ТОЛЬЯТТИНСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е.В. Бахусова

# ТЕОРИЯ СИСТЕМ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

*Учебно-методическое пособие*

Тольятти
ТГУ
2010

Федеральное агентство по образованию
Тольяттинский государственный университет
Факультет математики и информатики
Кафедра «Информатика и вычислительная техника»

Е.В. Бахусова

# ТЕОРИЯ СИСТЕМ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Тольятти
ТГУ
2010

УДК 519.8:007
ББК 22.18:32.81
Б30

Рецензенты:
д.п.н., профессор Московского государственного гуманитарного университета им. М.А. Шолохова, академик Академии естественных наук Республики Казахстан, член-корреспондент РАО *В.М. Монахов*;
д.т.н., профессор Тольяттинского государственного университета *П.Ф. Зибров*;
к.п.н., доцент Тольяттинского государственного университета *И.П. Дудина*.

**Б30** Бахусова, Е.В. Теория систем и системный анализ : учеб.-метод. пособие / Е.В. Бахусова. –Тольятти : ТГУ, 2010. – 212 с.

В пособии изложены методологические вопросы теории систем. Большое место отведено рассмотрению математических методов и моделей системного анализа, приведены типовые постановки задач системного анализа, описаны области их приложения.

Издание может быть рекомендовано студентам специальности «Прикладная информатика», преподавателям математики для чтения лекций и ведения практических занятий по дисциплине «Теория систем и системный анализ».

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

ISBN 978-5-8259-0545-7

# ВВЕДЕНИЕ

**Исторический экскурс.** Научные теории с течением времени начинают не срабатывать по той простой причине, что оказываются неадекватными современным задачам и даже самой их постановке. А.И. Уемов, ссылаясь на источники XIX века, пишет, что Лейбниц был последним человеком, знавшим «все на свете». Действительно, еще в XVIII веке объем знаний был таков, что ученые того времени могли знать несколько языков, проводить опыты по физике, химии, делали открытия в математике, а в дополнение к этому занимались поэзией. В настоящее же время знания человека о природе разрослись до такой степени, что не представляется возможным охватить не только весь их объем, но даже и отдельные его области, такие как математика, физика, биология и т. п. Ученые все больше углубляются в изучение своих областей, часто не задумываясь о полезности этих знаний. С другой стороны, современному ученому необходимо получать сведения из других отраслей науки. Появление таких дисциплин, как биофизика, физическая химия, биохимия, бионика, математическая лингвистика, требует сочетания сведений из различных областей. Таким образом, налицо реальное противоречие в развитии науки.

Еще в первой половине XX века масштабы и характер воздействия человека на природу были таковы, что между возможностями, которые заключали в себе эти условия, и их реальным использованием существовал внушительный интервал. Однако сейчас положение изменилось самым решительным образом. Мощь природы не только перестала казаться бесконечной, но во многих отношениях уже сейчас требует от общества специальных усилий, направленных на ее поддержание и даже восстановление. Кроме того, сознательно регулируемым предметом деятельности становится сама деятельность человека: иначе говоря, резко усиливается воздействие человека на всю систему социальных отношений, а вместе с тем возрастает социальное знание поставляющего инструментальные и иные средства для такого воздействия.

Эти причины явились предпосылками возникновения общей теории систем, которая оформилась как самостоятельная дисциплина в 40–50-х годах XX века и призвана помочь человечеству в преодолении недостатков узкой специализации, усилении междисциплинарных связей, развитии диалектического видения мира, системного мышления.

Системный анализ со временем стал меж- и наддисциплинарным курсом, обобщающим методологию исследования сложных технических и социальных систем. С ростом населения на планете, ускорением научно-технического прогресса, угрозой голода, безработицы и различных экологических катастроф становится все более важным применение системного анализа.

Круг значений понятия «система» в греческом языке весьма обширен: сочетание, организм, устройство, организация, союз, строй, руководящий орган. Первенство в использовании этого понятия приписывается стоикам. Также это понятие прослеживается у Аристотеля. Некоторые идеи, лежащие в основе общей теории систем, встречаются уже у Гегеля. Они сводятся к следующему: *Целое есть нечто большее, чем сумма частей. Целое определяет природу частей. Части не могут быть познаны при рассмотрении их вне целого. Части находятся в постоянной взаимосвязи и взаимозависимости*.

В явной форме вопрос о научном подходе к управлению сложными системами первым поставил М.А. Ампер. В своей работе «Опыт о философии наук, или Аналитическое изложение классификации всех человеческих знаний при построении и классификации всевозможных наук» он выделил специальную науку об управлении государством и назвал ее кибернетикой.

Однако первый по-настоящему научный труд по этой тематике написал польский философ-гегельянец Б. Трентовский. В 1843 году он опубликовал книгу «Отношение философии к кибернетике как искусству управления народом». Б. Трентовский ставил целью построение научных основ практической деятельности руководителя («кибернета»). Он подчеркивал, что действительно эффективное управление должно учитывать все важнейшие внешние и внутренние факторы, влияющие на объект управления. Главная трудность управления, по мнению Б. Трентовского, связана со сложностью поведения людей. Используя знания диалектики, Б. Трентовский утверждал, что общество, коллектив, да и сам человек – это система, единство противоречий, разрешение которых и есть развитие. Однако в середине XIX века знания Б. Трентовского оказались невостребованными. Практика управления еще могла обходиться без науки управления. Кибернетика была на время позабыта.

В 1891 году русский учёный геолог Е.С. Федоров, работавший в области минералогии и кристаллографии, изучавший особенности строения кристаллических решеток, отметил, что все невообразимое разнообразие природных тел реализуется из ограниченного и небольшого числа исходных форм. Развивая системные представления, он установил и некоторые закономерности развития систем. Ему принадлежит следующее наблюдение: главным средством жизнеспособности и прогресса систем является не их приспособленность, а способность к приспособлению («жизненная подвижность»), не стройность, а способность к повышению стройности.

Следующая ступень в изучении системности как самостоятельного предмета связана с именем русского учёного А.А. Богданова. С 1911 по1925 год вышли три тома книги «Всеобщая организационная наука (тектология)». Богданову принадлежит идея о том, что все существующие объекты и процессы имеют определенную степень, уровень организованности. Все явления рассматриваются как непрерывные процессы организации и дезорганизации. Богданову принадлежит ценнейшее открытие: уровень организации тем выше, чем сильнее свойства целого отличаются от простой суммы свойств его частей. Особенностью тектологии Богданова является то, что основное внимание уделяется закономерностям развития организации, рассмотрению соотношений устойчивого и изменчивого, значению обратных связей, учету собственных целей организации, роли открытых систем. Он подчеркивал роли моделирования и математики как потенциальных методов решения задач тектологии.

По-настоящему явное и массовое усвоение системных понятий, общественное осознание системности мира, общества и человеческой деятельности началось с 1948 года, когда американский математик Н. Винер опубликовал книгу под названием «Кибернетика». Первоначально он определил кибернетику как «науку об управлении и связи в животных и машинах». Такое определение сформировалось у Н. Винера благодаря его особому интересу к аналогиям процессов в живых организмах и машинах, однако оно неоправданно сужает сферу приложения кибернетики. Уже в следующей книге «Кибернетика и общество» Н. Винер анализирует с позиций кибернетики процессы, происходящие в обществе.

С кибернетикой Винера связаны такие продвижения, как типизация моделей систем, выявление особого значения обратных связей в системе, подчеркивание принципа оптимальности в управлении и синтезе систем, осознание информации как всеобщего свойства материи и возможности ее количественного описания, развитие методологии моделирования вообще и в особенности идеи математического эксперимента с помощью ЭВМ.

Параллельно, и как бы независимо от кибернетики прокладывался еще один подход к науке о системах – общая теория систем. Идея построения теории, приложимой к системам любой природы, была выдвинута австрийским биологом Л. Берталанфи. Один из путей реализации этой идеи Л. Берталанфи видел в том, чтобы отыскивать структурное сходство законов, установленных в различных дисциплинах, и, обобщая их, выводить общесистемные закономерности. Одним из важнейших достижений Берталанфи считается введение им понятия открытой системы. В отличие от винеровского подхода, где изучаются внутрисистемные обратные связи, а функционирование систем рассматривается просто как отклик на внешнее воздействие, Берталанфи подчеркивает особое значение обмена веществом, энергией и информацией (негэнтропией) с открытой средой.

Отправной точкой общей теории систем как самостоятельной науки можно считать 1954 год, когда было организовано общество содействия развитию общей теории систем. Свой первый ежегодник «Общие системы» общество опубликовало в 1956 году. В статье, помещенной в первом томе ежегодника, Берталанфи указал причины появления новой отрасли знания: *«Существует общая тенденция к достижению единства различных естественных и общественных наук. Такое единство может быть предметом изучения Общей теории систем (ОТС). Эта теория может быть важным средством формирования строгих теорий в науках о живой природе и обществе. Развивая объединяющие принципы, которые имеют место во всех областях знания, эта теория приблизит нас к цели – достижению единства науки. Все это может привести к достижению необходимого единства научного образования»*.

Приведенный исторический экскурс показывает, что развитием системного анализа занимались ученые самых различных специальностей: Ампер – физик, Трентовский – философ, Федоров – геолог, Богданов – медик, Винер – математик, Берталанфи – биолог. Это еще раз указывает на положение общей теории систем – в центре человеческих знаний. По степени общности Дж. ван Гиг ставит общую теорию систем на один уровень с математикой и философией. Близко к ОТС на дереве научного знания расположены другие науки, занимающиеся изучением систем: кибернетика, телеология, теория информации, инженерная теория связи, теория ЭВМ, системотехника, исследование операций и сопряженные с ними научные и инженерные направления.

**Основные постулаты общей теории систем.** Системный подход – это принцип исследования, при котором рассматривается система в целом, а не ее отдельные подсистемы. Его задачей является оптимизация системы в целом, а не улучшение эффективности входящих в нее подсистем.

Цель ОТС заключается в построении концептуальной и диалектической основы для развития методов, пригодных для исследования широкого класса систем.

Общая теория систем имеет следующие достоинства.

- Использует «целостный» подход к системам при сохранении идентичности систем и свойств неделимых элементов.
- Повышает общность частных законов посредством нахождения подобных структур в системах (изоморфизм) независимо от того, к каким дисциплинам и специальным наукам относятся эти законы.
- Побуждает к использованию математических моделей, которые описаны с помощью языка, не зависимого от конкретного смысла; эти модели благодаря свойственной им общности помогают установить аналогию (или ее отсутствие) между системами. С помощью математических моделей мы переходим «от анализа содержания к анализу структуры», что «позволяет избежать многих ненужных исследований». Недостаток такого подхода заключается в том, что реальные системы не полностью поддаются описанию с помощью математических моделей.
- Способствует единству науки, являясь «связующей основой для систематики знаний». Общую теорию систем можно рассматривать как «систему систем», указывающую на расхождение и на сходство между различными дисциплинами.
- Улучшение систем основано на аналитическом методе, когда условия работы данной системы и соответствующих элементов изуча-

ются методами дедукции и редукции, чтобы определить причину отклонений от нормы. При системном подходе идут от частного к общему, а проект наилучшей системы определяется методами индукции и синтеза.
– Проектирование системы в целом означает создание оптимальной конфигурации (структуры) системы.
– Важнейшим инструментом системного анализа является использование подобия (на языке ОТС «изоморфизма») систем из различных областей.

**Применение системного подхода в различных сферах человеческой деятельности.** Системный подход может быть рассмотрен как методология проектирования, общая концептуальная основа, новый научный метод, метод анализа организаций, системное управление, метод, связанный с системным проектированием, исследованием операций, экономической оценкой и т. д., и как прикладная ОТС.

*Системный подход как методология проектирования.* Руководящие работники самых различных областей жизнедеятельности испытывают большие трудности оттого, что вынуждены изучать все стороны интересующей их проблемы и из всех возможных точек зрения выбирать только одну. Принятые ими даже не очень значительные решения оказывают определенное влияние на одну или несколько систем, на их структуру, функционирование, а также каждый элемент в отдельности. Поскольку изменения в некоторых системах могут повлиять на ход развития других систем, то лицо, принимающее решение (ЛПР), должно учитывать такое влияние. Системный подход является общенаучной методологией, которая ориентирует в исследовании возникающих при этом вариантов. Системы должны быть спроектированы с определенной целью, а не предоставлены самим себе.

*Системный подход как общая концептуальная основа.* Системы, взятые из самых различных областей, имеют много общих свойств. Одной из задач системного подхода является нахождение подобных структур, свойств и явлений, относящихся к системам из различных областей. Это позволяет «повысить уровень общности законов», сфера действия которых ограниченна. Подобие («изоморфизм») в данном случае не совпадает с полной аналогией. Уровень общности может быть повышен, если использовать общие обозначения и общую терминологию аналогично тому, как системное мышление применяется к внешне не связанным друг с другом областям.

*Методы решения и модели.* Повышения уровня общности можно также достичь нахождением областей, в которых одни и те же модели описывают то, что внешне представляется не связанными между собой явлениями. Одной из задач системного подхода является нахождение взаимосвязей между методами решения, что позволяет расширить сферу их приложения и облегчить понимание новых явлений. Всякий раз, когда это возможно, следует отказываться от специализации и разделения.

*Системный подход как научный метод.* Методы научной парадигмы, с помощью которых был достигнут большой прогресс в физике, неприменимы к живым системам. Мир состоит из физических и живых систем. Эти два вида систем обладают множеством свойств, и соответствующие признаки этих систем настолько различны, что применение в обоих случаях одних и тех же методов приводит к серьезным недоразумениям и ошибкам. Научный метод, позволивший нам раскрыть физическую природу, должен быть дополнен другими методами, которые объяснили бы явления в живых системах. Системный подход и вызвавшая его появление ОТС стимулируют развитие системной парадигмы – метода, который имеет дело с такими процессами, как жизнь, смерть, рождение, развитие, адаптация, познание, причинность и взаимодействие. Этот метод мышления, применяемый в биологии и бихевиористской психологии, создается с помощью системного подхода. Последний нуждается в качественно новом рациональном мышлении, которое дополнит парадигму традиционного научного метода и приведет к созданию новых подходов к измерению, объяснению, доказательству и проверке. Кроме того, системный подход обеспечит нас новыми способами решения проблем для случаев, когда мы имеем дело с так называемыми неустойчивыми понятиями, такими как ценности, суждения, убеждения и чувства.

*Системный подход как метод анализа организаций.* Системный подход используется при исследовании организаций, т. е. систем, обладающих определенной целью и созданных человеком для удовлетворения его потребностей. Системный подход дает возможность соединить анализ системы с позиций бихевиоризма и механики и рассматривать организацию как единое целое с целью достижения наибольшей эффективности всей системы, несмотря на наличие у ее компонентов противоречивых стремлений.

*Общая теория систем и единство знаний.* При изучении сложных систем необходимо рассматривать следующие две стороны вопроса: микроуровень, на котором выявляют основные причинно-следственные связи, объясняющие работу составных частей системы, и макроуровень, когда исследуют взаимосвязь между элементарными подсистемами. Традиционный научный метод и современные математические модели применимы для исследования на микроуровне, но становятся непригодными, когда мы имеем дело с макроуровнем. Такое положение дел способствовало развитию философской мысли в направлении интеграции отдельных областей знания об окружающем мире с помощью единого подхода. В связи с проблемой единства знаний возникает несколько вопросов: для чего нужно единство знаний? Как его достичь? Какие при этом появляются методологические проблемы?

Наличие отдельных элементов, пусть даже явно связанных между собой, не означает самостоятельного существования целого, частями которого они являются. Так, не существует эмпирической основы для создания всеобъемлющей теории о знаниях. Идеальная объединенная наука отрицает пользу специальных наук, которые в состоянии изучать лишь отдельные стороны окружающего мира, а все остальные аспекты упускают из виду.

С другой стороны, поиск объединенной науки имел также положительные результаты, которые привели к развитию ОТС. Он способствовал обнаружению ряда немаловажных «изоморфизмов», или подобий, и улучшил взаимосвязь между областями знания, кажущимися на первый взгляд совершенно различными и несвязанными. Однако процесс систематизации должен быть не просто предложенным, а обоснованным эмпирически.

Системный подход не лишен методологических проблем, не имеющих удовлетворительного решения. В процессе применения системного подхода обнаруживаются проблемы дуализма, или двойственности. В практике системного анализа эти дилеммы получили названия: простота против сложности, оптимизация и субоптимизация, идеализация и реальность, инкрементализм против новаторства, политика и наука, связь с окружающей действительностью и нейтральная позиция. Кроме того, общественные системы не поддаются строгому определению по своим целям, философии и масштабам. Исчерпывающее и строгое решение социальных проблем никогда не достигается. Несмотря на видимость точности, нет ни совершенно верных, ни совершенно неверных решений. Как утверждает Дж. ван Гиг, «нельзя считать неправильным все, что делается на практике в настоящее время в данном направлении, и правильным то, что хорошо выглядит в теории». Однако системный подход предлагает процедуру планирования, проектирования, оценки и реализации решений задач, имеющих системный характер. Поэтому в современном менеджменте, социологии, бихевиористской психологии и т. п. пока нет альтернативы использованию системного анализа. Современный системный анализ – прикладная наука, нацеленная на выяснение причин реальных сложностей, возникших перед «обладателем проблемы», и на выработку вариантов их устранения.

# Раздел 1. Введение в теорию систем

## 1.1. Основные понятия теории систем

**Теория систем** – научная дисциплина, изучающая самые различные явления, отвлекаясь от их конкретной природы и основываясь лишь на формальных взаимосвязях между различными составляющими их факторами и на характере их изменения под влиянием внешних условий, при этом результаты всех наблюдений объясняются лишь взаимодействием их компонентов, например характером их организации и функционирования, а не с помощью непосредственного обращения к природе вовлечённых в явления механизмов, будь они физическими, биологическими, экологическими, социологическими или концептуальными.

Для теории систем объектом исследования является не «физическая реальность», а «система», т. е. абстрактная формальная взаимосвязь между основными признаками и свойствами. При системном подходе объект исследования представляется как система. Само понятие «система» может быть относимо к одному из методологических понятий, поскольку рассмотрение объекта исследуется как система, или отказ от такого рассмотрения зависит от задачи исследования и самого исследователя.

В литературе нет устоявшегося определения системы. Все определения отражают те или иные стороны данного объекта. Приведем ряд определений.

Философский словарь: «**Система** – *это совокупность элементов, находящихся в определенных отношениях и связях между собой и образующих некоторое целое единство*».

Ю.И. Дегтярев: «**Система** – *это упорядоченная совокупность материальных объектов, объединенных какими-либо связями (механическими, информационными), предназначенных для определенной цели и достигающих её наилучшим образом*».

Ван Гиг: «**Система** – *совокупность частей или компонентов, связанных между собой организационно. При выходе из системы части системы продолжают испытывать на себе ее влияние и претерпевают изменения*».

А.И. Уемов, проводя анализ тридцати пяти различных определений понятия «система», останавливается на следующих:

– «**Система** – *множество объектов, на котором реализуется определенное отношение с фиксированными свойствами*».
– «**Система** – множество *объектов, которые обладают заранее определенными свойствами с фиксированными между ними отношениями*».

Р. Эшби: «**Система** – *любая совокупность переменных, которую наблюдатель выбирает из числа переменных, свойственных реальной «машине»*.

Акофф и Эмери: «**Система** – *множество взаимосвязанных элементов, каждый из которых связан прямо или косвенно с каждым другим элементом, а два любых подмножества этого множества не могут быть независимыми*».

В.Д. Могилевский: «**Система** – *организация специализированных элементов, объединенных в единое целое для решения конкретных задач. Основное качество организационной системы заключается в несводимости её свойств к свойствам элементов и наоборот*».

Анализируя данные определения, укажем на *общие свойства системы*, которые всесторонне характеризуют её.

1. Система обладает новыми свойствами по сравнению с элементами, из которых она состоит, при этом система – не механический набор элементов, а целенаправленное их соединение в виде определенных структур. Система есть организационное единство элементов, нарушение взаимосвязи приведет к нарушению системы.

2. Система обладает свойствами оптимальности. Система проектируется с учетом критериев оптимальности и функционирует согласно построенному заранее оптимальному плану.

3. Система создается для достижения цели, решения определенных задач. Любая система имеет свое предназначение.

Приведённые определения не дают однозначного толкования, что считать системой, а что нет, не устанавливают одинаковых границ систем. Система – понятие относительное. На одном уровне иерархии элемент системы сам является системой, на другом – система есть элемент более крупной системы. Поэтому определения системы должны дополняться классификациями и уточнениями.

Исследование объекта как системы предполагает использование ряда категорий, среди которых основными являются:

1) *структурное представление системы* – связано с выделением элементов системы и связей между ними;

2) *функциональное представление системы* – выделение совокупности функций (целенаправленных действий) системы и её компонентов, направленное на достижение определённой цели;
3) *макроскопическое представление системы* – понимание системы как нерасчленимого целого, взаимодействующего с внешней средой;
4) *микроскопическое представление системы* основано на рассмотрении системы как совокупности взаимосвязанных элементов. Оно предполагает раскрытие структуры системы;
5) *иерархическое представление системы* основано на понятии подсистемы, получаемом при разложении (декомпозиции) системы, обладающей системными свойствами, которые следует отличать от её элемента – неделимого на более мелкие части (с точки зрения решаемой задачи). Система может быть представлена в виде совокупности подсистем различных уровней, составляющей системную иерархию, которая замыкается снизу только элементами;
6) *процессуальное представление системы* предполагает понимание системного объекта как динамического объекта, характеризующегося последовательностью его состояний во времени.

Рассмотрим определения других понятий, тесно связанных с системой и ее характеристиками.

**Объект.** Объектом познания является часть реального мира, которая выделяется и воспринимается как единое целое в течение длительного времени. Объект может быть материальным и абстрактным, естественным и искусственным. Реально объект обладает бесконечным набором свойств различной природы. Практически в процессе познания взаимодействие осуществляется с ограниченным множеством свойств, лежащих в пределах возможности их восприятия и необходимости для цели познания. Поэтому система как образ объекта задаётся на конечном множестве отобранных для наблюдения свойств.

**Внешняя среда.** Понятие «система» возникает там и тогда, где и когда мы материально или умозрительно проводим замкнутую границу между неограниченным или некоторым ограниченным множеством элементов. Те элементы с их соответствующей взаимной обусловленностью, которые попадают внутрь, – образуют систему.

Те элементы, которые остались за пределами границы, образуют множество, называемое в теории систем «системным окружением» или просто «окружением», или «внешней средой». Из этих рассуждений вытекает, что немыслимо рассматривать систему без ее внешней среды. Система формирует и проявляет свои свойства в процессе взаимодействия с окружением, являясь при этом ведущим компонентом этого воздействия.

В зависимости от воздействия на окружение и характер взаимодействия с другими системами функции систем можно расположить по возрастающему рангу следующим образом:

– пассивное существование;
– материал для других систем;
– обслуживание систем более высокого порядка;
– противостояние другим системам (выживание);
– поглощение других систем (экспансия);
– преобразование других систем и сред (активная роль).

Всякая система может рассматриваться, с одной стороны, как подсистема более высокого порядка (надсистемы), а с другой – как надсистема системы более низкого порядка (**подсистема**). Обычно в качестве подсистем фигурируют более или менее самостоятельные части систем, выделяемые по определённым признакам, обладающие относительной самостоятельностью, определённой степенью свободы.

**Пример 1.** Система «производственный цех» входит как подсистема в систему более высокого ранга – «фирма». В свою очередь, надсистема «фирма» может являться подсистемой «корпорации».

**Пример 2.** Наука – система, когнитивная система, обеспечивающая получение, проверку, фиксацию (хранение), актуализацию знаний общества. Наука имеет подсистемы: математика, информатика, физика, филология и др. Любое знание существует лишь в форме систем (систематизированное знание), а теория – наиболее развитая система их организации в систему, позволяющая не только описывать, но и объяснять, прогнозировать события, процессы.

**Компонент** – любая часть системы, вступающая в определённые отношения с другими частями (подсистемами, элементами).

**Элемент** – неделимый компонент системы при данном способе расчленения.

При определении этого понятия нет такого большого количества мнений, как в случае с понятием «система». Все авторы дают сходные определения, но при этом часто говорят, что элементы могут, в свою очередь, представлять собой системы, т. е. быть подсистемами. Поэтому для системоаналитика при анализе организации (составлении модели) большого труда стоит разбить цельную систему на конечное число элементов, чтобы избежать излишней сложности и не потерять в адекватности модели.

Ван Гиг, классифицируя элементы, делит их на живые и неживые, входные и выходные. Различие между входными элементами и ресурсами очень незначительно и зависит лишь от точки зрения и условий. В процессе преобразования входные элементы – это те элементы, которые потребляют ресурсы. Определяя входные элементы и ресурсы систем, важно указать, контролируются ли они проектировщиком системы, т. е. следует их рассматривать как часть системы или как часть окружающей их среды. При оценке эффективности системы входные элементы и ресурсы обычно относят к затратам. Выходные элементы представляют собой результат процесса преобразования в системе и рассматриваются как результаты, выходы или прибыль.

Понятия «элемент», «подсистема», «система» взаимопреобразуемы, система может рассматриваться как элемент системы более высокого порядка (метасистема), а элемент при углубленном анализе – как система. То обстоятельство, что любая подсистема является одновременно и относительно самостоятельной системой, приводит к двум аспектам изучения систем: на макро- и микроуровнях.

При изучении на макроуровне основное внимание уделяется взаимодействию системы с внешней средой. Причём системы более высокого уровня можно рассматривать как часть внешней среды. При таком подходе главными факторами являются целевая функция системы (цель), условия её функционирования. При этом элементы системы изучаются с точки зрения организации их в единое целое, влияния на функции системы в целом.

На микроуровне основными становятся внутренние характеристики системы, характер взаимодействия элементов между собой, их свойства и условия функционирования. Для изучения системы сочетаются оба компонента.

**Структура системы.** Понятие структуры связано с упорядоченностью отношений, которые связывают элементы системы. Перегудов и Тарасенко определяют структуру системы как совокупность необходимых и достаточных для достижения цели отношений между элементами. Акофф и Эмери говорят о структуре как об очень общем понятии, включающем геометрические, кинематические, механические и морфологические аспекты.

Структура может быть простой или сложной в зависимости от числа и типа взаимосвязей между частями системы. В сложных системах должна существовать иерархия, т. е. упорядочение уровней подсистем, частей и элементов. От типа и упорядоченности взаимоотношений между компонентами системы в значительной степени зависят функции систем и эффективность их выполнения.

**Связи** – это элементы, осуществляющие непосредственное взаимодействие между элементами (или подсистемами) системы, а также с элементами и подсистемами окружения. Связь – одно из фундаментальных понятий в системном подходе. Система как единое целое существует именно благодаря наличию связей между ее элементами, то есть, иными словами, связи выражают законы функционирования системы. Связи различают по характеру взаимосвязи как прямые и обратные, а по виду проявления (описания) как детерминированные и вероятностные.

**Прямые связи** предназначены для заданной функциональной передачи вещества, энергии, информации или их комбинаций – от одного элемента к другому в направлении основного процесса.

**Обратные связи** в основном выполняют осведомляющие функции, отражая изменение состояния системы в результате управляющего воздействия на нее. Открытие принципа обратной связи явилось выдающимся событием в развитии техники и имело исключительно важные последствия. Процессы управления, адаптации, саморегулирования, самоорганизации, развития невозможны без использования обратных связей. С помощью обратной связи сигнал (информация) с выхода системы (объекта управления) передается в орган управления. Здесь этот сигнал, содержащий информацию о работе, выполненной объектом управления, сравнивается с сигналом, задающим содержание и объем работы (например, план). В случае возникновения рассогласования между фактическим и плановым состоянием работы принимаются меры по его устранению.

Основными функциями обратной связи являются:

1) противодействие тому, что делает сама система, когда она выходит за установленные пределы (например, реагирование на снижение качества);

2) компенсация возмущений и поддержание состояния устойчивого равновесия системы (например, неполадки в работе оборудования);
3) синтезирование внешних и внутренних возмущений, стремящихся вывести систему из состояния устойчивого равновесия, сведение этих возмущений к отклонениям одной или нескольких управляемых величин (например, выработка управляющих команд на одновременное появление нового конкурента и снижение качества выпускаемой продукции);
4) выработка управляющих воздействий на объект управления по плохо формализуемому закону. Например, установление более высокой цены на энергоносители вызывает в деятельности различных организаций сложные изменения, меняет конечные результаты их функционирования, требует внесения изменений в производственно-хозяйственный процесс путем воздействий, которые невозможно описать с помощью аналитических выражений.

Нарушение обратных связей в социально-экономических системах по различным причинам ведет к тяжелым последствиям. Отдельные локальные системы утрачивают способность к эволюции и тонкому восприятию намечающихся новых тенденций, перспективному развитию и научно обоснованному прогнозированию своей деятельности на длительный период времени, эффективному приспособлению к постоянно меняющимся условиям внешней среды. Особенностью социально-экономических систем является то обстоятельство, что не всегда удается четко выразить обратные связи, которые в них, как правило, длинные, проходят через целый ряд промежуточных звеньев, и четкий их просмотр затруднен. Сами управляемые величины нередко не поддаются ясному определению, и трудно установить множество ограничений, накладываемых на параметры управляемых величин. Не всегда известны также действительные причины выхода управляемых переменных за установленные пределы.

Детерминированная (жесткая) связь, как правило, однозначно определяет причину и следствие, дает четко обусловленную формулу взаимодействия элементов. Вероятностная (гибкая) связь определяет неявную, косвенную зависимость между элементами системы. Теория вероятности предлагает математический аппарат для исследования этих связей, называемый «корреляционными зависимостями».

**Критерии –** признаки, по которым производится оценка соответствия функционирования системы желаемому результату (цели) при заданных ограничениях.

**Эффективность системы** – соотношение между заданным (целевым) показателем результата функционирования системы и фактически реализованным.

**Функционирование** любой произвольно выбранной системы состоит в переработке входных (известных) параметров и известных параметров воздействия окружающей среды в значения выходных (неизвестных) параметров с учетом факторов обратной связи.

**Вход** – все, что изменяется при протекании процесса (функционирования) системы. **Выход** – результат конечного состояния процесса. **Процессор** – перевод входа в выход. Система осуществляет свою связь со средой следующим образом: вход данной системы является в то же время выходом предшествующей, а выход данной системы – входом последующей. Таким образом, вход и выход располагаются на границе системы и выполняют одновременно функции входа и выхода предшествующих и последующих систем.

**Ограничение** – обеспечивает соответствие между выходом системы и требованием к нему как к входу в последующую систему – потребитель. Если заданное требование не выполняется, ограничение не пропускает его через себя. Ограничение, таким образом, играет роль согласования функционирования данной системы с целями (потребностями) потребителя.

Определение функционирования системы связано с понятием «проблемная ситуация», которая возникает, если имеется различие между необходимым (желаемым) выходом и существующим (реальным) входом.

**Проблема** – это разница между существующей и желаемой системами. Если этой разницы нет, то нет и проблемы. Решить проблему – значит скорректировать старую систему или сконструировать новую, желаемую.

**Состоянием системы** называется совокупность существенных свойств, которыми система обладает в каждый момент времени.

Цель теории систем – ликвидация проблемы в той или иной системе или выяснение причин, приведших к возникновению этих проблем. Для этого теория систем привлекает широкий спектр средств, использует возможности различных наук и практических сфер деятельности.

Теория систем является меж- и наддисциплинарным курсом. Для проведения анализа и синтеза сложных систем используется широкий спектр математических методов. Основу математического аппарата этой дисциплины составляют: линейное и нелинейное программирование; теория принятия решений; теория игр; теория массового обслуживания; теория статистических выводов (теория вероятностей).

## 1.2. Свойства систем

Состоянием системы называется совокупность существенных свойств, которыми система обладает в каждый момент времени. Под *свойством* понимают сторону объекта, обусловливающую его отличие от других объектов или сходство с ними и проявляющуюся при взаимодействии с другими объектами. *Характеристика* – то, что отражает некоторое свойство системы. Из определения «системы» следует, что главным её свойством является целостность, единство, достигаемое посредством определенных взаимосвязей и взаимодействий элементов системы и проявляющееся в возникновении новых свойств, которыми элементы системы не обладают. Это свойство **эмерджентности** (от анг. *emerge* – возникать, появляться).

1. Эмерджентность – степень несводимости свойств системы к свойствам элементов, из которых она состоит.

2. Эмерджентность – свойство систем, обусловливающее появление новых свойств и качеств, не присущих элементам, входящим в состав системы.

Эмерджентность – принцип, противоположный редукционизму, который утверждает, что целое можно изучать, расчленив его на части, и затем, определяя их свойства, определить свойства целого.

Эмерджентности близко свойство целостности системы. Однако их нельзя отождествлять. **Целостность** системы означает, что каждый элемент системы вносит вклад в реализацию целевой функции системы. Целостность и эмерджентность – интегративные свойства системы. Наличие интегративных свойств является одной из важнейших черт системы. Целостность проявляется в том, что система обладает собственной закономерностью функциональности, собственной целью.

**Организованность** – сложное свойство систем, заключающееся в наличии структуры и функционирования (поведения). Непременной принадлежностью систем являются их компоненты, именно те структурные образования, из которых состоит целое и без чего оно невозможно.

**Функциональность –** это проявление определенных свойств (функций) при взаимодействии с внешней средой. Здесь же определяется цель (назначение системы) как желаемый конечный результат.

**Структурность –** это упорядоченность системы, определенный набор и расположение элементов со связями между ними. Между функцией и структурой системы существует взаимосвязь, как между философскими категориями – содержанием и формой. Изменение содержания (функций) влечет за собой изменение формы (структуры), *но и наоборот*.

Важным свойством системы является наличие поведения – действия, функционирования, изменений и т. д. Считается, что это поведение системы связано со средой (окружающей), т. е. с другими системами, с которыми она входит в контакт или вступает в определённые взаимоотношения.

Процесс целенаправленного изменения во времени состояния системы называется **поведением**. В отличие от управления, когда изменение состояния системы достигается за счет внешних воздействий, поведение реализуется исключительно самой системой, исходя из собственных целей.

Поведение каждой системы объясняется структурой систем низшего порядка, из которых состоит данная система, и наличием признаков равновесия (*гомеостаза*). В соответствии с признаком равновесия система имеет определенное состояние (состояния), являющееся для неё предпочтительным. Поэтому поведение систем описывается в терминах восстановления этих состояний, когда они нарушаются в результате изменения окружающей среды.

Ещё одно свойство – рост (развитие). Развитие можно рассматривать как составляющую часть поведения. Одним из первичных, а следовательно, основополагающих атрибутов системного подхода является недопустимость рассмотрения объекта вне его **развития**, под которым понимается необратимое, направленное, закономерное изменение материи и сознания. В результате возникает новое качество или состояние объекта. Отождествление (может быть, и не совсем строгое) терминов «развитие» и «движение» позволяет выразиться в таком смысле, что вне развития немыслимо существование материи, в данном случае – системы. Наивно представлять себе развитие, происходящее стихийно. В неоглядном множестве процессов, кажущихся на первый взгляд чем-то вроде броуновского (случайного, хаотичного) движения, при пристальном внимании и изучении вначале как бы проявляются контуры тенденций, а затем и довольно устойчивые закономерности. Эти закономерности по природе своей действуют объективно, т. е. не зависят от того, желаем ли мы их проявления или нет. Незнание законов и закономерностей развития – это блуждание в потемках.

Поведение системы определяется характером реакции на внешние воздействия.

Фундаментальным свойством систем является **устойчивость**, т. е. способность системы противостоять внешним возмущающим воздействиям. От неё зависит продолжительность жизни системы. Простые системы имеют пассивные формы устойчивости: прочность, сбалансированность, регулируемость, гомеостаз. А для сложных определяющими являются активные формы: надёжность, живучесть и адаптируемость. Если перечисленные формы устойчивости простых систем (кроме прочности) касаются их поведения, то определяющая форма устойчивости сложных систем носит в основном структурный характер.

**Надёжность** – свойство сохранения структуры систем, несмотря на гибель отдельных её элементов, с помощью их замены или дублирования, а **живучесть** – активное подавление вредных качеств. Таким образом, надёжность является более пассивной формой, чем живучесть.

**Адаптируемость** – свойство изменять поведение или структуру с целью сохранения, улучшения или приобретение новых качеств в условиях изменения внешней среды. Обязательным условием возможности адаптации является наличие обратных связей.

Всякая реальная система существует в среде. Связь между ними бывает настолько тесной, что определять границу между ними становится сложно. Поэтому выделение системы из среды связано с той или иной степенью идеализации.

Воздействие среды может быть пассивным либо активным (антагонистическим, целенаправленно противодействующим системе). Поэтому среду следует рассматривать не только как безразличную, но и антагонистическую по отношению к исследуемой системе.

## 1.3. Классификация систем

**Классификацией** называется разбиение на классы по наиболее существенным признакам. Под классом понимается совокупность объектов, обладающих некоторыми признаками общности. Признак (или совокупность признаков) является основанием (критерием) классификации.

Система характеризуется одним или несколькими признаками и, соответственно, ей можно найти место в различных классификациях, каждая из которых может быть полезной при выборе методологии исследования. Обычно цель классификации – ограничить выбор подходов к отображению систем, выработать язык описания, подходящий для соответствующего класса.

По содержанию различают системы *реальные* (материальные), объективно существующие, и *абстрактные* (концептуальные, идеальные), являющиеся продуктом мышления (рис. 1.1).

Реальные системы делятся на *естественные* (природные) и *искусственные* (антропогенные). Естественные – системы неживой (физические, химические) и живой (биологические) природы. Искусственные – создаются человечеством для своих нужд или образуются в результате целенаправленных усилий.

Искусственные делятся на *технические* (технико-экономические) и *социальные* (общественные). Техническая система спроектирована и изготовлена человеком в определённых целях. К социальным относятся различные системы человеческого общества.

Выделение систем, состоящих из одних только технических устройств, почти всегда условно, поскольку они не способны вырабатывать своё состояние. Эти системы выступают как части более крупных, включающих людей, – *организационно-технических систем*. Организационная система, для эффективного функционирования которой существенным фактором является способ организации взаимодействия людей с технической подсистемой, называется *человеко-машинной*. Примеры человеко-машинных систем: автомобиль – водитель; самолёт – лётчик; ЭВМ – пользователь и т. д.

Таким образом, под *техническими системами* понимают единую конструктивную совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих объектов, предназначенную для целенаправленных действий с задачей достижения в процессе функционирования заданного результата.

Отличительными признаками технических систем по сравнению с произвольной совокупностью объектов или по сравнению с отдельными элементами являются ***конструктивность*** (практическая осуществляемость отношений между элементами), ***ориентированность*** и ***взаимосвязанность*** составных элементов и ***целенаправленность***.

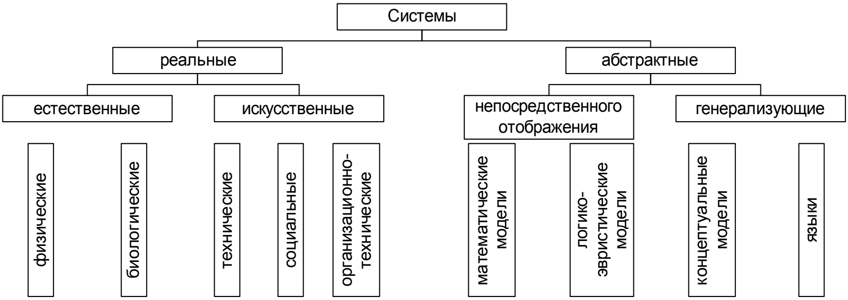



Рис. 1.1. Классификация систем

Для того чтобы система была устойчивой к воздействию внешних влияний, она должна иметь устойчивую структуру. Выбор структуры практически определяет технический облик как всей системы, так её подсистем и элементов. Вопрос о целесообразности применения той или иной структуры должен решаться исходя из конкретного назначения системы. От структуры зависит также способность системы к перераспределению функций в случае полного или частичного отхода отдельных элементов, а, следовательно, надёжность и живучесть системы при заданных характеристиках её элементов.

*Абстрактные* системы являются результатом отражения действительности (реальных систем) в мозге человека. Их настроение – необходимая ступень обеспечения эффективного взаимодействия человека с окружающим миром. Абстрактные (идеальные) системы объективны по источнику происхождения, поскольку их первоисточником является объективно существующая действительность. Абстрактные системы разделяют на системы непосредственного отображения (отражающие определённые аспекты реальных систем) и системы генерализирующего (обобщающего) отображения. К первым относятся математические и эвристические модели, а ко вторым – концептуальные системы (теории методологического построения) и языки.

На основе понятия внешней среды системы разделяются на *открытые*, *закрытые* (замкнутые, изолированные) и *комбинированные*. Деление систем на открытые и закрытые связано с их характерными признаками: возможностью сохранения свойств при наличии внешних воздействий. Если система нечувствительна к внешним воздействиям, её можно считать закрытой. В противном случае – открытой.

*Открытой* называется система, которая взаимодействует с окружающей средой. Все реальные системы являются открытыми. Открытая система является частью более общей системы или нескольких систем. Если вычленить из этого образования собственно рассматриваемую систему, то оставшаяся часть – её среда. Открытая система связана со средой определёнными коммуникациями, то есть сетью внешних связей системы. Выделение внешних связей и описание механизмов взаимодействия «система – среда» является центральной задачей теории открытых систем. Рассмотрение открытых систем позволяет расширить понятие структуры системы. Для открытых систем оно включает не только внутренние связи между элементами, но и внешние со средой. При описании структуры внешние коммуникационные каналы стараются разделить на входные (по которым среда воздействует на систему) и выходные (наоборот). Совокупность элементов этих каналов, принадлежащих собственной системе, называется входными и выходными полюсами системы. У открытой системы, по крайней мере, один элемент имеет связь с внешней средой, один входной полюс и один выходной, которыми она связана с внешней средой.

Важно подчеркнуть, что в любой реальной системе в силу законов диалектики о всеобщей связи явлений число всех взаимосвязей огромно, так что учесть и исследовать абсолютно все связи невозможно, поэтому их число искусственно ограничивают. Вместе с тем учитывать все возможные связи нецелесообразно, так как среди них есть много несущественных, практически не влияющих на функционирование системы и количество полученных решений (с точки зрения решаемых задач). Если изменение характеристик связи, её исключение (полный разрыв) приводят к значительному ухудшению работы системы, снижению эффективности, то такая связь – существенна. Одна из важнейших задач исследователя – выделить существенные для рассмотрения системы в условиях решаемой задачи связи и отделить их от несущественных.

В связи с тем что входные и выходные полюса системы не всегда удаётся чётко выделить, приходится прибегать к определённой идеализации действий. Наибольшая идеализация имеет место при рассмотрении закрытой системы.

*Закрытой* называется система, которая не взаимодействует со средой или взаимодействует со средой строго определённым образом. В первом случае предполагается, что система не имеет входных полюсов, а во втором – что входные полюса есть, но воздействие среды носит неизменный характер и полностью (заранее) известно. Очевидно, что при последнем предположении указанные воздействия могут быть отнесены собственно к системе, и её можно рассматривать как закрытую. В закрытой системе любой её элемент имеет связи только с элементами самой системы.

Разумеется, закрытые системы представляют собой некоторую абстракцию реальной ситуации, так как, строго говоря, изолированных систем не существует. Все реальные системы тесно или слабо связаны с внешней средой – открытые. Если временный разрыв или изменение характерных внешних связей не вызывает отклонения в функционировании системы сверх установленных заранее пределов, то система связана с внешней средой слабо. В противном случае – тесно.

*Комбинированные* системы содержат открытые и закрытые подсистемы. Наличие комбинированных систем свидетельствует о сложной комбинации открытой и закрытой подсистем.

В зависимости от структуры и пространственно-временных свойств системы делятся на *простые*, *сложные* и *большие*.

*Простые* – системы, не имеющие разветвлённых структур, состоящие из небольшого количества взаимосвязей и небольшого количества элементов. Такие элементы служат для выполнения простейших функций, в них нельзя выделить иерархические уровни. Отличительной особенностью простых систем является детерминированность (четкая определенность) номенклатуры, числа элементов и связей как внутри системы, так и со средой.

*Сложные* – характеризуются большим числом элементов и внутренних связей, их неоднородностью и разнокачественностью, структурным разнообразием, выполняют сложную функцию или ряд функций. Компоненты сложных систем могут рассматриваться как подсистемы, каждая из которых может быть детализирована ещё более простыми подсистемами и т. д. до тех пор, пока не будет получен элемент.

*Определение № 1:* система называется *сложной* (с гносеологических позиций), если её познание требует совместного привлечения многих моделей теорий, а в некоторых случаях многих научных дисциплин, а также учёта неопределённости вероятностного и невероятностного характера. Наиболее характерным проявлением этого определения является многомодельность.

**Модель** – некоторая система, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе. Это описание систем (математическое, вербальное и т. д.), отображающее определённую группу её свойств.

*Определение № 2*: систему называют *сложной*, если в реальной действительности рельефно (существенно) проявляются признаки её сложности. А именно:

1) структурная сложность – определяется по числу элементов системы, числу и разнообразию типов связей между ними, количеству иерархических уровней и общему числу подсистем системы. Основными типами считаются следующие виды связей: структурные (в том числе иерархические), функциональные, каузальные (причинно-следственные), информационные, пространственно-временные;
2) сложность функционирования (поведения) – определяется характеристиками множества состояний, правилами перехода из состояния в состояние, воздействием системы на среду и среды на систему, степенью неопределённости перечисленных характеристик и правил;
3) сложность выбора поведения – в многоальтернативных ситуациях, когда выбор поведения определяется целью системы, гибкостью реакций на заранее неизвестные воздействия среды;
4) сложность развития – определяется характеристиками эволюционных или скачкообразных процессов.

Естественно, все признаки рассматриваются во взаимосвязи. Иерархическое построение – характерный признак сложных систем, при этом уровни иерархии могут быть как однородные, так и неоднородные. Сложным системам присущи такие факторы, как невозможность предсказать их поведение, то есть слабая предсказуемость, скрытность, разнообразные состояния.

Сложные системы можно подразделить на следующие факторные подсистемы:

1) решающую, которая принимает глобальные решения во взаимодействии с внешней средой и распределяет локальные задания между всеми другими подсистемами;
2) информационную, обеспечивающую сбор, переработку и передачу информации, необходимой для принятия глобальных решений и выполнения локальных задач;
3) управляющую – для реализации глобальных решений;
4) гомеостазную, поддерживающую динамическое равновесие внутри систем и регулирующую потоки энергии и вещества в подсистемах;
5) адаптивную, накапливающую опыт в процессе обучения для улучшения структуры и функций системы.

*Большой* называют систему, ненаблюдаемую одновременно с позиции одного наблюдателя во времени или в пространстве, для которой существенен пространственный фактор, число её подсистем очень велико, а состав разнороден.

Система может быть и большой, и сложной. Сложные системы объединяют более обширную группу систем, то есть большие – подкласс сложных систем.

Основополагающими при анализе и синтезе больших и сложных систем являются процедуры *декомпозиции* и *агрегирования*.

*Декомпозиция* – разделение систем на части с последующим самостоятельным рассмотрением отдельных частей. Очевидно, что декомпозиция представляет собой понятие, связанное с моделью, так как сама система не может быть расчленена без нарушений свойств. На уровне моделирования разрозненные связи заменятся соответственно эквивалентами, либо модели систем строятся так, что разложение её на отдельные части при этом оказывается естественным. Применительно к большим и сложным системам декомпозиция является мощным инструментом исследования.

*Агрегирование* – понятие, противоположное декомпозиции. В процессе исследования возникает необходимость объединения элементов системы с целью рассмотреть её с более общих позиций.

Декомпозиция и агрегирование представляют собой две противоположные стороны подхода к рассмотрению больших и сложных систем, применяемые в диалектическом единстве.

Системы, для которых состояние однозначно определяется начальными значениями и может быть предсказано для любого последующего момента времени, называются *детерминированными*.

*Стохастические* – системы, изменения в которых носят случайный характер. При случайных воздействиях данных о состоянии системы недостаточно для предсказания в последующий момент времени.

По степени организованности – хорошо организованные, плохо организованные (диффузные). Представить анализируемый объект или процесс в виде *хорошо организованной системы* означает определить элементы системы, их взаимосвязь, правила объединения в более крупные компоненты. Проблемная ситуация может быть описана в виде математического выражения.

Примеры хорошо организованных систем: солнечная система, описывающая наиболее существенные закономерности движения планет вокруг Солнца; отображение атома в виде планетарной системы, состоящей из ядра и электронов; описание работы сложного электронного устройства с помощью системы уравнений, учитывающей особенности условий его работы (наличие шумов, нестабильности источников питания и т. п.).

Описание объекта в виде хорошо организованной системы применяется в тех случаях, когда можно предложить детерминированное описание и экспериментально доказать правомерность его применения, адекватность модели реальному процессу. Попытки применить класс хорошо организованных систем для представления сложных многокомпонентных объектов или многокритериальных задач плохо удаются: они требуют недопустимо больших затрат времени, практически нереализуемы и неадекватны применяемым моделям.

*Плохо организованные системы*. При представлении объекта в виде плохо организованной или диффузной системы не ставится задача определить все учитываемые компоненты, их свойства и связи между ними и целями системы. Система характеризуется некоторым набором макропараметров и закономерностями, которые находятся на основе исследования не всего объекта или класса явлений, а на основе определенной с помощью некоторых правил выборки компонентов, характеризующих исследуемый объект или процесс. В результате такого выборочного исследования получают характеристики или закономерности (статистические, экономические) и распространяют их на всю систему в целом. При этом делаются соответствующие оговорки. Например, при получении статистических закономерностей их распространяют на поведение всей системы с некоторой доверительной вероятностью.

Подход к отображению объектов в виде диффузных систем широко применяется при описании систем массового обслуживания, определении численности штата на предприятиях и в учреждениях, исследовании документальных потоков информации в системах управления и т. д.

С точки зрения характера функций различаются специальные, многофункциональные и универсальные системы. Для *специальных* систем характерны единственность назначения и узкая профессиональная специализация обслуживающего персонала (сравнительно несложная).

*Многофункциональные* системы позволяют реализовать на одной и той же структуре несколько функций. Пример: производственная система, обеспечивающая выпуск различной продукции в пределах определённой номенклатуры.

Для *универсальных* систем: реализуется множество действий на одной и той же структуре, однако состав функций по виду и количеству менее однороден (менее определён). Например комбайн.

По характеру развития выделяют два класса систем: стабильные и развивающиеся. У *стабильной* структура и функции практически не изменяются в течение всего периода её существования, и, как правило, качество функционирования стабильных систем по мере изнашивания их элементов только ухудшается. Восстановительные мероприятия обычно могут лишь снизить темп ухудшения.

Отличительная особенность *развивающихся* систем – с течением времени их структура и функции существенно меняются. Функции системы более постоянны, хотя часто и они видоизменяются. Практически неизменным остаётся лишь их назначение. Развивающиеся системы имеют более высокую сложность.

В порядке усложнения поведения различают автоматические, решающие, самоорганизующиеся, предвидящие, превращающиеся системы. *Автоматические*: однозначно реагируют на ограниченный набор внешних воздействий, внутренняя их организация приспособлена к переходу в равновесное состояние при выводе из него (гомеостаз). *Решающие*: имеют постоянные критерии различения их постоянной реакции на широкие классы внешних воздействий. Постоянство внутренней структуры поддерживается заменой вышедших из строя элементов. *Самоорганизующиеся*: имеют гибкие критерии различения и гибкие реакции на внешние воздействия, приспосабливающиеся к различным типам воздействия. Устойчивость внутренней структуры высших форм таких систем обеспечивается постоянным самовоспроизводством.

Самоорганизующиеся системы обладают признаками диффузных систем: стохастичностью поведения, нестационарностью отдельных параметров и процессов. К этому добавляются такие признаки, как непредсказуемость поведения; способность адаптироваться к изменяющимся условиям среды, изменять структуру при взаимодействии системы со средой, сохраняя при этом свойства целостности; способность формировать возможные варианты поведения и выбирать из них наилучший и др. Иногда этот класс разбивают на подклассы, выделяя адаптивные или самоприспосабливающиеся системы, самовосстанавливающиеся, самовоспроизводящиеся и другие подклассы, соответствующие различным свойствам развивающихся систем.

Примеры: биологические организации, коллективное поведение людей, организация управления на уровне предприятия, отрасли, государства в целом, т. е. в тех системах, где обязательно имеется человеческий фактор.

Если устойчивость по своей сложности начинает превосходить сложные воздействия внешнего мира – это *предвидящие* системы: они могут предвидеть дальнейший ход взаимодействия. *Превращающиеся* – это воображаемые сложные системы на высшем уровне сложности, не связанные постоянством существующих носителей. Они могут менять вещественные носители, сохраняя свою индивидуальность. Науке примеры таких систем пока не известны.

Систему можно разделить на виды по признакам структуры их построения и значимости той роли, которую играют в них отдельные составные части в сравнении с ролями других частей.

В некоторых системах одной из частей может принадлежать доминирующая роль (её значимость >> (символ отношения «значительного превосходства») значимость других частей). Такой компонент будет выступать как центральный, определяющий функционирование всей системы. Такие системы называют *централизованными*. В других системах все составляющие их компоненты примерно одинаково значимы.

Структурно они расположены не вокруг некоторого централизованного компонента, а взаимосвязаны последовательно или параллельно и имеют примерно одинаковые значения для функционирования системы. Это *централизованные* системы.

Системы можно классифицировать по назначению. Среди технических и организационных систем выделяют: производящие, управляющие, обслуживающие. В *производящих* системах реализуются процессы получения некоторых продуктов или услуг. Они, в свою очередь, делятся на вещественно-энергетические, в которых осуществляется преобразование природной среды или сырья в конечный продукт вещественной или энергетической природы, либо транспортирование такого рода продуктов; и информационные – для сбора, передачи и преобразования информации и предоставления информационных услуг. Назначение *управляющих* систем – организация и управление вещественно-энергетическими и информационными процессами.

*Обслуживающие* системы занимаются поддержкой заданных пределов работоспособности производящих и управляющих систем.

**Задание.** В табл. 1 приведены критерии классификации и соответствующие им классы систем. Приведите примеры систем, относящихся к каждому классу.

Таблица 1

| Критерий классификации | Классы систем | Пример системы |
|---|---|---|
| По взаимодействию с внешней средой | Открытые | |
| | Закрытые | |
| | Комбинированные | |
| По структуре | Простые | |
| | Сложные | |
| | Большие | |
| По характеру функций | Специализированные | |
| | Многофункциональные | |
| По характеру развития | Стабильные | |
| | Развивающиеся | |
| По степени организованности | Хорошо организованные | |
| | Плохо организованные | |

| Критерий классификации | Классы систем | Пример системы |
|---|---|---|
| По сложности поведения | Автоматические | |
| | Решающие | |
| | Самоорганизующиеся | |
| | Предвидящие | |
| | Превращающиеся | |
| По характеру связи между элементами | Детерминированные | |
| | Стохастические | |
| По характеру структуры управления | Централизованные | |
| | Децентрализованные | |
| По назначению | Производящие | |
| | Управляющие | |
| | Обслуживающие | |

## 1.4. Моделирование как способ научного познания

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности (Гераклит, Фалес, Пифагор, Аристотель и др.) и постепенно захватывало все новые динамично развивающиеся области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX век. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального и эффективного метода научного познания, в том числе и в финансово-экономической сфере.

Термин «модель» в настоящее время широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. В данном учебном пособии мы рассматривали только такие «модели», которые являются инструментами получения знаний.

**Модель** – *это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.*

Под **моделированием** понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно органически включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез, умение интерпретировать полученные результаты.

*Главная особенность моделирования* в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Процесс моделирования включает три системообразующих элемента:

1) *субъект* (исследователь);
2) *объект исследования*;
3) *модель*, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Пусть имеется или необходимо создать некоторый объект *A*.

Мы конструируем (материально или мысленно) или находим в реальном мире другой объект *B* – модель объекта *A*. *Первый этап* построения модели предполагает наличие некоторых знаний об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели обусловливаются тем, что модель отражает какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимости и достаточной мере сходства оригинала и модели требует конкретного анализа. Очевидно, модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть моделью), так и в случае чрезмерного во всех существенных отношениях отличия от оригинала.

Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от отражения других сторон. Поэтому любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько «специализированных» моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

*На втором этапе* процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Одна из форм такого исследования – проведение «модельных» экспериментов, когда сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее «поведении». Конечным результатом этого этапа является множество знаний о модели $R$.

*На третьем этапе* осуществляется перенос знаний с модели на оригинал – формирование множества знаний $S$ об объекте. Этот процесс переноса знаний проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли отражения или были изменены при построении модели. Мы можем с достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригинал, если этот результат необходимо связан с признаками сходства оригинала и модели. Если же определенный результат модельного исследования связан с отличием модели от оригинала, то этот результат переносить неправомерно.

*Четвертый этап* – практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование – не единственный источник знаний об объекте. **Процесс моделирования «погружен» в более общий процесс познания.** Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

**Моделирование – циклический процесс.** Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т. д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно эволюционируется и совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии экономико-математического моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития.

## 1.5. Информационное описание системы

Главное отличие подхода к изучению любого объекта как системы состоит в том, что исследователь не ограничивается рассмотрением и описанием только вещественной и энергетической его сторон, но прежде всего проводит исследование его информационных аспектов: целей, информационных потоков, управления, организации и т. д. Создание новых и совершенствование существующих объектов (систем) зависит от решения вопросов, позволяющих анализировать имеющуюся информацию, отсеивать ее избыточную часть, выделять основную, производить оценку и обеспечивать формирование альтернатив для принятия решений.

Любая более или менее сложная экономическая система в процессе своего существования потребляет и вырабатывает большой объем информации. Более того, сегодня можно однозначно утверждать, что объем информации, необходимый для нормального функционирования экономических объектов, и требования к скорости восприятия информации экономической системой неуклонно возрастают. Предприятия производят обмен информацией как внутри себя, так и вовне (в «горизонтальном» и «вертикальном» направлениях). Ни для кого не секрет, что в рамках достаточно крупного промышленного предприятия годовой оборот документированных данных может достигать двухмиллионного рубежа и содержать совершенно фантастическую цифру показателей – более ста миллионов единиц. Однако сразу отметим, что количество данных в отчетах не адекватно содержащейся в них информации. Обычно под информацией понимают только те данные, которые способствуют решению задач, поставленных перед исследователем. Из литературных источников известно, что только 10–30% данных, циркулирующих в экономических системах, непосредственно используются при решении задач. Остальные данные не используются вообще.

Рыночные условия хозяйствования и современные компьютерные технологии потребовали от экономических систем новых форм организации информационных потоков. В качестве примера можно привести постоянно меняющуюся сложную систему маркетинговой информации из четырех подсистем: внутренней отчетности, исследований, сбора текущей внешней информации, анализа информации.

***Информационное описание*** должно давать представление об организации и управлении системой. Термин *информация* имеет несколько значений:

1) совокупность каких-либо сведений, знаний о чем-либо;
2) сведения, являющиеся объектом хранения, передачи и переработки;
3) совокупность количественных данных, выражаемых при помощи цифр или кривых, графиков и используемых при сборе и обработке каких-либо сведений;
4) сведения, сигналы об окружающем мире, которые воспринимают организмы в процессе жизнедеятельности;
5) в биологии – совокупность химически закодированных сигналов, передающихся от одного живого организма другому (от родителей – потомкам) или от одних клеток, тканей, органов другим в процессе развития особи;
6) в математике, кибернетике – количественная мера устранения энтропии (неопределенности), мера организации системы;
7) в философии – свойство материальных объектов и процессов сохранять и порождать определенное состояние, которое в различных вещественно-энергетических формах может быть передано от одного объекта другому; степень, мера организованности какого-либо объекта (системы).

Определения 1–4 трактуют информацию как сведения, данные, сообщения, сигналы, подлежащие передаче, приему, обработке, хранению и отражающие реальную действительность или интеллектуальную деятельность. В этом смысле информация – отображение в некоторое пространство символов. В дальнейшем будем называть ее отображающей информацией. Во всех определениях, кроме последнего, информация рассматривается как объединяющая категория, которую можно определить через более простые категории. В последнем определении информация – изначальная, неопределяемая категория, которую нужно изучать через ее свойства, т. е. информация материальна (как и вещество, и энергия), проявляется в тенденции (свойстве) материи к организации (как энергия к способности к взаимодействию), выражает способность организованной материи к предопределению своих состояний (связывающей пространственные свойства с временными). То, что это действительно так, вытекает из следующих наблюдаемых в повседневной практике свойств систем. При неизменной морфологии их поведение и функционирование в значительной степени определяются информацией, доставляемой рецепторными подсистемами. Аналогично энергия определяется как общая мера различных процессов и видов взаимодействия.

Физически информация определяет предсказуемость свойств и поведения объекта во времени. Чем выше уровень организации (больше информации), тем менее подвержен объект действию среды. Возможно, что формы организации взаимно преобразуются в строгих количественных соотношениях, выражаемых при помощи информации. Доказать это можно только экспериментально (как и для количественных форм движения, т. е. энергетических эквивалентов). Количество и ценность информации – взаимодополняющие категории. Можно говорить о количестве ценной информации применительно к заданной цели, подобно тому как мы говорим о количестве ценного вида энергии или вещества.

Формальное определение первичных понятий всегда сложно. Определяя энергию как способность производить работу, мы с самого начала допускаем ошибку: энергия – не способность, а нечто, обладающее способностью. Несмотря на это, мы пользуемся этим определением, понимая и признавая его неполноценность. *Энтропия* есть мера беспорядка, *негэнтропия* – мера порядка, организованности. Но определения организованности в физике нет, существует интуитивное восприятие этого понятия. Организованность есть первичная категория.

*Организованность, упорядоченность системы* – способность предопределять свою перспективу, свое будущее. Разумеется, перспектива системы зависит и от среды. Но ведь и способность системы совершать работу зависит от среды, что не влияет на определение энергии. Чем беспорядочнее система, тем больше ее перспектива зависит от случайных факторов (внутренних и внешних). Повышение упорядоченности означает увеличение зависимости между факторами, определяющими поведение (состояние) системы. Применительно к внешним случайным факторам это означает наличие в системе возможностей установления соответствия между свойствами среды и функциями системы. Установление соответствия требует отображения среды в системе.

Таким образом, меру организованности можно понимать как потенциальную меру предсказуемости будущего системы, количественную характеристику возможности предвидения состояния (поведения) системы. Информация об организации системы – это количественная характеристика возможности предвидения ее состояния (поведения) на соответствующем уровне детализации системы.

В теории информации различают синтаксический, семантический и прагматический аспекты. На *синтаксическом* уровне рассматривается внутренние свойства текста (структура), т. е. отношения между знаками (алфавита), отражающие структуру данной знаковой системы.

На *семантическом* уровне анализируются отношения между знаками и обозначаемыми ими предметами, действиями, качествами, т. е. смысловое содержание текста. На *прагматическом* уровне – отношения между текстом и тем, кто его использует, т. е. ценность информации для потребителя. При этом информацию оценивают, как и любой продукт, по тем потребительским свойствам, которыми она обладает (например, содержательностью информации, удобством для восприятия, своевременностью). Кроме того, ценность информации характеризуется ее актуальностью, надежностью, достоверностью. Часто ценность информации выражается через приращение вероятности достижения цели: если до получения информации вероятность достижения цели была $p_0$, а после получения информации – $p_1$, то величина ценности информации определяется по формуле Харкевича: $I_0 = \log_2(p_1/p_0)$. Очевидно, что она может быть и отрицательной, если $p_1 < p_0$.

Со временем ценность информации снижается. Возможны две причины:

1) обесценение информации в конечном источнике по мере ее использования;
2) старение информации из-за задержки при ее передаче и переработке.

При информационном подходе исследуемая система в наиболее абстрактном виде может быть представлена иерархической структурой, на нижнем уровне которой находятся участки технологического процесса, а на более высоких – узлы управления, связанные с объектами управления и между собой каналами связи. Первый информационный уровень – это уровень непосредственного управления технологическими операциями, осуществляемый рабочими и автоматами (роботами).

На следующих образуются производственно-технологические подразделения (участки, цеха) и предприятия. В зависимости от поставленных задач исследователь сам определяет количество уровней в системе, существо каждого элемента структуры системы и их количество.

Информация, циркулирующая в системе, может проявляться в трёх формах, как то:

1) *осведомляющая* – движется преимущественно от объектов управления к соответствующим узлам управления (как правило, осведомляющая информация передается по каналам *обратной связи*);
2) *управляющая* – в обратном направлении и содержит указания, директивы и т. п.;
3) *преобразующая* – определяет закономерности поведения узла управления и алгоритмы функционирования его отдельных элементов.

*Узлы управления преобразуют осведомляющую информацию в управляющую с помощью преобразующей информации, заключенной в структуре и алгоритмах узла управления.*

По мере движения вверх по иерархии информация постепенно обобщается, преобразуется в различных узлах управления и поступает в находящийся на вершине иерархии главный узел управления. Этот узел, используя полученную осведомляющую информацию, генерирует управляющую информацию, которая, двигаясь вниз, детализируется в нижележащих узлах. Чем меньше требуется информации от вышестоящих узлов для формирования информации управления в некотором $i$-м узле, тем более *автономен* этот узел.

Для достижения цели и подцелей управления (реализации дерева целей) весьма важно, чтобы в соответствующие узлы управления стекалась только ценная информация и чтобы ее было достаточно. Поэтому в процессе управления сложными системами на первый план выступают смысловые и ценностные характеристики информации.

Осведомляющая и управляющая информация может генерироваться и потребляться как внутри системы управления, так и вне ее, образуя информационные потоки, связывающие систему управления с внешней средой.

Фактически информационные потоки системы являются отображением функциональной и структурной организации изучаемого объекта в ракурсе механизма принятия решений внутри системы.

К параметрам информационных потоков относят: общее время реагирования; интенсивность; избыточность; дублирование; нестабильность; погрешность; формы представления.

Известны следующие характеристики количественной оценки информационных потоков в экономических системах:

1) коэффициент трансформации $x/y$, где $x$ – число входных показателей, а $y$ – число выходных показателей, имеющих размерность потока за определенное время (час, день, месяц, год). В вертикальных связях данный коэффициент получил название коэффициента сжатия;
2) коэффициент комплексности $\sum_i k_i/\tilde{x}$, где $k_i$ – число участий входного показателя $i$ в разработке других показателей;
3) коэффициент стабильности – $\tilde{c}/x$ где $\tilde{c}$ – число оставшихся неизменными за определенный период показателей (указывает на степень устойчивости информационных массивов).

При информационном описании систем принято также использовать понятие *количество разнообразия*. При одном-единственном состоянии системы разнообразие отсутствует, оно появляется как минимум при наличии двух возможных состояний изучаемой системы. Объект наблюдения $A$ может с некоторой вероятностью находиться в одном из $k$ различных состояний.

Количество разнообразия или неопределенность, характеризующую объект, принято оценивать средневзвешенной величиной логарифмов вероятностей различных состояний (исходов). Меру неопределенности $H(p)$, или энтропию (по аналогии с известным понятием термодинамики), ввел К. Шеннон:

$$H(p) = \sum_{i=\mathrm{I}}^{k} p_i \cdot \log_2\left(\frac{\mathrm{I}}{p_i}\right),$$

где $p_i$ – вероятность $i$-го состояния системы.

Информация противоположна энтропии, являющейся мерой неопределенности состояний изучаемого объекта. Информация ограничивает разнообразие, снижает энтропию, устраняет неопределенность частично или полностью. По Шеннону, показатель информации о событии равен уменьшению энтропии в системе, вызванной неопределенностью наступления события. Однако не следует забывать, что теория информации разрабатывалась Шенноном для решения задач передачи информации по каналам связи в технических системах, а следовательно, ее применение при информационном описании сложных экономических систем весьма проблематично и в каждом отдельном случае требует отдельного доказательства.

Информация для узла управления проявляется в двух видах: как задающая цель и как изменяющая или задающая алгоритм управления. Все это приводит к тому, что информационная структура управления сложной системой является графом с преимущественно упорядоченными вершинами, который лишь в частном случае сводится к иерархическому дереву.

В ходе информационного анализа в системе выделяют уровни иерархии управления, отдельные узлы управления (информационные элементы) и связывающие их потоки информации. Вся система представляется в виде направленного графа, вершинами которого служат узлы управления, а ребрами – информационные потоки. Направление ребер соответствует направлению информационных потоков. Поскольку потоки управляющей и осведомляющей информации имеют обычно противоположную направленность, то, как правило, строятся два графа.

Движение информации в экономической системе носит довольно сложный характер и полностью отражает иерархическую структуру экономического объекта.

Результатом информационного описания системы являются:
– определение состава информационных элементов;
– состава и структуры информационных потоков между ними;
– количество и ценность информации, поступающей (исходящей) в(из) информационных элементов;
– алгоритмов преобразования информации в соответствующих информационных элементах.

## 1.6. Функциональное описание системы

Всякий объект характеризуется результатами своего существования, местом, которое он занимает среди других объектов, ролью, которую он играет в среде. Функциональное описание необходимо для того, чтобы осознать важность системы, определить ее место, оценить отношения с другими системами.

Функциональное описание должно создать правильную ориентацию в отношении внешних связей системы, ее контактов с окружающим миром, направлениях ее возможного изменения. Оно исходит из того, что всякая система выполняет некоторые функции: просто пассивно существует, служит областью обитания других систем, обслуживает системы более высокого порядка, служит средством для создания более совершенных систем.

Система может быть однофункциональной и многофункциональной. Во многом оценка функций системы (в абсолютном смысле) зависит от точки зрения того, кто ее оценивает (или системы, ее оценивающей).

Функционирование системы может описываться числовым функционалом, зависящим от функций, описывающих внутренние процессы системы, либо качественным функционалом (упорядочение в терминах «лучше», «хуже», «больше», «меньше» и т. д.)

Функционал, количественно или качественно описывающий деятельность системы, называют *функционалом эффективности*.

Функциональная организация может быть описана: алгоритмически, аналитически, графически, таблично, посредством временных диаграмм функционирования, вербально (словесно). Описание должно соответствовать концепции развития систем определенного класса и удовлетворять некоторым требованиям:

– должно быть открытым и допускать возможность расширения (сужения) спектра функций, реализуемых системой;
– предусматривать возможность перехода от одного уровня рассмотрения к другому, т. е. обеспечивать построение виртуальных моделей систем любого уровня.

Все функции, реализуемые сложной системой, могут быть условно разделены на три группы, как то: целевая; основные; дополнительные.

*Целевая (главная) функция* системы соответствует ее основному функциональному назначению, т. е. отражает назначение, сущность и смысл существования системы.

*Основные функции* отражают ориентацию системы и представляют собой совокупность макрофункций, реализуемых системой. Эти функции обусловливают существование системы определенного класса. Основные функции обеспечивают условия выполнения целевой функции (прием, передачу, приобретение, хранение, выдачу).

*Дополнительные (сервисные) функции* расширяют функциональные возможности системы, сферу их применения и способствуют улучшению показателей качества системы. Дополнительные функции обеспечивают условия выполнения основных функций.

Описание объекта на языке функций представляется в виде графа. Дерево функций системы представляет декомпозицию функций системы и формируется с целью детального исследования функциональных возможностей системы и анализа совокупности функций, реализуемых на различных уровнях иерархии системы. На базе дерева функций системы осуществляется формирование структуры системы на основе функциональных модулей. В дальнейшем структура на основе таких модулей покрывается конструктивными (для технических систем) или организационными модулями (для организационно-технических систем). Таким образом, этап формирования дерева функций является одним из наиболее ответственных не только при анализе, но и при синтезе структуры системы. Ошибки на этом этапе приводят к созданию «систем-инвалидов», не способных к полной функциональной адаптации с другими системами, пользователем и окружающей средой.

Исходными данными для формирования дерева функций являются основные и дополнительные функции системы. Формирование дерева функций представляет процесс декомпозиции целевой функции и множества основных и дополнительных функций на более элементарные функции, реализуемые на последующих уровнях декомпозиции. При этом каждая из функций конкретно взятого $i$-го уровня может рассматриваться как макрофункция по отношению к реализующим ее функциям $(i+1)$-го уровня и как элементарная функция по отношению к соответствующей функции верхнего $(i-1)$-го уровня.

## 1.7. Морфологическое описание системы

Современные технические и технологические объекты и их системы управления характеризуются большим числом элементов, множеством связей и взаимосвязей, значительным объемом перерабатываемой информации. Такие системы называют сложными, большими или системами со сложной структурой.

Для систем, состоящих из большого числа взаимосвязанных подсистем, наиболее эффективно вначале наметить основные подсистемы и установить главные взаимосвязи между ними, а затем уже переходить к детальному моделированию механизмов функционирования различных подсистем.

Характерной особенностью начального этапа проектирования является ограниченность информации о свойствах будущей системы, что заставляет в первую очередь обращаться к структуре системы и содержащейся в ней информации. Изучение особенностей этой информации и является предметом морфологического (структурного) анализа систем.

Таким образом, ***морфологическое описание*** должно давать представление о строении системы[1]. Глубина описания, уровень детализации, т. е. определение, какие компоненты системы будут рассматриваться в качестве элементарных (элементов), обусловливается назначением описания системы. Морфологическое описание иерархично. Конфигурация морфологии дается на стольких уровнях, сколько их требуется для создания представления об основных свойствах системы.

***Целями*** структурного анализа являются:

- разработка правил символического отображения систем;
- оценка качества структуры системы;
- изучение структурных свойств системы в целом и ее подсистем;
- выработка заключения об оптимальности структуры системы и рекомендаций по дальнейшему ее совершенствованию.

В структурном подходе можно выделить два этапа: определение состава системы, т. е. полное перечисление ее подсистем, элементов, и выяснение связей между ними.

Изучение морфологии системы начинается с элементного состава. Он может быть:

- гомогенным (однотипные элементы);
- гетерогенным (разнотипные элементы);
- смешанным.

Однотипность не означает полной идентичности и определяет только близость основных свойств. Гомогенности, как правило, сопутствует избыточность и наличие скрытых (потенциальных) возможностей, дополнительных резервов.

Гетерогенные элементы специализированны, экономичны и могут быть эффективными в узком диапазоне внешних условий, но быстро

[1] Морфология – наука о форме, строении.

теряют эффективность вне этого диапазона. Иногда элементный состав определить не удается – неопределенный.

Важным признаком морфологии является назначение (свойства) элементов. Различают элементы: информационные; энергетические; вещественные. Такое деление условно и отражает лишь преобладающие свойства элемента. В общем же случае передача информации невозможна без энергии, перенос энергии невозможен без информации.

Информационные элементы предназначены для приема, запоминания (хранения), преобразования и передачи информации. Преобразование может состоять в изменении вида энергии, несущей информацию, способа кодирования (представления в некоторой знаковой форме) информации, в сжатии информации путем сокращения избыточности, принятия решений и т. д.

Различают обратимые и необратимые преобразования информации.

Обратимые не связаны с потерей (либо созданием новой) информации. Накопление (запоминание) является обратимым в том случае, если не происходит потерь информации в течение времени хранения.

Преобразование энергии заключается в изменении параметров энергетического потока. Поток входной энергии может поступать извне либо от других элементов системы. Выходной энергетический поток направлен в другие системы или в среду. Процесс преобразования энергии нуждается в информации.

Процесс преобразования вещества может быть механическим (например, штамповка), химическим, физическим (например, резка), биологическим. В сложных системах преобразование вещества носит смешанный характер.

Во всяком случае следует иметь в виду, что любые процессы так или иначе приводят к преобразованию вещества, энергии и информации.

Морфологические свойства системы существенно зависят от характера связей между элементами. Понятие связи входит в любое определение системы. Оно одновременно характеризует и строение (статику), и функционирование (динамику) системы. Связи обеспечивают возникновение и сохранение структуры и свойств системы. Выделяют информационные, вещественные и энергетические связи.

Характер связи определяется удельным весом соответствующего компонента (или целевой функцией).

Связь характеризуется направлением, силой, видом. По первым двум признакам связи делят на направленные и ненаправленные, сильные и слабые, а по характеру – подчинения, порождения (генетические), равноправные и связи управления. Некоторые из этих связей можно раздробить еще более детально. Например, связи подчинения на связи «род – вид», «часть – целое»; связи порождения – «причина – следствие». Их можно разделить также по месту приложения (внутренние – внешние), направленности процессов (прямые, обратные, нейтральные). Прямые связи предназначены для передачи вещества, энергии, информации или их комбинаций от одного элемента другому в соответствии с последовательностью выполняемых функций.

Качество связи определяется ее пропускной способностью и надежностью.

Очень важную роль играют обратные связи – они являются основой саморегулирования и развития систем, приспособления их к изменяющимся условиям существования. Преимущественно служат для управления процессами, наиболее распространены информационные обратные связи.

Нейтральные связи не относятся к функциональной деятельности системы, непредсказуемы и случайны, однако могут сыграть определенную роль при адаптации системы, служить исходным ресурсом для формирования прямых и обратных связей, являться резервом.

Морфологическое описание может включать указания на наличие и вид связи, содержать общую характеристику связи либо их качественные и количественные оценки.

Структурные свойства систем определяются характером и устойчивостью отношений между элементами. По характеру отношений между элементами структуры делятся на многосвязные, иерархические, смешанные.

Наиболее устойчивы детерминированные структуры, в которых отношения либо постоянны, либо изменяются во времени по детерминированным законам. Вероятностные структуры изменяются во времени по вероятностным законам. Для хаотических структур характерно отсутствие ограничений, элементы в них вступают в связь в соответствии с индивидуальными свойствами.

Структура играет основную роль в формировании новых свойств системы, отличных от свойств ее компонентов, в поддержании целостности и устойчивости ее свойств по отношению к изменению элементов системы в некоторых пределах.

Примеры структур – структура извилин мозга, студентов на курсе, государственного устройства, кристаллической решетки вещества, микросхемы и др. Кристаллическая решетка алмаза – структура неживой природы; пчелиные соты, полосы зебры – структуры живой природы; озеро – структура экологической природы; партия (общественная, политическая) – структура социальной природы; Вселенная – структура как живой, так и неживой природы.

Структуры систем бывают разного типа, разной топологии (или же пространственной структуры). Рассмотрим основные топологии структур (систем). Соответствующие схемы приведены на рисунках ниже.

*Линейные структуры*. Линейной является структура станций метро на одной (не кольцевой) линии.

Часто понятие системы предполагает наличие иерархической структуры, т. е. систему иногда определяют как иерархическую целостность.


Рис. 1.2. Структура линейного типа

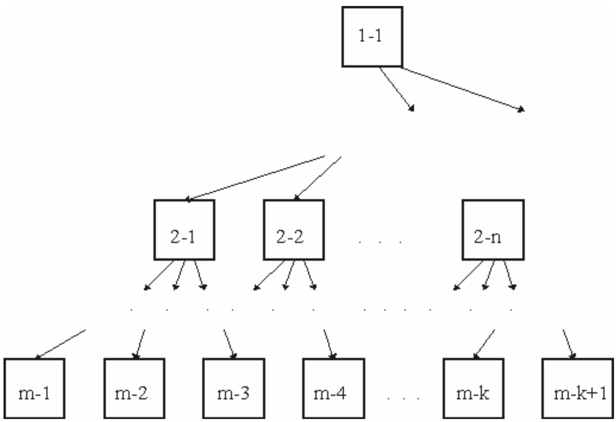



Рис. 1.3. Структура иерархического (древовидного) типа

*Иерархические (древовидные) структуры.* Иерархической является структура управления вузом: «Ректор – Проректоры – Деканы – Заведующие кафедрами и подразделениями – Преподаватели кафедр и сотрудники других подразделений».

*Сетевая структура.* Пример сетевой структуры: организация строительно-монтажных работ при строительстве дома: некоторые работы, например монтаж стен, благоустройство территории и другие, можно выполнять параллельно.

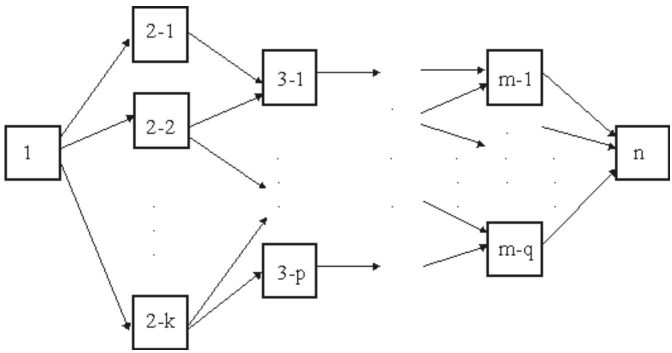



Рис. 1.4. Структура сетевого типа

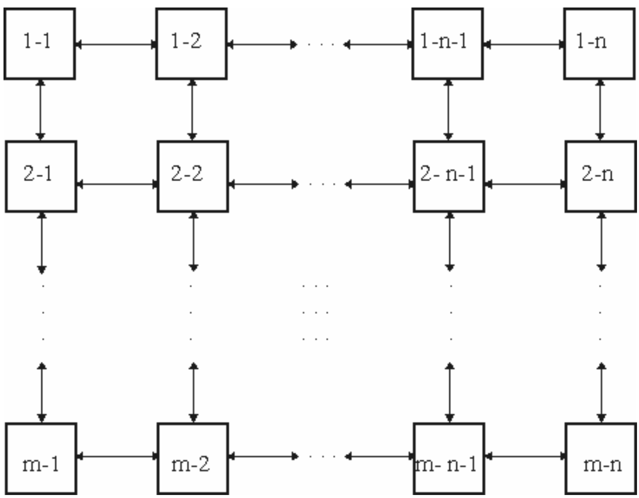



Рис. 1.5. Структура матричного типа

*Матричная структура.* Матричной является структура работников отдела НИИ, выполняющих работы по одной и той же теме.

Кроме указанных основных типов структур используются и другие, образующиеся с помощью их корректных комбинаций – соединений и вложений.

*Пример*. «Вложение друг в друга» плоскостных матричных структур может привести к более сложной пространственной матричной структуре (например, вещества кристаллической структуры типа изображенной на рис. 1.6). Структура сплава и окружающей среды (макроструктура) может определять свойства и структуру сплава (микроструктуру):

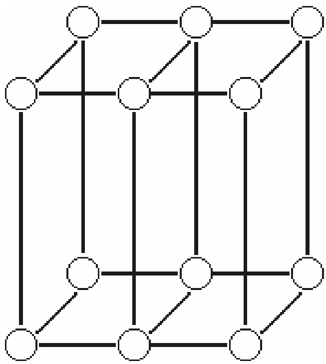


Рис. 1.6. Структура типа кристаллической (пространственно-матричной)

Такого вида структуры часто используются в системах с тесно связанными и равноправными («по вертикали» и «по горизонтали») структурными связями. В частности, такую структуру могут иметь системы открытого акционерного типа, корпорации на рынке с дистрибьютерной сетью и другие.

*Пример*. Из комбинации матрично-матричного типа (образуемой комбинацией «плоскостных», например, временных матричных структур) можно получить, например, время – возрастную матричную «пространственную» структуру. Комбинация сетевых структур может дать вновь сетевую структуру. Комбинация иерархической и линейной структур может привести как к иерархической (при «навешивании» древовидной структуры на древовидную), так и к неопределенностям (при «навешивании» древовидной структуры на линейную). Из одинаковых элементов можно получать структуры различного типа.

*Пример*. Макромолекулы различных силикатов можно получать из одних и тех же элементов (Si, O):

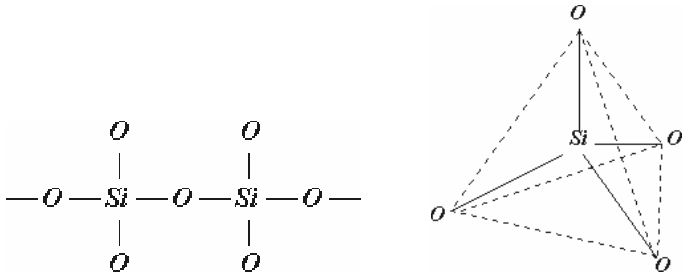



Рис. 1.7. Структуры макромолекул из кремния и кислорода (а, б, в)

*Пример*. Из одних и тех же составляющих рынка (ресурсы, товары, потребители, продавцы) можно образовывать рыночные структуры различного типа: ОАО, ООО, ЗАО и др. При этом структура объединения может определять свойства, характеристики системы.

Структура является связной, если возможен обмен ресурсами между любыми двумя подсистемами системы (предполагается, что если есть обмен $i$-й подсистемы с $j$-й подсистемой, то есть и обмен $j$-й подсистемы с $i$-й).

Можно образовывать сложные, связные m-мерные структуры ($m$-структуры), у которых подсистемы – ($m$–1)-мерные структуры. Такие m-структуры могут актуализировать связи и свойства, которые невозможно актуализировать в ($m$–1)-структурах, и эти структуры широко используются в прикладных науках (социологии, экономике и др.) для описания и актуализации сложных взаимосвязанных многопараметрических и многокритериальных проблем и систем, в частности для построения указанных ниже когнитивных структурных схем (когнитивных карт).

Указанного типа топологические структуры называют комплексами или симплициальными комплексами и математически их можно определить как объект K(X, Y, f), где X – это $m$-структура ($mD$-симплекс), Y – множество событий (вершин), f – связи между X и Y.

Примером простого геометрического комплекса может быть известный геометрический плоскостной граф, состоящий из вершин (отождествляются с некоторыми событиями), соединяемых между собой некоторыми одномерными дугами (отождествляются с некоторыми связями этих вершин). Сеть городов на географической карте, соединенных дорогами, образует плоскостной граф.

Если структура плохо описываема или определяема, то такое множество объектов называется плохо структурируемым.

*Пример*. Плохо структурируемыми будут проблемы описания многих исторических эпох, проблем микромира, общественных и экономических явлений, например, динамики курса валют на рынке, поведения толпы и др.

Плохо формализуемые и плохо структурируемые проблемы (системы) наиболее часто возникают на стыке различных наук, при исследовании синергетических процессов и систем.

Важными структурными компонентами являются отношения *координации* и *субординации*.

***Координация*** выражает упорядоченность элементов системы «по горизонтали». Здесь идет речь о взаимодействии компонентов одного уровня организации.

***Субординация*** – «вертикальная» упорядоченность подчинения и субподчинения компонентов. Здесь речь идет о взаимодействии компонентов различных уровней иерархии.

Иерархия (греч. *hiezosazche* – священная власть) – это расположение частей целого в порядке от высшего к низшему. Термин «иерархия» (многоступенчатость) определяет упорядоченность компонентов системы по степени важности. Между уровнями иерархии структуры могут существовать взаимоотношения строгого подчинения компонентов нижележащего уровня одному из компонентов вышележащего уровня, т. е. отношения древовидного порядка. Такие иерархии называют сильными или иерархиями типа «дерево».

Однако между уровнями иерархической структуры необязательно должны существовать отношения древовидного характера. Могут иметь место связи и в пределах одного уровня иерархии. Нижележащий компонент может подчиняться нескольким компонентам вышележащего уровня – это иерархические структуры со слабыми связями. Для иерархических структур характерно наличие управляющих и исполнительных компонентов. Могут существовать компоненты, являющиеся одновременно и управляющими, и исполнительными.

Различают строго и нестрого иерархические структуры.

Для системы строгой иерархической структуры характерны следующие признаки:

– в системе один главный управляющий компонент, имеющий не менее двух связей;
– имеются исполнительные компоненты, у каждого из которых только одна связь с компонентом вышележащего уровня;
– связь существует только между компонентами, принадлежащими двум соседним уровням, при этом компоненты низшего уровня связаны только с одним компонентом высшего уровня, а каждый компонент высшего уровня – не менее чем с двумя компонентами низшего.

Как правило, наличие иерархии является признаком высокого уровня организации структуры, хотя могут существовать и неиерархические высокоорганизованные системы. В функциональном отношении иерархические структуры более экономичны.

Для неиерархических структур не существует компонентов, которые являются только управляющими или только исполнительными. Любой компонент взаимодействует более чем с одним компонентом.

Смешанные структуры представляют собой различные комбинации иерархических и неиерархических структур.

Введем понятие лидерства. *Лидирующей* называется подсистема, удовлетворяющая следующим требованиям: 1) подсистема не имеет детерминированного взаимодействия ни с одной подсистемой; 2) подсистема является управляющей (при непосредственном или опосредованном взаимодействии) по отношению к части (наибольшему числу подсистем); 3) подсистема либо не является управляемой (подчиненной), либо управляется наименьшим (по сравнению с другими) числом подсистем.

Лидирующих подсистем может быть больше одной, при нескольких лидирующих подсистемах возможна главная лидирующая подсистема. Подсистема высшего уровня иерархической структуры одновременно должна быть главной лидирующей, если же этого нет, то предполагаемая иерархическая структура либо неустойчива, либо не соответствует истинной структуре системы.

Смешанные структуры представляют собой различные комбинации иерархических и неиерархических структур.

Стабильность структуры характеризуется временем ее изменения. Структура может изменяться без преобразования класса или преобразованием одного класса в другой. В частности, возникновение лидера в неиерархической структуре может привести к преобразованию ее в иерархическую, а возникновение лидера в иерархической структуре – к установлению ограничивающей, а затем детерминированной связи между лидирующей подсистемой и подсистемой высшего уровня. В результате подсистема высшего уровня заменяется лидирующей подсистемой, либо объединяется с ней, или иерархическая структура преобразуется в неиерархическую (смешанную).

Равновесными называются неиерархические структуры без лидеров. Чаще всего равновесными бывают многосвязные структуры. Особенностью иерархических структур является отсутствие горизонтальных связей между элементами. В этом смысле данные структуры являются абстрактными построениями, поскольку в реальной действительности трудно найти производственную или какую-либо другую действующую систему с отсутствующими горизонтальными связями.

Важное значение при морфологическом описании системы имеют ее композиционные свойства. *Композиционные свойства* систем определяются способом объединения элементов в подсистемы. Будем различать подсистемы:

– эффекторные (способные преобразовывать воздействие и воздействовать веществом или энергией на другие подсистемы и системы, в том числе на среду);
– рецепторные (способные преобразовывать внешнее воздействие в информационные сигналы, передавать и переносить информацию);
– рефлексивные (способные воспроизводить внутри себя процессы на информационном уровне, генерировать информацию).

Композиция систем, не содержащих (до элементного уровня) подсистем с выраженными свойствами, называется слабой. Композиция систем, содержащих элементы с выраженными функциями, называется соответственно с эффекторными, рецепторными или рефлексивными подсистемами; возможны комбинации. Композицию систем, включающих подсистемы всех трех видов, будем называть полной. Элементы системы (т. е. подсистемы, в глубь которых морфологический анализ не распространяется) могут иметь эффекторные, рецепторные или рефлексивные свойства, а также их комбинации.

## 1.8. Формализация описания и построение модели системы

Изучение любой системы предполагает создание модели системы, позволяющей произвести анализ и предсказать ее поведение в определенном диапазоне условий, решать задачи анализа и синтеза реальной системы. В зависимости от целей и задач моделирования оно может проводиться на различных уровнях абстракции. Модель – описание системы, отражающее определенную группу ее свойств.

Совокупность функционального, морфологического и информационного описаний позволяет отразить главные свойства систем. Результатом структурного, функционального и информационного описания системы должно быть целостное представление о механизме ее функционирования. Особенности системного подхода в данном случае заключаются в следующем:

– при системном рассмотрении объектов мы получаем информацию о связи их возможных состояний с состояниями других объектов;
– применение системного подхода в отдельных случаях дает неискаженное представление об истинном механизме функционирования системы, что является лучшей альтернативой распространенному методу «черного ящика»;
– при рассмотрении практически любого объекта обнаруживаются определенные ограничения, накладываемые на его возможные состояния. Эти ограничения являются важным фактором, воздействующим на процесс управления объектом. Применение системного подхода позволяет максимально уточнить модель ограничений состояния объекта путем учета ограничений, накладываемых структурой и механизмом функционирования системы на возможные состояния объекта;
– при решении задач планирования и оптимизации относительно сложных систем применение системного подхода дает решение, оптимальное именно при учете системного характера рассматриваемого объекта, которое может качественно отличаться от решения, полученного без применения системного подхода.

Результатом разных видов описания системы является модель системы, представленная в виде математической модели, структурной схемы, графа, диаграммы, таблицы, проекта и проч.

***Математическая модель** объекта – это его гомоморфное отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений,* *графиков*. Гомоморфное отображение объединяет группы отношений элементов изучаемого объекта в аналогичные отношения элементов модели. Модель – *это условный образ объекта, построенный для упрощения его исследования*. Предполагается, что изучение модели дает новые знания об объекте либо позволяет определить наилучшие решения в той или иной ситуации.

Для описания основных видов элементов модели рассмотрим конкретную экономическую ситуацию и построим соответствующую ей экономико-математическую модель.

Пусть имеется фирма, выпускающая несколько видов продукции. В процессе производства используются три вида ресурсов: 1) оборудование, 2) рабочая сила, 3) сырье. Эти ресурсы однородны, количество их известно и в данном производственном цикле увеличены быть не могут. Задан расход каждого из ресурсов на производство единицы продукции каждого вида и цены продуктов. Нужно определить объемы производства с целью максимизации стоимости произведенной продукции (или, предположив, что вся она найдет сбыт на рынке, – общей выручки от реализации).

Для решения поставленной задачи нужно построить математическую модель, наполнить ее информацией, а затем провести необходимые расчеты. Вначале при построении модели нужно определить индексы, экзогенные и эндогенные переменные и параметры. В нашей задаче свой индекс должен иметь каждый вид продукции (пусть это индекс $i$, меняющийся от 1 до $n$), а также вид ресурсов (если мы обозначаем их одной переменной; пусть в нашей задаче ресурсы обозначены разными переменными). Далее опишем экзогенные переменные – те, которые задаются вне модели, т. е. известны заранее, и параметры – это коэффициенты уравнений модели. Часто экзогенные переменные и параметры в моделях не разделяют. В рассматриваемой задаче заданы экзогенные переменные – имеющееся количество оборудования $K$, рабочей силы $L$ и сырья $R$; параметры – коэффициенты их расхода на единицу $i$-й продукции $k_i$, $l_i$ и $r_i$ соответственно. Цены продуктов $p_i$ также известны.

Вводим обозначения для эндогенных переменных – тех, которые определяются в ходе расчетов по модели и не задаются в ней извне. В нашем случае это неизвестные объемы производства продукции каждого $i$-го вида; обозначим их $x_i$.

Закончив описание переменных и параметров, переходим к формализации условий задачи, описанию ее допустимого множества и целевой функции (если таковая имеется). В нашей задаче допустимое множество – это совокупность всех вариантов производства, обеспеченных имеющимися ресурсами. Оно описывается с помощью системы неравенств:

$$\begin{cases} k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n \le K; \\ l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n \le L; \\ r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n \le R, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_i k_ix_i \le K; \\ \sum_i l_ix_i \le L; \\ \sum_i r_ix_i \le R. \end{cases}$$

К этим ограничениям по ресурсам добавляются требования неотрицательности переменных $x_i \ge 0$. Если бы какой-то ресурс нужно было израсходовать полностью (например, полностью занять всю рабочую силу), соответствующее неравенство превратилось бы в уравнение. Это сузило бы допустимое множество и, возможно, исключило бы из него первоначально наилучшее решение.

Если модель является *оптимизационной* (в частности, данная модель), то наряду с ограничениями должна быть выписана целевая функция, т. е. максимизируемая или минимизируемая величина, отражающая интересы принимающего решение субъекта. Для данной задачи максимизируется величина $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$, *или* $\sum_i p_ix_i \to \max$.

Построенная экономико-математическая модель не универсальна, так как далеко не всегда хорошо описывает ситуацию и соответствует задачам лица, принимающего решение (ЛПР), т. е. имеет существенные ограничения.

В действительности:

1) ресурсы до некоторой степени взаимозаменяемы;
2) затраты ресурсов не строго пропорциональны выпуску (есть постоянные затраты, не связанные с объемом выпуска; предельные затраты меняются);
3) объемы ресурсов не строго фиксированы, они могут покупаться и продаваться, браться или сдаваться в аренду;
4) внутри каждого вида ресурсов можно выделить составляющие, функционально или качественно различные, в той или иной мере заменяющие или дополняющие друг друга и по-разному влияющие на объем выпуска;

5) цена продукта может зависеть от объема его реализации, то же касается цены ресурса;
6) фирма может использовать одну из конечного набора технологий (или сочетание нескольких таких технологий), характеризующихся определенными сочетаниями используемых ресурсов;
7) различные единицы получаемой прибыли могут иметь разную ценность для лица, принимающего решение (что обусловлено, например, особенностями налоговой системы);
8) интересы и предпочтения субъекта не ограничиваются максимизацией объема прибыли, поэтому целевая функция должна учитывать и другие количественные и качественные показатели;
9) для субъекта реально решаемая задача не ограничивается одним моментом или периодом времени, важны динамические взаимосвязи;
10) на ситуацию могут воздействовать случайные факторы, которые необходимо принять во внимание.

Выделим основные этапы математического моделирования.

**1. Постановка задачи.** Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. Во время анализа системы задача постепенно уточняется.

**2. Формализация задачи.** Получив достаточно строгую и логически непротиворечивую, содержательную постановку задачи, нужно построить ее математическую модель.

**3. Нахождение метода решения.** Для нахождения оптимального решения в зависимости от структуры задачи применяют те или иные методы теории оптимальных решений, называемые также методами математического программирования.

**4. Проверка и корректировка модели.** В сложных системах, к которым относятся системы организационного типа, модель лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия или адекватности модели и реального процесса. Проверку производят сравнением предсказанного поведения с фактическим при изменении значений внешних неуправляемых воздействий. Корректировка может потребовать дополнительных исследований объекта, уточнения структуры математической модели, многочисленных изменений переменных. Таким образом, первые четыре этапа многократно повторяются, пока не будет достигнуто удовлетворительное соответствие между выходами объекта и модели.

**5. Реализация найденного решения на практике.** Внедрение можно рассматривать как самостоятельную задачу, применив к ней системный подход и анализ.

Рассмотрим далее основные этапы эконометрического исследования.

Для пояснения сущности именно *эконометрической модели* и описания основных возникающих при ее построении и анализе проблем удобно разбить весь процесс моделирования на шесть основных этапов.

*1-й этап (постановочный)* – определение конечных целей моделирования, набора участвующих в модели факторов и показателей, их роли;

*2-й этап (априорный)* – анализ экономической сущности изучаемого явления, формирование и формализация априорной информации, в частности, относящейся к природе и генезису исходных статистических данных и случайных остаточных составляющих;

*3-й этап (параметризация)* – собственно моделирование, т. е. выбор общего вида модели, в том числе состава и формы входящих в нее связей;

*4-й этап (информационный)* – сбор необходимой статистической информации, т. е. регистрация значений участвующих в модели факторов и показателей на различных временных или пространственных тактах функционирования изучаемого явления;

*5-й этап (идентификация модели)* – статистический анализ модели, в первую очередь статистическое оценивание неизвестных параметров модели;

*6-й этап (верификация модели)* – сопоставление реальных и модельных данных, проверка адекватности модели, оценка точности.

Проанализируем последовательность и содержание этапов одного цикла экономико-математического моделирования.

1. *Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ*. Главное здесь – четко сформулировать сущность проблемы, принимаемые допущения и те вопросы, на которые требуется получить ответы. Этот этап включает выделение важнейших черт и свойств моделируемого объекта и абстрагирование от второстепенных; изучение структуры объекта и основных зависимостей, связывающих его элементы; формулирование гипотез (хотя бы предварительных), объясняющих поведение и развитие объекта.

2. *Построение математической модели*. Это этап формализации экономической проблемы, выражения ее в виде конкретных математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств и т. д.). Обычно сначала определяется основная конструкция (тип) математической модели, а затем уточняются детали этой конструкции (конкретный перечень переменных и параметров, форма связей). Таким образом, построение модели подразделяется, в свою очередь, на несколько стадий. Неправильно полагать, что чем больше фактов учитывает модель, тем она лучше «работает» и дает лучшие результаты. То же можно сказать о таких характеристиках сложности модели, как используемые формы математических зависимостей (линейные и нелинейные), учет факторов случайности и неопределенности и т. д.

Излишняя сложность и громоздкость модели затрудняют процесс исследования. Нужно учитывать не только реальные возможности информационного и математического обеспечения, но и сопоставлять затраты на моделирование с получаемым эффектом (при возрастании сложности модели прирост затрат может превысить прирост эффекта).

Одна из важных особенностей математических моделей – *потенциальная возможность их использования для решения разнокачественных проблем*. Поэтому, даже сталкиваясь с новой экономической задачей, не нужно стремиться «изобретать» модель; вначале необходимо попытаться применить для решения этой задачи уже известные модели.

В процессе построения модели осуществляется сопоставление двух систем научных знаний – экономических и математических. Естественно стремиться к тому, чтобы получить модель, принадлежащую к хорошо изученному классу математических задач. Часто это удается сделать путем некоторого упрощения исходных предпосылок модели, не искажающих существенных черт моделируемого объекта. Однако возможна и такая ситуация, когда формализация экономической проблемы приводит к неизвестной ранее математической структуре. Потребности экономической науки и практики в середине XX века способствовали развитию математического программирования, теории игр, функционального анализа, вычислительной математики. Вполне вероятно, что в будущем развитие экономической науки станет важным стимулом для создания новых разделов математики.

*3. Математический анализ модели*. Целью этого этапа является выяснение общих свойств модели. Здесь применяются чисто математические приемы исследования. Наиболее важный момент – доказательство существования решений в сформулированной модели (теорема существования). Если удастся доказать, что математическая задача не имеет решения, то необходимость в последующей работе по первоначальному варианту модели отпадает; следует скорректировать либо постановку экономической задачи, либо способы ее математической формализации. При аналитическом исследовании модели выясняются такие вопросы, как, например, единственно ли решение, какие переменные (неизвестные) могут входить в решение, каковы будут соотношения между ними, в каких пределах и в зависимости от каких исходных условий они изменяются, каковы тенденции их изменения и т. д. Аналитическое исследование модели по сравнению с эмпирическим (численным) имеет то преимущество, что получаемые выводы сохраняют свою силу при различных конкретных значениях внешних и внутренних параметров модели.

Знание общих свойств модели имеет немаловажное значение, часто ради доказательства подобных свойств исследователи сознательно идут на идеализацию первоначальной модели. И все же модели сложных экономических объектов с большим трудом поддаются аналитическому исследованию. В тех случаях, когда аналитическими методами не удается выяснить общих свойств модели, а упрощения модели приводят к недопустимым результатам, переходят к численным методам исследования.

*4. Подготовка исходной информации*. Моделирование предъявляет жесткие требования к системе информации. В то же время реальные возможности получения информации ограничивают выбор моделей, предназначаемых для практического использования. При этом принимается во внимание не только принципиальная возможность подготовки информации (за определенные сроки), но и затраты на подготовку соответствующих информационных массивов. Эти затраты не должны превышать эффект от использования дополнительной информации.

В процессе подготовки информации широко используются методы теории вероятностей, теоретической и математической статистики. При системном экономико-математическом моделировании исходная информация, используемая в одних моделях, является результатом функционирования других.

*5. Численное решение.* Этот этап включает разработку алгоритмов для численного решения задачи, составления программ на ПК и непосредственное проведение расчетов. Трудности этого этапа обусловлены прежде всего большой размерностью экономических задач, необходимостью обработки значительных массивов информации.

Обычно расчеты по экономико-математической модели носят многовариантный характер. Благодаря высокому быстродействию современных ПК удается проводить многочисленные «модельные» эксперименты, изучая «поведение» модели при различных изменениях некоторых условий. Исследование, проводимое численными методами, может существенно дополнить результаты аналитического исследования, а для многих моделей оно является единственно осуществимым. Класс экономических задач, которые можно решать численными методами, значительно шире, чем класс задач, доступных аналитическому исследованию.

*6. Анализ численных результатов и их применение.* На этом заключительном этапе цикла встает вопрос о правильности и полноте результатов моделирования, степени практической применимости последних.

Математические методы проверки могут выявлять некорректные построения модели и тем самым сужать класс потенциально правильных моделей. Неформальный анализ теоретических выводов и численных результатов, получаемых посредством модели, сопоставление их с имеющимися знаниями и фактами действительности также позволяют обнаруживать недостатки постановки экономической задачи, сконструированной математической модели, ее информационного и математического обеспечения.

Этапы экономико-математического моделирования между собой связаны. Наличие возвратных связей этапов обусловлено тем, что в процессе исследования могут быть обнаружены недостатки предшествующих этапов моделирования. Уже на этапе построения модели может выясниться, что постановка задачи противоречива или приводит к слишком сложной математической модели. В соответствии с этим исходная постановка задачи корректируется. Далее математический анализ модели (этап 3) может показать, что небольшая модификация постановки задачи или ее формализации дает интересный аналитический результат.

Наиболее часто необходимость возврата к предшествующим этапам моделирования возникает при подготовке исходной информации (этап 4). Может обнаружиться, что необходимая информация отсутствует или же затраты на ее подготовку слишком велики. Тогда приходится возвращаться к постановке задачи и ее формализации, изменяя их так, чтобы приспособиться к имеющейся информации.

Поскольку экономико-математические задачи могут быть сложны по своей структуре, иметь большую размерность, то часто случается, что известные алгоритмы и программы для PC не позволяют решить задачу в первоначальном виде. Если невозможно в короткий срок разработать новые алгоритмы и программы, исходную постановку задачи и модель упрощают: снимают и объединяют условия, уменьшают число факторов, нелинейные соотношения заменяют линейными, усиливают детерминизм модели и т. д.

Недостатки, которые не удается исправить на промежуточных этапах моделирования, устраняются в последующих циклах. Но результаты каждого цикла имеют и вполне самостоятельное значение. Начав исследование с построения простой модели, можно быстро получить полезные результаты, а затем перейти к созданию более совершенной модели, дополняемой новыми условиями, включающей уточненные математические зависимости.

По мере развития и усложнения экономико-математического моделирования его отдельные этапы обособляются в специализированные области исследований, усиливаются различия между теоретико-аналитическими и прикладными моделями, происходит дифференциация моделей по уровням абстракции и идеализации.

Теория математического анализа моделей экономики развилась в особую ветвь современной прикладной математики – **математическую экономику**. Модели, изучаемые в рамках математической экономики, теряют непосредственную связь с экономической реальностью; они имеют дело с исключительно идеализированными экономическими объектами и ситуациями. При построении таких моделей главным принципом является не столько приближение к реальности, сколько получение возможно большего числа аналитических результатов посредством математических доказательств. Ценность этих моделей для экономической теории и практики состоит в том, что они служат теоретической базой для моделей прикладного типа.

**Структурные схемы.** Формирование структуры является частью решения общей задачи описания системы. Структура выявляет общую конфигурацию системы, а не определяет систему в целом. Если изобразить систему как совокупность блоков, осуществляющих некоторые функциональные преобразования, и связей между ними, то получим структурную схему, в обобщенном виде описывающую структуру системы. Под блоком обычно понимают, особенно в технических системах, функционально законченное и оформленное в виде отдельного целого устройство. Членение на блоки может осуществляться исходя из требуемой степени детализации описания структуры, наглядности отображения в ней особенностей процессов функционирования, присущих системе. Помимо функциональных в структурную схему могут включаться логические блоки, позволяющие изменять характер функционирования в зависимости от того, выполняются или нет некоторые заранее заданные условия.

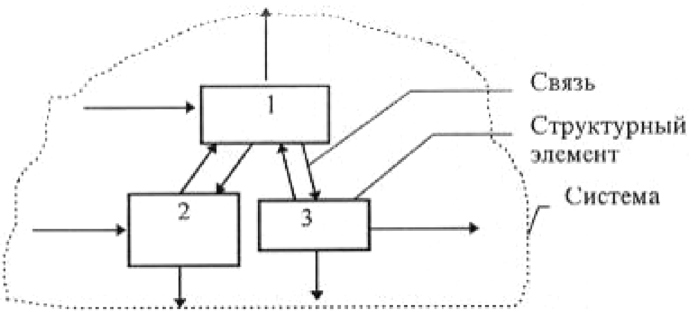



Рис. 1.8. Пример структурной схемы

Структурные схемы наглядны и вмещают в себя информацию о большом числе структурных свойств системы. Они легко поддаются уточнению и конкретизации, в ходе которой не надо изменять всю схему, а достаточно заменить отдельные ее элементы структурными схемами, включающими не один, как раньше, а несколько взаимодействующих блоков.

Однако структурная схема – это еще не модель структуры. Она с трудом поддается формализации и является скорее естественным мостиком, облегчающим переход от содержательного описания системы к математическому, чем действительным инструментом анализа и синтеза структур.

**Графы.** Отношения между элементами структуры могут быть представлены соответствующим графом, что позволяет формализовать процесс исследования инвариантных во времени свойств систем и использовать хорошо развитый математический аппарат теории графов.

***Графом*** называют тройку G = (M, R, P), где M – множество вершин, R –множество ребер (или дуг графа), P – предикат инцидентности вершин и ребер графа. P(x, y, r) = 1 означает, что вершины $x, y \in M$ инцидентны (связаны, лежат на) ребру графа $r \in R$.

Для того чтобы облегчить работу с графом, вершины его обычно нумеруют. Граф с пронумерованными вершинами называется отмеченным.

Каждое ребро графа связывает две вершины, называемые в этом случае смежными. Если граф отмечен, то ребро задается парой (i, j), где i и j – номера смежных вершин. Очевидно, что ребро (i, j) инцидентно вершинам i и j, и обратно.

Если все ребра графа заданы упорядоченными парами (i, j), в которых порядок расположения смежных вершин имеет значение, то граф называется ориентированным. Неориентированный граф не содержит ориентированных ребер. В частично ориентированном графе ориентированы не все ребра.

Геометрически графы изображают в виде диаграмм, на которых вершины отображаются точками (окружностями, прямоугольниками), а ребра – отрезками, соединяющими смежные вершины. Ориентированное ребро задают отрезком со стрелкой.

Использование диаграмм настолько распространено, что, говоря о графе, обычно представляют себе именно диаграмму графа.

Если ребра графа имеют некоторые числовые характеристики связи, то такие графы называются взвешенными. В этом случае матрица инцидентности содержит веса соответствующих связей, знак перед числом определяет направление ребра.

Важной характеристикой структурного графа является число возможных путей, по которым можно пройти от одной вершины к другой. Чем больше таких путей, тем совершеннее структура, но тем она избыточнее. Избыточность обеспечивает надежность структуры. Например, разрушение 90% нервных связей головного мозга не ощущается и не влияет на поведение. Может существовать и бесполезная избыточность, изображаемая в структурном графе в виде петель.

## 1.9. Принципы и закономерности внутримодельного исследования системы

### 1. Закономерности взаимодействия части и целого

**1.1. Целостность/эмерджентность.** Закономерность целостности/эмерджентности проявляется в появлении у системы новых свойств, отсутствующих у элементов.

Для того чтобы глубже понять закономерность целостности, необходимо прежде всего учитывать две ее стороны:

1) свойства системы (целого) $Q_s$ не являются простой суммой свойств составляющих ее элементов (частей) $q_i$:

$$Q_s \neq \sum_{i=1}^{n} q_i ;$$

2) свойства системы (целого) зависят от свойств составляющих ее элементов (частей): $Q_s = f(q_i)$.

Кроме этих двух основных сторон следует иметь в виду, что объединенные в систему элементы, как правило, утрачивают часть своих свойств, присущих им вне системы, т. е. система как бы подавляет ряд свойств элементов. Но, с другой стороны, элементы, попав в систему, могут приобрести новые свойства.

Обратимся к закономерности, двойственной по отношению к закономерности целостности. Ее называют физической *аддитивностью, независимостью, суммативностью, обособленностью.* Свойство физической аддитивности проявляется у системы, как бы распавшейся на независимые элементы; тогда становится справедливым

$$Q_s = \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

В этом случае и говорить о системе уже нельзя.

Промежуточные варианты – две сопряженные закономерности, которые можно назвать *прогрессирующей факторизацией* – стремлением системы к состоянию со всё более независимыми элементами, и *прогрессирующей систематизацией* – стремлением системы к уменьшению самостоятельности элементов, т. е. к большей целостности.

**1.2. Интегративность**. Этот термин часто употребляется как синоним целостности. Однако некоторые исследователи выделяют эту закономерность как самостоятельную, стремясь подчеркнуть интерес не к внешним факторам проявления целостности, а к более глубоким причинам, обусловливающим возникновение этого свойства, к факторам, обеспечивающим сохранение целостности.

Интегративными называют системо*образующие*, системо*сохраняющие* факторы, в числе которых важную роль играют неоднородность и противоречивость элементов (исследуемые большинством философов), с одной стороны, и стремление их вступать в коалиции – с другой.

***2. Закономерности иерархической упорядоченности систем***

Эта группа закономерностей характеризует взаимодействие системы с ее окружением – со средой (значимой или существенной для системы), надсистемой, подчиненными системами.

**3.1. Коммуникативность**. Эта закономерность составляет основу определения системы, где система не изолирована от других систем, она связана множеством коммуникаций со средой, представляющей собой сложное и неоднородное образование, содержащее *надсистему* (метасистему – систему более высокого порядка, задающую требования и ограничения исследуемой системе), *подсистемы* (нижележащие, подведомственные системы) и *системы одного уровня с рассматриваемой.* Такое сложное единство со средой названо *закономерностью коммуникативности,* которая, в свою очередь, легко помогает перейти к иерархичности как закономерности построения всего мира и любой выделенной из него системы.

**3.2. Иерархичность.** *Иерархичность* или *иерархическая упорядоченность* была в числе первых закономерностей теории систем, которые выделил и исследовал Л. фон Берталанфи. Необходимо учитывать не только внешнюю структурную сторону иерархии, но и функциональные взаимоотношения между уровнями. Например, в биологических организациях более высокий иерархический уровень оказывает направляющее воздействие на нижележащий уровень, подчиненный ему, и это воздействие проявляется в том, что подчиненные члены иерархии приобретают новые свойства, отсутствовавшие у них в изолированном состоянии (подтверждение положения о влиянии целого на элементы, приведенного выше), а в результате появления этих новых свойств формируется новый, другой «облик целого» (влияние свойств элементов на целое). Возникшее таким образом новое целое приобретает способность осуществлять новые функции, в чем и состоит цель образования иерархий.

Выделим основные особенности иерархической упорядоченности с точки зрения полезности их использования в качестве моделей системного анализа.

1. В силу закономерности коммуникативности, которая проявляется не только между выделенной системой и ее окружением, но и между уровнями иерархии исследуемой системы, каждый уровень иерархической упорядоченности имеет сложные взаимоотношения с вышестоящим и нижележащим уровнями. По метафорической формулировке, каждый уровень иерархии обладает свойством «двуликого Януса»: «лик», направленный в сторону нижележащего уровня, имеет характер автономного целого (системы), а «лик», направленный к узлу (вершине) вышестоящего уровня, проявляет свойства зависимой части (элемента вышестоящей системы).

Эта конкретизация закономерности иерархичности объясняет неоднозначность использования в сложных организационных системах понятий «система» и «подсистема», «цель» и «средство» (элемент каждого уровня иерархической структуры целей выступает как цель по отношению к нижележащим и как «подцель», а начиная с некоторого уровня и как «средство» по отношению к вышестоящей цели), что часто наблюдается в реальных условиях и приводит к некорректным терминологическим спорам.

2. Важнейшая особенность иерархической упорядоченности как закономерности заключается в том, что закономерность целостности/эмерджентности (т. е. качественные изменения свойств компонентов более высокого уровня по сравнению с объединяемыми компонентами нижележащего) проявляется в ней на каждом уровне иерархии. При этом объединение элементов в каждом узле иерархической структуры приводит не только к появлению новых свойств у узла и утрате объединяемыми компонентами свободы проявления некоторых своих свойств, но и к тому, что каждый подчиненный член иерархии приобретает новые свойства, отсутствовавшие у него в изолированном состоянии.

***3. Закономерности осуществимости систем***

Проблема осуществимости систем является наименее исследованной. Рассмотрим некоторые из закономерностей, помогающие понять эту проблему и учитывать ее при определении принципов проектирования и организации функционирования систем управления.

**3.1. Эквифинальность.** Эта закономерность характеризует предельные возможности системы. Л. фон Берталанфи, предложивший этот термин, определил *эквифинальность* как «способность в отличие от состояния равновесия в закрытых системах, полностью детерминированных начальными условиями,...достигать не зависящего от времени состояния, которое не зависит от ее начальных условий и определяется исключительно параметрами системы». В соответствии с данной закономерностью система может достигнуть требуемого конечного состояния, не зависящего от времени и определяемого исключительно собственными характеристиками системы при различных начальных условиях и различными путями. Это форма устойчивости по отношению к начальным и граничным условиям.

**3.2. Закон «необходимого разнообразия».** На необходимость учитывать предельную осуществимость системы при создании впервые в теории систем обратил внимание У.Р. Эшби. Он сформулировал закономерность, известную как закон *«необходимого разнообразия»*.

Для задач принятия решений наиболее важным является одно из следствий этой закономерности, которое можно упрощенно пояснить на следующем примере. Когда исследователь (ЛПР – лицо, принимающее решение, наблюдатель) $N$ сталкивается с проблемой $D$, решение которой для него неочевидно, то имеет место некоторое разнообразие возможных решений $V_d$. Этому разнообразию противостоит разнообразие мыслей исследователя (наблюдателя) $V_n$. Задача исследователя заключается в том, чтобы свести разнообразие $V_d - V_n$ к минимуму, в идеале – к 0.

Эшби доказал теорему, на основе которой формулируется следующий вывод: «Если $V_d$ дано постоянное значение, то $V_d - V_n$ может быть уменьшено лишь за счет соответствующего роста $V_n$. Только разнообразие в $N$ может уменьшить разнообразие, создаваемое в $D$; только разнообразие может уничтожить разнообразие».

Применительно к системам управления закон «необходимого разнообразия» может быть сформулирован следующим образом: *разнообразие управляющей системы (системы управления)* $V_{su}$ должно быть больше или, по крайней мере, равно разнообразию управляемого объекта $V_{ou}$:

$$V_{su} > V_{ou}.$$

Возможны следующие пути совершенствования управления при усложнении производственных процессов:

1) увеличение $V_{su}$, что может быть достигнуто путем роста численности аппарата управления, повышения его квалификации, механизации и автоматизации управленческих работ;
2) уменьшение $V_{ou}$ за счет установления более четких и определенных правил поведения компонентов системы: унификации, стандартизации, типизации, введения поточного производства, сокращения номенклатуры деталей, узлов, технологической оснастки и т. п.;
3) снижение уровня требований к управлению, т. е. сокращение числа постоянно контролируемых и регулируемых параметров управляемой системы;
4) самоорганизация объектов управления путем ограничения контролируемых параметров с помощью создания саморегулирующихся подразделений (цехов, участков с замкнутым циклом производства, с относительной самостоятельностью и ограничением вмешательства централизованных органов управления предприятием и т. п.).

***4. Закономерности развития систем***

В последнее время все больше осознается необходимость учета при моделировании систем принципов их изменения во времени, и понять их помогут рассматриваемые ниже закономерности.

**4.1. Историчность.** Хотя, казалось бы, очевидно, что любая система не может быть неизменной, что она не только возникает, функционирует, развивается, но и погибает, и каждый легко может привести примеры становления, расцвета, упадка (старения) и даже смерти (гибели) биологических и социальных систем, все же для конкретных случаев развития организационных систем и сложных технических комплексов трудно определить эти периоды. Не всегда руководители организаций и конструкторы технических систем учитывают, что время является непременной характеристикой системы, что каждая система подчиняется закономерности *историчности* и что эта закономерность – такая же объективная, как целостность, иерархическая упорядоченность и др. При этом закономерность историчности можно учитывать не только пассивно, фиксируя старение, но и использовать для предупреждения «смерти» системы, разрабатывая «механизмы» реконструкции, реорганизации системы для сохранения ее в новом качестве.

**4.2. Закономерность самоорганизации**. В числе основных особенностей самоорганизующихся систем с активными элементами названы способность противостоять энтропийным тенденциям, способность адаптироваться к изменяющимся условиям, преобразуя при необходимости свою структуру и т. п. В основе этих внешне проявляющихся способностей лежит более глубокая закономерность, базирующаяся на сочетании в любой реальной развивающейся системе двух противоречивых тенденций: с одной стороны, для всех явлений, в том числе и для развивающихся, открытых систем справедлив второй закон термодинамики («второе начало»), т. е. стремление к *возрастанию энтропии;* а с другой стороны, наблюдаются *негэнтропийные* (противоположные энтропийным) тенденции, лежащие в основе эволюции. Важные результаты в понимании закономерности самоорганизации получены в исследованиях, которые относят к развивающейся науке, называемой *синергетикой.*

**Синергетикой** называют междисциплинарное научное направление, изучающее универсальные закономерности процессов самоорганизации, эволюции и кооперации. Ее цель состоит в построении общей теории сложных систем, обладающих особыми свойствами. В отличие от простых, сложные системы имеют следующие основные характеристики:

- множество неоднородных компонентов;
- активность (целенаправленность) компонентов;
- множество различных, параллельно проявляющихся взаимосвязей между компонентами;
- семиотическая (слабоформализуемая) природа взаимосвязей;
- кооперативное поведение компонентов;
- открытость;
- распределенность;
- динамичность, обучаемость, эволюционный потенциал;
- неопределенность параметров среды.

Особое место в синергетике занимают вопросы спонтанного образования упорядоченных структур различной природы в процессах взаимодействия, когда исходные системы находятся в неустойчивых состояниях. Следуя И. Пригожину, ее можно кратко охарактеризовать как «комплекс наук о возникающих системах». Согласно синергетическим моделям, эволюция системы сводится к последовательности неравновесных фазовых переходов. Принцип развития формулируется как последовательное прохождение критических областей – точек *бифуркации* (раздвоения, разветвления). Вблизи точек бифуркации наблюдается резкое усиление *флуктуации* (от лат. *fluctuatio* – колебание, отклонение). Выбор, по которому пойдет развитие после бифуркации, определяется в момент неустойчивости. Поэтому зона бифуркации характеризуется принципиальной непредсказуемостью – неизвестно, станет ли дальнейшее развитие системы хаотическим или родится новая, более упорядоченная структура. Здесь резко возрастает роль неопределенности: случайность на входе в неравновесной ситуации может дать на выходе катастрофические последствия. В то же время сама возможность спонтанного возникновения порядка из хаоса – важнейший момент процесса самоорганизации в сложной системе.

Главные принципы синергетического подхода в современной науке:

**1. Принцип дополнительности Н. Бора.** В сложных системах возникает необходимость сочетания различных, ранее казавшихся несовместимыми, а ныне взаимодополняющих друг друга моделей и методов описания.

**2. Принцип спонтанного возникновения И. Пригожина.** В сложных системах возможны особые критические состояния, когда малейшие флуктуации могут внезапно привести к появлению новых структур, полностью отличающихся от обычных (в частности, это может вести к катастрофическим последствиям – эффекты «снежного кома» или эпидемии).

**3. Принцип несовместимости Л. Заде.** При росте сложности системы уменьшается возможность ее точного описания вплоть до некоторого порога, за которым точность и релевантность (смысловая связанность) информации становятся несовместимыми, взаимно исключающими характеристиками.

**4. Принцип управления неопределенностями.** В сложных системах требуется переход от борьбы с неопределенностями к управлению неопределенностями. Различные виды неопределенности должны преднамеренно вводиться в модель исследуемой системы, поскольку они служат фактором, благоприятствующим инновациям (системным мутациям).

**5. Принцип незнания.** Знания о сложных системах принципиально являются неполными, неточными и противоречивыми: они обычно формируются не на основе логически строгих понятий и суждений, а исходя из индивидуальных мнений и коллективных идей. Поэтому в подобных системах важную роль играет моделирование частичного знания и незнания.

**6. Принцип соответствия.** Язык описания сложной системы должен соответствовать характеру располагаемой о ней информации (уровню знаний или неопределенности). Точные логико-математические, синтаксические модели не являются универсальным языком, также важны нестрогие, приближенные, семиотические модели и неформальные методы. Один и тот же объект может описываться семейством языков различной жесткости.

**7. Принцип разнообразия путей развития.** Развитие сложной системы многовариантно и альтернативно, существует «спектр» путей ее эволюции. Переломный критический момент неопределенности будущего развития сложной системы связан с наличием зон бифуркации – «разветвления» возможных путей эволюции системы.

**8. Принцип единства и взаимопереходов порядка и хаоса.** Эволюция сложной системы проходит через неустойчивость; хаос не только разрушителен, но и конструктивен. Организационное развитие сложных систем предполагает своего рода конъюнкцию порядка и хаоса.

**9. Принцип колебательной (пульсирующей) эволюции.** Процесс эволюции сложной системы носит не поступательный, а циклический или волновой характер: он сочетает в себе дивергентные (рост разнообразия) и конвергентные (свертывание разнообразия) тенденции, фазы зарождения порядка и поддержания порядка. Открытые сложные системы пульсируют: дифференциация сменяется интеграцией, разбегание – сближением, ослабление связей – их усилением и т. п.

Перечисленные принципы синергетической методологии можно разбить на три группы: *принципы сложности* (1–3), *принципы неопределенности* (3–6) и *принципы эволюции* (7–9).

***5. Закономерности возникновения и формулирования целей***

Обобщение результатов исследований процессов целеобразования, проводимых философами, психологами, кибернетиками, и наблюдение процессов обоснования и структуризации целей в конкретных условиях позволили сформулировать некоторые общие принципы, закономерности, которые полезно использовать на практике.

**5.1. Зависимость представления о цели и формулировки цели от стадии познания объекта (процесса) и от времени.** Анализ определений понятия «цель» позволяет сделать вывод о том, что, формулируя цель, нужно стремиться отразить в формулировке или в способе представления цели основное противоречие: ее активную роль в познании, управлении, и в то же время необходимость сделать ее реалистичной, направить с ее помощью деятельность на получение определенного полезного результата. При этом формулировка цели и представление о цели зависят от стадии познания объекта, и по мере развития представления о нем цель может переформулироваться.

**5.2. Зависимость цели от внешних и внутренних факторов.** При анализе причин возникновения и формулирования целей нужно учитывать, что на цель влияют как внешние по отношению к системе факторы (внешние требования, потребности, мотивы, программы), так и внутренние (потребности, мотивы, программы самой системы и ее элементов, исполнителей цели); при этом последние являются такими же объективно влияющими на процесс целеобразования факторами, как и внешние (особенно при использовании в системах управления понятия цели как средства побуждения к действию).

**5.3. Проявление в структуре целей закономерности целостности.** В иерархической структуре закономерность целостности (эмерджентности) проявляется на любом уровне иерархии. Применительно к структуре целей это означает, что, с одной стороны, достижение цели вышестоящего уровня не может быть полностью обеспечено достижением подчиненных ей подцелей, хотя и зависит от них, а, с другой стороны, потребности, программы (как внешние, так и внутренние) нужно исследовать на каждом уровне структуризации, и получаемые разными ЛПР расчленения подцелей в силу различного раскрытия неопределенности могут оказаться разными, т. е. разные ЛПР могут предложить разные иерархические структуры целей и функций, даже при использовании одних и тех же принципов структуризации и методик.

**5.4. Закономерности формирования иерархических структур целей.** Учитывая, что наиболее распространенным способом представления целей в системах организационного управления являются древовидные иерархические структуры («деревья целей»), рассмотрим основные рекомендации по их формированию:

– приемы, применяющиеся при формировании древовидных иерархий целей, можно свести к двум подходам: а) формирование структур целей «сверху» – методы структуризации, декомпозиции, целевой или целенаправленный подход, б) формирование структур целей

«снизу» – морфологический, лингвистический, тезаурусный, терминальный подход; на практике обычно эти подходы сочетаются;
- цели нижележащего уровня иерархии можно рассматривать как средства для достижения целей вышестоящего уровня, при этом они же являются целями для уровня нижележащего по отношению к ним;
- в иерархической структуре по мере перехода с верхнего уровня на нижний происходит как бы смещение рассмотренной выше «шкалы» от цели-направления (цели-идеала, цели-мечты) к конкретным целям и функциям, которые на нижних уровнях структуры могут выражаться в виде ожидаемых результатов конкретной работы с указанием критериев оценки ее выполнения, в то время как на верхних уровнях иерархии указание критериев может быть либо выражено в общих требованиях (например, «повысить эффективность»), либо вообще не приводится в формулировке цели;
- для того чтобы структура целей была удобной для анализа и организации управления, к ней рекомендуется предъявлять некоторые требования – число уровней иерархии и число компонентов в каждом узле должно быть (в силу гипотезы Миллера или числа Колмогорова) $K = 5 \pm 2$ (предел восприятия человеком).

Приведем еще несколько важных законов.

**Закон простоты сложных систем.** *Реализуется, выживает, отбирается тот вариант сложной системы, который обладает наименьшей сложностью.*

Закон простоты сложных систем реализуется природой в ряде конструктивных принципов:
- Оккама;
- иерархического модульного построения сложных систем;
- симметрии;
- симморфоза (равнопрочности, однородности);
- полевого взаимодействия (взаимодействия через носитель);
- экстремальной неопределенности (функции распределения характеристик и параметров, имеющих неопределенные значения, имеют экстремальную неопределенность).

**Закон конечности скорости распространения взаимодействия.** *Все виды взаимодействия между системами, их частями и элементами име-*

*ют конечную скорость распространения. Ограничена также скорость изменения состояний элементов системы.* Автором закона является А. Эйнштейн.

**Теорема Геделя о неполноте.** *В достаточно богатых теориях (включающих арифметику) всегда существуют недоказуемые истинные выражения.*

Поскольку сложные системы включают в себя (реализуют) элементарную арифметику, то при выполнении вычислений в ней могут возникнуть тупиковые ситуации (зависания).

**Закон эквивалентности вариантов построения сложных систем.** *С ростом сложности системы доля вариантов ее построения, близких к оптимальному варианту, растет.*

**Закон Онсагера максимизации убывания энтропии.** *Если число всевозможных форм реализации процесса, согласных с законами физики, не единственно, то реализуется та форма, при которой энтропия системы растет наиболее медленно. Иначе говоря, реализуется та форма, при которой максимизируется убывание энтропии или рост информации, содержащейся в системе.*

## 1.10. Структура анализа системы

Общий подход к анализу системы может быть представлен как цикл (рис. 1.9). При этом в процессе функционирования реальной системы выявляется проблема практики как несоответствие существующего положения дел требуемому. Для решения проблемы проводится исследование (декомпозиция, анализ и синтез) системы, снимающее проблему. В ходе синтеза осуществляется оценка анализируемой и синтезируемой систем. Реализация синтезированной системы в виде предлагаемой физической системы позволяет провести оценку степени снятия проблемы практики и принять решение на функционирование модернизированной (новой) реальной системы.

При таком представлении становится очевидным еще один аспект определения системы: система есть средство решения проблем.

Основные задачи системного анализа могут быть представлены в виде трехуровневого дерева функций (рис. 1.10).

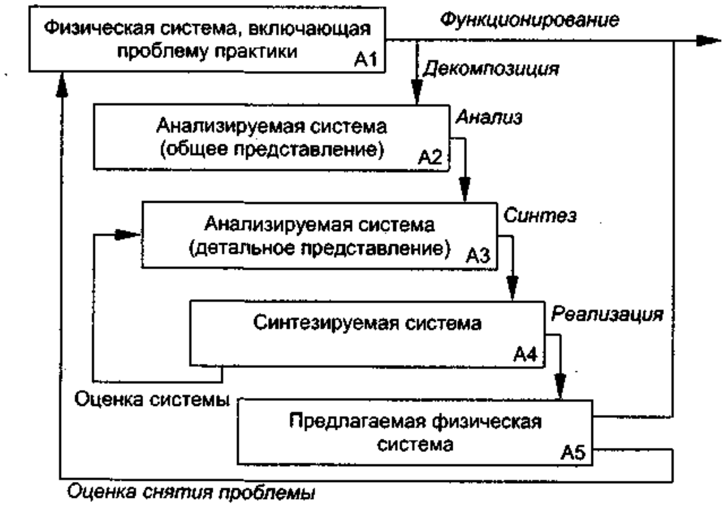



Рис. 1.9. Цикл анализа систем


Рис. 1.10. Структура системного анализа

На этапе *декомпозиции,* обеспечивающем общее представление системы, осуществляются:

1. Определение и декомпозиция общей цели исследования и основной функции системы как ограничение траектории в пространстве состояний системы или в области допустимых ситуаций. Наиболее часто декомпозиция проводится путем построения дерева целей и дерева функций.
2. Выделение системы из среды (разделение на систему/«несистему») по критерию участия каждого рассматриваемого элемента в процессе, приводящем к результату на основе рассмотрения системы как составной части надсистемы.
3. Описание воздействующих факторов.
4. Описание тенденций развития, неопределенностей разного рода.
5. Описание системы как «черного ящика».
6. Функциональная (по функциям), компонентная (по виду элементов) и структурная (по виду отношений между элементами) декомпозиции системы.

Глубина декомпозиции ограничивается. Декомпозиция должна прекращаться, если необходимо изменить уровень абстракции – представить элемент как подсистему. Если при декомпозиции выясняется, что модель начинает описывать внутренний алгоритм функционирования элемента вместо закона его функционирования в виде «черного ящика», то в этом случае произошло изменение уровня абстракции. Это означает выход за пределы цели исследования системы и, следовательно, вызывает прекращение декомпозиции.

В автоматизированных методиках типичной является декомпозиция модели на глубину 5–6 уровней. На такую глубину декомпозируется обычно одна из подсистем. Функции, которые требуют такого уровня детализации, часто очень важны, и их детальное описание дает ключ к секретам работы всей системы.

В общей теории систем доказано, что большинство систем могут быть декомпозированы на базовые представления подсистем. К ним относят: последовательное (каскадное) соединение элементов, параллельное соединение элементов, соединение с помощью обратной связи.

Проблема проведения декомпозиции состоит в том, что в сложных системах отсутствует однозначное соответствие между законом функционирования подсистем и алгоритмом, его реализации. Поэтому осуществляется формирование нескольких вариантов (или одного варианта, если система отображена в виде иерархической структуры) декомпозиции системы.

Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые стратегии декомпозиции.

*Функциональная декомпозиция.* Декомпозиция базируется на анализе функций системы. При этом ставится вопрос: *что* делает система, независимо от того, *как* она работает. Основанием разбиения на функциональные подсистемы служит общность функций, выполняемых группами элементов.

*Декомпозиция по жизненному циклу.* Признак выделения подсистем – изменение закона функционирования подсистем на разных этапах цикла существования системы «от рождения до гибели». Рекомендуется применять эту стратегию, когда целью системы является оптимизация процессов и когда можно определить последовательные стадии преобразования входов в выходы.

*Декомпозиция по физическому процессу.* Признак выделения подсистем – шаги выполнения алгоритма функционирования подсистемы, стадии смены состояний. Хотя эта стратегия полезна при описании существующих процессов, результатом ее часто может стать слишком последовательное описание системы, которое не будет в полной мере учитывать ограничения, диктуемые функциями друг другу. При этом может оказаться скрытой последовательность управления. Применять эту стратегию следует, только если целью модели является описание физического процесса как такового.

*Декомпозиция по подсистемам (структурная декомпозиция).* Признак выделения подсистем – сильная связь между элементами по одному из типов отношений (связей), существующих в системе (информационных, логических, иерархических, энергетических и т. п.). Силу связи, например, по информации можно оценить коэффициентом информационной взаимосвязи подсистем $k = N/N_0$, где $N$ – количество взаимоиспользуемых информационных массивов в подсистемах, $N_0$ – общее количество информационных массивов. Для описания всей системы должна быть построена составная модель, объединяющая все отдельные модели. Рекомендуется использовать разложение на подсистемы, только когда такое разделение на основные части системы не изменяется. Нестабильность границ подсистем быстро обесценит как отдельные модели, так и их объединение.

На этапе *анализа,* обеспечивающем формирование детального представления системы, осуществляются:

1. Функционально-структурный анализ существующей системы, позволяющий сформулировать требования к создаваемой системе. Он включает уточнение состава и законов функционирования элементов, алгоритмов функционирования и взаимовлияний подсистем, разделение управляемых и неуправляемых характеристик, задание пространства состояний $Z$, задание параметрического пространства $T$, в котором задано поведение системы, анализ целостности системы, формулирование требований к создаваемой системе.
2. Морфологический анализ – анализ взаимосвязи компонентов.
3. Генетический анализ – анализ предыстории, причин развития ситуации, имеющихся тенденций, построение прогнозов.
4. Анализ аналогов.
5. Анализ эффективности (по результативности, ресурсоемкости, оперативности). Он включает выбор шкалы измерения, формирование показателей эффективности, обоснование и формирование критериев эффективности, непосредственно оценивание и анализ полученных оценок.
6. Формирование требований к создаваемой системе, включая выбор критериев оценки и ограничений.

Этап *синтеза* системы, решающей проблему, представлен в виде упрощенной функциональной диаграммы на рис. 1.11. На этом этапе осуществляются:

1) разработка модели требуемой системы (выбор математического аппарата, моделирование, оценка модели по критериям адекватности, простоты, соответствия между точностью и сложностью, баланса погрешностей, многовариантности реализаций, блочности построения);
2) синтез альтернативных структур системы, снимающей проблему;
3) синтез параметров системы, снимающей проблему;
4) оценивание вариантов синтезированной системы (обоснование схемы оценивания, реализация модели, проведение эксперимента по оценке, обработка результатов оценивания, анализ результатов, выбор наилучшего варианта).

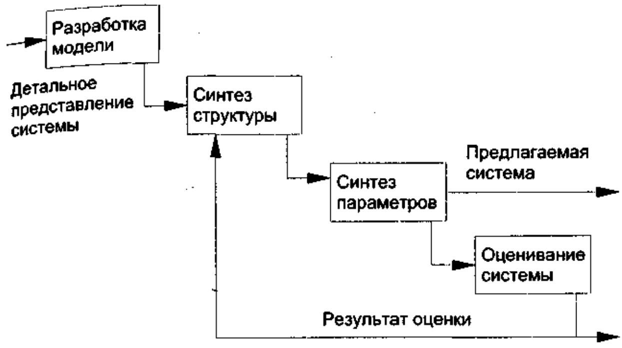



Рис. 1.11. Упрощенная функциональная диаграмма этапа синтеза системы, решающей проблему

Оценка степени снятия проблемы проводится при завершении системного анализа.

Наиболее сложными в исполнении являются этапы декомпозиции и анализа. Это связано с высокой степенью неопределенности, которую требуется преодолеть в ходе исследования.

Рассмотрим процесс формирования общего и детального представления системы, включающий девять основных стадий.

### *Формирование общего представления системы*

**Стадия 1**. Выявление главных функций (свойств, целей, предназначения) системы. Формирование (выбор) основных предметных понятий, используемых в системе. На этой стадии речь идет об уяснении основных выходов в системе. Именно с этого лучше всего начинать ее исследование. Должен быть определен тип выхода: материальный, энергетический, информационный, они должны быть отнесены к каким-либо физическим или другим понятиям (выход производства – продукция (какая?), выход системы управления – командная информация (для чего? в каком виде?), выход автоматизированной информационной системы – сведения (о чем?) и т. д.).

**Стадия 2.** Выявление основных функций и частей (модулей) в системе. Понимание единства этих частей в рамках системы. На этой стадии происходит первое знакомство с внутренним содержанием системы, выявляется, из каких крупных частей она состоит и какую роль каждая часть играет в системе. Это стадия получения первичных сведений о структуре и характере основных связей. Такие сведения следует представлять и изучать при помощи структурных или объектно-ориентированных методов анализа систем, где, например, выясняется наличие преимущественно последовательного или параллельного характера соединения частей, взаимной или преимущественно односторонней направленности воздействий между частями и т. п. Уже на этой стадии следует обратить внимание на так называемые системообразующие факторы, т. е. на те связи, взаимообусловленности, которые и делают систему системой.

**Стадия 3**. Выявление основных процессов в системе, их роли, условий осуществления; выявление стадийности, скачков, смен состояний в функционировании; в системах с управлением – выделение основных управляющих факторов. Здесь исследуется динамика важнейших изменений в системе, ход событий, вводятся параметры состояния, рассматриваются факторы, влияющие на эти параметры, обеспечивающие течение процессов, а также условия начала и конца процессов. Определяется, управляемы ли процессы и способствуют ли они осуществлению системой своих главных функций. Для управляемых систем уясняются основные управляющие воздействия, их тип, источник и степень влияния на систему.

**Стадия 4**. Выявление основных элементов «несистемы», с которыми связана изучаемая система. Выяснение характера этих связей. На этой стадии решается ряд отдельных проблем. Исследуются основные внешние воздействия на систему (входы). Определяются их тип (вещественные, энергетические, информационные), степень влияния на систему, основные характеристики. Фиксируются границы того, что считается системой, определяются элементы «несистемы», на которые направлены основные выходные воздействия. Здесь же полезно проследить эволюцию системы, путь ее формирования. Нередко именно это ведет к пониманию структуры и особенностей функционирования системы. В целом данная стадия позволяет лучше уяснить главные функции системы, ее зависимость и уязвимость или относительную независимость во внешней среде.

**Стадия 5**. Выявление неопределенностей и случайностей в ситуации их определяющего влияния на систему (для стохастических систем).

**Стадия 6**. Выявление разветвленной структуры, иерархии, формирование представлений о системе как о совокупности модулей, связанных входами-выходами. Стадией 6 заканчивается формирование общих представлений о системе. Как правило, этого достаточно, если речь идет об объекте, с которым мы непосредственно работать не будем. Если же речь идет о системе, которой надо заниматься для ее глубокого изучения, улучшения, управления, то нам придется пойти дальше по спиралеобразному пути углубленного исследования системы.

### *Формирование детального представления системы*

**Стадия 7**. Выявление всех элементов и связей, важных для целей рассмотрения. Их отнесение к структуре иерархии в системе. Ранжирование элементов и связей по их значимости.

Стадии 6 и 7 тесно связаны друг с другом, поэтому их обсуждение полезно провести вместе. Стадия 6 – это предел познания «внутрь» достаточно сложной системы для лица, оперирующего ею целиком. Более углубленные знания о системе (стадия 7) будет иметь уже только специалист, отвечающий за ее отдельные части. Для не слишком сложного объекта уровень стадии 7 – знание системы целиком – достижим и для одного человека. Таким образом, хотя суть стадий 6 и 7 одна и та же, но в первой из них мы ограничиваемся тем разумным объемом сведений, который доступен одному исследователю.

При углубленной детализации важно выделять именно существенные для рассмотрения элементы (модули) и связи, отбрасывая все то, что не представляет интереса для целей исследования. Познание системы предполагает не всегда только отделение существенного от несущественного, но также акцентирование внимания на более существенном. Детализация должна затронуть и уже рассмотренную в стадии 4 связь системы с «несистемой». На стадии 7 совокупность внешних связей считается проясненной настолько, что можно говорить о доскональном знании системы.

Стадии 6 и 7 подводят итог общему, цельному изучению системы. Дальнейшие стадии уже рассматривают только ее отдельные стороны. Поэтому важно еще раз обратить внимание на системообразующие факторы, на роль каждого элемента и каждой связи, на понимание, почему они именно таковы или должны быть именно таковыми в аспекте единства системы.

**Стадия 8.** Учет изменений и неопределенностей в системе. Здесь исследуются медленное, обычно нежелательное изменение свойств системы, которое принято называть «старением», а также возможность замены отдельных частей (модулей) на новые, позволяющие не только противостоять старению, но и повысить качество системы по сравнению с первоначальным состоянием. Такое совершенствование искусственной системы принято называть развитием. К нему также относят улучшение характеристик модулей, подключение новых модулей, накопление информации для лучшего ее использования, а иногда и перестройку структуры, иерархии связей.

Основные неопределенности в стохастической системе считаются исследованными на стадии 5. Однако недетерминированность всегда присутствует и в системе, не предназначенной работать в условиях случайного характера входов и связей. Добавим, что учет неопределенностей в этом случае обычно превращается в исследование чувствительности важнейших свойств (выходов) системы. Под чувствительностью понимают степень влияния изменения входов на изменение выходов.

**Стадия 9.** Исследование функций и процессов в системе в целях управления ими. Введение управления и процедур принятия решения. Управляющие воздействия как системы управления. Для целенаправленных и других систем с управлением данная стадия имеет большое значение. Основные управляющие факторы были уяснены при рассмотрении стадии 3, но там это носило характер общей информации о системе. Для эффективного введения управлений или изучения их воздействий на функции системы и процессы в ней необходимо глубокое знание системы. Именно поэтому мы говорим об анализе управлений только сейчас, после всестороннего рассмотрения системы. Напомним, что управление может быть чрезвычайно разнообразным по содержанию – от команд специализированной управляющей ЭВМ до министерских приказов.

Однако возможность единообразного рассмотрения всех целенаправленных вмешательств в поведение системы позволяет говорить уже не об отдельных управленческих актах, а о системе управления, которая тесно переплетается с основной системой, но четко выделяется в функциональном отношении.

На данной стадии выясняется, где, когда и как (в каких точках системы, в какие моменты, в каких процессах, скачках, выборах из совокупности, логических переходах и т. д.) система управления воздействует на основную систему, насколько это эффективно, приемлемо и удобно реализуемо. При введении управлений в системе должны быть исследованы варианты перевода входов и постоянных параметров в управляемые, определены допустимые пределы управления и способы их реализации.

После завершения стадий 6–9 исследование систем продолжается на качественно новом уровне – следует специфическая стадия моделирования. О создании модели можно говорить только после полного изучения системы.

# Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

## 2.1. Математическое программирование

*Математическое программирование* – раздел прикладной математики, посвященный теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями в форме равенств и неравенств.

Другими словами, математическое программирование – раздел науки об исследовании операций, охватывающий широкий класс задач управления, математическими моделями которых являются конечномерные экстремальные задачи. Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий, например, при решении многочисленных проблем управления и планирования производственных процессов, в задачах проектирования и перспективного планирования.

Термин «математическое программирование», введенный Дж. Нейманом, связан с тем, что целью решения задач является выбор оптимальной программы действий. Математическая формулировка задачи математического программирования: минимизировать (или максимизировать) скалярную функцию $F(x)$ векторного аргумента $x$ на множестве $D = \{x: h_i(x) = 0, g_i(x) > 0, i = 1, 2, ..., k\}$, где $h_i(x)$, $g_i(x)$ – также скалярные функции; функцию $F(x)$ называют целевой функцией, или функцией цели, множество $D$ – допустимым множеством, решение $x^*$ задачи математического программирования – оптимальной точкой (вектором).

В математическом программировании принято выделять следующие разделы – *линейное программирование*: целевая функция $F(x)$ и ограничения $g_i(x)$ и $h_i(x)$ линейны; *выпуклое программирование*: целевая функция и допустимое множество выпуклы; *квадратичное программирование*: целевая функция квадратична и выпукла, допустимое множество определяется линейными равенствами и неравенствами; *дискретное программирование*: решение ищется лишь в дискретных, например целочисленных, точках множества $D$; *стохастическое программирование*: в отличие от детерминированных задач здесь входная информация имеет элементы неопределённости; например, в стохастических задачах о минимизации линейной функции $\sum_{j=1}^{j} c_j x_j$ при линейных ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > b_i$, $i = 1, 2, .., m$, либо все величины $c_j$, $a_{ij}$, $b_i$, либо часть из них случайны.

Задачи перечисленных разделов обладают *общим свойством*: всякая точка локального минимума является оптимальной. Несколько в стороне находятся так называемые многоэкстремальные задачи – задачи, для которых указанное свойство не выполняется.

В основе теории выпуклого программирования, и в частности линейного и квадратичного, лежит теорема Куна–Таккера о необходимых и достаточных условиях существования оптимальной точки $x^*$. При этом задача выпуклого программирования сводится к решению системы уравнений и неравенств. На основе теоремы Куна–Таккера разработаны различные итерационные методы минимизации, сводящиеся к поиску седловой точки функции Лагранжа.

В математическом программировании одно из главных мест принадлежит вычислительным методам решения экстремальных задач. Широким классом таких методов представлены методы проектирования.

Характерная особенность вычислительной стороны методов решений задач математического программирования заключается в том, что применение этих методов неразрывно связано с использованием информационных технологий, в первую очередь потому, что задачи математического программирования, связанные с ситуациями управления реальными системами, большого объёма, недоступные для ручного счёта.

Важное направление исследования в математическом программировании – проблемы устойчивости. Здесь существенное значение имеет изучение класса устойчивых задач, для которых малые возмущения (погрешности) в исходной информации влекут за собой малые возмущения и в решении. В случае неустойчивых задач большая роль отводится процедуре аппроксимации неустойчивой задачи последовательностью устойчивых задач – так называемому процессу регуляризации.

Математическое программирование как наука сформировалось в 50-70-х годах XX века. Это обусловлено главным образом развитием информационных технологий, а следовательно, возможностью проводить математическую обработку больших потоков информации, и на этой основе решать задачи управления и планирования, где применение математических методов связано в первую очередь с построением математических моделей и соответствующих им экстремальных задач, в том числе задач математического программирования.

К настоящему времени математическое программирование – обширная область современной математики, и её обстоятельное изложение потребовало бы несколько томов книг. Поэтому укажем лишь основные направления, по которым велись и ведутся математические исследования:

1. *Развитие симплекс-метода.* В данном учебном пособии изложен лишь алгоритм, реализующий одну из возможных модификаций симплекс-метода. В настоящее время существует много модификаций этого метода, позволяющих существенно сократить время счета, сделать алгоритм нечувствительным к вырожденности опорных планов, повысить размерность решаемых задач, решать так называемые блочные задачи и т. д. Несмотря на обилие этих модификаций, продолжают появляться все новые и новые более действенные его варианты. Симплекс-метод представляет собой итеративную процедуру последовательного улучшения начального допустимого базисного решения и является наиболее действенным и эффективным методом решения задач линейного программирования, а также основой для других наиболее употребительных методов решения задач математического программирования.

2. *Линейное программирование* – математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств; линейное программирование – один из разделов математического программирования.

Типичной задачей линейного программирования является следующая: найти максимум линейной функции $\sum_{j=1}^{j} c_j x_j$ при условиях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = 1, 2, .., m, x_j \ge 0, j = 1, 2, n$, где $c_j$, $a_{ij}$ и $b_i$ – заданные величины.

Задачи линейного программирования – математические модели многочисленных задач технико-экономического содержания.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу планирования работы предприятия. Для производства однородных изделий необходимо затратить различные производственные факторы – сырьё, рабочую силу, станочный парк, топливо, транспорт и т. д. Обычно имеется несколько отработанных технологических способов производства, причём в этих способах затраты производственных факторов в единицу времени для выпуска изделий различны. Количество израсходованных производственных факторов и изготовленных изделий зависит от того, сколько времени предприятие будет работать по тому или иному технологическому способу. Ставится задача рационального распределения времени работы предприятия по различным технологическим способам, т. е. такого, при котором будет произведено максимальное количество изделий при заданных ограниченных затратах каждого производственного фактора.

Формализуем задачу. Пусть имеется $n$ технологических способов производства изделий и $m$ производственных факторов. Введём обозначения: $c_j$ – количество изделий, выпускаемых в единицу времени при работе по $j$-му технологическому способу; $a_{ij}$ – расход $i$-го производственного фактора в единицу времени при работе по $j$-му технологическому способу; $b_i$ – имеющиеся ресурсы $i$-го производственного фактора и $x_j$ – планируемое время работы по $j$-му технологическому способу.

Величина $S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ означает общий расход $i$-го производственного фактора при плане $x^{(i)} = (x^{(i)}{}_1, x^{(i)}{}_2, \ldots\ x^{(i)}{}_n)$. Поскольку ресурсы ограничены величинами $b_i$, то возникают естественные условия: целевая функция и система ограничения. Ставится задача отыскания такого распределения времени (оптимального плана) $x^* = (x^*_1, x^*_2, .., x^*_n)$ работы по каждому технологическому способу, при котором общий объём продукции $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ был бы максимальным, то есть задача линейного программирования. Другим характерным примером прикладных задач линейного программирования является транспортная задача.

Термин «линейное программирование» нельзя признать удачным, однако смысл его в том, что в линейном программировании решаются задачи составления оптимальной программы (плана) действий. В связи с этим линейное программирование рассматривается как один из математических методов в исследованиях операций.

Функцию $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ в линейном программировании принято называть целевой, или критерием эффективности, вектор $x = (x_1 , x_2, .., x_n)$ – планом, вектор $x^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$ – оптимальным планом, а множество, определяемое условиями, – допустимым, или множеством планов. Один из основных методов решения задач линейного программирования – симплексный метод. Геометрически его идея состоит в следующем. Допустимое множество представляет собой выпуклое многогранное множество (если оно ограничено, то – многомерный выпуклый многогранник). Если задача линейного программирования имеет решение, то существует вершина $x^*$ многогранного множества, являющаяся оптимальным планом.

Симплексный метод состоит в таком направленном переборе вершин, при котором значение целевой функции возрастает от вершины к вершине. Каждой вершине соответствует система уравнений, выбираемая специальным образом из системы неравенств – ограничений, поэтому вычислительная процедура симплексного метода состоит в последовательном решении систем линейных алгебраических уравнений. Простота алгоритма делает этот метод удобным для его реализации на PC.

3. *Целочисленное линейное программирование.* В целом ряде решаемых задач линейного программирования на переменные $x_i$ накладывается дополнительное условие их целочисленности. Действительно, ведь нельзя изготовить, скажем, 1/2 стола или сшить 1/3 костюма. Когда наложено дополнительное условие целочисленности переменных $x_i$, соответствующая задача носит название **целочисленного линейного программирования.** Простое округление $x_i$ до целых чисел здесь не помогает: план может получиться не оптимальным. Поэтому приходится разрабатывать специальные алгоритмы решения таких задач, наиболее известные из которых – **алгоритмы Гомори**, основанные на так называемой идее отсечения.

4. *Булевское программирование.* К частному случаю задачи целочисленного линейного программирования относятся задачи, где переменные $x_i$ могут принимать всего лишь два значения – 0 и 1. Их часто называют задачами булевского программирования. Наиболее известные – задачи о назначениях (какого работника на какую работу поставить), задача выбора маршрута (задача коммивояжера, задача почтальона), о максимальном паросочетании и т. д. Для решения задач этого типа разрабатываются очень специфические алгоритмы, основанные на комбинаторике, теории графов и т. д.

*5. Стохастическое линейное программирование*. Бывает много практических ситуаций, когда коэффициенты $c_i$ целевой функции, коэффициенты $a_{ij}$ в матрице коэффициентов, коэффициенты ограничений $b_i$ – случайные величины. В этом случае сама целевая функция становится случайной величиной, и ограничения типа неравенств могут выполняться лишь с некоторой вероятностью. Приходится менять постановку самих задач с учётом этих эффектов и разрабатывать совершенно новые методы их решения. Соответствующий раздел получил название стохастического программирования.

6. *Квадратичное программирование*. Под квадратичным программированием понимаются задачи следующего вида (в матричных обозначениях):

$$\bar{x}^T D\bar{x} + \bar{c}^T \bar{x} \to \min;$$
$$A\bar{x} \le \bar{b};$$
$$\bar{x} \ge \bar{0},$$

где $D$ – симметрическая матрица размерности $n\times n$.

Задачи линейного программирования являются частным случаем этих задач, они получаются при $D = 0$.

Способы решения этих задач во многом определяются видом матрицы $D$: если $D$ положительно определенная матрица, то целевая функция будет выпуклой и любой ее локальный минимум глобальным. Если $D$ отрицательно определенная матрица, то может быть несколько локальных минимумов, но глобальный минимум, если он существует, достигается обязательно на вершине допустимой области. Когда собственные числа матрицы $D$ имеют разные знаки, задача очень сильно усложняется, так как глобальный минимум может достигаться где угодно и внутри области, и на ее границе.

7. *Выпуклое программирование*. Под выпуклым программированием понимают задачу вида

$$f(\bar{x}) \to \min;$$
$$g_1(\bar{x}) \le 0,\ i = 1 \ldots m,$$

где $f(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ – выпуклые функции.

Для этих задач характерно то, что любой локальный минимум оказывается глобальным, и все сводится к нахождению этого единственного минимума. Для решения задач этого типа разработаны численные методы, приспособленные для решения на PC, в основном связанные с понятием градиента целевой функции и основной идеей о том, что функция наиболее быстро убывает, если двигаться в направлении, противоположном градиенту. К ним относятся метод градиентного спуска, метод сопряженных градиентов и т. д. Но есть и методы, основанные на других идеях, – метод штрафных функций, многочисленные варианты метода случайного поиска и т. д.

8. *Геометрическое программирование.* Под геометрическим программированием понимают задачи наиболее плотного расположения некоторых объектов в заданной двумерной или трехмерной области. Встречаются в задачах раскроя материала для производства каких-то изделий и т. п. Это еще недостаточно разработанная область математического программирования, и имеющиеся здесь алгоритмы в основном ориентированы на сокращение перебора вариантов с поиском локальных минимумов.

9. *Дискретное программирование.* Многие задачи исследования операций – распределение ресурсов, сетевого планирования, календарного планирования – описываются математическими моделями дискретного программирования:

Найти $\max f(x_1, ..., x_n)$ при условиях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, ..., x_n) \le 0; \\ ...................... \\ g_m(x_1, ..., x_n) \le 0; \\ X \in D, \end{cases}$$

где $D$ – множество.

Если множество $D$ является конечным или счетным, то $X \in D$ – условие дискретности и данная задача является задачей дискретного программирования.

Чаще всего условие дискретности разделено $R^{(n)}$ по отдельным переменным следующим образом:

$$x_j \in D_j, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

где $D_j$ – конечное или счетное множество.

Если вводим ограничения $x_j$, $j = 1, ..., n$ – целые числа, то приходим к задачам целочисленного программирования, которые являются частным случаем дискретного программирования. В задачах дискретного программирования область допустимых решений является невыпуклой и несвязной, поэтому отыскание решения в таких задачах сопряжено со значительными трудностями. В частности, невозможно применение стандартных приемов, используемых при замене дискретной задачи ее непрерывным аналогом, состоящих в дальнейшем округлении найденного решения до ближайшего целочисленного.

10. *Динамическое программирование*. Динамическое программирование – это вычислительный метод для решения задач определенной структуры. Возникло и сформировалось в 1950–1953 гг. благодаря работам Р. Беллмана над динамическими задачами управления запасами. В упрощенной формулировке динамическое программирование представляет собой направленный последовательный перебор вариантов, который обязательно приводит к глобальному максимуму.

Основные необходимые свойства задач, к которым возможно применить этот принцип:

1) задача должна допускать интерпретацию как $n$-шаговый процесс принятия решений;
2) задача должна быть определена для любого числа шагов и иметь структуру, не зависящую от их числа;
3) при рассмотрении $k$-шаговой задачи должно быть задано некоторое множество параметров, описывающих состояние системы, от которых зависят оптимальные значения переменных. Причем это множество не должно изменяться при увеличении числа шагов.

Выбор решения (управления) на $k$-м шаге не должен оказывать влияние на предыдущие решения, кроме необходимого пересчета переменных.

Задачи о выборе траектории, последовательного принятия решения, об использовании рабочей силы, управления запасами – классические задачи динамического программирования.

*Динамическое программирование* – раздел математики, посвящённый теории и методам решения многошаговых задач. В динамическом программировании для управляемых процессов среди всех возможных управлений ищется то, которое доставляет экстремальное (наименьшее или наибольшее) значение целевой функции – некоторой числовой характеристике процесса. Под многошаговостью понимают либо многоступенчатую структуру процесса, либо разбиение управления на ряд последовательных этапов (шагов), соответствующих, как правило, различным моментам времени. Таким образом, в названии «Динамическое программирование» под «программированием» понимают «принятие решений», «планирование», а слово «динамическое» указывает на существенную роль времени и порядка выполнения операции в рассматриваемых процессах и методах.

Динамическое программирование является составной частью методов, используемых в исследовании операций, и применяется как в задачах оптимального планирования, так и при решении различных технических проблем (например, в задачах определения оптимальных размеров ступеней многоступенчатых ракет, оптимального проектирования прокладки дорог и др.).

Пусть, например, процесс управления некоторой системой состоит из $m$ шагов (этапов), на $i$-м шагу управление $y_i$ переводит систему из состояния $x_{i-1}$ в новое состояние $x_i$, которое зависит от $x_{i-1}$ и $y_i$: $x_i = x_i(y_i, x_{i-1})$.

Управление $y_1, y_2, ..., y_m$ переводит систему из начального состояния $x_0$ в конечное $x_m$. Требуется выбрать $x_0$ и $y_1, ..., y_m$ таким образом, чтобы целевая функция достигла максимального значения $F^*$. Основным методом динамического программирования является сведение общей задачи к ряду более простых экстремальных задач.

Метод динамического программирования приводит к необходимости решения этой рекуррентной системы функциональных уравнений. В процессе решения последовательность этапов проходится дважды: в приведённом варианте рекуррентной системы в первый раз от конца к началу (находятся оптимальные значения $F^*$ и $x^*_0$), второй раз – от начала к концу (находятся оптимальные управления $y^*_1, ..., y^*_m$).

Динамическое программирование находит применение не только в дискретных, но и в непрерывных управляемых процессах, например в таких процессах, когда решения надо принимать в каждый момент некоторого интервала времени. Динамическое программирование дало новый подход к задачам вариационного исчисления.

Хотя метод динамического программирования существенно упрощает исходные задачи, однако непосредственное его применение, как правило, сопряжено с громоздкими вычислениями. Для преодоления этих трудностей разрабатываются приближённые методы.

### 2.1.1. Общая постановка задачи линейного программирования

Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) в канонической форме записывается в виде:

$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n},$$

где $x_j$ – неизвестные; $a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ – заданные постоянные величины.

**Определение 1.** Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений. Множество допустимых решений образует область допустимых решений (ОДР).

**Определение 2.** Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется оптимальным решением задачи линейного программирования и обозначается $\overline{X}_{опт}$.

Базисное допустимое решение $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots 0)$ является опорным решением, где $r$ – ранг системы ограничений.

**Определение 3.** Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные $x_j$ неотрицательные, то такая модель задачи называется канонической.

Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель задачи ЛП – *неканоническая*. Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, необходимо в каждое неравенство ввести фиктивную переменную $x_{n+i}$. Если знак неравенства $\le$, то фиктивная переменная вводится со знаком плюс, если знак неравенства $\ge$, то – минус.

Чтобы составить математическую модель задачи ЛП, необходимо:

– ввести обозначения переменных;
– исходя из цели экономических исследований, составить целевую функцию;

– учитывая ограничения в использовании экономических показателей задачи и их количественные закономерности, записать систему ограничений.

### 2.1.2. Графический метод решения задачи линейного программирования

Наиболее простым и наглядным методом решения задачи линейного программирования является графический метод. Он применяется для решения задач линейного программирования, математическая модель которых содержит две переменных, а система ограничений представлена в виде неравенств.

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования множество решений системы ограничений представимо на плоскости с системой координат $0x_1x_2$ в виде многоугольника. Для нахождения экстремального значения целевой функции $F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ используется вектор grad $F(x_1, x_2) = (c_1, c_2)$, который показывает направление наискорейшего изменения целевой функции.

#### Алгоритм решения задачи

1. На плоскости с системой координат $0x_1x_2$ строим область допустимых решений системы ограничений задачи в виде многоугольника.
2. Строим вектор n = grad $F(x_1, x_2) = (c_1, c_2)$, если $F \to max$

и вектор n = -grad $F(x_1,x_2) = (-c_1,-c_2)$, если $F \to min$.

3. Проводим прямую *F*, перпендикулярную вектору ***n***, так, чтобы прямая пересекала многоугольник решений.
4. Прямую *F* перемещаем в направлении вектора *n* до тех пор, пока у неё окажется одна общая точка с многоугольником. Эта точка и будет точкой экстремума функции. Если окажется, что прямая F параллельна одной из сторон многоугольника, экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны, а задача имеет бесчисленное множество решений. Говорят, что задача линейного программирования имеет *альтернативный оптимум*, и её решение находится по формуле

$$X_{опт} = (1 - t)X_1 + tX_2,$$

где $0 \le t \le 1$, $X_1$ и $X_2$ – оптимальные решения в угловых точках многоугольника решений.

Задача может быть неразрешима, когда определяющие её ограничения окажутся противоречивыми.

5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в этой точке.

Рассмотрим особые случаи геометрической и экономической интерпретации ЗЛП относительно двух переменных $x_1$ и $x_2$.

*Случай 1.* Если *одна из границ (например, AB) допустимой области будет параллельна линии F целевой функции*, то в этом случае решением задачи будет любая точка отрезка *AB*. С точки зрения экономической теории этот факт означает, что в ряде случаев существует бесчисленное множество оптимальных способов организации производства.

*Случай 2.* Если *допустимая область решений незамкнута*, то максимальное значение функции обеспечивается при бесконечно больших значениях переменных $x_1$ и $x_2$. Экономический смысл этого случая заключается в том, что при неограниченности ресурсов оптимального плана производства не существует – улучшать начальный план можно сколько угодно раз.

*Случай 3.* Возможно условие, когда *система ограничений ЗЛП не совместна*. В этом случае ЗЛП не имеет решения. С экономической точки зрения это означает недостаточность имеющегося сырья для производства даже единицы одного товара.

Рассмотрим задачу выбора оптимального выпуска изделий.

***Задача.*** Фирма выпускает два вида мороженого – сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используют два продукта – молоко и наполнители, расход которых на 1 кг мороженого и суточные запасы дан в табл. 2.1.

Таблица 2.1

| Исходный продукт | Расход продуктов на 1 кг мороженого | | Запас, кг |
|---|---|---|---|
| | сливочного | шоколадного | |
| Молоко | 0,8 | 0,5 | 400 |
| Наполнители | 0,4 | 0,8 | 365 |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого –

16 руб., шоколадного – 14 руб. Какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от его реализации был максимальным.

***Решение.*** Пусть $x_1$ – суточный объём выпуска сливочного мороженого, $x_2$ – суточный объём выпуска шоколадного мороженого. Система ограничений и целевая функция имеют вид:

$$F(x_1, x_2) = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \\ x_2 \le 350 \\ x_1 - x_2 \le 100 \end{cases}.$$

Решим задачу графическим методом:

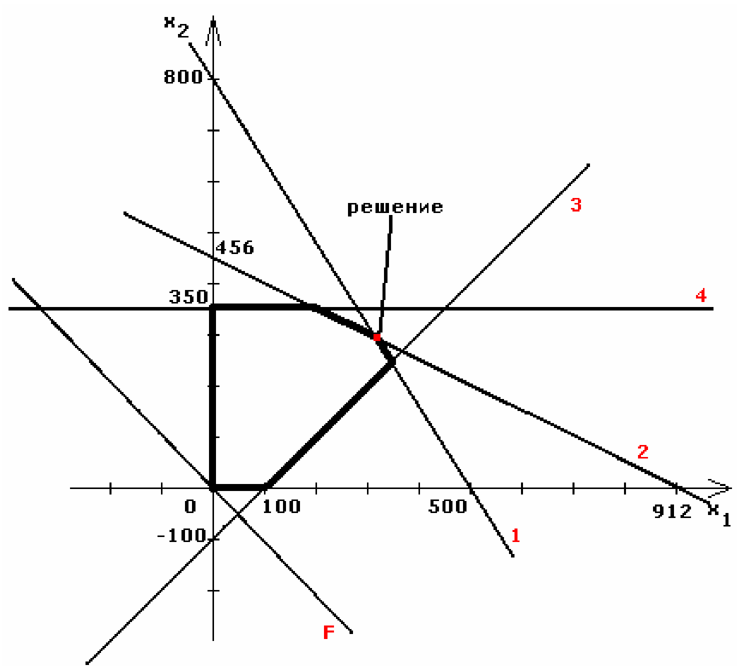



Рис. 2.1

На рис. 2.1 выделенная фигура является областью допустимых решений задачи. Границами области служат прямые:

1) $0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400$;

2) $0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365$;

3) $x_1 - x_2 = 100$,
4) $x_2 = 350$.

Строим вектор *n* (16, 14) и прямую *F*: $16x_1 + 14x_2 = const$, перпендикулярную вектору *n*. Прямую *F* перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора n. Последняя точка выхода из фигуры и является решением задачи. Координаты точки находим как точку пересечения прямых (1) и (2): $0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400$ и $0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365$. Решая систему, находим координаты искомой точки: (312.5, 300).

Подставим координаты точки в функцию:

$$F(312.5, 300) = 16 \cdot 312{,}5 + 14 \cdot 300 = 9200 \text{ руб.}$$

Таким образом, фирма должна выпускать в сутки 312,5 кг сливочного мороженого и 300 кг шоколадного мороженого, при этом доход от реализации составит 9 200 руб.

### 2.1.3. Экономический анализ задач с использованием графического метода

Проведем экономический анализ рассмотренной выше задачи по производству мороженого. Математическая модель задачи имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = 16x_1 + 14x_2 \to max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 & (\textit{ограничение по молоку}), \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 & (\textit{ограничение по наполнителям}), \\ x_1 - x_2 \le 100 & (\textit{рыночное ограничение по спросу}), \\ x_2 \le 350 & (\textit{рыночное ограничение по спросу}), \end{cases}$$

$$x_{1,2} \le 0.$$

Согласно найденному оптимальному решению, фирме необходимо выпускать в сутки 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого, при этом максимально возможный доход составит 9200 руб.

Определим, как влияет на оптимальное решение увеличение или уменьшение запасов исходных продуктов. Для анализа задачи примем, что неравенства системы ограничений могут быть активными или пассивными. Если прямая проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то будем считать, что она представляет активное ограничение. В противном случае прямая относится к пассивному ограничению.

Если ограничение активное, то будем считать, что соответствующий ресурс является дефицитным, так как он используется полностью. Если ограничение пассивное, то оно недефицитное и имеется в фирме в избытке.

Рассмотрим увеличение ресурса правой части ограничения по молоку (рис. 2.1). При перемещении параллельно самой себе прямой (1) вправо до пересечения с прямыми (2) и (3) ограничение (1) будет оставаться активным. Координаты точки пересечения прямых (2) и (3) (точка *M*) найдём как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365, \\ x_1 - x_2 = 100. \end{cases}$$

Откуда получаем M(370,83; 270,3).Подставляя координаты точки M в левую часть уравнения (1), получим предельно допустимый суточный запас молока:

$$0{,}8 \cdot x1 + 0{,}5 \cdot x2 = 0{,}8 \cdot 370{,}83 + 0{,}5 \cdot 270{,}3 = 432{,}1 \text{ кг},$$

при этом величина дохода составляет

$$F\ (370{,}83;\ 270{,}3) = 16 \cdot 370{,}83 + 14 \cdot 270{,}3 = 9724{,}9 \text{ руб.}$$

Рассмотрим увеличение ограничения по наполнителям. При перемещении параллельно самой себе прямой (2) вправо до пересечения с прямыми (1) и (4) ограничение (2) будет оставаться активным. Координаты точки пересечения прямых (1) и (4) (точка N) найдём как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400, \\ x_2 = 350. \end{cases}$$

Откуда получаем N(281,25; 350).

Предельно допустимый суточный запас наполнителей можно увеличивать до значения

$$0{,}4 \cdot x_1 + 0{,}8 \cdot x_2 = 0{,}4 \cdot 281{,}25 + 0{,}8 \cdot 350 = 392{,}5 \text{ кг}.$$

При этом величина дохода составит

$$F(281{,}25;\ 350) = 16 \cdot 281{,}25 + 14 \cdot 350 = 9400 \text{ руб.}$$

Рассмотрим возможность изменения правой части пассивных ограничений (3) и (4). Не изменяя оптимальное решение, прямую (3) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с точкой, которая определяет решение задачи (точка *D*): D(312,5; 300), т. е. правую часть ограничения (3) можно уменьшать до величины 312,5 – 300 = 12,5 кг.

Прямую (3) можно перемещать параллельно самой себе вниз до пересечения с осью $OX_1$ в точке с координатами (500; 0), т. е. правую часть ограничения (3) можно увеличивать до 500 кг.

Таким образом, при неизменном оптимальном решении разница в покупательском спросе на сливочное и шоколадное мороженое может изменяться в диапазоне от 12,5 до 500 кг.

Аналогично, не изменяя оптимальное решение, прямую (4) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с осью $OX_2$ в точке с координатами (0; 456,25) или вниз до пересечения с прямой (1) в точке *D*(312,5; 300).

Таким образом, при неизменном оптимальном решении покупательский спрос на шоколадное мороженое может изменяться в диапазоне от 300 до 456,25 кг.

Проведем анализ задачи по пределам возможного изменения коэффициентов целевой функции, т. е. по диапазону оптовых цен на мороженое, при котором не происходит изменения оптимального решения.

Изменение коэффициентов целевой функции оказывает влияние на наклон линии *F*. Уравнение линии *F* записывается в общем виде: $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$. Угловой коэффициент прямой *F*: $K = -c_1/c_2$. Оптимальное решение задачи не изменится, если $K_1 \leq K \leq K_2$, где $K_1$ и $K_2$ – угловые коэффициенты прямых (1) и (2) соответственно. Угловой коэффициент прямой (1): $K_1 = -8/5$. Так как прямые совпадают, то $K = K_1$, откуда $c_{1max} = 22{,}4$ при $c_2 = 14$. Коэффициент $c_1$ можно уменьшать до совпадения линии уровня с прямой (2), поэтому $-c_1/14 = -1/2$, $c_{1min} = 7$. Таким образом, оптимальное решение задачи не изменится, если розничная цена 1 кг сливочного мороженого лежит в диапазоне от 7 до 22,4 руб., при этом доход фирмы будет от 6387,5 до 11200 руб.

Аналогичные рассуждения для случая $c_1 = 16$ позволили сделать вывод: оптимальное решение задачи не изменится, если розничная цена 1 кг шоколадного мороженого лежит в диапазоне от 10 до 32 руб., при этом доход фирмы будет от 8000 до 14600 руб.

### Упражнения

1. Решите задачу графическим методом. Проведите анализ задачи.

$$L(\bar{x}) = x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0.$$

2. В суточный рацион включают два продукта питания П1 и П2, причём продукта П2 должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта П1 составляет 2 руб., продукта П2 – 4 руб. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в табл. 2.2. Определите оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей. Сделайте экономический анализ задачи.

Таблица 2.2

| Питательные вещества | Минимальные нормы потребления | Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта | |
|---|---|---|---|
| | | $П_1$ | $П_2$ |
| А | 120 | 0,2 | 0,2 |
| В | 160 | 0,4 | 0,2 |

3. Фирма выпускает изделия двух типов: *А* и *В*. При этом используется сырье четырех видов. Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции и запасы сырья заданы в табл. 2.3.

Таблица 2.3

| Изделия | Сырьё | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| А | 2 | 1 | 0 | 2 |
| В | 3 | 0 | 1 | 1 |

Запасы сырья первого вида составляют 21 ед., второго вида – 4 ед., третьего вида – 6 ед. и четвертого вида – 10 ед. Выпуск одного изделия типа *А* приносит доход 300 руб., одного изделия типа *В* – 200 руб. Составьте план производства, обеспечивающий фирме наибольший доход. Сделайте экономический анализ задачи.

4. Обработка деталей $A$ и $B$ может производиться на трех станках, причем каждая деталь должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль от реализации детали $A$ – 100 руб., детали $B$ – 160 руб. Исходные данные приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

| Станки | Норма времени на обработку одной детали, ч | | Время работы станка, ч |
|---|---|---|---|
| | A | B | |
| 1 | 0,2 | 0,1 | 100 |
| 2 | 0,2 | 0,5 | 180 |
| 3 | 0,1 | 0,2 | 100 |

Определите производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: спрос на деталь $A$– не менее 300 шт., на деталь $B$ – не более 200 шт. Сделайте экономический анализ решения задачи.

5. Производственная мощность цеха сборки – 120 изделий типа $A$ и 360 изделий типа $B$ в сутки. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или другого типа (безразлично). Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы предприятию была обеспечена наибольшая прибыль.

Проведите экономический анализ решения задачи.

6. Для изготовления изделий первого и второго типов склад может отпустить металла не более 80 кг, причём на изделие первого типа расходуется 2 кг, а на изделие второго типа – 1 кг металла. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если изделий первого типа требуется изготовить не более 30 шт., а изделий второго типа – не более 40 шт., причём одно изделие первого типа стоит 5000 руб., а второго типа 2000 руб. Проведите экономический анализ решения задачи.

7. Для откорма животных употребляют два корма, стоимость 1 кг первого корма – 5 руб., а второго – 2 руб. В каждом килограмме первого корма содержится 5 единиц питательного вещества $A$, 2,5 единиц питательного вещества $B$ и 1 единица питательного вещества $C$, а в каждом килограмме второго корма содержится соответственно 3,3 и 1,3 питательных единиц. Какое количество корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на откорм были минимальны-

ми, если суточный рацион предусматривает питательных единиц типа *A* не менее 225 единиц, типа *B* – не менее 150 единиц и типа *C* – не менее 80 единиц. Проведите экономический анализ решения задачи.

### 2.1.4. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Основным методом решения задач линейного программирования является *симплексный метод*. Для его дальнейшего рассмотрения необходимо математическую модель задачи представить в каноническом виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} = b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min (\max). \quad (2)$$

*Симплексный метод* позволяет, отталкиваясь от известного допустимого решения (опорного плана) задачи линейного программирования, за конечное число шагов (итераций) получить ее решение. Суть алгоритма симплексного метода сводится к следующему.

1. Определяется некоторое допустимое решение, которому соответствует вершина области допустимых решений $X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Найденное допустимое решение проверяется на оптимальность. Пусть это решение не оптимально.
3. Определяется следующее допустимое решение, лучшее по отношению к предыдущему. Найденное решение проверяется на оптимальность.
4. Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение.

Прежде чем приступить к обоснованию алгоритма и критерия оптимальности симплекс-метода, остановимся на рассмотрении примера.

*Пример.* Предприятие изготавливает два вида продукции из четырех типов сырья – $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Требуется определить, сколько должно быть изготовлено продукта $П_1$ – $x_1$, продукта $П_2$ – $x_2$, чтобы их стоимость (прибыль) была максимальной. Нормы расхода сырья на единицу соответствующего продукта, запасы сырья и цена единицы продукта представлены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

| Продукт<br>Сырье | $П_1$ | $П_2$ | Запас сырья |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 2 | 3 | 19 |
| $S_2$ | 2 | 1 | 13 |
| $S_3$ | 0 | 3 | 15 |
| $S_4$ | 3 | 0 | 18 |
| Цена | 7 | 5 | |

Система ограничений задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 2x_1 + x_2 \le 13, \\ 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 \le 15, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

Целевая функция

$$F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2 \to max. \tag{4}$$

Симплексный метод, как уже отмечалось раньше, работает с канонической формой задач линейного программирования. Для сведения исходной задачи к канонической вводятся дополнительные *фиктивные* переменные $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, позволяющие ограничения типа неравенств $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$ преобразовать в ограничения типа равенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 15. \end{cases}$$

Выразим переменные $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ через переменные $x_1$ и $x_2$:

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 15 - 3x_2, \\ x_6 = 15 - 3x_1. \end{cases} \tag{5}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Переменные $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ назовём *базисными,* переменные $x_1$ и $x_2$ – *свободными*. Множество $B_1$ базисных переменных назовём *базисом*: $B_1 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ – базис. Функция $F$ должна быть выражена через свободные переменные. Полагая $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, определим первое допустимое решение задачи: $X_1 = \{0,0,19,13,15,15\}$, при этом $F(X_1) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$.

Если $x_i$, $i = 1,2$ увеличиваются, то значение целевой функции $F$ (формула (4) увеличивается, следовательно, допустимое решение оптимальным не является. Будем изменять (увеличивать) одну из переменных, а другую оставлять без изменения.

Коэффициент в функции $F$ при $x_1$ больше, чем при $x_2$, поэтому увеличивать будем $x_1$, оставляя неизменным $x_2$. Из системы ограничений (5) выясним, на сколько максимально можно увеличить $x_1$ при неизменном $x_2 = 0$, чтобы *переменные* $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, *остались неотрицательными:*

- из уравнения $x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2$ получаем, что $x_1$ можно увеличить до 19/2;
- из уравнения $x_4 = 13 - 2x_1 - x_2$ получаем, что $x_1$ можно увеличить до 13/2;
- из уравнения $x_5 = 15 - 3x_2$ имеем, что $x_1$ можно увеличивать бесконечно;
- из ограничения $x_6 = 15 - 3x_1$ получаем, что $x_1$ можно увеличить до 5.

Выбираем минимальное число из полученных вариантов $x_1 = \min\{19/2,\ 13/2;\ 5\}$. Таким образом, $x_1$ можно увеличить до 5. Подставляем $x_1 = 5$ в уравнения системы (5), находим: $x_6 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9$, $x_4 = 3$, $x_5 = 15$. Таким образом, второе допустимое решение $X_2 = \{5,0,9,3,15,0\}$, *п*ри этом $F(X_2) = 7{\cdot}5 + 5{\cdot}0 = 35$. На этом заканчивается *первая итерация*.

На *второй итерации* свободными переменными являются $x_2$ и $x_6$, базис $B_2 = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$. Выразим базисные переменные и функцию $F$ через свободные переменные $x_6$ и $x_2$. Для этого выразим $x_1$ из уравнения $x_6 = 15 - 3x_1$ *(именно из этого уравнения мы получили ограничение для увеличения* $x_1$ *до 5).* Имеем: $x_1 = 5 - 1/3x_6$. Затем подставим это выражение в каждое равенство вместо $x_1$.

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \dfrac{1}{3}x_6, \\ x_3 = 9 + \dfrac{2}{3}x_6 - 3x_2, \\ x_4 = 3 + \dfrac{2}{3}x_6 - x_2, \\ x_5 = 15 - 3x_2. \end{cases} \tag{6}$$

$$F = 35 - \frac{7}{3}x_6 + 5x_2. \tag{7}$$

Будем увеличивать значение функции $F$ за счёт увеличения свободных переменных. В функции $F$ коэффициент при $x_6$ отрицателен, поэтому увеличение значения $x_6$ приведёт к уменьшению значения функции (уменьшать $x_6$ нельзя, так как на данном этапе $x_6 = 0$, а все переменные должны быть неотрицательны). В функции $F$ коэффициент при $x_2$ положителен, значит, при увеличении $x_2$ значение функции $F$ *увеличится*. Из системы ограничений (6) выясняем, что при $x_6 = 0$ максимально увеличить $x_2$ можно до 3, при этом $x_1 = 5, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 6.$ Таким образом, третье допустимое решение $X_3 = \{5,3,0,0,6,0\},$ при этом $F(X_3) = 50.$ Значение целевой функции увеличилось, можно переходить к третьей итерации.

На *третьей итерации* свободными переменными являются $x_4$ и $x_{6,}$ базис $Б_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$. Выразим базисные переменные и функцию $F$ через свободные переменные $x_4$ и $x_6$:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \dfrac{1}{3}x_6, \\ x_2 = 3 + \dfrac{2}{3}x_6 - x_4, \\ x_3 = -\dfrac{4}{3}x_6 + 3x_4, \\ x_5 = 6 - 2x_6 + 3x_4. \end{cases} \tag{8}$$

$$F = 50 + \frac{7}{3}x_6 - 5x_4. \tag{9}$$

Будем увеличивать значение функции $F$ (формула (9) за счёт увеличения свободных переменных. В функции $F$ коэффициент при $x_6$ положителен, поэтому увеличение значения $x_6$ приведёт к увеличению значения функции. Из системы ограничений (8) выясняем, что при $x_4 = 0$ максимальное значение $x_6 = 0$ (если переменная $x_6$ примет значение больше 0, то переменная $x_3$ станет отрицательной). Переменную $x_4$ увеличивать нельзя, так как это приведёт к уменьшению значения функции.

Третье допустимое решение $X_3 = \{5,3,0,0,6,0\}$ *является оптимальным,* при этом $F(X_3) = 50$. Таким образом, следует выпускать 5 ед. продукта $П_1$ и 3 ед. продукта $П_2$, при этом прибыль составит 50 у. е.

Возвратимся к общему случаю. Пусть в системе ограничений ЗЛП какие-то $r$ переменных выбраны в качестве свободных, а остальные переменные и целевая функция выражены через свободные переменные, то есть выделен базис системы. Каждому выбору базиса отвечает свое допустимое решение ЗЛП, которое получается, если всем свободным переменным придать значение 0.

Идея симплекс-метода заключается в переходе от одного базиса к другому и, следовательно, от одного допустимого решения к другому. Каждый такой переход сопровождается уменьшением целевой функции, если F→min, или увеличением целевой функции, если F→max или значение F не меняется.

Наиболее часто симплекс-метод используется в табличной модификации. Рассмотрим основную задачу линейного программирования и изучим законы алгебраических преобразований системы ограничений целевой функции при решении задачи симплекс-методом.

Предположим, что система ограничений дана в виде (1), целевая функция в виде (2), ранг системы (1) меньше числа $n$ переменных. Всегда можно занумеровать переменные так, чтобы свободными (их ровно $k = n - r$) оказались первые переменные $x_1, ..., x_k$.

Выражая в этом случае базисные переменные $x_{k+1}, ..., x_n$ и целевую функцию $F$ через свободные переменные, придем к соотношениям:

$$\begin{cases} x_{k+1} + a'_{11}x_1 + ... + a'_{1k}x_k = b'_1, \\ x_{k+2} + a'_{21}x_1 + ... + a'_{2k}x_k = b'_2, \\ .............................................. \\ x_n + a'_{r1}x_1 + ... + a'_{rk}x_k = b'_r. \end{cases} \tag{10}$$

$$F - c'_1 x_1 - c'_2 x_2 - ... c'_k x_r = c'_0, \tag{11}$$

$$F \to min(max)$$

Все свободные члены системы (10) неотрицательны.

Отметим, что во всех случаях при работе по симплекс-методу мы должны записывать систему ограничений и целевую функцию в виде (10) и (11).

Занесем все коэффициенты при свободных переменных и свободные члены из (10) и (11) в общую таблицу, которую назовем симплекс-таблицей. Каждая строка этой таблицы отвечает уравнению системы (10), последняя строка соответствует целевой функции $F$ (11). Первое допустимое решение выписываем из столбца свободных членов $X_1 = \{b'_1, b'_2, ..., b'_r, 0, ..., 0\}$ (базисные переменные равны соответствующим свободным членам, свободные переменные равны 0).

Обратимся к последней строке таблицы. Выберем те из коэффициентов свободных переменных функции $F$, которые входят в выражение (11) целевой функции $F \to min\ (max)$ с положительными (отрицательными) коэффициентами. Выберем среди рассмотренных переменных какую-либо одну, например $c'_i > (<) 0$. Далее рассмотрим столбец, соответствующий коэффициенту $c'_i$ (столбец $x_i$). Нас интересует, имеются ли в этом столбце положительные элементы. Допустим, положительные элементы есть (например, $a'_{ii}$ и $a'_{ij}$). Выделяем этот столбец стрелкой «↓». Среди положительных элементов выделенного столбца выбираем тот, который соответствует наименьшему частному от деления свободного члена на этот положительный элемент (т. е. находим $a'_{ii} / b'_i$ и $a'_{ii} / b'_j$, определяем наименьшее частное и выбираем то число из выделенного столбца, которое соответствует наименьшему частному). Выбранный элемент назовём *ведущим* элементом (пусть ведущим элементом будет $a'_{ij}$), обводим его в кружок. Выделяем строку, где находится ведущий элемент, стрелкой «→».

Симплекс-таблица

| Базисные переменные | Свободные переменные | $x_1$ | $x_s$ | ... | $x_i$ | ... | $x_k$ | $x_{k+1}$ | | $x_{k+i}$ | | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{k+1}$ | $b'_1$ | $a'_{11}$ | $a'_{12}$ | ... | $a'_{1i}$ | ... | $a'_{1k}$ | 1 | ... | 0 | ... | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_{k+i}$ | $B'_i$ | $a'_{i1}$ | $a'_{i2}$ | | $a'_{ii}$ | | $a'_{ik}$ | 0 | | 1 | | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_{k+j} \to$ | $B'_j$ | $a'_{j1}$ | $a'_{j2}$ | | $a'_{ji}$ | | $a'_{jk}$ | 0 | | 0 | | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_n$ | $B'_r$ | $a'_{n1}$ | $a'_{n2}$ | ... | $a'_{ni}$ | ... | $a'_{nk}$ | 0 | ... | 0 | ... | 1 |
| $F$ | $C'_0$ | $c'_1$ | $c'_2$ | ... | $c'_i$ | | $c'_k$ | 0 | ... | 0 | ... | 0 |

Делим все элементы выделенного столбца на ведущий элемент $a'_{ij}$. Результат записываем в строку новой симплекс-таблицы. В этой строке в столбце «базис» вместо $x_{k+j}$ записываем $x_i$. Таким образом, осуществляется переход к новому базису. Остальные строки новой симплекс-таблицы получаются при помощи прибавления ведущей строки к остальным строкам таблицы, предварительно умноженным на такое число, чтобы в ведущем столбце оказались 0.

После заполнения новой симплекс-таблицы переходим к анализу строки, соответствующей $F$ (выбираем те из коэффициентов свободных переменных функции $F$, которые входят в выражение целевой функции $F \to min$ *(max)* с положительными (отрицательными) коэффициентами). Затем находим ведущий элемент и т. д.

Если в строке, соответствующей $F$, нет положительных (отрицательных) элементов, значит, последнее допустимое решение является оптимальным.

Если положительные (отрицательные) элементы в строке $F$ есть, но в столбцах, соответствующих этим элементам, нет положительных элементов, то задача линейного программирования не имеет решения.

### Этапы решения задачи симплексным методом

1. *Привести математическую модель задачи линейного программирования к каноническому виду*: систему ограничений к виду (1), целевую функцию к виду (2).
2. *Выделить базисные переменные,* записать систему ограничений в виде 10, целевую функцию в виде 11.
3. Заполнить симплекс-таблицу.
4. *Найти в последней строке таблицы положительный элемент* (если целевая функция $F \to min$) или *отрицательный элемент (*если целевая функция $F \to max$*),* свободный член $C_0$ во внимание не брать. Если таких элементов несколько, то выбрать любой из них. *Выделить стрелкой столбец, в котором находится выбранный элемент.* (Если таких элементов нет, значит, задача решена. Решением задачи являются значения базисных переменных, значения свободных переменных равны 0, значение целевой функции равно значению свободного члена целевой функции $C_0$).
5. В выделенном столбце найти положительные элементы. Если положительных элементов несколько, то для каждого положительного элемента найти частное от деления свободного члена на этот положительный элемент, затем выбрать тот, который соответствует наименьшему частному. Выделить ведущий элемент $a'_{ij}$.
6. Разделить все элементы выделенного столбца на ведущий элемент $a'_{ij}$. Результат записать в строку новой симплекс-таблицы. В этой строке в столбце «базис» вместо $x_{k+j}$ записываем $x_i$. Остальные строки новой симплекс-таблицы получаются при помощи прибавления ведущей

строки к остальным строкам таблицы, предварительно умноженным на такое число, чтобы в ведущем столбце оказались 0.

7. После заполнения новой симплекс-таблицы происходит переход к этапу 4.

**Задача.** Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max.$$

***Решение.*** Вводим фиктивные переменные $x_3, x_4, x_5 \ge 0$ (со знаком «+», так как ограничения имеют знак «$\le$»)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$f - 3x_1 - 4x_2 = 0, \; f \to \max.$$

Симплекс-таблица:

| Базисные неизвестные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 4 | 1 | $\boxed{2}$ | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 2 | ½ | $\boxed{1}$ | ½ | 0 | 0 |
| $x_4$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | |
| $x_2$ | 2 | $\boxed{½}$ | 1 | ½ | 0 | 0 |
| $x_4$ | 1 | ½ | 0 | -½ | 1 | 0 |
| $x_5$ | 6 | 3/2 | 0 | -½ | 0 | 1 |
| $f$ | 8 | -1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| $x_1$ | 4 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | -1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 0 | -3 | 2 | 0 | 1 |
| $f$ | ½ | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 |

*Ответ*: $(4;0;0;-1;0), f = 12 \to \max$.

## Упражнения

Решите задачи симплекс-методом.

1. Предприятие, располагающее ресурсами сырья трёх видов $B_i$, $i = 1, 2, 3$, может производить продукцию четырёх видов $A_j$ $j = 1, ..., 4$. В таблице указаны затраты ресурсов $B_i$ на изготовление 1 т продукции $A_j$, объём ресурсов и прибыль, получаемая от изготовления 1 т продукции $A_j$.

Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором полученная прибыль будет максимальной, при условиях:

– продукции $A_2$ необходимо выпустить не менее 8 т, продукции $A_4$ – не более 5 т, а продукции $A_1$ и $A_3$ – в отношении 2:1;

– производственные издержки на 1 т продукции $A_j$ $j = 1, ..., 4$ составляют соответственно 3, 9, 12 и 6 условных единиц, а суммарные издержки не должны превышать 96 условных единиц.

Таблица 2.6

| Вид сырья | Вид продукции | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | Объём ресурсов, т |
| $B_1$ | 4 | 5 | 2 | 3 | 60 |
| $B_2$ | 30 | 14 | 18 | 22 | 400 |
| $B_3$ | 16 | 14 | 8 | 10 | 128 |
| Прибыль, у. е. | 48 | 25 | 56 | 30 | |

2. Завод получает четыре вида полуфабрикатов $B_i$ в количествах: $B_1$ – 400 т, $B_2$ – 250 т, $B_3$ – 350 т и $B_4$ – 100 т. В результате смешения этих компонентов получают три вида продукции $A_j$. Пропорции смешиваемых полуфабрикатов следующие: для $A_1$ – 2:3:5:2, для $A_2$ – 3:1:2:1, для $A_3$ – 2:2:1:3. Стоимость 1 т продукции $A_j$ составляет: $A_1$ – 12, $A_2$ – 10 и $A_3$ – 15 условных единиц.

Составить оптимальный план выпуска продукции по критериям:

1) максимальной стоимости выпущенной продукции;

2) максимального использования полуфабрикатов.

3. Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя различными способами. Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства даны в табл. 2.7 (в усл. ед.).

Таблица 2.7

| Производственные ресурсы | Расход ресурсов за месяц при работе | | Общий ресурс |
|---|---|---|---|
| | 1-м способом | 2-м способом | |
| Сырьё | 1 | 2 | 4 |
| Оборудование | 1 | 1 | 3 |
| Электроэнергия | 2 | 1 | 8 |

При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при втором – 4 тыс. изделий. Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

4. Механический завод при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. При этом обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. Необходимые исходные данные приведены в табл. 2.8. Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Таблица 2.8

| Оборудование | Детали | | | | Полезный фонд времени, станко-часы |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 2 | | |
| | Технологические способы | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Фрезерное | 2 | 2 | 3 | 0 | 20 |
| Токарное | 3 | 1 | 1 | 2 | 37 |
| Сварочное | 0 | 1 | 1 | 4 | 30 |
| Прибыль, у. е. | 11 | 6 | 9 | 6 | |

5. Торговая фирма для продажи товаров трех видов использует ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида даны в табл. 2.9. Прибыль, получаемая от реализации одной партии товаров первого вида, – 5 усл. ед., второго вида – 8 усл. ед., третьего вида – 6 усл. ед. Определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую фирме максимальную прибыль.

Таблица 2.9

| Ресурсы | Вид товара | | | Объём ресурсов |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| Время, чел.-час | 0,5 | 0,7 | 0,6 | 370 |
| Площадь, м$^2$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 90 |

6. Фирма выпускает четыре пользующихся спросом изделия, причем месячная программа выпуска составляет 10 изделий первого и третьего типов, 200 изделий второго типа и 120 изделий четвертого типа. Нормы затрат сырья на единицу различных типов изделий приведены в табл. 2.10.

Таблица 2.10

| Вид сырья | Нормы затрат на одно изделие | | | | Запасы сырья, ед. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | 5 | 1 | 0 | 2 | 1000 |
| 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 600 |
| 3 | 1 | 0 | 2 | 1 | 150 |

Прибыль от реализации изделий первого типа равна 6 усл. ед., изделий второго типа – 2 усл. ед., изделий третьего типа – 2,5 усл. ед. и изделий четвертого типа – 4 усл. ед.

Определить, является ли месячная программа выпуска изделий оптимальной, если нет, то определить оптимальную месячную программу и дополнительный доход, который фирма может при этом получить.

7. Металлургический завод из металлов $A_1$, $A_2$, $A_3$ может выпускать сплавы $B_1$, $B_2$, $B_3$. В течение планируемого периода завод должен освоить не менее 640 т металла $A_1$ и 800 т металла $A_2$, при этом металла $A_3$ может быть израсходовано не более 860 т. Определить минимальные затраты, если данные о нормах расхода и себестоимость даны в табл. 2.11.

Таблица 2.11

| Вид металлов | Технологические нормы расхода металла на условную единицу сплава | | | Наличие металла у завода |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | |
| $A_1$ | 1,0 | 4,3 | 2,6 | 640 |
| $A_2$ | 5,0 | 1,5 | 3,0 | 800 |
| $A_3$ | 3,0 | 3,9 | 4,3 | 860 |
| Себестоимость 1 т сплава | 18 | 15 | 15 | |

8. Ткань трех артикулов вырабатывается на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Для изготовления ткани используются пряжа и красители. В табл. 2.12 указаны мощности станков в тысячах станко-часов, ресурсы пряжи и красителей в 1000 кг, производительность станков в метрах за час, нормы расхода пряжи и краски в килограммах на 1000 м и цена 1 м ткани.

Таблица 2.12

| Вид ресурсов | Объём ресурсов | Норма расхода | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| Станки 1-го типа | 30 | 20 | 10 | 25 |
| Станки 2-го типа | 45 | 8 | 20 | 10 |
| Пряжа | 30 | 120 | 180 | 210 |
| Красители | 1 | 10 | 5 | 8 |
| Цена, у.е. | | 15 | 15 | 20 |

По этим исходным данным решить следующие задачи:

1) определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию предприятия;
2) приняв условие, что количество тканей трех артикулов находится в отношении 2:1:3, определить, какое максимальное количество комплектов ткани может выпустить предприятие;
3) определить оптимальный ассортимент, максимизирующий доход предприятия, если цена 1 м ткани составляет 8, 5 и 15 усл. ед. соответственно;
4) решить задачу (1) при условии, что станки первого типа ткань первого артикула не производят.

### 2.1.5. Двойственная задача

Произвольную задачу линейного программирования можно определенным образом сопоставить с другой задачей линейного программирования, называемой *двойственной*. Первоначальная задача является исходной. Эти две задачи тесно связаны между собой и образуют единую двойственную пару. Различают симметричные, несимметричные и смешанные двойственные задачи.

#### *Симметричные двойственные задачи*

Дана исходная задача $F(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 & |y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 & |y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m & |y_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Задача дана в неканоническом виде. Составим математическую модель двойственной задачи, для этого:

1) каждому неравенству системы ограничений исходной задачи приводим в соответствие переменную $y_i$;
2) составляем целевую функцию, коэффициентами которой являются свободные члены системы ограничений исходной задачи;
3) составляем систему ограничений. Коэффициенты системы ограничений образуют транспонированную матрицу коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Знаки неравенств меняются на противоположные;
4) свободными членами системы ограничений являются коэффициенты целевой функции исходной задачи. Все переменные двойственной задачи неотрицательные.

Математическая модель двойственной задачи имеет вид:

$$G(y_1, y_2, ..., y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ ............................................... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

### *Несимметричные двойственные задачи*

Дана исходная задача $F(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 & |y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 & |y_2, \\ ...................................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m & |y_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Задача дана в каноническом виде. Составим математическую модель двойственной задачи. Для ее составления пользуемся тем же правилом, что и для составления симметричной задачи, с учетом следующих особенностей:

1) ограничениями двойственной задачи будут неравенства. Если в целевой функции двойственной задачи требуется найти минимум, то знак неравенства $\geq$, если максимум, то $\leq$;
2) переменные $y_i$ – произвольные по знаку.

Математическая модель двойственной задачи имеет вид:

$$G(y_1, y_2, ..., y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i - \text{произвольные по знаку}, \quad i = \overline{1, m}.$$

#### ***Смешанные двойственные задачи***

Математическая модель исходной задачи имеет условия симметричных и несимметричных задач. При составлении двойственной задачи необходимо выполнять правила симметричных и несимметричных задач.

**Теорема 1**. *Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причем для любых оптимальных решений* $\overline{X}$ *и* $\overline{Y}$ *выполняется равенство* $F(\overline{X}) = G(\overline{Y})$.

*Если одна из двойственных задач неразрешима, ввиду того что* $F(\overline{x})_{\max} \to \infty$ (*или* $G(\overline{y})_{\min} \to -\infty$), *то другая задача не имеет допустимых решений.*

**Теорема 2.** *Для оптимальности допустимых решений* $\overline{X}$ *и* $\overline{Y}$ *пары двойственных задач необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений:*

$$\begin{cases} x_{опт\ j}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_{опт\ i} - c_j\right) = 0, \\ y_{опт\ i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{опт\ j} - b_i\right) = 0. \end{cases}$$

Теоремы позволяют определить оптимальное решение одной из пары задач по решению другой.

Рассмотрим решение задач с использованием теорем двойственности.

Исходная задача:

$$F(\overline{X}) = x_1 - x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 & |y_1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 & |y_2 \\ x_1 + x_2 \le 5 & |y_3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge o.$$

Двойственная задача

$$G(\overline{Y}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1 & |x_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1 & |x_2 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Решим исходную задачу графическим методом, получим $\overline{X}_{\text{опт}} = (4, 1)$, при этом L( $\bar{x}$ )max = 3. На основании первой теоремы двойственности имеем: $F(\overline{X}) = G(\overline{Y}) = 3$.

Так как $x_1, x_2 > 0$, то по второй теореме двойственности систему ограничений двойственной задачи можно записать в виде равенств:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Подставим $\overline{X}_{\text{опт}}$ в систему ограничений исходной задачи:

$$\begin{cases} -2 \cdot 4 + 1 \le 2, & 9 < 2 \Rightarrow y_1 = 0, \\ 4 - 2 \cdot 1 \le 2, & 2 = 2 \Rightarrow y_2 > 0, \\ 4 + 1 \le 5, & 5 = 5 \Rightarrow y_3 > 0. \end{cases}$$

Тогда система ограничений двойственной задачи примет вид:

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 1, \\ -2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Откуда $\overline{Y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3)$, при этом $S(\bar{y})_{\min} = 3$.

Пусть дано решение двойственной задачи $\overline{Y}_{\text{опт}} = (0,\ 2/3,\ 1/3)$, $S(\bar{y})_{\min} = 3$, найдем решение исходной. По первой теореме двойственности $L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3$. Так как $y_2, y_3 > 0$, то по второй теореме двойственности второе и третье неравенства исходной задачи обращаются в равенства:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Откуда $\overline{X}_{\text{опт}} = (4,1)$, при этом $L(\bar{x})_{\max} = 3$.

### 2.1.6. Экономический анализ задач с использованием теории двойственности

Рассмотрим задачу оптимального использования ресурсов, запишем ее математическую модель $F(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$ при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i | y,$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Двойственная задача имеет вид:

$$G(y_1, y_2, ..., y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 +. .. + b_my_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad y_i \ge o, \quad i = \overline{1, m}.$$

**Теорема 3.** *Значения переменных $y_i$ в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение ее целевой функции, т. е.*

$$y_i = \frac{d}{db_i} F_i.$$

Примем $\partial F_i \approx \Delta F_i$, $\partial b_i \approx \Delta b_i$, тогда $\Delta F_i \approx y_i \cdot \Delta b_i$. Для задачи оптимального использования сырья это уравнение показывает, что при изменении $i$-го ресурса оптимальный доход является линейной функцией от его приращения, причем коэффициентом служит $y_i$ – $i$-*я* компонента оптимального решения двойственной задачи.

Если $y_i$ мало, то значительному увеличению $i$-го ресурса будет соответствовать небольшое увеличение оптимального дохода, и ценность ресурса невелика.

Если $y_i = 0$, то при увеличении $i$-го ресурса оптимальный доход остается неизменным, и ценность этого ресурса равна нулю. В самом деле, сырье, запасы которого превышают потребности в нем, не представляет ценности для производства, и его оценку можно принять за нуль.

Если $y_i$ велико, то незначительному увеличению $i$-го ресурса будет соответствовать существенное увеличение оптимального дохода и ценность ресурса высока. Уменьшение ресурса ведет к существенному сокращению выпуска продукции.

Переменную $y_i$ считают некоторой характеристикой ценности $i$-го ресурса. В частности, при увеличении $i$-го ресурса на единицу ($\Delta b_i = 1$) оптимальный доход возрастает на $y_i$, что позволяет рассматривать $y_i$ как «условную цену», оценку единицы $i$-го ресурса, объективно обусловленную оценку.

Так как $y_i$ представляет частную производную от оптимального дохода по $i$-му ресурсу, то $y_i$ характеризует скорость изменения оптимального дохода при изменении $i$-го ресурса.

С помощью $y_i$ можно определить степень влияния ограничений на значение целевой функции. Предельные значения (нижняя и верхняя границы) изменений ограничений ресурсов, для которых $y_i$ остаются неизменными, определяются по формулам:

$$\Delta b_i^н = \min | x_j / d_{ij} | ; \Delta b_i^в = \max | x_j / d_{ij} | ,$$

где $x_j$ – значение переменной в оптимальном решении; $d_{ij}$ – элементы матрицы $(d_{ij}) = A^{-1}$, обратной к матрице базиса оптимального решения, для которой $A = (a_{ij})_{mxn}$. Интервал устойчивости оценки $i$-го ресурса находится по формуле $(b_i - \Delta b_i^н; b_i + \Delta b_i^в)$.

Если в план включаются новые виды продукции, то оценка $\Delta_j$ целесообразности включения в план $i$-го вида продукции находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_j \, y_{опт\, i} - c_j .$$

Если $\Delta_j < 0$, то новый вид продукции улучшает план. При $\Delta_j > 0$ нецелесообразно включать новый вид продукции.

Рассмотрим этапы экономического анализа на примере задачи стратегического планирования выпуска изделий с учетом имеющихся ресурсов.

**Задача.** Фирма выпускает три вида изделий, располагая при этом сырьем четырех типов: А, Б, В, Г в количествах 18, 16, 8 и 6 т. Нормы затрат каждого типа сырья на единицу изделия первого вида составляют соответственно 1, 2, 1, 0, второго вида – 2, 1, 1, 1 и третьего вида – 1, 1, 0, 1. Прибыль от реализации единицы изделия первого вида равна 3 усл. ед., второго – 4 усл. ед., третьего – 2 усл. ед. Требуется:

1) составить план производства трех видов изделий, максимизирующих прибыль;
2) определить дефицитность сырья;
3) установить размеры максимальной прибыли при увеличении запасов сырья *А* на 6 т, *В* – на 2 т, *Г* – на 2 т и уменьшении запасов сырья *Б* на 3 т. Оценить раздельное влияние этих изменений и суммарное их влияние на прибыль;
4) оценить целесообразность введения в план производства фирмы нового вида изделий (четвертого), нормы затрат на единицу которого соответственно равны 1, 2, 2, 0, а прибыль составляет 15 усл. ед.

**Решение**

1. Обозначим через $\overline{X}=(x_1, x_2, x_3)$ план производства изделий трех видов, тогда математическая модель задачи примет вид

$$L(\overline{x})=3x_1+4x_2+2x_3\to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\le 18, \\ 2x_1+x_2+x_3\le 16, \\ x_1+x_2\le 8, \\ x_2+x_3\le 6, \end{cases}$$

$$x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,3}.$$

Решаем задачу симплексным методом, при этом последняя таблица будет иметь вид:

| БП | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $X_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| $x_3$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0,5 | -1 | 0,5 |
| $x_1$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0 | -0,5 |
| $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -0,5 | 1 | 0,5 |
| L | 33 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 2 | 1,5 |

Из таблицы следует: $\overline{X}_{опт}=(5, 3, 3, 4, 0, 0, 0)$, при этом $L(\overline{x})_{\max}=33$ усл.ед.

Согласно теоремам двойственности

$$\overline{Y}_{опт}=(0, 1/2, 2, 3/2, 0, 0, 0),$$

при этом $S(\overline{y})_{\min}=$ 33 усл.ед.

2. Наиболее дефицитным является сырье типа *В*, для которого двойственная оценка $y_3=2$. Менее дефицитным является сырье вида *Б*, для которого $y_2=1/2$. Совсем не дефицитным является сырье *А* ($y_1=0$).

Для определения интервала устойчивости оценок найдем обратную матрицу для матрицы коэффициентов при базисных переменных в оптимальном решении системы ограничений. Базисными переменными в оптимальном решении являются $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Матрица коэффициентов при этих переменных в системе ограничений имеет вид:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица для матрицы $A$ следующая:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем интервал устойчивости оценок по видам сырья:

$$\Delta b_1^{н}=\min|x_j / d_{1j}|=6;\ \Delta b_i^{в}=\max|x_j / d_{1j}|=8.$$

Интервал устойчивости оценок по отношению к первому ограничению: (18 – 6; 18 + 8) = (12; 26).

Аналогично определим интервалы устойчивости оценок по отношению к ограничениям остальных видов сырья:

$$\Delta b_2^{н}=\min|x_j / d_{2j}|=3;\ \Delta b_i^{в}=\max|x_j / d_{2j}|=6,$$
$$\Delta b_3^{н}=\min|x_j / d_{3j}|=6;\ \Delta b_3^{в}=\max|x_j / d_{3j}|=3,$$
$$\Delta b_4^{н}=\min|x_j / d_{4j}|=5;\ \Delta b_4^{в}=\max|x_j / d_{4j}|=3.$$

Интервалы устойчивости оценок по отношению ко второму ограничению: (13 – 3; 16 + 6) = (13; 22); к третьему ограничению: (8 – 6; 8 + 6) = (2; 11); к четвертому ограничению: (6 – 5; 6 + 3) = (1; 9).

3. Изменения сырья согласно условиям задачи на +6, -3, +2, +2 т приводят к ограничению запаса сырья до 24, 13, 10, 8 т соответственно. Поскольку эти изменения находятся в пределах устойчивости оценок, на что указывают интервалы, то раздельное их влияние на прибыль определяется по формуле

$$L_i = y_{оптi} \cdot b_i,$$

тогда $L_1 = y_{опт1} \cdot b_1 = 0 \cdot 6 = 0$; $L_2 = y_{опт2} \cdot b_2 = 0{,}5 \cdot (-3) = -1{,}5$;
$L_3 = y_{опт3} \cdot b_3 = 2 \cdot 2 = 4$; $L_4 = y_{опт4} \cdot b_4 = 1{,}5 \cdot 2 = 3$.

Суммарное влияние на прибыль: $L_{max} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 5{,}5$ у. е.

Если изменение сырья не находится в пределах устойчивости оценок, то необходимо найти новые условные оценки, т. е. решить задачу симплексным методом с изменением количества сырья соответствующих видов.

4. Для оценки целесообразности введения в план производства фирмы четвертого вида изделий используем формулу

$$\Delta_4 = \sum_{i=4}^{4} a_{ij} y_{опт\,i} - c_4 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3/2 - 15 = -10 < 0.$$

Так как прибыль превышает затраты, то введение в план производства четвертого вида изделий целесообразно.

### Упражнения

Для следующих задач составить математические модели двойственных задач и по решению исходной найти оптимальное решение двойственной.

1. $L(\bar{x}) = x_1 + 3x_3 + 3x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 \geq -1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

*2.* $L(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

3. $L(\bar{x}) = -x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

4. $L(\bar{x}) = -3x_2 + x_3 - x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

5. $L(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Составить математическую модель двойственных задач и по ее решению найти оптимальное решение исходной.

6. $L(\bar{x}) = 1{,}5x_1 + 2x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

7. $L(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

8. $L(\bar{x}) = -2x_1 + x_2 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - 3x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq -5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

9. Для производства трех изделий *A*, *B* и *C* используются три вида сырья, каждый из них в объеме, не превышающем 180, 210 и 236 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на одно изделие и цена единицы изделий приведены в табл. 2.13.

Таблица 2.13

| Вид сырья | Нормы затрат сырья на одно изделие, кг | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| 1 | 4 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 5 |
| Цена изделия, у. е. | 10 | 14 | 12 |

Определить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимального дохода. Составить для данной задачи двойственную и найти:

1) оптимальный план двойственной задачи;
2) интервалы устойчивости двойственных оценок;
3) увеличение максимального дохода при увеличении количества сырья второго и третьего видов на 80 и 160 кг соответственно и при уменьшении количества сырья первого вида на 40 кг. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений;
4) целесообразность введения в план производства четвертого изделия, нормы затрат сырья на одно изделие которого составляют 2, 4 и 6 кг, а цена изделия равна 18 усл. ед.;
5) оптимальные планы исходной и двойственной задач, если количество сырья 1, 2 и 3 равно 140, 250 и 240 кг соответственно.

### 2.1.7. Целочисленное программирование

Некоторые задачи линейного программирования требуют целочисленного решения. К ним относятся задачи по производству и распределению неделимой продукции (выпуск станков, телевизоров, автомобилей и т. д.). В общем виде математическая модель задачи целочисленного программирования имеет вид:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;$$

$$x_j \geq 0 - \textit{целое}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

### 2.1.8. Графический метод решения задачи

При наличии в задаче линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений – неравенств она может быть решена графическим методом. Сначала задача решается графическим методом без ограничений на целочисленность. В том случае, когда координаты найденной точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие точки, координаты которых целые числа, удовлетворяющие системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

**Задача.** *Прогнозирование эффективного использования производственных площадей.* Для улучшения финансового положения фирма планирует увеличить выпуск конкурентоспособной продукции, для чего принято решение об установке в одном из цехов дополнительного оборудования, занимающего 19/3 м$^2$ площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 усл. ед., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение одного комплекта оборудования первого вида стоит 1,0 усл. ед., второго вида – 3 усл. ед. Приобретение одного комплекта оборудования первого вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 шт., а одного комплекта оборудования второго вида – на 4 шт. Зная, что для установки одного комплекта оборудования первого вида требуется 2 м$^2$ площади, а для оборудования второго вида – 1 м$^2$ площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

**Решение.** Составим математическую модель задачи. Предположим, что фирма приобретает $x_1$ комплектов дополнительного оборудования первого вида и $x_2$ комплектов оборудования второго вида. Математическая модель задачи будет иметь вид:

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0 - \textit{целые}.$$

Получим задачу целочисленного программирования, так как неизвестных только два ($x_1$ и $x_2$). Найдем решение задачи графическим способом (рис. 2.2).

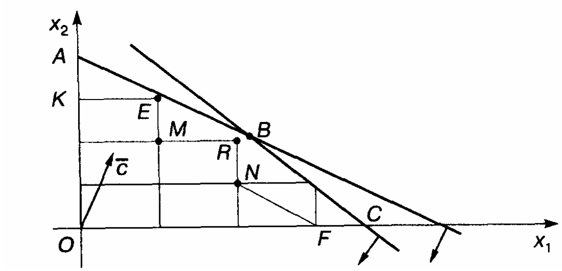



Рис. 2.2

*OABC* – область допустимых решений (ОДР). Оптимальное решение задача имеет в точке *B* (9/5, 41/15), при этом максимальное значение целевой функции составляет 218/15 ед. Полученное оптимальное решение нецелочисленное.

Условию целочисленности переменных удовлетворяют координаты 12 точек. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник *OABC* многоугольником *OKEMRNF,* содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами.

Строим вектор $\bar{c}$ (2, 4). Линию уровня перемещаем по направлению $\bar{c}$, получим в точке *E* (1, 3) максимальное значение целевой функции:

$$L(\bar{x}_{цел})_{\max} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14 \text{ усл. ед.}$$

Таким образом, фирме следует приобрести один комплект оборудования первого вида и три комплекта оборудования второго вида, что обеспечит ей при имеющихся ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 усл. ед. в смену.

### 2.1.9. Метод Гомори

Оптимальное решение задачи, найденное симплексным методом, часто не является целочисленным. Его можно округлить до ближайших целых чисел. Однако такое округление может дать решение, не лучшее среди целочисленных решений, или привести к решению, не удовлетворяющему системе ограничений. Поэтому для нахождения целочисленного решения нужен особый алгоритм. Такой алгоритм предложен Гомори и состоит в следующем.

Симплексным методом находят оптимальное решение задачи. Если решение целочисленное, то задача решена. Если же оно содержит хотя бы одну дробную координату, то накладывают дополнительное ограничение по целочисленности и вычисления продолжают до получения нового решения. Если и оно является нецелочисленным, то вновь накладывают дополнительное ограничение по целочисленности. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или показано, что задача не имеет целочисленного решения.

Пусть получено оптимальное решение $\overline{X}_{\text{опт}} = (f_1, f_2, ..., f_r, 0, ..., 0)$, которое не является целочисленным, тогда последний шаг симплексной таблицы имеет следующий вид:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $f_1$ | 1 | 0 | ... | 0 | ... | 0 | $h_{1,r+1}$ | ... | $h_{1,n}$ |
| $x_2$ | $f_2$ | 0 | 1 | ... | 0 | ... | 0 | $h_{2,r+1}$ | ... | $h_{2,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | | ... | ... | ... | ... |
| $x_I$ | fi | 0 | 0 | ... | 1 | ... | 0 | $hi_{,r+1}$ | ... | $hi_{,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_r$ | $f_r$ | 0 | 0 | ... | 0 | ... | 1 | $h_{r,r+1}$ | ... | $h_{r,n}$ |

где $r$ – ранг системы ограничений; $h_{i,r+1}$ – коэффициент симплексной таблицы $i$-й строки, $(r + 1)$-го столбца; $f_i$ – свободный член $i$-й строки.

Пусть $f_i$ и хотя бы одно $h_{ij}$ ( $j = \overline{r+1, n}$, $r = \overline{1, r}$ ) – дробные числа.

**Определение.** Целой частью числа $f_i$ называют наибольшее целое число, не превосходящее числа $f_i$. Обозначим через $[f_i]$ и $[h_{ij}]$ целые части чисел $f_i$ и $h_{ij}$.

Дробную часть чисел $f_i$ и $h_{ij}$ обозначим $\{f_i\}$ и $\{h_{ij}\}$, она определяется следующим образом: $\{f_i\} = f_i - [f_i]$, $\{h_i\} = h_i - [h_i]$.

Например,

$$[0{,}8] = 0;\ \{0{,}8\} = 0{,}8 - 0 = 0{,}8;$$
$$[1{,}8] = 1;\ \{1{,}8\} = 1{,}8 - 1 = 0{,}8;$$
$$[-0{,}8] = -1;\ \{-0{,}8\} = -0{,}8 + 1 = 0{,}2.$$

Если $f_i$ и хотя бы одно значение $h_{ij}$ дробны, то с учетом введенных обозначений целых и дробных чисел дополнительное ограничение по целочисленности примет вид: $\{h_{i,r+l}\}\ x_{r+1} + \{h_{i,r+2}\}\ x_{r+2} + \ldots + \{h_{i,n}\}\ x_n \geq \{f_i\}$.

*Примечания.*

1. Если $f_i$ – дробное число, а все $h_{ij}$ – целые числа, то задача линейного программирования не имеет целочисленного решения.
2. Ограничение целочисленности может быть наложено не на все переменные, а лишь на их часть. В этом случае задача является частично целочисленной.

Решим задачу прогнозирования эффективного использования производственных площадей методом Гомори. Симплексная таблица имеет вид:

| Базис | Св. чл. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 19/3 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 10 | 1 | 3 | 0 | 1 |
| L | 0 | -2 | -4 | 1 | 0 |
| $x_3$ | 3 | 5/3 | 0 | 1 | -1/3 |
| $x_2$ | 10/3 | 1/3 | 1 | 0 | 1/3 |
| L | 40/3 | -2/3 | 0 | 0 | 4/3 |
| $x_1$ | 9/5 | 1 | 0 | 3/5 | -1/5 |
| $x_2$ | 41/15 | 0 | 1 | -1/5 | 2/5 |
| $L$ | 218/15 | 0 | 0 | 2/5 | 6/5 |

Получим: $X_{опт}$ = (9/5, 41/15), L(X) = 218/15. Найдем дробные части чисел 9/5 и 41/15:

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, \quad \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}, \qquad \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15}.$$

Учитывая дробные части чисел 3/5 и – 1/5:

$$\left\{\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}, \quad \left\{-\frac{1}{5}\right\} = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5},$$

составляем дополнительное ограничение целочисленности для 1-й строки:

$$\frac{3}{5}x_3+\frac{4}{5}x_4\geq\frac{4}{5},\text{ или }\frac{3}{5}x_3+\frac{4}{5}x_4-x_5=\frac{4}{5},$$

которое вводим в симплекс-таблицу.

| Базис | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 9/5 | 1 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 |
| $x_2$ | 41/15 | 0 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 |
| L | 218/15 | 0 | 0 | 2/5 | 6/5 | -1 |
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 2/3 | -1/3 |
| x | 4/3 | 0 | 0 | 1 | 4/3 | -5/3 |
| *L* | 14 | 0 | 0 | 0 | 2/3 | 2/3 |

Получим: $\overline{X}_{цел}=(1, 3),\qquad L(\bar{x})=14.$

Сравнивая полученное значение целевой функции целочисленного решения со значением при оптимальном решении, заметим, что условие целочисленности задачи приводит к уменьшению значения целевой функции.

## Упражнения

Найти целочисленное решение следующих задач.

1. $L(\bar{x})=16x_1+9x_2\to\max$ при ограничениях:

$$\begin{cases}5x_1+2x_2\leq 20,\\ x_1+x_2\leq 6,\end{cases}$$

$$x_{1,2}\geq 0-\textit{целые}.$$

2. $L(\bar{x})=2_1x+3x_2\to\min$ при ограничениях:

$$\begin{cases}2x_1+x_2\geq 9,\\ 3x_1-4x_2\geq 3,\end{cases}$$

$$x_{1,2}\geq 0-\textit{целые}.$$

3. $L(\bar{x})=3x_1+x_2\to\max$ при ограничениях:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leq 6,\\ 2x_1-3x_2\leq 3,\end{cases}$$

$$x_{1,2}\geq 0-\textit{целые}.$$

4. $L(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 3x_1 + 10x_2 \le 15, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0 - \textit{целые.}$$

5. $L(\bar{x}) = x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ -3x_1 + x_2 \le 0, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0 - \textit{целые.}$$

6. $L(\bar{x}) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 13, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3} - \textit{целые.}$$

7. $L(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4} - \textit{целые.}$$

8. Фирма выпускает три вида изделий *А*, *Б*, *В*, причем плановый сменный выпуск составляет 9 шт. изделия *А*, 7 шт. изделия *Б*, 6 шт. изделия В. Сменные ресурсы: 51 ед. производственного оборудования, 48 ед. сырья, 67 ед. электроэнергии, их расход на одно изделие дан в табл. 2.14. Прибыль от реализации изделий *А* – 40 усл. ед., *Б* – 50 усл. ед., *В* – 10 усл. ед.

Таблица 2.14

| Ресурсы | Изделие А | Изделие Б | Изделие В |
|---|---|---|---|
| Оборудование | 3 | 2 | 0 |
| Сырьё | 1 | 4 | 0 |
| Электроэнергия | 3 | 3 | 1 |

Определить, сколько изделий каждого вида надо производить, чтобы получить максимальную прибыль от выпускаемых сверх плана изделий.

9. Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 34 усл. ед. Оборудование должно быть размещено на площади,

не превышающей 60 м². Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины *A* стоимостью 3 усл. ед., требующие производственной площади 3 м² (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену 2 т зерна, и более мощные машины *B* стоимостью 4 усл. ед., занимающие площадь 5 м² и обеспечивающие за смену сортировку 3 т зерна. Определить оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий фермеру при данных ограничениях максимум общей производительности сортировки, если он может приобрести не более 8 машин типа *B*.

10. Три типа самолетов следует распределить между четырьмя авиалиниями. В табл. 2.15 приведены данные месячного объема перевозок каждым самолетом на каждой линии и соответствующих эксплуатационных расходов. Распределить самолеты по линиям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний не менее 300, 200, 1000 и 500 ед. груза соответственно.

Таблица 2.14

| Тип самолёта | Число самолётов | Месячный объём перевозок одним самолётом по авиалиниям | | | | Эксплуатационные расходы на один самолёт по авиалиниям | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 50 | 15 | 10 | 20 | 50 | 15 | 20 | 25 | 40 |
| 2 | 20 | 30 | 25 | 10 | 17 | 70 | 28 | 15 | 45 |
| 3 | 30 | 25 | 50 | 30 | 45 | 40 | 70 | 40 | 65 |

### 2.1.10. Транспортная задача

Транспортная задача (ТЗ) – одна из распространенных задач линейного программирования. Ее цель – разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т. д.

В общем виде задачу можно представить следующим образом: в $m$ пунктах производства $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$ имеется однородный груз в количестве соответственно $a_1$, $a_2$, ..., $a_m$. Этот груз необходимо доставить в $n$ пунктов назначения $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$ в количестве $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$. Стоимость перевозки единицы груза (тариф) из пункта $A_i$ в пункт $B_j$ равна $c_{ij}$. Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы и имеющий минимальную стоимость.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть закрытыми и открытыми. Задача называется закрытой, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Задача называется открытой, если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Обозначим через $x_{ij}$ количество груза, перевозимого из пункта $A_i$ в пункт $B_j$. Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Ее условия запишем в распределительную таблицу, которую будем использовать для нахождения решения.

| $B_j$ / $A_i$ | | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_j$ | ... | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_j$ | ... | $b_n$ |
| $A_1$ | $a_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | ... | $c_{1j}$ $x_{1j}$ | ... | $c_{1n}$ $x_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | ... | $c_{2j}$ $x_{2j}$ | ... | $c_{2n}$ $x_{2j}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_i$ | $a_i$ | $c_{i1}$ $x_{i1}$ | $c_{i2}$ $x_{i2}$ | ... | $c_{ij}$ $x_{ij}$ | ... | $c_{in}$ $x_{in}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_m$ | $a_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | ... | $c_{mj}$ $x_{mj}$ | ... | $c_{mn}$ $x_{mn}$ |

Математическая модель закрытой транспортной задачи имеет вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Оптимальным решением задачи является матрица

$$X_{опт} = \left(x_{ij}\right)_{m \times n} ,$$

удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции. Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный, а именно:

– нахождение исходного опорного решения;
– проверка этого решения на оптимальность;
– переход от одного опорного решения к другому.

Рассмотрим каждый из этих этапов.

**Нахождение исходного опорного решения.** Условия задачи и ее исходное опорное решение будем записывать в распределительную таблицу. Клетки, в которые поместим грузы, называются занятыми, им соответствуют базисные переменные опорного решения. Остальные клетки незанятые, или пустые, им соответствуют свободные переменные. В верхнем правом углу каждой клетки будем записывать тарифы. Существует несколько способов нахождения исходного опорного решения. Рассмотрим один из них – метод минимального тарифа (элемента). Согласно этому методу грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится минимальный тариф перевозок $c_{ij}$. Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены. Некоторые клетки не будут содержать груз. Такие клетки назовём *пустыми*, остальные – *занятыми*. После заполнения таблицы надо подсчитать количество занятых клеток. Обозначим это количество через $k$. Если $k < m + n - 1$, то задача является *вырожденной*. В этом случае необходимо недостающее число заполнить клетками с нулевыми поставками, такие клетки называют *условно занятыми*. В дальнейшем с условно занятыми клетками следует обращаться как с занятыми клетками. Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждых строке и столбце было не менее одной занятой клетки.

Рассмотрим нахождение исходного опорного решения транспортной задачи на конкретном примере.

**Задача** (определение *эффективного варианта доставки изделий к потребителю)*. На складах $A_1$, $A_2$, $A_3$ имеются запасы продукции в количествах соответственно 90, 400, 110 т. Потребители $B_1$, $B_2$, $B_3$ должны получить эту продукцию в количествах – 140, 300, 160 т. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (усл. ед.).

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли данная транспортная задача закрытой:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 + 400 + 110 = 600\ m;$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 140 + 300 + 160 = 600\ m;$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j,$$

следовательно, данная транспортная задача закрытая. Найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа и занесём его в табл. 2.15.

Таблица 2.15

| $A_i$ \ $B_j$ | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | | 140 | 300 | 160 |
| 1 | 90 | 90 (2) | (5) | (2) |
| 2 | 400 | (4) | 300 (1) | 100 (5) |
| 3 | 110 | 50 (3) | (6) | 60 (8) |

Число занятых клеток в табл. 2.15 равно $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, т. е. условие невырожденности выполнено. Получили исходное опорное решение, которое запишем в виде матрицы:

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки при исходном опорном решении составляет

$$L(X_{опт1}) = 90{\cdot}2 + 300{\cdot}1 + 100{\cdot}5 + 50{\cdot}3 + 60{\cdot}8 = 1610 \text{ усл. ед.}$$

**Проверка найденного опорного решения на оптимальность.** Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система $m + n$ действительных чисел $u_i$ и $v_j$, удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и $u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ для свободных клеток.

Числа $u_i$ и $v_j$ называют *потенциалами*. Для отыскания потенциалов в распределительную таблицу добавляют строку $v_j$ и столбец $u_i$. Потенциалы $u_i$ и $v_j$ находят из равенства $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для занятых клеток. Одному из потенциалов дается произвольное значение, например $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Так, если известен потенциал $u_i$, то $v_j = c_{ij} - u_i$; если известен потенциал $v_j$, то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Эту величину называют *оценкой свободных клеток*. Если $\Delta_{ij} \le 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} > 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Проверим найденное опорное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу столбец $u_i$ и строку $v_j$.

Полагая $u_1 = 0$, запишем это значение в последнем столбце табл. 2.16. Рассмотрим занятую клетку первой строки, которая расположена в первом столбце (1, 1), для нее выполняется условие $u_1 + v_1 = 2$, откуда $v_1 = 2$. Это значение запишем в последней строке таблицы. Далее надо рассматривать ту из занятых клеток таблицы, для которой один из потенциалов известен. Рассмотрим занятую клетку (3, 1): $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, откуда $u_3 = 1$.

Таблица 2.16

| $A_i$ \ $B_j$ | | 1 | 2 | 3 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 140 | 300 | 160 | |
| 1 | 90 | 2<br>90 | 5 | 2 | 0 |
| 2 | 400 | 4 | 1<br>300 | 5<br>100 | -2 |
| 3 | 110 | 3<br>50 | 6 | 8<br>60 | 1 |
| $v_j$ | | 2 | 3 | 7 | |

Для клетки (3,3): $u_3 + v_3 = 8$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$.

Для клетки (2,3): $u_2 + v_3 = 5$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$.

Для клетки (2,2): $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + \upsilon_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + \upsilon_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$

$$\Delta_{21} = u_2 + \upsilon_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0,$$

$$\Delta_{32} = u_3 + \upsilon_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

Получили одну оценку $\Delta_{13} = 5 > 0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

**Переход от одного опорного решения к другому.** Наличие положительной оценки свободной клетки ($\Delta_{ij} > 0$) при проверке опорного решения на оптимальность свидетельствует о том, что полученное решение не оптимально и для уменьшения значения целевой функции надо перейти к другому опорному решению. При этом надо перераспределить грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, а одна из ранее занятых клеток – свободной.

Для свободной клетки с $\Delta_{ij} > 0$ строится цикл (цепь, многоугольник), все вершины которого, кроме одной, находятся в занятых клетках; углы прямые, число вершин четное. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (–) и (+). У вершин со знаком (–) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (–). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность, и т. д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Рассмотрим переход от одного опорного решения к другому на заданном примере. Строим цикл для клетки (1, 3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (–) и записываем грузы:

$$\begin{array}{cc} 90 & \\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{\begin{array}{cc} - & + \\ + & - \end{array}}} \\ 50 & 60 \end{array}$$

У вершин со знаком (–) выбираем минимальный груз, он равен 60. Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл:

$$\begin{array}{cc} 30 & 60 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{+} & \multicolumn{1}{c|}{-} \\ \multicolumn{1}{|c}{-} & \multicolumn{1}{c|}{+} \\ \hline 110 & \end{array}$$

Новое опорное решение:

$$\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученное решение на оптимальность. Для этого запишем его в распределительную табл. 2.17, найдем потенциалы занятых и оценки свободных клеток.

Имеем $\Delta_{12} = -7$, $\Delta_{21} = 1 > 0$, $\Delta_{32} = -7$, $\Delta_{33} = -5$. Построим цикл для клетки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1$:

$$\begin{array}{cc} 30 & 60 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{-} & \multicolumn{1}{c|}{+} \\ \multicolumn{1}{|c}{+} & \multicolumn{1}{c|}{-} \\ \hline & 100 \end{array}$$

Таблица 2.17

| $A_i$ \ $B_j$ | | 1 | 2 | 3 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 140 | 300 | 160 | |
| 1 | 90 | 30 (2) | (5) | 60 (2) | 0 |
| 2 | 400 | (4) | 300 (1) | 100 (5) | 3 |
| 3 | 110 | 110 (3) | (6) | (8) | 2 |
| $v_j$ | | 2 | -2 | 2 | |

Произведем перераспределение грузов:

$$\begin{array}{cc} & 90 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{+} & \multicolumn{1}{c|}{-} \\ \multicolumn{1}{|c}{-} & \multicolumn{1}{c|}{+} \\ \hline 30 & 70 \end{array}$$

Получим новое решение, которое занесем в табл. 2.17. Проверим его на оптимальность.

Таблица 2.17

| $A_i$ \ $B_j$ | | 1 | 2 | 3 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 140 | 300 | 160 | |
| 1 | 90 | 2 | 5 | 2<br>90 | 0 |
| 2 | 400 | 4<br>30 | 1<br>300 | 5<br>70 | 3 |
| 3 | 110 | 3<br>110 | 6 | 8 | 2 |
| $v_j$ | | 1 | -2 | 2 | |

Получим $\Delta_{11} = -1$, $\Delta_{12} = -1$, $\Delta_{32} = -6$, $\Delta_{33} = -4$.

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное. Итак,

$$\overline{X}_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов равна

$$L(X)_{\min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \textit{ усл. ед.}$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на 1610 – 1280 = 330 усл. ед.

**Альтернативный оптимум в транспортных задачах.** Признаком наличия альтернативного оптимума в транспортной задаче является равенство нулю хотя бы одной из оценок свободных переменных в оптимальном решении ($X_{\text{опт1}}$). Сделав перераспределение грузов относительно клетки, имеющей $\Delta_{ij} = 0$, получим новое оптимальное решение ($X_{\text{опт2}}$), при этом значение целевой функции (транспортных расходов) не изменится. Если одна оценка свободных переменных равна нулю, то оптимальное решение находится в виде

$$\overline{X}_{\text{опт}} = t \cdot \overline{X}_{\text{опт1}} + (1-t) \cdot \overline{X}_{\text{опт2}},$$

где $0 \le t \le 1$.

**Вырожденность в транспортных задачах.** При решении транспортной задачи может оказаться, что число занятых клеток меньше, чем $m + n - 1$. В этом случае задача имеет вырожденное решение. Для возможного его исключения целесообразно поменять местами поставщиков и потребителей или ввести в свободную клетку с наименьшим тарифом нулевую поставку. Нуль помещают в такую клетку, чтобы в каждой строке и каждом столбце было не менее одной занятой клетки.

### *Открытая транспортная задача*

При открытой транспортной задаче сумма запасов не совпадает с суммой потребностей, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

При этом:

1) если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то объем запасов превышает объем потребления, все потребители будут удовлетворены полностью и часть запасов останется невывезенной. Для решения задачи вводят фиктивного $(n + 1)$-потребителя, потребности которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Модель такой задачи будет иметь вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j+1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_j = a_i , \\ \sum_{i=1}^{m} x_j = b_j , \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n};$$

2) если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то объем потребления превышает объем запасов, часть потребностей останется неудовлетворенной. Для решения задачи вводим фиктивного $(m + 1)$-поставщика:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Модель такой задачи имеет вид

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\\ \sum\limits_{i=1}^{m+1}x_{ij}=b_j,\end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0,\quad i=\overline{1,m+1},\quad j=\overline{1,n}.$$

При введении фиктивного поставщика или потребителя открытая транспортная задача становится закрытой и решается по ранее рассмотренному алгоритму для закрытых транспортных задач, причем тарифы, соответствующие фиктивному поставщику или потребителю, больше или равны наибольшему из всех транспортных тарифов. В целевой функции фиктивный поставщик или потребитель не учитывается.

### 2.1.11. Экономический анализ транспортных задач

Проведем экономический анализ задачи на конкретном примере.

**Задача.** Три торговых склада могут поставлять некоторое изделие в количестве 9, 4 и 8 т. Величины спроса трех магазинов розничной торговли на это изделие равны 3, 5 и 6 т. Какова минимальная стоимость транспортировки от поставщиков к потребителям? Провести анализ решения при условии, что единичные издержки транспортировки в условных единицах даны в матрице

$$\begin{pmatrix}10 & 20 & 5\\ 2 & 10 & 8\\ 1 & 20 & 7\end{pmatrix}.$$

**Решение.** Запасы складов: $\sum\limits_{i=1}^{3}a_i=21$ т, потребности магазинов: $\sum\limits_{j=1}^{4}b_j=14$ т, имеем открытую задачу. Введем фиктивный магазин со спросом $b_{4ф}=7$ т и тарифом 20 усл. ед. Найдём опорное решение и занесём его в табл. 2.18.

Таблица 2.18

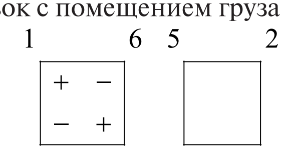
| $A_i$ \ $B_j$ | | 1 | 2 | 3 | 4ф | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 5 | 6 | 7 | |
| 1 | 9 | 10 | 20<br>1 | 5<br>6 | 20<br>2 | 0 |
| 2 | 4 | 2 | 10<br>4 | 8 | 20 | –10 |
| 3 | 8 | 1<br>3 | 20 | 7 | 20<br>5 | 0 |
| $v_j$ | | 1 | 20 | 5 | 20 | |

Оценки свободных клеток: $\Delta_{11} = -9$, $\Delta_{21} = -11$, $\Delta_{23} = -13$, $\Delta_{24} = -10$, $\Delta_{32} = 0$, $\Delta_{33} = -2$, $\Delta_{34} = 0$. Так как оценки $\Delta_{32} = \Delta_{34} = 0$, задача имеет альтернативный оптимум, и одно из решений имеет вид

$$\overline{X}_{\text{опт1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

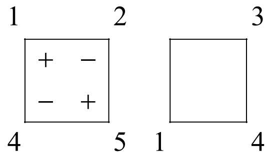
Минимальная стоимость транспортных расходов $L(X_{\text{опт1}}) = 93$ у. е.

Значения оценок свободных клеток, взятых по модулю, называют *теневыми ценами*. Теневые цены используют при проведении экономического анализа. Теневая цена показывает, на сколько увеличится общая стоимость транспортных расходов, если в пустую клетку поместить одно изделие. Например, если придется осуществить перевозку одного изделия с торгового склада 2 в розничный магазин 3, то увеличение стоимости составит $|\Delta_{23}| = |-13| = 13$ усл. ед., что больше, чем тариф груза клетки (2, 3), равный 8 усл. ед. Дополнительное увеличение стоимости транспортных расходов появляется в связи с перераспределением перевозок. Убедимся в этом непосредственно. Составим цикл распределения перевозок с помещением груза в пустую клетку (2, 3):




В клетку (2, 3) помещаем груз 4 т, в (1, 3) вместо 1 т – 5 т, в (2, 2) вместо 4 т – пустая клетка. Изменение расходов составит: 4×20 – 4×10 + 8×4 – 4×5 = 72 усл. ед., или на одно изделие 72:4 = 13 усл. ед.

Если теневая цена клетки равна нулю ($\Delta_{32} = 0$), то задача имеет альтернативный оптимум. Перераспределим грузы относительно клетки (3, 2):




Еще одно оптимальное решение задачи имеет вид:

$$\overline{X}_{опт2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минимальная стоимость транспортных расходов

$$L(\overline{X}_{опт2}) = 93 \text{ усл. ед.}$$

Аналогичный анализ можно провести и по остальным свободным клеткам.

Теневые цены свободных клеток можно использовать в качестве индикаторов изменений стоимости транспортировки одного изделия или тарифа. Например, теневая цена пустой клетки (3, 3) равна $|\Delta_{33}| = |-2| = 2$, а фактическая цена транспортировки одного изделия – 7 усл. ед. Следовательно, для того чтобы использование данной клетки в распределении перевозок привело к снижению общих транспортных расходов, нужно, чтобы тариф этой клетки был не более 7 – 2 = 5 усл. ед.

Проведем стоимостный анализ изменений в занятых клетках. При снижении тарифа увеличение числа изделий в данной клетке выгодно. Если же тарифы занятых клеток возрастают, то при достижении ими определенного значения использование этой клетки является нежелательным и необходимо произвести перераспределение грузов.

В качестве примера определим допустимые изменения тарифа занятой клетки (1, 3). Тариф клетки равен 5 усл. ед. за одно изделие. Уменьшение этой величины не повлияет на объем перевозок, так как указанное количество изделий в клетке удовлетворяет всю потребность магазина 3.

Если тариф клетки (3, 1) становится больше 5 усл. ед., то при составлении циклов будет задействована пустая клетка (2, 3) с $|\Delta_{23}| = 13$ или (3, 3) с $|\Delta_{33}| = 2$. В обоих циклах клетка (1, 3) будет иметь знак «–» и любое увеличение тарифа повлечет снижение теневой цены пустой клетки (2, 3) или (3, 3).

Изменение объема перевозок будет иметь место в случае, если тариф клетки (1, 3) возрастет более чем на 2 усл. ед. и превысит 7 усл. ед.

При этом теневая цена клетки (3, 3) станет положительной и окажется невыгодным использование клетки (1, 3).

Таким образом, для получения оптимального распределения перевозок тариф клетки (1, 3) должен изменяться в диапазоне от 0 до 7 усл. ед. Внутри указанного промежутка происходит лишь изменение общей стоимости транспортных расходов, а распределение перевозок не меняется.

### 2.1.12. Приложение транспортных моделей к решению некоторых экономических задач

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза. В этом случае величины тарифов $c_{ij}$ имеют различный смысл в зависимости от конкретной экономической задачи. К таким задачам относятся следующие:

– оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них $c_{ij}$ является таким экономическим показателем, как производительность. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Так как транспортная задача требует нахождения минимума, то значения $c_{ij}$ берутся с отрицательным знаком;
– оптимальные назначения, или проблема выбора. Имеется $m$ механизмов, которые могут выполнять $m$ различных работ с производительностью $c_{ij}$. Задача позволяет определить, какой механизм и на какую работу надо назначить, чтобы добиться максимальной производительности;
– задача о сокращении производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции;
– увеличение производительности автомобильного транспорта за счет минимизации порожнего пробега. Уменьшение порожнего пробега сократит количество автомобилей для перевозок, увеличив их производительность;
– решение задач с помощью метода запрещения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть направлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости, тем самым в эту клетку не будут производиться перевозки.

## Упражнения

1. Требуется спланировать перевозку строительного материала с трех заводов к четырем строительным площадкам, используя железнодорожную сеть. В течение каждого квартала на четырех площадках требуется соответственно 5, 10, 20, 15 вагонов строительных материалов. Возможности различных заводов – 10, 15 и 25 вагонов в квартал. Условия задачи даны в табл. 2.19. Числа на пересечении строк и столбцов таблицы означают стоимость перевозки одного вагона (усл. ед.).

Таблица 2.19

| Заводы и их возможности | B / A | | Строительство и его потребности | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | | 5 | 10 | 20 | 15 |
| | 1 | 10 | 8 | 3 | 5 | 2 |
| | 2 | 15 | 4 | 1 | 6 | 4 |
| | 3 | 25 | 1 | 9 | 4 | 3 |

2. Решить транспортную задачу, заданную распределительной табл. 2.20, причем перевозки от второго поставщика ко второму потребителю и от третьего поставщика к первому потребителю временно закрыты (в табл. 2.20 эти тарифы обозначены большим числом $M > 0$).

Таблица 2.20

| $B_j$ / $A_i$ | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | | 5 | 5 | 3 |
| 1 | 6 | 6 | 4 | 9 |
| 2 | 3 | 5 | M | 2 |
| 3 | 4 | M | 3 | 6 |

3. В трех пунктах производства имеется одинаковая продукция в объеме 200, 170, 130 т. Эта продукция должна быть доставлена потребителям в количестве 50, 220, 80, 110 и 140 т. Стоимости перевозок единицы продукции от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 & 15 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 12 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

В связи с неплатежеспособностью перевозки от первого пункта производства до первого пункта потребления и от второго пункта производства до третьего пункта потребления временно закрыты. Составить оптимальный план перевозок, при котором суммарные затраты на них минимальные.

4. Фирма получила заказы на три вида выпускаемой ею продукции (бокалы, чашки и вазы), которые необходимо изготовить в течение следующей недели. Размеры заказов: бокалы – 4000 шт., чашки – 2400 шт., вазы – 1000 шт. Участок по изготовлению имеет три станка, на каждом из которых можно делать любой из заказанных видов продукции с одинаковой производительностью. Однако единичные затраты по каждому виду продукции различны в зависимости от используемого станка и заданы табл. 2.21. Кроме того, известно, что производственные мощности второго и третьего станков на следующую неделю составят 3000 шт., а первого станка – 2000 шт.

Таблица 2.21

| Станок | Бокалы | Чашки | Вазы |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,2 | 1,3 | 1,1 |
| 2 | 1,4 | 1,2 | 1,5 |
| 3 | 1,1 | 1,0 | 1,3 |

Используя модель транспортной задачи, найти план производства для заказанных видов продукции, имеющий наименьшую стоимость.

5. На предприятии имеются три группы станков, каждая из которых может выполнять пять операций по обработке деталей (операции могут выполняться в любом порядке). Максимальное время работы каждой группы станков соответственно равно 100, 250, 180 ч. Каждая операция должна выполняться – 100, 120, 70, 130 ч. Определить, сколько времени и на какую операцию нужно использовать каждую группу станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Производительность каждой группы станков на каждую операцию задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. На трех складах имеется мука в количестве 60, 130 и 90 т, которая должна быть в течение месяца доставлена четырем хлебозаводам в количестве соответственно 30, 80, 60, 110 т. Составить оптималь-

ный план перевозок, имеющий минимальные транспортные расходы, если стоимость доставки 1 т муки на хлебозаводы задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

7. Фирма осуществляет поставку бутылок на три завода, занимающиеся производством прохладительных напитков. Она имеет три склада, причем на первом складе находится 6000 бутылок, на втором складе — 3000 бутылок и на третьем складе — 4000 бутылок. Первому заводу требуется 4000 бутылок, второму заводу — 5000 бутылок, третьему заводу — 1000 бутылок. Матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

задана стоимость перевозки одной бутылки от каждого склада к каждому заводу. Как следует организовать доставку бутылок на заводы, чтобы стоимость перевозки была минимальной?

8. Составить оптимальный план перевозки грузов от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 т к четырем потребителям с запросами 90, 190, 40 и 130 т. Стоимости перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}.$$

### 2.1.13. Задача о назначениях

Задача заключается в выборе такого распределения ресурсов по объектам, при котором минимизируется стоимость назначений. Предполагается, что каждый ресурс назначается ровно один раз и каждому объекту приписывается ровно один ресурс.

Возможные применения задачи о назначениях представлены в табл. 2.22.

Матрица стоимостей $C$ имеет вид: $C = (c_{ij})$, где $c_{ij}$ — затраты, связанные с назначением $i$-го ресурса на $j$-й объект, $i = j = \overline{1, n}$, где $n$ — число объектов или ресурсов.

Таблица 2.22

| Ресурсы | Объекты | Критерии эффективности |
|---|---|---|
| Рабочие | Рабочие места | Время |
| Грузовые автомобили | Маршруты | Затраты |
| Станки | Участки | Объём переработанной продукции |
| Экипажи | Рейсы | Время простоя |
| Коммивояжер | Города | Товарооборот |

Обозначим:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ i-\textit{й} \ \textit{ресурс} \ \textit{назначается} \ \textit{на} \ j-\textit{й} \ \textit{объект}; \\ 0 \ \textit{в} \ \textit{противном} \ \textit{случае}. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи может быть записано в виде матрицы $X = (x_{ij})$, элементы которой 0 или 1. Допустимое решение называется *назначением*. Оно строится путем выбора ровно одного элемента в каждой строке матрицы $X = (x_{ij})$ и ровно одного элемента в каждом столбце этой матрицы.

Элементы $c_{ij}$ матрицы $C$, соответствующие элементам $x_{ij} = 1$ матрицы $X$, будем отмечать кружками. Например:

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & (0) \\ (0) & 3 & 8 \\ 6 & (0) & 9 \end{pmatrix}, \qquad X = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Математическая модель задачи:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \ \textit{или} \ 1.$$

### ***Алгоритм решения задачи***

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой $a_i = b_j = 1$. Поэтому ее можно решать алгоритмами транспортной задачи. Рассмотрим другой метод, который является более эффективным, учитывающим специфику математической модели. Этот метод называется венгерским алгоритмом. Он состоит из следующих шагов:

1) преобразование строк и столбцов матрицы;
2) определение назначения;
3) модификация преобразованной матрицы.

***Первый шаг.*** Цель данного шага – получение максимально возможного числа нулевых элементов в матрице $C$. Для этого из всех элементов каждой строки вычитаем минимальный элемент соответствующей строки, а из всех элементов каждого столбца вычитаем минимальный элемент соответствующего столбца.

***Второй шаг.*** Если после выполнения первого шага в каждой строке и каждом столбце матрицы $C$ можно выбрать по одному нулевому элементу, то полученное решение будет оптимальным назначением.

***Третий шаг.*** Если допустимое решение, состоящее из нулей, не найдено, то проводим минимальное число прямых через некоторые столбцы и строки так, чтобы все нули оказались вычеркнутыми. Выбираем наименьший невычеркнутый элемент. Этот элемент вычитаем из каждого невычеркнутого элемента и прибавляем к каждому элементу, стоящему на пересечении проведенных прямых.

Если после проведения третьего шага оптимальное решение не достигнуто, то процедуру проведения прямых следует повторять до тех пор, пока не будет получено допустимое решение.

**Пример.** Распределить ресурсы по объектам.

$$C = \left(C_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

**Решение**

***Первый шаг.*** Значения минимальных элементов строк 1, 2, 3 и 4 равны 2, 4, 11 и 4 соответственно. Вычитая из элементов каждой строки соответствующее минимальное значение, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Значения минимальных элементов столбцов 1, 2, 3 и 4 равны 0, 0, 5, 0 соответственно. Вычитая из элементов каждого столбца соответствующее минимальное значение, получим

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow$$

***Второй шаг.*** Ни одно полное назначение не получено, необходимо провести модификацию матрицы стоимостей.

***Третий шаг.*** Вычеркиваем столбец 1, строку 3, строку 2 (или столбец 2). Значение минимального невычеркнутого элемента равно 2:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \cancel{0} & 8 & 2 & 5 \\ \cancel{11} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \min = 2.$$

Вычитаем его из всех невычеркнутых элементов и, складывая его со всеми элементами, расположенными на пересечении двух линий, получим

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & (0) & 3 \\ 12 & (0) & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & (0) \\ (0) & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}. \text{ Итак, } X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Ответ.* Первый ресурс направляем на третий объект, второй – на второй объект, четвертый – на первый объект, третий ресурс — на четвертый объект. Стоимость назначения: 9 + 4 + 11 + 4 = 28.

*Примечания.*

1. Если исходная матрица не является квадратной, то нужно ввести фиктивные ресурсы или фиктивные объекты, чтобы матрица стала квадратной.
2. Если какой-либо ресурс не может быть назначен на какой-то объект, то соответствующая стоимость полагается равной достаточно большому числу $M$.
3. Если исходная задача является задачей максимизации, то все элементы матрицы $C$ следует умножить на (-1) и сложить их с достаточно большим числом так, чтобы матрица не содержала отрицательных элементов. Затем задачу следует решать как задачу минимизации.
4. Если число линий, необходимое для того, чтобы вычеркнуть нулевые элементы, равно числу строк или столбцов (квадратной матрицы), то существует назначение нулевой стоимости.

### Упражнения

1. Фирма имеет три механизма $A_1$, $A_2$, $A_3$, каждый из которых может быть использован на каждом из трех видов работ $B_1$, $B_2$, $B_3$ с производительностью, заданной матрицей (в условных единицах)

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

   Распределить механизмы по одному на каждую из работ так, чтобы суммарная производительность всех механизмов была максимальной.

2. Пять человек должны выполнить четыре работы, причем каждый из работников с разной производительностью может выполнить любую из этих работ. Предусматривается, что каждый работник в состоянии сделать только одну работу. Производительности работников при выполнении работ заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Распределить людей на работу так, чтобы выполнить ее с максимальной производительностью.

3. Фирма, имеющая четыре склада, получила четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы имеют вполне достаточное количество товара, чтобы выполнить любой один из этих заказов. Расстояния между каждой базой и каждым потребителем приведены в матрице

$$\begin{pmatrix} 68 & 72 & 75 & 83 \\ 56 & 60 & 58 & 63 \\ 38 & 40 & 35 & 45 \\ 47 & 42 & 40 & 45 \end{pmatrix}.$$

   Как следует распределить заказы по базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

4. Фирма объединяет три предприятия, каждое из которых производит три вида изделий. Себестоимости каждого изделия в условных единицах при изготовлении на каждом предприятии указаны в матрице
$$\begin{pmatrix} 15 & 12 & 11 \\ 13 & 11 & 10 \\ 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$
Учитывая необходимость специализации каждого предприятия только по одному изделию, распределить производство изделий по предприятиям так, чтобы изделия имели минимальную себестоимость.
5. (Планирование загрузки оборудования с учетом максимальной производительности станков.) На предприятии пять станков различных видов, каждый из которых может выполнять пять различных операций по обработке деталей. Известна производительность каждого станка при выполнении каждой операции, заданная матрицей
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{5\times 5}.$$
Определить, какую операцию и за каким станком следует закрепить, чтобы суммарная производительность была максимальной при условии, что за каждым станком закреплена только одна операция.

### 2.1.14. Динамическое программирование

Динамическое программирование – один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги).

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием – управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т. д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т. д., является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным, в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Одним из основных методов динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в следующем: каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом.

В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями – номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

Приведём некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования.

### *Оптимальная стратегия замены оборудования*

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин новыми.

Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются расходы на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость.

Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат; причем его можно заменить новым оборудованием того же вида или новым, более совершенным.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения: $r(t)$ – стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста $t$ лет; $u(t)$ – ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста $t$ лет; $s(t)$ – остаточная стоимость оборудования возраста $t$ лет; $P$ – покупная цена оборудования.

Рассмотрим период $N$ лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.

Обозначим через $f_N(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста $t$ лет за оставшиеся $N$ лет цикла его использования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $N = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $N = N$ – к началу процесса (рис. 2.3).

На каждом этапе $N$-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$f_N(t) = \max\begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) \to \textit{сохранение}; \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \to \textit{замена}; \end{cases} \qquad (1)$$

$$f_1(t)=\max\begin{cases} r(t)-u(t) & \to \textit{сохранение};\\ s(t)-P+r(0)-u(0) & \to \textit{замена}. \end{cases} \qquad (2)$$

Уравнение (1) описывает $N$-стадийный процесс, а (2) – одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя – доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

Рис. 2.3

В уравнении (1) функция *r(t) – u(t)* есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на $N$-й стадии процесса.

Функция $f_{N\text{-}1}(t+1)$ характеризует суммарную прибыль от $(N-1)$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $(t+1)$ лет.

Нижняя строка (1) характеризуется следующим образом: функция $s(t)-P$ представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого $t$ лет.

Функция $r(0)$ выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста $t$ лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т. е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию.

Последняя функция $f_{N\text{-}1}$ в (1) представляет собой доход от оставшихся $N-1$ стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одностадийного процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t+1)$, так как $N$ принимает значение 1, 2, ..., $N$. Равенство $f_0(t)=0$ следует из определения функции $f_N(t)$.

Уравнения (1) и (2) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N\text{-}1}(t + 1)$. Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с $t$ до $(t + 1)$ лет, а число оставшихся стадий уменьшается с $N$ до $(N - 1)$.

Расчет начинают с использования уравнения (1). Уравнения (1) и (2) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования, с тем чтобы принять тот из них, который предполагает больший доход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

**Пример 1.** Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: $P = 10$, $S(t) = 0$, $f(t) = r(t) - u(t)$, представленных в таблице.

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | *12* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(t)* | *10* | *9* | *8* | *7* | *6* | *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | *0* | *0* | *0* |

**Решение.** Уравнения (1) и (2) запишем в следующем виде:

$$f_N(t) = \max\begin{cases} f(t) + f_{N-1}(t+1), \\ -p + f(0) + f_{N-1}(1), \end{cases} \tag{3}$$

$$f_1(t) = \max\begin{cases} f(t), \\ -p + f(0). \end{cases}$$

Для $N = 1$

$$\mathrm{f}_1(0) = \max\begin{cases} \mathrm{f}(0) \\ -\mathrm{p} + \mathrm{f}(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 10 \\ -10 + 10 \end{cases} = 10,$$

$$\mathrm{f}_1(1) = \max\begin{cases} \mathrm{f}(1), \\ -\mathrm{p} + \mathrm{f}(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 9 \\ -10 + 10 \end{cases} = 9,$$

.....................................................................

$$\mathrm{f}_1(12) = \max\begin{cases} \mathrm{f}(12) \\ -\mathrm{p} + \mathrm{f}(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 0 \\ -10 + 10 \end{cases} = 0.$$

Для $N = 2$

$$f_2(0) = \max\begin{cases} f(0) + f_1(1) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 10 + 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 19,$$

$$f_2(1) = \max\begin{cases} f(1) + f_1(2), \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 9 + 8 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 17,$$

..........................................................................................

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие: $f_1(1) > f_2(2)$, т. е. в данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого. Результаты расчетов помещаем в таблицу, момент замены отмечаем звездочкой, после чего дальнейшие вычисления по строчке прекращаем (табл. 2.23).

Таблица 2.23

| $F_N(t)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N$ | $N-1$ | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $f_1(t)$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $f_2(t)$ | 19 | 17 | 15 | 13 | 11 | 9 | 9* | | | | | | |
| $f_3(t)$ | 27 | 24 | 21 | 18 | 17 | 17* | | | | | | | |
| $f_4(t)$ | 34 | 30 | 26 | 24 | 24* | | | | | | | | |
| $f_5(t)$ | 40 | 35 | 32 | 31 | 30 | 30* | | | | | | | |
| $f_6(t)$ | 45 | 41 | 39 | 37 | 36 | 35 | 35* | | | | | | |
| $f_7(t)$ | 51 | 48 | 45 | 43 | 41 | 41* | | | | | | | |
| $f_8(t)$ | 58 | 54 | 51 | 48 | 48* | | | | | | | | |
| $f_9(t)$ | 64 | 60 | 56 | 55 | 54 | 54* | | | | | | | |
| $f_{10}(t)$ | 70 | 65 | 63 | 61 | 60 | 60* | | | | | | | |
| $f_{11}(t)$ | 75 | 72 | 69 | 67 | 66 | 65 | 65* | | | | | | |
| $f_{12}(t)$ | 82 | 78 | 75 | 73 | 72 | 72* | | | | | | | |

Можно не решать каждый раз уравнение (3), а вычисления проводить в таблице. Например, вычислим $f_4(t)$:

$$f_4(0)=f_1(0)+f_3(1)=10+24=34>f_3(1)=24;$$

$$f_4(1)=f_1(1)+f_3(2)=9+21=30>f_3(1);$$

$$f_4(2)=f_1(2)+f_3(3)=8+18=26>f_3(1);$$

$$f_4(3)=f_1(3)+f_3 4=7+17=24>f_3(1);$$

$$f_4(4)=f_1(4)+f_3(5)=6+17=23>f_3(1).$$

Дальнейшие расчеты для $f_4(t)$ прекращаем, так как $f_4(4) = 23 < f_3(1) = 24$.

По результатам вычислений и по линии, разграничивающей области решений сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены оборудования. Для данной задачи он составляет четыре года.

*Ответ*. Для получения максимальной прибыли от использования оборудования в двенадцатиэтапном процессе оптимальный цикл состоит в замене оборудования через каждые четыре года.

### *Оптимальное распределение ресурсов*

Пусть имеется некоторое количество ресурсов *x*, которое необходимо распределить между *n* различными предприятиями, объектами, работами и т. д. так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Введем обозначения: $x_i$ – количество ресурсов, выделенных *i*-му предприятию ($i=1,n$); $g_i(x_i)$ – функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурса $x_i$, полученного *i*-м предприятием; $f_k(x)$ – наибольший доход, который можно получить при использовании ресурсов *x* от первых *k* различных предприятий.

Сформулированную задачу можно записать в математической форме:

$$f_n(x)=\max\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$

$$x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,n}.$$

Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$.

Обозначим через $x_k$ количество ресурса, используемого $k$-м способом $(0 \le x_k \le x)$, тогда для $(k-1)$ способов остается величина ресурсов, равная $(x - x_k)$. Наибольший доход, который получается при использовании ресурса $(x - x_k)$ от первых $(k-1)$ способов, составит $f_{k-1}(x - x_k)$.

Для максимизации суммарного дохода от $k$-го и первых $(k-1)$ способов необходимо выбрать $x_k$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$f_1(x) = g_1(x),$$
$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Рассмотрим конкретную задачу по распределению капиталовложений между предприятиями.

### *Распределение инвестиций для эффективного использования потенциала предприятия*

Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме. Для расширения производства совет директоров выделяет средства в объеме 120 млн руб. с дискретностью 20 млн руб. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в табл. 2.24. Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить не более одной инвестиции.

Таблица 2.24

| Выделяемые средства, млн руб. | Прирост выпуска продукции, млн руб. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Предприятие № 1 | Предприятие № 2 | Предприятие № 3 | Предприятие № 4 |
| 20 | 8 | 10 | 12 | 11 |
| 40 | 16 | 20 | 21 | 23 |
| 60 | 25 | 28 | 27 | 30 |
| 80 | 36 | 40 | 38 | 37 |
| 100 | 44 | 48 | 50 | 51 |
| 120 | 62 | 62 | 63 | 63 |

**Решение.** Разобьем решение задачи на четыре этапа по количеству предприятий, на которых предполагается осуществить инвестиции. Рекуррентные соотношения будут иметь вид: для предприятия № 1: $f_1(x) = g_1(x_1)$, для всех остальных предприятий $f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}$, к = 2, 3, ..., n. Решение будем проводить согласно рекуррентным соотношениям в четыре этапа.

***Первый этап.*** Инвестиции производим только первому предприятию. Тогда $f_1(20) = 8$, $f_1(40) = 16$, $f_1(60) = 25$, $f_1(80) = 36$, $f_1(100) = 44$, $f_1(120) = 62$.

***Второй этап.*** Инвестиции выделяем первому и второму предприятиям. Рекуррентное соотношение для второго этапа имеет вид $f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}$. Тогда

– при $x = 20$

$$f_2(20) = \max(8 + 0{,}0 + 10) = \max(8,\ 10) = 10,$$

– при $x = 40$

$$f_2(40) = \max(16{,}8 + 10{,}20) = \max(16,\ 18,\ 20) = 20,$$

– при $x = 60$

$$f_2(60) = \max(25{,}16 + 10,\ 8 + 20{,}28) = \max(25{,}26,\ 28{,}28) = 28,$$

– при $x = 80$

$$f_2(80) = \max(36{,}25 + 10{,}16 + 20{,}8 + 28{,}40) = \max(36,\ 35,\ 36,\ 36,\ 40) = 40,$$

– при $x = 100$

$$f_2(100) = \max(44{,}36 + 10{,}25 + 20{,}16 + 28{,}8 + 40{,}48) =$$
$$= \max(44,\ 46,\ 45,\ 44,\ 48,\ 48) = 48,$$

– при $x = 120$

$$f_2(120) = \max(62{,}44 + 10{,}36 + 20{,}25 + 28{,}16 + 40{,}8 + 48{,}62) =$$
$$= \max(62,\ 54,\ 56,\ 53,\ 56,\ 56,\ 62) = 62.$$

***Третий этап.*** Финансируем второй этап и третье предприятие. Расчеты проводим по формуле $f_3(x) = \max\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}$. Тогда

– при $x = 20$

$$f_3(20) = \max(10,\ 12) = 12,$$

– при $x = 40$

$$f_3(40) = \max(20{,}10 + 12{,}21) = \max(20,\ 22,\ 21) = 22,$$

– при $x = 60$

$$f_3(60) = \max(28{,}20 + 12{,}10 + 21{,}27) = \max(28,\ 32,\ 31,\ 27) = 32,$$

– при $x = 80$

$$f_3(80) = \max(40{,}28 + 12{,}20 + 21{,}10 + 27{,}38) =$$
$$= \max(40,\ 40,\ 41,\ 37,\ 38) = 41,$$

– при $x = 100$

$$f_3(100) = \max(48{,}40 + 12{,}28 + 21{,}20 + 27{,}10 + 38{,}50) =$$
$$= \max(48,\ 52,\ 49,\ 47,\ 48,\ 50) = 52,$$

– при $x = 120$

$$f_3(120) = \max(62{,}48 + 12{,}40 + 21{,}28 + 27{,}20 + 38{,}10 + 50{,}63 =$$
$$= \max(62,\ 60,\ 61,\ 55,\ 58,\ 60,\ 63) = 63.$$

***Четвертый этап.*** Инвестиции в объеме 120 млн руб. распределяем между третьим этапом и четвертым предприятием.

При $x = 120$

$$f_4(120) = \max(63{,}52 + 11{,}41 + 23{,}32 + 30{,}22 + 37{,}12 + 51{,}63) =$$
$$= \max(63,\ 63,\ 64,\ 62,\ 59,\ 63,\ 63) = 64.$$

Получены условия управления от первого до четвертого этапа. Вернемся от четвертого к первому этапу. Максимальный прирост выпуска продукции в 64 млн руб. получен на четвертом этапе как 41 + 23, т. е. 23 млн руб. соответствуют выделению 40 млн руб. четвертому предприятию (см. табл.). Согласно третьему этапу 41 млн руб. получен как 20 + 21, т. е. 21 млн руб. соответствует выделению 40 млн руб. третьему предприятию. Согласно второму этапу 20 млн руб. получено при выделении 40 млн руб. второму предприятию.

Таким образом, инвестиции в объеме 120 млн руб. целесообразно выделить второму, третьему и четвертому предприятиям по 40 млн руб. каждому, при этом прирост продукции будет максимальным и составит 64 млн руб.

### *Минимизация затрат на строительство и эксплуатацию предприятий*

Задача по оптимальному размещению производственных предприятий может быть сведена к задаче распределения ресурсов согласно критерию минимизации с учетом условий целочисленности, накладываемых на переменные.

Пусть задана потребность в пользующемся спросом продукте на определенной территории. Известны пункты, в которых можно построить предприятия, выпускающие данный продукт. Подсчитаны затраты на строительство и эксплуатацию таких предприятий.

Необходимо так разместить предприятия, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

Введем обозначения: $x$ – количество распределяемого ресурса, которое можно использовать $n$ различными способами; $x_i$ – количество ресурса, используемого по $i$-му способу ($i = \overline{1, n}$); $g_i(x_i)$ – функция расходов, равная, например, величине затрат на производство при использовании ресурса $x_i$ по $i$-му способу; $\varphi_k(x)$ – наименьшие затраты, которые нужно произвести при использовании ресурса $x$ первыми $k$ способами.

Необходимо минимизировать общую величину затрат при освоении ресурса $x$ всеми способами:

$$\varphi_n(x) = \min \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Экономический смысл переменных $x_i$ состоит в нахождении количества предприятий, рекомендуемого для строительства в $i$-м пункте. Для удобства расчетов будем считать, что планируется строительство предприятий одинаковой мощности.

Рассмотрим конкретную задачу по размещению предприятий.

**Пример.** В трех районах города предприниматель планирует построить пять предприятий одинаковой мощности по выпуску хлебобулочных изделий, пользующихся спросом. Необходимо разместить предприятия таким образом, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты на их строительство и эксплуатацию. Значения функции затрат $g_i(x)$ приведены в табл. 2.25.

Таблица 2.25

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_1(x)$ | 11 | 18 | 35 | 51 | 76 |
| $g_2(x)$ | 10 | 19 | 34 | 53 | 75 |
| $g_3(x)$ | 9 | 20 | 36 | 54 | 74 |

В данном примере $g_i(x)$ – функция расходов в млн руб., характеризующая величину затрат на строительство и эксплуатацию в зависимости от количества размещаемых предприятий в $i$-м районе; $\varphi_k(x)$ – наименьшая величина затрат в млн руб., которые нужно произвести при строительстве и эксплуатации предприятий в первых $k$ районах.

**Решение** задачи проводим с использованием рекуррентных соотношений: для первого района $\varphi_1(x) = \min g_i(x_i) = g_1(x)$, для остальных районов

$$\varphi_k(x) = \min\{g_k(x_k) + \varphi_{k-1}(x - x_k)\}, \ k = 2, 3, ..., n.$$

Задачу будем решать в три этапа.

***Первый этап.*** Если все предприятия построить только в первом районе, то $\varphi_1(x) = g_1(1) = 11$, $\varphi_1(2) = g_1(2) = 18$, $\varphi_1(3) = g_1(3) = 35$, $\varphi_1(4) = g_1(4) = 51$, $\varphi_1(5) = g_1(5) = 76$ и минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 76 млн руб.

***Второй этап.*** Определим оптимальную стратегию при размещении предприятий только в первых двух районах по формуле

$$\varphi_2(x) = min\{ g_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}.$$

Найдем $\varphi_2(1)$:

$$g_2(1) + \varphi_1(0) = 10 + 0 = 10,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(1) = 0 + 11 = 11,$$
$$\varphi_2(1) = \min (10, 11) = 10.$$

Вычислим $\varphi_2(2)$:

$$g_2(2) + \varphi_1(0) = 19 + 0 = 19,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(1) = 10 + 11 = 21,$$
$$g_2(0) + \varphi_1 (2) = 0 + 18 = 18,$$
$$\varphi_2(2) = \min (19, 21, 18) = 18.$$

Найдем $\varphi_2(3)$:

$$g_2(3) + \varphi_1 (0) = 34 + 0 = 34,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(1) = 19 + 11 = 30,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(2) = 10 + 18 = 28,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(3) = 0 + 35 = 35,$$
$$\varphi_2(3) = \min (34, 30, 28, 35) = 28.$$

Определим $\varphi_2(4)$:

$$g_2(4) + \varphi_1(0) = 53 + 0 = 53,$$
$$g_2(3) + \varphi_1(1) = 34 + 11 = 45,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(2) = 19 + 18 = 37,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(3) = 10 + 35 = 45,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(4) = 0 + 51 = 51,$$
$$\varphi_2(4) = \min (53, 45, 37, 45, 51) = 37.$$

Вычислим $\varphi_2(5)$:

$$g_2(5) + \varphi_1(0) = 75 + 0 = 75,$$
$$g_2(4) + \varphi_1(1) = 53 + 11 = 64,$$
$$g_2(3) + \varphi_1(2) = 34 + 18 = 52,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(3) = 19 + 35 = 54,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(4) = 10 + 51 = 61,$$

$$g_2(0) + \varphi_1(5 = 0 + 76 = 76,$$
$$\varphi_2(5) = \min(75, 64, 52, 54, 61, 76) = 52.$$

***Третий этап.*** Определим оптимальную стратегию при размещении пяти предприятий в трех районах по формуле

$$\varphi_3(x) = \min\{g_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)\}.$$

Найдем $\varphi_3(5)$:

$$g_3(5) + \varphi_2(0) = 74 + 0 = 74,$$
$$g_3(4) + \varphi_2(1) = 54 + 10 = 64,$$
$$g_3(3) + \varphi_2(2) = 36 + 18 = 54,$$
$$g_3(2) + \varphi_2(3) = 20 + 28 = 48,$$
$$g_3(1) + \varphi_2(4) = 9 + 37 = 46,$$
$$g_3(0) + \varphi_2(5) = 0 + 52 = 52,$$
$$\varphi_3(5) = \min(74, 64, 54, 48, 46, 52) = 46.$$

Минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 46 млн руб.

Определены затраты на строительство предприятий от первого до третьего этапа. Вернемся от третьего к первому этапу. Минимальные затраты в 46 млн руб. на третьем этапе получены как 9 + 37, т. е. 9 млн руб. соответствуют строительству одного предприятия в третьем районе (см. табл.). Согласно второму этапу 37 млн руб. получены как 19 + 18, т. е. 19 млн руб. соответствуют строительству двух предприятий во втором районе. Согласно первому этапу 18 млн руб. соответствуют строительству двух предприятий в первом районе.

**Ответ.** Оптимальная стратегия состоит в строительстве одного предприятия в третьем районе, по два предприятия во втором и первом районах, при этом минимальная стоимость строительства и эксплуатации составит 46 ден. ед.

### *Нахождение рациональных затрат при строительстве трубопроводов и транспортных артерий*

Требуется проложить путь (трубопровод, шоссе) между двумя пунктами *A* и *B* таким образом, чтобы суммарные затраты на его сооружение были минимальные.

**Решение.** Разделим расстояние между пунктами *A* и *B* на шаги (отрезки). На каждом шаге можем двигаться либо строго на восток (по оси *X*), либо строго на север (по оси *Y*). Тогда путь от *A* в *B* представляет ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей. Затраты на сооружение каждого из отрезков известны (рис. 2.4) в млн руб.

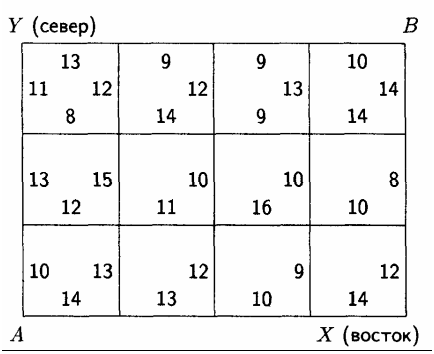



Рис. 2.4

Разделим расстояние от $A$ до $B$ в восточном направлении на четыре части, в северном – на три части. Путь можно рассматривать как управляемую систему, перемещающуюся под влиянием управления из начального состояния $A$ в конечное $B$. Состояние этой системы перед началом каждого шага будет характеризоваться двумя целочисленными координатами $x$ и $y$. Для каждого из состояний системы (узловой точки) найдем условное оптимальное управление. Оно выбирается так, чтобы стоимость всех оставшихся шагов до конца процесса была минимальна. Процедуру условной оптимизации проводим в обратном направлении, т. е. от точки $B$ к точке $A$.

Найдем условную оптимизацию последнего шага (рис. 2.5).

В точку $B$ можно попасть из $B_1$ или $B_2$. В узлах запишем стоимость пути. Стрелкой покажем минимальный путь. Рассмотрим предпоследний шаг (рис. 2.6).

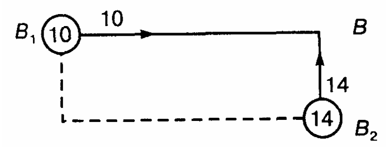



Рис. 2.5

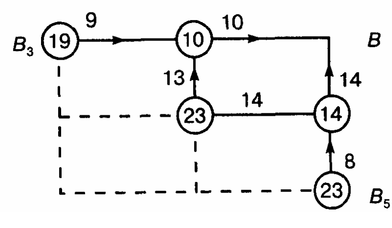



Рис. 2.6

Для точки $B_3$ условное управление – по оси $X$, а для точки $B_5$ – по оси $Y$. Управление для точки $B_4$ выбираем как min(13 + 10, 14 + 14) =

min(23, 28) = 23, т. е. по оси *Y*. Условную оптимизацию проводим для всех остальных узловых точек (рис. 2.7).

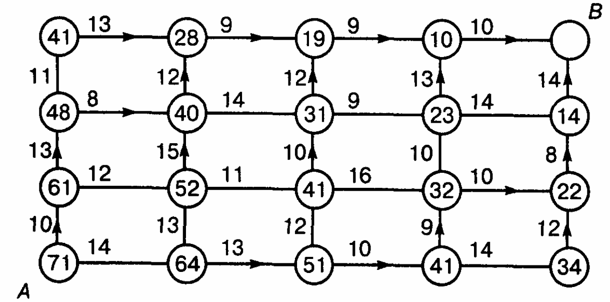



Рис. 2.7

Получим $\overline{x}_{опт} = (с,\ с,\ в,\ с,\ в,\ в,\ в)$, где *с* – север, *в* – восток. Минимальные затраты составляют 10 + 13 + 8 + 12 + 9 + 9 + 10 = 71 млн руб.

Если решать задачу исходя из оптимальности на каждом этапе, то решение будет следующим: $\overline{x}_{опт} = (с,\ в,\ в,\ с,\ в,\ с,\ в)$.

Затраты составят 10 + 12 + 11 + 10 + 9 + 13 + 10 = 75 > 71.

**Ответ.** Прокладывать путь целесообразно по схеме: *с, с, в, с, в, в, в*, при этом затраты будут минимальные и составят 71 млн руб.

### Упражнения

1. К началу рассматриваемого периода на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его работы, а также затраты на содержание и ремонт при различном времени его использования приведены в табл. 2.26. Известно, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного установленному, составляют 40 млн руб, а заменяемое оборудование списывается. Составить такой план замены оборудования в течение пяти лет, при котором общий доход за данный период времени максимален.

Таблица 2.26

| Наименование | Время, в течение которого используется оборудование, годы | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Годовой выпуск продукции, млн руб. | 80 | 75 | 65 | 60 | 60 | 55 |
| Ежегодные затраты на содержание и ремонт оборудования, млн руб | 20 | 25 | 30 | 35 | 45 | 55 |

2. К началу анализируемого периода на предприятии установлено новое оборудование. Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: покупная цена оборудования ($P$) составляет 12 ден. ед.; остаточная стоимость оборудования $S(t) = 0$; $f_N(t) = r(t) - u(t)$ – максимальный доход, получаемый от оборудования возраста $t$ лет за оставшиеся $N$ лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии, где $r(t)$ – стоимость продукции, выпускаемой за год на единице оборудования возраста $t$ лет, $u(t)$ – ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста $t$ лет; $N = 8$ лет. Зависимость $f_N(t)$ от $N$ задана в табл. 2.27.

Таблица 2.27

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(t) | 12 | 11 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 |

3. Торговая фирма располагает пятью автолавками, которые могут быть направлены в воскресный день в три населенных пункта. Считается, что товарооборот фирмы зависит лишь от количества и ассортимента направляемых товаров и определяется числом посланных в тот или иной населенный пункт машин.

Среднее значение товарооборота в тыс. руб. в каждом из населенных пунктов задано в табл. 2.28.

Таблица 2.28

| Количество автолавок | Товарооборот в населённых пунктах, тыс. руб. | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 15 | 12 | 18 |
| 2 | 24 | 20 | 23 |
| 3 | 30 | 31 | 29 |
| 4 | 37 | 38 | 36 |
| 5 | 41 | 42 | 39 |

Найти оптимальную стратегию фирмы в распределении автолавок по населенным пунктам, максимизирующую общий товарооборот.

4. В табл. 2.29 указан возможный прирост выпуска продукции четырьмя плодово-консервными заводами области в млн руб. при осуществлении инвестиций на их модернизацию с дискретностью 50 млн руб., причем на один завод полагается только одна инвестиция. Составить план распределения инвестиций между заводами области, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Таблица 2.29

| Инвестиции, млн руб. | Прирост выпуска продукции, млн руб. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Заводы | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 50 | 25 | 30 | 36 | 28 |
| 100 | 60 | 70 | 64 | 56 |
| 150 | 100 | 90 | 95 | 110 |
| 200 | 140 | 122 | 130 | 142 |

5. В трех областях необходимо построить пять предприятий одинаковой мощности по переработке сельскохозяйственной продукции. Разместить предприятия таким образом, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты на их строительство и эксплуатацию. Функция расходов $g_i(x)$, характеризующая величину затрат на строительство и эксплуатацию в зависимости от количества размещаемых предприятий в $i$-й области, приведена в табл. 2.30.

Таблица 2.30

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_1(x)$ | 8 | 14 | 22 | 29 | 34 |
| $g_2(x)$ | 10 | 17 | 18 | 27 | 31 |
| $g_3(x)$ | 11 | 16 | 15 | 26 | 31 |

6. Проложить трубопровод между двумя пунктами $A$ и $B$ так, чтобы суммарные затраты на его изготовление были минимальные. Исходные данные по затратам в млн руб. для проведения расчетов представлены на рис. 2.8.

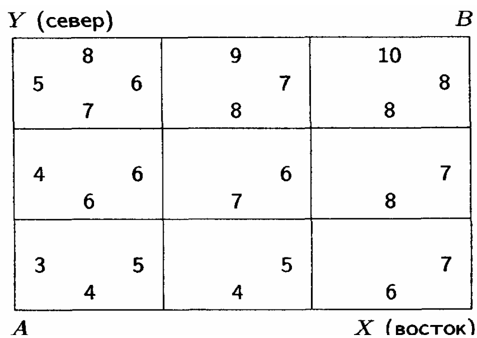



Рис. 2.8

## 2.2. Теория игр

*Теория игр* – раздел математики, изучающий формальные модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. При этом под конфликтом понимается явление, в котором участвуют различные стороны, наделённые разными интересами и возможностями выбирать доступные для них действия в соответствии с этими интересами. Отдельные математические вопросы, касающиеся конфликтов, рассматривались (начиная с XVII в.) многими учёными. Систематическая же математическая теория игр была детально разработана американскими учёными Дж. Нейманом и О. Моргенштерном (1944) как средство математического подхода к явлениям конкурентной экономики. В ходе своего развития теория игр переросла эти рамки и превратилась в общую математическую теорию конфликтов. В рамках теории игр в принципе поддаются математическому описанию военные и правовые конфликты, спортивные состязания, «салонные» игры, а также явления, связанные с биологической борьбой за существование.

В условиях конфликта стремление противника скрыть свои предстоящие действия порождает неопределённость. Наоборот, неопределённость при принятии решений (например, на основе недостаточных данных) можно интерпретировать как конфликт принимающего решения субъекта с природой. Поэтому теория игр рассматривается так же, как теория принятия оптимальных решений в условиях неопределённости. Она позволяет математизировать некоторые важные аспекты принятия решений в технике, сельском хозяйстве, медицине и социологии, в управлении, планировании и прогнозировании.

Основным в теории игр является понятие игры, являющееся формализованным представлением о конфликте. Точное описание конфликта в виде игры состоит поэтому в указании того, кто и как участвует в конфликте, каковы его возможные исходы, а также кто и в какой форме заинтересован в этих исходах. Участвующие в конфликте стороны называются коалициями действия; доступные для них действия – их стратегиями; возможные исходы конфликта – ситуациями (обычно каждая ситуация понимается как результат выбора каждой из коалиций действия некоторой своей стратегии); стороны, заинтересованные в исходах конфликта, – коалициями интересов; их интересы описываются предпочтениями тех или иных ситуаций (эти предпочтения часто выражаются численными выигрышами). Конкретизация перечисленных объектов и связей между ними порождает разнообразные частные классы игр.

Если в игре имеется единственная коалиция действия, то стратегии этой коалиции можно отождествить с ситуациями и далее больше уже о стратегиях не упоминать. Такие игры называются нестратегическими. Класс нестратегических игр весьма обширен. К их числу относятся, в частности, кооперативные игры.

Примером нестратегической (кооперативной) игры может служить простая игра, состоящая в следующем. Множеством ситуаций являются в ней всевозможные распределения (дележи) между игроками некоторого количества однородной полезности (например, денег). Каждый дележ описывается теми суммами, которые при этом получают отдельные игроки. Коалиция интересов называется выигрывающей, если она может даже в условиях противодействия со стороны всех остальных игроков присвоить и разделить между своими членами всю имеющуюся полезность. Все коалиции, не являющиеся выигрывающими, совсем не могут присвоить какой-либо доли полезности. Такие коалиции называются проигрывающими. Естественно считать, что выигрывающая коалиция предпочитает один делёж другому, если доля каждого из её членов в условиях первого дележа больше, чем в условиях второго. Проигрывающие же коалиции не могут сравнивать дележи по предпочтительности (это условие также вполне естественно: коалиция интересов, которая сама не в состоянии добиться ничего, вынуждена соглашаться на любой делёж и лишена возможности выбора между дележами).

Если в игре имеется более одной коалиции действия, то игра называется стратегической. Важный класс стратегических игр составляют бескоалиционные игры, в которых коалиции действия совпадают с коалициями интересов (они называются игроками), а предпочтения для игроков описываются их функциями выигрыша: игрок предпочитает одну ситуацию другой, если в первой ситуации он получает больший выигрыш, чем во второй.

Если в бескоалиционной игре участвуют два игрока, а значения их функций выигрыша в любой ситуации отличаются только знаками, то игра называется антагонистической; в ней выигрыш одного из игроков в точности равен проигрышу другого. Если в антагонистической игре множества стратегий обоих игроков конечны, то игра называется ввиду некоторой специфической возможности её описания.

В качестве другого примера бескоалиционной игры можно привести шахматы. В этой игре участвуют два игрока (белые и чёрные). Стратегия каждого из игроков есть мыслимое (хотя практически и не поддающееся детальному описанию) правило выбора в каждой возможной позиции некоторого хода, допускаемого движениями фигур. Пара таких правил (за белых и за чёрных) составляет ситуацию, которая полностью определяет протекание шахматной партии и в том числе её исход. Функция выигрыша белых имеет значение 1 на выигрываемых партиях, 0 на ничьих и 1 на проигрываемых (такой способ начисления очков практически ничем не отличается от принятого в турнирной и матчевой практике). Функция выигрыша чёрных отличается от функции выигрыша белых лишь знаком. Из сказанного видно, что шахматы относятся к числу антагонистических и притом матричных игр. В шахматах стратегии не выбираются игроками до начала игры, а реализуются постепенно, ход за ходом. Это значит, что шахматы принадлежат к позиционным играм.

Теория игр является нормативной, то есть предметом её изучения являются не столько сами модели конфликтов (игры) как таковые, сколько содержание принимаемых в играх принципов оптимальности, существования ситуаций, на которых эти принципы оптимальности реализуются (такие ситуации или множества ситуаций называются решениями в смысле соответствующего принципа оптимальности), и, наконец, способы нахождения таких ситуаций. Рассматриваемые в теории игр объекты – игры – весьма разнообразны, и пока не удалось установить принципов оптимальности, общих для всех классов игр. Практически это означает, что единого для всех игр истолкования понятия оптимальности ещё не выработано. Поэтому прежде чем говорить, например, о наивыгоднейшем поведении игрока в игре, необходимо установить, в каком смысле эта выгодность понимается. Все применяемые в теории игр принципы оптимальности при всём их внешнем разнообразии отражают прямо или косвенно идею устойчивости ситуаций или множеств ситуаций, составляющих решения. В бескоалиционных играх основным принципом оптимальности считается принцип осуществимости цели, приводящий к ситуациям равновесия. Эти ситуации характеризуются тем свойством, что любой игрок, который отклонится от ситуации равновесия (при условии, что остальные игроки не изменят своих стратегий), не увеличит этим своего выигрыша.

В частном случае антагонистических игр принцип осуществимости цели превращается в так называемый принцип максимина (отражающий стремление максимизировать минимальный выигрыш).

Принципы оптимальности (первоначально выбранные интуитивно) выводятся на основании некоторых заранее задаваемых их свойств, имеющих характер аксиом. Существенно, что применяемые в теории игр различные принципы оптимальности могут противоречить друг другу. Теоремы существования в теории игр доказываются преимущественно теми же неконструктивными средствами, что и в других разделах математики: при помощи теорем о неподвижной точке, о выделении из бесконечной последовательности сходящейся подпоследовательности и т. п., или же, в весьма узких случаях, путём интуитивного указания вида решения и последующего нахождения решения в этом виде.

Фактическое решение некоторых классов антагонистических игр сводится к решению дифференциальных и интегральных уравнений, а матричных игр – к решению стандартной задачи. Разрабатываются приближённые и численные методы решения игр. Для многих игр оптимальными оказываются так называемые смешанные стратегии, то есть стратегии, выбираемые случайно (например, по жребию).

Теория игр, созданная для математического решения задач экономического и социального происхождения, не может в целом сводиться к классическим математическим теориям, созданным для решения физических и технических задач. Однако в различных конкретных вопросах теория игр широко использует весьма разнообразные классические математические методы. Кроме этого, теория игр связана с рядом математических дисциплин внутренним образом. В теории игр систематически и по существу употребляются понятия теории вероятностей. На языке теории игр можно сформулировать большинство задач математической статистики. Необходимость при анализе игры количественного учёта неопределённости предопределяет важность и тем самым связь теории игр с теорией информации и через её посредство – с кибернетикой. Кроме того, теория игр, будучи теорией принятия решений, может рассматриваться как существенная составная часть математического аппарата.

Теоретико-игровые модели применяются в экономике, технике, военном деле и даже в антропологии. Основные трудности практического применения теории игр связаны с экономической и социальной природой моделируемых ею явлений и недостаточным умением составлять такие модели на количественном уровне.

Итак**,** *теория игр – теория математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, столкновения, в конфликтных ситуациях, когда принимающий решение субъект (игрок), располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений, которые он может принять, и о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию.* Теория игр пытается математически объяснить явления, возникающие в конфликтных ситуациях, в условиях столкновения сторон. Такие ситуации изучаются психологией, политологией, социологией, экономикой.

Игры классифицируются *по выигрышу* (антагонистические игры; игры с нулевой суммой), *по характеру получения информации* (игры в нормальной форме (игроки получают всю информацию до начала игры), динамические игры (информация поступает в процессе игры)), *по количеству стратегий* (конечные игры; бесконечные игры), *по составу игроков* (бескоалиционные игры; коалиционные игры).

### 2.2.1. Основные понятия теории игр

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участников зависит от действий других, можно разбить на два типа: интересы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях; интересы участников не совпадают. В этом случае может оказаться невыгодным сообщать другим участникам свои решения, так как кто-нибудь из них сможет воспользоваться знанием чужих решений и получит больший выигрыш за счет других участников. Ситуации такого типа называются *конфликтными*. Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается *теория игр*.

В игре могут сталкиваться интересы двух или нескольких противников, поэтому игры разделяются на парные и множественные. Если во множественной игре интересы игроков совпадают, то они могут объединяться, создавая коалиции. Такие игры называются коалиционными.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т. е. определение для них оптимальной стратегии. *Стратегией игрока* называется система правил, однозначно определяющих поведение игрока на каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. *Оптимальной* называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, когда имеются два участника и когда выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется *антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой*.

В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

У первого игрока три стратегии (варианта действия): $A_1$ (записать 1), $A_2$ (записать 2), $A_3$ (записать 3); у второго игрока также три стратегии: $B_1$, $B_2$, $B_3$ (табл. 2.31).

Таблица 2.31

| | $B_1 = 1$ | $B_2 = 2$ | $B_3 = 3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1 = 1$ | 0 | -1 | -2 |
| $A_2 = 2$ | 1 | 0 | -1 |
| $A_3 = 3$ | 2 | 1 | 0 |

Задача первого игрока – максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока – минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока.

Игру можно представить в виде матрицы, в которой строки – стратегии первого игрока, столбцы – стратегии второго игрока, а элементы матрицы – выигрыши первого игрока. Такую матрицу называют *платежной*.

Для данного примера платежная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

Парную игру с нулевой суммой можно записать платежной матрицей

$$\left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число $a_{ij}$ в каждой строке обозначим $\alpha_i$ $(i=\overline{1,m})$, $a_i = \min\limits_j a_{ij}$.

Зная $\alpha_i$, т. е. минимальные выигрыши при различных стратегиях $A_i$, первый игрок выберет ту стратегию, для которой $\alpha_i$ максимально. Обозначим это максимальное значение через $\alpha$, тогда $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

Величина $\alpha$ – гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок, – называется нижней ценой игры *(максимином)*.

Аналогично для определения наилучшей стратегии второго игрока найдем максимальные значения выигрыша по столбцам и, выбрав из них минимальное значение, получим $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$, где $\beta$ – *верхняя цена игры (минимакс)*. Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он гарантированно в любом случае проиграет не больше $\beta$.

Для матричной игры справедливо неравенство: $\alpha \le \beta$. Если $\alpha = \beta$, то такая игра называется *игрой с седловой точкой,* а пара оптимальных стратегий $(A_{i\text{опт}}, B_{j\text{опт}})$ – седловой точкой матрицы. В этом случае элемент $\alpha_{ij} = v$ называется *ценой игры,* является одновременно минимальным в $i$-й строке и $j$-м столбце. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Найдем решение игры рассмотренного выше примера:

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(-2, -1, 0) = 0,$$

$$\alpha = \alpha_3 - \textit{нижняя цена игры};$$

$$\beta = \min \beta_j = \min(2, 1, 0) = 0,$$

$$\beta = \beta_3 - \textit{верхняя цена игры.}$$

Так как $\alpha = \beta = 0$, матрица игры имеет седловую точку.

Оптимальная стратегия первого игрока – $A_3$, второго – $B_3$. Из табл. 2.31 видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от $B_3$ увеличивает его проигрыш.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т. е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной*.

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m)$, с которыми игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассматривать как $m$-мерные векторы, для координат которых

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют $n$-мерные векторы $\bar{y} = (y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$, для координат которых

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Выигрыш второго игрока при использовании смешанных стратегий определяют как математическое ожидание выигрыша, т. е. он равен

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, x_i, y_j.$$

В основной теореме теории игр утверждается, что каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий. Применение оптимальной стратегии позволяет получить выигрыш, равный цене игры: $a \leq v \leq b$.

Применение первым игроком оптимальной стратегии $x_{i\text{опт}}$ должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры. Поэтому выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{j\ onm} \geq v.$$

Аналогично второму игроку оптимальная стратегия $y_{j\,\text{опт}}$ должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры, т. е. справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_{j\ onm} \le v.$$

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и заведомо невыгодных стратегий. Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4\times5}.$$

Откуда имеем

$$\alpha = \max(2, 2, 3, 2) = 3,$$
$$\beta = \min(7, 6, 6, 4, 5) = 4,$$
$$\alpha \ne \beta.$$

Все элементы $A_2$ меньше $A_3$, т. е. $A_3$ заведомо невыгодна для первого игрока и $A_2$ можно исключить. Все элементы $A_4$ меньше $A_3$, исключаем $A_4$.

Для второго игрока: сравнивая $B_1$ и $B_4$, исключаем $B_1$; сравнивая $B_2$ и $B_4$, исключаем $B_2$; сравнивая $B_3$ и $B_4$, исключаем $B_3$. В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}.$$

### 2.2.2. Графическое решение игр вида (2×n) и (m×2)

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии. Рассмотрим игру (2×$n$), см. табл. 2.32.

Таблица 2.32

| | | Второй игрок | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | ... | yn |
| Первый игрок | $x_1$<br>$x_2 = 1 - x_1$ | $a_{11}$<br>$a_{21}$ | $a_{12}$<br>$a_{22}$ | ...<br>... | $a_{1n}$<br>$a_{2n}$ |

Предполагаем, что игра не имеет седловой точки. Обозначим: $x_1$ – вероятность применения первым игроком 1-й стратегии, $x_2$ – вероятность применения первым игроком 2-й стратегии, причем $x_2 = 1 - x_1$; $y_1$ – вероятность применения вторым игроком 1-й стратегии, $y_2$ – вероятность применения вторым игроком 2-й стратегии и т. д., $y_n$ – вероятность применения вторым игроком $n$-й стратегии. Ожидаемый выигрыш первого игрока при применении вторым 1-й стратегии составит

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = a_{11}x_1 + a_{21} - a_{21}x_1 = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}.$$

Аналогично найдем ожидаемые выигрыши первого игрока при применении вторым игроком 2, 3, ..., $n$-й стратегий. Полученные данные поместим в табл. 2.33.

Таблица 2.33

| Чистые стратегии второго игрока | Ожидаемые выигрыши первого игрока |
|---|---|
| 1 | $(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$ |
| 2 | $(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22}$ |
| ... | ... |
| n | $(a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n}$ |

Из таблицы видно, что ожидаемый выигрыш первого игрока линейно зависит от $x_1$. На оси $X_1$ построим выражения ожидаемых выигрышей первого игрока. Первый игрок должен выбирать такие стратегии, чтобы максимизировать свой минимальный ожидаемый выигрыш. Поэтому оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых, максимизирующих его минимальный ожидаемый выигрыш.

Аналогично находим оптимальную стратегию второго игрока. Она определяется как точка пересечения прямых, минимизирующих его максимальные ожидаемые проигрыши.

**Пример 1.** Рассмотрим представленную выше игру, заданную платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 5}.$$

Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

**Решение.** Обозначим: $x_1$ – вероятность применения первым игроком 1-й стратегии, $x_2$, $x_3$, $x_4$ – вероятность использования первым игроком 2, 3, 4-й стратегий соответственно, причем $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$;

$y_1$ – вероятность применения вторым игроком 1-й стратегии, $y_2$, $y_3$, $y_4$, $y_5$ – вероятность использования вторым игроком 2, 3, 4, 5-й стратегий соответственно, причем $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1$. Платежная матрица была упрощена путем вычеркивания дублирующих, заведомо невыгодных стратегий. Поэтому $x_2 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$, и матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Найдем решение игры (табл. 2.34) графическим методом (рис. 2.9).

Таблица 2.34

| Чистые стратегии второго игрока | Ожидаемые выигрыши первого игрока |
|---|---|
| 1<br>2 | $(4 – 3)x_1 + 3 = x_1 + 3$<br>$(2 – 5)x_1 + 5 = -3x_1 + 5$ |

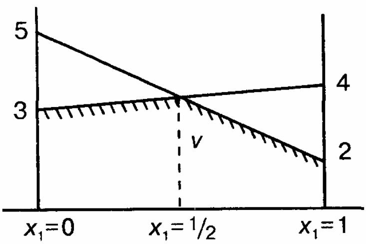



Рис. 2.9

На оси $X_1$ разместим точки $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, через которые проведем прямые, перпендикулярные оси $X_1$. Подставляя $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ в выражение $x_1 + 3$, найдем значения, которые отложим на соответствующих перпендикулярных прямых. Соединив эти точки, получим прямую. Аналогично рассмотрим выражение $-3x_1 + 5$. Оптимальная стратегия первого игрока определится из равенства выражений $x_1 + 3$ и $-3x_1 + 5$: $x_1 + 3 = -3x_1 + 5$, $x_1 = 1/2$, $x_3 = 1 – x_1 = 1/2$.

Цена игры $v = x_1 + 3 = 1/2 + 3 = 7/2$.

Оптимальная стратегия первого игрока: $x_{опт} = (½, 0, ½, 0)$, при этом цена игры $v = 7/2$. Найдем оптимальную стратегию для второго игрока (табл. 2.35).

Таблица 2.35

| Чистые стратегии первого игрока | Ожидаемые проигрыши второго игрока |
|---|---|
| 1<br>2 | $(4 – 2)y_4 + 2 = 2y_4 + 2$<br>$(3 – 5)y_4 + 5 = -2y_4 + 5$ |

Имеем $2y_4 + 2 = -2y_4 + 5$, $y_4 = 3/4$, $y_5 = 1 – y_4 = 1/4$, $v = 2y_4 + 2 = 3/2 + 2 = 7/2$.

Оптимальная стратегия второго игрока (рис. 2.10): $y_{опт} = (0,0,0,{}^3/_4, ¼)$, при этом цена игры $v = 7/2$.

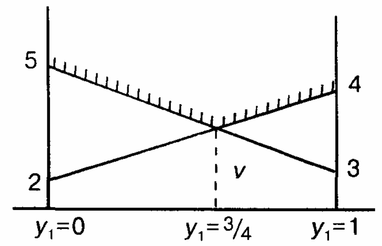



Рис. 2.10

**Пример 2.** Найдем решение игры вида (2×n), заданной платежной матрицей (табл. 2.36)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times4}.$$

Таблица 2.36

| Чистые стратегии второго игрока | Ожидаемые выигрыши первого игрока |
|---|---|
| 1<br>2<br>3<br>4 | $-2x_1 + 4$<br>$-x_1 + 3$<br>$x_1 + 2$<br>$-7x_1 + 6$ |

**Решение.** Находим $\alpha = \max(-1,2) = 2$, $\beta = \min(4, 3, 3, 6) = 3$, $2 \le v \le 3$.

Тогда $-x_1 + 3 = x_1 + 2$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1 – x_1 = 1/2$, $v = –x_1 + 3 = -1/2 + 3 = 5/2$.

Оптимальное решение первого игрока: $\bar{x}_{опт} = (1/2, 1/2)$, при этом цена игры составляет $v = 5/2$. Найдем оптимальное решение второго игрока (табл. 2.37).

Таблица 2.37

| Чистые стратегии первого игрока | Ожидаемые проигрыши второго игрока |
|---|---|
| 1<br>2 | $-y_2 + 3$<br>$Y_2 + 2$ |

Из рис. 2.11 следует, что оптимальная стратегия первого игрока определяется из равенства выражений $–x_1 + 3$ и $x_1 + 2$, соответствующих 2-й и 3-й чистым стратегиям второго игрока, поэтому $y_1 = y_4 = 0$, а $y_3 = 1 - y_2$.

Имеем $-y_2 + 3 = y_2 + 2$, $y_2 = 1/2$, $y_3 = 1 - 1/2 = 1/2$. Откуда $v = y_2 + 2 = 1/2 + 2 = 5/2$.

Оптимальное решение второго игрока (рис. 2.12) $\bar{y}_{опт}=(0,1/2,1/2,0)$, при этом цена игры $v = 5/2$.

Ответ: $\bar{x}_{опт} = (1/2, 1/2)$, $\bar{y}_{опт} = (0,1/2,1/2,0)$, $v = 5/2$.

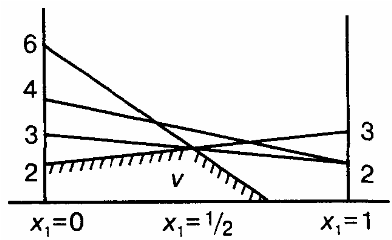



Рис. 2.11

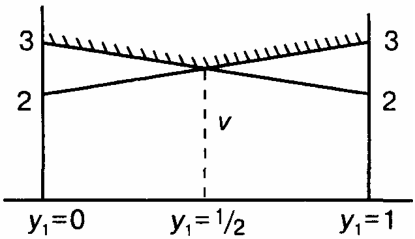



Рис. 2.12

**Пример 3.** Найдем решение игры вида *(m*×2), заданной платежной матрицей (табл. 2.38)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}_{4\times 2}.$$

**Решение.** Находим $\alpha = \max\ (2, 2, 2, -2) = 2$, $\beta = \min\ (3, 6) = 3$, $2 \le v \le 3$. Пусть $y_1$ и $y_2$ (причем $y_2 = 1 - y_1$) – смешанные стратегии второго игрока; $x_1, x_2, x_3, x_4$ – смешанные стратегии первого игрока.

Таблица 2.38

| Чистые стратегии первого игрока | Ожидаемые проигрыши второго игрока |
|---|---|
| 1 | $-2y_1 + 4$ |
| 2 | $-y_1 + 3$ |
| 3 | $y_1 + 2$ |
| 4 | $-8y_1 + 6$ |

Находим $-2y_1 + 4 = y_1 + 2$, $y_1 = 2/3$, $y_2 = 1-y_1 = 1/3$, $v = y_1 + 2 = 8/3$. Оптимальное решение второго игрока (рис. 2.13) $\bar{y}_{опт} = (2/3, 1/3)$, при этом цена игры $v = 8/3$. Прямые, пересекающиеся в минимаксной точке, соответствуют 1-й и 3-й чистым стратегиям первого игрока. Это означает, что $x_2 = x_4 = 0$.

Следовательно, $x_1 = 1 - x_3$.

Найдем оптимальную стратегию 1-го игрока (табл. 2.39, рис. 2.14).

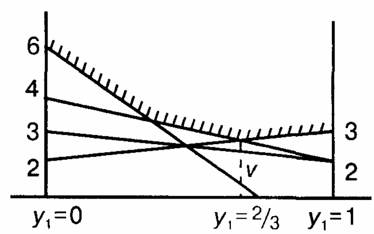



Рис. 2.13

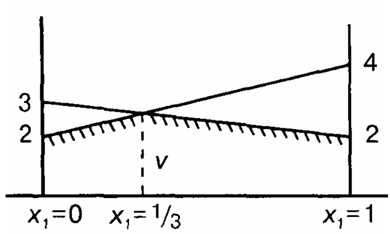



Рис. 2.14

Таблица 2.39

| Чистые стратегии второго игрока | Ожидаемые выигрыши первого игрока |
|---|---|
| 1<br>2 | $-x_1 + 3$<br>$2x_1 + 2$ |

Имеем $-x_1 + 3 = 2x_1 + 2$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1 - x_1 = 2/3$, $v = -x_1 + 3 = 8/3$. Оптимальное решение первого игрока: $\overline{x}_{\text{опт}} = (1/3, 0, 2/3, 0)$, при этом цена игры $v = 8/3$.

**Ответ:** $\overline{x}_{\text{опт}} = (1/3, 0, 2/3, 0)$, $\overline{y}_{\text{опт}} = (2/3, 1/3)$, $v = 8/3$.

***Решение игр $(a_{ij})m\times n$ с помощью линейного программирования***

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом и, наоборот, задача линейного программирования может быть представлена как игра. Для первого игрока математическая модель задачи записывается в виде

$$L(\overline{x}) = v \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i \geq v, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Математическую модель можно упростить, разделив все $(n + 1)$ ограничений на $v$. Это возможно при $v \neq 0$. При $v = 0$ рекомендуется прибавить любое положительное число ко всем элементам платежной матрицы, что гарантирует положительность значения модифицированной игры. Действительное значение игры получается вычитанием из модифицированного значения этого положительного числа. Если $v < 0$, то надо сменить знаки неравенств. Полагая $v > 0$, систему ограничений можно записать так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1/v + a_{21}x_2/v + ... + a_{m1}x_m/v \ge 1, \\ a_{12}x_1/v + a_{22}x_2/v + ... + a_{m2}x_m/v \ge 1, \\ .......................................................... \\ a_{1n}x_1/v + a_{2n}x_2/v + ... + a_{mn}x_m/v \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1/v + x_2/v + ... + x_m/v = 1/v.$$

Положим, $X_i = x_i/v$. Так как $v \to \max$, то $1/v \to \min$. Получим задачу линейного программирования вида

$$L(\overline{X}) = X_1 + X_2 + ... + X_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + ... + a_{m1}X_m \ge 1, \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{m2}X_m \ge 1, \\ ................................................ \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + ... + a_{mn}X_m \ge 1, \end{cases}$$

$$X_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Для второго игрока математическая модель записывается в виде

$$S(\overline{Y}) = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + ... + a_{1n}Y_n \le 1, \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + ... + a_{2n}Y_n \le 1, \\ .............................................. \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + ... + a_{mn}Y_n \le 1, \end{cases}$$

$$Y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где $S(\overline{Y}) = 1/v$, $Y_j = y_j/v$.

Задача второго игрока является двойственной по отношению к задаче первого игрока. Можно найти решение одного из игроков, а затем по теоремам двойственности – решение другого.

***Применение матричных игр в маркетинговых исследованиях***

Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в табл. 2.40. Определить оптимальный план продажи товаров.

Таблица 2.40

| План продажи | Величина дохода, ден. ед. | | |
|---|---|---|---|
| | К$_1$ | К$_2$ | $K_3$ |
| $П_1$ | 8 | 4 | 2 |
| $П_2$ | 2 | 8 | 4 |
| $П_3$ | 1 | 2 | 8 |

**Решение.** Обозначим: вероятность применения торговой фирмой стратегии $П_1 - x_1$, стратегии $П_2 - x_2$, $П_3 - x_3$; вероятность использования стратегии $K_1 - y_1$, стратегии $K_2 - y_2$, $K_3 - y_3$.

Для первого игрока (торговой фирмы) математическая модель задачи имеет вид

$$L(\overline{X}) = X_1 + X_2 + X_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$8X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 1,$$
$$4X_1 + 8X_2 + 2X_3 \geq 1,$$
$$2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \geq 1,$$
$$X_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3},$$

где $x_i = X_i v$.

Для второго игрока (конъюнктуры рынка и спроса покупателей) математическая модель задачи имеет вид

$$S(\overline{Y}) = Y_1 + Y_2 + Y_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1,$$
$$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1,$$
$$Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1,$$
$$Y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Найдем оптимальное решение задачи для второго игрока симплексным методом. Последняя таблица решения имеет вид табл. 2.41.

Из таблицы следует, что $\overline{Y}_{опт} = (1/14,\ 11/196,\ 5/49)$, $S(\overline{Y})_{\max} = 45/196$.

Цена игры $v = 1/S(Y) = 196/45$. Так как $y_i = Y_i v$, то $y_1 = 14/45$, $y_2 = 11/45$, $y_3 = 20/45$.

Таблица 2.41

| $b_j$ | БП | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $c_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $Y_5$ | $Y_6$ | |
| 1 | $Y_1$ | 1 | 0 | 0 | 1/7 | −1/14 | 0 | 1/14 |
| 1 | $Y_2$ | 0 | 1 | 0 | −3/98 | 31/196 | −1/14 | 11/196 |
| 1 | $Y_3$ | 0 | 0 | 1 | −1/98 | −3/98 | 1/7 | 5/49 |
| | $\Delta_i$ | 0 | 0 | 0 | 5/49 | 11/196 | 1/14 | 45/196 |

Оптимальная стратегия второго игрока: $y_{опт} = (14/45, 11/45, 20/45)$.

Стратегии первого игрока найдем из последней симплексной таблицы, используя метод соответствия переменных исходной и двойственной задач. Получим $x_{опт} = (20/45, 11/45, 14/45)$.

Таким образом, торговая фирма на ярмарке должна придерживаться стратегии $\bar{x}_{опт} = (20/45, 11/45, 14/45)$, при этом она получит доход не менее $v = 196/45$ ден. ед.

### 2.2.3. Сведение матричной игры к модели линейного программирования

В рассмотренной выше задаче игра задавалась платежной матрицей, которую сводили к модели линейного программирования. И, наоборот, задача линейного программирования может быть сведена к матричной игре.

Если задача линейного программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to \max$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

то матричная игра определяется платежной матрицей размера $(m + n + 1)$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^t & 0 & C^t \\ B^t & -C & 0 \end{pmatrix},$$

где $A$ — матрица коэффициентов при неизвестных системы ограничений задачи линейного программирования; $B$ — матрица свободных членов; $C$ – матрица коэффициентов при неизвестных целевой функции; $A^t$, $B^t$, $C^t$ – транспонированные матрицы $A$, $B$, $C$.

Если задача линейного программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

то матричная игра определяется платежной матрицей размера $(m + n + 1)$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A^t & -B^t \\ -A & 0 & C \\ B & -C^t & 0 \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.** Построить матричную игру, заданную задачей линейного программирования

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 2}.$$

**Решение.** Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Транспонированные матрицы:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B^t = \begin{pmatrix} 10 & 12 \end{pmatrix}, \qquad C^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$m + n + 1 = 2 + 2 + 1 = 5.$$

**Ответ.** Игру, определяемую данной задачей линейного программирования, можно записать матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}_{5\times 6}.$$

### 2.2.4. Игры с «природой»

В рассмотренных выше матричных играх предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т. д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются играми с природой. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Условия игры задаются матрицей $(a_{ij})_{mxn}$. Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий Вальде. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она достигается из условия $\max \min a_{ij}$ и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека образом.

2. Критерий максимума. Он выбирается из условия $\max \max a_{ij}$.

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. Критерий Гурвица. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле $\max\{\alpha \min a_{ij} + (1 - \alpha)\max a_{ij}\}$, где $\alpha$ – степень оптимизма – изменяется в диапазоне [0, 1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего для человека поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальде, при $\alpha = 0$ – в критерий максимума. На $\alpha$ оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем *а* ближе к единице.

4. Критерий Сэвиджа. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой пока-

зывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

Элемент матрицы рисков ($r_{ij}$) находится по формуле $r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ji}$, где $\max a_{ij}$ – максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия находится из выражения $\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ji})\}$.

### *Определение производственной программы предприятия в условиях риска и неопределенности с использованием матричных игр*

Фирма «Фармацевт» – производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), на другие – на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь-октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые и анальгетики) – 20 руб.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) – 15 руб.

По данным наблюдений за несколько последних лет, службой маркетинга фирмы установлено, что она может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; в условиях холодной погоды – 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача – определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи 40 руб. за 1 усл. ед. продукции первой группы и 30 руб. – второй группы.

**Решение.** Фирма располагает двумя стратегиями: $A_1$ – в этом году будет теплая погода; $A_2$ – погода будет холодная. Если фирма примет стратегию $A_1$ и в действительности будет теплая погода (стратегия природы $B_2$), то выпущенная продукция (3050 усл. ед. препаратов первой группы и 1100 усл. ед. второй группы) будет полностью реализована и доход составит

$$3050\,(40 - 20) + 1100\,(30 - 15) = 77500 \text{ руб.}$$

В условиях прохладной погоды (стратегия природы $B_2$) препараты второй группы будут проданы полностью, а первой группы только в количестве 1525 усл. ед. и часть препаратов останется нереализованной. Доход составит

$$1525\times(40-20)+1100\times(30-15)-20\times(3050-1525)=16500 \text{ руб.}$$

Аналогично, если фирма примет стратегию $A_2$ и в действительности будет холодная погода, то доход составит

$$1525\times(40-20)+3690\times(30-15)=85850 \text{ руб.}$$

При теплой погоде доход составит

$$1525\times(40-20)+1100\times(30-15)-(3690-1100)\times15=8150 \text{ руб.}$$

Рассматривая фирму и погоду в качестве двух игроков, получим платежную матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 77500 & 16500 \\ 8150 & 85850 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\alpha=\max(16500, 8150)=16500 \textit{ руб},$$

$$\beta=\min(77500, 85850)=77500 \textit{ руб}.$$

Цена игры лежит в диапазоне 16500 руб. $\le v \le$ 77500 руб. Из платежной матрицы видно, что при всех условиях доход фирмы будет не меньше 16500 руб., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то доход фирмы может составить 77500 руб. Найдем решение игры. Обозначим вероятность применения фирмой стратегии $A_1$ через $x_1$, стратегии $A_2$ – через $x_2$, причем $x_1 = 1 - x_2$. Решая игру графическим методом, получим $\bar{x}_{\text{опт}}$ = (0,56; 0,44), при этом цена игры $v$ = 46986 руб. Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит

$$0{,}56\times(3050;\ 1100)+0{,}44\times(1525;\ 3690)=(2376;\ 2239{,}6).$$

Таким образом, фирме целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 усл. ед. препаратов первой группы и 2239,6 усл. ед. препаратов второй группы, тогда при любой погоде она получит доход не менее 46986 руб. В условиях неопределенности, если не представляется возможным фирме использовать смешанную стратегию (договоры с другими организациями), для определения оптимальной стратегии фирмы используем критерии природы.

1. Критерий Вальде: $\max(\min a_{ij}) = \max(16500, 8150) = 16500$ руб., фирме целесообразно использовать стратегию $A_1$.

2. Критерий максимума: $\max(\max a_{ij}) = \max(77500, 85850) = 85850$ руб., целесообразно использовать стратегию $A_2$.

3. Критерий Гурвица: для определенности примем $\alpha = 0,4$, тогда

– для стратегии фирмы $A_1$

$\alpha \min a_{ij} + (1 - \alpha)\max a_{ij} = 0,4\times16500 + (1 - 0,4)\times77500 = 53100$ руб.;

– для стратегии $A_2$

$\alpha \min a_{ij} + (1 - \alpha)\max a_{ij} = 0,4\times8150 + (1 - 0,4)\times85850 = 54770$ руб., $\max(53100, 54770) = 54770$ руб., фирме целесообразно использовать стратегию $A_2$.

4. Критерий Сэвиджа. Максимальный элемент в первом столбце – 77500, во втором столбце – 85850.

Элементы матрицы рисков находятся из выражения $r_{ij} = \max(a_{ij} - a_{ij})$, откуда

$$r_{11} = 77500 - 77500 = 0,\ r_{12} = 85850 - 16500 = 69350,$$
$$r_{21} = 77500 - 8150 = 69350,\ r_{22} = 85850 - 85850 = 0.$$

Матрица рисков имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 69350 \\ 69350 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\} = \min(69350,\ 69350) = 69350\ \textit{руб}.,$$

целесообразно использовать стратегию $A_1$ или $A_2$.

Следовательно, фирме целесообразно применять стратегию $A_1$ или $A_2$.

Отметим, что каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных управленческих решений. При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша.

Пусть известно для рассматриваемой задачи, что вероятности теплой и холодной погоды равны и составляют 0,5, тогда оптимальная стратегия фирмы определяется так:

$$\max\{(0,5\cdot77500 + 0,5\cdot16500); (0,5\cdot8150 + 0,5\cdot85850)\} = 47000.$$

Фирме целесообразно использовать стратегию $A_1$ или $A_2$.

### 2.2.5. «Дерево» решений

Примеры, которые мы рассматривали до сих пор, включали получение единого решения. Однако на практике результат одного решения приводит к необходимости принятия следующего решения и т. д. Эту последовательность нельзя выразить таблицей доходов, поэтому приходится использовать другой алгоритм принятия управленческих решений.

Графически подобные процессы могут быть представлены с помощью «дерева» решений. Такое представление облегчает описание многоэтапного процесса принятия управленческого решения в целом.

Рассмотрим «дерево» решений, которое применяют, если нужно принять несколько взаимосвязанных решений в условиях неопределенности в случае принятия решения, зависящего от исхода предыдущего или исходов испытаний.

Составляя «дерево» решений, рисуют «ствол» и «ветви», отображающие структуру проблемы. Располагают «дерево» решений слева направо. «Ветви» обозначают возможные альтернативные решения, которые могут быть приняты, и возможные исходы, возникающие в результате этих решений.

Квадратные узлы на дереве решений обозначают места, в которых принимаются решения, круглые узлы – места исходов. Так как не представляется возможным влиять на появление исходов, то в круглых узлах вычисляют вероятности их появления. Когда все решения и их исходы указаны на «дереве», оценивается каждый из вариантов и проставляются денежные доходы. Все расходы, вызванные решениями, проставляются на соответствующих «ветвях».

Рассмотрим задачу с применением «дерева» решений.

#### *Выбор оптимальной стратегии развития предприятия в условиях трансформации рынка*

Фирма может принять решение о строительстве среднего или малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправданно при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны 0,7 и 0,3 соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в 4 млн руб., малого – в 1 млн руб. Затраты на расширение через два года малого предприятия оцениваются в 3,5 млн руб.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

– среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,9(0,2) млн руб.;
– малое предприятие при низком спросе дает 0,1 млн руб.;
– малое предприятие при высоком спросе дает 0,2 млн руб. в течение 10 лет;
– расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,8(0,1) млн руб.;
– малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает 0,1 млн руб. в год за остальные восемь лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

**Решение.** Данная задача является многоэтапной, так как если фирма решит строить малое предприятие, то через два года она может принять решение о его расширении. В этом случае процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение в настоящий момент времени о размере предприятия и решение о необходимости его расширения, принимаемое через два года.

На рис. 2.15 задача представлена в виде «дерева» решений. Предполагается, что спрос может оказаться высоким и низким. Дерево имеет два типа вершин: «решающие» вершины, обозначенные квадратными узлами, и «случайные» вершины, обозначенные круглыми узлами.

Начиная с вершины 1, являющейся «решающей», необходимо принять решение относительно размера предприятия. Вершины 2 и 3 являются «случайными». Фирма будет рассматривать возможность расширения малого предприятия только в том случае, если спрос по истечении первых двух лет установится на высоком уровне. Поэтому в вершине 4 принимается решение о расширении или нерасширении предприятия. Вершины 5 и 6 будут «случайными». Произведем расчеты для каждой из альтернатив. Вычисления начнем со второго этапа. Для последних восьми лет альтернативы, относящиеся к вершине 4, оцениваются так:

$$ДР = (0{,}8×0{,}7 + 0{,}1×0{,}3)×8 – 3{,}5 = 1{,}22 \text{ млн руб.};$$

$$ДБР = (0{,}2×0{,}7 + 0{,}1×0{,}3)×8 = 1{,}36 \text{ млн руб.},$$

где *ДР* – доход с расширением, *ДБР* – доход без расширения предприятия.

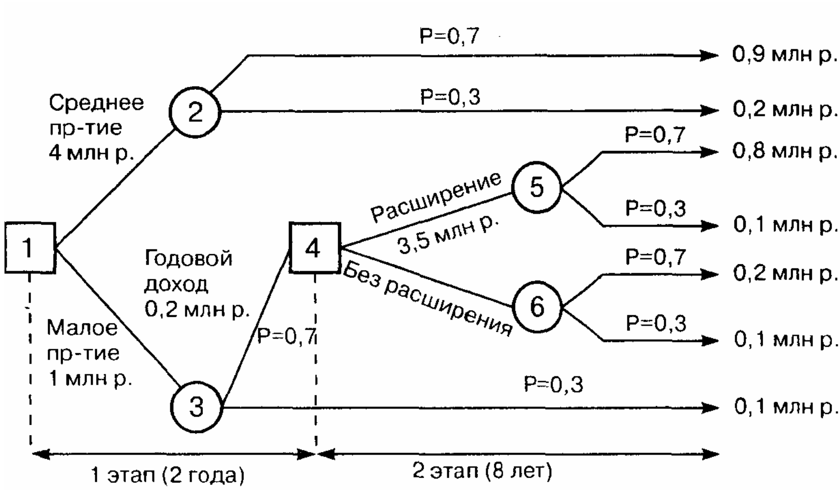



Рис. 2.15

Таким образом, в вершине 4 выгоднее не проводить расширение, при этом доход составит 1,36 млн руб.

Теперь для дальнейших расчетов оставим одну «ветвь», выходящую из вершины 4, которой соответствует доход 1,36 млн руб. за остальные восемь лет. Перейдем к вычислениям первого этапа. Для вершины 1

$$ДС = (0{,}9×0{,}7 + 0{,}2×0{,}3)×10 – 4{,}0 = 2{,}9 \text{ млн руб.};$$

$$ДМ = 1{,}36 + 0{,}2×0{,}7×2 + 0{,}1×0{,}3×10 – 1{,}0 = 0{,}94 \text{ млн руб.},$$

где *ДС* – доход среднего предприятия, *ДМ* – доход малого предприятия.

Сравнивая получаемые в вершине 1 доходы среднего и малого предприятий, видим, что более предпочтительным является вариант строительства среднего предприятия. Таким образом, фирме целесообразно построить среднее предприятие.

### *Принятие решения о замене оборудования в условиях неопределенности и риска*

Фирма может принять решение о замене старого оборудования на новое того же вида или его ремонте. Отремонтированное оборудование впоследствии можно частично заменить на новое, более современное, или отремонтировать его заново. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую производят на этом оборудовании. Полная замена оборудования экономически оправданна при высоком уровне спроса. С другой стороны, можно отремонтировать старое оборудование и через один год, например, заменить его на новое, более совершенное, или заново его отремонтировать.

В данной задаче процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение в настоящий момент времени о замене или ремонте оборудования и решение, принимаемое через один год, относительно частичной его замены и ремонта.

**Пример 5.** Рассмотрим конкретную задачу о замене оборудования фирмы, представленную в виде «дерева» решений (рис. 2.16). Предполагается, что спрос может оказаться высоким, средним и низким. Дерево имеет два типа вершин: «решающие» и «случайные».

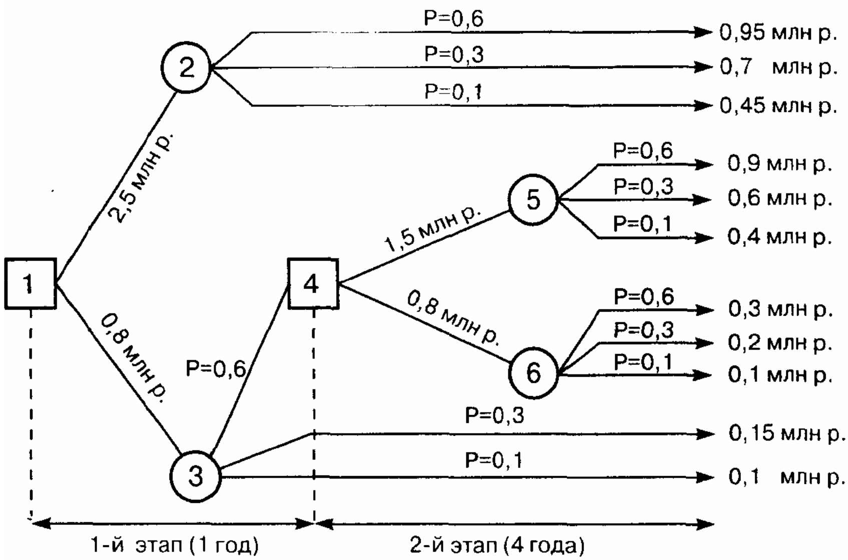



Рис. 2.16

Начиная с «решающей» вершины 1, необходимо принять решение о полной замене оборудования или его ремонте. Вершины 2 и 3 являются «случайными». Фирма будет рассматривать возможность установления более совершенного оборудования или повторного ремонта старого в том случае, если спрос по истечении одного года установится на высоком уровне. Поэтому в вершине 4 принимается решение о частичной замене старого оборудования более совершенным или ремонте старого. Вершины 5 и 6 «случайные». Предположим, что фирма рассматривает эту задачу на пятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого, среднего и низкого уровней спроса составляют 0,6, 0,3 и 0,1 соответственно. Замена новым оборудованием того же вида, что и старое, обойдется в 2,5 млн руб., а ремонт старого – в 0,8 млн руб.

Затраты на частичную замену оборудования на более совершенное, чем старое, оцениваются в 1,5 млн руб., а повторный ремонт старого – в 0,8 млн руб.

Ежегодные доходы для каждой стратегии фирмы следующие.

1. Замена старого оборудования на новое того же вида при высоком, среднем и низком уровнях спроса дает 0,95; 0,7 и 0,45 млн руб. соответственно.
2. Ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса оценивается в 0,3; 0,15 и 0,1 млн руб. соответственно.
3. Частичная замена оборудования на более совершенное при высоком, среднем и низком уровнях спроса составит 0,9; 0,6 и 0,4 млн руб. соответственно.
4. Повторный ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса предполагает 0,3; 0,2 и 0,1 млн руб. соответственно.

Определить оптимальную стратегию фирмы в замене оборудования.

**Решение.** Оценим результаты каждой стратегии и определим, какие решения следует принимать в «решающих» вершинах 1 и 4. Вычисления начнем со второго этапа. Для последних четырех лет альтернативы, относящиеся к вершине 4, оцениваются так:

$$ДЧЗ = (0{,}9\times0{,}6 + 0{,}6\times0{,}3 + 0{,}4\times0{,}1)\times4 - 1{,}5 = 1{,}54 \text{ млн руб.};$$

$$ДДР = (0{,}3\times0{,}6 + 0{,}2\times0{,}3 + 0{,}1\times0{,}1)\times4 - 0{,}8 = 0{,}2 \text{ млн руб.},$$

где $ДЧЗ$ – доход от частичной замены оборудования на более совершенное, $ДДР$ – доход от замены оборудования, дважды прошедшего ремонт. Так как $ДЧЗ > ДДР$, то в вершине 4 выгоднее произвести частичную замену оборудования на более совершенное, при этом доход составит 1,54 млн руб.

Для дальнейших расчетов в вершине 4 можно оставить одну ветвь, которой соответствует доход в 1,54 млн руб. за четыре года. Вычислим доходы на первом этапе для «решающей» вершины 1:

$$ДЗН = (0{,}95\times0{,}6 + 0{,}7\times0{,}3 + 0{,}45\times0{,}1)\times5 - 2{,}5 = 1{,}625 \text{ млн руб.};$$

$$ДЗО = 0{,}3\times0{,}6\times1 + 0{,}15\times0{,}3\times5 + 0{,}1\times0{,}1\times5 + 1{,}54 - 0{,}8 = 1{,}195 \text{ млн руб.},$$

где $ДЗН$ – доход от замены старого оборудования на новое того же вида, $ДЗО$ – доход от отремонтированного оборудования и дальнейшей замены на более совершенное. Так как $ДЗН > ДЗО$, то оптимальным решением в вершине 1 является полная замена старого оборудования на новое того же вида.

**Ответ.** Оптимальной стратегией фирмы в замене оборудования является полная замена старого оборудования на новое того же вида, при этом доход составит 1,625 млн руб.

### Упражнения

Найти оптимальные стратегии и цену игры.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Построить игру, заданную задачей линейного программирования.

6. $L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Решить задачу с использованием матричных игр.

7. Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продаж товаров на предстоящей ярмарке с учетом конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели прибыли представлены в табл. 2.42. Определить: а) оптимальный план продажи товаров и цену игры; б) какой стратегии

следует придерживаться торговому предприятию, если наиболее вероятной является ситуация: $C_1 - 30\%$, $C_2 - 30\%$, $C_3 - 40\%$?

Таблица 2.42

| План продажи | Величина прибыли в зависимости от спроса, млн руб. | | |
|---|---|---|---|
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
| $П_1$ | 2 | 1 | 3 |
| $П_2$ | 1 | 2 | 3 |
| $П_3$ | 2 | 3 | 1 |

8. Предприятие планирует выпуск трех партий новых видов товаров широкого потребления в условиях неясной рыночной конъюнктуры. Известны отдельные возможные состояния $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, а также возможные объемы выпуска изделий по каждому варианту и их условные вероятности, которые представлены в табл. 2.43. Определить предпочтительный план выпуска товаров широкого потребления.

Таблица 2.43

| Изделия | Объём выпуска изделий при различных состояниях рыночной конъюнктуры | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
| $И_1$ | 0,4<br>2,2 | 0,1<br>3,8 | 0,2<br>2,8 | 0,3<br>3,2 |
| $И_2$ | 0,3<br>2,6 | 0,2<br>2,4 | 0,1<br>3,1 | 0,4<br>3,3 |
| $И_3$ | 0,2<br>3,0 | 0,3<br>2,0 | 0,2<br>1,8 | 0,3<br>2,5 |

9. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение августа-сентября на единицу продукции составили: платья – 7 ден. ед., костюмы – 28 ден. ед. Цена реализации составляет 15 и 50 ден. ед. соответственно. По данным наблюдения за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платьев и 610 костюмов, а при прохладной погоде – 630 платьев и 1050 костюмов. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить графическим методом и с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма $a = 0,5$. Решить задачи с использованием «дерева» решений.

10. Фирма может принять решение о строительстве среднего или малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправданно при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить. Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны 0,75 и 0,25 соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в 5 млн руб., малого – в 1 млн руб. Затраты на расширение через два года малого предприятия оцениваются в 4,2 млн руб.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

- среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 1(0,3) млн руб.;
- малое предприятие при низком спросе – 0,2 млн руб.,
- малое предприятие при высоком спросе – 0,25 млн руб. в течение 10 лет;
- расширенное предприятие при высоком (низком) спросе – 0,9(0,2) млн руб.;
- малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе – 0,2 млн руб. в год за остальные восемь лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

11. Фирма может принять решение о замене старого оборудования новым того же вида или его ремонте. Отремонтированное оборудование впоследствии можно частично заменить на новое, более современное, или отремонтировать его заново. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую производят на этом оборудовании. Полная замена оборудования экономически оправданна при высоком уровне спроса. С другой стороны, можно отремонтировать старое оборудование и через один год его заменить на новое, более совершенное, или заново его отремонтировать. На рис. 2.17 задача представлена в виде дерева решений.

Предполагается, что спрос может оказаться высоким, средним и низким.

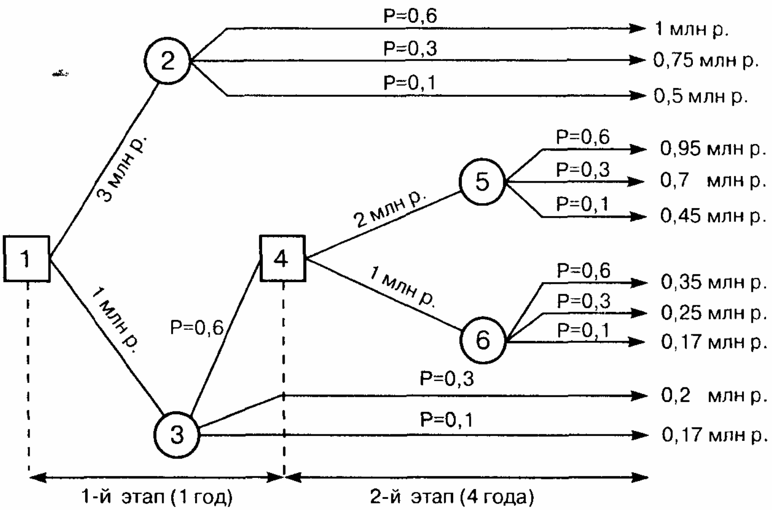



Рис. 2.17

Фирма рассматривает эту задачу на пятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого, среднего и низкого уровней спроса составляют 0,6; 0,3 и 0,1 соответственно. Замена новым оборудованием того же вида, что и старое, обойдется в 3 млн руб., а ремонт старого – в 1 млн руб.

Затраты на частичную замену оборудования на более совершенное, чем старое, оцениваются в 2 млн руб., а повторный ремонт старого – в 1 млн руб.

Ежегодные доходы для каждой из альтернатив следующие.

1. Замена старого оборудования на новое того же вида при высоком, среднем и низком уровнях спроса дает 1,0; 0,75 и 0,5 млн руб. соответственно.
2. Ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса оценивается в 0,35; 0,2 и 0,17 млн руб. соответственно.
3. Частичная замена оборудования на более совершенное при высоком, среднем и низком уровнях спроса составит 0,95; 0,7 и 0,45 млн руб. соответственно.
4. Повторный ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса предполагает 0,35; 0,25 и 0,17 млн руб. соответственно. Определить оптимальную стратегию фирмы в замене оборудования.

## 2.3. Элементы системы массового обслуживания (СМО)

Часто приходится сталкиваться с такими ситуациями: очередь покупателей в кассах магазинов; колонна автомобилей, движение которых остановлено светофором; ряд станков, вышедших из строя и ожидающих ремонта, и т. д. Все эти ситуации объединяет то обстоятельство, что системам необходимо пребывать в состоянии ожидания. Ожидание является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в обслуживании и разброса показателей обслуживающих систем, которые называют *системами массового обслуживания (СМО)*.

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживаемых единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания тем выше, чем больше число обслуживающих единиц. Но экономически невыгодно иметь лишние обслуживающие единицы.

В промышленности СМО применяются при поступлении сырья, материалов, комплектующих изделий на склад и выдаче их со склада; обработке широкой номенклатуры деталей на одном и том же оборудовании; организации наладки и ремонта оборудования; определении оптимальной численности обслуживающих отделов и служб предприятий и т. д.

Основными элементами СМО являются *источники заявок*, их *входящий поток, каналы обслуживания* и *выходящий поток*. Схематически это изображено на рис. 2.18.


Рис. 2.18

В зависимости от характера формирования очереди СМО различают:

1) системы с отказами, в которых при занятости всех каналов обслуживания заявка не встает в очередь и покидает систему необслуженной;
2) системы с неограниченными ожиданиями, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы были заняты.

Существуют и системы смешанного типа с ожиданием и ограниченной длиной очереди: заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все места в очереди заняты. Заявка, попавшая в очередь, обслуживается обязательно.

По числу каналов обслуживания СМО делятся на одноканальные и многоканальные. В зависимости от расположения источника требований системы могут быть разомкнутыми (источник заявок находится вне системы) и замкнутыми (источник находится в самой системе).

Рассмотрим в отдельности элементы СМО.

*Входящий поток:* на практике наиболее распространенным является простейший поток заявок, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

*Стационарность* характеризуется тем, что вероятность поступления определенного количества требований (заявок) в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка.

*Ординарность* потока определяется невозможностью одновременного появления двух или более заявок.

*Отсутствие последействия* характеризуется тем, что поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента. В этом случае вероятность того, что число заявок, поступивших на обслуживание за промежуток времени *t,* равно *k,* определяется по закону Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где λ – *интенсивность потока заявок,* т. е. среднее число заявок в единицу времени:

$$\lambda = 1/\bar{\tau} \ \ (\textit{чел./мин, р., ч, автом./дн., кВт/ч}),$$

где $\bar{\tau}$ – среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками.

Для такого потока заявок время между двумя соседними заявками распределено экспоненциально с плотностью вероятности $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания считают распределенным экспоненциально:

$$f(\mathrm{t}) = \nu\, e^{-\nu \mathrm{t}},$$

где $\nu$ – *интенсивность движения очереди,* т. е. среднее число заявок, приходящих на обслуживание в единицу времени:

$$v = 1/\bar{t}_{\text{оч}},$$

где $\bar{t}_{\text{оч}}$ – среднее значение времени ожидания в очереди.

Выходящий поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $\bar{t}_{\text{обс}}$ является случайной величиной и часто подчиняется показательному закону распределения с плотностью

$$f(t_{обс}) = \mu e^{-\mu t},$$

где $\mu$ – *интенсивность потока обслуживания,* т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$\mu=1/\bar{t}_{\text{обс}} \text{ (чел./мин, р./дн., кг/ч, докум./дн.)},$$

где $\bar{t}_{\text{обс}}$ – среднее время обслуживания.

Важной характеристикой СМО, объединяющей $\lambda$ и $\mu$, является *интенсивность нагрузки* $p = \lambda/\mu$.

Рассмотрим $n$-канальные разомкнутые СМО.

### 2.3.1. СМО с отказами

Заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной. Показателем качества обслуживания выступает вероятность получения отказа. Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки ($t_{\text{обс}}$) распределена по показательному закону.

#### *Формулы для расчета установившегося режима*

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{n} \left( p^k / k! \right).$$

2. Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми ($k = п$): $P_{\text{отк}} = P_n = P_0 p^n/n!$
3. Вероятность обслуживания: $P_{\text{обс}} = 1 – P_{\text{отк}}$.
4. Среднее число занятых обслуживанием каналов: $n_з = p\, P_{\text{обс}}$.
5. Доля каналов, занятых обслуживанием: $k_з = n_з/n$.
6. Абсолютная пропускная способность СМО: $A = \lambda\, P_{\text{обс}}$.

### 2.3.2. СМО с неограниченным ожиданием

Заявка, поступившая в систему с неограниченным ожиданием и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов. Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди). Для таких систем характерно отсутствие отказа в обслуживании, т. е. $P_{отк} = 0$ и $P_{обс} = 1$.

Для систем с ожиданием существует дисциплина очереди:

1) обслуживание в порядке очереди по принципу «первым пришел – первым обслужен»;
2) случайное неорганизованное обслуживание по принципу «последний пришел – первым обслужен»;
3) обслуживание с приоритетами по принципу «генералы и полковники вне очереди».

#### ***Формулы для установившегося режима***

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок $(k = 0)$:
   $P_0 = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{n} \left(p^k / k!\right) + p^{n+1} / n!(n-p)$. Предполагается, что $\rho/n < 1$.
2. Вероятность занятости обслуживанием $k$ заявок:
   $$P_k = p^k P_0 / k!,\ 1 \le k \le n.$$
3. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов:
   $$P_n = p^n P_0 / n!$$
4. Вероятность того, что заявка окажется в очереди:
   $$P_{оч} = \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)} P_0.$$
5. Среднее число заявок в очереди:
   $$\overline{L}_{оч} = \frac{p^{n+1}}{(n-1)!(n-p)^2} P_0.$$
6. Среднее время ожидания заявки в очереди: $\bar{t}_{оч} = \overline{L}_{оч} / \lambda.$
7. Среднее время пребывания заявки в СМО: $\bar{t}_{смо} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс}.$
8. Среднее число занятых обслуживанием каналов: $\overline{n}_з = p.$
9. Среднее число свободных каналов: $\overline{n}_{св} = n - \overline{n}_з.$
10. Коэффициент занятости каналов обслуживания: $k_з = \overline{n}_з / n.$
11. Среднее число заявок в СМО: $\bar{z} = \overline{L}_{оч} + \overline{n}_з.$

### 2.3.3. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди

Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной. Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании. Ограничения на длину очереди могут быть:

1) из-за ограничения сверх времени пребывания заявки в очереди;
2) ограничения сверх длины очереди;
3) ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

### *Формулы для установившегося режима*

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = 1 : \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k}{k!} + \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)} \left[ 1 - \left( \frac{p}{n} \right)^m \right] \right\}.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании: $P_{отк} = \dfrac{p^{n+m}}{n!n^m} P_0.$
3. Вероятность обслуживания: $P_{обс} = 1 - P_{отк.}$
4. Абсолютная пропускная способность: $A = P_{обс} \cdot \lambda.$
5. Среднее число занятых каналов: $\bar{n}_з = \dfrac{A}{\mu}.$
6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{p^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1 - (p/n)^m (m + 1 - mp/n)}{(1 - p/n)^2} P_0.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания: $\bar{t}_{оч} = \dfrac{\bar{L}_{оч}}{\lambda}.$
8. Среднее число заявок в системе: $\bar{z} = \bar{L}_{оч} + \bar{n}_з.$
9. Среднее время пребывания в системе: $\bar{t}_{смо} = \dfrac{\bar{z}}{\lambda}.$

### 2.3.4. Определение эффективности использования трудовых и производственных ресурсов в системах массового обслуживания

Рассмотрим задачу с использованием СМО с отказами.

**Пример 1.** В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно 24, среднее время, затрачиваемое одним контролером на обслуживание одной детали, равно 5 мин. Определить вероятность того, что деталь пройдет ОТК необслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}95$(*– заданное значение $P_{обс}$).

**Решение.** По условию задачи λ = 24 дет./ч = 0,4 дет./мин, $\bar{t}_{\text{обс}} = 5$ мин, тогда $\mu = 0{,}2$, $\rho = \lambda/\mu = 2$.

1. Вероятность простоя каналов обслуживания:

$$P_0 = \frac{1}{2^0/0! + 2^1/1! + 2^2/2! + 2^3/3!} = \frac{1}{1+2+2+1{,}3} = 0{,}1587.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании: $P_{отк} = 2^3 \cdot 0{,}1587/3! = 0{,}21$.
3. Вероятность обслуживания: $P_{обс} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$.
4. Среднее число занятых обслуживанием каналов: $\bar{n}_з = 2 \cdot 0{,}79 = 1{,}58$.
5. Доля каналов, занятых обслуживанием: $k_з = 1{,}58/3 = 0{,}526$.
6. Абсолютная пропускная способность: $A = 0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316$.

При $n = 3$ $P_{\text{обс}} = 0{,}79 \le P^*_{\text{обс}} = 0{,}95$. Произведя аналогичные расчеты для $n = 4$, получим: $P_0 = 0{,}137$, $P_{отк} = 0{,}093$, $P_{обс} = 0{,}907$.

Так как $P_{\text{обс}} = 0{,}907 \le P^*_{\text{обс}} = 0{,}95$, то, произведя расчеты для $n = 5$, получим $P_0 = 0{,}137$, $P_{отк} = 0{,}035$, $P_{обс} = 0{,}965 \ge P^*_{обс} = 0{,}95$.

**Ответ.** Вероятность того, что при $n = 3$ деталь пройдет ОТК необслуженной, составляет 21%, и контролеры будут заняты обслуживанием на 53%. Чтобы обеспечить вероятность обслуживания более 95%, необходимо не менее пяти контролеров.

Рассмотрим задачу с использованием СМО с неограниченным ожиданием.

**Пример 2.** Сберкасса имеет трех контролеров-кассиров ($n = 3$) для обслуживания вкладчиков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью λ = 30 чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного вкладчика $\bar{t}_{\text{обс}} = 3$ мин.

Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

**Решение.** Интенсивность потока обслуживания $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1/3 = 0{,}333$, интенсивность нагрузки $\rho = 1{,}5$.

1. Вероятность простоя контролеров-кассиров в течение рабочего дня:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1{,}5^0}{0!} + \frac{1{,}5^1}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{3!} + \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)}} = 0{,}210.$$

2. Вероятность застать всех контролеров-кассиров занятыми:

$$P_n = \frac{1{,}5^3}{3!} 0{,}21 = 0{,}118.$$

3. Вероятность очереди: $P_{оч} = \dfrac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)} 0{,}21 = 0{,}118.$

4. Среднее число заявок в очереди: $\bar{L}_{оч} = \dfrac{1{,}5^4}{(3-1)!(3-1{,}5)^2}0{,}21 = 0{,}236.$

5. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{0{,}236}{0{,}5} = 0{,}472\ мин.$$

6. Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{смо} = 0{,}472 + 3 = 3{,}472\ мин.$$

7. Среднее число свободных каналов: $\bar{n}_{св} = 3 - 1{,}5 = 1{,}5.$

8. Коэффициент занятости каналов обслуживания: $k_з = \dfrac{1{,}5}{3} = 0{,}5.$

9. Среднее число посетителей в сберкассе: $\bar{z} = 0{,}236 + 1{,}5 = 1{,}736$ *чел.*

**Ответ.** Вероятность простоя контролеров-кассиров равна 21% рабочего времени, вероятность посетителю оказаться в очереди составляет 11,8%, среднее число посетителей в очереди 0,236 чел., среднее время ожидания посетителями обслуживания 0,472 мин.

Рассмотрим задачу с применением СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.

**Пример 3.** Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью $\lambda = 6$ машин в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный двумя автомашинами ($m = 2$). В магазине работают три фасовщика ($n = 3$), каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $\bar{t}_{обс} = 4$ ч. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч.

Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была $P^*_{обс} \geq 0{,}97$.

**Решение.** Определим интенсивность загрузки фасовщиков:

$$p = \lambda/\mu = 6/3 = 2,\ \ \mu = 1/\bar{t}_{обс} = 1 \cdot 12/4 = 3\ авт./дн.$$

1. Найдем вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок):

$$P_0 = 1 : \left\{\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]\right\} = 0{,}128,$$

причем 0! = 1,0.

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$p_{отк} = P_{n+m} = 0{,}128\frac{2^{3+2}}{3!3^2} = 0{,}075.$$

3. Вероятность обслуживания: $P_{обс} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925.$

Так как $P_{обс} = 0{,}925 < P^*_{обс} = 0{,}97$, произведем аналогичные вычисления для $m = 3$, получим $P_0 = 0{,}122,$ $P_{отк} = 0{,}048,$ $P_{обс} = 0{,}952.$

Так как $P_{обс} = 0{,}952 < P^*_{обс} = 0{,}97$, примем $m = 4$. Для этого случая $P_0 = 0{,}12,$ $P_{отк} = 0{,}028,$ $P_{обс} = 0{,}972,$ $0{,}972 > 0{,}97,$ емкость подсобных помещений необходимо увеличить до $m = 4$.

Для достижения заданной вероятности обслуживания можно увеличивать число фасовщиков, проводя последовательно вычисления СМО для $n = 4, 5$ и т. д. Задачу можно решить, увеличивая емкость подсобных помещений, число фасовщиков, уменьшая время обработки товаров.

Найдем остальные параметры СМО для рассчитанного случая при $P_0 = 0{,}12$, $P_{отк} = 0{,}028$, $P_{обс} = 0{,}972$.

4. Абсолютная пропускная способность: $A = 0{,}972 \cdot 6 = 5{,}832$ авт./дн.

5. Среднее число занятых обслуживанием каналов (фасовщиков):

$$\overline{n}_{зан} = 5{,}832/3 = 1{,}944.$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\overline{L}_{оч} = \frac{2^4}{3 \cdot 3!}\frac{1-(2/3)^4(4+1-4\cdot 2/3)}{(1-2/3)^2}\cdot 0{,}12 = 0{,}548.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания: $t_{оч} = 0{,}548/6 = 0{,}09$ дн.

8. Среднее число машин в магазине: $z = 0{,}548 + 1{,}944 = 2{,}492$ авт.

9. Среднее время пребывания машины в магазине: $t_{смо} = 2{,}492/6 = 0{,}415$ дн.

**Ответ.** Емкость подсобных помещений магазина должна вмещать товар, привезенный 4 автомашинами ($m = 4$), при этом вероятность полной обработки товара будет $P_{обс} = 0{,}972$.

### Упражнения

Решить следующие задачи в предположении, что поток поступающих заявок является простейшим и длительность обслуживания одной заявки распределена по показательному закону.

1. Дежурный по администрации города имеет пять телефонов. Телефонные звонки поступают с интенсивностью 90 заявок в час, средняя продолжительность разговора составляет 2 мин. Определить показатели дежурного администратора как объекта СМО.

2. На стоянке автомобилей возле магазина три места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается. Определить среднее количество мест, не занятых автомобилями, и вероятность того, что прибывший автомобиль не найдет на стоянке свободного места.
3. АТС предприятия обеспечивает не более пяти переговоров одновременно. Средняя продолжительность разговоров составляет 1 мин. На станцию поступает в среднем 10 вызовов в секунду. Определить характеристики АТС как объекта СМО.
4. В грузовой речной порт поступает в среднем шесть сухогрузов в сутки. В порту три крана, каждый из которых обслуживает один сухогруз в среднем за 8 ч. Краны работают круглосуточно. Определить характеристики работы порта как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.
5. В службе «Скорой помощи» поселка круглосуточно дежурят три диспетчера, обслуживающие три телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больному поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составляет четыре вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин. Определить основные показатели работы службы «Скорой помощи» как объекта СМО и рассчитать, сколько потребуется телефонных аппаратов, чтобы удовлетворить не менее 90% поступающих вызовов врачей.
6. В салоне-парикмахерской работают четыре мастера. Входящий поток посетителей интенсивностью пять человек в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 40 мин. Определить среднюю длину очереди на обслуживание, считая ее неограниченной.
7. На автозаправочной станции установлены две колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на две автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем одна машина в 3 мин. Среднее время обслуживания одной машины составляет 2 мин. Определить характеристики работы автозаправочной станции как объекта СМО.
8. На вокзале в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты,

то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 ч, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин. Определить вероятность того, что клиент получит отказ, будет обслужен, а также среднее число клиентов, обслуживаемых мастерской в течение 1 ч, и среднее число занятых мастеров.

9. АТС поселка обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Время переговоров в среднем составляет около 3 мин. Вызовы на станцию поступают в среднем через 2 мин. Определить вероятность того, что заявка получит отказ, среднее число занятых каналов, абсолютную пропускную способность АТС.
10. На автозаправочной станции (АЗС) имеются три колонки. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более одной машины, и если она занята, то очередная машина, прибывшая на станцию, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю станцию. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин. Определить вероятность отказа, абсолютную пропускную способность АЗС, среднее число машин, ожидающих заправку, среднее время ожидания машины в очереди, среднее время пребывания машины на АЗС (включая обслуживание).
11. В небольшом магазине обслуживают покупателей два продавца. Среднее время обслуживания одного покупателя – 4 мин. Интенсивность потока покупателей – 3 человека в минуту. Вместимость магазина такова, что одновременно в нем в очереди могут находиться не более 5 человек. Покупатель, пришедший в переполненный магазин, когда в очереди уже стоят 5 человек, не ждет снаружи и уходит. Определить вероятность того, что пришедший в магазин покупатель покинет магазин необслуженным.
12. Железнодорожную станцию дачного поселка обслуживает касса с двумя окнами. В выходные дни, когда население активно пользуется железной дорогой, интенсивность потока пассажиров составляет 0,9 чел./мин. Кассир затрачивает на обслуживание пассажира в среднем 2 мин. Определить среднее число пассажиров у кассы и среднее время, затрачиваемое пассажиром на приобретение билета.

## Библиографический список


1. Антонов, А.В. Системный анализ / А.В. Антонов. – М. : Высш. шк., 2004. – 452 с.
2. Антонов, А.В. Системный анализ. Методология. Построение моделей / А.В. Антонов. – Обнинск : ИАТЭ, 2001. – 272 с.
3. Антонов, А.В. Системный анализ. Математические модели и методы / А.В. Антонов. – Обнинск : ИАТЭ, 2001. – 114 с.
4. Власов, Д.А. Математические модели и методы внутримодельных исследований / Д.А. Власов, В.М. Монахов. – М. : МГГУ им. М.А. Шолохова, 2007. – 345 с.
5. Волкова, В.Н. Из истории систем и системного анализа / В.Н. Волкова. – СПб : СПбГПУ, 2004. – 100 с.
6. Красс, М.С. Основы математики и её приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М. : Дело, 2004. – 688 с.
7. Могилевский, В.Д. Методология систем / В.Д. Могилевский. – М. : Экономика, 1999. – 250 с.
8. Перегудов, Ф.И. Введение в системный анализ / Ф.И. Перегудов, Ф.П. Тарасенко. – М. : Высш. шк., 1989. – 367 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Елена Васильевна *БАХУСОВА*

# ТЕОРИЯ СИСТЕМ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Технический редактор *З.М. Малявина*
Корректор *Г.В. Данилова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Дизайн обложки: *Г.В. Карасева*

Подписано в печать 6.05.2010. Формат 60×84/16.
Печать оперативная. Усл. п. л. 13,2. Уч.-изд. л. 12,3.
Тираж 70 экз. Заказ № 1-47-09.

Тольяттинский государственный университет
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14