frac{\kappa}{3\tau_0} . \quad (2.85)$$

Это условие сохраняется и при любой другой (не прямоугольной) форме ударного импульса.

2.7.2. Уменьшение возбуждающей нагрузки методом изменения ее цикличности

Одним из приемов уменьшения вибраций заключается в изменении цикличности возбуждающей нагрузки. В частности, этот прием находит применение в лопаточных машинах (газотурбинных двигателях, паровых турбинах и др.) как один из методов борьбы с вибрациями рабочих лопаток.

Вибрации рабочих лопаток являются важнейшим фактором, определяющим ресурс и надежность лопаточных машин. Главной же причиной вибраций является периодическое воздействие силовых импульсов, возникающих при прохождении рабочей лопаткой аэродинамических следов, оставляемых лопатками впереди стоящих направляющих аппаратов (рис.18). За один полный оборот ротора лопатка воспринимает Z импульсов (Z - число лопаток направляющего аппарата). Особую опасность представляет случай резонанса, когда частота следования возбуждающих импульсов и собственная частота рабочей лопатки ω_0 совпадают. При равномерно расположенных лопатках направляющего аппарата резонанс наступает при скорости вращения ротора $\omega_p = \omega_0/Z$.

Для снижения напряжений применяются направляющие аппараты с лопатками, расположенными не равномерно по окружности, а с переменным шагом. Для оценки эффективности таких аппаратов возбуждающую нагрузку представим в виде некоторой последовательности идентичных силовых импульсов, расположенных по окружности в соответствии с принятой системой переменного шага. Далее проводим гармонический анализ (по формулам (2.65) и определяем коэффициенты a_k , b_k и амплитудные значения Q_k гармоник возбуждающей нагрузки: $Q_k = (a_k^2 + b_k^2)^{0.5}$).

На рис.18г показаны силовые импульсы, действующие на рабочую лопатку. Действительная форма силового импульса при сравнительной оценке эффективности переменного шага оказывается несущественной. Примем

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi \neq \varphi_m ; \\ 1 & \text{при } \varphi = \varphi_m ; \end{cases}$$

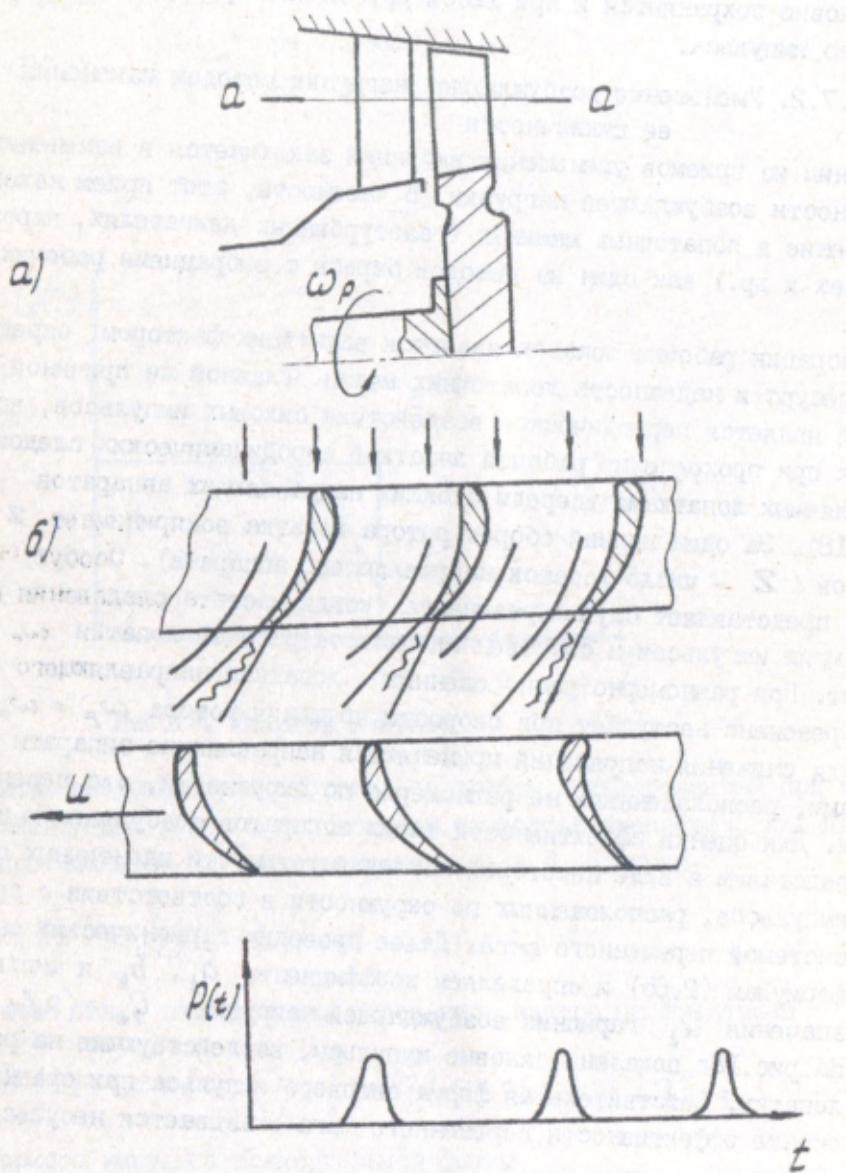


Рис.18. Образование возбуждающих импульсов на рабочих лопатках турбины

где $m = 1, 2 \dots$ - номер лопатки направляющего аппарата.

Для направляющих аппаратов с равномерно расположенными лопатками амплитудные значения всех гармоник возбуждающей нагрузки, кроме Z -й, равны нулю; значение Z -й гармоники обозначим Q_{zo} . Для аппаратов с переменным шагом ни одна из гармоник Q_k ($k = 1, 2, \dots$) теоретически нулю не равна, но при надлежащем выборе системы переменного шага все значения Q_k оказываются значительно меньшими Q_{zo} ($Q_k < Q_{zo}$). Частота возбуждающей силы ω_k , соответствующая каждой из таких гармоник, пропорциональна скорости вращения ротора: $\omega_k = k \omega_{rot}$. В заданном рабочем диапазоне скоростей вращения одна, две и даже более гармоник могут оказаться резонансными. Это показано на рис. I9, где резонансной является k -я гармоника.

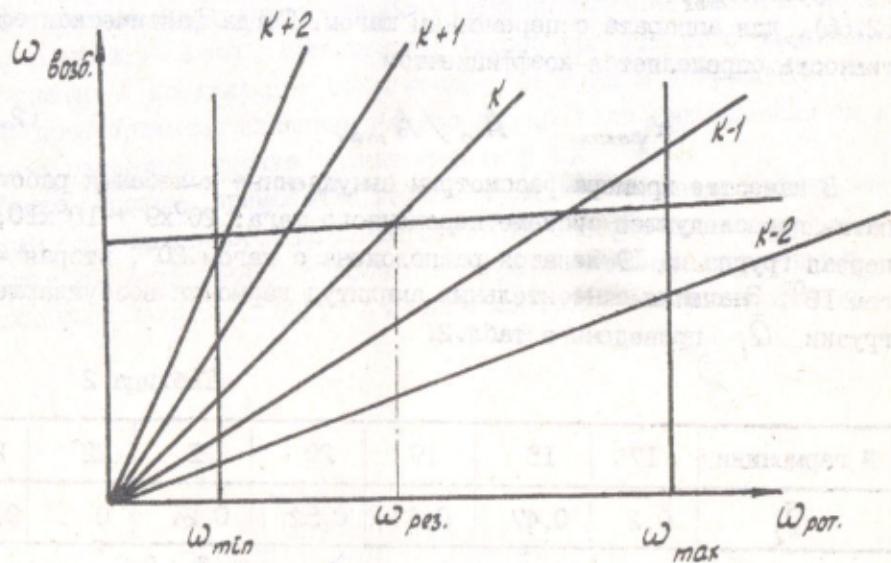


Рис. I9. Гармоники возбуждающей нагрузки при переменном шаге лопаток направляющего аппарата

Было бы неправильным оценивать эффективность переменного шага простым отношением амплитуд возбуждающих нагрузок для аппаратов с переменным и постоянным шагом лопаток. При таком подходе предполагается, что вибрации рабочих лопаток возбуждаются только одной резонансной гармоникой. Между тем рабочая лопатка одновременно находится под воздействием всех остальных гармоник, из которых наибольшее влияние оказывают смежные с резонансной. Частоты возбуж-

дения, соответствующие каждой из гармоник, различны, поэтому вибрации рабочей лопатки представляют собой результат наложения (суперпозиции) большого числа колебаний с различными частотами и являются полигармоническими.

Влиянием всех нерезонансных гармоник можно пренебречь в случае нулевых или весьма малых декрементов колебаний. Но при декрементах, действительно имеющих место для рабочих лопаток ($\delta = 0,05 - 0,15$), влияние гармоник, смежных с резонансной, оказывается достаточно большим. Следовательно, эффективность переменного шага должна оцениваться сравнением наибольшей амплитуды вибраций, возбуждаемых аппаратом с переменным шагом, и резонансной амплитудой A_o , возбуждаемой аппаратом с равномерно расположенными лопатками.

Пусть A_{max} — значение максимальной амплитуды, найденное по (2.66), для аппарата с переменным шагом. Тогда фактическая эффективность определяется коэффициентом

$$\alpha_{\text{факт}} = A_o / A_{max}. \quad (2.86)$$

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания рабочей лопатки при следующей системе переменного шага: $20^\circ \times 9 + 18^\circ \times 10$, т.е. первая группа из 19 лопаток расположена с шагом 20° , вторая — с шагом 18° . Значения относительных амплитуд гармоник возбуждающей нагрузки \bar{Q}_i приведены в табл.2.

Таблица 2

№ гармоники	17	18	19	20	21	22	23
\bar{Q}_i	0,2	0,47	0,63	0,52	0,24	0	0,06

Здесь $\bar{Q}_i = Q_i / Q_o$, $Q_i = (a_i^2 + b_i^2)^{0,5}$.

Вынужденные колебания рабочей лопатки определялись для трех значений декремента: $\delta = 0,05$, $\delta = 0,1$, $\delta = 0,2$. В табл.3 представлены значения коэффициента $\alpha_{\text{факт}}$, найденные для тех скоростей вращения, при которых имеет место резонанс рабочей лопатки с 19, 20 и 21-й гармониками возбуждающей нагрузки. Здесь же представлены коэффициенты $\alpha_k = A_o / A_k$, где A_k — значение амплитуды колебаний рабочей лопатки, найденное с учетом только резонансной k -й гармоники.

Таблица 3

№ резонанс- ной гармо- ники	19			20			21		
	δ			δ			δ		
	0,05	0,1	0,2	0,05	0,1	0,2	0,05	0,1	0,2
A_o	62,8	31,4	15,7	62,8	31,4	15,7	62,4	31,4	15,7
A_{max}	50,5	30,6	19,8	42,8	26,5	17,7	23,5	16	12
A_k	39,6	19,8	9,9	32,7	16,3	8,2	15,1	7,55	3,77
$\alpha_{факт}$	1,25	1,05	0,8	1,47	1,18	0,9	2,65	1,96	1,31
α_k	1,59			1,93			4,16		

Вибрации рабочей лопатки (рис.20) даже в условиях резонанса с одной из гармоник не являются гармоническими. Влияние смежных гармоник чрезвычайно велико, причем существенно возрастает с увеличением декремента. Но даже при относительно небольшом декременте $\delta = 0,05$ пренебрежение влиянием нерезонансных гармоник привело бы к ошибке в расчетной оценке эффективности в 1,56 раза.

Таким образом, применение гармонического анализа к расчету эффективности переменного шага направляющих аппаратов является вполне оправданным, если наряду с основными (резонансными) гармониками возбуждающей нагрузки, будут учитываться также смежные гармоники.

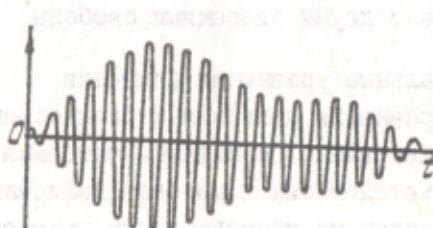


Рис.20. Вынужденные колебания рабочей лопатки при переменном шаге лопаток направляющих аппаратов

3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ И БОЛЕЕ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

3.1. Свободные колебания без учета сил сопротивления

Свободные колебания систем с двумя и более степенями свободы рассмотрим на примере простейшей двухмассовой системы, изображенной на рис. 21. Система образована двумя массами, связанными между собой и неподвижным основанием пружинами C_1 и C_2 . Положение системы определяется двумя обобщенными координатами x_1 и x_2 , причем начала отсчетов (точки O_1 и O_2) определяют положение статического равновесия.

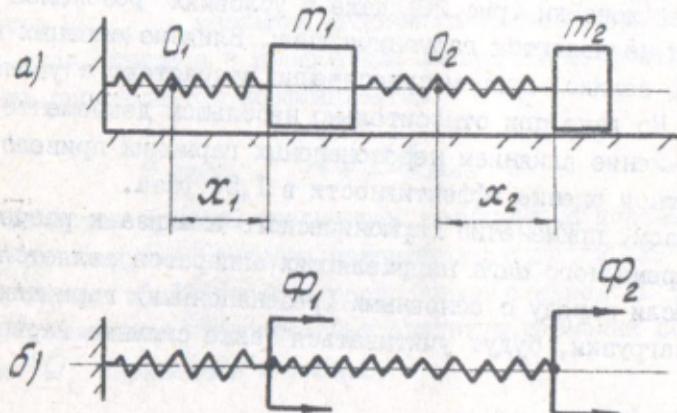


Рис. 21. Система с двумя степенями свободы

3.1.1. Дифференциальные уравнения движения

Дифференциальные уравнения движения многомассовых систем могут быть получены тремя существенно различными методами: так называемым основным методом, методом сил и методом деформаций.

Основной метод. Основан на использовании уравнений Лагранжа второго рода, которые применительно к консервативным системам записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (3.1)$$

где T и Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы;

q_1, \dot{q}_1 , \dot{q}_2 - обобщенные координаты и обобщенные скорости. Число уравнений (3.1) равно числу обобщенных координат, или числу степеней свободы.

Применим к нашей системе имеем

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \\ P &= \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в (3.1) и приняв $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, найдем дифференциальные уравнения, определяющие движение грузов:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Метод сил. Из колеблющейся системы выделяется ее "упругий скелет", а действие масс заменяется действием соответствующих сил инерции (рис. 21б): $\Phi_1 = -m_1 \ddot{x}_1$, $\Phi_2 = -m_2 \ddot{x}_2$.

Обозначим статические коэффициенты влияния $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$. Коэффициент влияния α_{ij} представляет значение статической деформации, которое измеряется в i -й точке системы, от единичного силового фактора (т.е. единичной силы или момента), приложенного в j -й точке.

Тогда перемещения точек 1 и 2 под действием инерционных сил Φ_1 и Φ_2

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \Phi_1 \alpha_{11} + \Phi_2 \alpha_{12}; \\ x_2 &= \Phi_1 \alpha_{21} + \Phi_2 \alpha_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Для определения коэффициентов α_{11} и α_{12} необходимо приложить силу $P = I$ в точке 1 и найти соответствующие перемещения точек 1 и 2:

$$\alpha_{11} = \frac{I}{c_1}, \quad \alpha_{12} = \frac{I}{c_1}. \quad (3.5)$$

Для определения α_{22} и α_{21} , единичная сила прикладывается в точке 2:

$$\alpha_{22} = \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_1} = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}; \quad \alpha_{21} = \frac{I}{c_1} = \alpha_{12}. \quad (3.5a)$$

После подстановки (3.5), (3.5а) в (3.4) придем к дифференциальным уравнениям (3.3).

Полученные результаты легко обобщить для системы с n степенями свободы:

$$x_j = \sum_{k=1}^n \Phi_k \alpha_{jk} \quad (3.6)$$

Пользуясь символами матричной алгебры, линейное преобразование (3.6) можно записать проще, с помощью формулы

$$\|A\| \cdot \|\Phi\| = \|x\|, \quad (3.7)$$

где $\|x\|$, $\|\Phi\|$ - матрицы-столбцы, составленные из элементов x_j и Φ_k соответственно;

$\|A\|$ - квадратная матрица из коэффициентов α_{jk} :

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Метод деформаций. В известном смысле метод деформаций является обратным по отношению к методу сил. Здесь определяются не перемещения по заданным силам, а действующие силы по заданным перемещениям и коэффициентам статической жесткости c_{ij} .

Для определения коэффициентов c_{ij} на все точки системы, кроме i -й, накладываются связи, исключающие их перемещения. Тогда значения усилий, приложенных к телам при единичном перемещении i -й точки со стороны наложенных связей, и определяют значения искомых коэффициентов.

Дифференциальные уравнения движения, полученные по методу деформации, образуют следующую систему:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j ; \quad i, j = 1 \dots n \quad (3.9)$$

Для двухмассовой системы (рис.21) найдем

$$c_{11} = c_1 + c_2 ; \quad c_{22} = c_2 ; \quad c_{12} = c_{21} = -c_2. \quad (3.10)$$

После подстановки (3.10) в (3.9) снова придем к дифференциальным уравнениям (3.3).

В матричной форме линейное преобразование (3.9) записывается в виде

$$\|\Phi\| = \|C\| \cdot \|x\|, \quad (3.11)$$

где $\|C\|$ - есть квадратная матрица, составленная из коэффициентов жесткостей c_{ij} :

$$\|C\| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

Легко заметить, что преобразование (3.11) является обратным по отношению к (3.7). Это означает, что матрицы (A) и (C) связаны соотношением

$$\|C\| = \|A\|^{-1} \quad \text{или} \quad \|A\| \cdot \|C\| = \|E\| \quad (3.13)$$

где E - единичная матрица:

$$\|E\| = \begin{vmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{vmatrix}$$

Таким образом, коэффициенты статической жесткости и коэффициенты влияния связаны соотношением

$$c_{ij} = A_{ij} / D(A), \quad (3.14)$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе $D(A)$ матрицы $\|A\|$.

Для любой линейной системы имеют место равенства

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad a_{ij} = a_{ji}. \quad (3.15)$$

Хотя дифференциальные уравнения, полученные разными методами, вполне эквивалентны, однако трудоемкость их получения в общем неодинакова. Например, для системы с тремя степенями свободы (рис.22) уравнение движения массы m_1 , полученное по методу сил, имеет вид

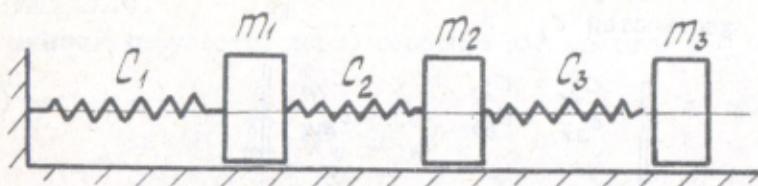
$$x_1 = a_{11} \Phi_1 + a_{12} \Phi_2 + a_{13} \Phi_3, \quad (3.16)$$

т.е. здесь учитываются силы инерции всех тел, образующих систему. Уравнение, полученное по методу деформаций, то же, что и для системы с двумя степенями свободы, а именно:

$$\bar{\Phi}_1 = c_{11} x_1 + c_{12} x_2, \quad (3.17)$$

т.к. в данном случае на движение каждой массы оказывает влияние движение всего лишь двух масс, смежных с данной.

2)



б)

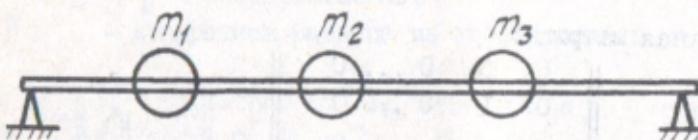


Рис.22. Колебательные системы с тремя степенями свободы

Таким образом, при составлении дифференциальных уравнений движения цепных систем, типа показанных на рис.22а, целесообразней пользоваться методом деформаций. Для систем типа балок (рис.22б) дифференциальные уравнения проще получаются по методу сил.

Для более сложных систем, состоящих из многих элементов, образующих единую кинематическую цепь, целесообразно пользоваться основным методом, используя уравнения Лагранжа II рода.

3.1.2. Решение дифференциальных уравнений свободных колебаний

Решение дифференциальных уравнений свободных колебаний рассмотрим на примере двухмассовой системы (рис.21), движение которой описывается уравнениями (3.3). Представим их решение в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 \sin(\omega t + \varphi); \\x_2 &= a_2 \sin(\omega t + \varphi).\end{aligned}\quad (3.16)$$

После подстановки (3.16) в (3.3) придем к системе однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд a_1 и a_2 :

$$\left. \begin{aligned} a_1(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) - c_2 a_2 &= 0; \\ -c_2 a_1 + a_2(c_2 - m_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Условиями существования ненулевых решений для a_1 и a_2 является равенство нулю определителя:

$$\Delta = (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2 = 0. \quad (3.18)$$

Это т.н. частотное уравнение позволяет определить частоты свободных колебаний системы. Число корней частотное уравнение или число собственных частот равно числу степеней свободы. В данном случае

$$\omega_{12}^2 = \omega_0^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \alpha + 1 \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \alpha + 1 \right)^2 - \frac{\alpha}{\beta}} \right], \quad (3.19)$$

$$\text{где } \omega_0 = \sqrt{\frac{c_2}{m_1}}, \quad \alpha = \frac{c_2}{c_1}, \quad \beta = \frac{m_1}{m_2}. \quad (3.20)$$

Если подставить одно из значений собственных частот в (3.17), то окажется, что оба уравнения связаны между собой простым линейным преобразованием, т.е. независимых уравнений остается только одно. Следовательно, каждой частоте собственных колебаний ω_1 и ω_2 соответствует вполне определенное соотношение между амплитудами масс:

$$k_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}}; \quad k_2 = \frac{a_{12}}{a_{22}}. \quad (3.21)$$

Здесь первый индекс при амплитудах соответствует номеру массы, второй — номеру собственной частоты.

Соотношение (3.21) определяет форму свободных колебаний, или конфигурацию системы, при колебаниях с той или иной собственной частотой.

Рассмотрим пример. Примем $\alpha = \beta = 1$. Тогда из (3.19) найдем $\omega_1 = 0,61\omega_0$; $\omega_2 = 1,6\omega_0$. Подставив полученные значения в первое или второе уравнение системы (3.17), найдем:

$$k_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,62; \quad k_2 = \frac{a_{12}}{a_{22}} = -0,62.$$

Формы собственных колебаний, соответствующие найденным значениям k_1 и k_2 , показаны на рис.23. Как видно, при колебаниях с час-

тотой, равной ω_1 , обе массы системы колеблются синфазно, с частотой ω_1 - в противофазе.

Представим каждую из собственных форм колебаний в виде некоторых векторов \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , проекции которых на координатные оси x_1 и x_2 равны соответственно a_{11} , a_{21} и a_{12} , a_{22} (рис. 23б). Указанные векторы взаимоперпендикулярны, что является следствием одного важного свойства собственных форм: их взаимной ортогональности (см. разд. 3.1.3).

Движение масс при колебаниях с первой собственной частотой

$$x_1^{(1)} = a_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \quad x_2^{(1)} = k_1 a_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \quad (3.22)$$

при колебаниях со второй собственной частотой

$$x_1^{(2)} = a_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \quad x_2^{(2)} = k_2 a_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (3.23)$$

Значит, если система совершает свободные колебания с одной из собственных частот, координаты всех ее масс изменяются синхронно, одновременно достигая своих предельных (амплитудных) значений и одновременно проходя положение равновесия. Общее решение системы дифференциальных уравнений (3.3) найдем суммированием решений (3.22) и (3.23):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ x_2 &= k_1 a_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_2 a_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

где a_{11} , a_{12} , φ_1 , φ_2 - определяются из начальных условий:

$$t = 0, \quad x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad \dot{x}_1 = v_{10}, \quad \dot{x}_2 = v_{20}. \quad (3.25)$$

Результирующее движение масс системы представляет собой наложение друг на друга главных колебаний с частотами ω_1 и ω_2 , и в общем случае оно не является простым гармоническим колебанием. При надлежащем выборе начальных условий можно свести свободные колебания к одному из главных, происходящих с частотой, равной одной из собственных частот.

3.1.3. Ортогональность собственных форм

Собственные формы колебаний линейных систем обладают чрезвычайно важным свойством - взаимной ортогональностью, которое является

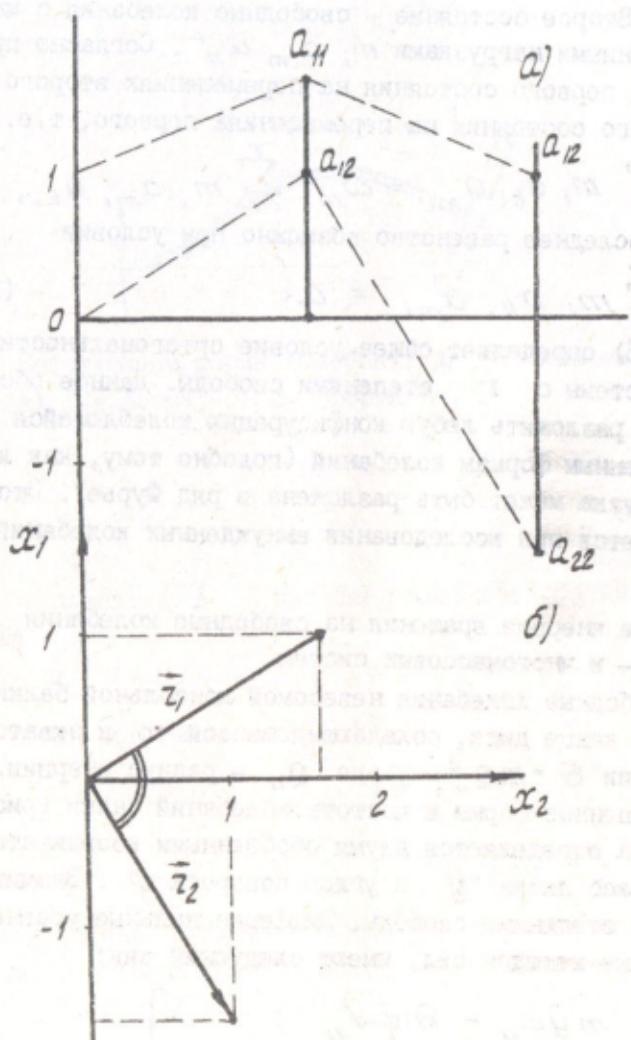


Рис.23. Собственные формы колебаний двухмассовой системы

одним из следствий принципа Бети о взаимности работ.

Рассмотрим систему с r степенями свободы в двух состояниях. Первое состояние – это свободные колебания с собственной частотой ω_k , которому соответствуют инерционные силы $m_i a_{ki} \omega_k^2$ (первый индекс при амплитуде означает номер массы, второй – номер собственной частоты). Второе состояние – свободные колебания с частотой ω_m и инерционными нагрузками $m_i a_{mi} \omega_m^2$. Согласно принципу Бети, работа сил первого состояния на перемещениях второго равна работе сил второго состояния на перемещениях первого, т.е.

$$\omega_k^2 \sum_{i=1}^r m_i a_{ki} a_{mi} = \omega_m^2 \sum_{i=1}^r m_i a_{mi} a_{ki},$$

т.к. $\omega_k \neq \omega_m$, последнее равенство возможно при условии

$$\sum_{i=1}^r m_i a_{ki} a_{mi} = 0. \quad (3.26)$$

Равенство (3.26) определяет общее условие ортогональности собственных форм для системы с r степенями свободы. Данное обстоятельство позволяет разложить любую конфигурацию колеблющейся системы в ряд по собственным формам колебаний (подобно тому, как любая периодическая нагрузка может быть разложена в ряд Фурье). Этот прием широко используется при исследовании вынужденных колебаний механических систем.

3.1.4. Влияние инерции вращения на свободные колебания одно- и многомассовых систем

Рассмотрим свободные колебания невесомой консольной балки, несущей на свободном конце диск, обладающий массой m и экваториальным моментом инерции $\Theta = m Q_u^2$, где Q_u – радиус инерции. Требуется найти собственные формы и частоты колебаний балки (рис.24).

Положение диска определяется двумя обобщенными координатами: смещением центра масс диска y и углом поворота φ . Значит, имеем систему с двумя степенями свободы. Дифференциальные уравнения движения, полученные методом сил, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} y &= -m\ddot{y}\alpha_{11} - \Theta\ddot{\varphi}\alpha_{12}; \\ \varphi &= -m\ddot{y}\alpha_{21} - \Theta\dot{\varphi}\alpha_{22}. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3.27)$$

Коэффициенты влияния α_{ij} определяются методами сопротивления материалов

$$\alpha_{11} = \frac{L^3}{3EI}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{L^2}{2EI} = \alpha_{11} \cdot \frac{3}{2L}, \quad \alpha_{22} = \frac{L}{EI} = \alpha_{11} - \frac{3}{L^2},$$

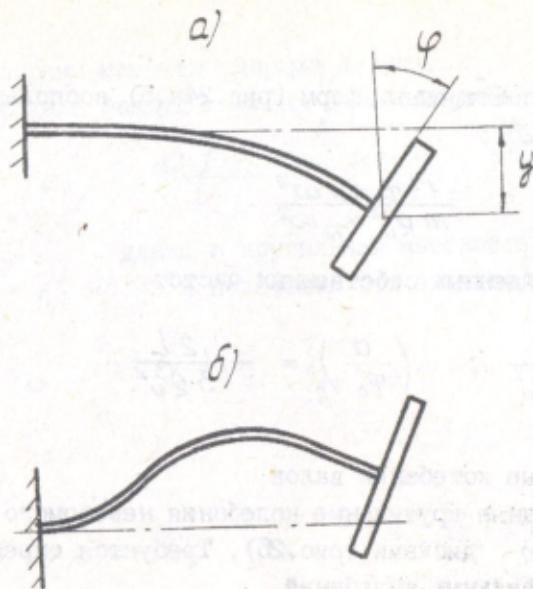


Рис.24. Собственные формы колебаний диска на невесомой балке:
а) 1-я форма; б) 2-я форма

где l - длина; EJ - изгибная жесткость балки.

Принимая

$$y = a \sin(\omega t + \alpha), \quad \varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

найдем после подстановки в (3.27):

$$\left. \begin{aligned} a(1 - m\alpha_{11}\omega^2) - \Theta\alpha_{12}\omega^2\varphi_0 &= 0 ; \\ -m\alpha_{12}\omega^2a + \varphi_0(1 - \Theta\alpha_{22}\omega^2) &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

После подстановки значений коэффициентов влияния найдем частотное уравнение и приближенные (для $\rho_u \ll l$) значения собственных частот: $(1 - \bar{\omega}^2)(1 - 3\bar{\omega}^2\bar{\ell}^2) - \frac{9}{4}\bar{\ell}^2\bar{\omega}^4 = 0$;

$$\bar{\omega}_1^2 = 1 - \frac{3\rho_u^2}{l^2}; \quad \bar{\omega}_2^2 = 3 + \frac{4l^2}{3\rho_u^2}; \quad (3.29)$$

где $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$; $\omega_0 = 1/m\alpha_{11}$; $\bar{\ell} = \rho_u/l$.

При $\rho_u = 0$ приходим к системе с одной степенью свободы, для которой $\omega_0 = 3EJ/mL^3$.

Для определения собственных форм (рис.24а,б) воспользуемся первым из уравнений (3.28):

$$\frac{\alpha}{\varphi} = \frac{1 - m \alpha_{12} \omega^2}{m \rho_u^2 \alpha_{12} \omega^2}. \quad (3.30)$$

После подстановки найденных собственных частот

$$\left(\frac{\alpha}{\varphi_0}\right)_1 \approx \frac{L}{L^2 - 3 \rho_u^2}; \quad \left(\frac{\alpha}{\varphi_0}\right)_2 = - \frac{2L}{3 \rho_u^2}. \quad (3.31)$$

3.1.5. Крутильные колебания валов

Рассмотрим свободные крутильные колебания невесомого вала с закрепленными на нем n дисками (рис.25). Требуется определить собственные частоты крутильных колебаний.

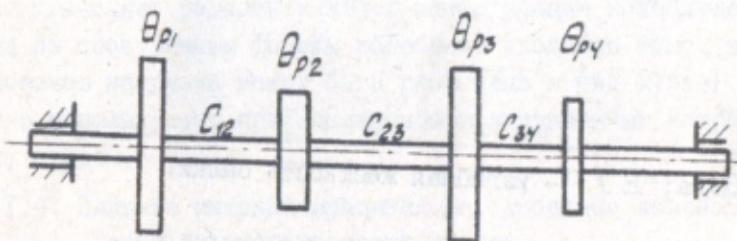


Рис.25. К расчету крутильных колебаний

Положение системы в любой момент времени определяется независимыми друг от друга параметрами — углами поворотов φ_k дисков, т.е. углами между некоторой неподвижной продольной плоскостью, проходящей через ось вращения, и теми из радиусов дисков, которые совпадают с указанной плоскостью при недеформированном состоянии вала. Дифференциальные уравнения движения получим по методу деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 \ddot{\varphi}_1 &= -c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2); \\ \Theta_2 \ddot{\varphi}_2 &= -c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) - c_{23} (\varphi_2 - \varphi_3); \\ \Theta_n \ddot{\varphi}_n &= -c_{n-1,n} (\varphi_n - \varphi_{n-1}), \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

где Θ_i - полярные моменты инерции дисков; C_{ij} - крутильная жесткость участка вала между i -м и j -м соседними дисками:

$$C_{ij} = \frac{G J_{ij}}{l_{ij}} \quad (3.33)$$

Здесь l_{ij} , $G J_{ij}$ - длина и крутильная жесткость данного участка.
Примем $\varphi_k = \varphi_{0k} \sin \omega t$ и подставим эти значения в (3.32):

$$\left. \begin{aligned} (C_{12} - \omega^2 \Theta_1) \varphi_{01} - C_{12} \varphi_{02} &= 0; \\ -C_{12} \varphi_{01} + (C_{12} + C_{23} - \omega^2 \Theta_2) \varphi_{02} - C_{23} \varphi_{03} &= 0; \\ -C_{n-1,n-1} \varphi_n + (C_{n-1,n} - \omega^2 \Theta_n) \varphi_{0n} &= 0. \end{aligned} \right\} : (3.34)$$

Приравняв нулю определитель системы (3.34), найдем частотное уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} C_{12} - \omega^2 \Theta_{p1} & -C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -C_{12} & C_{12} + C_{23} - \omega^2 \Theta_{p2} & -C_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -C_{23} & C_{23} + C_{34} - \omega^2 \Theta_3 & C_{34} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{n-1,n} - \omega^2 \Theta_n \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

Один из корней частотного уравнения (3.35) равен нулю. Этому корню соответствуют отличные от нуля решения системы (3.34): $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n$, выражающие условия вращения всего вала как твердого тела. Остальные ($n - 1$) корней уравнения (3.35) определяют собственные частоты крутильных колебаний. В частных случаях для двух ($n = 2$) и трех ($n = 3$) дисков частотные уравнения имеют вид

$$n = 2: \quad \omega^2 - \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1 \Theta_2} C_{12} = 0;$$

$$n = 3: \quad \omega^4 + \left(\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1 \Theta_2} C_{12} + \frac{\Theta_2 + \Theta_3}{\Theta_2 \Theta_3} C_{23} \right) + \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3}{\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3} C_{12} \cdot C_{23} = 0. \quad (3.36)$$

Итак, свободный вал, несущий n дисков, обладает $n - 1$, отличными от нуля собственными частотами крутильных колебаний.

3.I.6. Случай равных и нулевых корней

Рассматривая частотные уравнения (3.I8) или (3.I9), легко убедиться, что возможны такие случаи, когда оба корня частотного уравнения одинаковы или один из корней равен нулю.

Случаю равенства корней соответствует условие (см. уравнение (3.I9)): $\alpha - I = \alpha / \beta$, а случаю, когда один из корней равен нулю, условия $C_1 \rightarrow 0$ или $C_2 \rightarrow 0$, или $m_2 \rightarrow 0$. Ясно, что при каждом из условий система приводится к системе с одной степенью свободы.

Иногда при проектировании той или иной системы умышленно стремятся создать такие условия, когда оба корня оказываются равными. В качестве примера рассмотрим свободные колебания автомобиля, схематически показанного на рис. 26. Эквивалентная колебательная схема автомобиля показана на рис. 26а, где C_1 и C_2 — жесткости передней и задней подвесок автомобиля. Подпрессоренную массу автомобиля представляют в виде тела, обладающего массой m и имеющего радиус инерции Q .

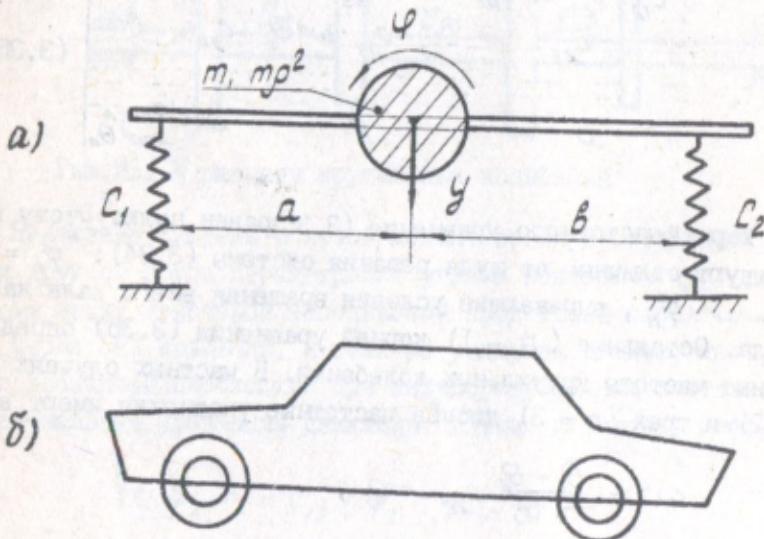


Рис. 26. К расчету свободных колебаний автомобиля

Кинетическая и потенциальная энергии такой системы

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2); \quad \Pi = \frac{1}{2} [c_1(y+a\varphi)^2 + c_2(y-b\varphi)^2] \quad (3.37)$$

Уравнения Лагранжа принимают форму

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y + (c_1 a - c_2 b)\varphi &= 0; \\ m\rho^2\ddot{\varphi} + (c_1 a^2 + c_2 b^2)\varphi + (c_1 a - c_2 b)y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где y — смещение центра масс автомобиля.

Пусть параметры системы удовлетворяют соотношениям

$$c_1 a = c_2 b, \quad \rho^2 = a(a+B) \frac{c_1}{c_1 + c_2}. \quad (3.39)$$

Тогда система (3.38) распадается на два независимых уравнения

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y &= 0, \\ m\rho^2\ddot{\varphi} + c_1 a(a+B)\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Первое уравнение характеризует вертикальные колебания автомобиля, не сопровождающиеся поворотами кузова ("подпрыгивание"), второе уравнение — колебания типа "галопирования", при котором центр масс кузова неподвижен и происходят угловые колебания вокруг этого центра.

Как видно из (3.40), (3.39), частоты этих колебаний при выбранных условиях одинаковы:

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}. \quad (3.41)$$

Совпадение собственных частот является чрезвычайно выгодным, т.к. резонансные колебания, вызываемые неровностями дороги, могут возникнуть только на одной (а не на двух) частотах возбуждения. Именно поэтому при проектировании современных автомобилей и стремятся выполнить условия (3.40).

3.2. Свободные колебания при наличии сил сопротивления.

Устойчивость движения

Влияние сил сопротивления рассмотрим на примере системы с двумя степенями свободы (рис. 21). Примем силы сопротивления пропорци-

ональными абсолютной скорости. Тогда дифференциальные уравнения, полученные по методу деформаций, будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} -m_1 \ddot{x}_1 - \mu_1 \dot{x}_1 &= c_{11} x_1 - c_{12} x_2 ; \\ -m_2 \ddot{x}_2 - \mu_2 \dot{x}_2 &= c_{22} x_2 + c_{21} x_1 . \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

После подстановки сюда значений c_{ij} по (3.10a) и (3.10b) обозначений (3.20), получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + (1+\alpha) \omega_0^2 x_1 + d_1 \dot{x}_1 - \alpha \omega_0^2 x_2 &= 0 ; \\ \ddot{x}_2 + \gamma \omega_0^2 x_2 + d_2 \dot{x}_2 - \gamma x_1 \omega_0^2 &= 0 , \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}, \quad d_1 = \frac{\mu_1}{m_1}, \quad d_2 = \frac{\mu_2}{m_2}, \quad \omega_0^2 = \frac{c_1}{m}.$$

Будем искать решение в виде

$$x_1 = A_1 e^{kt}, \quad x_2 = A_2 e^{kt}.$$

После подстановки в (3.43) придем к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1 [k^2 + (1+\alpha) \omega_0^2 + k d_1] - \alpha \omega_0^2 A_2 &= 0 ; \\ -\gamma \omega_0^2 A_1 + A_2 [k^2 + \gamma \omega_0^2 + k d_2] &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Приравнивая к нулю определитель (3.44), получим характеристическое уравнение 4-й степени относительно неизвестных k :

$$\left| \begin{array}{cc} k^2 + (1+\alpha) \omega_0^2 + k d_1 & -\alpha \omega_0^2 \\ -\gamma \omega_0^2 & k^2 + k d_2 + \gamma \omega_0^2 \end{array} \right| = 0. \quad (3.45)$$

Характер движения вполне определяется значениями корней характеристического уравнения. В общем случае это сопряженные комплексные числа с положительной или отрицательной действительной частью. Если их изобразить на комплексной плоскости, представится несколько различных случаев (рис.27). Как видно, значениям корней с положительной действительной частью соответствует неустойчивое движение, при котором система с течением времени все более и более удаляется от равновесного состояния. Наоборот, в случае отрицательной действительной части система неуклонно стремится к положению равновесия,

и векторные методы определения устойчивости линейных систем. Важнейшим из них является метод структурной стабильности, основанный на исследовании структуры и свойств семейства решений дифференциальных уравнений в зависимости от параметров, определяющих эти решения.

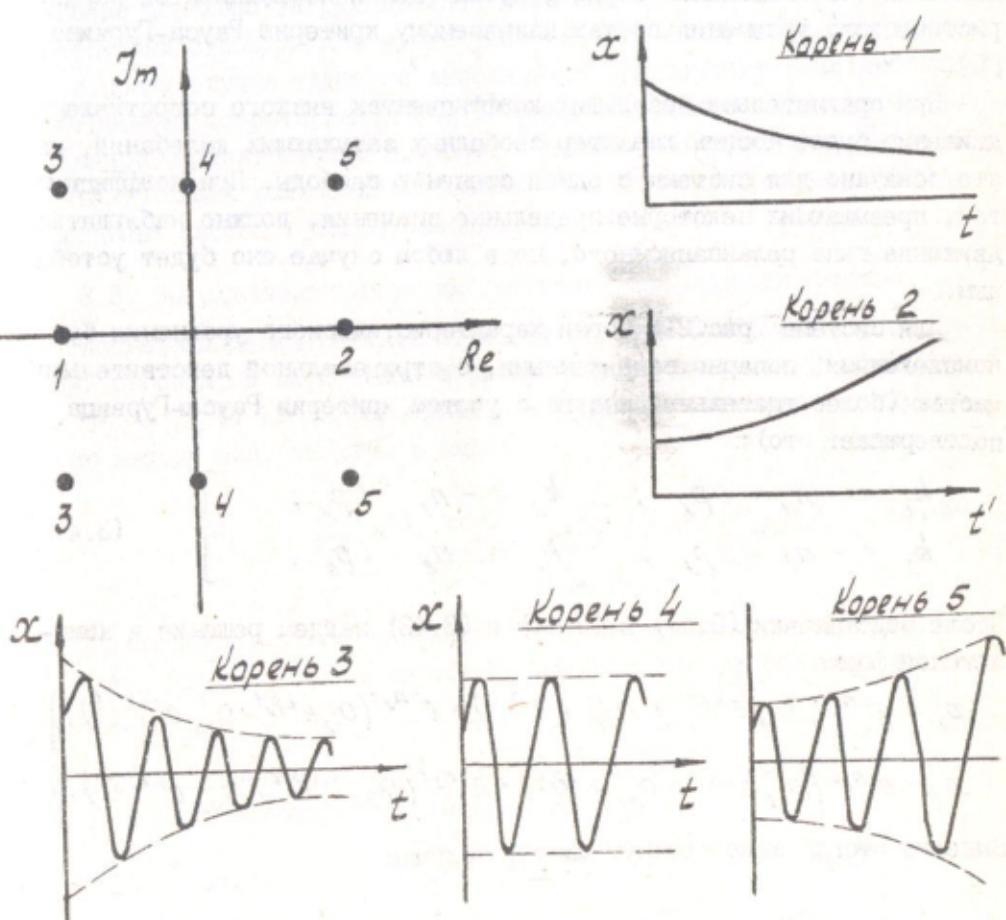


Рис.27. К определению условий устойчивости движения линейных систем

Если корни чисто мнимые, движение носит характер незатухающих колебаний и т.д.

Для системы с S степенями свободы характеристическое уравнение может быть представлено в виде

$$a_{2S} k^{2S} + a_{2S-1} k^{(2S-1)} + \dots + a_1 k_1 + a_0 = 0. \quad (3.46)$$

Такое уравнение трудно решить даже при сравнительно небольших значениях S . Но существуют методы, позволяющие установить устойчивость движения без вычисления корней, путем оценки коэффициентов характеристического уравнения по так называемому критерию Рауса-Гурвица [5].

При сравнительно небольших коэффициентах вязкого сопротивления движение будет носить характер свободных затухающих колебаний, как это показано для системы с одной степенью свободы. При коэффициентах, превышающих некоторые предельные значения, должно наблюдаться движение типа релаксационного, но в любом случае оно будет устойчивым.

Для системы (рис. 21) корни характеристического уравнения будут комплексными, попарно сопряженными, с отрицательной действительной частью (более тщательный анализ с учетом критерия Рауса-Гурвица подтверждает это):

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = -n_1 + i p_1; \quad k_2 = -n_1 - i p_1; \\ k_3 = -n_2 + i p_2; \quad k_4 = -n_2 - i p_2. \end{array} \right\} \quad (3.47)$$

После подстановки (3.47) в (3.44) и (3.43) найдем решение в комплексной форме

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = e^{-n_1 t} (A_{11} e^{i p_1 t} + A'_{11} e^{-i p_1 t}) + e^{-n_2 t} (A_{12} e^{i p_2 t} + A'_{12} e^{-i p_2 t}); \\ x_2 = e^{-n_1 t} (A_{21} e^{i p_1 t} + A'_{21} e^{-i p_1 t}) + e^{-n_2 t} (A_{22} e^{i p_2 t} + A'_{22} e^{-i p_2 t}). \end{array} \right\}$$

Выделив отсюда вещественную часть, получим

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = e^{-n_1 t} (A_{11} \sin p_1 t + B_{11} \cos p_1 t) + \\ \quad + e^{-n_2 t} (A_{12} \sin p_2 t + B_{12} \cos p_2 t); \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

$$x_2 = e^{-n_1 t} (A_{21} \sin p_1 t + B_{21} \cos p_1 t) + e^{-n_2 t} (A_{22} \sin p_2 t + B_{22} \cos p_2 t).$$

где A_{11}, B_{11} и т.д. - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий (3.25).

Постоянныe A_{21}, B_{21} и A_{22}, B_{22} выражаются соответственно через A_{11}, B_{11} и A_{21}, B_{21} с помощью уравнений (3.43).

Решения (3.48) показывают, что движение механической системы представляет собой наложение друг на друга свободных затухающих колебаний, происходящих с различными частотами P_1 и P_2 и различными факторами затухания n_1 и n_2 . Собственные частоты и формы колебаний отличаются от найденных без учета сопротивления. Их точное определение довольно затруднительно даже для простейших систем с двумя степенями свободы. К тому же условия ортогональности собственных форм в общем случае здесь не выполняются. При относительно небольших коэффициентах сопротивления эти отличия оказываются несущественными. Данное обстоятельство позволяет использовать результаты свободных незатухающих колебаний многомассовых систем для исследования аналогичных систем с сопротивлением.

3.3. Вынужденные колебания без учета сил сопротивления

Рассмотрим движение колебательной системы (рис.22) с r степенями свободы, к каждой массе которой прикладывается возбуждающая сила $P_k = P_k(t)$. Дифференциальные уравнения движения, полученные по методу сил, запишем в виде

$$x_i = \sum_{k=1}^r \Phi_k \alpha_{ik} + \sum_{k=1}^r P_k(t) \alpha_{ik}, \quad (3.49)$$

где $\Phi_k = -m_k \ddot{x}_k$.

Ограничимся случаем гармонической возбуждающей нагрузки $P_k = P_{ko} \sin \omega t$. Определяя установившиеся вынужденные колебания

$$x_i = \alpha_i \sin \omega t \quad (3.50)$$

и подставляя данное решение в (3.49), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_1(1-m_1\omega^2\alpha_{11}) + a_2 m_2 \omega^2 \alpha_{12} + \dots + a_r m_r \omega^2 \alpha_{1r} &= \\ = \sum_{k=1}^r P_{ko} \alpha_{1k} & \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 m_1 \omega^2 \alpha_{21} + a_2 m_2 \omega^2 \alpha_{22} + \dots + a_r (1-m_r \omega^2 \alpha_{rr}) &= \\ = \sum_{k=1}^r P_{ko} \alpha_{2k} & \end{aligned} \right\}$$

Решая полученную систему по формуле Крамера, найдем амплитуды вынужденных колебаний a_i :

$$a_i = \frac{\Delta i}{\Delta}, \quad (3.52)$$

где Δ - определитель системы (3.51); Δi - определитель, полученный из Δ путем замены в последнем i -го столбца столбцом свободных членов.

Определитель системы остается тем же, что и при свободных незатухающих колебаниях. Это означает, что при частоте возбуждающей нагрузки, приближающейся к одной из собственных частот, значение определителя уменьшается до нуля и амплитуда вынужденных колебаний формально становится бесконечно большой.

Данный метод не является единственным. Более наглядным является решение, основанное на разложении вынужденных колебаний по собственным формам.

Представим смещение i -й точки в виде суммы:

$$x_i = \sum_{n=1}^r A_n \eta_{in} \sin \omega t, \quad (3.53)$$

где η_{in} - характеризует n -ю форму собственных колебаний;
 A_n - масштаб колебаний, соответствующих той же форме.

Значения A_n найдем с помощью принципа Бети о взаимности работ. Для этого рассмотрим два состояния системы: свободные колебания, происходящие с частотой ω_n , когда смещения каждой из масс характеризуются безразмерным коэффициентом η_{in} , и вынужденные колебания с частотой ω и смещениями x_i , определяемые по (3.53). Первому состоянию соответствует инерционная нагрузка, амплитудное значение которой

$$q_i^{(1)} = \omega_n^2 m_i \eta_{in}.$$

Нагрузка, соответствующая второму состоянию,

$$q_i^{(2)} = \omega^2 m_i x_i + P_{i0} = \omega^2 m_i \sum_{n=1}^r A_n \eta_{in} + P_{i0}$$

По принципу Бети имеем

$$\sum_{i=1}^r q_i^{(1)} x_i = \sum_{i=1}^r q_i^{(2)} \eta_{in}$$

или

$$\sum_{i=1}^r \omega_n^2 m_i \eta_{in} \sum_{n=1}^r A_n \eta_{in} = \sum_{i=1}^r \omega^2 m_i \eta_{in} \sum_{n=1}^r A_n \eta_{in} + \sum_{i=1}^r P_{io} \eta_{in}. \quad (3.54)$$

Запишем условие ортогональности, которому подчиняются собственные формы:

$$\sum_{i=1}^r m_i \eta_{ik} \eta_{in} = \begin{cases} 0 & \text{при } k=n; \\ M_n = \sum_{i=1}^r m_i \eta_{in}^2 & \text{при } k \neq n. \end{cases} \quad (3.55)$$

С учетом последнего условия найдем из (3.54)

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^r P_{io} \eta_{in}}{M_n (\omega_n^2 - \omega^2)}, \quad (3.56)$$

и

$$x_i = \sum_{n=1}^r A_n \eta_{in}. \quad (3.57)$$

Из (3.57) следует, что при вынужденных колебаниях преобладающее значение имеют те собственные формы, которым соответствуют собственные частоты ω_n , наиболее близкие к частоте возбуждения ω ; при частоте возбуждения, равной любой из собственных частот (например, $\omega \neq \omega_n$), амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности, форма же вынужденных колебаний в точности соответствует n -й собственной форме.

3.4. Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления

При наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости, дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$x_i = \sum_{j=1}^r \Phi_j \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^r F_{ej} \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^r P_j(t) \alpha_{ij}, \quad (3.58)$$

где $\Phi_j = -m_j \ddot{x}_j$ — силы инерции; $F_{ej} = -\mu_j \dot{x}_j$ — силы сопротивления; $P_j(t)$ — возбуждающая нагрузка.

Ограничимся случаем гармонической возбуждающей нагрузки, т.е. примем

$$P_j(t) = P_{jo} \sin \omega t.$$

Характер влияния сил сопротивления на вынужденные колебания многомассовых систем в общем остается тем же, что и для систем с одной степенью свободы. Это означает, что амплитуды вынужденных колебаний конечны на всех режимах возбуждения, включая резонансные, а фазы вынужденных колебаний различных точек отличаются от фазы вынуждающей силы и не совпадают между собой. Найдем решение (3.58) в виде

$$x_i = A_i \sin(\omega t - \varphi_i), \quad (3.59)$$

либо в несколько иной, эквивалентной форме:

$$x_i = a_i \sin \omega t + b_i \cos \omega t. \quad (3.60)$$

Подставив (3.60) в (3.58), приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \sin \omega t [a_i - \sum_{j=1}^n a_j m_j \omega^2 \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^n \mu_j \omega b_j \alpha_{ij} - \sum_{j=1}^n P_{j0} \alpha_{ij}] + \\ & + \cos \omega t [b_i - \sum_{j=1}^n b_j m_j \omega^2 \alpha_{ij} - \sum_{j=1}^n \mu_j \omega a_j \alpha_{ij}] = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

В конечном счете получаем систему из $2r$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_i , b_i , решаемую обычными методами:

$$\left. \begin{aligned} a_i - \sum_{j=1}^n a_j m_j \omega^2 \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^n \mu_j \omega b_j \alpha_{ij} &= \sum_{j=1}^n P_{j0} \alpha_{ij} \\ b_i - \sum_{j=1}^n b_j m_j \omega^2 \alpha_{ij} - \sum_{j=1}^n \mu_j \omega a_j \alpha_{ij} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

$i, j = 1 \dots r$

3.5. Динамический гаситель колебаний

Динамический гаситель колебаний является одним из примеров практического применения теории вынужденных колебаний многомассовых систем.

3.5.1. Динамический гаситель без трения

Рассмотрим движение системы, изображенной на рис.21, когда к массе m_1 прикладывается гармоническая возбуждающая сила $P_0 = P_0 \sin \omega t$. Примем вначале силы сопротивления отсутствующими. Дифференциальные уравнения движения для этого случая имеют вид

$$\begin{aligned} -m_1 \ddot{x}_1 + P_0 \sin \omega t - (C_1 + C_2)x_1 + C_2 x_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_2 x_1 - C_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Определяя вынужденные колебания по (3.50), получим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{P_0}{c_1} \left(\alpha - \beta \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta}, \\ a_2 &= \alpha \frac{P_0}{c_1} \cdot \frac{1}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

Отсюда найдем амплитуды вынужденных колебаний:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{P_0}{c_1} \left(\alpha - \beta \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta}, \\ a_2 &= \alpha \frac{P_0}{c_1} \cdot \frac{1}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

где $\Delta = (\alpha + \omega^2)(\alpha - \beta \omega^2) - \alpha$ — определитель системы;

$$\alpha = \frac{c_2}{c_1}, \quad \beta = \frac{m_2}{m_1}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0^2 = c/m.$$

Первое из полученных выражений указывает на возможность полностью исключить колебания первой массы. Для этого достаточно так подобрать параметры системы, чтобы выполнялось условие

$$\alpha - \beta \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0. \quad (3.66)$$

Легко убедиться, что условие (3.66) выполняется всегда, когда парциальная частота динамического гасителя равна частоте вынуждающей силы, т.е. $\omega_0^{(r)} = \sqrt{c_2/m_2} = \omega$.

Пусть, например, частота вынуждающей силы и собственная парциальная частота основной системы ω_0 равны, т.е. $\omega = \omega_0$ (для одномассовой системы это означало бы возникновение резонанса со всеми вытекающими отсюда последствиями). Присоединим теперь к основной массе некоторую дополнительную m_2 упругой связью c_2 , выбрав значения c_2 и m_2 с таким расчетом, чтобы $\alpha = \beta$, или $\frac{m_2}{m_1} = \frac{c_2}{c_1}$. Это означает, что парциальная частота дополнительной массы будет равна парциальной частоте основной, т.е. $c_2/m_2 = c_1/m_1 = \omega_0^2$. В этом случае условие (3.66) выполняется и амплитуда вынужденных колебаний основной массы на частоте $\omega = \omega_0$ будет равна нулю.

Подобное устройство, состоящее из некоторой дополнительной массы, упруго связанной с основной массой так, чтобы выполнялось условие (3.66), называется динамическим гасителем колебаний. При тех же условиях амплитуда колебаний дополнительной массы

$$\alpha_2 = - \frac{P_o}{c_1} \cdot \frac{1}{\alpha} , \quad (3.67)$$

причем знак (-) означает, что эта масса колеблется в противофазе с возбуждающей силой. Значение реакции упругой связи c_2 , действующей на основную массу,

$$P_2 = c_2 x_2 = - P_o \sin \omega t.$$

Следовательно, динамический гаситель колебаний колеблется в противофазе с возбуждающей силой так, что действие последней на основную массу полностью компенсируется реакцией упругой связи дополнительной массы.

Параметр $\alpha = \frac{m_2}{m_1} = \frac{c_2}{c_1}$ в динамическом гасителе колебаний является наиболее важным. Ясно, что из конструктивных соображений желательно, чтобы масса гасителя была намного меньше основной массы, т.е. $m_2 \ll m_1$, или $\alpha \ll 1$.

Однако по мере уменьшения α возрастает амплитуда колебаний дополнительной массы и соответственно динамические напряжения в промежуточной упругой связи.

Другим важным обстоятельством, влияющим на выбор α , является то, что динамический гаситель, особенно гаситель без трения или с очень малым трением, нуждается в точной настройке, при которой его парциальная частота была бы в точности равна частоте возбуждения. Если частота возбуждающей силы не постоянна, то с ее изменением возможно появление резонанса с частотой, равной первой или второй собственным частотам колеблющейся системы. На графике (рис.28) зависимостей частот собственных колебаний системы от параметра α для случая $\alpha = \beta$ видно, что по мере уменьшения α сужается диапазон частот, лежащих между первой и второй собственными частотами системы. Соответственно уменьшается диапазон эффективной работы гасителя и возрастают требования к точности его настройки.

Именно эти соображения – обеспечение усталостной прочности упругой связи и приемлемые требования к точности настройки – не позволяют назначать α чрезмерно малым, и в реально выполненных конструкциях принимается $0,01 \leq \alpha \leq 0,1$.

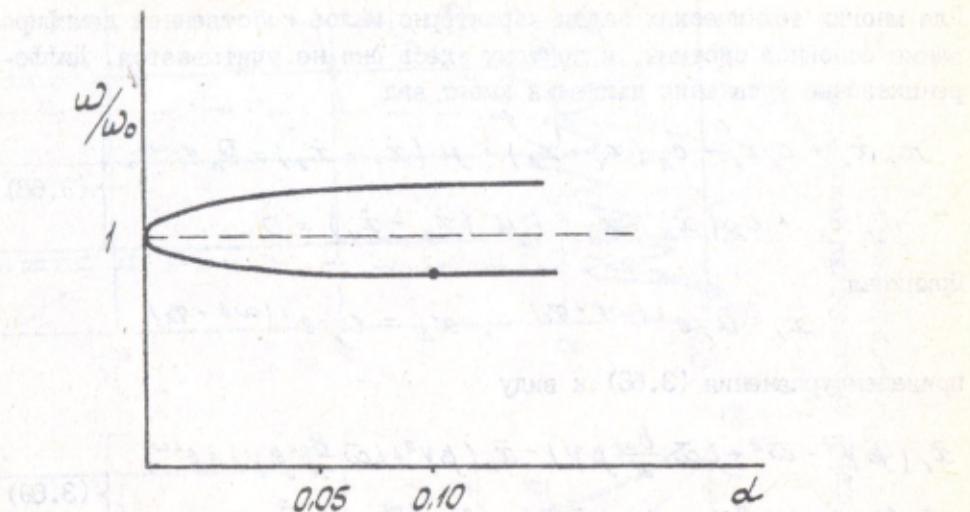


Рис.28. График зависимости частоты собственных колебаний системы с динамическим гасителем от α

3.5.2. Динамический гаситель с сопротивлением, пропорциональны скорости

Рассмотрим работу динамического гасителя при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости, для простейшей одномассовой системы, показанной на рис.29, где обозначено: m_1 , c_1 - масса и жесткость основной системы; m_2 , c_2 - масса и жесткость динамического гасителя; $P_0 e^{i\omega t}$ - амплитудное значение возбуждающей силы и частота возбуждения; μ - коэффициент сопротивления гасителя; x_1 , x_2 - обобщенные координаты.

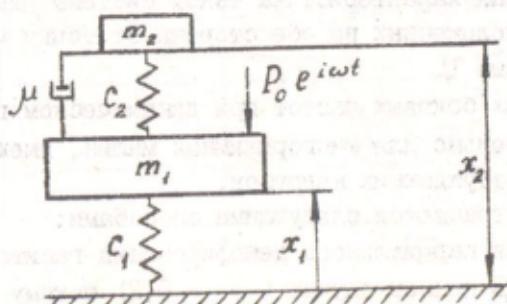


Рис.29. Колебательная система с динамическим гасителем

Для многих технических задач характерно малое собственное демпфирование основной системы, и поэтому здесь оно не учитывается. Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) + \mu (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= P_0 e^{i\omega t}; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) + \mu (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Принимая

$$x_1 = \alpha_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)},$$

приведем уравнения (3.68) к виду

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 (\beta \gamma^2 - \bar{\omega}^2 + i \bar{\omega} \frac{\delta_{02}}{\pi} \beta \gamma) - \bar{x}_2 (\beta \gamma^2 + i \bar{\omega} \frac{\delta_{02}}{\pi} \beta \gamma) &= e^{i\omega t}, \\ -\bar{x}_1 (\beta \gamma^2 + i \bar{\omega} \frac{\delta_{02}}{\pi} \beta \gamma) + \bar{x}_2 (\beta \gamma^2 - \beta \bar{\omega}^2 + i \bar{\omega} \frac{\delta_{02}}{\pi} \beta \gamma) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

где $\beta = m_2 / m_1$; $\gamma = \omega_{02} / \omega_0$, (коэффициент настройки); $\delta_{02} = \frac{\kappa m}{m_2 \omega_{02}}$ – парциальный логарифмический декремент колебаний; $\bar{\omega} = \omega / \omega_0$; $\bar{x}_1 = x_1 / \Delta$; $\Delta = P_0 / c_1$; $\omega_0 = \sqrt{c_1 / m_1}$; $\omega_{02} = \sqrt{c_2 / m_2}$ – парциальные собственные частоты. На рис.30 представлены некоторые результаты численного анализа полученных уравнений в виде графиков зависимостей амплитуд, выброскорости и выброускорения основной системы от частоты возбуждения. Расчет выполнен для следующих параметров системы: $\beta = 0,2$, $\gamma = 0,95$, $\delta_{02} = 0,3$ (значение парциального логарифмического декремента колебаний соответствует уровню демпфирования существующих конструкций, где в качестве упругой связи гасителя используются резиноподобные материалы).

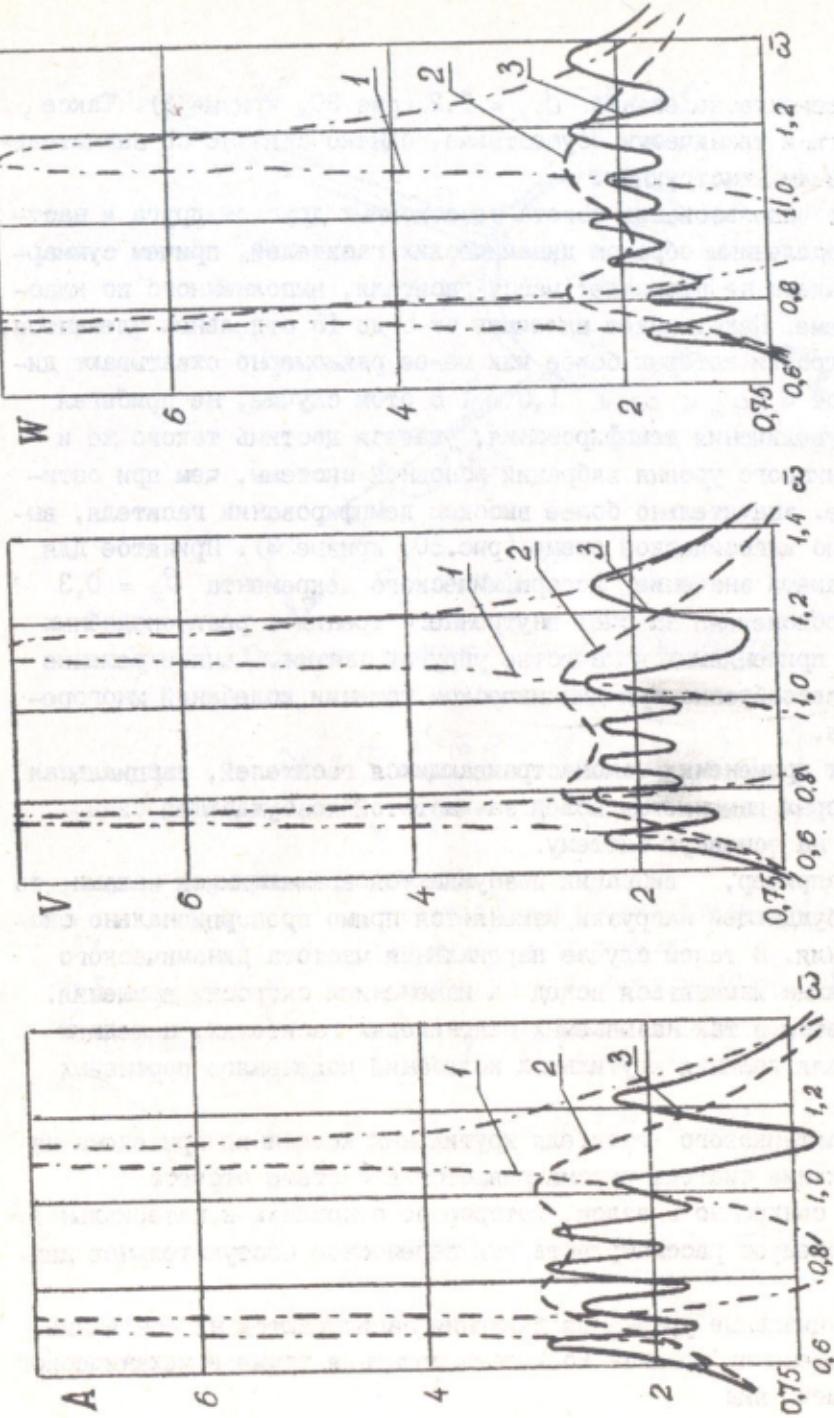
Амплитудно-частотная характеристика такой системы имеет два резонансных пика, расположенных по обе стороны от точки частотной настройки (рис.30, кривые I).

Наличие резонансных боковых частот при динамическом гашении колебаний весьма нежелательно для многорежимных машин, имеющих широкий диапазон частот возбуждающих нагрузок.

Этот недостаток устраняется следующими способами:

I. За счет увеличения парциального демпфирования гасителя до его оптимальных значений. В данном случае ($\beta = 0,2$) такому оптимальному демпфированию соответствует значение парциального логарифми-

Рис. 30. Амплитудно-частотные характеристики системы с одним динамическим гасителем (кривые 1 и 2) и пакетом гасителей (кривые 3): A - вибросмещение; V - виброускорение; W - выброскорость;



ческого декремента колебаний $\delta_{\omega} = 1,2$ (рис.30, кривые 2). Такое решение, хотя и технически осуществимо, однако связано со значительным усложнением конструкции.

2. За счет использования пакета независимых друг от друга и настроенных определенным образом динамических гасителей, причем суммарная масса пакета не превышает массу гасителя, выполненного по классической схеме. Пакет может включать от 5 до 15 отдельных элементов, частоты настройки которых более или менее равномерно охватывают диапазон частот $0,5\omega_0 < \omega < 1,5\omega_0$. В этом случае, не прибегая к методам увеличения демпфирования, удается достичь такого же и даже более низкого уровня вибраций основной системы, чем при оптимальном, т.е. значительно более высоком демпфировании гасителя, выполненного по классической схеме (рис.30, кривые 3). Принятое для элементов пакета значение логарифмического декремента $\delta_o = 0,3$ может быть обеспечено за счет внутреннего трения в резиноподобных материалах, применяемых в качестве упругой связки. Данное решение наиболее целесообразно при динамическом гашении колебаний многорежимных машин.

3. За счет применения самонастраивающихся гасителей, парциальная частота которых изменяется вслед за частотой возбуждающей силы, действующей на основную систему.

Если, например, вибрации возбуждаются вращающимися валами, то частота возбуждающей нагрузки изменяется прямо пропорционально скорости вращения. В таком случае парциальная частота динамического гасителя должна изменяться вслед за изменением скорости вращения. Это достигается в так называемых маятниковых гасителях, нашедших применение для гашения крутильных колебаний коленвалов поршневых двигателей.

Схема маятникового гасителя крутильных колебаний приведена на рис.31. Движение системы рассматривается в системе отсчета вращающейся синхронно с валом, которое по отношению к материальной точке m следует рассматривать как переносное поступательное движение.

Дифференциальные уравнения движения записываются на основании теорем об изменении момента количества движения точки и механической системы и имеют вид

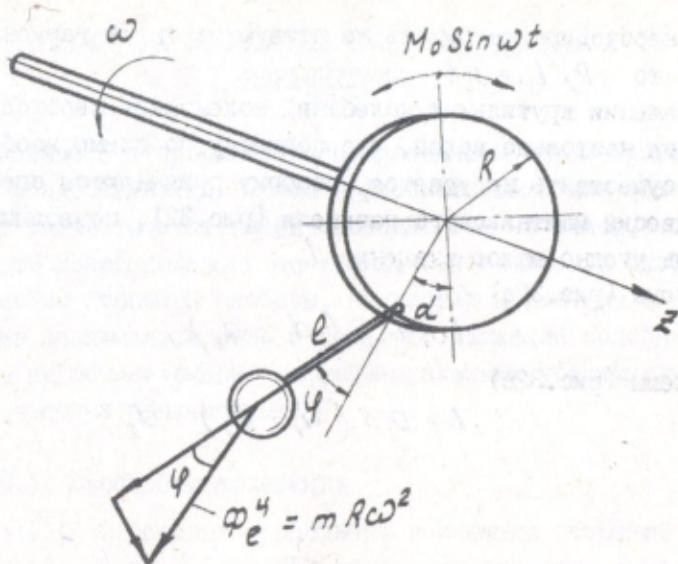


Рис.31. Схема маятникового гасителя колебаний

$$\left. \begin{aligned} I\ddot{\alpha} &= -C\dot{\alpha} + \Phi_{e4} \cdot \varphi R + M_0 \sin \omega t ; \\ mL^2\ddot{\varphi} &= -\Phi_{e4} L\dot{\varphi} + \Phi_e^t \cdot L , \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

где C — крутильная жесткость вала;

$\Phi_{e4} = mR\omega^2$ — центробежная составляющая силы инерции переносного движения;

$\Phi_e^t = mR\ddot{\alpha}$ — тангенциальная составляющая той же силы.

Принимая $\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$, $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ и подставляя эти выражения в (3.70), найдем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 (C - I\omega^2) - mR^2\omega^2\varphi_0 &= M_0 ; \\ \alpha_0 \frac{R}{l}\omega^2 + \varphi_0 (\omega^2 - p^2) &= 0 , \end{aligned} \right\}$$

где $p = \omega \cdot \sqrt{R/l}$ — собственная парциальная частота колебаний маятника в поле центробежных сил.

Амплитуда вынужденных колебаний α обращается в нуль, если выполнены условия

$$p = \omega , \quad \frac{R}{l} = 1 .$$

Если необходимо заглушить не первую, а n -ю гармонику возбуждающих сил, то $R/l = n^2$.

При гашении крутильных колебаний коленвалов необходимая длина оказывается настолько малой, что подвеску по схеме, изображенной на рис.31, осуществить не удается, поэтому применяются специальные схемы подвески маятникового гасителя (рис.32), позволяющие обеспечить сколь угодно малое значение l :

для схемы (рис.32а)

$$l = 0,5 (d_1 - d_2);$$

для схемы (рис.32б)

$$l = 0,5 (d_1 - d_2) - d_2.$$

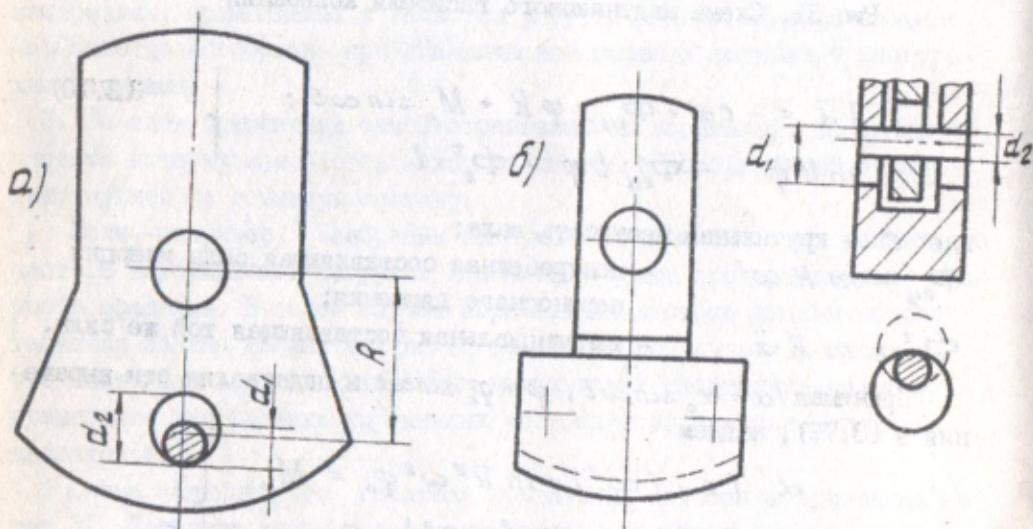


Рис.32. Маятниковый гаситель крутильных колебаний (схема подвески)

4. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Системы с непрерывно распределенными параметрами – балки, пластины, оболочки и т.д. – можно рассматривать как обладающие бесчисленным множеством степеней свободы. Тем не менее, основные закономерности колебательного движения, относящиеся к системам с конечным числом степеней свободы, полностью применимы и в данном случае. Отличие заключается лишь в том, что движение подобных систем описывается не обычными дифференциальными уравнениями, а уравнениями в частных производных.

4.1. Свободные колебания

4.1.1. Свободные продольные колебания стержней

Направим ось X (рис.33) вдоль оси стержня, выделим элемент его длиной dx и рассмотрим некоторое текущее состояние, когда каждое из сечений стержня несколько смещено от равновесного положения на величину $u(x, t)$.

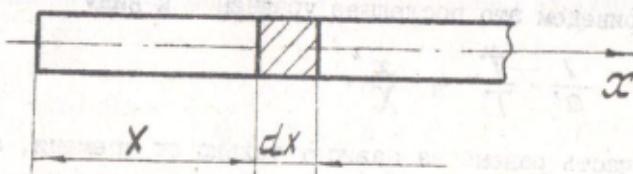


Рис.33. К расчету продольных колебаний стержней

Тогда относительные деформации в сечениях "I" и "2" и силы, действующие на указанный элемент,

$$\begin{aligned} \epsilon(x, t) &= \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \quad \epsilon(x+dx, t) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx; \\ T_1 &= T(x, t) = EA \epsilon(x, t) = EA \frac{\partial u(x)}{\partial x}; \\ T_2 &= EA \frac{\partial u(x)}{\partial x} + EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Под действием этих сил элемент, если его рассматривать как материальную точку, приобретает ускорение

$$w(x, t) = (T_2 - T_1) / \rho A dx = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (4.2)$$

где ρ - удельная плотность материала; E - модуль упругости; A - площадь поперечного сечения стержня.

Подставив (4.1) в (4.2), найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.3)$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$.

Уравнение (4.3) определяет свободные продольные колебания стержня, которые наблюдаются, если его каким-либо способом вывести из равновесия. Будем искать решение по методу Фурье:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (4.4)$$

т.е. в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты x , а другая - от времени t . Подставляя (4.4) в (4.3), приведем это последнее уравнение к виду

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{x''}{X}, \quad (4.5)$$

где левая часть равенства зависит только от времени, а правая - только от координаты. Это возможно в том случае, когда обе части равенства равны одному и тому же постоянному числу. Обозначим это число - λ^2 . Тогда (4.5) распадается на два независимых уравнения:

$$\ddot{T} + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad (4.6)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (4.7)$$

Общее решение уравнения (4.7) имеет вид

$$X = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x, \quad (4.8)$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий, зависящих от особенностей закрепления стержня. Пусть, например, левый конец ($x = 0$) закреплен, а правый ($x = l$) - свободен.

Тогда граничные условия

а) для левого конца $X = 0$; (4.9)

б) для правого конца $\frac{\delta X}{\delta x} = 0$, (4.10)

причем (4.10) выражает условие отсутствия силы на свободном конце.

В силу условий (4.9) и (4.10)

$$X(0) = C_2 = 0 ; \quad C_1 \lambda, \cos \lambda l = 0. \quad (4.11)$$

Отсюда решения, не тождественно равные нулю, имеют место только при соблюдении условия

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} + k\pi ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (4.12)$$

или $\lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}$. (4.13)

Каждому λ_k соответствует собственная функция:

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi(2k+1)x}{2l}, \quad (4.14)$$

причем собственные функции удовлетворяют условию взаимной ортогональности

$$\int_0^l X_k(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq k; \\ \frac{l}{2}, & \text{при } n = k. \end{cases} \quad (4.15)$$

Перейдем теперь к решению уравнения (4.6). При $\lambda = \lambda_k$ общее решение имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{\pi(2k+1)at}{2l} + b_k \sin \frac{\pi(2k+1)at}{2l}. \quad (4.16)$$

Общее решение задачи представим в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{\pi(2k+1)at}{2l} + B_k \sin \frac{\pi(2k+1)at}{2l} \right] \sin \frac{\pi(2k+1)x}{2l}. \quad (4.17)$$

Произвольные постоянные A_k и B_k определим из начальных условий, которыми задаются положение и скорость каждого из сечений в начальный момент времени:

при $t = 0 \quad u(x) = f(x), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial t} = v(x).$ (4.18)

В силу начальных условий (4.18)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi(2k+1)x}{2l};$$

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{\pi a(2k+1)}{2l} \sin \frac{\pi(2k+1)x}{2l}.$$

Умножим обе части полученных уравнений на $\sin \frac{\pi(2k+1)x}{2l}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l . Тогда, учитывая условия ортогональности (4.15), найдем

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx; \\ B_k &= \frac{4}{(2k+1)\pi a} \int_0^l v(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

4.1.2. Свободные крутильные колебания стержней

Поскольку нас интересуют только относительные повороты сечений, то примем любое из них за неподвижное. Будем считать неподвижным крайнее левое сечение стержня. Рассечем вал поперечным сечением, лежащим на расстоянии X от левого конца, и отбросим правую часть, заменив ее действие на левую часть крутящим моментом M_x . Тогда угол закрутки элемента вала длиной dx , непосредственно примыкающего слева к выбранному сечению

$$d\varphi(x) = \frac{M_x dx}{G I_p}, \quad (4.20)$$

где G - модуль Юнга 2-го рода; I_p - полярный момент инерции поперечного сечения.

Отсюда найдем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G I_p} \quad (4.21)$$

или, учитывая, что в нашем случае угол закрутки является функцией двух аргументов,

$$\frac{d\varphi(x,t)}{dx} = \frac{M_x}{G I_p}. \quad (4.22)$$

7

Определим теперь значения крутящих моментов в сечениях с координатами x и $x + dx$:

$$M(x) = GI_p \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}, \quad M(x+dx) = GI_p \left[\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \right]. \quad (4.23)$$

Разность этих моментов вызывает вращение выделенного элемента с ускорениями

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{M(x+dx) - M(x)}{\Theta_p}, \quad (4.24)$$

где Θ_p – массовый момент инерции выделенного элемента относительно оси вращения.

Ограничимся рассмотрением стержня круглого сечения, для которого $\Theta_p = \rho I_p dx$ (ρ – плотность материала). Тогда, учитывая (4.23), и (4.24), придем к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (4.25)$$

где $\alpha = \sqrt{G/\rho}$.

Как видим, дифференциальное уравнение крутильных колебаний вала с круглым поперечным сечением не отличается от дифференциального уравнения продольных колебаний призматических стержней и решается так же.

4.1.3. Свободные изгибные колебания стержней постоянного сечения

Воспользуемся дифференциальным уравнением изгиба:

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M(x), \quad (4.26)$$

где v – прогиб; EI – изгибная жесткость; $M(x)$ – изгибающий момент в поперечном сечении, лежащем на расстоянии x от левого конца стержня.

Дважды продифференцируем (4.26):

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = q(x), \quad (4.27)$$

где $q(x)$ – распределенная нагрузка.

В случае свободных колебаний значение распределенной нагрузки определяется одними инерционными силами, т.е.

$$(4.28) \quad q(x) = -m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad (4.28)$$

где m – значение массы стержня, приходящейся на единицу его длины.

Подставив (4.28) в (4.27), найдем дифференциальное уравнение изгибных колебаний:

$$\frac{EI}{m} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (4.29)$$

В соответствии с методом Фурье решение запишем в виде произведения двух независимых функций:

$$v(x, t) = \eta(x) \cdot T(t); \quad (4.30)$$

$$T(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.31)$$

После подстановки (4.30) и (4.31) в (4.28) получим

$$\frac{\partial^4 \eta(x)}{\partial x^4} - \alpha^4 \eta(x) = 0, \quad (4.32)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EI}}. \quad (4.33)$$

Решение уравнения (4.32) находится в виде комбинации функций Крылова А.Н.

$$\eta(x) = AS(\alpha x) + BT(\alpha x) + CU(\alpha x) + DV(\alpha x) \quad (4.34)$$

и представляет собой собственные формы колебаний.

Здесь обозначено: А, В, С, Д – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий; S, T, U, V – функции А.Н.Крылова:

$$S(\alpha x) = 0,5 (\cosh \alpha x + \cos \alpha x);$$

$$T(\alpha x) = 0,5 (\sinh \alpha x + \sin \alpha x); \quad (3.35)$$

$$U(\alpha x) = 0,5 (\cosh \alpha x - \cos \alpha x);$$

$$V(\alpha x) = 0,5 (\sinh \alpha x - \sin \alpha x).$$

Рассмотрим примеры.

I. Балка на абсолютно жестких шарирных опорах (рис.34).

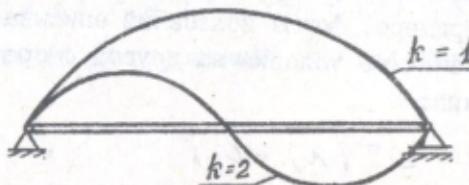


Рис.34. Формы свободных изгибных колебаний балки

Границные условия: $x = 0, \eta = 0, \eta'' = 0;$

$x = l, \eta = 0, \eta'' = 0.$

Из первых двух условий находим $A = C = 0$, т.е. форма колебаний описывается уравнением

$$\eta(x) = BT(\alpha x) + DV(\alpha x). \quad (4.36)$$

Используя граничные условия на другой опоре, получим следующую систему уравнений относительно неизвестных B и D :

$$\left. \begin{array}{l} BT(\lambda) + DV(\lambda) = 0; \\ BV(\lambda) + DT(\lambda) = 0, \end{array} \right\} \quad (4.37)$$

где $\lambda = \alpha l$.

Приравнивая нулю определитель этой системы, найдем частотное уравнение

$$V^2(\lambda) - T^2(\lambda) = \sin \lambda \cdot \sin \lambda = 0,$$

или $\sin \lambda = 0, \lambda = \pi, 2\pi, \dots, k\pi. \quad (4.38)$

Для полученных корней частного уравнения находим $B = -D$ и формы свободных колебаний балки

$$\eta(x) = \sin k\pi x. \quad (4.39)$$

Собственные частоты колебаний найдем из (4.33):

$$\omega_{k_0} = \frac{\lambda^2 E}{l^2} \cdot \sqrt{EI/m}. \quad (4.40)$$

2. Балка с одной жесткой и другой упруго-податливой опорами.

Границные условия:

на жесткой опоре $x = 0, \eta(0) = 0, \eta''(0) = 0;$

на упруго-податливой

$$x = l, \eta''(l) = 0, \eta(l) = R_B \cdot \delta,$$

где δ - податливость опоры; $R_B = EI \cdot \eta'''$ - реакция опоры.

Как и в первом примере, форма колебаний описывается уравнением (4.36). Используя граничные условия на другой опоре, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} BV(\lambda) + DT(\lambda) &= 0; \\ B[T(\lambda) - k\lambda^3 U(\lambda)] + D[V(\lambda) - k\lambda^3 S(\lambda)] &= 0, \end{aligned} \right\} (4.41)$$

где $\lambda = \alpha l$; $k = \frac{EI\delta}{l^3}$.

Приравнивая нулю определитель системы уравнений, получим частотное уравнение

$$k\lambda^5 (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) - 2 \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda = 0. \quad (4.42)$$

Из первого уравнения системы (4.37) найдем значение коэффициента D :

$$D = -BV(\lambda)/T(\lambda).$$

Таким образом, i -я форма колебаний балки с одной жесткой и другой упруго-податливой опорой, вычисленная с точностью до множителя B , и значение i -й собственной частоты определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \eta_i(\bar{x}) &= T(\lambda_i \bar{x}) - V(\lambda_i) V(\lambda_i \bar{x}) T(\lambda_i); \\ \omega_i &= \lambda_i^2 \sqrt{EI/m l^4}, \end{aligned} \right\} (4.43)$$

где λ_i - корни частотного уравнения (4.42); $\bar{x} = x/l$ - относительная координата.

3. Балка на двух упруго-податливых опорах.

Граничные условия:

$$x = 0, \eta''(0) = 0; \eta(0) = R_A \delta_A = -\delta_A EI \eta'''(0);$$

$$x = l, \eta''(l) = 0; \eta(l) = R_B \delta_B = \delta_B EI \eta'''(l).$$

Из первого граничного условия находим $C = 0$ и форму собственных колебаний

$$\eta(x) = AS(\alpha x) + BT(\alpha x) + DV(\alpha x). \quad (4.44)$$

Используя остальные три граничных условия, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} A + k_A \lambda^3 D = 0; \\ A U(\lambda) + BV(\lambda) + DT(\lambda) = 0; \\ A[S(\lambda) - k_B \lambda^3 T(\lambda)] + B[T(\lambda) - k_B \lambda^3 U(\lambda)] + D[V(\lambda) - k_B \lambda^3 S(\lambda)] = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю определитель системы, найдем частотное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k_A \lambda^3 \\ U(\lambda) & V(\lambda) & T(\lambda) \\ S(\lambda) - k_B \lambda^3 T(\lambda) & T(\lambda) - k_B \lambda^3 U(\lambda) & V(\lambda) - k_B \lambda^3 S(\lambda) \end{bmatrix} = 0.$$

Формы колебаний определяются с точностью до постоянного множителя A :

$$\eta_i(\bar{x}) = S(\lambda_i, \bar{x}) + \frac{1}{V(\lambda_i)} \left[\frac{T(\lambda_i)}{k_A \lambda_i^3} - U(\lambda_i) \right] T(\lambda_i, \bar{x}) + V(\lambda_i, \bar{x}) / k_A \lambda_i^3,$$

где λ_i — корни частотного уравнения.

На рис.35 представлены графики зависимостей корней частотных уравнений от податливостей опор.

4.2. Вынужденные колебания

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний для стержней постоянного сечения получаются путем добавления в правую часть уравнений (4.3), (4.25) или (4.29) членов, характеризующих динамическую нагрузку.

Для продольных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho A} P(x) \sin \omega t, \quad (4.45)$$

где $P(x)$ — динамическая нагрузка, действующая в осевом направлении и приходящаяся на единицу длины стержня.

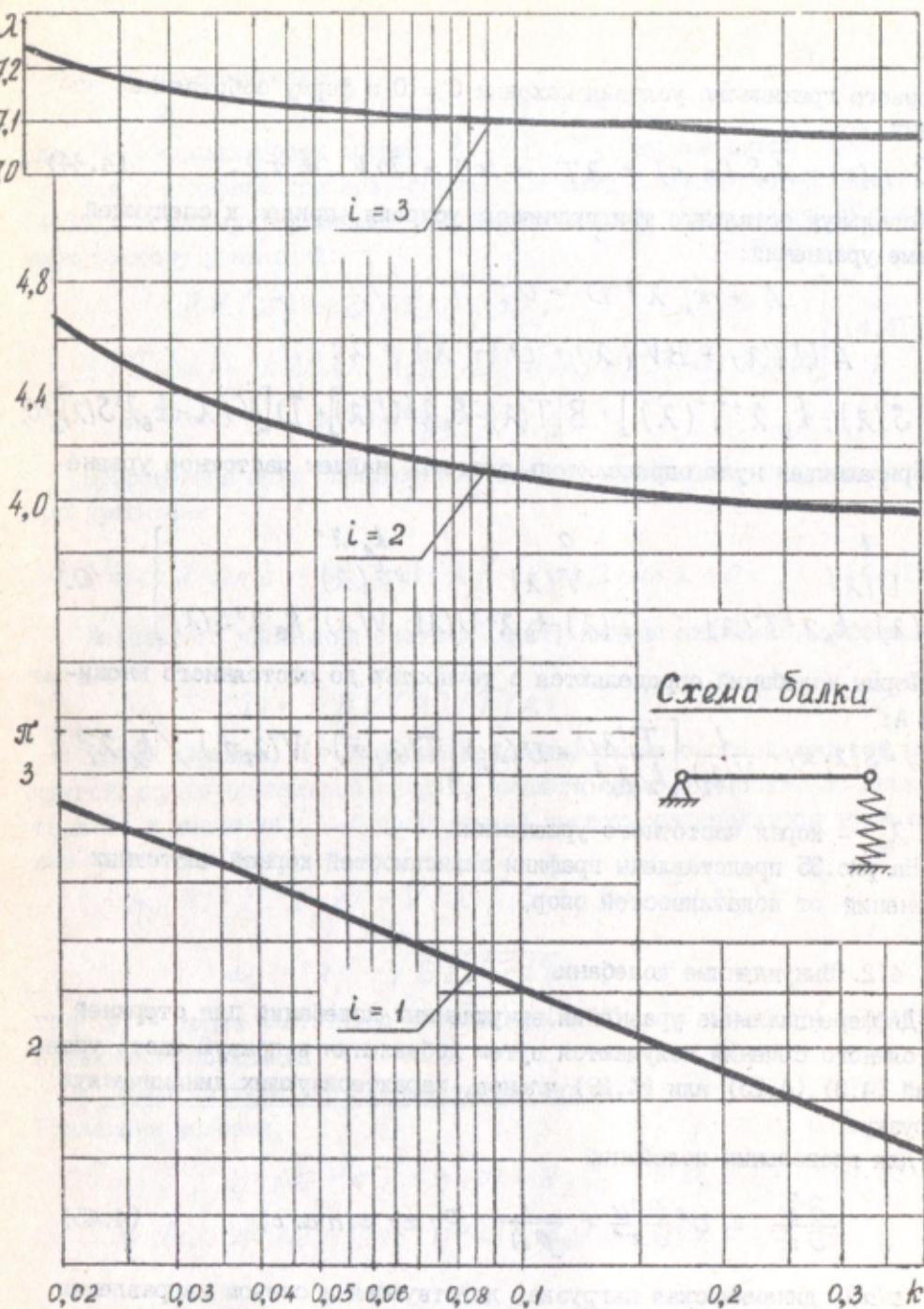


Рис.35. График зависимости коэффициентов λ_i от коэффициента податливости опоры $k = \frac{\delta \cdot l^3}{E \cdot F}$

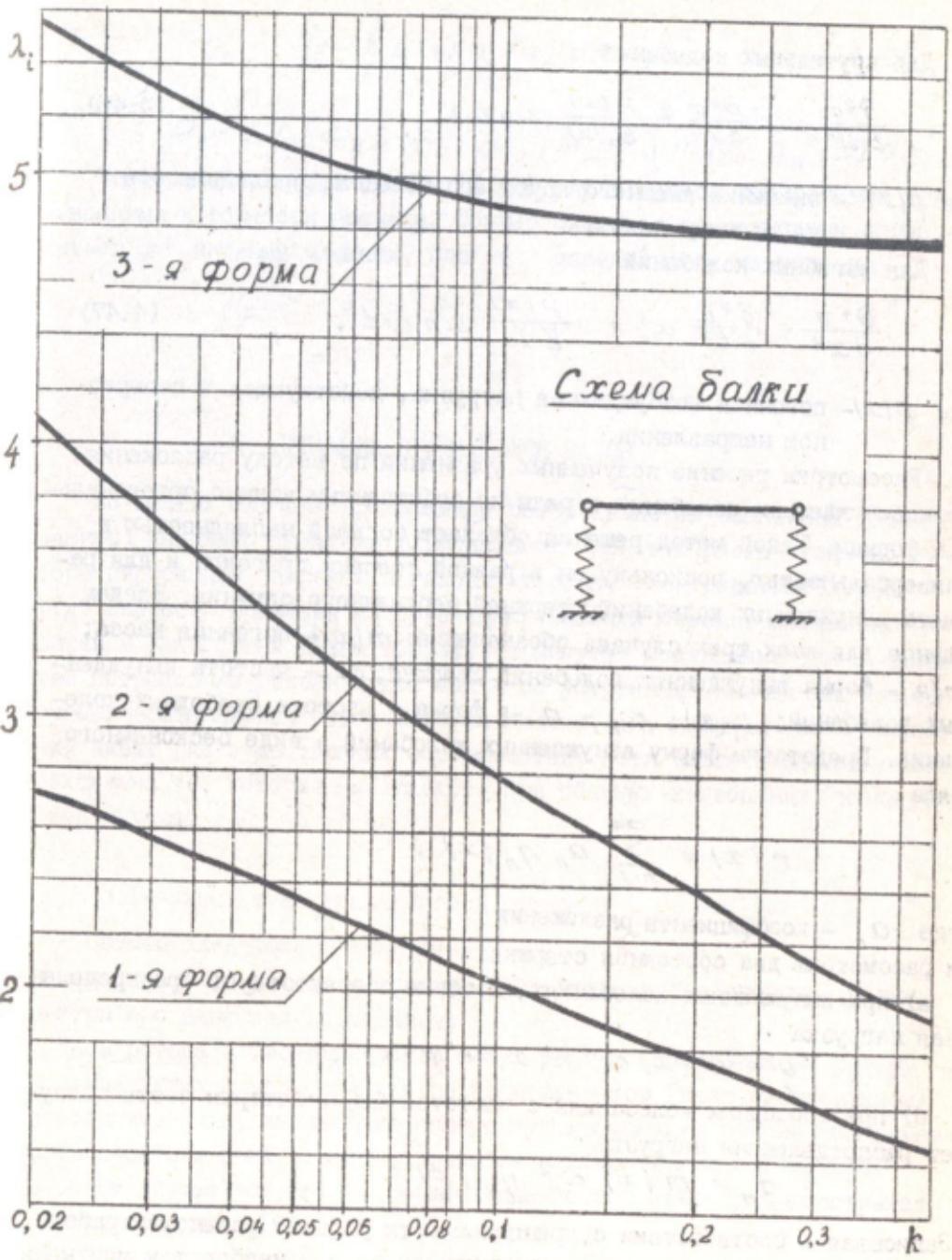


Рис.36. График зависимости коэффициентов λ_i от коэффициента податливости опоры k

Для крутильных колебаний

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Q^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{P(x)}{\Theta_p(x)} \sin \omega t, \quad (4.46)$$

где $P(x)$ - значение внешнего крутящего момента, приходящегося на единицу длины.

Для изгибных колебаний

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \alpha^4 = \frac{P(x)}{EI} \sin \omega t, \quad (4.47)$$

где $P(x)$ - погонная возбуждающая нагрузка, действующая в поперечном направлении.

Рассмотрим решение полученных уравнений по методу разложения форм вынужденных колебаний в ряды по собственным взаимно ортогональным формам. Такой метод решения обладает большой наглядностью и универсальностью, поскольку он в равной степени пригоден и для расчета вынужденных колебаний стержней переменного сечения. Введем единое для всех трех случаев обозначение: $m(x)$ - погонная масса; $r(x)$ - форма вынужденных колебаний стержня; ω - частота вынужденных колебаний; $\eta(x)$, ω_n - n -я форма и частота свободных колебаний. Представим форму вынужденных колебаний в виде бесконечного ряда

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n(x),$$

где a_n - коэффициенты разложения, и рассмотрим два состояния стержня:

а) при вынужденных колебаниях, которым соответствует распределенная нагрузка

$$q = m(x) \omega^2 r(x) + P(x);$$

б) при свободных колебаниях с частотой ω_n , которым соответствует распределенная нагрузка

$$q_n = m(x) \omega_n^2 \eta_n(x).$$

Записывая в соответствии с принципом Бети условие равенства работ сил первого состояния на перемещениях второго и наоборот и учитывая условие взаимной ортогональности собственных форм, найдем

$$a_n = \frac{\Omega_n}{M_n} \int_0^l p(x) \eta_n(x) dx , \quad (4.48)$$

где

$$\Omega_n = 1 / (\omega_n^2 - \omega^2); \quad M_n = \int_0^l m(x) \eta_n^2(x) dx .$$

Число членов в разложении (4.48) определяется конкретными требованиями к точности расчета. Обычно оказывается возможным ограничиться z первыми членами, где z определяется из условия

$$\omega_z \geq (3 \div 4) \omega .$$

5. ДИНАМИКА ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ

Во многих случаях вращающийся ротор является важнейшим узлом машины, например, шпиндель шлифовального или токарного станков, роторы гироскопов, паровых и газовых турбин, электродвигателей и т.д. Скорости вращения в современных машинах нередко составляют десятки и даже сотни тысяч оборотов в минуту. Достижение таких скоростей потребовало решения ряда задач по устранению колебаний, генерируемых вращающимися роторами. Выяснилось, что природа таких колебаний имеет ряд существенных особенностей, хотя многие эффекты очень похожи на те, которые наблюдаются при обычных колебаниях, и могут быть изучены теми же методами.

5.1. Кинематика вращающегося ротора

Примем следующие определения:

ось вращения ротора — прямая, проходящая через геометрические центры его цапф под подшипники;

ось ротора — геометрическое место точек, принадлежащих ротору и совпадающих с осью вращения в ненагруженном (недеформированном) состоянии. Силы, вызывающие поперечную деформацию ротора, например силы веса или центробежные, приводят к искривлению оси ротора. В общем случае ось ротора представляет собой некоторую пространственную кривую.

Элемент ротора — часть, ограниченная двумя бесконечно близкими сечениями, перпендикулярными к оси ротора.

Движение любого элемента в общем случае является сложным и про-
исходит, во-первых, в результате обращения изогнутой оси ротора во-
круг оси вращения, во-вторых, в результате собственного вращения
элемента. Первое из указанных движений можно рассматривать как пе-
реносное (по отношению к данному элементу), второе - как относитель-
ное.

Для наглядного представления можно привести пример гибкого ва-
лика, например, сверлильной машинки, заключенного во внешнюю метал-
лическую оплетку. Вращение такого вала может происходить при непо-
движной внешней оболочке, когда ось вала неподвижна в пространстве.
В общем же эта оболочка, а вместе с ней и ось вала могут как угод-
но перемещаться независимо от условий собственного вращения.

Для большинства роторов, например, энергетических машин, харак-
терны весьма малые по сравнению с их собственными размерами проги-
бы. В качестве подходящей модели, описывающей движение элемента та-
кого ротора, может служить модель, представленная на рис.37. Здесь
элемент ротора вращается вокруг его оси с "собственной" угловой ско-
ростью ω , в то время как сама эта ось вращается (прецессирует)
вокруг оси вращения с угловой скоростью Ω .

Следует отметить, что для машин, не обладающих круговой симмет-
рией, смещение h определенным образом зависит от угла поворота,
и при установившемся движении каждая из точек оси ротора описывает
в пространстве кривую, приближающуюся по форме к эллипсу. Ограни-
чимся рассмотрением симметричных систем.

Если ось ротора обращается в том же направлении, что и его соб-
ственное вращение, то такое движение принято называть прямой пре-
цессией, в противном случае - обратной. Особенности движения при
прямой и обратной прецессии можно понять из рис.38 (A - означает
здесь некоторую метку в данном сечении ротора).

5.2. Понятие о критической скорости вращения

Некоторые особенности движения роторов можно усмотреть на
простейшем примере одномассового ротора, который представляет со-
бой гладкий невесомый вал с закрепленным посередине диском массы
 m (рис.39).

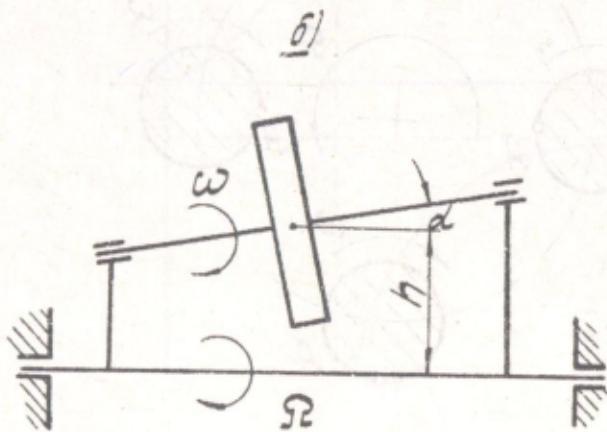
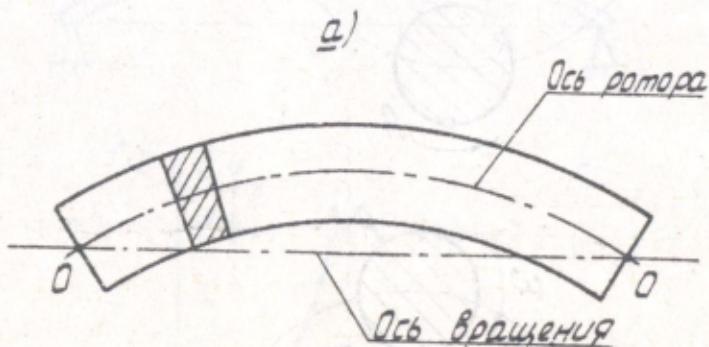


Рис.37. Модель прецессионного движения элемента вала

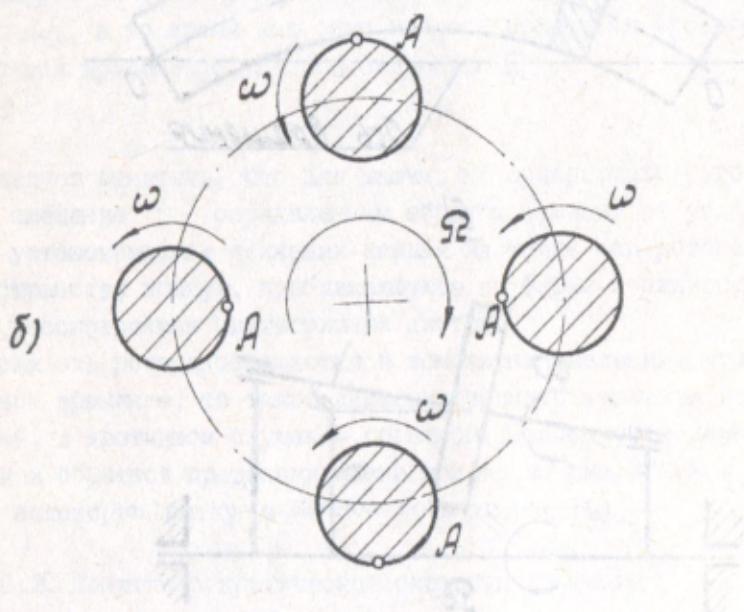
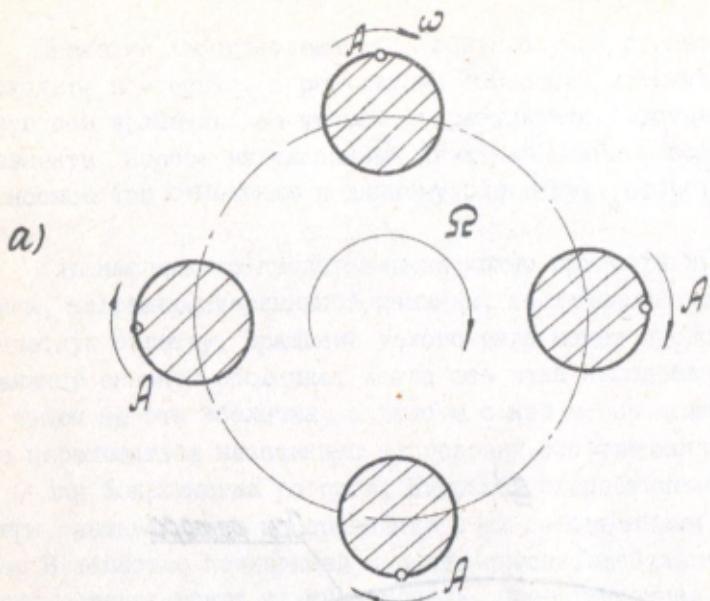


Рис.38. Прецессионное вращение вала:
а) прямая прецессия; б) обратная прецессия

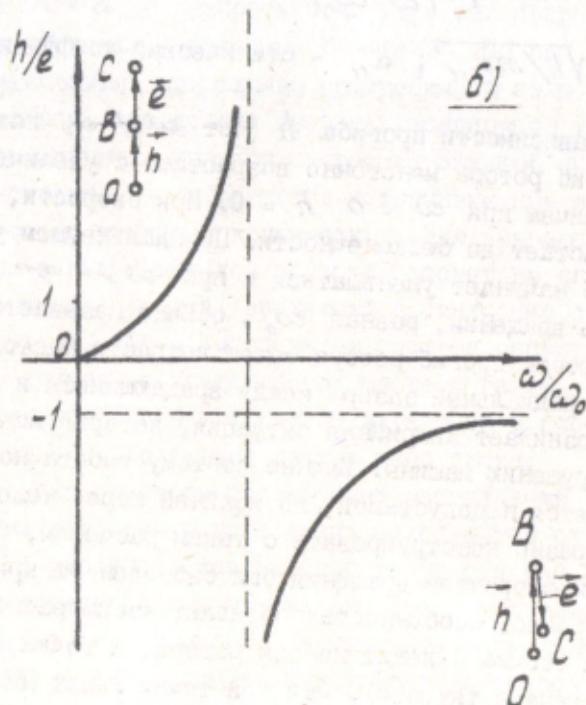
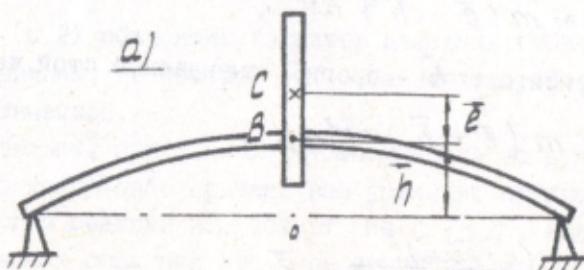


Рис.39. Расчетная схема (а) и зависимость динамического прогиба от частоты (б) для одномассового ротора

Центр диска имеет радиальное смещение (эксцентризитет) относительно оси ротора. Будем рассматривать случай так называемой прямой синхронной прецессии, когда изогнутая ось ротора обращается вокруг оси вращения (оси подшипников) в ту же сторону, что и собственное вращение и с той же угловой скоростью ($\Omega = \omega$). На вал со стороны диска будет прикладываться центробежная сила

$$\bar{P}_4 = m(\bar{e} + \bar{h})\omega^2,$$

где \bar{e} - эксцентризитет; \bar{h} - прогиб, вызываемый этой же силой:

$$\bar{h} = m(\bar{e} + \bar{h})\omega^2\alpha_{11}, \quad (5.1)$$

или

$$h = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \cdot \bar{e}, \quad (5.2)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{1/m\alpha_{11}}$; α_{11} - статический коэффициент податливости вала.

График зависимости прогиба h от ω / ω_0 показан на рис. 39б. Вначале прогиб ротора монотонно возрастает с увеличением скорости вращения, причем при $\omega = 0$ $h = 0$. При скорости, равной ω_0 , прогиб возрастает до бесконечности. При дальнейшем увеличении скорости прогиб начинает уменьшаться и при $\omega \rightarrow \infty$ $h \rightarrow 0$.

Скорость вращения, равная ω_0 , обычно называется критической. На этой скорости прогиб ротора может возрасти настолько, что выбирается весь радиальный зазор между вращающимися и корпусными деталями. Так возникает аварийная ситуация, которая может привести к полному разрушению машины. Именно поэтому работа на критических режимах считается недопустимой, по крайней мере, нежелательной. Машину целесообразно конструировать с таким расчетом, чтобы весь рабочий диапазон скоростей вращения был свободен от критических режимов.

Своебразной особенностью обладает взаиморасположение точек О, В и С диска (точка З лежит на оси ротора, а точка С характеризует положение центра тяжести). Эти три точки лежат на одной прямой, но при $\omega < \omega_0$ вектор прогиба \bar{h} и вектор эксцентризитета \bar{e} направлены одинаково, а при $\omega > \omega_0$ - в противоположные стороны. Это непосредственно вытекает из (5.2) и подтверждается наблюдениями. Значит, при скорости, значительно больше критической, центр тяжести диска располагается почти на оси вращения, а прогиб становится

равным эксцентрикитету. Если эксцентрикитет достаточно мал, то работа на закритическом режиме оказывается спокойной и не сопровождается большими вибрациями и напряжениями. Это явление иногда называют самоцентрированием ротора.

5.3. Устойчивость движения ротора

Формула (5.2) объясняет характер движения гибкого вала, но не объясняет причины, по которой вал оказывается устойчивым при скорости выше критической.

Действительно, при $\omega < \omega_c$ устойчивость вала не вызывает сомнений. Если по какой-либо причине вал увеличит прогиб на величину Δh , то сила упругой реакции возрастает на $C \cdot \Delta h$, где C жесткость вала. Центробежная сила при этом увеличится на $m\omega^2 \Delta h$; $C \Delta h > m\omega^2 \Delta h$ до тех пор, пока $\omega < \omega_c$ и разность этих двух сил направлена к оси вращения и возвращает вал в исходное положение. Но при скорости большей, чем критическая, приращение центробежной силы больше упругой реакции. Казалось, это должно вызвать бесконечное увеличение прогиба при любом значении угловой скорости, большей критической. Но этого не происходит, и вал остается устойчивым при любом значении угловой скорости, исключая критическую. Для выявления причин стабилизации вала в закритической области рассмотрим его относительное движение в системе отсчета, вращающейся синхронно с ним. На рис.40 обозначено: x_0, y_0 - неподвижная система отсчета; x, y - система отсчета, синхронно вращающаяся вместе с валом. Точка 0 определяет положение оси вращения, перпендикулярной к плоскости xy или x_0y_0 , а точка С - положение центра масс диска.

Будем считать для простоты последующих рассуждений эксцентрикитет отсутствующим, т.е. центр масс диска находящимся строго на изогнутой оси вала. На рис.40а показаны силы упругости, на рис.40в - силы инерции переносного движения, на рис.40с - кориолисовы силы инерции и на рис.40д - силы инерции в относительном движении.

Получим следующие дифференциальные уравнения относительного движения точки С:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= mx\omega^2 + 2my\dot{\omega} - cx; \\ m\ddot{y} &= my\omega^2 - 2m\dot{x}\omega - cy, \end{aligned} \right\} \quad (t.3)$$

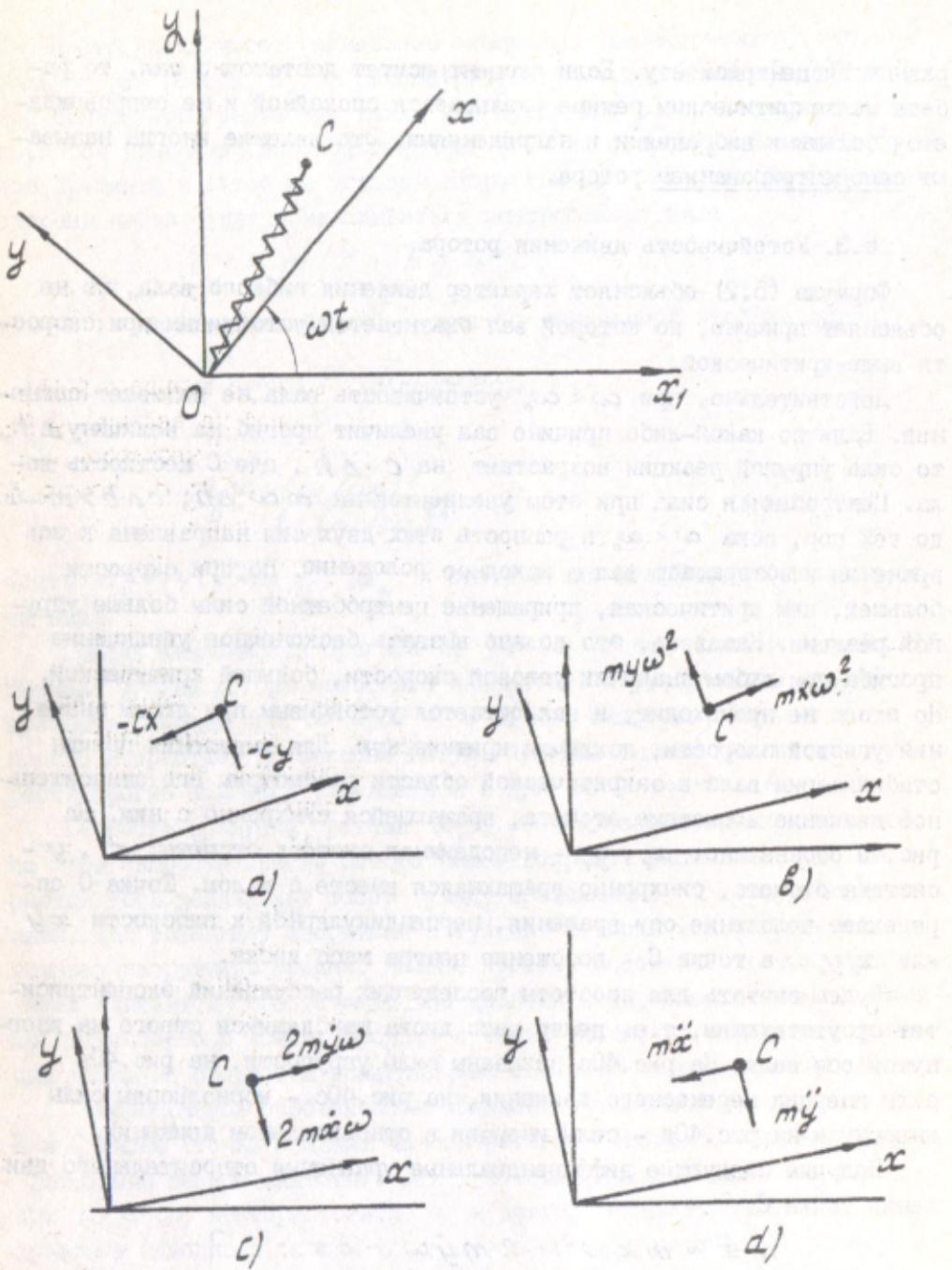


Рис. 40. Исследование устойчивости движения гибкого ротора

или

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} + (\omega_0^2 - \omega^2)x = 0; \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2)y = 0, \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

где $\omega_0 = \sqrt{1/\alpha_{11} m} = \sqrt{c/m}$ - значение критической скорости.

Решение системы (5.4) представим в виде

$$x = a e^{st}, \quad y = b e^{st}. \quad (5.5)$$

Подставив (5.5) в (5.4), получим систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных a и b :

$$\left. \begin{array}{l} a(s^2 + \omega_0^2 - \omega^2) - 2\omega s b = 0; \\ b(s^2 + \omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega s a = 0, \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

далее характеристическое уравнение и его корни:

$$\left[\begin{array}{cc} s^2 + \omega_0^2 - \omega^2 & -2\omega s \\ 2\omega s & s^2 + \omega_0^2 - \omega^2 \end{array} \right] = 0, \quad (5.7)$$

$$s_{1,2} = \pm i(\omega_0 - \omega), \quad s_{3,4} = \pm i(\omega_0 + \omega). \quad (5.9)$$

Таким образом, корни частотного уравнения чисто мнимые.

Это означает, что при любой скорости вращения, не равной критической, относительное движение вала будет представлять собой гармонические колебания с частотой $s = \omega_0 + \omega$ и $s = \omega_0 - \omega$ и постоянной амплитудой. Это доказывает, что при любой скорости вращения, не равной критической, движение будет устойчивым.

Чтобы пояснить влияние кориолисовой силы в данном случае, рассмотрим для сравнения относительное движение точечной массы m вдоль оси x , равномерно вращающейся с угловой скоростью вокруг вертикальной оси OI . Масса связана с осью пружиной жесткостью C , длина которой в свободном состоянии равна l (рис.4I).

Дифференциальное уравнение относительного движения, записанного в проекции на оси x , имеет следующий вид:

$$m \ddot{x} = \Phi_{kx} + P_x + N_x + \Phi_{ex} + R_x, \quad (5.10)$$

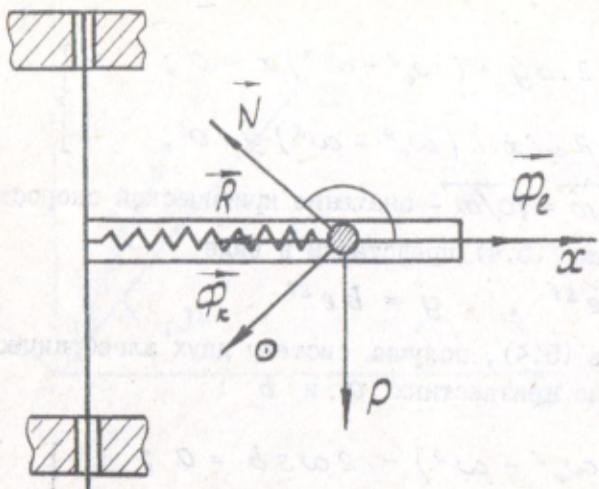


Рис.4I. Относительное движение колебательной системы
во вращающемся пространстве

где $\vec{\Phi}_e$, $\vec{\Phi}_k$ - силы инерции переносного движения и кориолисова;
 N - нормальная реакция трубы; R - сила реакции пружины;
 P - вес, причем $\Phi_{kx} = P_x = N_x = 0$, $\Phi_{ex} = mx\omega^2$,
 $R_x = -c(x - l_0)$.

Уравнение (5.I0) примет вид

$$m\ddot{x} = mx\omega^2 - c(x - l_0), \quad (5.II)$$

или $\ddot{x} + x(\omega_c^2 - \omega^2) = cl_0$.

Решение уравнения может быть представлено в виде суммы

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 - есть общее решение однородного; x_2 - частное решение неоднородного уравнения.

Решение x_1 существенно зависит от значения переносной угловой скорости. Отметим следующие два возможных случая:

I. $\omega < \omega_c$. Корни характеристического уравнения, полученного для дифференциального уравнения (5.II), чисто мнимые, решение x_1 имеет следующий вид

$$x_1 = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt, \quad (5.I2)$$

где $P = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}$.

Относительное движение является устойчивым и носит характер свободных незатухающих колебаний, происходящих не с частотой ω_0 , а с частотой ρ .

2. $\omega > \omega_0$. Корни характеристического уравнения действительные, один из них положительный:

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (5.13)$$

Следовательно, относительное движение неустойчиво.

Таким образом, исключив влияние кориолисовой силы инерции (в данном примере действие этой силы на массу m компенсируется нормальной реакцией трубы), мы существенно изменяем и характер движения, оно остается устойчивым только при $\omega < \omega_0$.

Напротив, движение одномассового ротора, лишенного такой дополнительной связи, устойчиво не только при $\omega < \omega_0$, но и при $\omega > \omega_0$, т.е. на всем диапазоне скоростей вращения, за исключением критической.

5.4. Влияние внешнего сопротивления на движение одномассового ротора при прямой синхронной прецессии

Будем называть внешним сопротивлением силы трения, возникающие в результате взаимодействия ротора с окружающей средой; внутренним — силы трения, возникающие в материале самого ротора. Характерной особенностью рассматриваемых систем является то, что внешнее и внутреннее сопротивления оказывают совершенно различное влияние на их устойчивость.

Рассмотрим установившееся движение одномассового ротора в режиме прямой синхронной прецессии (рис.42) в системе отсчета $x u z$, вращающейся синхронно с угловой скоростью ω (ось z совпадает с осью вращения; x, y, z — неподвижная система отсчета). Примем, что масса ротора целиком сосредоточена в середине пролета между опорами, причем центр масс имеет начальное радиальное смещение относительно неизогнутой оси вала на величину, равную \bar{e} .

Направим ось Y параллельно начальному эксцентриситету \bar{e} и запишем в соответствии с принципом Даламбера условия равновесия действующих сил:

$$\text{инерционных} \quad \bar{P}_A = m \bar{r} \omega^2, \quad \bar{P}_B = m \bar{e} \omega^2;$$

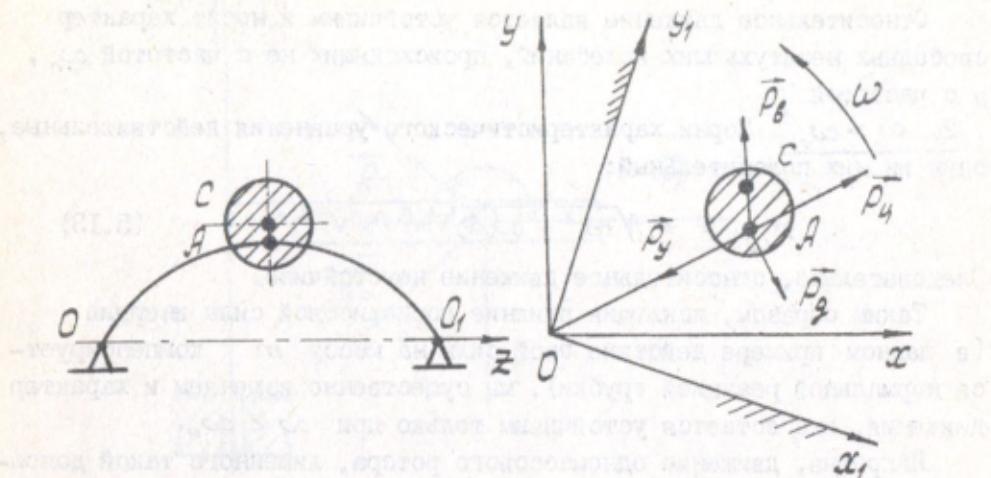


Рис.42. Влияние внешнего сопротивления на движение одномассового ротора

сил упругости и демпфирования

$$\bar{P}_y = -c\bar{r}, \quad \bar{P}_d = -\mu\bar{v},$$

где \bar{r} - прогиб вала; \bar{v} - скорость точки А.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\bar{P}_d + \bar{P}_x + \bar{P}_y + \bar{P}_z = 0 \quad (5.14)$$

или в проекциях на координатные оси

$$\left. \begin{aligned} m\bar{y}\omega^2 + m\bar{e}\omega^2 - c\bar{y} - \mu\bar{x}\omega &= 0; \\ m\bar{x}\omega^2 - c\bar{x} + m\bar{a}\bar{y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Решая систему (5.15), найдем после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \bar{y} &= e^{\frac{\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2\omega^2}{m^2}}}; \quad \bar{x} = \bar{y} \frac{\mu\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}; \\ \bar{r} &= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = e^{\frac{\bar{\omega}^2}{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{\mu^2}{m^2\omega_0^2} \cdot \bar{\omega}^2}}; \quad (5.16) \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\mu\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где $\omega_c = \sqrt{c/m}$ - значение критической скорости ротора, найденной без учета сил сопротивления; $\bar{\omega} = \omega/\omega_c$.

Полученные формулы полностью аналогичны формулам для определения амплитуды и фазы вынужденных колебаний, происходящих в одной плоскости при кинематическом возбуждении и сопротивлении, линейно связанном с абсолютной скоростью.

Аналогично сказывается влияние внешнего сопротивления: оно способствует уменьшению динамического прогиба на всех скоростях, близких к критическим; на критической скорости динамический прогиб, благодаря воздействию внешнего сопротивления, оказывается конечным.

Влияние внутреннего сопротивления совсем иного рода, т.е. при определенных условиях способствует возникновению неустойчивости.

5.5. Влияние внутреннего сопротивления на движение одномассового ротора

Введем для определения положения ротора комплексные векторы $\bar{OA} = \bar{Q}$ в подвижной системе отсчета $x-y$ и $\bar{OA} = \bar{r}$ - в неподвижной (рис.42). Связь между \bar{Q} и \bar{r} задается соотношением

$$\left. \begin{aligned} r &= Q e^{i\omega t}, & \dot{r} &= \dot{Q} e^{i\omega t} + i\omega Q e^{i\omega t}, \\ \ddot{r} &= \ddot{Q} e^{i\omega t} + i\omega \dot{Q} e^{i\omega t} + i\omega \dot{Q} e^{i\omega t} - \omega^2 Q e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Движение ротора с горизонтальным валом в неподвижной системе отсчета определяется дифференциальным уравнением

$$m\ddot{r} + \mu\dot{r} + cr = mg + m\omega^2 e^{i\omega t}. \quad (5.18)$$

Используя преобразования (5.17), найдем дифференциальное уравнение движения во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} m(\ddot{Q} + 2i\omega\dot{Q} - \omega^2 Q) + \mu(\dot{Q} + i\omega Q) + cQ &= \\ &= mge^{-i\omega t} + m\omega^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Введем в (5.19) силу внутреннего трения F . Примем, что эта сила является линейной функцией относительной скорости \dot{Q} , т.е.

$$F = -h \dot{Q}. \quad (5.20)$$

Тогда уравнение (5.19) примет вид

$$\begin{aligned} m(\ddot{Q} + 2i\omega\dot{Q} - \omega^2 Q) + \mu(\dot{Q} + i\omega Q) + cQ + h\dot{Q} &= \\ &= mge^{-i\omega t} + m\omega^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Перейдем с помощью (5.17) к неподвижной системе координат:

$$\ddot{r} + kr' + \delta(r - i\omega r) + \omega_0^2 r = g + \epsilon \omega^2 e^{i\omega t}, \quad (5.22)$$

где $\omega_0^2 = c/m$; $k = \mu/m$; $\delta = h/m$.

Общее решение (5.22) – сумма частного решения r_1 и общего решения r_2 соответствующего однородного уравнения. Уравнение (5.22) удовлетворяется частным решением вида

$$r_1 = R_\epsilon e^{i(\omega t - \varphi)} + R_g e^{i\psi}. \quad (5.23)$$

Подставляя (5.23) в (5.22), найдем для R_ϵ и R_g следующие выражения:

$$R_\epsilon = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2 \omega^2}}; \quad (5.24)$$

$$\varphi = \arctg(k\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)); \quad (5.25)$$

$$R_g = \frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^4 + \delta^2 \omega^2}}; \quad (5.26)$$

$$\psi = \arctg(\delta\omega / \omega_0^2). \quad (5.27)$$

Из (5.27) следует, что прогиб вращающегося вала под действием силы тяжести определенным образом зависит от скорости вращения: с увеличением скорости прогиб уменьшается. Направление вектора прогиба не совпадает с направлением силы тяжести: он развернут на угол ψ в направлении вращения. При бесконечно большой угловой скорости прогиб R_g стремится к нулю, а угол ψ возрастает на 90° .

Неуравновешенность диска (т.е. наличие эксцентриситета ϵ) вызывает прецессионное движение изогнутой оси вала в направлении вращения вала с угловой скоростью $c\omega$ (прямая синхронная прецессия); прогиб вала при установившемся движении равен R_ϵ , а вектор прогиба смещен относительно эксцентриситета в направлении, противоположном вращению, на угол φ .

Общее решение однородного уравнения (5.22) имеет вид

$$r_2 = Z_1 e^{i\lambda_1 t} + Z_2 e^{i\lambda_2 t}, \quad (5.28)$$

где Z_1 , Z_2 - постоянные интегрирования; λ_1 , λ_2 - корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - i\lambda(k + \delta) + \omega_0^2 + i\delta\omega = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}i(k + \delta) \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}(k + \delta)^2 - i\delta\omega}. \quad (5.29)$$

Собственная частота колебаний ротора, найденная с учетом сил внешнего и внутреннего сопротивлений $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}(k + \delta)^2$. Тогда для λ_1 и λ_2 получим следующие приближенные соотношения, справедливые при условии $\delta\omega \ll \omega_0^2$, $\omega_1 \approx \omega_0$:

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 + \frac{1}{2}i(k + \delta \pm \frac{\delta\omega_0}{\omega_0}). \quad (5.30)$$

Таким образом, решение (5.28) может быть представлено в виде

$$r_2 = Z_1 e^{[i\omega_0 t - 0.5(k + \delta - \delta\omega/\omega_0)]t} + Z_2 e^{[-i\omega_0 t - 0.5(k + \delta + \delta\omega/\omega_0)]t}. \quad (5.31)$$

Отсюда ясно, что условию устойчивости движения, при котором оба члена в правой части (5.31) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, соответствует неравенство

$$k + \delta - \frac{\delta\omega}{\omega_0} > 0, \quad (5.32)$$

которое выполняется при условии

$$\omega < \omega_0 \left(1 + \frac{k}{\delta}\right). \quad (5.33)$$

В случае невыполнения неравенства (5.33) движение будет неустойчивым.

При условии $\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{k}{\delta}\right)$ имеем

$$r_2 = Z_1 e^{i\omega_0 t} + Z_2 e^{-[(k + \delta) + i\omega_0]t}. \quad (5.34)$$

Через бесконечно большой промежуток времени получим установившиеся колебания с постоянной амплитудой:

$$r = Z_1 e^{i\omega_0 t} + R_\epsilon e^{i(\omega t - \varphi)} + R_\theta e^{i\psi}. \quad (5.35)$$

Итак, в общем случае движение диска состоит из происходящих вокруг постоянного прогиба прецессионного движения с угловой скоростью ω , вызванного неуравновешенностью (прямая синхронная прецессия), и несинхронной прецессии с угловой скоростью ω_0 . Когда выполняется условие (5.33), амплитуда несинхронной прецессии, имеющей скорость ω_0 , будет монотонно уменьшаться с течением времени (движение устойчиво). В противном случае движение оказывается неустойчивым. Отсюда следует важное заключение. На ротор, работающий выше критической скорости $\omega > \omega_0$, внутреннее трение оказывает дестабилизирующее воздействие. При превышении некоторого значения угловой скорости амплитуда составляющей прецессионного движения с угловой скоростью ω_0 начинает расти по экспоненциальному закону. Значение угловой скорости вращения, при которой начинается неустойчивость, уменьшается с увеличением внутреннего трения; напротив, увеличение внешнего трения способствует расширению зоны устойчивости.

5.6. Определение критических скоростей без учета влияния инерции поворота элементов ротора

Рассмотрим ротор, состоящий из невесомого вала с закрепленными на нем n точечными массами, т.е. телами, обладающими массой, но моментами инерции которых можно пренебречь (рис.43). Будем считать начальные эксцентриситеты и влияние силы тяжести отсутствующими.

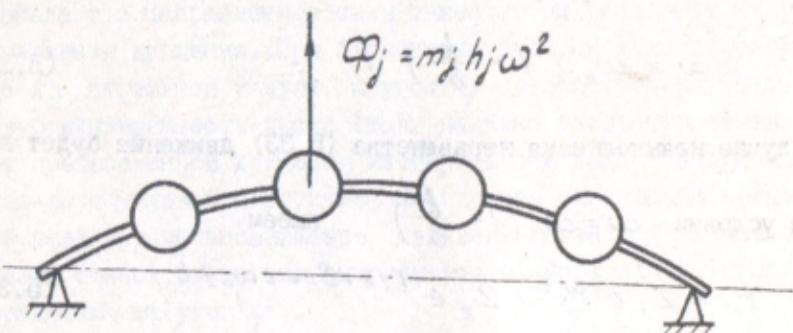


Рис.43. К расчету критической скорости многомассового ротора

Если изогнутая ось ротора совершает прецессионное движение с угловой скоростью Ω , то прогиб в i -й точке

$$h_i = \sum_{j=1}^n \Phi_j \alpha_{ij} ; \quad i, j = 1 \dots n , \quad (5.36)$$

где $\Phi_j = m_j h_j \Omega^2$ - значение центробежной силы инерции, возникающей в результате прецессии и приложенной к валу в месте крепления j -й массы; α_{ij} - коэффициенты влияния.

Полученные уравнения ничем не отличаются от уравнений, описывающих свободные колебания системы с n степенями свободы. Поэтому основные свойства свободных колебаний системы с двумя или более степенями свободы полностью переносятся и на рассматриваемый ротор:

а) значения критических скоростей данного ротора в точности совпадают со значениями собственных частот его свободных колебаний. Число собственных частот (или критических скоростей) равно n - числу степеней свободы ротора;

б) формы динамического прогиба ротора при угловых скоростях прецессионного движения, равных одной из критических, и формы собственных колебаний при соответствующих собственных частотах одинаковы и подчиняются условиям ортогональности.

Таким образом, задача по определению критических скоростей и форм динамического прогиба ротора, состоящего из невесомого упругого вала с закрепленными на нем n - точечными массами, независимо от собственного вращения, сводится к нахождению частот и форм свободных колебаний такой же балки. Собственное вращение не оказывает в этом случае никакого влияния на значения критических скоростей и форму динамического прогиба.

5.7. Влияние инерции поворота элементов ротора на величину критической скорости

Влияние инерции вращения тела на свободные колебания балочных систем рассматривалось в разд. 4.14.

При плоских поперечных колебаниях балки с закрепленным на ней диском последний не только смещается, но и поворачивается вокруг оси, перпендикулярной плоскости колебаний, в результате возникает момент инерции: $M_{\text{ин}} = \theta_3 \dot{\varphi}$, где θ_3 - экваториальный момент инерции; φ - угол поворота касательной к оси вала в месте закрепления диска.

Чтобы учесть действие моментов $M_{\text{ин}}$ пришлось вдвое увеличить число рассматриваемых обобщенных координат, включая сюда не только смещения, но и повороты дисков; соответственно увеличилось и число степеней свободы.

Моменты инерционных сил элементов ротора оказывают существенное влияние и на динамику вращающихся валов, хотя вследствие определенных различий в характере движений это влияние будет другим, чем при плоских свободных колебаниях. В частности, эти моменты могут и уменьшать, и увеличивать значения критических скоростей; все зависит от того, совпадают или нет направления угловых скоростей прецессии и собственного вращения. Особенности этих процессов разберем на примере вала с одним диском.

5.7.1. Определение критической скорости вала с одним диском

В качестве примера рассмотрим ротор, состоящий из вала с закрепленным на нем диском (рис. 24, 44). Значение критической скорости найдем из условий равновесия инерционных сил, приложенных ко всем точкам диска, и упругих восстанавливающих сил и моментов.

Будем считать, что плоскость, содержащая изогнутую ось вала, совершает прецессионное движение с угловой скоростью Ω . Это движение по отношению к диску будем рассматривать как переносное движение; относительным будем считать вращение диска вокруг собственной оси симметрии с угловой скоростью ω_r . Угловая скорость, назовем ее относительной угловой скоростью вращения, измеряется относительно системы отсчета, вращающейся вокруг оси OO' , со скоростью прецессии Ω , причем вектор $\bar{\omega}_r$ направлен по касательной к оси вала. Диск будем считать однородным, сплошным и тонким, а эксцентриситет — отсутствующим.

Выделим элемент диска массой dm и рассмотрим инерционные силы, возникающие на этом элементе:

$$d\bar{\Phi} = d\bar{\Phi}_r + d\bar{\Phi}_e + d\bar{\Phi}_k, \quad (5.37)$$

где индексами "r", "e" и "k" отметим силы инерции относительного, переносного движения и кориолисову силу.

Силы $d\bar{\Phi}_r = \omega_r^2 dm \cdot \bar{r}$ расположены в плоскости диска и направлены по соответствующим радиусам; ясно, что равнодействующая этих сил и их момент равны нулю, т.е. вал они никак не нагружают.

Силы $d\bar{\Phi}_e$ направлены радиально по отношению к оси OO' и рас-

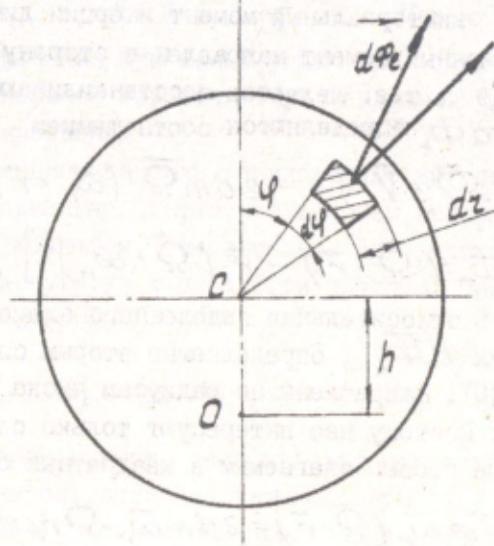
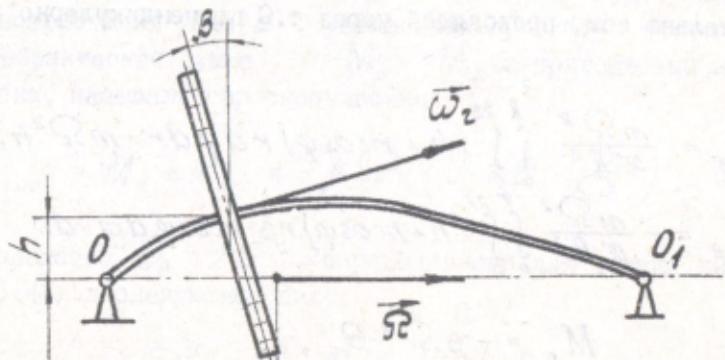


Рис.44. К определению критической скорости вала с одним диском

положены симметрично относительно плоскости xy , содержащей ось вала; интерес представляют только проекции этих сил на указанную плоскость:

$$d\Phi_e' = dm \Omega^2 (h + r \cos \varphi).$$

Направления векторов $d\vec{\Phi}_e$, $d\vec{\Phi}_r$ показаны на рис.44.

Вычислим значения главного вектора и главного момента этих сил относительно оси, проходящей через т.С перпендикулярно к плоскости xy :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_e &= \frac{m \Omega^2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (h + r \cos \varphi) r d\varphi dr = m \Omega^2 h; \\ M_e &= - \frac{m \Omega^2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (h + r \cos \varphi) r \beta \cdot r \cos \varphi d\varphi dr \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

или

$$M_e = -\beta \Omega^2 \Theta_3, \quad (5.39)$$

где $\Theta_3 = \frac{m R^2}{4}$ — экваториальный момент инерции диска, знак “-” означает, что инерционный момент направлен в сторону, противоположную углу поворота β , т.е. является восстанавливающим моментом.

Наконец, силы $d\vec{\Phi}_k$ определяются соотношением

$$\begin{aligned} d\vec{\Phi}_k &= -dm(2\vec{\Omega} \times \vec{V}_r) = -2dm\vec{\Omega} \times (\vec{\omega}_r \times \vec{r}) = \\ &= -2dm[\vec{\omega}_r(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}_r)], \end{aligned} \quad (5.40)$$

где \vec{V}_r — скорость относительная выделенного элемента.

Составляющие сил $d\vec{\Phi}_k''$, определяемые вторым слагаемым в квадратных скобках (5.40), направлены по радиусам диска и образуют уравновешенную систему. Поэтому нас интересуют только составляющие сил $d\vec{\Phi}_k'$, определяемые первым слагаемым в квадратных скобках:

$$d\Phi_k' = -2dm\vec{\omega}_r(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) = 2dm\vec{\omega}_r \cdot \Omega r \cos \varphi \beta. \quad (5.41)$$

В верхней половине диска $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ эти силы направлены в ту же сторону, что и вектор $\vec{\omega}_r$, в нижней — в противоположную. Их главный вектор равен нулю, главный момент относительно оси, проходящей через т.С перпендикулярно плоскости xy , определяется из соотношения

$$M_k = -2\omega_r \Omega \frac{m}{\pi R^2} \beta \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos^2 \varphi dr d\varphi = -\omega_r \Omega \Theta_p \cdot \beta, \quad (5.42)$$

где $\Theta_p = 0,5 m R^2$ – полярный момент инерции диска.

Оба момента M_e и M_k при выбранном направлении угловых скоростей Ω и $\bar{\omega}_r$ действуют в сторону, противоположную углу поворота диска β , являясь восстанавливающими. При изменении направлений одного из векторов Ω или $\bar{\omega}_r$ момент M_k будет направлен в сторону возрастания угла β , увеличивая прогиб. Момент, равный алгебраической сумме M_e и M_k и приложенный к валу со стороны диска, называют гироскопическим:

$$M_{\text{гир}} = M_e + M_k = -\beta \Omega^2 (\Theta_g \pm \Theta_p \frac{|\omega_r|}{\Omega}) \cdot \beta. \quad (5.43)$$

С учетом равенства $\Theta_p = 2\Theta_g$, справедливого для тонких дисков, приведем (5.43) к следующему виду:

$$M_{\text{гир}} = -\beta \Omega^2 (-\Theta_g + \Theta_p \pm \frac{|\omega_r|}{\Omega} \Theta_p). \quad (5.44)$$

Полученное выражение при малых углах β совпадает с формулой (5.3) для гироскопического момента [I], найденной из анализа сферического движения гироскопа.

Итак, инерционные силы, приложенные ко всем частицам диска, заменим одной радиальной (относительно оси вращения) силой Φ_e и гироскопическим моментом, относительно оси, проходящей через центр диска, перпендикулярно к плоскости прогиба. Введем некоторый приведенный момент инерции

$$\Theta_o = \Theta_p - \Theta_g \pm \frac{|\omega_r|}{\Omega} \Theta_p, \quad (5.45)$$

где знак (+) принимается, если угловая скорость прецессии и относительная угловая скорость собственного вращения направлены в одну сторону, знак (-), если они направлены в разные стороны.

Запишем уравнения для определения смещения и угла поворота диска консольного ротора (рис.24):

$$\left. \begin{aligned} h(1 - m \Omega^2 \alpha_{11}) - \alpha_{12} \beta \Omega^2 \Theta_o &= 0; \\ -h \Omega^2 m \alpha_{12} + \beta [1 + \alpha_{22} \Omega^2 \Theta_o] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Частотное уравнение для нахождения критической скорости прецессии найдем, приравнивая нулю определитель системы (5.45):

$$(1 - m \Omega^2 \alpha_{11}) (1 + \alpha_{22} \Omega^2 \theta_0) - \alpha_{12}^2 \Omega^4 m \theta_0 = 0. \quad (5.46)$$

Для консольного ротора коэффициенты податливостей

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{3EI}, \quad \alpha_{12} = \frac{l^2}{2EI} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha_{11}}{l}; \quad \alpha_{22} = \frac{l}{EI} = 3 \frac{\alpha_{11}}{l^2}.$$

Тогда частотное уравнение (5.46), записанное в безразмерных коэффициентах, примет вид

$$(1 - \bar{\Omega}^2) \left[1 + 3 \bar{\Omega}^2 \bar{\Omega}^2 \left(0,5 + \frac{\bar{\omega}_r}{\bar{\Omega}} \right) \right] - \bar{\Omega}^4 \cdot \frac{9}{4} \bar{\Omega}^2 \left(0,5 + \frac{\bar{\omega}_r}{\bar{\Omega}} \right) = 0, \quad (5.47)$$

$$\text{где } \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \bar{\Omega} = \Omega/l; \quad \bar{\omega}_r = \omega_r/\omega_0; \quad \omega_0^2 = \frac{l}{m \alpha_{11}},$$

Ω — радиус инерции диска; l — длина вала.

Корни полученного уравнения, определяющие критические скорости Ω_{kp} , существенно зависят от величины и направления относительной угловой скорости собственного вращения.

Рассмотрим следующие частные случаи:

I. $\omega_r = \infty$, ω_r и Ω направлены одинаково. Гирокопический момент, бесконечно большой, который к тому же направлен как восстановливающий, т.е. препятствует повороту диска. Диск смещается только в радиальном направлении, не поворачиваясь, действуя на вал как абсолютно жесткая скользящая заделка. Из (5.46), (5.47) получим

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2}}.$$

Для консольного вала

$$\alpha_{22} / (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2) = \frac{12EI}{l^3}.$$

Последнее выражение соответствует жесткости вала, один конец которого заделан абсолютно жестко, а другой — исключает возможность поворота заделанного сечения. Критическая скорость в этом случае

$$\Omega_{kp} = \sqrt{12EI/m l^3}.$$

2. $\omega = 0$. Абсолютная угловая скорость собственного вращения диска равна нулю. Относительная угловая скорость $\omega_r = -\Omega$, $\Theta_0 = -\Theta_g$.

Уравнение (5.45) не отличается от уравнений (3.28), полученных для аналогичной системы, совершающей плоские колебания.

3. $\omega = \Omega$. Случай прямой синхронной прецессии, когда абсолютная угловая скорость диска равна скорости прецессии, диск не вращается относительно плоскости изгиба вала, относительная угловая скорость диска равна нулю: $\omega_r = 0 = 0$, $\Theta_0 = \Theta_p - \Theta_g$.

4. $\omega = -\Omega$, $\omega_r = -2\Omega$. Случай обратной прецессии, когда абсолютная угловая скорость диска равна по модулю угловой скорости прецессии и направлена в обратную сторону.

5. $\omega_r / \Omega = -\frac{1}{2}$. Гироскопический момент обращается в нуль ($\Theta_0 = 0$), т.е. имеем систему с одной степенью свободы, $\Omega_{kp} = \omega_c$.

При прямой прецессии гироскопический момент действует как восстанавливающий: он несколько увеличивает жесткость системы и повышает ее критическую скорость. При обратной прецессии действие гироскопического момента будет противоположным. Это видно из графиков зависимостей корней частотного уравнения (5.47) от частоты вращения диска ω_r (рис.45).

5.7.2. Определение критических скоростей вала со многими дисками с учетом гироскопических моментов

Пусть имеем вал, на котором закреплены n дисков. Прогибы h_i и углы поворота φ_i каждого из дисков определяются от совместного действия сил Φ и гироскопических моментов M_{grp} , определяемых в соответствии с (5.38) и (5.39). Пользуясь методом сил, запишем систему из $2n$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \Phi_k + \sum_{k=1}^n \alpha'_{ik} \cdot M_k ; \\ \varphi_i &= \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \Phi_k + \sum_{k=1}^n \beta'_{ik} \cdot M_k , \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

где α_{ik} , α'_{ik} , β_{ik} , β'_{ik} – коэффициенты влияния.

Приравняв нулю определитель этой системы, получим частотное уравнение, вещественные корни которого определяют соответствующие значения критических скоростей.

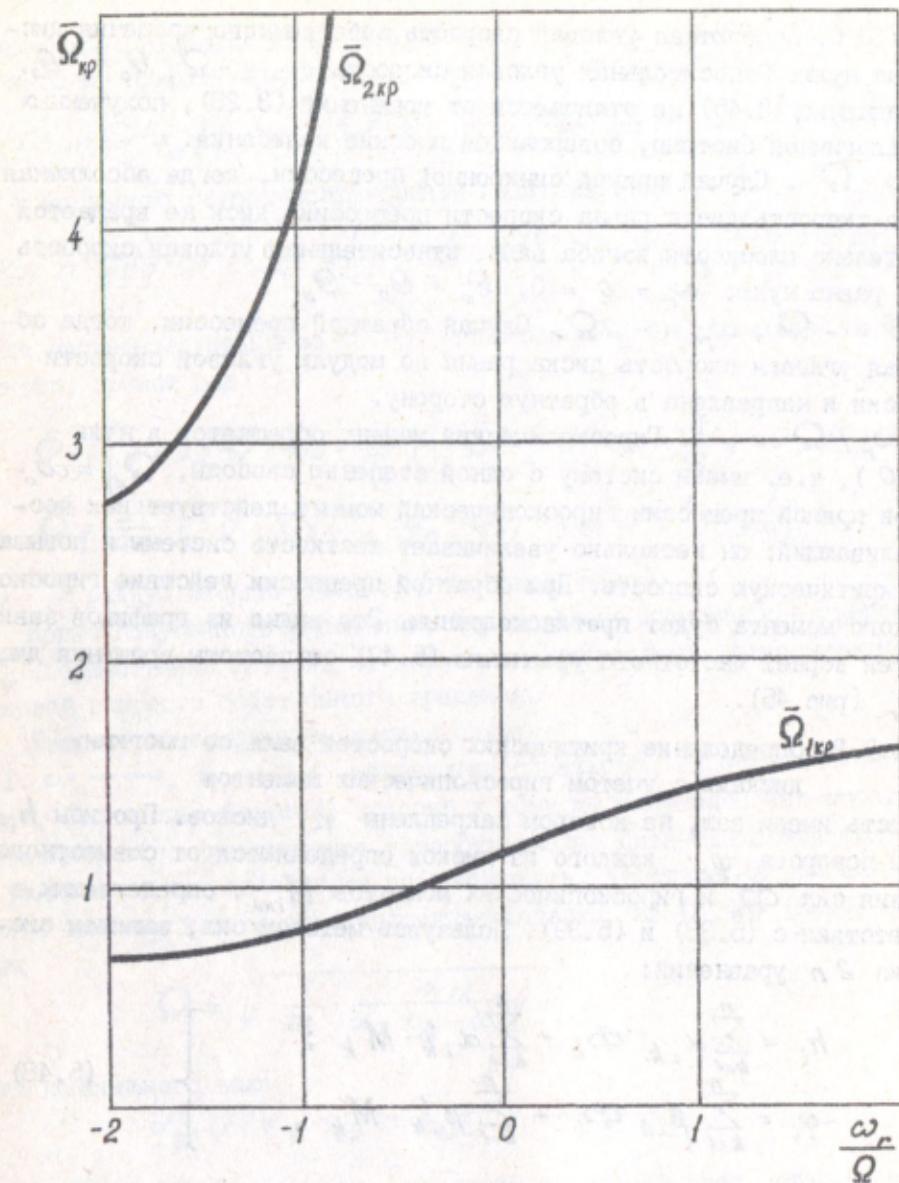


Рис.45. Зависимость критической скорости прецессии ротора от частоты вращения диска

5.8. Балансировка роторов

Роторы различных машин чаще всего обладают упругой и инерционной круговой симметрией. Но вследствие неизбежных погрешностей изготовления (эти погрешности лимитируются целой системой допусков и технических условий) центры масс элементов ротора несколько смещаются от оси вращения. В рабочих условиях это приводит к появлению неуравновешенных центробежных сил:

$$d\bar{P}(z) = m(z) \bar{\epsilon}(z) \omega^2 dz,$$

$$\bar{P}_k = m_k \bar{r}_k \omega^2,$$

где z – координата, измеряемая вдоль оси; $m(z)$ – погонная масса ротора; $\bar{\epsilon}(z)$ – смещение центра масс выделенного элемента – эксцентриситет; m_k , \bar{r}_k – сосредоточенная (точечная) масса и радиус-вектор, определяющий ее положение относительно оси вращения.

Если $\bar{u}(z) = m(z) \cdot \bar{\epsilon}(z)$, $\bar{U}_k = m_k \bar{r}_k$, то $\bar{u}(z) dz$, U_k характеризуют дисбалансы выделенного элемента ротора и точечной массы. Тогда

$$d\bar{P}(z) = \omega^2 \bar{u}(z) dz, \quad \bar{P}_k = \omega^2 \bar{U}_k.$$

Эти силы изгибают ось ротора, нагружают опоры, вызывают вредные вибрации изделия. Балансировка – это технологический процесс, цель которого – максимально снизить вредное влияние дисбалансов. Процесс балансировки заключается в том, что на роторе устанавливаются корректирующие массы, компенсирующие вредное воздействие дисбаланса (иногда вместо установки дополнительных грузов прибегают к съему материала в так называемых "тяжелых местах").

В настоящее время способ балансировки принято выбирать в зависимости от того, относится ротор к категории "жестких" или "гибких".

5.8.1. Уравновешивание жестких роторов

К жестким роторам относятся такие, рабочие обороты которых достаточно низки, и их динамическим прогибом можно пренебречь, т.е. применяется известное в механике определение твердого тела. Рассмотрим условие уравновешенности для этого случая (рис.46).

При вращении ротора с угловой скоростью ω возникают названные центробежные силы. Запишем условия, при которых динамические реакции будут равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \bar{u}(z) dz + \sum_{k=1}^m \bar{U}_k &= 0; \\ \int_0^l \bar{u}(z)(z-z_c) dz + \sum_{k=1}^m \bar{U}_k (z_k - z_c) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

где z_c - координата центра масс ротора.

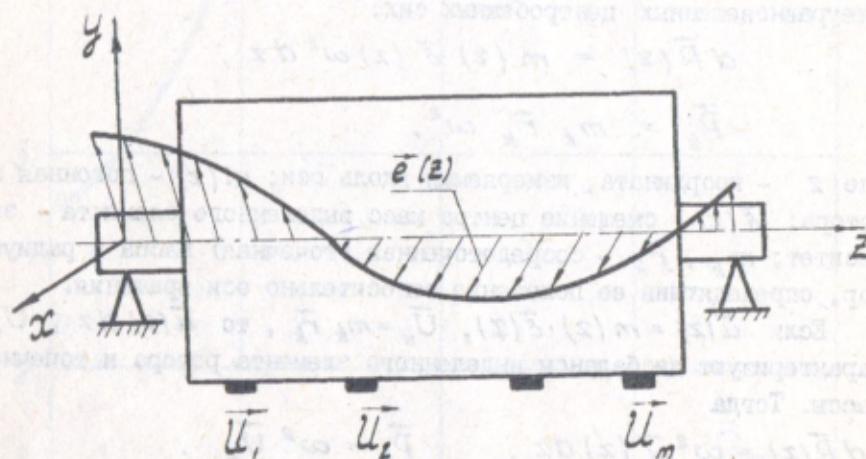


Рис.46. Модель неуравновешенного ротора

Величина, равная главному вектору всех имеющихся дисбалансов, называется статическим дисбалансом ротора;

величина, равная главному моменту всех имеющихся дисбалансов относительно центра масс ротора, называется моментным дисбалансом

\bar{V}_o , т.е.

$$\bar{U}_o = \int_0^l \bar{u}(z) dz + \sum_{k=1}^m \bar{U}_k; \quad \bar{V}_o = \int_0^l \bar{u}(z)/(z-z_c) dz + \sum_{k=1}^m \bar{U}_k (z_k - z_c). \quad (5.50)$$

Уравнения (5.49) представляют собой условия уравновешенности жесткого ротора. Как видим, они выражают условия равенства нулю статического и моментного дисбалансов. Из полученных результатов следует:

- а) уравновешенность ротора может быть достигнута внесением двух уравновешивающих грузов в двух различных плоскостях коррекции (по числу уравнений входящих в систему (5.49);

- б) уравновешенность, достигнутая на какой-либо одной скорости, не нарушается на других скоростях;
- в) произвольно распределенный дисбаланс можно эквивалентно заменить двумя векторными величинами: статическим \bar{U}_c и моментным \bar{V}_c дисбалансами. Цель балансировки жесткого ротора заключается в том, чтобы подобрать и закрепить на роторе корректирующие массы, отвечающие условиям равенства нулю суммарного статического и моментного дисбалансов, создаваемых корректирующими массами и начальным дисбалансом.

Статическая балансировка. Для некоторых типов роторов, как показывает опыт, достаточно выполнения только условия равенства нулю суммарного статического дисбаланса. Балансировка ротора, в ходе которой достигается выполнение условия равенства нулю статического дисбаланса, называется статической балансировкой. Для выполнения статической балансировки достаточно установить на роторе только одну корректирующую массу (или снять соответствующее количество материала). Обычно статическая балансировка применяется для роторов дискообразной формы, у которых отношение длины к диаметру меньше 0,2 (часовых балансов, дисков сцепления, дисков турбин, плоских шлифовальных кругов, колес цепных передач, крыльчаток вентиляторов, колес автомобилей, шин, зубчатых колес быстроходных передач и др.).

В большинстве устройств для статической балансировки используется свойство центра масс ротора занимать при устойчивом равновесии наимизшее положение. Примером таких устройств являются параллельные горизонтальные ножи или призмы (рис.47). Ротор I, например, шпиндель шлифовального станка, своими цапфами 2 устанавливается на две горизонтальные стальные призмы. Под действием сил веса ротор начинает перекатываться по призмам до тех пор, пока центр масс ротора не займет наимизшее положение. Так определяется положение "тяжелого" места ротора. Закрепляя в противоположном, т.е. "легком", месте корректирующую массу, подбирают ее значение таким образом, чтобы ротор оставался в положении безразличного равновесия. После этого балансировка считается законченной.

Чувствительность балансировочного устройства характеризуется минимальным значением эксцентрикитета центра масс ротора ΔE , которое может быть обнаружено в процессе балансировки. Чем меньше значение ΔE , тем выше чувствительность балансировочного устройства и наоборот.

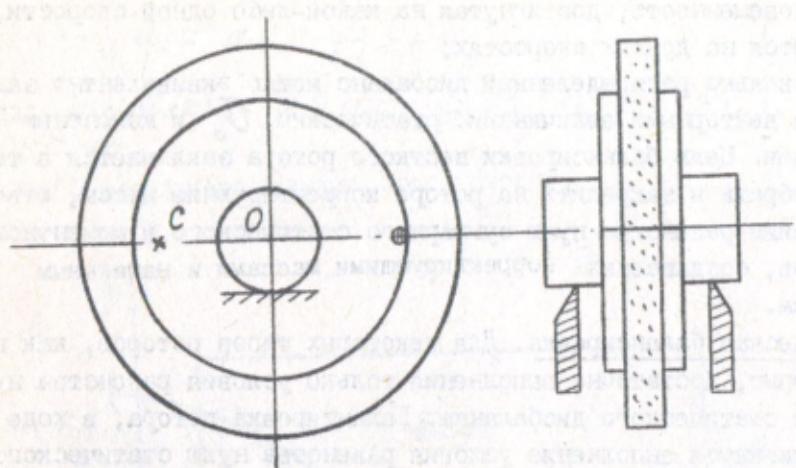


Рис. 47. Схема статической балансировки на ножах

На горизонтальных призмах чувствительность определяется величиной

$$\Delta \delta = k,$$

где k – коэффициент трения качения.

Таким образом, чем ниже коэффициент трения качения, тем выше чувствительность. Для снижения коэффициента трения призмы выполняют из хорошо закаленной стали, а поверхность качения подвергают тщательной механической обработке. На практике чувствительность данного рода устройств определяется величиной $\Delta \delta = 10 - 15 \text{ мкм}$.

Динамическая балансировка. Для роторов значительной протяженности ($l / d > 0,2$) статической балансировки недостаточно. Действительно, представим себе идеально сбалансированный ротор длиной l . Установим на роторе в сечениях А и В две одинаковые точечные массы (рис. 48). Статическая уравновешенность в этом случае сохраняется, но возникающие при вращении центробежные силы создают пару сил, которая нагружает опоры ротора. Неуравновешенность такого рода обнаруживает себя только при вращении и не может быть устранена в процессе статической балансировки "на ножах".

Балансировка жесткого ротора, в ходе которой достигается выполнение условий равенства нулю статического и динамического дисбалансов, называется динамической балансировкой.

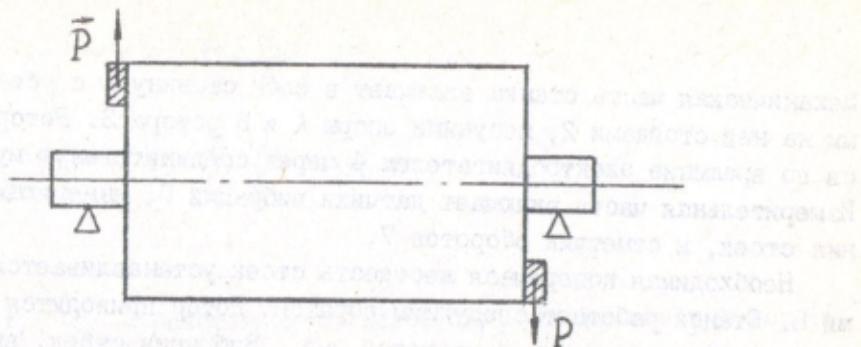


Рис.48. Модель ротора с моментным дисбалансом

Динамическая балансировка производится с помощью корректирующих масс, установленных в двух различных плоскостях коррекции ротора. Произвольно распределенный дисбаланс жесткого ротора можно эквивалентно заменить сосредоточенными дисбалансами U_{10} , U_{20} , что определяет основной принцип устройства станков для динамической балансировки.

Схематически устройство современного балансировочного станка показано на рис.49.

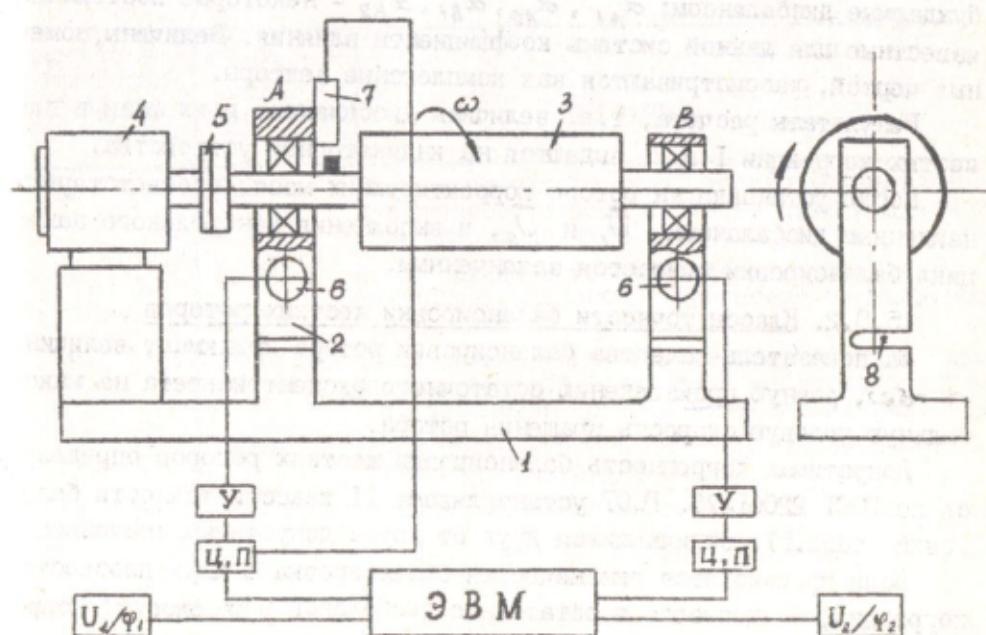


Рис. 49. Балансировочный станок (схема)

Механическая часть станка включает в себя станину I с установленными на ней стойками 2, несущими опоры А и В ротора 3. Ротор приводится во вращение электродвигателем 4 через соединительную муфту 5. Измерительная часть включает датчики вибраций 6, измеряющие колебания стоек, и отметчик оборотов 7.

Необходимая поперечная жесткость стоек устанавливается прорезями 8. Станок работает следующим образом. Ротор приводится во вращение с некоторой заданной частотой ω . Вибрации стоек, вызываемые дисбалансом, регистрируются датчиками 6. Полученные сигналы усиливаются в усилителях У, проходят через цифровые преобразователи ЦП и поступают на вход счетно-решающего устройства ЭВМ, выполняющего решение уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 \alpha_{A1} + \bar{U}_2 \alpha_{A2} &= \bar{R}_A ; \\ \bar{U}_1 \alpha_{B1} + \bar{U}_2 \alpha_{B2} &= \bar{R}_B , \end{aligned} \right\}$$

где \bar{U}_1 и \bar{U}_2 - искомые дисбалансы в плоскостях коррекции I, 2; \bar{R}_A и \bar{R}_B - измеряемые вибродатчиками вибрации опор А и В, возбуждаемые дисбалансом; $\alpha_{A1}, \alpha_{A2}, \alpha_{B1}, \alpha_{B2}$ - некоторые постоянные, известные для данной системы коэффициенты влияния. Величины, помеченные чертой, рассматриваются как комплексные векторы.

Результаты расчета, т.е. величины дисбалансов и их фазы в плоскостях коррекции I и 2, выдаются на индикаторные устройства.

После установки на роторе корректирующих масс, соответствующих найденным дисбалансам \bar{U}_1 и \bar{U}_2 , и выполнения контрольного замера цикл балансировки считается законченным.

5.8.2. Классы точности балансировки жестких роторов

За показатель качества балансировки ротора принимают величину $U = \varepsilon \omega$, равную произведению остаточного эксцентрикитета на максимальную угловую скорость вращения ротора.

Допустимая погрешность балансировки жестких роторов определяется по ГОСТ 22061-76. ГОСТ устанавливает II класс точности балансировки (табл. 5), отличавшихся друг от друга допустимым значением U .

Если производится динамическая балансировка в двух плоскостях коррекции, то допустимые остаточные дисбалансы в плоскостях коррекции А и З вычисляются по формулам:

$$U_A^{(доп)} = \frac{l_2 - l_c}{l_2 - l_1} m_p \cdot \delta ;$$

$$U_B^{(доп)} = \frac{l_c - l_1}{l_2 - l_1} m_p \cdot \delta ,$$

где l_1, l_2, l_c - расстояния от левой опоры до плоскостей коррекции и центра масс ротора.

Пример. Ротор электродвигателя массой 100 кг имеет рабочую частоту вращения $n = 3000$ об/мин ($\omega = 300$ с⁻¹). Размеры ротора:

$l_1 = 100$ мм, $l_2 = 900$ мм, $l_c = 500$ мм. Определим допустимые значения остаточных дисбалансов в плоскостях коррекции. По табл.5 устанавливаем класс точности балансировки и допустимое значение U . В данном случае класс точности 4; $U = \delta \omega = 6,3$ мм/с, $\delta = 6,3/300 = 2,1 \cdot 10^{-2}$ мм. Находим

$$U_A^{(доп)} = U_B^{(доп)} = 0,5 m_p \delta = 1000 \text{ г} \cdot \text{мм} .$$

Таблица 5

Класс точности балансировки по ГОСТ 22061-76	U , мм/с (не более)	Тип роторов
II	400	Узел коленчатого вала жестко установленного низкооборотного судового дизеля с нечетным числом цилиндров
10	1600	Узел коленчатого вала жестко установленного двухтактного двигателя большой мощности
9	640	Узел коленчатого вала четырехтактного двигателя большой мощности или судового дизеля, установленного на виброзоляторах
8	250	Узел коленчатого вала высокогооборотного четырехцилиндрового дизеля
7	100	Узел коленчатого вала высокогооборотного дизеля с шестью и более цилиндрами. Двигатели в сборе для легковых и грузовых автомобилей и локомотивов
6	40	Колеса легковых автомобилей. Ободы колес. Бандажи. Приводные валы. Тормозные барабаны

Продолжение табл.5

Класс точности балансировки по ГОСТ 22062-76	v , мм/с (не более)	Тип роторов
5	16	автомобиля. Колесные пары. Узел коленчатого вала, установленного на виброзоляторах четырехтактного двигателя или двигателя для автомобиля или локомотива Приводные валы (судовых винтов, коленчатые валы). Части сельскохозяйственных машин, отдельные части двигателей для автомобилей и локомотивов. Узел коленчатого вала двигателя с шестью и более цилиндрами
4	6,3	Части технологического оборудования. Барабаны центрифуг. Вентиляторы. Роторы авиационных ГТД в сборе. Маховики. Крыльчатки центробежных насосов. Роторы электродвигателей
3	2,5	Турбины. Турбогенераторы с жесткими роторами. Трубокомпрессоры. Приводы металлообрабатывающих станков. Роторы небольших, средних и крупных электродвигателей. Турбонасосы.
3	1,0	Приводы магнитофонов и проигрывателей. Приводы шлифовальных станков. Роторы небольших электродвигателей специального назначения
I	0,4	Шпинделы, шлифовальные круги и роторы электродвигателей прецизионных шлифовальных станков. Роторы гироскопов

5.8.3. Балансировка гибких роторов

В машиностроении находят широкое применение так называемые гибкие роторы, для которых выполнение условий уравновешенности (5.49) уже не обеспечивает спокойной работы при минимальном уровне вибраций. Сущность проблем, относящихся к этому случаю, легко усмотреть на простейшем примере одномассового ротора (рис.50). Центр диска имеет радиальное смещение (эксцентрикитет) δ относительно осевой линии вала. Соответствующий этому эксцентрикитету дисбаланс

$\bar{U} = m\bar{\epsilon}$ скомпенсирован двумя симметрично расположеннымми корректирующими массами, создающими дисбалансы $\bar{U}' = \bar{U}'' = -\frac{1}{2}m\bar{\epsilon}$.

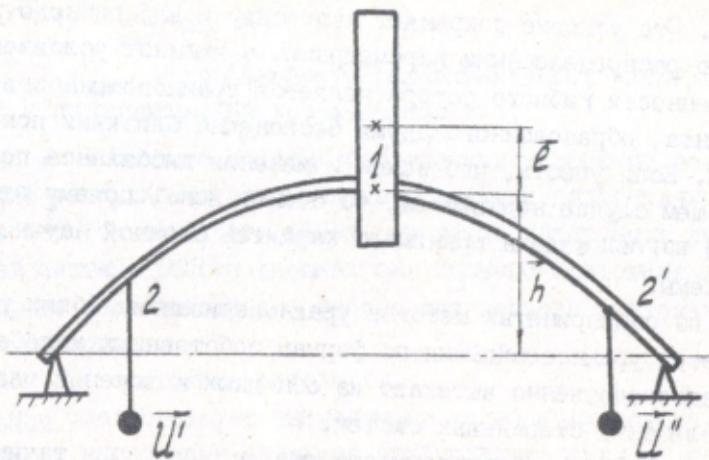


Рис.50. Движение одномассового гибкого ротора с корректирующими массами

Таким образом, значения \bar{U}' и \bar{U}'' отвечают условиям (5.49) уравновешенности жесткого ротора, однако не исключается возможность прогиба ротора, значение которого в месте крепления диска определяется уравнением

$$h = \frac{m \omega^2 (\alpha_{11} - \alpha_{12})}{1 - (\omega/\omega_0)}, \quad (5.51)$$

где $\omega_0 = \sqrt{1/m\alpha_{11}}$ – значение критической скорости; α_{11} и α_{12} – статические коэффициенты податливости.

Как следует из (5.51), установка уравновешивающих грузов \bar{U}' и \bar{U}'' отнюдь не исключает прогиба вала, который неограниченно возрастает по мере приближения угловой скорости вращения к критической.

Значит, выполнения условий (5.49) недостаточно для уравновешивания гибкого вала, способного деформироваться в процессе работы, он будет уравновешен только при том дополнительном условии, что $\alpha_{11} = \alpha_{12}$. Это означает, что для гибкого ротора корректирующие массы должны устанавливаться именно в той плоскости, где сосредоточен

^{*)} Здесь и в дальнейшем предполагается, что корректирующие массы ничтожно малы по сравнению с массой ротора, так что их влиянием на частоту и форму собственных колебаний пренебрегаем.

дисбаланс. Это условие сохраняет свою силу и для гибкого ротора с непрерывно распределенными параметрами, а именно: условием полной уравновешенности гибкого ротора является уравновешенность каждого его элемента, образованного двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Если учсть, что закон изменения дисбаланса по длине ротора в общем случае неизвестен, то станет ясно, почему эта простая на первый взгляд задача принимает характер сложной научно-технической проблемы.

Один из общепринятых методов уравновешивания гибких роторов является метод уравновешивания по формам собственных колебаний. Идея метода непосредственно вытекает из основных положений теории вынужденных колебаний стержневых систем.

Введем неподвижную систему отсчета x_1, y_1, z_1 , таким образом, чтобы ось z_1 была направлена по оси вращения (рис.51). В самом роторе выберем систему x, y, z , вращающуюся синхронно с ротором, причем ось z также направлена по оси вращения, а ось y (или x) совмещена с какой-либо отметкой на теле ротора.

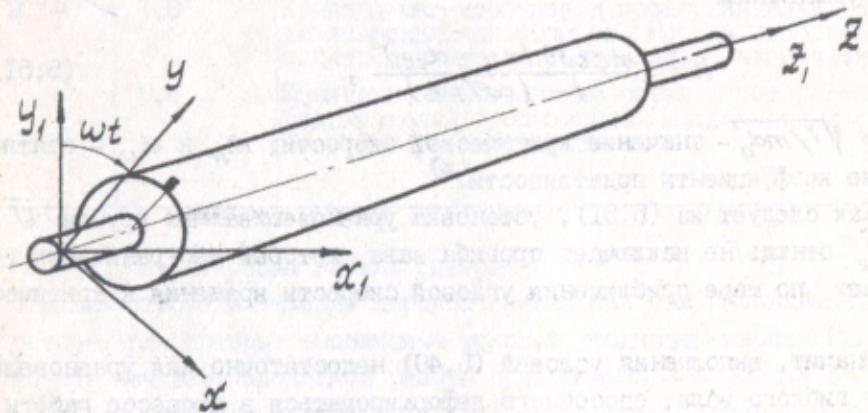


Рис.51. Схема гибкого ротора

Пусть $\bar{F}(z), x(z), y(z)$ - динамический прогиб его проекции. Известно, что всякую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно представить в виде бесконечного ряда взаимно ортогональных функций. Выбирая в качестве последних формы собственных колебаний ротора, запишем

$$\vec{F}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{C}_i \cdot \eta_i(z), \quad (5.52)$$

где \vec{C}_i , C_{ix} , C_{iy} - коэффициенты разложения (они имеют размерность длины) и их проекции на координатные оси;

ω_i , $\eta_i(z)$ - i -я частота и форма собственных колебаний ротора.

Дальнейшие рассуждения основаны на следующих положениях.

I. Принцип Бети о взаимности работ, согласно которому в линейно деформируемой системе работа внешних сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе сил второго состояния на перемещениях первого.

Рассмотрим два состояния ротора:

1-е состояние соответствует вынужденным колебаниям ротора, при котором внешними нагрузками являются возбуждающие силы от распределенного дисбаланса $\omega^2 \vec{U}(z)$, уравновешивающих грузов (если они имеются) $\omega^2 \vec{U}_k$ и инерционные нагрузки $\omega^2 \vec{r}(z) m(z)$.

2-е состояние: прогиб ротора по i -й собственной форме. Этому состоянию соответствует инерционная нагрузка $\omega_i^2 \gamma_i(z) m(z)$. По принципу Бети

$$(\omega_i^2 - \omega^2) \int_0^l m(z) \eta_i(z) \vec{r}(z) dz = \omega^2 \left[\int_0^l \vec{U}(z) \eta_i(z) dz + \sum_{k=1}^m \vec{U}_k \eta_i(z_k) \right]. \quad (5.53)$$

2. Условие ортогональности собственных форм

$$\int_0^l m(z) \cdot \eta_i(z) \cdot \eta_j(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ M_i = \int_0^l m(z) \cdot \eta_i^2(z) dz, & i = j. \end{cases} \quad (5.54)$$

Представив $r(z)$ в виде суммы (5.52), и с учетом условия ортогональности (5.54) получим на основании (5.53)

$$(\omega_i^2 - \omega^2) \vec{C}_i M_i = \omega^2 \vec{K}_i \quad (5.55)$$

где $\vec{K}_i = \int_0^l \vec{U}(z) \eta_i(z) dz + \sum_{k=1}^m \vec{U}_k \eta_i(z_k)$. (5.56)

Величина \vec{K}_i , определяемая в виде суммы произведений исходной неуравновешенности $\vec{U}(z)$ и дисбалансов корректирующих масс \vec{U}_k на смещения ротора при его колебаниях по i -й собственной форме,

представляет собой модальную составляющую дисбаланса по данной собственной форме. Из (5.55) найдем

$$\bar{C}_i = \Omega_i \bar{K}_i / M_i , \quad \Omega_i = (\omega / \omega_i)^2 / [1 - (\omega / \omega_i)^2]. \quad (5.57)$$

Таким образом, условием, при котором исключаются колебания роторов по i -й собственной форме, является равенство нулю соответствующего эффективного дисбаланса. Отсюда условия полной уравновешенности гибкого ротора определяются системой уравнений

$$\bar{U}_k \cdot \eta_i(z_k) + \int_0^l \bar{u}(z) \eta_i(z) dz = 0 , \quad (5.58)$$
$$i = 1, 2, \dots, \infty .$$

Условия (5.58) могут быть выполнены установкой бесконечно большого числа корректирующих масс в различных поперечных сечениях ротора (число грузов равно числу устранимых форм колебаний). Это означает, что уравновешенным должен быть каждый элемент гибкого ротора.

На практике ограничиваются некоторым конечным числом корректирующих масс и тем самым допускают большую или меньшую погрешность. При этом исходят из того, что влияние отдельных собственных форм на значение общего прогиба тем больше, тем ближе число оборотов к соответствующей критической скорости (это непосредственно следует из (5.57)). Поэтому в первую очередь учитываются те первые n форм колебаний, которым соответствуют критические числа оборотов, лежащие в пределах рабочего диапазона скоростей вращения. Это означает, что в системе (5.58) следует удерживать только первые n уравнений, из которых определяются значения соответствующих грузов. Влияние всех высших форм следует рассматривать как неизбежную погрешность, причем она тем меньше, чем выше порядок соответствующей формы. Т.к. условия (5.58) выполняются только частично, в дополнение к ним желательно выполнить и условия уравновешенности (5.59) ротора, рассматриваемого как твердое тело. Отсюда условия уравновешенности, обычно реализуемые на практике, окончательно примут вид

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \bar{U}(z) dz + \sum_{k=1}^m \bar{U}_k &= 0; \\ \int_0^l \bar{U}(z) z dz + \sum_{k=1}^m \bar{U}_k z_k &= 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \int_0^l \bar{U}(z) \eta_n(z) dz + \bar{U}_k \eta_n(z_k) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

где $m = n+2$ — число корректирующих масс; n — число устранимых форм собственных колебаний.

Уравнения (5.59) не могут быть непосредственно использованы для определения дисбалансов корректирующих масс, ибо распределение дисбаланса $\bar{U}(z)$ неизвестно. Поэтому необходимо применять равенства (5.52), (5.55), (5.57), которые устанавливают связь между динамическим прогибом и начальным дисбалансом. Последовательность балансировки в общих чертах выглядит следующим образом.

1. Проводится обычная низкочастотная балансировка, при которой определяются значения дисбалансов корректирующих масс \bar{U}_{10} и \bar{U}_{20} . Эти массы отвечают условиям (5.49) и устанавливаются в каких-либо поперечных сечениях ротора вблизи опор.

2. Ротор приводится во вращение с угловой скоростью ω , близкой к рабочей. Замеряется кривая динамическая прогиба $\bar{r}_o(z)$. Прогиб $\bar{r}_o(z)$ обусловлен, во-первых, исходной неуравновешенностью $\bar{U}(z)$, во-вторых, корректирующими массами \bar{U}_{10} , \bar{U}_{20} .

3. Определяются значения дисбалансов корректирующих масс, с установкой которых исключается прогиб по первым n собственным формам. Запишем на основании (5.52):

$$\bar{r}_o(z) = \sum_{i=1}^n \bar{C}_{oi} \eta_i(z). \quad (5.60)$$

Умножим обе части (5.60) на $m(z) \eta_j(z) dz$ и проинтегрируем по всей длине вала. Тогда, учитывая условия ортогональности, получим

$$\bar{C}_{oi} = \frac{1}{M_i} \int_0^l m(z) \bar{r}_o(z) \eta_j(z) dz. \quad (5.61)$$

На основании (5.55) имеем

$$\bar{K}_{io} = \bar{C}_{io} M_i / Q_i . \quad (5.62)$$

Значения дисбалансов, создаваемых корректирующими массами, определим из системы уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m \bar{U}_k = 0 ; \\ \sum_{k=1}^m \bar{U}_k \cdot z_k = 0 ; \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \sum_{k=1}^n \bar{U}_k \cdot \eta_n(z_k) = - \bar{K}_{io} , \end{array} \right\} \quad (5.63)$$

где n - число собственных форм, устраниемых из кривой динамического прогиба.

Осуществление такого процесса требует специальных балансировочных стендов, на которых роторы могли бы приводиться во вращение с большими угловыми скоростями, и оснащенных необходимым измерительным оборудованием для измерения фазы и амплитуды динамического прогиба (или динамических реакций на опорах ротора). Что касается расчетов по формулам (5.61), (5.62), (5.63), то при использовании современной вычислительной техники они не представляют какой-либо существенной трудности.

5.9. Гашение вибраций, возбуждаемых гибкими роторами

5.9.1. Конструкционные методы гашения вибраций

Проблему роторных вибраций не всегда удается решить только за счет совершенствования методов балансировки. Возникает необходимость целенаправленных изменений самой конструкции, которые позволяют активно воздействовать на динамические характеристики изделий, обеспечить выполнение установленных норм вибраций с учетом предельных, т.е. отвечающих допустимой степени риска остаточных и эксплуатационных дисбалансов. Перечень применяемых с этой целью методов и средств сравнительно невелик. К ним, в частности, относятся методы отстройки от резонансных (критических) режимов, динамического гашения и демпфирования, уравновешивания роторов непосредственно в условиях эксплуатации.

Более подробно остановимся на методах отстройки и демпфирования, нашедших наибольшее применение в современной практике. Отстройка от критических режимов предполагает такое изменение жесткости конструкции, при котором указанные режимы были бы выведены за пределы рабочих диапазонов. Возможности решения этой задачи путем увеличения жесткости, как правило, весьма ограничены. Более эффективны такие методы, которые направлены на смещение резонансных режимов "вниз", за пределы нижней границы рабочего диапазона. Впервые этот прием был использован Лавалем в конце XIX века при создании высокогооборотной паровой турбины, рассчитанной на частоту вращения 30000 об/мин. Попытка уменьшить уровень вибраций увеличением диаметра вала не привела к положительным результатам. Решение было найдено в значительном снижении жесткости, и соответственно первой критической скорости ротора. За счет быстрого разгона турбина проходит критическую скорость при сравнительно небольших вибрациях, а на рабочем режиме вибрации оставались низкими, благодаря эффекту "самоцентрирования".

Тот же результат, но без некоторых отрицательных последствий (ухудшение качества балансировки, снижение статической прочности вала, появление автоколебательных режимов на критических частотах под воздействием внутреннего трения) может быть достигнуто установкой ротора на упругоподатливые опоры. При определенном подборе жесткости опор первая и вторая критические скорости, которым соответствуют формы колебаний ротора как твердого тела, преодолеваются при запуске изделия, в то время как третья критическая скорость, которой соответствует изгибная форма колебаний, располагается выше верхней границы рабочего диапазона частот вращения. Вопросы динамики роторов на упругоподатливых опорах, а также конструирования и расчета таких опор рассматриваются в [10].

В некоторых случаях находят применение упругоподатливые опоры, обладающие нелинейной характеристикой. Коэффициент жесткости таких опор скачкообразно изменяется по достижении заданных величин радиального усилия [9] или частоты вращения (в этом случае подобные устройства оснащены системами управления с сервоприводом для включения в работу дополнительного упругого элемента, размещенного между подшипником и корпусом изделия). До некоторого момента движение ротора определяется "жестким" участком характеристики опоры, а в дальнейшем — ее "мягким" участком. Таким образом удается исключить

возникновение критических режимов как на переходных режимах, так и на рабочих частотах.

Возможности отстройки от резонансных режимов весьма ограничены, и во многих случаях проблему роторных вибраций необходимо решать в условиях длительной работы непосредственно на резонансных режимах. Наиболее распространенным средством гашения вибраций в этих условиях являются упругодемпфирующие опоры. Необходимое демпфирование, по оценке П.Л.Капицы, для одномассового ротора должно быть таким, чтобы величина динамического прогиба не превышала величину остаточного эксцентриситета на любых (в том числе и резонансных) частотах вращения [8]. Значение коэффициента сопротивления, найденное для этого случая, оказалось вдвое меньше его критического значения, соответствующего апериодическому движению аналогичной балки. Сопротивление внешней среды и сопротивление, создаваемое в подшипниках (особенно в подшипниках качения), недостаточны, чтобы обеспечить такое демпфирование. Для "упорядоченной демпфировки" предлагается принцип устройств, широко известных в настоящее время как упругодемпфирующие опоры с выдавливаемой масляной пленкой.

Основные требования к подобным устройствам вытекают из условий их эксплуатации. Они должны легко включаться в силовую схему изделия, иметь малые габариты и вес, высокую надежность и автономность в работе (т.е. работать без каких-либо следящих или управляющих систем, отдельных маслосистем с устройствами терморегулирования и пр.); для двигателей различных транспортных средств большое значение имеет способность воспринимать значительные перегрузки, возникающие при движении.

В целом демпфирующие устройства, применяемые в настоящее время, можно условно разделить на следующие три группы: гидравлические, использующие для создания демпфирующей силы жидкостное трение, демпферы сухого трения и, наконец, демпферы комбинированного действия, использующие жидкостное и сухое трение.

К первой группе относятся упругодемпфирующие опоры, работающие по принципу выдавливаемой масляной пленки, где демпфирующий элемент выполнен в виде кольцевого слоя вязкой жидкости, заключенного между неподвижным статором и невращающейся обоймой подшипника. Демпфирующие устройства этого типа, применяемые в авиационных ГТД, энергетических газотурбинных установках и других машинах, практически во всех элементах повторяют упругодемпфирующую опору конструкции П.Л.Капицы [9].

Ко второй группе относятся демпфирующие устройства, использующие силы сухого трения. Классический вариант демпфера сухого трения [11] представляет собой промежуточную опору, состоящую из диска-вibratorа, связанного с валом через подшипник, и неподвижного диска, установленного на статоре. Оба диска прижаты друг к другу с некоторым усилием с помощью пружин, равномерно распределенных по окружности, и настройка демпфера осуществляется путем изменения усилия предварительного поджатия.

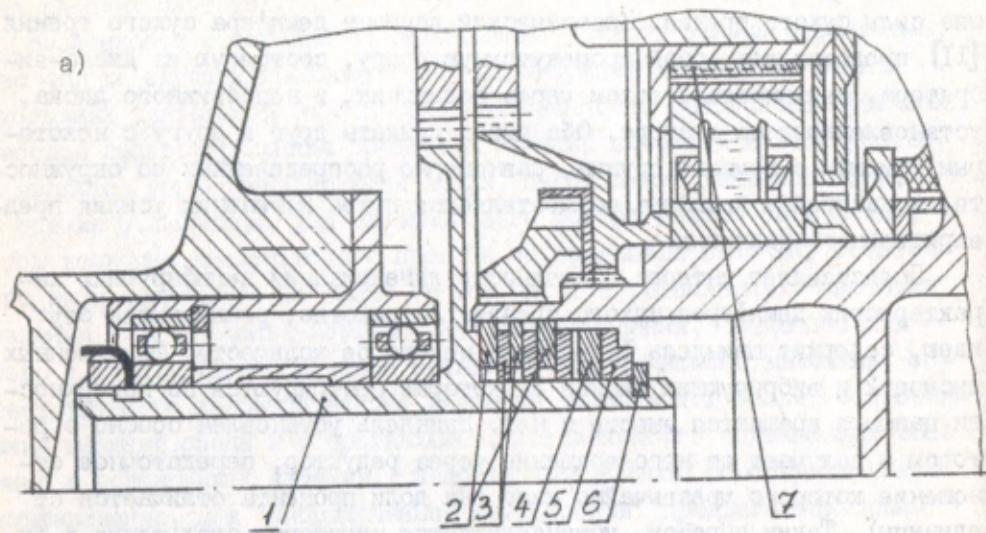
Представляет интерес возможность линеаризации демпфирующих характеристик демпферов сухого трения. Устройство, реализующее эту идею, содержит шпиндель I, несущий некоторое количество фрикционных дисков 2 и вибрирующих дисков 3, которые центрируются по поверхности цапфы и врачаются вместе с ней. Шпиндель установлен соосно с ротором и получает от него вращение через редуктор, передаточное отношение которого чрезвычайно мало (на доли процента отличается от единицы). Таким образом, устанавливается некоторое скольжение в окружном направлении одной группы дисков относительно другой. Усилие предварительного поджатия создается с помощью упругодеформируемого кольца 4, имеющего на своих торцах радиально направленные выступы, размещенные в шахматном порядке. Осевые размеры деталей выполнены с таким расчетом, чтобы при сборке, которая может проводиться под прессом, устанавливалось заданное усилие предварительного поджатия.

Рассмотрим элемент диска-вibratorа, показанный на рис.52, где обозначено: \bar{v} - окружная скорость скольжения относительно фрикционных дисков; \bar{u} - виброскорость цапфы относительно корпуса изделия; $\bar{v}_a = \bar{u} + \bar{v}$ - абсолютная скорость скольжения. Сила трения, приложенная к элементу, направлена противоположно вектору \bar{v}_a . Выполнив разложение этой силы по направлениям виброскорости и окружному, найдем демпфирующее усилие $F_d = -\mu \bar{u}$, причем если выполняется условие $u \ll v$, то $\mu = f_0 Q/v$.

Коэффициент сопротивления для демпфирующего пакета, где имеется N поверхностей трения,

$$\mu = f_0 Q N / v.$$

Таким образом, в устройстве, которое основано на использовании сухого трения, достигается линейная зависимость демпфирующей силы от виброскорости. Выполним расчет при следующих параметрах устрой-



б)

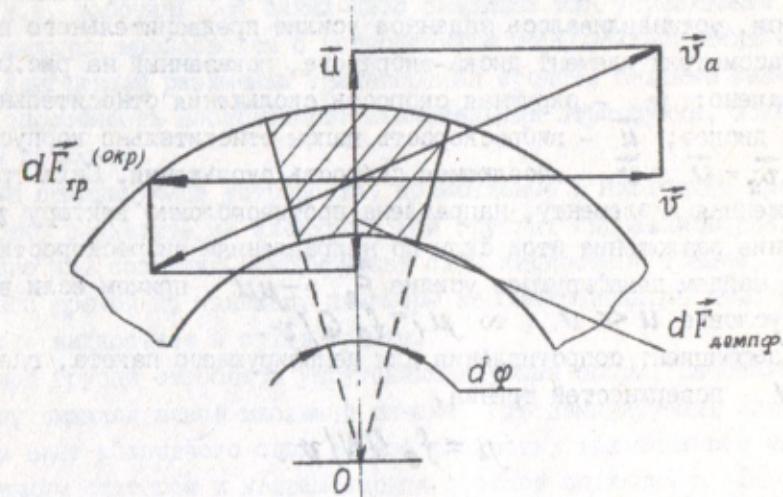


Рис.52. Демпфер сухого трения с линеаризованной характеристикой:
а) конструкция; б) расчетная схема

ства: $N = 6$, $f_o = 0,1$ (коэффициент трения скольжения сталь по стали при наличии смазки), $Q = 5000$ н, $v = 0,05$ м/с. Коэффициент сопротивления $\mu = 0,6 \cdot 10^5$ н·с/м, а мощность, затрачиваемая на трение, $P = f_o Q N v = 150$ Вт. Как видно, здесь достигаются большие коэффициенты сопротивления, линейность демпфирующих характеристик и возможность направленного изменения их в широких пределах, небольшие потребляемая мощность и габариты.

К третьей группе относятся устройства комбинированного действия, где демпфирующий эффект достигается за счет жидкостного и сухого трения. К ним можно отнести демпфер фирмы Броун-Бовери, более известный как пластинчатый демпфер. Это простое, надежное в эксплуатации и удобное для включения в силовую схему изделия устройство представляет собой пакет из 10–20 тонких стальных пластин (лент), согнутых в кольцо и помещенных с некоторым радиальным зазором между подшипником и корпусом. Упругие и демпфирующие свойства таких опор определяются местными микро- и макронеровностями на поверхностях лент, т.е. случайными отклонениями от правильной геометрической формы. Данное обстоятельство предопределяет значительную нестабильность и разброс упругих и демпфирующих характеристик, исключает возможность их расчетного определения или оптимизации.

Значительными преимуществами в этом отношении обладает демпфер (рис.53), выполненный из чередующихся гофрированных и гладких или из одних гофрированных пластин [12]. Обладая всеми достоинствами, присущими пластинчатому демпферу, он выгодно отличается стабильностью характеристик и высокой несущей стабильностью. Кроме того, благодаря регулярно организованному макрорельефу, возможно расчетное определение и оптимизация параметров демпфера.

5.9.2. Динамика гибких роторов на упругодемпфирующих опорах при комбинированном сопротивлении

Во многих случаях сила сопротивления в опорах (в частности, для гофрированного демпфера) может быть представлена двумя составляющими: постоянной и линейно зависящей от радиального смещения цапфы

$$S = T + \mu \Delta r, \quad (5.64)$$

где T – постоянная составляющая демпфирующей силы; μ , Δr – приведенный коэффициент сопротивления опоры и ее деформация.

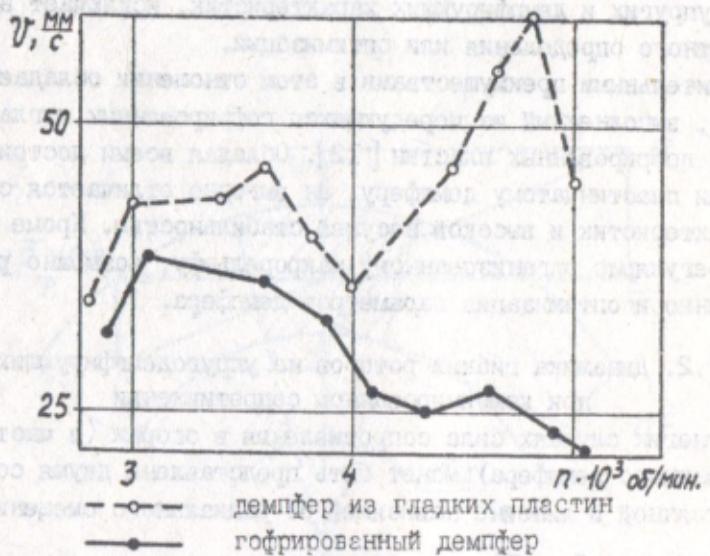
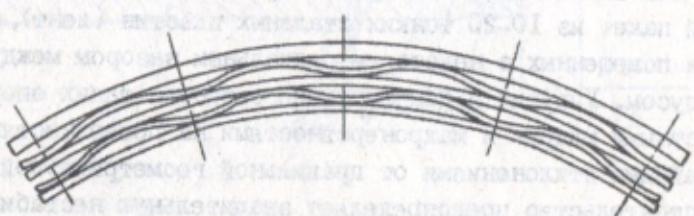
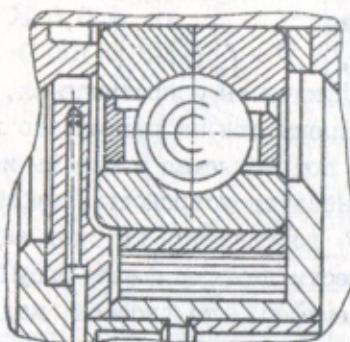


Рис.53. Гофрированный демпфер:

- а) демпфер в сборочном узле; б) демпфер в свободном состоянии;
 в) зависимость выброскорости от частоты вращения одного из шаек;
 1 - обычный пластинчатый демпфер; 2 - гофрированный демпфер

Силы, определяющие движение ротора в режиме прямой синхронной прецессии (возбуждающие силы от дисбалансов, силы упругости и демпфирования, если рассматривать во вращающейся системе отсчета, являются постоянными и по величине, и по направлению. Рассмотрим однотономмасштабного ротора, состоящий из невесомого вала и диска, расположенного посередине, на двух одинаковых упругодемпфирующих опорах в системе координат x , y , неизменно связанной с ротором. Ось y совпадает с направлением смещения опоры (рис.54). На рис.54: А - центры цапф ротора; В - точка закрепления диска на валу; С - центр масс диска; ϵ - эксцентриситет; пружины C_0 и C_1 - аппроксимируют соответственно суммарную жесткость опор и жесткость вала.

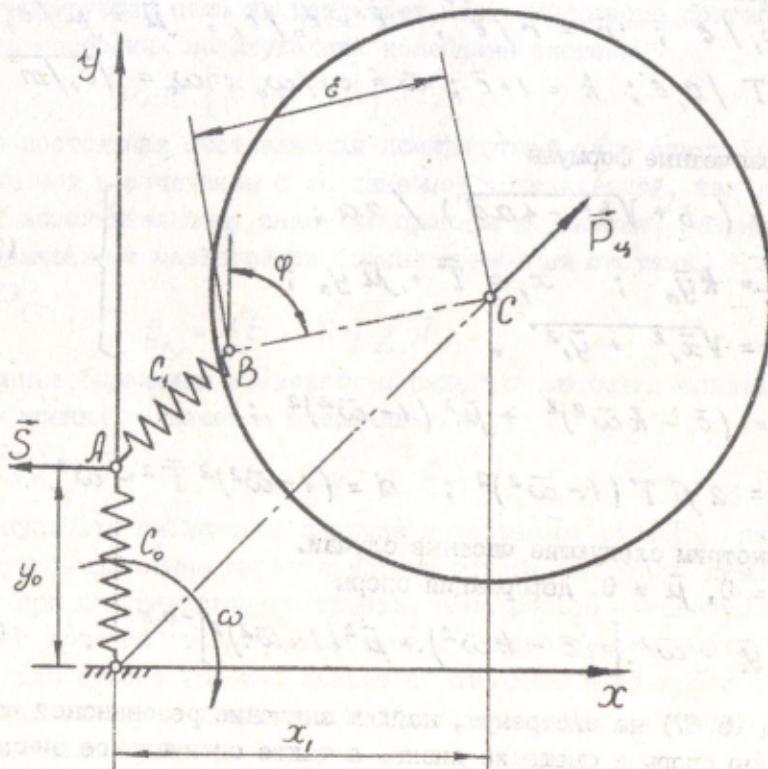


Рис.54. Схема одномассового ротора на упругодемпфирующих опорах

На заданной частоте вращения ω , точки А, В и С образуют некоторую жесткую конфигурацию, обращающуюся вокруг центральной оси С. В соответствии с принципом Даламбера запишем условия равновесия

$$\left. \begin{aligned} mx\omega^2 + m\epsilon\omega^2 \sin\varphi - c_1 x &= 0; \\ my\omega^2 + m\epsilon\omega^2 \cos\varphi - c_1 y_1 + c_0 y_0 &= 0; \\ c_1 (y_1 - y_0) - c_0 y_0 &= 0; \\ c_1 x_1 - T - \mu y_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

После введения обозначений $\bar{y}_0 = y_0/\epsilon$; $\bar{y}_1 = y_1/\epsilon$;
 $\bar{x}_1 = x_1/\epsilon$; $\bar{r} = r/\epsilon$; $\bar{c} = c_0/c_1$; $\bar{\mu} = \mu/c_1$;
 $\bar{T} = T/c_1\epsilon$; $k = 1 + \bar{c}$; $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$; $\omega_0 = \sqrt{c_1/m}$

получим расчетные формулы

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_0 &= (-b + \sqrt{b^2 - 4ad}) / 2a; \\ y_1 &= k\bar{y}_0; \quad x_1 = \bar{T} + \bar{\mu}y_0; \\ \bar{r} &= \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

где

$$a = (\bar{c} - k\bar{\omega}^2)^2 + \bar{\mu}^2(1 - \bar{\omega}^2)^2;$$

$$b = 2\bar{\mu}\bar{T}(1 - \bar{\omega}^2)^2; \quad d = (1 - \bar{\omega}^2)^2\bar{T}^2 - \bar{\omega}^4.$$

Рассмотрим следующие частные случаи.

I. $\bar{T} = 0$, $\bar{\mu} \neq 0$. Деформация опоры

$$\bar{y}_0 = \bar{\omega}^2 \left[(\bar{c} - k\bar{\omega}^2) + \bar{\mu}^2(1 - \bar{\omega}^2)^2 \right]^{-0.5}. \quad (5.67)$$

Исследуя (5.67) на экстремум, найдем значение резонансной частоты, деформацию опоры и смещение диска, а также оптимальное значение приведенного коэффициента трения $\bar{\mu}_{opt}$, которому соответствует минимальное смещение диска:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_{res} &= \left[(\bar{c}^2 + \bar{\mu}^2) / (k\bar{c} + \bar{\mu}^2) \right]^{0.5}; \\ \bar{y}_o^{(res)} &= (\bar{c}^2 - \bar{\mu}^2)^{0.5} / \bar{\mu}; \\ \bar{F}_{res} &= [k^2 \bar{c}^2 + \bar{\mu}^2 (k^2 + \bar{c}^2) + \bar{\mu}^4]^{0.5} / \bar{\mu}; \\ \bar{\mu}_{opt} &= [\bar{c}(1 + \bar{c})]^{0.5}. \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Из уравнений (5.68) следует, что эффективность демпфера повышается с уменьшением относительной жесткости опор.

2. Коэффициент приведенного трения равен нулю ($\bar{\mu} = 0$).

Из уравнений (5.68) следует, что наличие постоянной составляющей демпфирующей силы не исключает неограниченного прогиба вала на частоте свободных незатухающих колебаний системы

$$\bar{\omega}_r = [\bar{c}(1 + \bar{c})]^{0.5}.$$

Однако постоянная составляющая демпфирующей силы оказывается весьма полезной в сочетании с ее линейной составляющей, так как способствует дополнительному снижению прогиба в условиях резонанса.

3. Движение с частотой свободных колебаний системы, т.е. при $\bar{\omega} = \bar{\omega}_r$,

$$\bar{y}_o = (\bar{c} - \bar{T}) / \bar{\mu}.$$

Полученные выражения позволяют определить значение приведенной силы сухого трения, близкое к оптимальному:

$$\bar{T}_{opt} \approx \bar{c}; \quad \bar{y}_o = \bar{y}_r = 0; \quad \bar{F} = \bar{x} = c.$$

Результаты численного анализа показаны на рис.55, где приведены амплитудно-частотные характеристики ротора на упругодемпфирующих опорах при комбинированном трении, а на рис.56 – зависимости резонансного прогиба от приведенной силы сухого трения. Оптимальное значение силы сухого трения зависит от относительной жесткости опоры, коэффициента μ линейной составляющей демпфирующей силы, но в целом близко к ранее полученной оценке: $T_{opt} \approx \bar{c}$.

Необходимо указать, что формулы (5.65)–(5.68) определяют движение системы только в устойчивом режиме с частотами вращения, превышающими некоторое пороговое значение $\bar{\omega}^*$. Признаком устойчивости работы служат условия $y_o > 0$ и $d < 0$. Значение пороговой частоты найдем из второго условия:

$$\bar{\omega}^* = [\bar{T} / (1 + \bar{T})]^{0.5}.$$

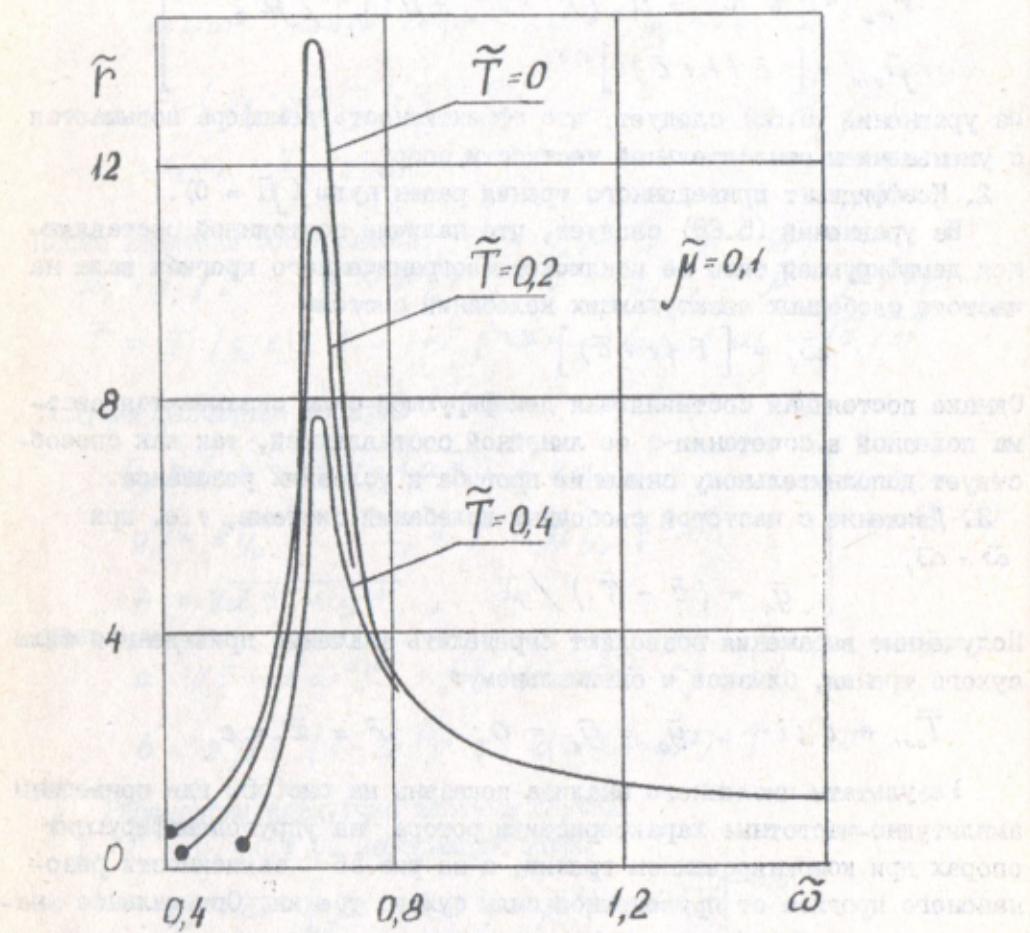


Рис.55. Амплитудно-частотная характеристика ротора при комбинированном трении в опорах

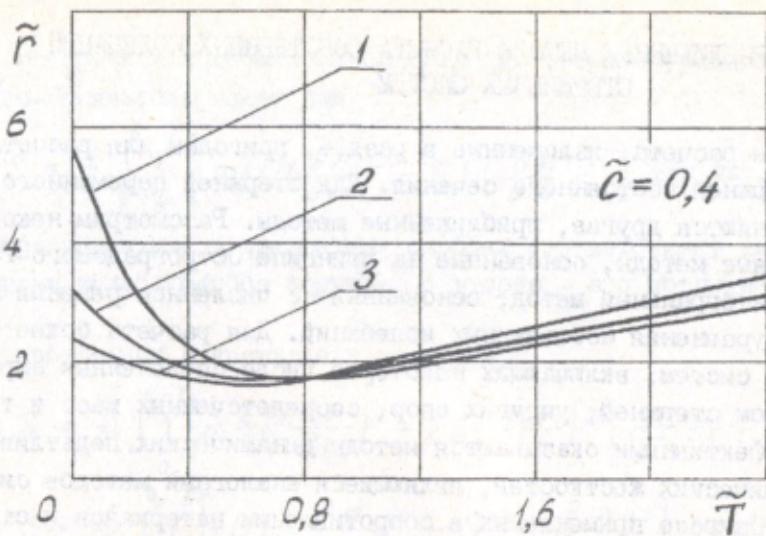


Рис.56. Зависимость резонансного прогиба от приведенного значения силы сухого трения: I - $\bar{\mu} = 0,1$; 2 - $\bar{\mu} = 0,2$; 3 - $\bar{\mu} = 0,3$

Движение с частотой, превышающей пороговое значение, является устойчивым и соответствует условиям, принятым при выводе расчетных формул. Напротив, при частотах, меньших $\bar{\omega}^*$, движение системы сопровождается прерывистыми перемещениями цапф, их "зависаниями" в какие-то моменты времени, изменениями фазового угла φ и прогиба ротора в течение одного периода и другими явлениями.

При больших значениях \tilde{T} демпфер оказывается выключенным из работы на весьма значительном диапазоне частот вращения, верхняя граница которого приближается к первой критической скорости ротора на жестких опорах. Учитывая это, постоянную составляющую демпфирующей силы следует выбирать таким образом, чтобы значение пороговой частоты находилось в пределах $(0,4\dots 0,6) \omega_0$. Не имеет смысла увеличивать предельное значение T выше оптимального, определяемого равенством $\tilde{T}_{\text{опт}} \approx \tilde{C}$. Обычно приемлемое значение постоянной составляющей демпфирующей силы определяется из условия $\tilde{T} = 0,2\dots 0,3$.

6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Методы расчета, изложенные в разд.4, пригодны для расчета колебаний стержней постоянного сечения. Для стержней переменного сечения применяются другие, приближенные методы. Рассмотрим некоторые вариационные методы, основанные на принципе Остроградского-Гамильтона, и интегральный метод, основанный на численном решении интегрального уравнения собственных колебаний. Для расчета более сложных составных систем, включающих некоторое число сочлененных определенным образом стержней, упругих опор, сосредоточенных масс и т.д. весьма эффективными оказываются методы динамических податливостей или динамических жесткостей, являющиеся аналогами методов сил и деформаций, широко применяемых в сопротивлении материалов и строительной механике.

6.1. Вариационные методы расчета колебаний стержней переменного сечения

Основой вариационных методов расчета колебаний является принцип наименьшего действия Остроградского-Гамильтона. "Действием", по Остроградскому-Гамильтону, называется величина, определяемая интегралом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt, \quad (6.1)$$

где T - кинетическая и Π - потенциальная энергия системы.

Содержание принципа Остроградского-Гамильтона для консервативных систем заключается в том, что перемещение системы из начального положения A , которое она занимала в момент времени t_1 , в положение B , которое она занимает в момент времени t_2 ($t_2 > t_1$), происходит так, что действие S на действительном перемещении принимает экстремальное значение, т.е. первая вариация действия (разность между значениями этой величины на действительном и любом из окольных перемещений системы) обращается в нуль:

$$\delta S = 0. \quad (6.2)$$

Задача определения собственных колебаний с помощью принципа Остроградского-Гамильтона сводится к тому, чтобы найти выражение функционала S , отвечающего заданному типу колебаний, и выявить условия, сообщающие ему минимальное значение.

Для поперечных колебаний неоднородного стержня функционал Остроградского-Гамильтона имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[m(z) \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial h}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz dt, \quad (6.3)$$

где первое выражение в квадратных скобках соответствует кинетической энергии колеблющегося стержня, а второе – его потенциальной энергии.

Для продольных и крутильных колебаний

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[m(z) \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 - EA \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right] dz dt; \quad (6.4)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[I(z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - GI_P \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dz dt. \quad (6.5)$$

Определяя собственные частоты и формы главных колебаний, запишем

$$h(z, t) = \eta(z) \sin(pt + \alpha). \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.3), получим после интегрирования в пределах периода $T = 2\pi/p$

$$S = \frac{\pi}{2p} \int_0^l \left\{ m(z) \eta''(z) p^2 - EI [\eta''(z)]^2 \right\} dz. \quad (6.7)$$

В соответствии с принципом Остроградского-Гамильтона заранее неизвестные формы колебаний $\eta(z)$ должны варьироваться с тем расчетом, чтобы определить условия, при которых функционал S принимает наименьшее значение. Варьируемые функции должны отвечать условиям закрепления стержня, т.е. граничным условиям. Таким образом, имеем одну из задач вариационного исчисления; рассмотрим решение ее двумя методами: методом Ритца и методом Релея.

6.1.1. Метод Ритца

Согласно методу Ритца, вариационная задача сводится к решению задачи на определение экстремума функций многих независимых переменных. Для этого значение $\eta(z)$ задается в виде суммы:

$$\eta(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i(z), \quad (6.8)$$

где $\eta_i(z)$ – так называемые базисные или координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи; α_i – параметры, за счет

варьирования которых определяются истинные формы колебаний.

Подставляя (6.8) в (6.7), обращаем функционал S в функцию n независимых переменных:

$$S = S (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (6.9)$$

первая вариация которой

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \cdot \delta \alpha_i. \quad (6.10)$$

Найдя значение α_i из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1 \dots n) \quad (6.11)$$

и подставив эти значения в (6.8), получим приближенное решение поставленной задачи.

Уравнения (6.11) линейны относительно параметров α_i и имеют вид, аналогичный уравнениям малых колебаний системы с конечным числом свободы. Приравнивая нулю определитель этой системы, получим уравнение частот, из которого находятся приближенные значения первых собственных частот системы.

Для случая изгибных колебаний функционал, первая вариация которого должна обращаться в нуль, имеет вид

$$S = \int \left\{ m(z) \eta^2(z) p^2 - EI(z) [\eta''(z)]^2 \right\} dz.$$

Подставив сюда значение ηz по (6.8), S представим в виде квадратичной формы параметров α_i :

$$S(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = p^2 \sum_{i,k=1}^n T_{ik} \alpha_i \alpha_k - \sum_{i,k=1}^n U_{ik} \alpha_i \alpha_k, \quad (6.12)$$

где $T_{ik} = \int_0^l m(z) \eta_i(z) \eta_k(z) dz$, $U_{ik} = \int_0^l EI(z) \eta_i''(z) \eta_k''(z) dz$.

Подставив выражения (6.12) в (6.11), придем к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (p^2 T_{11} - U_{11}) \alpha_1 + \dots + (p^2 T_{1n} - U_{1n}) \alpha_n &= 0; \\ \vdots & \\ (p^2 T_{nn} - U_{nn}) \alpha_1 + \dots + (p^2 T_{nn} - U_{nn}) \alpha_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Условие, при котором не все α_i одновременно равны нулю, примет вид

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} (T_{11} P^2 - U_{11}) & \dots & \dots & \dots & * & (T_{1n} P^2 - U_{1n}) \\ \vdots & \vdots \\ (T_{nn} P^2 - U_{nn}) & \dots & \dots & \dots & (T_{nn} P^2 - U_{nn}) \end{array} \right] = 0. \quad (6.14)$$

Таково уравнение частот Ритца.

Аналогично выглядит и уравнение частот для случая продольных или крутильных колебаний. Первые n корней этого уравнения (P_1, \dots, P_n) дают приближенные значения квадратов первых n собственных частот. Уравнение (6.14) определяет верхнюю границу собственных частот.

6.1.2. Метод Релея

Метод Релея представляет собой один из вариантов метода Ритца, при котором варьируемая форма $\eta(z)$, задаваемая в виде ряда (6.8), содержит только одну базисную функцию:

$$\eta(z) = \eta_i(z). \quad (6.15)$$

В этом случае уравнение частот имеет очень простой вид:

$$U_{ii} - P^2 T_{ii} = 0, \quad (6.16)$$

откуда

$$P^2 = U_{ii} / T_{ii}, \quad (6.17)$$

где U_{ii} , T_{ii} — максимальные значения потенциальной и кинетической (без множителя P^2) энергий, соответствующие принятой форме упругой линии (6.15). В частности, для изгибных колебаний

$$P^2 = \int_0^l EI \eta_i''(z) dz / \int_0^l m(z) \eta_i^2(z) dz. \quad (6.18)$$

Формула (6.18) (формула Релея) для любой функции $\eta(z)$, отвечающей граничным условиям задачи, определяет приближенное значение первой собственной частоты. Однако если функцию $\eta(z)$ выбрать таким образом, чтобы она была ортогональной к первой собственной форме $\varphi_i(z)$, т.е. отвечала условию

$$\int m(z) \eta(z) \varphi_1(z) = 0, \quad (6.19)$$

то по формуле Релея определяется вторая собственная частота. Точно так же можно определить и третью собственную частоту, но функция $\eta(z)$ должна быть ортогональной не только к первой, но и ко второй собственной формам.

6.2. Интегральный метод

Будем исходить из полученного ранее (см.разд.4) дифференциального уравнения изгибных колебаний:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI(z) \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \right) = -m(z) \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}. \quad (6.20)$$

Принимая $v(z) = V(z) \sin \omega_o t$, (6.21)

где $V(z)$, ω_o – искомая форма и частота свободных колебаний, приведем (6.20) к следующему виду:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EI(z) \frac{dV}{dz} \right] = m(z) \omega_o^2 V(z). \quad (6.22)$$

Выполним интегрирование полученного уравнения, учитывая известные из сопротивления материалов соотношения:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = M(z)/EI; \quad \frac{dM}{dz} = Q(z); \quad \frac{d^2 M}{dz^2} = q(z),$$

где $q(z)$ – распределенная нагрузка

$$q(z) = m(z) \omega_o^2 \cdot \eta(z);$$

$$Q(z) = \omega_o^2 \left[\int_0^z m(z) \eta(z) dz + R(0) \right];$$

$$M(z) = \omega_o^2 \left[\int_0^z \int_0^z m(z) \eta(z) dz dz + R(0)z + M(0) \right]. \quad (6.23)$$

Здесь R_o и M_o – значения перерезывающей силы и изгибающего момента в нулевом сечении стержня, отнесенные к ω_o^2 (при свободных колебаниях эти величины пропорциональны квадрату собственной частоты).

Далее найдем значение угла поворота и смещения:

$$\eta''(z) = M(z) / EI(z);$$

$$\eta'(z) = \omega_0^2 \left\{ \int_0^z \frac{1}{EI(z)} \left[\int_0^z \int_0^z m(z) \eta(z) dz dz + R(0)z + M(0) \right] \times dz + \eta'(0) \right\}; \quad (6.24)$$

$$\eta(z) = \omega_0^2 \left\{ \int_0^z \int_0^z \frac{1}{EI(z)} \left[\int_0^z \int_0^z m(z) \eta(z) dz dz + R(0)z + M(0) \right] dz dz + \eta'(0)z + \eta(0) \right\}$$

Постоянные интегрирования $R(0)$, $M(0)$, $\eta'(0)$, $\eta(0)$ определяются по заданным граничным условиям на концах стержня.

Уравнение (6.24) является интегральным уравнением форм колебаний. При подстановке сюда точного значения $\eta(z)$ коэффициент пропорциональности ω_0^2 представляет собой точное значение квадрата собственной частоты. Представим (6.24) в сокращенном виде:

$$\eta(z) = \omega_0^2 K(\eta), \quad (6.25)$$

где $K(\eta)$ - интегральный оператор:

$$K(\eta) = \int_0^z \int_0^z \frac{1}{EI(z)} \left[\int_0^z \int_0^z m(z) \eta(z) dz dz + R(0)z + M(0) \right] \times dz dz + \eta'(0)z + \eta(0). \quad (6.26)$$

Для решения полученного уравнения строится процесс последовательных приближений:

$$\eta^{(1)}(z) = \omega^2 \cdot K[\eta^{(0)}(z)]; \quad (6.27)$$

$$\eta^{(n)}(z) = \omega^2 \cdot K[\eta^{(n-1)}(z)],$$

где $\eta^{(0)}(z)$ - некоторая исходная функция, аппроксимирующая форму колебаний.

Выбор этой функции совершенно произволен, однако для сокращения объема вычислений желательно, чтобы она удовлетворяла граничным условиям.

Процесс последовательных приближений, построенный по схеме (6.27), является сходящимся и при достаточно большом n функция $\eta^{(n)}(z)$ неограниченно приближается к первой собственной форме колебаний:

$$\eta^{(n)}(z) \rightarrow \eta^{(n-1)}(z) \rightarrow \eta_1(z). \quad (6.28)$$

Предел отношения двух последовательных приближений стремится к квадрату первой собственной частоты, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta^{(n+1)}(z)}{\eta^{(n)}} = \omega_0^2. \quad (6.29)$$

Для расчета интегральным методом второй или более высоких собственных форм исходная функция должна выбираться таким образом, чтобы при ее разложении по собственным формам колебаний данного стержня, она не содержала слагаемых, пропорциональных первой собственной форме. С этой целью исходная функция и функции, получающиеся в результате каждого из приближений, должны быть "очищены" от первой формы. Это достигается путем введения операции ортогонализации.

Вначале определяется коэффициент разложения первой формы:

$$\varphi_1^{(0)} = \int_0^l m(z) \eta^{(0)}(z) \cdot \eta_1(z) dz, \quad (6.30)$$

где $\eta_1(z)$ - определяется заранее.

Затем из заданной функции вычитается ее составляющая по первой форме:

$$\eta_2^{(0)}(z) = \eta^{(0)}(z) - \varphi_1^{(0)} \cdot \eta_1(z). \quad (6.31)$$

Дальнейший процесс последовательных приближений строится на базе найденной функции $\eta_2^{(0)}(z)$.

Подобная операция повторяется для каждого приближения в процессе всего расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И.М. Теория колебаний.- М.: Наука, 1968.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле.- М.: Гос.изд.физико-математич.литературы, 1959.
3. Ден - Гартог Дж. Механические колебания.- М.: Физматгиз, 1960.
4. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний.- М.: Машиностроение, 1967.
5. Мандельштам А.И. Лекции по теории колебаний.- М.: Наука, 1972.

6. Прочность, устойчивость, колебаний. Справочник, т.3.- М.: Машиностроение, 1968.
7. Левит М.Е., Рыженков В.М. Балансировка деталей и узлов.- М.: Машиностроение, 1986.
8. Глейзер А.И. Вероятностные аспекты динамики и уравновешивания роторных систем.- Тольятти: Тольяттинский политехнический институт, 1993.
9. Капица П.Л. Устойчивость и переход через критические числа оборотов быстрорращающихся валов при наличии трения//ЛТФ.- 1939. - т.9. Вып.2.
10. Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин.- Ленинград: Машиностроение, 1977.
11. Вибрация энергетических машин. Справочное пособие/Н.В.Григорьев и др.- Ленинград: Машиностроение, 1974.
12. А.с. Пластинчатый демпфер/Глейзер А.И., Снигирев В.Н., Вильнер П.Д., Покрасс Л.И. 213473 СССР, МПК 06.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

I. Введение.....	3
I.1. О пользе и вреде механических колебаний.....	3
I.2. Некоторые особенности механического воздействия вибраций.	4
2. Колебания систем с одной степенью свободы.....	10
2.1. Число степеней свободы колебательной системы.....	10
2.2. Кинематика колебательных процессов.....	13
2.3. Движение материальной точки под действием силы сопротивления, пропорциональной скорости, и силы упругости, пропорциональной деформации.....	13
2.4. Свободные незатухающие колебания.....	20
2.5. Вынужденные колебания.....	21
2.5.1. Вынужденные колебания в системе с сопротивлением, пропорциональным скорости.....	21
2.5.2. Вынужденные колебания при отсутствии сил сопротивления.....	25
2.5.3. Импульсная реакция (весовая функция) колебательной системы с одной степенью свободы. Движение под воздействием возмущающей силы, произвольно зависящей от времени. Движение в условиях резонанса.....	26
2.5.4. Вынужденные колебания при полигармоническом возбуждении.....	30
2.5.5. Вынужденные колебания при кинематическом возбуждении..	31
2.6. Колебания составных систем с одной степенью свободы.....	31
2.7. Некоторые технические приложения теории вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы.....	34
2.7.1. Виброзащитные системы.....	34
2.7.2. Уменьшение возбуждающей нагрузки методом изменения ее цикличности.....	39
3. Колебательные системы с двумя и более степенями свободы..	44
3.1. Свободные колебания без учета сил сопротивления.....	44
3.1.1. Дифференциальные уравнения движения.....	44
3.1.2. Решение дифференциальных уравнений свободных колебаний.....	48
3.1.3. Ортогональность собственных форм.....	50
3.1.4. Влияние инерции вращения на свободные колебания одно- и многомассовых систем.....	52

3.1.5. Крутильные колебания валов.....	54
3.1.6. Случай равных и нулевых корней.....	56
3.2. Свободные колебания при наличии сил сопротивления. Устойчивость движения.....	57
3.3. Вынужденные колебания без учета сил сопротивления.....	61
3.4. Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления.....	63
3.5. Динамический гаситель колебаний.....	64
3.5.1. Динамический гаситель без трения.....	64
3.5.2. Динамический гаситель с сопротивлением, пропорциональ- ным скорости.....	67
4. Колебания стержневых систем с непрерывно распределенными параметрами.....	73
4.1. Свободные колебания.....	73
4.1.1. Свободные продольные колебания стержней.....	73
4.1.2. Свободные крутильные колебания стержней.....	76
4.1.3. Свободные изгибные колебания стержней постоянного сечения.....	77
4.2. Вынужденные колебания.....	81
5. Динамика вращающихся валов.....	85
5.1. Кинематика вращающегося ротора.....	85
5.2. Понятие о критической скорости вращения.....	86
5.3. Устойчивость движения ротора.....	91
5.4. Влияние внешнего сопротивления на движение одномассового ротора при прямой синхронной прецессии.....	95
5.5. Влияние внутреннего сопротивления на движение одномассового ротора.....	97
5.6. Определение критических скоростей без учета влияния инерции поворота элементов ротора.....	100
5.7. Влияние инерции поворота элементов ротора на величину критической скорости.....	101
5.7.1. Определение критической скорости вала с одним диском.....	102
5.7.2. Определение критических скоростей вала со многими дисками с учетом гироскопических моментов.....	107
5.8. Балансировка роторов.....	109
5.8.1. Уравновешивание жестких роторов.....	109
5.8.2. Классы точности балансировки жестких роторов.....	II4
5.8.3. Балансировка гибких роторов.....	II6

	стр.
5.9. Гашение вибраций, возбуждаемых гибкими роторами.....	122
5.9.1. Конструкционные методы гашения вибраций.....	122
5.9.2. Динамика гибких роторов на упруго-демпфирующих опорах при комбинированном сопротивлении.....	127
6. Приближенные методы расчета собственных колебаний стержневых систем.....	134
6.1. Вариационные методы расчета колебаний стержней переменного сечения.....	134
6.1.1. Метод Ритца.....	135
6.1.2. Метод Релея.....	137
6.2. Интегральный метод.....	138
Литература.....	140
Оглавление	142

Абрам Исаакович Глейзер

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

Редактор Н.А.Фомичева

ЛР 020673 19.02.92. Подписано в печать 4.10.94.

Формат 60x80/16. Печать оперативная. Усл.п.л. 9.0.

Уч.-изд.л. 8.4. Тираж 100 экз. Заказ № 13. 13764-

Типография фирмы "Кассандра"
Телефоны: 26-81-84, 24-46-74



Тольяттинский политехнический институт. Тольятти, Белорусская, 14.

