

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

«Институт математики, физики и информационных технологий»
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование кафедры)

01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
(код и наименование направления подготовки)

Математическое моделирование
(направленность(профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов автомобильного кузова

Студент В.А. Гуляев _____
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный
руководитель С.В. Талалов _____
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель программы д.ф.-м.н., профессор С.В. Талалов _____
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

« _____ » _____ 20__ г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой к.т.н, доцент А.В. Очеповский _____
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

« _____ » _____ 20__ г.

Тольятти 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 Теоретические основы математического моделирования и условия подобия конструкционных контактных задач.....	5
1.1 Основы теории подобия математического моделирования конструкционных задач механики.....	5
1.2 Вопросы подобия и условия математического моделирования упругих краевых задач.....	21
1.3 Условия подобия и математического моделирования упругопластических задач.....	29
1.4 Математическое моделирование вязкоупругих краевых задач.....	40
2 Расчетное сопровождение процесса проектирования кузова для обеспечения требований по прочности и жесткости.....	49
2.1 Синтез требований к прочности и жесткости автомобильного кузова.....	49
2.2 Типовые показатели жесткости.....	68
3 Методика обеспечения требований к жесткости кузова.....	79
3.1 Пример получения заданной крутильной жесткости на балочной модели кузова и анализ балочных сочленений.....	81
3.2. Увеличение энергоемкости переднего лонжерона при фронтальном ударе.....	89
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	99
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	100

ВВЕДЕНИЕ

Исследование неподвижных сопряжений и пар трения современных машин и технологического оборудования (ТО) прежде всего направлено на их надежное функционирование на заданном при проектировании периоде эксплуатации.

Улучшение качественных и экономических показателей технологического оборудования связано с возросшими технологическими возможностями и высокой степенью автоматизации производственных процессов, обуславливающих интенсификацию рабочих режимов и тем самым предъявляющих повышенные требования к качеству основных сопряжений и деталей, образующих технологическую систему машины. Наиболее существенными факторами, определяющие работоспособность неподвижных сопряжений машины, являются контактные напряжения и форма взаимодействующих поверхностей.

Анализ работ посвященных изучению процессов контактного взаимодействия твердых тел позволяет, исходя из служебного назначения сопряжений ТО, выявить параметры, определяющие контактное взаимодействие стыков: область контактных давлений, закон их распределения и их интенсивность. Существенно, что конструктивные методы позволяют регулировать определяющие параметры контакта на макро уровне путем целенаправленного изменения формы контактирующих поверхностей. Достаточно часто инженер-исследователь встречает существенные трудности при решении конструкционных задач механики. В этих случаях наиболее эффективным приемом исследования процессов контактного взаимодействия неподвижных сопряжений является физическое моделирование на моделях из оптически чувствительных материалов методами фотомеханики, а также на моделях из натуральных металлических образцов с использованием голографической интерферометрии и спекл-фотографии и других экспериментальных методов.

Результативность применения перечисленных методов физического моделирования во многом зависит от разработки теории подобия и анализа

размерностей, представляющих собой теоретическую основу математического моделирования контактных задач механики.

1 Теоретические основы математического моделирования и условия подобия конструкционных контактных задач

1.1 Основы теории подобия математического моделирования конструкционных задач механики

Теоретической основой физического моделирования являются методы анализа размерностей и подобия. В механике деформируемого твердого тела моделирование применяется, в основном, при экспериментальных исследованиях полей напряжений, деформаций и перемещений, возникающих под нагрузкой в модели, геометрически подобной реальному элементу в натуре (прототипу). При этой зависимости, необходимые для пересчета сходственных величин компонентов тензоров напряжения σ_{ij} деформации ε_{ij} ($i, j=1,2,3$) и вектора перемещения u_i с модели ("М") на натуру ("Н") устанавливаются методами размерности и подобия [11, 18, 31].

Все уравнения механики деформируемого твердого тела и граничные условия являются взаимосвязями различных размерных величин, которые могут быть представлены в разных системах единиц измерения.

Правила образования формул размерности вторичных величин через размерность первичных величин определяют общий вид этих формул. Все они представляют собой простые степенные комплексы - одночлены в общем виде:

$$[x] = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \dots a_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdot a_n^{\alpha_n}, \quad (1.1.1)$$

где $[x]$ - символ для обозначения размерности величины X введенный Максвеллом; x - физическая величина; a_i - единицы измерения основных физических величин; $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ - показатели степени.

Функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi(k_1 a_1, k_2 a_2, \dots, k_n a_n) = \varphi(k_1 k_2 \dots k_n) \varphi(a_1 a_2 \dots a_n) \quad (1.1.2)$$

называют гомогенными [26, 34]. Постулат о гомогенности функций будучи фундаментальным в анализе размерностей являются основополагающим и в теории подобия, основанной на рассмотрении непрерывных групп преобразований открытых С.Ли [5]. Одночленные степенные функции и формулы размерности обладают свойством гомогенности, также как суммы степенных комплексов одинаковой размерности и трансцендентные функции, если их аргумент представляет собой безразмерную однородную функцию вида:

$$b / a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} .$$

Систему уравнений, определяющую постановку задачи механики деформируемого твердого тела, можно представить как соотношения безразмерных величин.

Число безразмерных комплексов и симплексов равно разности $N-k$, а количество безразмерных комплексов π равно $t_\pi = n - k$. В соответствии с этим число безразмерных комплексов является наименьшим числом безразмерных комплексов, которые можно получить из величин, входящих в исходное уравнение. Очевидно, что наименьшее число симплексов, которые можно получить из рассматриваемых величин, равно нулю, а наибольшее число комплексов равно $N-k$ [23].

Несмотря на столь обширную область приложения этого метода исследований, он ограничен, так как не позволяет определить необходимые данные для этого метода - перечень существенных физических величин, включая одну зависимую и достаточное число независимых физических величин. Для практического применения π - теоремы, с целью образования безразмерных комплексов и уменьшения числа независимых параметров, используют как математические способы матричного исчисления, так и эвристические методы

фракционного анализа. Лишь с помощью анализа размерностей можно эффективно рассмотреть размерности, их однородность, свойства гомогенности функций и другие основные понятия, используемые при математическом описании физических процессов.

Анализ размерностей позволяет установить список основных безразмерных комплексов π_i , но не позволяет выявить перечень всех физических величин, характеризующих постановку исследуемой задачи. Недостатки анализа размерностей компенсируются применением теории подобия.

Теоретической основой физического моделирования явлений (процессов), являются методы подобия [2, 8, 16, 20, 33] и анализа размерностей [1, 5, 11, 29] базирующиеся на общей теории непрерывных групп преобразований, открытых норвежским математиком С.Ли в 1885 году.

В зависимости от вида соответствующей группы непрерывного преобразования, между сходственными величинами двух систем, переводящего их из одной системы в другую, в механике деформируемого твердого тела используются разновидности подобия. Так, например, две фигуры (тела) геометрически подобны, если существует преобразование подобия, переводящее одну из них в другую. В математике подобие обозначают знаком \sim и термином *idem*.

Два физических явления подобны, если численные значения всех величин, характеризующих первое явление в одной системе (например, силы, скорости, промежутки времени, длины, напряжения, деформации, перемещения и т.д.), могут быть получены в другой системе путем умножения соответствующих величин на постоянные безразмерные множители (масштабы подобия). Эти множители в общем случае различны для разных величин, но все одноименные величины в соответственных точках обеих систем и (если явления неустановившиеся) в соответственные моменты времени имеют одинаковые масштабы подобия, а масштабы подобия безразмерных величин (углов, коэффициентов Пуассона и т.п.) равны единице. Следовательно, при простом подобии двух явлений имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
 L_1/L_2 = K_L, P_1/P_2 = K_p, t_1/t_2 = K_t, U_1/U_2 \\
 = K_U, \sigma_1/\sigma_2 = K_\sigma, \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.1.3}$$

В (1.1.3) L, P, t, U, σ - физические величины: длина, сила, время, скорость, напряжение; K - коэффициенты пропорциональности (сомножители), являющиеся константами подобия и представляющие собой масштабы соответствующих величин.

Подобие явлений обусловлено, прежде всего, их геометрическим подобием. В исследовании подобных фигур основную роль играет теорема о параллельных секущих: если стороны угла пересечь параллельными прямыми, то отношение отрезков, отсеченных на одной из сторон, равно отношению соответствующих отрезков на другой стороне угла.

Геометрически подобные системы обладают следующим свойством: если в качестве масштабов выбрать сходственные геометрические параметры, то функции или уравнения, описывающие подобные геометрические системы, после приведения их путем масштабных преобразований к безразмерному виду становятся тождественными.

Преобразованием подобия является такое преобразование, при котором отношение образа любого отрезка к самому отрезку постоянно. Это отношение называется коэффициентом подобия.

Приведенное определение простого подобия является универсальным и его можно отнести к любым явлениям, однако в зависимости от характера явления различают подобие: статическое, механическое, кинематическое, энергетическое, тепловое, электрическое, динамическое, гидродинамическое, аэродинамическое, термодинамическое, электродинамическое и другие виды.

Целесообразно определить подобие физических явлений (процессов, систем, сред, тел и т.п.). Таким образом, подобие физических явлений определяется, помимо геометрического подобия, также подобием соответствующих полей переменных величин.

Выше показано, что между двумя физическими явлениями возможно линейное взаимно-однозначное соответствие:

$$x_H = K_x \cdot x_M, \quad (1.1.4)$$

где K_x - множитель подобного преобразования, называемый масштабом величины x . Соотношение (1.1.4) определяет связь между сходственными скалярными, векторными или тензорными величинами. Обычно для природы и ее модели имеют место разные типы соответствия, различающиеся видами используемых преобразований.

Рассмотрим основные типы соответствий, применяемых при моделировании задач механики деформируемого твердого тела.

1. Простое подобие. В этом случае k_x в соотношении (1.1.4) - постоянный безразмерный коэффициент (число), называемый в теории подобия масштабом моделирования. При таком типе соответствия для каждого одноименного вектора или тензора масштаб моделирования всех его компонент одинаков.

При простом подобии натура и модель являются геометрически подобными. Если обозначить линейный масштаб (масштаб геометрического подобия) $k_l = l_H / l_M$, то

$$x_H = k_l \cdot x_M; y_H = k_l \cdot y_M; z_H = k_l \cdot z_M; S_H = k_l^2 \cdot S_M; v_H = k_l^3 \cdot v_M; \dots$$

$$S_H = k_l^2 \cdot S_M; v_H = k_l^3 \cdot v_M; \dots \text{ и т.п.}$$

Здесь S и v - площадь поверхности и объем тела. Сходственные моменты времени $t_H = k_t \cdot t_M$, где k_t - масштаб гомотронного подобия (масштаб времени).

Соответственные поля скалярных, векторных и тензорных величин в сходственные моменты времени подобны, если

$$P_{iH} = k_p \cdot P_{iM}; (\sigma_{ij})_H = k_\sigma \cdot (\sigma_{ij})_M; (\varepsilon_{ij})_H = k_\varepsilon \cdot (\varepsilon_{ij})_M; T_H = k_T \cdot T_M; \\ u_{iH} = k_u \cdot u_{iM}; V_{iH} = k_v \cdot V_{iM}; w_{iH} = k_w \cdot w_{iM},$$

где $k_\varepsilon = 1, k_u = k_v = k_w$, P_i - силы (нагрузки), T - температура; u_i, v_i, w_i - компоненты вектора перемещения;

$k_\varepsilon, k_\sigma, \dots, k_w$ - масштабы моделирования соответствующих величин. Масштаб деформации $k_\varepsilon = 1$, как масштаб безразмерной величины в случае простого подобия.

2. Расширенное механическое подобие. [18]. В этом случае для максимального расширения возможностей моделирования введен множитель подобия $k_\varepsilon \neq 1$, т.е. $\varepsilon_n \neq \varepsilon_m$ для относительной деформации, т.е. для отвлеченной величины. Все остальные соотношения удовлетворяют первому типу соответствия (простое подобие).

Материалы природы и модели подобны в механическом смысле, если для изготовленных из них образцов имеют место соотношения

$$\sigma_n = k_\sigma \cdot \sigma_m; \varepsilon_n = k_\varepsilon \cdot \varepsilon_m; t_n = k_t \cdot t_m.$$

Существенно, что деформация ε является относительной, безразмерной отвлеченной величиной, т.е. величиной нулевой размерности. Тем не менее, и для этой величины введен множитель подобия k_ε , отличной от единицы, хотя анализ размерностей требует, чтобы для подобных систем (тел) k_ε был равен единице.

Два геометрически подобных тела, состоящих в сходственных точках из подобных материалов, называют механически подобными в расширенном смысле, если выполнены условия:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= F(\varepsilon; x, y, z, t, \dots)_n, \\ k_\sigma \sigma_m &= F(k_\varepsilon \varepsilon_m; k_x x_m; k_y y_m; k_z z_m; k_t t_m; \dots). \end{aligned}$$

В частном случае ($k_\sigma = k_\varepsilon = k_l = 1$) имеем простое механическое подобие деформируемого твердого тела.

Основная теорема о расширенном механическом подобии [18]: подобные однородные тела в случае малых (в смысле Коши) перемещений из точек и малых деформаций находятся в подобном состоянии в сходственные моменты времени $t_n = k_t t_m$, и t_m , причем напряжения равны соответственно $\sigma_n = k_\sigma \sigma_m$ и σ_m , деформации равны $\varepsilon_n = k_\varepsilon \varepsilon_m$ и ε_m , смещения $u_n = k_l k_\varepsilon u_m$

и u_m , при условии, что в моменты времени $t_n = k_t t_m$ распределенные поверхностные силы в сходственных точках равны $\sigma_n = k_\sigma \sigma_m$ и σ_m , а интенсивность объемных сил в сходственных точках $p_n = k_l k_\sigma^{-1} p_m$.

3 Аффинно-функциональное соответствий. Этот тип соответствия устанавливается на основе сформулированной теоремы: явления (процессы) в натуре и модели аффинно-функциональны, если они аппроксимируются разными уравнениями и возможно установить, через аффинную связность непрерывных групп преобразований, функциональное соответствие между их сходственными величинами, приводящее исходные уравнения к идентичному безразмерному виду.

Для этого типа соответствия должны выполняться соотношения:

$$\xi_{in}(x_i)_n = k_{\xi_i} \xi_{im}(x_i)_m, (i=1,2,3), \quad (1.1.5)$$

где $k_{\xi_1} \neq k_{\xi_2} \neq k_{\xi_3}$, а ξ - специально подобранная (устанавливаемая функция преобразования).

Из аффинно-функционального соответствия вытекают два частных случая в виде аффинного соответствия [26] и функционального (нелинейного [2]) соответствия.

Анализ положений теории групп С.Ли [14] позволяет сформулировать следующую теорему и на ее основе дать определение наиболее общему из всех видов подобия аффинно-функциональному:

явления (процессы) в натуре и модели аффинно-функциональной, если они аппроксимируются разными уравнениями и можно установить через аффинную связность непрерывных групп преобразований, функциональное соответствие

$$F_n^i(x_n)^i = f_{F_i} F_m^i(x_m)^i, (i=1, \dots, n),$$

где $f_{F_1} \neq f_{F_2} \neq \dots \neq f_{F_{n-1}} \neq f_{F_n}$ между их сходственными величинами, приводящее исходные уравнения к идентичному безразмерному виду.

Из этой теоремы в виде частного случая следует определение аффинного соответствия.

Аффинное подобие представляет собой непрерывную группу линейных однородных преобразований $\xi_n^i(x_n) = k_{\xi_i} \cdot \xi_{im}(x_m)$ с постоянными коэффициентами $k_{\xi_i} (i=1, 2, \dots, n)$, в общем случае, неравными между собой [19]. Если в двух системах имеется неравенство хотя бы двух из одноименных безразмерных параметров (например, $L_1^i \neq L_2^i$), то эти системы являются не подобными, а аффинными. Последнее положение широко применяют при моделировании тонкостенных систем, оболочек [32] и анизотропных сред.

Другим частным случаем, вытекающим из введенного здесь аффинно-функционального соответствия между сходственными величинами модели и природы, является нелинейное подобие [6]

4 Функциональное (нелинейное) соответствие. Этот вид подобия является вторым частным случаем аффинно-функционального соответствия. При этом виде преобразования множитель k_x в соотношении (1.1.4) является в общем случае не константой, а функцией времени и координат: $k_x = f(x, y, z, t)$. Все компоненты каждого вектора преобразуются в одинаковых и одинаково изменяющихся в пространстве и во времени масштабах.

В частном случае, при функциональном соответствии, когда масштабы нелинейного моделирования зависят только от времени натура и ее модель -

геометрически подобные тела, а поля сходственных величин в натуре и модели связаны преобразованиями вида:

$$x_n = k_x(t_m) \cdot x_m. \quad (1.1.6)$$

Функциональное соответствие (1.1.6) представляет собой обобщение простого подобия.

5. Операторное соответствие. В этом случае сомножитель k_x в соотношении (1.1.4) является оператором. Так, например, при моделировании задач линейной наследственной теории ползучести k_x - линейный интегральный оператор Вольтерра по времени [25]:

$$x_n = k_x \cdot x_m = x_m(t_m) + \int_0^t k(t - \tau) x_m(\tau_m) d\tau_m \quad (1.1.7)$$

При соответствии этого вида подобия натура и модель являются геометрически подобными, сходственные моменты времени одинаковы, а поля соответственных величин в натуре и модели связаны линейными интегральными операторами Вольтерра:

$$\sigma_{ij}, j=0; 2\varepsilon_{ij} = \bar{u}_{ij} + \bar{u}_{ji}; E\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} + \mu(\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\sigma_{ij}); \sigma_{ij}n_j = \sigma_{io} \text{ на } S_1;$$

$$\bar{u}_i = \bar{u}_{io} \text{ на } S_2, (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.1.8)$$

где E, \bar{u}, μ - линейные интегральные операторы Вольтерра, независящие от координат; S_1 и S_2 - части границы тела, на которых заданы внешние напряжения (нагрузки) и перемещения u_{io} соответственно.

Система (1.1.8) содержит линейные дифференциальные операторы по координатам и линейные интегральные операторы по времени, являющиеся операторами подобия.

Операторное соответствие является одним из путей обобщения (простой) классической теории подобия [25]. Если материал природы и модели упругий, то все интегральные операторы превращаются в константы подобия ($k_x = const$). Операторное соответствие успешно используется при моделировании физически нелинейных задач теорий линейной и нелинейной вязкоупругости пластичности вязкопластичности и т.п.

6. Статистическое соответствие. При решении ряда задач механики деформируемых твердых тел и, в частности, механики полимеров, в связи с оптическими методами моделирования, необходимо использовать статистические методы исследования. Поведение тела, испытывающего действие внешних сил и полей, зависит от ряда случайных факторов: нагрузки, температуры, краевых условий, геометрии, неоднородности структуры материала, режима нагружения и т.д.

При экспериментальном исследовании проблемы механической надежности рассматриваемого тела с учетом различных факторов случайной природы возникает необходимость последовательного моделирования трех различного типа задач:

- определение статистических характеристик внешних воздействий параметров, характеризующих геометрию, свойства и условия работы рассматриваемой системы;
- определение статистических характеристик полей перемещений, деформаций и напряжений по заданным статистическим характеристикам внешних воздействий и параметров, определяющих эту систему;
- определение механической надежности рассматриваемого деформируемого твердого тела по известным характеристикам параметров, определяющих его состояние.

Для моделирования указанных задач вводится статистическое соответствие [31]. При этом виде соответствия

$$\hat{x}_M = \hat{k}_x \hat{x}_N \quad (1.1.9)$$

состояния природы и модели определяются случайными величинами \hat{x}_i , где знак над символом случайной величины означает, что берется ее математическое ожидание. Аналогичный знак над символом константы подобия \hat{k}_x означает, что она формируется как отношение математических ожиданий соответствующих величин природы и модели:

$$\hat{k}_x = \hat{x}_N / \hat{x}_M.$$

Кроме перечисленных видов соответствия при моделировании напряженно-деформированного состояния (НДС) в механике деформируемого твердого тела, можно использовать и их комбинации. Так, например, для моделирования задач линейной теории наследственности можно применять аффинно-операторное соответствие, а для ряда физически нелинейных задач - аффинно-функциональное соответствие и другие сочетания видов подобия.

В современной теории подобия масштабы обозначаются через коэффициент k с нижним индексом той величины, к которой данный масштаб относится.

Можно дать следующие определения масштабам, индикаторам и критериям подобия, соответственно.

Данные определения проиллюстрируем на простом примере законе Ньютона: $F = ma$, где F - сила, m - масса тела, a - ускорение. Введем в закон Ньютона масштабы подобия:

$$k_F F = k_m k_a \cdot ma$$

$$\text{или } (k_F / k_m k_a) \cdot F = ma .$$

Пусть первое выражение закона Ньютона относится к натуре, а последнее соотношение - к модели; чтобы они были идентичны в модели и натуре, т.е. чтобы соблюдалось подобие, очевидно необходимо положить $k_F / k_m k_a = 1$. Это равенство является индикатором подобия. Заменяя в нем масштабы $k_F = F_n / F_m; k_m = m_n / m_m; k_a = a_n / a_m$ отношениями сходственных величин в натуре и модели, получим:

$$\frac{F_n}{F_m} \cdot \frac{m_m}{m_n} \cdot \frac{a_m}{a_n} = 1$$

$$\text{или } (F/ma)_n = (F/ma)_m = N_o = idem ,$$

что и является критерием подобия.

Установив подобие систем, необходимо определить связь между критериями подобия, т.е. выяснить необходимые условия подобия. Возможны два случая.

1. Рассматриваются системы, в которых обобщенные координаты являются однозначными функциями параметров, т.е. каждому набору параметров a_k соответствует одно и только одно значение x_i :

$$x_i = f_i(a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+s}) (i = 1, 2, \dots, n)$$

Выделим системы с взаимно-однозначной связью между обобщенными координатами и параметрами, т.е. такие, чтобы каждому значению соответствовал лишь один набор параметров a_k . Поскольку подобие между натурой и моделью заведомо имеет место, для сходственных моментов времени и сходственных точек справедливо соотношение

$$x_{in} = k_{xi} x_{im}, \text{ где } k_{xi} = \text{const}$$

Выполним вторую модель, подобную натуре, с тем же коэффициентом подобия $k_{xi} = x_{ni} / x_{mi} = x_{ni} / x'_{mi}, x'_i = x_{mi}$ (штрихом отмечены величины второй модели). В этом случае все критерии подобия второй модели и природы равны: $\pi_n = \pi'_m$. Кроме того, имеем $x_{ni} = f_i(a'_{n+1}, \dots, a'_{n+s})_n$

$$x_{mi} = f_i(a_{n+1}, \dots, a_{n+s})_m; x'_{mi} = f_i(a'_{n+1}, \dots, a'_{n+s})_m.$$

Поскольку $x'_{mi} = x_{mi}$, то ввиду отмеченной однозначности $a'_{mk} = a_{mk}, \pi'_m = \pi_m, \pi_n = \pi_m$, т.е. в рассматриваемом случае при установленном подобии модели и природы соответствующие критерии модели и природы равны.

2. Если одному значению x_i могут соответствовать различные наборы параметров a_k , то в общем случае при подобии не все критерии природы и модели равны. Например, если $\pi_1 = \sin \pi_2$, то равенство $\pi_{1m} = \pi_{1n}$ возможно при $\pi_{2n} = \pi_{2m} + k2\pi, \pi_{2n} \neq \pi_{2m}$. Подобные случаи сравнительно редко встречаются, но их необходимо иметь в виду.

Для систем с взаимно однозначной связью между параметрами и обобщенными координатами формулируется теорема теории подобия о необходимых условиях [26].

Необходимые условия позволяют установить связь между координатами и параметрами подобных систем.

В необходимых условиях участвуют все критерии данной системы, поскольку при равенстве определяющих критериев модели и природы равны и неопределяющие критерии, являющиеся функцией определяющих.

Определяющими критериями подобия называют критерии, составленные из величин, являющихся определяющими для данного процесса, т.е. критерии, образующие достаточные условия подобия.

Вторая и третья теоремы подобия базируются на свойствах непрерывных групп преобразований теории групп Ли [17].

Инвариантом непрерывной группы преобразований является функция $F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, которая остается тождественной при преобразовании переменных величин с помощью группы Ли преобразований, т.е. инвариантом группы называют функцию, определяемую тождествами

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \equiv F(x''_1, x''_2, \dots, x''_n) \equiv \dots \quad (1.1.10)$$

Так как инвариант группы F не зависит от параметров k_1, \dots, k_2 , то он должен удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial k_1} &= \frac{\partial F}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial k_1} + \frac{\partial F}{\partial x'_2} \frac{\partial x'_2}{\partial k_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial k_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial k_2} &= \frac{\partial F}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial k_2} + \frac{\partial F}{\partial x'_2} \frac{\partial x'_2}{\partial k_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial k_2} = 0 \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial F}{\partial k_r} &= \frac{\partial F}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial k_r} + \frac{\partial F}{\partial x'_2} \frac{\partial x'_2}{\partial k_r} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial k_r} = 0 \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Идею об инвариантах группы используют при выводе второй обобщенной теоремы подобия.

Третья теорема подобия устанавливает достаточные условия подобного протекания процессов (явлений).

Множество явлений, определяемых заданным дифференциальным уравнением и условиями однозначности, составляет подобную непрерывную группу преобразований, если величины, входящие в условия однозначности составляют подобную непрерывную группу преобразований, а инвариантом этой группы, определенные с помощью заданного дифференциального уравнения и составленные из указанных величин, имеют одно и то же числовое значение.

Третья теорема подобия указывает, каковы должны быть явления (процессы, системы и т.п.), чтобы между ними существовало подобие.

В каждом частном случае среди найденных критериев подобия различают определяющие критерии. Разделение критериев на определяющие и неопределяющие вытекает из третьей или обратной теоремы подобия, которая определяет необходимые и достаточные условия существования подобия явлений в натуре и модели.

Согласно второй теореме подобия все уравнения связи приводятся к критериальному виду, т.е. могут быть преобразованы в уравнения, выражающие однозначную связь между критериями подобия. Аналогично степенным одночленам, приведенным к безразмерному критериальному виду, дифференциальные и интегральные уравнения связи, приведенные подобными преобразованиями к безразмерному виду, также становятся критериальными.

Наличие автомодельности для искомого решения можно установить непосредственно, исходя из постановки задачи, на основе анализа размерностей. При этом нет необходимости даже в математической постановке задачи, достаточно знать лишь параметры и характеристики, входящие в уравнения, и краевые условия задачи. Имея в виду эти соображения, в ряде случаев можно схематизировать изучаемое явление и поставить задачу с реализацией указанных упрощений методами фрикционного анализа, откуда следовала бы автомодельность ее решения.

Физическое моделирование. Моделирование представляет собой замену изучения натурального явления изучением его модели, выполненной обычно с соблюдением масштабов геометрического и силового подобия. Теоретической основой физического моделирования (в отличие от математического) служат теория подобия и анализ размерностей. Моделирование используется практически во всех отраслях техники и народного хозяйства. Технику моделирования можно определить как теорию моделей, науку об условиях применимости моделей, о методах и материалах изготовления моделей, об опытных установках для испытания моделей, о методике проведения экспериментов с моделями,

обработки полученных результатов и использования их на практике, о методах и средствах регистрации полей деформаций, напряжений и перемещений [27, 29, 31, 34].

Основными причинами, заставляющими использовать физическое моделирование, являются следующие: 1) Необходимость располагать данными измерений в качестве дополнения к расчетам или для их подтверждения или взамен их; 2) Отсутствие возможности проведения испытаний в натуре; 3) Наличие экономических и технических преимуществ проведения эксперимента с моделью; 4) Обеспечение воспроизводимости и моделирования; 5) Сокращения сроков испытаний, особенно при выборе оптимального варианта и др.

Моделирование все шире применяется при решении различных практических и теоретических задач прочности [2], исследования механических напряжений, упругих, вязкоупругих, пластических деформаций, в связи с новыми направлениями развития поляризованно-оптических методов [7, 14, 17, 18, 22]. Статические и динамические испытания моделей для определения напряженно-деформируемого состояния изделий или элементов, играют важную роль в условиях развития новой техники, когда материалы испытывают все большие нагрузки, например, при взрывных и ударных явлениях, номинальной интенсивности в очень короткие промежутки времени. Возникающая при этом концентрация напряжений обычно определяет прочность изделия в зонах ее образования. Метод физического моделирования весьма эффективен для установления подобных зон в натурном изделии и определения величин номинальных напряжений, деформаций и перемещений.

Метод физического моделирования, имеющий развитую математическую базу, в настоящее время практически может быть реализован при экспериментальном решении любого класса задач. Этот метод, наряду с численными способами, может служить как для оценки адекватности теоретических решений, так и иметь самостоятельное научное значение.

При развитой экспериментальной базе метод физического моделирования весьма эффективен, относительно прост, не требует больших затрат средств и времени на проведение исследований.

В последнее время надежность и точность метода значительно возросли в связи с использованием, для получения экспериментальной информации, оптических средств регистрации и развития лазерной технологии в экспериментальной механике.

Большое влияние на расширение возможностей метода физического моделирования оказало использование современной вычислительной техники на базе быстродействующих ЭВМ, автоматизации процессов измерения, регистрации и интерпретации оптической информации с использованием их микрокомпьютеризации.

Значительный вклад внесли появившиеся новые оптические методы [1, 10, 15, 24, 27, 32] , а также разработки по применению волоконной оптики в голографической интерферометрии и лазерной спекл-фотографии, использованию жидких кристаллов, фотодиодных матриц для считывания оптических изображений картин полос, автоматического цифрового их преобразования и ввода в ЭВМ и др.

Указанные особенности, способствующие расширению областей приложения метода физического моделирования, позволяют его использовать при исследовании различных конструктивных методов обеспечения качественного функционирования сопряжений Т.О., а также задач прочности и фрикционного взаимодействия [18, 25, 29, 33, 34].

1.2 Вопросы подобия и условия математического моделирования упругих краевых задач

При работе фрикционной системы ее напряженно-деформированное состояние существенно зависит от распределения контактных напряжений, которые в экспериментальной механике моделируются поляризационно-интерференционными методами [1, 2, 18]. Поскольку методы фотомеханики

относятся к методам физического моделирования, точность результатов, полученных при их применении, существенно зависит от того, насколько полно разработаны вопросы подобия прежде всего упругих полей напряжений, деформаций и перемещений. Следует отметить, что теории подобия для моделирования контактных задач методами фотомеханики была разработана относительно недавно [7, 14, 15, 27]. Найденные экспериментально решения ряда контактных задач [8, 10, 18, 34] хорошо согласуются с результатами, полученными теоретическим [18] и численным [1, 3] методами, что свидетельствует о достаточной степени подобия, реализуемой в фотоупругих экспериментах, и правомерности используемых условий моделирования.

В отличие от ранее использованного подхода при выводе условий моделирования из частных контактных задач [10] обобщим этот подход путем вывода аналогичных условий подобия из уравнений краевой основной задачи теории упругости [10].

Постановка объемной статической краевой задачи теории упругости определяется следующими системами уравнений: равновесия

$$\sigma_{ij}(x_i) + \rho F_i(x_i) = 0, \quad (1.2.1)$$

где σ_i - тензор напряжений ($i, j = 1, 2, 3$), F_i - силы; соотношениями Коши

$$2\varepsilon(x_i) = u_{ij} + u_{ji}, \quad (1.2.2)$$

где ε_{ij} - тензор деформации; u_i - вектор перемещения; условиями совместности Сен-Венана

$$\eta^{ij} \equiv \mathcal{E}_{ikl} \mathcal{E}_{imn} \varepsilon_{lm}; kn = 0, \quad (1.2.3)$$

где \mathcal{E}_{ikl} - альтернирующий тензор;

Соотношением закона связи между напряжениями и деформациями, принятым в виде закона Гука:

$$\sigma_{ij}(x_i) = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\nu\varepsilon_{ij}, \quad (1.2.4)$$

где θ - объемная деформация; $\theta = 3\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ij}$; λ, ν - константы Ляме.

Для постановки краевой задачи линейной теории упругости должны быть известны граничные условия. Пусть поверхность, ограничивающая исследуемое тело, состоит из двух частей и на одной части поверхности S_σ заданы внешние усилия (нагрузки)

$$\sigma_{ijn} \Big|_{S_\sigma} = \sigma_{io}. \quad (1.2.5)$$

На другой части поверхности S_u заданы перемещения

$$u_i \Big|_{S_u} = u_{io}. \quad (1.2.6)$$

Система уравнений этой задачи в замкнутой форме содержит уравнения равновесия (1.2.1), при малых деформациях, соотношения Коши (1.2.2), условия совместности деформаций (1.2.3), уравнения закона Гука (1.2.4) и граничные условия (1.2.5) и (1.2.6). Более общими граничными условиями являются "контактные" граничные условия [120]:

$$\alpha_{im}^{(x)} \sigma_{mjnj} + \beta_{im}^{(x)} u_m E_x / l = N_i^{(x)}, \quad (1.2.7)$$

где E_x - модули упругости контактирующих упругих тел, $\alpha_{im}^{(x)}$ и $\beta_{im}^{(x)}$ - постоянные величины, l - характерный линейный размер тела, $N_i^{(x)}$ - так

называемые "контактирующие" силы с размерностью напряжения, x - индекс площадок S_x ; составляющих в сумме поверхность тела.

Условия (1.2.5) и (1.2.6) являются частным случаем граничного условия (1.18), когда x принимает значение 1 и 2, причем

$$\begin{aligned}\alpha_{im}^{(1)} &= \delta_{im}; \beta_{im}^{(1)} = 0; N_i^{(1)} = P_{io}; \\ \alpha_{im}^{(2)} &= 0; \beta_{im}^{(2)} = \delta_{im}; N_i^{(2)} l / E_x = u_{io}.\end{aligned}$$

Выполнив инвариантные преобразования, относительно линейно-однозначного соответствия $x_n = k_x x_m$ (индексы "н" и "м" относят рассматриваемые величины соответственно к натуре и модели) замкнутой системы уравнений смешанной основной краевой задачи теории упругости (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4), (1.2.5), (1.2.6), получим следующую систему индикаторов подобия:

$$k_p k_g kl / k_e k_\varepsilon = 1; k_u k_\varepsilon kl = 1; k_{uo} k_e kl / k_p = 1; k_p / kl^2 k_e k_\varepsilon = 1, \quad (1.2.8)$$

где $kl = l_n / l_m$ - масштаб геометрического подобия, k_p - масштаб подобия отношения плотностей тела в натуре и модели, k_g - масштаб подобия ускорения свободного падения, и. т.д.

Запишем в координатной форме, согласно (1.2.1), первое уравнение равновесия без учета объемных сил для плоской задачи:

$$\partial \sigma_x / \partial x = -\partial \tau_{xy} / \partial y. \quad (1.2.9)$$

Введем в зависимость (1.2.9) масштабы подобия

$$\frac{k \sigma_x}{k_x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{k \tau_{xy}}{k_y} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (1.2.10)$$

Чтобы зависимость (1.2.10) была тождественная для природы и модели, необходимо принять

$$k\sigma_x/k_x = k\tau_{xy}/k_y = 1. \quad (1.2.11)$$

С учетом равенства $k_x = k_y = kl$ из (1.2.11) имеем

$$k\sigma_x = k\tau_{xy}, \quad (1.2.12)$$

т.е. нормальные и касательные компоненты тензора напряжения ($i, j = 1, 2, 3$) моделируются в одном масштабе подобия. Равенство (1.2.12) следует также из анализа размерностей, входящих в него величин.

Выражение компонентов напряженного состояния в изотропном теле через компоненты деформации имеет вид

$$\tau_{xy} = E\varepsilon_{xy} / 2(1 + \mu). \quad (1.2.13)$$

Введем в (1.2.13) масштабы подобного преобразования:

$$k_{\tau_{xy}} \tau_{xy} = \frac{k_e k_{\varepsilon_{xy}}}{k(1 + \mu)} \frac{E}{2(1 + \mu)} \varepsilon_{xy}. \quad (1.2.14)$$

Аналогично предыдущему имеем, опуская индексы

$$k/\tau = k_e k_\varepsilon / k(1 + \mu) = 1. \quad (1.2.15)$$

С учетом (1.2.12) зависимость между масштабами подобия (1.2.15) можно представить в виде

$$k_{\sigma} = \frac{k_e k_{\varepsilon}}{k(1+\mu)} = 1 \text{ или } k_{\sigma} = \frac{k_{\varepsilon} k_u}{k_l k(1+\mu)} = 1. \quad (1.2.16)$$

Из граничного контактного условия (1.2.7) имеем индикатор подобия

$$k_{\sigma} = k \text{ и } k_e / kl = 1, \quad (1.2.17)$$

совпадающий по виду со вторым индикатором (1.2.16).

Из закона Гука в форме (1.2.4) для плоской задачи имеем

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \mu\sigma_y) / E \quad (1.2.18)$$

или с учетом введенных в (1.2.18) масштабов подобия

$$k_{\varepsilon x} \cdot \varepsilon_x = \frac{1}{k_e} \cdot \frac{1}{E} (k_{\sigma x} \sigma_x - \mu k_{\sigma y} \cdot \sigma_y) \quad (1.2.19)$$

Для подобия природы и модели в (1.2.19) необходимо положить, чтобы

$$k_e k_{\varepsilon} / k_{\sigma} = k(1 - \mu). \quad (1.2.20)$$

Из выражений (1.2.17) и (1.2.20) следует равенство индикаторов подобия:

$$k_u k_e / kl = k_e k_{\varepsilon} / k(1 + \mu). \quad (1.2.21)$$

Выразив из соотношения (1.2.17) масштаб $k_{\varepsilon} = k_u / kl$ и представив его в (1.31), с учетом размерностей получим

$$k_{(1-\mu^2)} / k_e = k_u k^2 l / (k_p k_l) \quad (1.2.22)$$

Введя обозначения $k_1 = (1 - \mu_1^2) / E_1$ и $k_2 = (1 - \mu_2^2) / E_2$, перепишем зависимость (1.2.22) в виде

$$k_b^2 k_l / (k_p k_r) = (k_1 + k_2) / (k_1 + k_2) \nu, \quad (1.2.23)$$

где k_r - масштаб характерных линейных размеров тел, находящихся в контакте (например, радиусов кривизны), k_b - геометрический масштаб подобия ширины площадки контакта, k_l - масштаб геометрического подобия, k_p - масштаб силового подобия, индексы 1 и 2 относятся к телам, находящимся в контакте

$$k_j = (1 - \mu_j^2) / E_j (j=1,2).$$

Формула (1.2.23) совпадает с зависимостью (3.35), полученной в работе [7] при $k_l = k_b = k_u = k_r$, т.к. все линейные величины (l, b, r) в контактных задачах имеют один порядок малости и одинаковую размерность, т.е. моделируются в одном и том же масштабе геометрического подобия.

При моделировании с общим масштабом геометрического подобия для длин контактирующих тел и радиусов контактных зон ($k_{r1} = k_{r2} = k_l$) зависимость (1.2.23) упрощается

$$k_b^2 / k_p = (k_1 + k_2)_H / (k_1 + k_2)_M \quad (1.2.24)$$

Анализ зависимости (1.2.23) позволяет рассмотреть три частных случая.

1. При $\mu_1 = \mu_2 = \mu = const$ зависимость (1.2.23) принимает вид

$$\frac{k_b^2 k_l}{k_p k_r} = \frac{(E_1 + E_2)_H (E_1 E_2)_M}{(E_1 + E_2)_M (E_1 E_2)_H}, \quad (1.2.25)$$

откуда с учетом равенства $k_r=k_l$ следует условие подобия для площадок контакта:

$$\left(\frac{E_{1н}}{E_{1м}} + \frac{E_{1н}}{E_{2м}} \right) k_b^2 = k_p \left(1 + \frac{E_{1н}}{E_{2н}} \right). \quad (1.2.26)$$

При равенстве модулей упругости взаимодействующих тел, находящихся в контакте $E_1=E_2=E$, зависимость (1.2.23) видоизменяется:

$$\frac{k_b^2 k_l k_e}{k_l k_r} = \frac{\left[(1 - \mu_1^2) + (1 - \mu_2^2) \right]_н}{\left[(1 - \mu_1^2) + (1 - \mu_2^2) \right]_м} \quad (1.2.27)$$

с соответствующим упрощением при $k_r=k_l$

2. При равенстве коэффициентов Пуассона и модулей Юнга $E_1=E_2=E$ контактирующих тел, т.е. когда они изготовлены из одного материала, формула (1.2.23) при $r_1=r_2=r$ принимает вид

$$\frac{k_b^2 k_l}{k_p k_r} = \frac{(1 - \mu_n^2) E_m}{(1 - \mu_m^2) E_n}. \quad (1.2.28)$$

Если условия контакта двух тел влияют на исследуемые напряжения, линейные размеры площадок контакта в модели должны моделироваться в соответствии с масштабом геометрического подобия k_l . При моделировании это условие удовлетворяют подбором радиусов r_{mi} ($i=1,2$) зоны контакта в модели взаимодействующих тел или нагрузок p_m , прикладываемых к ним. Условие подобия (1.2.23) и вытекающие из него частные случаи удовлетворяют подбором численных значений входящих в них величин. В зонах контакта модели можно также применить начальные радиусы контактирующих поверхностей, выполненные с соблюдением масштаба геометрического подобия

$r_{1н} / r_{1м} = r_{2н} / r_{2м} = k_r = k_l$. В этом случае должно выполняться условие моделирования контактных задач:

$$k_b^2 k_l / (k_p k_l) = (k_1 + k_2)_н / (k_1 + k_2)_м. \quad (1.2.29)$$

Таким образом, инвариантное преобразование, на основе линейно-однозначного соответствия между сходственными величинами в натуре и модели, системы уравнений основной смешанной краевой задачи теории упругости с контактными граничными условиями (1.2.7) привело к обобщенному условию подобия (1.2.23) для моделирования широкого класса упругих контактных задач (1.2.8), когда в общем случае контактирующие тела в модели и натуре выполнены из разных конструкционных материалов. Реализация моделирования в рассмотренных трех частных случаях связана:

во-первых, с равенством коэффициентов Пуассона двух контактирующих тел (металлические сплавы - стекло) в натуре и модели;

во-вторых, с равенством модулей упругости двух тел в натуре и модели (СКУ - 10 при комнатной температуре и стекло при минусовой температуре);

в третьих - контактирующие тела выполнены из одного материала.

1.3 Условия подобия и математического моделирования упругопластических задач

Примером упругопластического поведения материала являются контактные деформации при сжатии шероховатых поверхностей деталей технологического оборудования [9, 18, 19]. Сложность постановки подобного класса задач и трудности получения их теоретических решений выявили преобладание в использовании экспериментальных (оптических) методов исследований. Однако для физического моделирования упруго-пластических контактных задач вопросы подобия до сих пор мало исследованы [14, 24] Для преодоления указанных ограничений и получения соответствующих критериев подобия, условий моделирования и формул пересчета сходственных величин с модели на натуре,

проведен критериальный анализ основной смешанной краевой упруго-пластической контактной задачи.

Ограничимся рассмотрением малых деформаций упруго-пластических тел, хотя в последнее время имеет место значительный прогресс в изучении больших (конечных) деформаций.

При малых деформациях их симметричный тензор ε_{iio} , выражается через вектор перемещения \vec{u}_i в прямоугольной декартовой системе координат, согласно соотношения (1.2.2). В рассматриваемом приближении не существенно, относятся ли координаты тела к деформированному или к недеформированному состоянию.

Аналогично, тензор скоростей деформаций ε_{ij} выражается через скорости смещений \dot{u}_i посредством соотношений.

$$\varepsilon_{ij} = \dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3.1)$$

В (1.3.1) точка над соответствующей величиной означает частную производную по времени

$$\varepsilon_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t, \dot{u}_{i,j} = \frac{\partial}{\partial t} (\partial u_i / \partial x_j), \dot{u}_{j,i} = \frac{\partial}{\partial t} (\partial u_j / \partial x_i).$$

Изменения в геометрии, вызванные деформацией, не учитываются также и при составлении уравнений равновесия (1.2.1). Поэтому несущественно, будет ли симметричный тензор напряжений отнесен к деформированному или недеформированному состоянию. Действительные полные деформации $\dot{\varepsilon}_{i,j}$ элемента тела можно представить в виде суммы упругих деформаций $\varepsilon_{i,j}^2$ и пластических деформаций $\varepsilon_{i,j}^p$, а также их скоростей.

$$\varepsilon_{i,j}^0 = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^l + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (1.3.2)$$

Первое соотношение (1.3.2) обосновано разработанной (Е.Н.Лее, В.И.Левитас, 1986) деформационной теорией, в которой упругие и пластические деформации определяются путем введения промежуточного ненапряженного состояния, получающегося из упруго-пластической конфигурации с помощью процесса чисто упругой разгрузки. Получающаяся в результате конфигурация не является вообще физически непрерывной, но она полезна в том смысле, что дает логическое разделение упругих пластических компонент деформации. Упругая составляющая полной деформации определяется законом Гука (1.15).

Если поверхность текучести регулярна в окрестности точки на этой поверхности, т.е. если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную, то уравнение этой поверхности $f(\sigma_{ij})=0$, где знак функции текучести f (симметричной относительно σ_{ij} и σ_{ji}) выбран так, что в упругой области $f \leq 0$. Теперь скорости пластической деформации определяются законом течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^2 = \lambda \partial f \cdot (\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij}, \quad (1.3.3)$$

где $\lambda = 0$, если $f < 0$, а также если $f = 0$ и $\dot{f} = 0$, если $f = 0$ и $\dot{f} = 0$.

Выражение (1.63) является ассоциированным законом течения Мизеса с функцией текучести $f(\sigma_{ij})$. Из (1.3.3) следует, что функция текучести играет роль потенциала для скоростей пластической деформации, т.е. является пластическим потенциалом. Это означает, что если представить скорости пластической деформации в девятимерном пространстве напряжений, то тензор скоростей пластической деформации (изображаемый вектор в девятимерном пространстве) имеет направление внешней нормали к поверхности текучести.

Для полноты постановки рассматриваемой задачи необходимо к уравнениям (1.2.1), (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), (1.2.4) присоединить условие пластической несжимаемости материала:

$$\dot{\varepsilon}_{ii}^p = \dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p + \dot{\varepsilon}_{33}^p = 0 \quad (1.3.4)$$

Смешанная краевая упругопластическая контактная задача кроме граничных условий (1.2.5) и (1.2.6) должна включать также граничное условие

$$\dot{u}_i = \dot{u} \quad (i=1,2,3) \quad (1.3.5)$$

Согласно [23] при взаимодействии, например, сферических поверхностей, в зависимости от условий контактирования могут иметь место четыре типа краевых задач.

Таким образом, всего имеем 36 неизвестных $(\sigma_{ij}^l, \varepsilon_{ij}^l, \varepsilon_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ii}^p, u_i, \dot{u}_i, F_i)$, которые однозначно определяются из системы 36 уравнений (1.2.1), (1.3.2), (1.2.4), (1.3.3), (1.3.4), (1.3.5).

В общем случае упругопластической контактной задачи граничные условия могут быть представлены в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} n_j / s = p_i; u_i / su = u_{i0} \quad (i=1,2,3) \\ \dot{u}_n^I = \dot{u}_n^{II}; [nj\sigma_{ij}] = 0 \quad (i=1,2,3) \\ \frac{\bar{F}_{TP}^+}{|\bar{F}_{TP}^+|} = - \frac{(\bar{I} - \bar{n}\bar{n})(\dot{u}^+ - \dot{u}^-)}{(\bar{I} - \bar{n}\bar{n})(\dot{u}^+ - \dot{u}^-)} \end{array} \right. \quad (1.3.6)$$

Здесь индексы I и II относят соответствующую величину к первому или второму контактирующим телам, n_j - нормаль к поверхности, квадратные скобки указывают на разрыв соответствующей величины, F_{TP} - сила трения, знак плюс указывает на совпадение направлений силы трения и проскальзывание контактных поверхностей, знак минус - на несовпадение их направлений, черта сверху обозначает вектор, \bar{I} - шаровой тензор второго ранга, $\bar{n}\bar{n}$ - диада.

В частном случае осесимметричных контактных задач последнее граничное условие в системе (1.3.6) обращается в закон Амонтона $\tau_{sn} + \rho\sigma_n = 0$ в меридиальной плоскости .

Таким образом, постановка трехмерной контактной упруго-пластической задачи в замкнутом виде определяется системой уравнений (1.2.1), (1.2.4), (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), (1.3.6).

В соответствии с теорией подобия и анализом размерностей введем в указанную систему уравнений масштабы подобных преобразований согласно линейно-однозначному соответствию сходственных величин в натуре модели $x_n = k_x x_m, \dots, \dot{u}_{in} = k_n \dot{N}_{im} / k_t$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_\sigma \sigma_{ij,j} / k_l + k_p k_g = 0; \\ 2k_\varepsilon \varepsilon_{ij} = k_u (u_{i,j} + u_{j,i}) / k_l; \\ 2k_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{ij} = k_{\dot{u}} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) / k_l; \\ k_\sigma \sigma_{ij} n_j = k_p p_{i0}; \\ k_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{ij} = k_c^l \varepsilon_{ij}^l + k_\varepsilon^p \varepsilon_{ij}^p; \\ k_\sigma \sigma_{ik} = k_\lambda k_\varepsilon^l \lambda \delta_{iR} \varepsilon_{jj}^l + 2k_\nu k_\varepsilon^l \nu \varepsilon_{iR}^l; \\ k_{\varepsilon^p} \varepsilon_{ij}^p = k_f / k_t k_\sigma \lambda \partial f(\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij}; \\ k_{\dot{\varepsilon}_{ii}^p} \dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0; \\ k_{\dot{u}_i} \dot{u}_i = k_{\dot{u}_{i0}} \dot{u}_{i0}; \\ k_{\dot{u}_n^I} \dot{u}_n^I = k_{\dot{u}_n^{II}} \dot{u}_n^{II}; \\ k_\tau \tau_{sn} + k_\rho k_{\sigma_n} \rho \sigma_n = 0. \end{array} \right. \quad (1.3.7)$$

Для реализации подобия в натуре и модели напряженно-деформированного состояния контактирующих упруго-пластических тел необходимо положить равным единице все соотношения масштабов линейно-однозначного соответствиям системе (1.3.7):

$$\begin{aligned} \frac{k_\sigma}{k_g k_l} &= \frac{k_u}{k_\varepsilon k_l} = \frac{k_{\dot{u}}}{k_{\dot{\varepsilon}} k_l} = \frac{k_\sigma}{k_p} = \frac{k_{\dot{\varepsilon}}}{k_{\varepsilon'}} = \frac{k_{\dot{\varepsilon}}}{k_{\varepsilon p}} = \frac{k_\sigma}{k_\lambda k_\varepsilon^l} = \frac{k_\sigma}{k_\nu k_\varepsilon^2} = \frac{k_t k_\sigma k_{\dot{\varepsilon} p}}{k_f} = \\ &= k_{\varepsilon'} = \frac{k_{\dot{u}}}{k_{\dot{u}0}} = \frac{k_{\dot{u}n}^I}{k_{\dot{u}n}^{II}} = \frac{k_\tau}{k_p k_\sigma} = 1. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Согласно π - теореме из N размерных величин, связанных физическим уравнением, можно составить не более $N-K$ независимых безразмерных комплексов и симплексов. В данном случае $N = 16(u_0, u, \dot{u}, x, y, z, \dot{\varepsilon}^c, \dot{\varepsilon}^p, \sigma, p, \lambda, \nu, f, t, \rho, \tau)$, согласно (1.3.7), а $K = 3 (l, p, t)$, следовательно $N-K = 16 - 3 = 13$, что соответствует системе (1.3.8). Число комплексов π равно разности между числом величин с неодинаковыми размерностями $(u, \dot{u}, \dot{\varepsilon}, \sigma, p, \lambda, f, t, \rho)$ $n = 9$ и числом K величин с независимыми размерностями: $\pi = n - k = 9 - 3 = 6$. Этому соответствует система индикаторов подобия (1.3.8). Число симплексов $N - n = 16 - 9 = 7$, что также находится в соответствии с (1.3.8). Так как масштабы безразмерных величин равны единице, как величин нулевой размерности, то в (1.3.8) $k_\varepsilon = 1$ и $k_\mu = 1$. С учетом этого, систему индикаторов подобия (1.3.8) можно упростить:

$$\frac{k_u}{k_l} = \frac{k_{\dot{u}}}{k_{\dot{\varepsilon}} k_l} = \frac{k_\sigma}{k_y k_l} = \frac{k_\sigma}{k_p} = \frac{k_t k_f}{k_\sigma k_{\varepsilon p}} = \frac{k_u}{k_l k_t k_{\varepsilon p}} = \frac{k_{\dot{u}}}{k_{\dot{u}0}} = \frac{k_{\dot{u}n}^I}{k_{\dot{u}n}^{II}} = \frac{k_i}{k_p k_\sigma} = 1. \quad (1.3.9)$$

Последний индикатор подобия в (1.3.9) показывает, что значения коэффициентов трения в натуре и модели должны совпадать:

$$k_p = \frac{\rho_n}{\rho_m} = 1, \text{ т.е. } \rho_n = \rho_m.$$

Из системы соотношений (1.3.9) путем замены масштабов подобия отношениями входящих в них величин для природы и модели, получим следующие критерии подобия:

$$\begin{aligned}
 1. (u/l)_n &= (u/l)_m = idem; & 6. (u/l t \dot{\varepsilon}^p)_n &= (u/l t \dot{\varepsilon}^p)_m = idem; \\
 2. (\dot{u}/l \dot{\varepsilon})_n &= (\dot{u}/l \dot{\varepsilon})_m = idem; & 7. (u/\dot{u}_0)_n &= (u/\dot{u}_0)_m = idem; \\
 3. (\sigma/jl)_n &= (\sigma/jl)_m = idem; & 8. (\dot{u}_n^I/\dot{u}_n^{II})_n &= (\dot{u}_n^I/\dot{u}_n^{II})_m = idem; \\
 4. (\sigma/p)_n &= (\sigma/p)_m = idem; & 9. (\tau/\sigma)_n &= (\tau/\sigma)_m = idem. \\
 5. (t \sigma \dot{\varepsilon}^l/f)_n &= (t \sigma \dot{\varepsilon}^l/f)_m = idem; & &
 \end{aligned}
 \tag{1.3.10}$$

Из последнего критерия подобия система (1.3.10), в частности, следует, что нормальные и касательные напряжения должны моделироваться в одном масштабе.

Задаваясь масштабом геометрического подобия $k_l = l_n/l_m$ из первого критерия подобия системы (1.3.10) следует, что $k_u = k_l$, т.е. при моделировании должны соблюдаться равенство масштабов геометрического подобия и перемещений, откуда вытекает зависимость:

$$(u_i)_n = k_l (u_i)_m, (i=1,2,3)$$

для пересчета величин перемещений с модели на природу. Из седьмого критерия подобия, входящего в систему (1.3.10), задаваясь начальной величиной скорости смещения \dot{u}_0 определим масштаб $\dot{u}: k_{\dot{u}} = k_{\dot{u}0}$, т.е. $\dot{u}_n = k_{\dot{u}0} \dot{u}_m$. Зная масштаб $k_{\dot{u}}$, из второго критерия подобия системы (3.59) подлежит однозначному определению масштаб скорости деформации $k_{\dot{\varepsilon}} = k_{\dot{u}}/k_l$, откуда следует формула пересчета скоростей деформаций с модели на природу

$$\dot{\varepsilon}_n = (k_{\dot{u}}/k_l) \dot{\varepsilon}_m$$

Третий критерий подобия системы (1.3.10) однозначно определяет идентичность величин напряжений в натуре и модели, обусловленных действием собственного веса моделируемых тел

$$\sigma_n = [(jl)_n / (jl)_m] \sigma_m$$

Заданием масштаба силового подобия k_p , из четвертого критерия подобия, входящего в систему (1.3.10), однозначно определяется масштаб соответствующих напряжений

$$\sigma_n = (k_p / k_l^2) \sigma_m = \frac{p_n l_m \sigma_0^{1-0}}{p_m l_n d} n \quad (1.3.11)$$

для объемных задач и

$$\sigma_n = (k_p / k_l k_d) \sigma_m = \frac{p_n l_m d_n \sigma_0^{1-0}}{p_m l_n d_m d} n \quad (1.3.12)$$

для плоских задач. В формулах (1.3.11) и (1.3.12) обозначено: d - толщина модели, n - порядок интерференционной полосы, σ_0^{1-0} - цена полосы модели по напряжениям, величина которой определяется из тарифовочных испытаний.

Из шестого критерия подобия в (1.3.10), зная масштаб k_u, k_l и задаваясь временным масштабом k_t , можно однозначно определить масштаб скоростей, пластической деформации

$$\varepsilon_n^p = (k_u / k_l k_t) \varepsilon_m^p,$$

а зная масштабы подобия $k_{\varepsilon^p}, k_t, k_\sigma$ из пятого критерия в (1.3.10) следует однозначное определение масштаба функций текучести $f(\sigma_{ij}) = k_\sigma k_{\varepsilon^p} k_t$, откуда следует, что

$$f_n(\sigma_{ij}) = k_\sigma k_{\varepsilon^p} k_t f_m(\sigma_{ij}).$$

С учетом зависимости (1.3.11) можно связать масштаб функций текучести с масштабом силового подобия:

$$k_f = k_p k_{\varepsilon^p} k_t / k_l^2$$

или выразить напряжения σ_{ij} через масштабы подобия:

$$(\sigma_{ij})_n = [k_f / k_{\varepsilon^p} k_t] (\sigma_{ij})_m.$$

Из инвариантного преобразования закона Гука следует, что $k_\varepsilon k_E = k_\sigma k_{(1-\mu)}$ или $k_{(1-\mu)} / k_E = k_\varepsilon k_l^2 / k_p$, а из линейного соотношения между касательным напряжением и относительным сдвигом $\tau_{xy} = \sigma_{xy}^y$ имеем

$$k_\tau = \frac{k_E k_u}{k_{(1+\mu)} k_l} = k_\sigma. \quad (1.3.14)$$

Согласно последнему индикатору подобия в системе (1.3.14). В соответствии с выражением $k_\varepsilon = k_\sigma / k_E$; из соотношения (1.2.4) имеем

$$k_\varepsilon = k_u / k_l k_{(1+\mu)} \quad (1.3.15)$$

Подстановка значения k_ε из (1.75) в зависимость (1.73) дает

$$\frac{k_{(1-\mu^2)}}{k_\varepsilon} = \frac{k_u k_l}{k_p}. \quad (1.3.16)$$

Так как $k_t = k_u / k_{\dot{u}}$, то девятый индикатор подобия системы (1.3.9) можно представить в виде

$$k_u k_\sigma k_{\varepsilon^p} / k_{\dot{u}} k_f = 1.$$

Откуда масштаб перемещений равен:

$$k_u = k_{\dot{u}} k_f / k_\sigma k_{\varepsilon^p}.$$

Подстановка этого выражения в соотношение (1.3.16) дает зависимость между масштабами подобия

$$\frac{k_l k_u k_f}{k_p k_\sigma k_{\varepsilon^p}} = \frac{k_{(1-\mu^2)}}{k_E} \quad (1.3.17)$$

для моделирования рассматриваемого класса упругопластических контактных задач.

Обозначив правую часть зависимости (1.3.17) через k_n / k_m для случая контакта двух (1 и 2) сферических поверхностей, ее можно представить в виде суммы $k_n = (k_1 + k_2)_n$ и $k_m = (k_1 + k_2)_m$

$$\frac{k_{(1-\mu^2)}}{k_E} = \frac{(k_1 + k_2)_n}{(k_1 + k_2)_m}, \quad (1.3.18)$$

где $(k_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1}, k_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2})$ из тех соображений, что, ввиду деформации

обеих сфер, интегральное уравнение деформации их контактной поверхности

$$R_1 \iint \sigma_r d\varphi ds = u_{z0} - r^2 / 2R_1 \quad (1.3.19)$$

инвариантно относительно замены R_1 на $k = k_1 + k_2$ в (1.3.19) обозначено $R_1 = (1 - \mu^2) / \pi E; r = l/2$ - половина характерного размера области контакта, R_1 - радиус верхней вдавливающей сферы, φ и S - угловая и радиальная координаты, соответственно, σ_r - контактное давление, u_{z0} - вертикальное перемещение сферы в центре касания. С учетом соотношения (1.3.18) зависимость (1.3.19) представляется в окончательной форме

$$\left[\frac{k_l k_{\dot{u}} k_f}{k_p k_{\sigma} k_{\dot{\varepsilon}^p}} \right]_1 \cdot \left[\frac{k_p k_{\sigma} k_{\dot{\varepsilon}^p}}{k_l k_{\dot{u}} k_f} \right]_2 = \frac{(k_1 + k_2)_H}{(k_1 + k_2)_M}, \quad (1.3.20)$$

где, как и прежде $k_j = (1 - \mu_j^2) / E_j, j = 1, 2)$ или в развернутом виде, путем замены масштабов подобия отношениями соответствующих величин в натуре и модели [15]

$$\left\{ \left[\frac{l_{\dot{u}} f(\sigma_{ij})}{p \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \right]_H \cdot \left[\frac{p \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{l_{\dot{u}} f(\sigma_{ij})} \right]_M \right\}_1 \cdot \left\{ \left[\frac{p \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{l_{\dot{u}} f(\sigma_{ij})} \right]_H \cdot \left[\frac{l_{\dot{u}} f(\sigma_{ij})}{p \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \right]_M \right\}_2 = \frac{(k_1 + k_2)_H}{(k_1 + k_2)_M}.$$

Зависимость (1.3.20) в представленной форме иллюстрирует взаимосвязь характеристик физико-механических свойств материалов контактирующих тел с параметрами напряженно-деформированного состояния.

В рассматриваемой контактной задаче пластическая область образуется на контактной поверхности в более пластической сфере, т.е. с меньшим пределом текучести σ_s , вблизи номинальной концентрации контактных напряжений.

Решения неодномерных контактных упругопластических задач сопряжены со значительными математическими трудностями, связанными не только с нелинейностью уравнений теории пластичности в пластических зонах, но, прежде всего, с тем, что форма и размеры пластической области и области контакта неизвестны заранее и подлежат определению. Эти трудности преодолимы при использовании методов физического моделирования и поляризационно-оптических методов измерения напряжений. Однако их применение для практического моделирования упругопластических контактных задач сдерживалось отсутствием формул подобия и условий моделирования этого нелинейного класса задач механики деформируемого твердого тела. Разработки этих вопросов, изложенные здесь, открывают принципиальные возможности экспериментальных исследований упругопластических контактных задач.

1.4 Математическое моделирование вязкоупругих краевых задач

При физическом моделировании контактирующих деталей, изготовленных из полимерных материалов, с использованием интерференционно-поляризационных методов измерения оптической информации обычно для изготовления моделей применяются высокополимерные оптически чувствительные материалы в стеклообразном состоянии [17]. Подобные материалы в зависимости от режима нагружения и температуры в той или иной степени проявляют вязкоупругие свойства. Поэтому механика материалов описывается теориями линейной или нелинейной вязкоупругости [12, 17], а при исследовании моделей из этих материалов поляризационно-оптическим методом - теорией фотовязкоупругости [7, 15].

Для получения условий моделирования и критериев подобия запишем систему уравнений, формирующих математическую постановку краевой линейной вязкоупругости контактной задачи. Эта система уравнений состоит из:

уравнения равновесия (1.2.1), соотношений Коши (1.2.2), условий совместности деформаций (1.2.3), граничных условий (1.2.7) и соотношений линейной вязкоупругости между компонентами тензоров напряжения и деформации (1.4.1) и (1.4.2).

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & (k_0 - 2G/3)\theta + 2G\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \int_0^t \left[\Gamma_1(t-\tau) \frac{1}{3} \Gamma(t-\tau) \right] dr - \\ & - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) dr. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Обратные выражения деформации через напряжения, имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \left(\frac{1}{3k_0} - \frac{2}{G} \right) \sigma \delta_{ij} + \frac{1}{2G} G_{ij} + \varepsilon + \\ & \delta_{ij} \int_0^t \left[\frac{1}{3} k_1(t-\tau) - k(t-\tau) \right] \sigma(\tau) d\tau + \int_0^t k_0(t-\tau) \sigma_{ij} d\tau \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Соотношения между компонентами тензоров деформаций и напряжения в изотропном вязкоупругом теле для плоского напряженного состояния следует из (1.4.2) в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(t) = & \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x(t) + \int_0^t k_1(t-\tau) \sigma_x(\tau) d\tau - \mu \left[\sigma_y(t) - \int_0^t k_2(t-\tau) \sigma_y(\tau) d\tau \right] \right\}; \\ \varepsilon_y(t) = & \frac{1}{E} \left\{ \sigma_y(t) + \int_0^t k_1(t-\tau) \sigma_y(\tau) d\tau - \mu \left[\sigma_x(t) - \int_0^t k_2(t-\tau) \sigma_x(\tau) d\tau \right] \right\}; \\ \varepsilon_{xy}(t) = & \frac{1}{2} \nu \left[\tau_{xy}(t) + \int_0^t k(t-\tau) \tau_{xy}(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

где

$$k(t) = \frac{1}{1} + \mu k_1(t) + \frac{\mu}{1 + \mu} k_2(t), t_0 \leq \tau \leq t. \quad (1.4.4)$$

Согласно [7] в основные типы граничных условий входит величина

$$\beta = (1 - 2\mu)/2(1 - \mu). \quad (1.4.5)$$

Введем в систему уравнений (1.2.1), (1.2.2), (1.2.7), (1.4.1) соответствующие масштабы подобия:

$$\begin{aligned} k_{\sigma ij, j} / k_1 + k_p k_F \rho F_i &= 0, \\ 2k_\varepsilon \varepsilon_{ij} &= k_u (u_{ij} + u_{ji}) / k_l, \\ k_{\sigma ij} &= k_{k_0} k_o k_\theta - \frac{2}{3} k_g k_\theta G \theta + 2k_e k_G G E_{ij} - k_{\Gamma_1} k_\theta k_r \sigma_{ij} \int_0^t \Gamma_1(t - \tau) \theta(\tau) d\tau - \\ &- \frac{1}{3} k_\Gamma k_\theta k_r \int_0^t \Gamma(t - \tau) \theta(t) d\tau - k_\Gamma k_\varepsilon k_\tau \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau, \\ k_\sigma \alpha_{im}^{(x)} n_j \sigma_{mj} + k_u k_e k_l^{-1} \beta_{im} u_m E_x / l &= k_p P_i^{(x)}. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Для того, чтобы система уравнений (1.4.6) была идентична для природы и модели очевидно необходимо положить равными единице все множители в виде масштабов подобия. При этом из (1.4.6) следует система индикаторов подобия:

$$\begin{aligned} k_\sigma / k_p k_l k_F &= 1; k_\varepsilon k_l / k_u = 1; k_{k_0} k_\varepsilon / k_\sigma = 1; k_\sigma k_\varepsilon / k_\sigma = 1; \\ k_{r_1} k_\delta k_\tau / k_\sigma &= 1; k_r k_\varepsilon k_\tau / k_\sigma = 1; k_u k_E / k_\sigma k_j^2 = 1; \\ k_p / k_\sigma k_l^2 &= 1; k_E k_u k_l / k_p = 1. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Согласно π - теореме анализа размерностей (1.2.24), из N размерных величин $(k_0, l, \sigma, G, E, \Gamma, \tau, \rho, F, u, p)$, связанных физическим уравнением, можно составить не более $N-R$ независимых безразмерных комплексов и симплексов. В

данном случае $N = 12$, $K = 3$ (p, l, τ) т.е. $N - R = 12 - 3 = 9$, что соответствует системе (1.4.7).

Индикаторы подобия, следующие из уравнений (1.4.7), тождественны индикаторам подобия, полученным из соотношений Коши (1.2.2). Система выражений (1.4.7) получена с учетом условия, что $k_0 = k_\varepsilon$, т.е. масштаб относительного изменения объема равен масштабу относительных деформаций, который равен единице, как имеющий нулевую размерность, т.е. как безразмерной величины. Масштаб подобия для коэффициента Пуассона по той же причине равен единице $k_\mu = 1$, т.е. $\mu_n = \mu_m$ что следует также из сравнительного анализа третьего и четвертого индикатора подобия системы (1.4.7). Пятый и шестой индикаторы подобия из (1.4.7) обуславливают равенство масштабов для соответствующих ядер $k_{\Gamma_1} = k_\Gamma$, т.е. ядра объемной $\Gamma_1(t)$ и сдвиговой $\Gamma(t)$ релаксации должны моделироваться в одном масштабе подобия. Отсюда следует, что $(\Gamma_1/\Gamma)_n = (\Gamma_1/\Gamma)_m$.

Совместное рассмотрение третьего и четвертого индикаторов подобия из системы (1.4.7) показывает необходимость равенства масштабов объемной сжимаемости и модуля сдвига $k_\theta = k_\sigma$, то есть $(k_\theta/G)_n = (k_\theta/G)_m$, что в свою очередь, обуславливает равенство в натуре и модели коэффициентов Пуассона. Система (1.4.7), с учетом указанных упрощений, позволяет получить следующие критерии подобия для моделирования на их основе контактных задач линейной вязкоупругости:

$$\begin{aligned}
 1. (\sigma/l_p F)_n &= (\sigma/l_p F)_m = idem; & 6. (\varepsilon l/u)_n &= (\varepsilon l/u)_m = idem; \\
 2. (k_0 \varepsilon/\sigma)_n &= (k_0 \varepsilon/\sigma)_m = idem; & 7. (GE/\sigma)_n &= (GE/\sigma)_m = idem; \\
 3. (\Gamma_1 \varepsilon \tau/\sigma)_n &= (\Gamma_1 \varepsilon \tau/\sigma)_m = idem; & 8. (\Gamma \varepsilon \tau/\sigma)_n &= (\Gamma \varepsilon \tau/\sigma)_m = idem; \\
 4. (uE/\sigma l)_n &= (uE/\sigma l)_m = idem; & 9. (p/\sigma l^2)_n &= (p/\sigma l^2)_m = idem. \\
 5. (Eul/p)_n &= (Eul/p)_m = idem; & &
 \end{aligned}
 \tag{1.4.8}$$

Выбрав оптически чувствительный материал [7, 24] для модели и задаваясь масштабами геометрического $k_l = l_n / l_m$ и силового $k_l = p_n / p_m$ подобия можно из последнего критерия подобия системы (1.4.8) однозначно определить масштаб напряжений k_σ и получить формулу перерасчета напряжений с модели на натуру

$$\sigma_n = \sigma_m (p_n \cdot l_m^2) / (p_m l_n^2), \quad (1.4.9)$$

а из первого критерия подобия можно однозначно определить масштаб объемных сил k_F . Пятый и шестой критерии подобия в (1.4.8) однозначно определяют масштабы перемещений k_u и модуля Юнга k_E . Затем второй критерий определяет масштаб объемной сжимаемости k_{k_0} , а седьмой - масштаб модуля сдвига k_G . Из третьего и восьмого критериев подобия однозначно определяются масштабы ядер релаксации $k_{\Gamma_1} = k_\Gamma$ и времени k_τ .

Анализ системы критериев подобия (1.4.8) показывает, что вязкоупругие свойства материала, при моделировании контактных задач, отражают лишь два критерия - третий и восьмой, посредством входящих в них в общем виде ядер объемной $\Gamma_1(t)$ и сдвиговой $\Gamma(t)$ релаксации. Остальные семь критериев подобия в (1.4.8) соответствуют условиям моделирования контактных задач теории упругости.

Из обозначения (1.4.5) и выражения для модуля объемного $k_0 = E/3(1 - 2\mu)$ имеем

$$\sigma \beta k_0 = E / (1 - \mu) \quad (1.4.10)$$

Зависимость (1.4.10), записанная через масштабы подобия принимает вид

$$k_\sigma k_\beta k_{k_0} = k_E / k(1 - \mu), \quad (1.4.11)$$

где $k_\beta = 1$, как масштаб безразмерной величины, т.е. $k_\mu = 1$ и $\mu_n = \mu_m$.

В соответствии с зависимостью (1.4.11) при обозначении ядер $k(t) = \Gamma(t)$ и $k_1(t) = \Gamma_1(t)$, получим соотношение между масштабами подобия

$$k_\Gamma = k_{\Gamma_1} / k(1 + \mu). \quad (1.4.12)$$

Из третьего и пятого индикаторов подобия системы (1.4.8) имеем:

$$k_{\Gamma_1} k_l k_\tau / k_\sigma = k_{k_0} k_\varepsilon / k_\sigma, \quad (1.4.13)$$

откуда, с учетом (1.4.12) и (1.4.13) получаем

$$1/k_\tau = k(1 - \mu^2) k_\Gamma / k_\varepsilon, \quad (1.4.14)$$

Но так, как согласно пятому индикатору подобия системы (1.4.8) $k_\tau = k_\sigma / k_\varepsilon k_{\Gamma_1} = k_\Gamma / k_l^2 k_u k_{\Gamma_1}$, (при $k_u = k_l$), то внося это значение k_τ в соотношение (1.4.14) окончательно получаем выражение для условия подобия при моделировании контактной поверхности при взаимодействии вязкоупругих тел

$$\frac{k_\Gamma k(1 - \mu^2)}{k_{\Gamma_1} k_E} = \frac{k_l k_u}{k_p} = \frac{k_l k_s k_b}{k_p k_R}, \quad (1.4.15)$$

где $k_s = k_u$, а $k_b = k_R$, S - величина сближения контактирующих тел, b - размер зоны контакта, R - кривизна (радиус) поверхности контакта.

Зависимость (1.4.15) связывает вязкоупругие свойства тел (левая) часть этого равенства с силовым и геометрическим параметрами задачи.

При контакте двух тел зависимость (1.4.15) принимает вид:

$$\frac{(\Gamma/\Gamma_1)_n}{(\Gamma_1/\Gamma)_m} \cdot \frac{k_n}{k_m} = \frac{k_l k_u}{k_p}. \quad (1.4.16)$$

Если $k_n = (k_1 + k_2)_n, k_m = (k_1 + k_2)_m, \Gamma_n = (\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)})_n,$
 $\Gamma_m = (\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)})_m, (\Gamma_1)_n = (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)})_n, (\Gamma_1)_m = (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)})_m,$ то

зависимость (1.4.15) принимает вид:

$$\left[\frac{\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}}{\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}} \right]_n \cdot \left[\frac{\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}}{\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}} \right]_m \frac{(k_1 + k_2)_n}{(k_1 + k_2)_m} = \frac{k_l k_u}{k_p} \equiv \frac{k_l k_s k_b}{k_p k_R}, \quad (1.4.17)$$

где $k_j = (1 - \mu_j^2)/E_j (j=1,2), \Gamma^{(1,2)}, \Gamma_1^{(1,2)}$ – ядра сдвиговой и объемной релаксации, соответственно, P - прижимающая нагрузка, $k_p = p_n / p_m$ - масштаб силового подобия, индексы 1 и 2 относят рассматриваемые величины к первому и второму телам, соответственно, находящимся в контакте.

Согласно анализу размерностей, масштаб контактного давления равен $k_p = k_\sigma = k_p / k_l k_b$, с учетом этого соотношения, выражение в правой части равенства (1.4.15) можно представить в виде, удобном для моделирования контактных напряжений

$$k_l k_s k_b / k_p k_R = k_s / k_R k_\sigma. \quad (1.4.18)$$

Правая часть выражения (1.4.18) получена при равенстве линейных масштабов подобия $k_l = k_u = k_R = k_s$, т.е. величины одинаковой размерности моделируются в одном и том же масштабе, что находится в соответствии с требованием теории размерностей [23, 26].

Возможность перехода от (1.4.17) к (1.4.18) путем использования равенства $k = k_1 + k_2$ вытекает из тех соображений, что ввиду деформации обоих

контактирующих тел соблюдается инвариантность интегрального уравнения контактной задачи относительно k и $(k_1 + k_2)$.

В развернутом виде, путем замены масштабов подобия отношениями соответствующих величин в натуре и модели, выражение (1.4.17) преобразуется следующим образом:

$$\left[\frac{\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}}{\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}} \right] \cdot \left[\frac{\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}}{\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}} \right] \left[\frac{\left[(1 - \mu_1^2) / E_1 + (1 - \mu_2^2) / E_1 \right]_H}{\left[(1 - \mu_1^2) / E_1 + (1 - \mu_2^2) / E_1 \right]_M} \right] = \frac{(IS_b / pR)_H}{(IS_b / pR)_M}. \quad (1.4.19)$$

Результаты теоретических расчетов, для известной задачи о вдавливании штампа, жестко связанного с изотропной вязкоупругой полуплоскостью, полученные в соответствии с зависимостью

$$p(t,0)_{t \rightarrow \infty} = \frac{p_0 (b+d)}{\pi l d \sqrt{b/d}} = \frac{p_0}{\pi l} \cdot \frac{b/d + 1}{(b/d)} \quad (1.4.20)$$

адекватны измеренным методом фотовязкоупругости величинам давлений на основе использования для моделирования системы критериев подобия (1.4.8) и условия (1.4.19). В теоретическом решении (1.4.20) параметр $b/d = f(\xi, \mu, R_1, R_2)$ характеризует вязкоупругие свойства материала. Зависимость (1.4.20) для контактного давления $p(t,0)$, представленная через индикатор подобия, подтверждает структуру зависимости (1.4.15), т.е. условие моделирования частной контактной задачи о давлении штампа на вязко-упругую полуплоскость, совпадает с обобщенным условием моделирования краевой контактной вязкоупругой задачи. Для ряда других вязкоупругих задач [14, 16] также получена достаточно хорошая сходимость теоретических и экспериментальных результатов, что свидетельствует о правомерности использования зависимости (1.4.15) при моделировании вязкоупругих контактных задач с различными краевыми условиями.

При совпадении в натуре и модели ядер сдвиговой и объемной релаксации, т.е. когда два первых сомножителя в (1.4.15) или (1.4.16) равны единице, эти зависимости соответствуют условию подобия для моделирования упругих контактных задач.

2 Расчетное сопровождение процесса проектирования кузова для обеспечения требований по прочности и жесткости

2.1 Синтез требований к прочности и жесткости автомобильного кузова

Кузов легкового автомобиля является с одной стороны самой важной частью автомобиля, поскольку позволяет реализовать прямое назначение – перевозка пассажиров и грузов. С другой стороны это корпус, в котором размещаются вышеупомянутые пассажиры и груз, и, что важно, устанавливаются все узлы, устройства, агрегаты и механизмы которые обеспечивают выполнение функций перевозки. К кузову, как сложному многофункциональному устройству, предъявляется целый комплекс требований, которые можно разделить условно на три группы:

а). требования по обеспечению функциональности – внешние и внутренние габаритные размеры, внутренняя и внешняя аэродинамика, удобства размещения пассажиров и груза, обзорность, размещение органов управления, узлов и агрегатов, а так же другие компоновочные требования связанные с геометрией кузова;

б). требования по технологичности - разузловка конструкции, детализовка, собираемость, штампуемость, доступность инструмента, проливаемость полостей, потопляемость каркаса, зоны коррозионной защиты, зоны базирования, зоны технологических подвесок и фиксаций кузова, другие технологические требования;

в). требования по несущей способности - жесткость, прочность (включая усталостную прочность и долговечность), пассивная безопасность, собственные частоты и формы колебаний, виброакустика.

Требуется разработать кузов, удовлетворяющий всем этим требованиям при условии минимизации массы и достижения необходимого уровня долговечности и надежности.

В имеющейся литературе много уделяется внимания по анализу требований по первому пункту, несколько меньше по второму и практически очень мало по

третьему – хотя литературы по вопросам несущей способности и видам прочности в общем машиностроении, более чем достаточно.

Обобщая накопленный опыт на ВАЗе по разработке конструкций цельнометаллических несущих кузовов легковых автомобилей, далее будет приведен перечень и дан анализ требований по несущей способности кузова. Не все требования на сегодня имеют формализованное “узаконенное” численное значение, ряд критериев пока не определены и носят порой субъективный характер, это относится, в первую очередь, к элементам кузова, которые влияют на такие факторы как управляемость, вибронагруженность и безопасность автомобиля.

Следует заметить, что обратное влияние – т.е. изменение конструкции кузова по несущей способности, приводящее к изменению структуры автомобиля, как правило, не приветствуется и касается, пожалуй, только вопросов пассивной безопасности. Это очевидно – поскольку ни кому не нужен безопасный автомобиль с прочным, надежным кузовом в котором нельзя будет передвигаться, и размещаться с удобствами и комфортом. Отсюда еще более возрастает необходимость выполнения требований по жесткости и прочности кузова на ранней стадии проектирования. При этом сами требования должны быть обоснованными, базироваться на статистически достоверной информации. Следует помнить, что завышенные требования приводят к удорожанию конструкции на стадии разработки, а заниженные, увеличивают стадию доводки конструкции, постановку на производство и в эксплуатации (гарантийный период).

Приводимые требования по несущей способности можно разделить на две группы, без относительно того к чему они относятся – эксплуатационная прочность и жесткость в нормальных условиях или прочность и жесткость в экстремальных, аварийных ситуациях:

- общие требования к кузову, влияющие на работоспособность и поведение автомобиля в целом;

- требования к локальным зонам, обеспечивающие функционирование отдельных узлов, агрегатов, механизмов и систем.

Пример основных требований, определяющих конструкцию кузова при нормальных условиях эксплуатации, приведен в таблице 2.1.1.

Таблица 2.1.1 – Основные требования по несущей способности кузова

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
1	Статическая жесткость кузова при кручении. Минимальное значение жесткости кузова для автомобилей: - до 2000 года - после 2000 года - остаточная деформация	5500 Н м/° 7500 Н м/° ≤ 0.2 мм	
2	Статическая жесткость кузова при изгибе. - отношение абсолютного прогиба порога при максимальной нагрузке к базе автомобиля должно составлять: - величина жесткости кузова при изгибе: - остаточная деформация:	0.3±0.5 мм/м ≤ 10000Н/мм. ≤ 0.2 мм	
3	Величины деформации оконных и дверных проемов кузова при статическом		

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	изгибе и кручении кузова: - проем ветрового окна: - проем боковой двери: - проем заднего окна: - проем двери задка: - остаточная деформация:	≤ 3.5 мм ≤ 2.5 мм ≤ 3.5 мм ≤ 5.0 мм ≤ 0.2 мм	
4	Жесткость кузова при кручении автомобиля в сборе. Минимальная жесткость (все крышки и двери открыты, откинута спинка заднего сидения для двухобъемных кузовов или без жесткой задней перегородки): до 2000 года после 2000 года Падение жесткости после пробеговых ресурсных испытаний:	5500 Н м/° 8500 Н м/° $\leq 10\%$	
5	Требования по жесткости к зонам крепления рулевой колонки на кузове легкового автомобиля. - упругая деформация для кронштейна крепления рулевой колонки:	≤ 2.5 мм ≤ 10 мм	

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	- для рулевого вала в плоскости рулевого колеса: - остаточная деформация:	≤ 0.2 мм	
6	Жесткость зон крепления системы рычагов и педалей на кузове. - упругая деформация зон крепления системы рычагов и педалей: - остаточная деформация:	≤ 2.5 мм ≤ 0.1 мм	Прикладываемые нагрузки: 1500 Н для педали ножного тормоза; 300 Н для педали сцепления; 300 Н для педали акселератора; 750 Н для рычага ручного тормоза; 500 Н для рычага переключения передач.
7	Жесткость переднего пола. - упругая деформация: - остаточная деформация:	≤ 2.5 мм ≤ 0.1 мм	Распределенный балласт массой 87.5 кг. в зоне ног водителя и пассажиров
8	Жесткость пола багажника. - упругая деформация: - остаточная деформация:	≤ 2.5 мм ≤ 0.1 мм	Пол багажника нагружается балластом до 105 кг
9	Жесткость крыши, капота и крышки багажника при имитации снеговой		Давление 100 мм водяного столба

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	нагрузки. - потеря устойчивости панелей, расфланцовка соединений, отслаивание приклеенных усилителей: - остаточная деформация:	не допускается 0.3 мм	
10	Жесткость крышки багажника (двери задка) и капота при кручении. - жёсткость капота на кручение: - остаточная деформация: - жёсткость на кручение крышки багажника (двери задка): - остаточная деформация:	$> 30 \text{ Н}\times\text{м}/^\circ$ $\leq 30 \text{ мм}$ $> 60 \text{ Н}\times\text{м}/^\circ$ $\leq 10 \text{ мм}$	крутящий момент 240 Н×м
11	Жесткость боковых дверей при кручении - остаточная деформация: - упругая деформация:	$\leq 0.1 \text{ мм}$ $\leq 12 \text{ мм}$	Нагрузка 400 Н
12	Жесткость дверей в зоне крепления ручки панели: - упругая деформация: - остаточная деформация: - потеря устойчивости наружной панели:	$\leq 5 \text{ мм}$ не допускается не допускается	Нагрузка 500 Н

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
13	<p>Жесткость крышки люка наливной горловины топливного бака</p> <p>-остаточная деформация при провисании:</p> <p>-остаточная деформация при кручении:</p> <p>-остаточная деформация при выворачивании:</p>	<p>≤ 0.2 мм</p> <p>≤ 0.2 мм</p> <p>≤ 5 мм</p>	<p>При провисании сила 100Н.</p> <p>При кручении, сила 100Н.</p> <p>При вывора- чивании, 50Н.</p>
14	<p>Жесткость боковых дверей и распашной двери задка автомобиля при провисании:</p> <p>а) - упругая деформация двери:</p> <p>- остаточная деформация двери после первого нагружения:</p> <p>- остаточная деформация двери после второго нагружения:</p> <p>б) - упругая деформация неподвижного звена петли:</p> <p>- остаточная деформация неподвижного звена петли после первого нагружения:</p> <p>- остаточная деформация неподвижного звена петли после второго нагружения:</p>	<p>≤ 12 мм</p> <p>≤ 1.5 мм</p> <p>≤ 0.1 мм</p> <p>≤ 0.75 мм</p> <p>≤ 0.2 мм</p> <p>≤ 0.1 мм</p> <p>≤ 0.5 мм</p>	<p>При провисании двери сила 1000Н.</p>

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	<p>в) - упругая деформация стоек кузова (зона крепления неподвижного звена):</p> <p>- остаточная деформация стоек кузова после первого нагружения:</p> <p>- остаточная деформация после второго нагружения:</p>	<p>≤ 0.3 мм</p> <p>≤ 0.1 мм</p>	
15	<p>Жесткость и прочность буксировочных проушин и зон их крепления</p> <p>- упругие деформации:</p> <p>- остаточные деформации:</p> <p>- по директиве 77/389:</p>	<p>≤ 10 мм</p> <p>≤ 5 мм</p> <p>субъективная оценка</p>	<p>Нагрузки:</p> <p>тяги – $0,8M_{п}$</p> <p>тяги – $0,5M_{п}$ (по директиве).</p> <p>давления - $0,5M_{п}$</p> <p>где $M_{п}$ - полная масса автомобиля, в кг.</p>
16	<p>Жесткость зон крепления багажника крыши</p> <p>- упругие деформации деталей кузова:</p> <p>- остаточные деформации деталей кузова:</p> <p>- повреждение лакокрасочного покрытия и видимые деформации зон крепления:</p>	<p>≤ 1.0 мм</p> <p>≤ 0.1 мм</p> <p>не допускаются</p>	<p>Нагрузка в виде балласта массой 52.5 кг и 105 кг,</p>
17	<p>Удобство монтажа и надежность крепления сцепного приспособления (тягово-сцепного</p>		<p>Тягово-сцепное устройство должно крепиться за точки,</p>

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	<p>устройства) автомобиля</p> <ul style="list-style-type: none"> - расстояние от бампера до центра шарового пальца: - контакты с бампером, системой выпуска и др. элементами: <p>При монтаже тягово-сцепного устройства:</p> <ul style="list-style-type: none"> - дополнительные сварочные работы: - резка и удаления каких-либо деталей каркаса кузова: - повреждение антикоррозионного или лакокрасочного покрытия: - деформация кузова в точках крепления тягово-сцепного устройства: 	<p>≥ 65 мм</p> <p>не допускается</p> <p>не допускается</p> <p>не допускается</p> <p>не допускается</p> <p>не допускается</p>	<p>предусмотренные конструкцией кузова.</p>
18	<p>Оценка состояния каркаса и навесных узлов кузова по жесткости, прочности и долговечности при проведении пробеговых испытаний автомобиля ⁽¹⁾</p>	<p>Недопустимо появление во время испытаний и по их завершению:</p> <ul style="list-style-type: none"> - трещин на лицевых поверхностях, дефектов, ухудшающих внешний вид; - значительных упругих и видимых деформаций; - трещин в местах установки и крепления узлов и агрегатов. 	<p>Общексплуатационный пробег или форсированный полигонный, величина пробега определяется в ТЗ или ТУ на автомобиль.</p>

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
		<p>По завершении пробеговых испытаний допускается появление трещин размером не более 15 мм на внутренних панелях, деталях пола, поперечинах, щитке передка и т.д., не приводящих к снижению эксплуатационных свойств и не влияющих на безопасность.</p>	
19	<p>Усталостная прочность боковых дверей и распашной двери задка при провисании</p> <ul style="list-style-type: none"> - после испытаний: - провисание двери: 	<p>не допускаются появление трещин ≤ 1 мм</p>	<p>Частота симметричной вертикальной знакопеременной нагрузки ≤ 5 Гц. Продолжительность - 500000 циклов Нагрузка определяется по массе двери в</p>

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
			сборе с коэффициентом перегрузки $K = 3$
20	<p>Долговечность при циклическом открывании-закрывании навесных узлов кузова автомобиля (дверей, капота, крышки багажника и крышки люка наливной горловины)</p> <p>- по окончании испытаний:</p>	<p>Не допускается повреждений (трещин, заломов, сколов краски), изменений зазоров на объекте испытаний и сопрягаемых деталях.</p>	<p>Продолжительность испытаний, в циклах:</p> <p>Боковые двери - 100 000;</p> <p>Крышка багажника, дверь задка - 50 000;</p> <p>Капот - 20 000;</p> <p>Крышка люка наливной горловины - 10 000</p>
21	<p>Усталостная прочность каркаса кузова при циклическом нагружении</p> <p>- разрушение коробчатых балок силовой схемы кузова более чем на:</p> <p>- разрушение и появление трещин по лицевым панелям:</p> <p>- выпадание или растрескивание</p>	<p>≤ 30 % периметра</p> <p>не допускается</p> <p>не допускается</p>	<p>Статический момент $M_{ст}$ закрутки кузова определяется при массе полной нагрузки на автомобиль.</p> <p>Циклические испытания проводятся</p>

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	стекол: Падение жесткости кузова: - для кузовов автомобилей классической компоновки: - для кузовов автомобилей переднеприводной компоновки: - для несущих и рамных кузовов автомобилей с рессорной подвеской: - для несущих кузовов автомобилей повышенной проходимости: до 2000 года: после 2000 года:	$\leq 25 \%$ $\leq 15 \%$ $\leq 25 \%$ $\leq 30 \%$ $\leq 12 \%$	ступенями при нагрузке динамическим моментом M_d : 1. $M_d = \pm 0.4 M_{ст.}$, 50000 циклов 2. $M_d = \pm 0.8 M_{ст.}$, 100000 циклов 3. $M_d = \pm 1.2 M_{ст.}$, 100000 циклов 4. $M_d = \pm 1.6 M_{ст.}$, 50000 циклов.
22	Жесткость, прочность и долговечность точек крепления тягово-сцепного устройства на кузове автомобиля - кузов и установленное на нем тягово-сцепное устройство должны выдержать: - видимые остаточные деформации и трещины в точках крепления тягово-сцепного устройства: - ослабление крепления	$\geq 2 \times 10^6$ циклов нагружения не допускаются не допускаются не допускаются	Тяговое усилие $R_T = 0,8 \times M_p$ усилием давления $R_d = 0,5 \times M_p$ где M_p - допустимая масса буксируемого прицепа. Динамическая знакопеременная сила определяется от соотношения массы прицепа и буксировщика.

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	тягово-сцепного устройства: - видимые остаточные деформации и трещины тягово-сцепного устройства:		
23	Зоны крепления кузова при транспортировке его в производстве - остаточные деформации деталей кузова: - упругая деформация:	не допускаются не допускается если, нарушается функционирование или монтаж узлов и деталей.	Имитируются наиболее тяжелые случаи нагружения кузова, возникающие в процессе окраски и сборки автомобиля. Предельные нагрузки – снаряженная масса автомобиля, масса жидкости находящейся в кузове в момент выхода из окрасочной ванны, усилия от рабочего инструмента при монтаже агрегатов и подвески.
24	Жесткость точек крепления		Усилие в точках

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	фонарей и фар на кузове автомобиля - остаточные деформации деталей кузова: - упругая деформация:	не допускаются ≤ 2 мм	крепления 100Н
25	Поперечная жесткость петель капота и крышки багажника - остаточные деформации петель: - упругая деформация петель: - нарушение лицевых зазоров:	≤ 0.2 мм ≤ 3 мм не допускается	Боковое усилие 200Н
26	Жесткость всех наружных панелей кузова (капот, крышка багажника, двери, боковина, крылья, крыша) - остаточные деформации: - потеря устойчивости:	не допускаются не допускается	Нагрузка 250Н, через упругую прокладку
27	Собственные низшие частоты каркаса кузова:	$\geq 25 \div 30$ Гц	
28	Кронштейны, зоны крепления механизмов, узлов и агрегатов - остаточные деформации: - собственные частоты зоны	не допускаются ≥ 36 Гц и не должны совпадать с параме-	

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	или кронштейна (при установленном узле или механизме): - упругие деформации:	трической частотой механизма. Не допускаются величины, приводящие к нарушению функционирования	
29	Собственные частоты рамок дверей:	≥ 36 Гц	
30	Вибрационная жесткость крепления на кузове панели приборов и рулевого колеса с блоком педалей. - собственные частоты: - уровни виброперемещений (виброскорости) ⁽⁴⁾ :	Собственные частоты не должны совпадать с собственными частотами неподрессоренных масс, частотой вращения колес, частотами возбуждения от силового агрегата на холостом ходу	
31	Собственные частоты кронштейна крепления блока управления подушками безопасности. - собственно кронштейн: - кронштейн	≥ 500 Гц ≥ 400 Гц недопустимо	

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
	смонтированный на кузове:	размещать в зонах наибольших перемещений кузова.	
32	<p>Жесткость кронштейнов и зон кузова крепления элементов подвески автомобиля</p> <p>- упругие деформации ⁽²⁾:</p> <p>- остаточные деформации:</p>	<p>Собственные значения частот не должны совпадать с собственными частотами силового агрегата на опорах, собственными частотами подрессоренных и недрессоренных масс автомобиля, частотами возбуждения от дороги, собственными частотами элементов подвески.</p> <p>не допускаются</p>	
33	Жесткость кронштейнов и зон установки опор силового агрегата ⁽³⁾	Собственные значения частот не должны совпадать с	

№ п/п	Наименование	Параметр	Примечание
		<p>собственными частотами силового агрегата на опорах, собственными частотами поддресоренных и неподдресоренных масс автомобиля, частотами возбуждения от дороги (микропрофиль и вращения колес), значениями частот на холостом ходу силового агрегата и на режимах установившегося движения от сил инерции второго порядка.</p>	

Примечание:

1). Прочность кузова при разработке (проектирование, испытания, доводка) оценивается по общим нормам прочности для машиностроительных конструкций, специальных регламентированных требований, как правило, нет. За время эксплуатации кузов подвергается динамической нагрузке, число циклов нагружения от которой равно или превосходит базовое число циклов 2×10^6

усталостных характеристик применяемых конструкционных сталей. Поэтому в автомобилестроении не практикуется ограниченный ресурс – используют требования для абсолютной прочности.

2) Упругие деформации для элементов кузова в местах крепления элементов подвески трудно формализовать, поскольку оценить влияние этой “дополнительной” деформации на управляемость и устойчивость автомобиля, без увязывания ее с упругими динамическими деформациями элементов подвески крайне трудно. Только из рассмотрения совместного поведения всей подвески в динамике, может быть выработан такой критерий. Кроме того, он будет зависеть от типа и конструкции подвески, от способа ее крепления и, скорее всего для каждого автомобиля будет свой. При оценке деформаций точек на кузове следует учитывать, что они состоят из локальных деформаций и перемещений кузова в целом, то есть следует учитывать еще и общую жесткость кузова.

3) Поскольку зоны крепления опор силового агрегата на кузове составляют неотъемлемую часть его системы поддрессоривания и виброизоляции, то для таких кузовных элементов более важно оценивать их общее механическое сопротивление (механический импеданс). Степень передачи вибрации на каркас кузова, ее влияние на внутренний шум и будет определять жесткостные требования и конструкцию таких зон.

4) Уровень вибрации для рабочих органов управления автомобиля оценивается его санитарными нормами для транспортных средств. Влияние вибрации на человека зависит от частоты, длительности и уровня воздействия (таблицы 2.1.2, 2.1.3).

Таблица 2.1.2 – Весовые коэффициенты

Частота (центральная), Гц	k_{vz}	$k_{vx} k_{vy}$	Время воздействия	k_{tz}	k_{fx}, k_{fy}
1,0	2,0	1,0	1 мин	1,0	1,0
1,25	1,79	1,0	16 мин	0,75	0,75
2,0	1,41	1,0	25 мин	0,63	0,63
3,15	1,11	1,59	1 ч	0,42	0,42

5,0	1,0	2,5	2,5 ч	0,25	0,25
8,0	1,0	4,0	4 ч	0,19	0,177
12,5	1,59	6,25	8 ч	0,11	0,11
20,0	2,5	10,0	16 ч	0,056	0,078
31,5	4,0	15,9	24 ч	0,04	0,15

Таблица 2.1.3. Допустимые значения средних квадратических виброскоростей по СН 1102-73

Частоты октавных полос Гц.		Виброскорости при колебаниях м/с.		Вертикальные виброускорения м/с ² .	
Граничные.	Средние геометрическ ие	вертикальны х	горизонтальн ых	По СН 1102- 73	По ИСО 2631
0.88—1.4	1	0.126	0,050	0,79	0,84
1,4-2,8	2	0,071	0,035	0,89	0,78
2.8—5,6	4	0,025	0,032	0.63	0.57
5,6-11,2	8	0,013	0,032	0.65	0,60
11,2—22,4	16	0,011	0,032	1,11	1,14
22,4—44,8	31,5	0.011	0,032	2.1S	2,26

Величина среднего квадратического виброускорения (в м/с²), соответствующего границе снижения производительности труда от усталости, может быть найдена для любого уровня по формулам

$$\begin{aligned} [\sigma_{\ddot{z}}] &= 2,8 \cdot k_p k_{vz} k_{tz}, \\ [\sigma_{\ddot{x}, \ddot{y}}] &= 2 \cdot k_p k_{v_{x,y}} k_{t_{x,y}}. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где

$\bar{b}_z, \bar{b}_{x,y}$ - величина среднего квадратического виброускорения;

k_{vz}, k_{vx}, k_{vy} - весовые коэффициенты, учитывающие частоту воздействия вибрации на человека;

k_{tz} , k_{fx} , k_{fy} - весовые коэффициенты, учитывающие время воздействия вибрации на человека.

Входящий в эти формулы коэффициент k_p соответственно равен 0,317; 1,0; 2,0.

Весовые коэффициенты k_v и k_t даны в таблице 2.1.2.

2.2 Типовые показатели жесткости

Важным показателем совершенства конструкции кузова является его жесткость (подразумевается, что она соотносится с массой кузова и заложенным эксплуатационным ресурсом). Для однотипных кузовов легковых автомобилей – в данном случае это, как правило, цельнометаллические (2-х или 3-х объемные) кузова, автомобилей европейских групп А, В или С, сравнительную оценку можно проводить только по жесткости.

В данной работе будет рассматриваться крутильная жесткость кузова. Так как кручение наиболее тяжелый случай нагружения (относительно изгиба). Кручение кузова является частным случаем нагрузки автомобиля от дороги (медленный наезд на кочку).

На жесткость кузова влияют три составляющие компоненты каркаса кузова. Это непосредственно сам балочный каркас кузова, сочленения между балочными элементами, составляющими каркас кузова и панели кузова вместе со стеклами, если последние приклеены к кузову. Данное утверждение подкреплено расчетно-экспериментальными работами. Так, например, приклеенные стекла на автомобиль, могут добавить от 20% до 40% крутильной жесткости –таблица 2.2.1.

Таблица 2.2.1 – Жесткость кузова со стеклами и без

	Жесткость каркаса кузова замеренная на стенде (Н/м*град.)	
	ВАЗ	DAEWOO
Жесткость каркаса кузова со стеклами	9772 (100%)	12515 (100%)
Жесткость каркаса кузова без стекол.	7329 (-25%)	7656 (-39%)

Аналогичным образом проделана работа по оценке влияния панелей каркаса кузова на его крутильную жесткость. Для этого, в качестве базовой модели взят каркас кузова без панелей и стекол. Затем поочередно и последовательно добавлялись панели одна за другой, и проводился расчет на кручение с дальнейшим сравнительным анализом получаемых величин крутильной жесткости. Результаты представлены в таблице 2.2.2.

Таблица 2.2.2 – Величины крутильной жесткости

№ п/п	Описание конструкции	Жесткость на кручение (Н*м/град).	Изменения крутильной жесткости по отношению к предыдущему варианту(%).
1	Каркас кузова без панелей.	1867 (100%)	-
2	Каркас и панель крыши (0.8 мм.)	2854 (+53%)	+ 53%
3	Каркас, панель крыши и пол (1 мм.).	3414(+83%)	+ 20%
4	Каркас, панель крыши, пол и щиток передка (1мм.)	5655(+203%)	+65%
5	Каркас, панель крыши, пол, щиток передка и лобовое стекло.	7055(+278%)	+24%
6	Каркас, панель крыши, пол, щиток передка, лобовое стекло и стекло заднее.	8155(+337%)	+16%

Таким образом, достаточно существенное влияние на крутильную жесткость оказывают щиток передка, панель крыши и клееные стекла. Так как непосредственное участие панелей и стекол на крутильную жесткость уже предопределено, и работая с панелями можно только лавировать их локальными жесткостями, то для обеспечения требуемой крутильной жесткости кузова, более детально рассмотрению подвергнется балочный каркас и сочленения между балочными элементами, как наиболее перспективные составляющие элементы кузова в плане увеличения крутильной жесткости.

Многие машиностроительные конструкции имеют более или менее ярко выраженную балочную структуру. Каркас кузова автомобиля так же может быть рассмотрен как структура с существенным присутствием балочных элементов.

Поэтому оптимальный подбор геометрических параметров их поперечных сечений, очевидно, является чрезвычайно важной задачей.

Очень полезная информация в этом плане может быть получена уже на самых ранних этапах проектирования кузова, при упрощенном моделировании каркаса с широким использованием балочных конечных элементов. Информация как о рациональном расположении балок, определяющих силовую схему кузова, так и о корректных жесткостных характеристиках их поперечных сечений, полученная на этом этапе, существенно сокращает затраты в дальнейшем проектировании, и заложит базовую жесткость кузова, которая на конечном этапе проектирования может незначительно варьироваться как большую, так и в меньшую сторону.

Понятно, что сечения балок, используемые в реальной конструкции, могут быть чрезвычайно сложны. Это много замкнутые сечения сложной конфигурации. Однако, когда мы говорим о ранних этапах проектирования, о прикидочных расчетах, о переборе конкурентных вариантов, нет смысла оперировать со сложными сечениями.

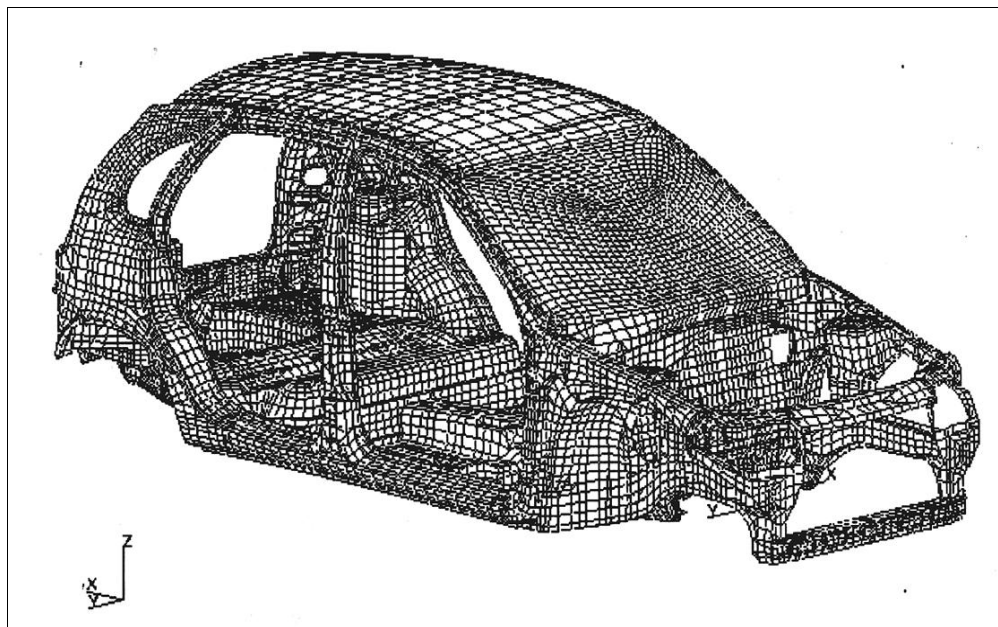


Рисунок 2.2.1 – Оболочечная КЭМ каркаса кузова

И набор сечений, используемых в программных продуктах MSC/PATRAN, MSC/NASTRAN, оказывается вполне достаточным. А полученные на этом этапе

данные используются для качественного обоснованного выбора параметров реальных сечений. Чтобы оценить, в какой мере можно доверять упрощенной балочной модели, сравним результаты расчетов подробной оболочечной модели с результатами расчетов ее балочной аналогии. На рисунке 2.2.1 представлена, конечно - элементная модель (КЭМ) каркаса кузова одного из автомобилей, набранная из оболочечных элементов.

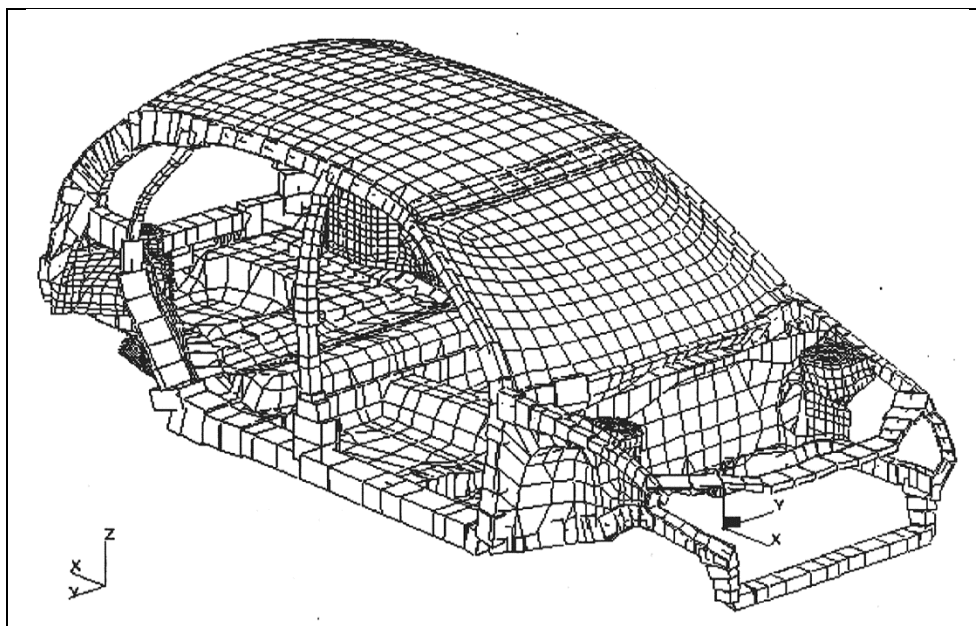


Рисунок 2.2.2 – КЭМ с использованием балочных элементов

На рисунке 2.2.2 представлена, КЭМ того же кузова, но в тех зонах, где может быть обосновано применение балочных элементов, подробная оболочечная структура заменена балочной. На рисунке 2.2.3 та же модель, что и на втором, но для наглядности отображены только балочные элементы модели.

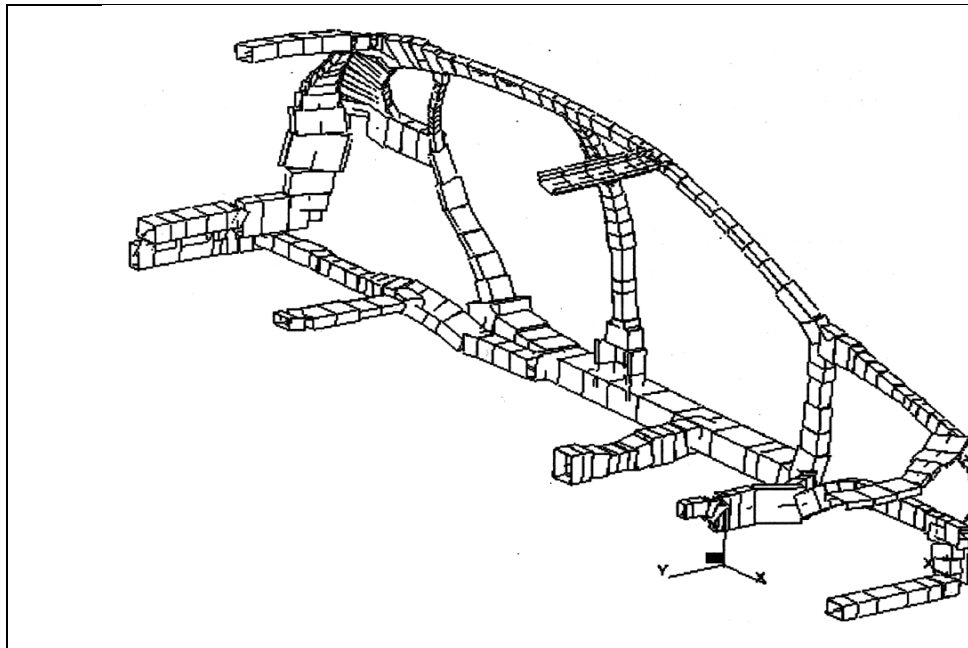


Рисунок 2.2.3 – Балочные элементы модели каркаса кузова

Чтобы сравнение было наиболее наглядным, была использована самая незатейливая методика перехода от сложных реальных сечений к простым сечениям используемых в выше указанных программных продуктах. Для построения балочной модели, использовались сечения коробчатого и швеллерного типа, рисунок 2.2.4.

Коробчатым сечением моделировались замкнутые и много замкнутые контура. А швеллерами открытые сечения. При этом делалась попытка подобрать сечения близкими по жесткостным характеристикам к реальным сечениям. Геометрические параметры сечений подбирались таким образом, чтобы в плане, максимально приближались к контурам реальных сечений.

На обе модели были наложены одинаковые граничные условия несимметричного кручения кузова. Решалась задача линейной статики. Жесткость балочной модели оказалась на 19% выше жесткости оболочечной. Много это или мало? Рассматриваемая оболочечная модель включает в себя 38500 узлов. Понятно, что модель такой подробности может появиться только уже на завершающих этапах проектирования. На начальных же этапах, очевидно, используются модели меньшей размерности. По нашим данным, при уменьшении размерности модели, представленной на рисунке 2.2.1, в 4 раза (до порядка 9500

узлов), приводит к завышению расчетной жесткости на 12-15%. То есть, наша, построенная описанным выше способом балочная модель, по жесткости дает результаты на уровне оболочечной модели среднего уровня. Следовательно, результаты, получаемые на такой модели (с широким использованием балочных элементов) могут рассматриваться как вполне достоверные. И оптимальное распределение геометрических параметров сечений действительно может являться руководящей информацией при проектировании реальных сечений кузова. Рассмотрим теперь вопрос получения этого оптимального распределения с заданными конструктивно-технологическими параметрами.

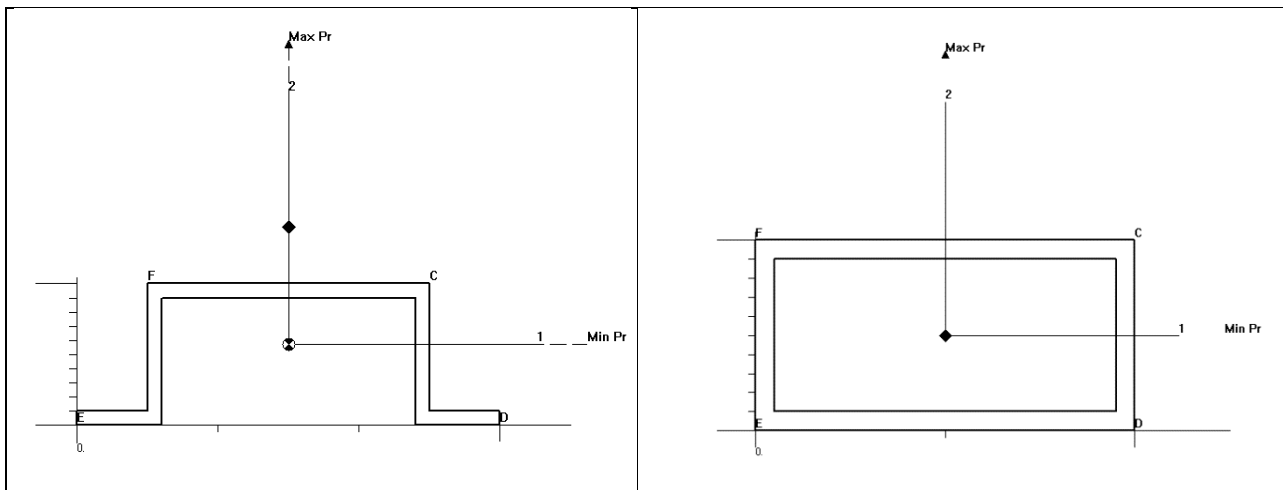


Рисунок 2.2.4 – Сечение швеллерного и коробчатого типа

MSC/NASTRAN и MSC/PATRAN представляют обширные возможности аппарата оптимизации, как с точки зрения пре и пост-процессора, так и точки зрения устойчивости алгоритмов оптимизации. Функцией цели при постановке оптимизационной задачи является вес конструкции. Описываются конструктивно-технологические ограничения, накладываемые на геометрические параметры балочных сечений. Задаются ограничения на величины статических реакций (перемещений и/или напряжений) в контрольных узлах и/или элементах конструкции. Пользовательский интерфейс построен таким образом, что с минимальными временными затратами обеспечивает описание даже очень больших оптимизационных задач.

В качестве проектных переменных выбирались ширины и высоты балочных сечений. Наши тесты показали, что влияние толщин стенок сечений в проектном диапазоне на общую жесткость кузова сравнительно не значительно. Поэтому толщины стенок не оптимизировались.

Конструкция была нагружена кручением. Накладывались ограничения на Z -перемещения узла в центре стакана передней подвески. Так же во всех балочных элементах контролировались напряжения. Величина Z -перемещения узла вычислялась из значения крутильной жесткости, закладываемой в проект оптимизации каркаса кузова.

Как показывает наша практика оптимизационных задач, более качественные проекты в процессе оптимизации достигаются, когда величины статических реакций в исходном проекте превышают допустимое значение.

Было выполнено 11 итераций оптимизационного процесса. В результирующем проекте было получено заданное перемещение в контрольном узле, и максимальные напряжения в балочных элементах соответствовали заданному уровню. В результате оптимизации геометрия сечений в модели изменилась. Это уже не та модель, что изображена на рисунке 2.2.2 и рисунке 2.2.3. Балочная структура нашего проекта представлена на рисунке 2.2.5 (оболочечные элементы для наглядности не отображены). Традиционным способом, в виде линейных отрезков, изображены балки, параметры сечений которых не участвовали в оптимизации.

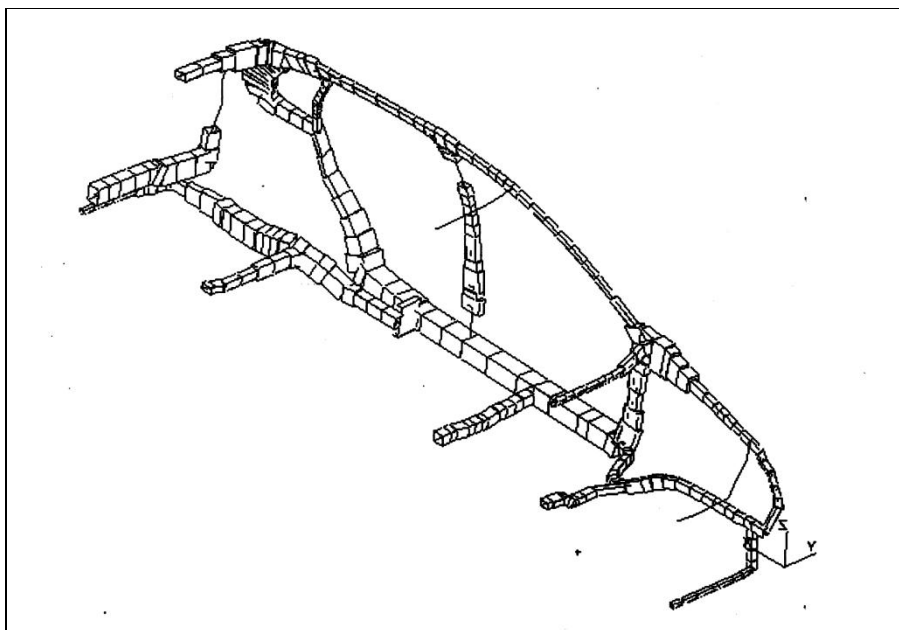


Рисунок 2.2.5 – Балочная структура окончательного проекта

Целиком взятая, данная конструкция не имеет большой практической ценности. Практический интерес здесь представляют главным образом результаты в зоне среднего пола. Потому что для этой зоны общее кручение кузова (которое и анализировалось) является расчетным случаем нагружения. Другие узлы конструкции имеют другие расчетные нагрузки. И то, что хорошо при кручении, в этих условиях становится не приемлемым. Так, сечения лонжеронов и порогов выбираются по условиям пассивной безопасности. И, заранее выбранные, уже не должны были бы меняться в нашем оптимизационном расчете. Параметры центральной стойки определяются, в том числе, из учета усилий от навески двери, и т.д.

MSC/NASTRAN – мощная система. Она позволяет в одном оптимизационном расчете, путем включения в него нескольких нагрузочных случаев, получить оптимальный проект, одновременно удовлетворяющий всему спектру нагрузок и накладываемым на отклик узлов конструкции ограничениям. Так, можно было бы в этом же оптимизационном процессе, добавит к нашему расчетному случаю (кручение кузова) дополнительные расчетные случаи, соответствующие изгибу кузова, навески дверей на стойки, величины

собственных частот, и т.д. И за один расчет получить проект, удовлетворяющий всем этим факторам.

В заключении данного раздела хочется отметить очень важный вывод. о том, что на самом деле, не смотря на часто предвзятое отношение к использованию балочных элементов, они позволяют получать не менее качественные результаты, чем в случае использования чисто оболочечных моделей. А на ранних этапах проектирования, можно говорить о балочных расчетных моделях, как о наиболее привлекательных. Поскольку такие модели сравнительно просты в реализации, не требуют значительных вычислительных затрат, и открывают широкие возможности к использованию аппарата оптимизации.

Немаловажную роль в работе балочной конструкции играют соединения балочных компонентов. Сами балочные компоненты могут быть достаточно хорошо развитыми и иметь достаточный запас жесткости и прочности, но если их соединения не прочны, то жесткость конструкции будет определяться по ее самому слабому звену. Поэтому анализ балочных соединений немаловажная компонента в проектировании кузова с заданной величиной крутильной жесткости.

В расчетном пакете MSC/NASTRAN имеется внутренний модуль, который позволяет делать сравнительную оценку проектных переменных по силе влияния их на задаваемые параметры. Используя эту идею, была разработана методика оценки влияния сочленений балочных компонентов на ограничения величин статических реакций.

Суть методики в следующем: в местах сочленений ярко выраженной балочной структуры вставляются небольшие «косынки» (распорки) (рисунок 2.2.6). Толщина вставок настолько мала (0.01 мм.), что она не влияет на общую и локальную жесткость конструкции. Но зато они могут выступать в роли индикаторов, по которым можно делать выводы о жесткости того или иного сочленения и его влияния на общую крутильную жесткость кузова.

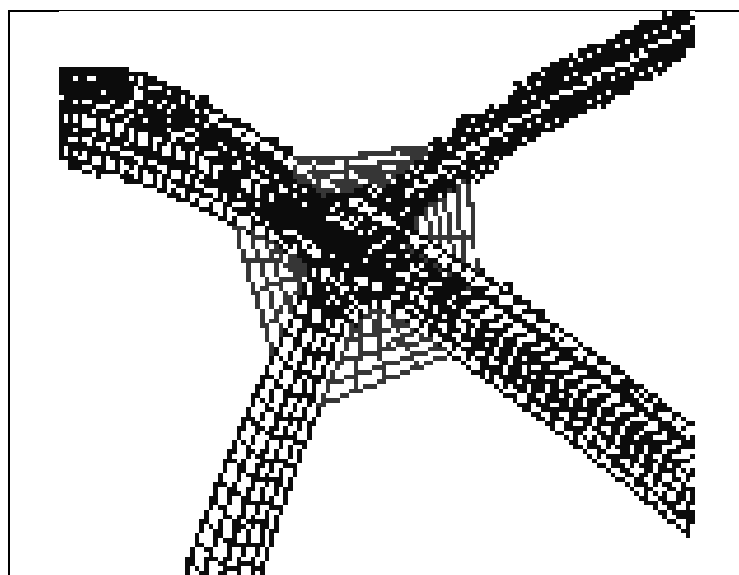


Рисунок 2.2.6 – Пример реализации распорок

Для этого задаются проектные переменные на каждую такую распорку. Формулируется оптимизационная задача с теми условиями, которые мы хотим получить в итоге. В нашем случае это заданная крутильная жесткость кузова. И используя, обозначенный выше модуль программного продукта MSC/NASTRAN вычисляем коэффициенты чувствительности каждой проектной переменной по каждому ограничению на статические реакции. Тем самым мы получим коэффициенты чувствительности на степень влияния той или иной распорки на крутильную жесткость конструкции. Далее следует анализ полученных коэффициентов чувствительности, и чем выше коэффициент, тем большее влияние оказывает на крутильную жесткость данное сочленение балочных компонентов. И как следствие нуждается в более детальной и тщательной проработки данного сочленения, с точки зрения жесткости.

3 Методика обеспечения требований к жесткости кузова

Обобщая все выше изложенное, можно сформулировать последовательность шагов (этапов), которые необходимо выполнить на ранней стадии проектирования каркаса кузова, чтобы обеспечить необходимые требования, предъявляемые к жесткости кузова:

1. Сбор исходных данных (обмерочные линии макета автомобиля, компоновочные материалы, рекомендации специалистов по пассивной безопасности, данные из ТЗ, характеристики используемых материалов).

2. Построение гибридной модели каркаса кузова, где используются балочные элементы для ярко выраженной балочной структуры кузова и плоские элементы для моделирования панелей (крыша, пол, арка заднего колеса, брызговик передний, опоры, щиток передка).

3. Задать необходимые характеристики используемых материалов (модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала для линейной постановки задачи).

4. Формализация оптимизационной задачи, для получения характеристик сечений балочной модели кузова с целью получения заданной величины крутильной жесткости.

➤ Определение наиболее влиятельных элементов балочной модели на крутильную жесткость (посредством коэффициентов чувствительности).

➤ Формализация задачи (описание конструктивно-технологических ограничений, задание ограничений на величины статических реакций) и расчет.

5. Перестройка исходной гибридной модели по результатам оптимизационного расчета (введение новых полученных значений сечений в балочный каркас кузова).

6. Анализ сочленений (соединений) балочных элементов каркаса кузова:

➤ Построение вспомогательных элементов (распорки).

➤ Формализация оптимизационной задачи (см. предыдущие пункты) и расчет коэффициентов чувствительности используемых вставок.

➤ Обработка и анализ коэффициентов чувствительности.

7. Формирование выходного отчета, в который входят следующие материалы:

➤ Анализ балочной структуры кузова,

➤ Величины сечений балочных элементов каркаса кузова,

➤ Анализ и рекомендации по проработке балочных сочленений каркаса кузова.

В таблице 3.1 приведены ориентировочные сроки выполнения работы по каждому пункту, соответствующие квалификации инженера-конструктора без категории, владеющего программными продуктами MSC/PATRAN, MSC/NASTRAN, CATIA/FEM и офисными приложениями (MS WORD, MS EXCEL) на уровне опытного пользователя.

Таблица 3.1 – Нормативные сроки выполнения работы

№ п/п	Наименование работы.	Трудоемкость (ч/час)	Длительность (ч/час).	Оборудование, программное обеспечение.
1	Сбор и обработка исходных данных.	40	40	WS IBM/PC CATIA/FEM MSC/PATRAN
2	Построение гибридной модели каркаса кузова.	80	80	WS IBM/PC MSC/PATRAN
3	Задание характеристик используемых материалов и свойств элементов.	8	8	WS IBM/PC MSC/PATRAN
4	Определение наиболее влиятельных элементов балочной модели на крутильную жесткость.	40	40	WS IBM/PC MSC/PATRAN MSC/NASTRAN

№ п/п	Наименование работы.	Трудоемкость (ч/час)	Длительность (ч/час).	Оборудование, программное обеспечение.
5	Формализация оптимизационной задачи, для получения характеристик сечений балочной модели кузова с целью получения заданной величины крутильной жесткости и ее реализация.	80	80	WS IBM/PC MSC/PATRAN MSC/NASTRAN
6	Перестройка исходной гибридной модели по результатам оптимизационного расчета.	8	8	WS IBM/PC MSC/PATRAN
7	Построение вспомогательных элементов для анализа балочных сочленений.	20	20	WS IBM/PC MSC/PATRAN
8	Формализация оптимизационной задачи для анализа балочных сочленений и ее решение.	40	40	WS IBM/PC MSC/PATRAN MSC/NASTRAN
9	Обработка и анализ коэффициентов чувствительности.	40	40	WS IBM/PC MS WORD MS EXCEL
10	Формирование итогового отчета.	40	40	WS IBM/PC MSC/PATRAN MS WORD MS EXCEL

3.1 Пример получения заданной крутильной жесткости на балочной модели кузова и анализ балочных сочленений

В качестве исходных данных выступали обмерочные линии макета автомобиля и некоторые компоновочные материалы (рисунки 3.1.1 и 3.1.2).

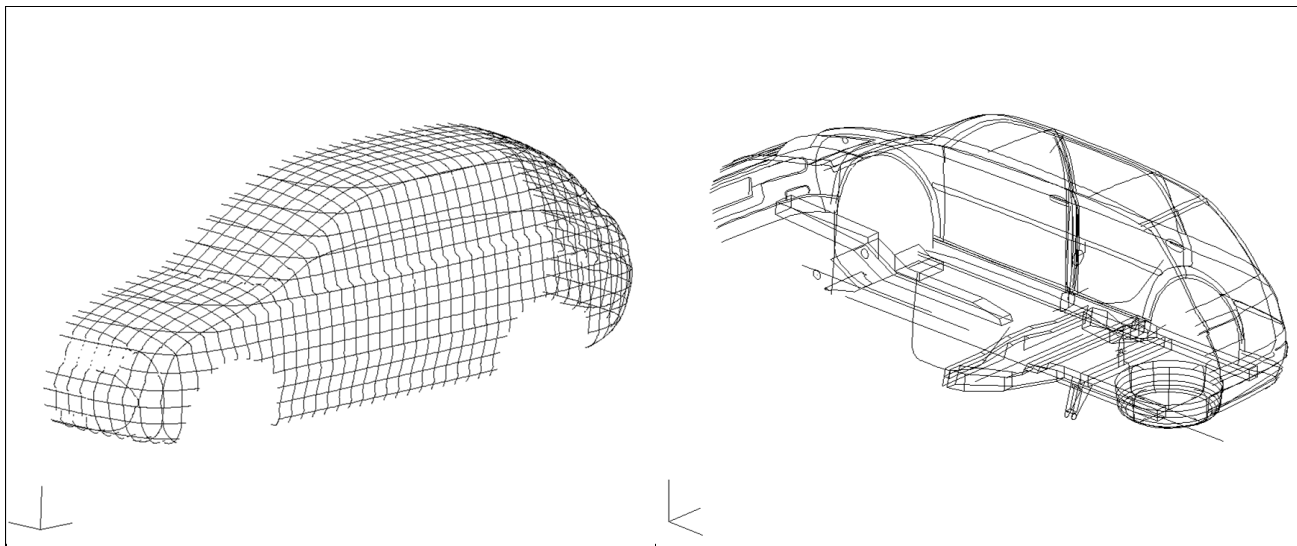


Рисунок 3.1.1 – Замерочные линии макета

Рисунок 3.1.2 – Компоновочная проработка

На основании имеющихся материалов построена упрощенная балочная модель каркаса кузова (рисунки 3.1.3 и 3.1.4), где использовались балочные сечения библиотеки программных продуктов «MSC/PATRAN, MSC/NASTRAN». Панели (крыша, пол, арка заднего колеса, брызговик передний, опоры, щиток передка) смоделированы плоскими (Shell-ми) элементами.

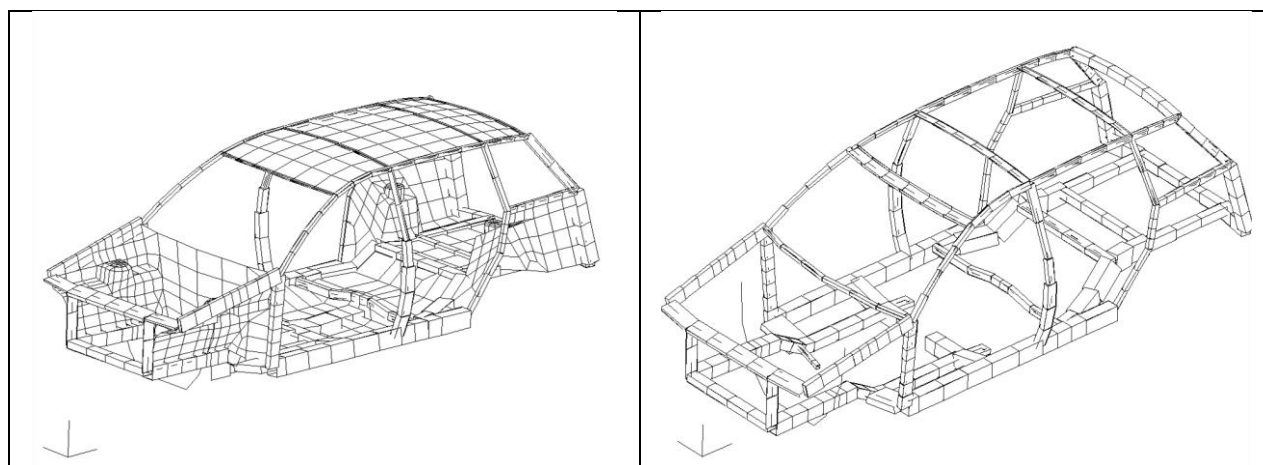


Рисунок 3.1.3 – Гибридная модель кузова (балки, панели)

Рисунок 3.1.4 – Балочный каркас гибридной модели кузова.

На первом этапе – проведена поэлементная оптимизация всего балочного каркаса кузова с расчетом коэффициентов чувствительности. Данный расчет преследует цель - выявить элементы, наиболее влияющие на крутильную жесткость каркаса кузова. Второй этап – включает в себе оптимизацию только тех балочных элементов, у которых коэффициенты чувствительности наиболее высоки. Диапазон изменения проектных переменных уменьшили до 10% в сторону уменьшения и оставили прежним в сторону увеличения проектных переменных. Результаты данного проекта поэтому, представлены более подробно на рисунках 3.1.5 и 3.1.6. В данном проекте закладывалось получение крутильной жесткости равной 15000 Н*м./град.

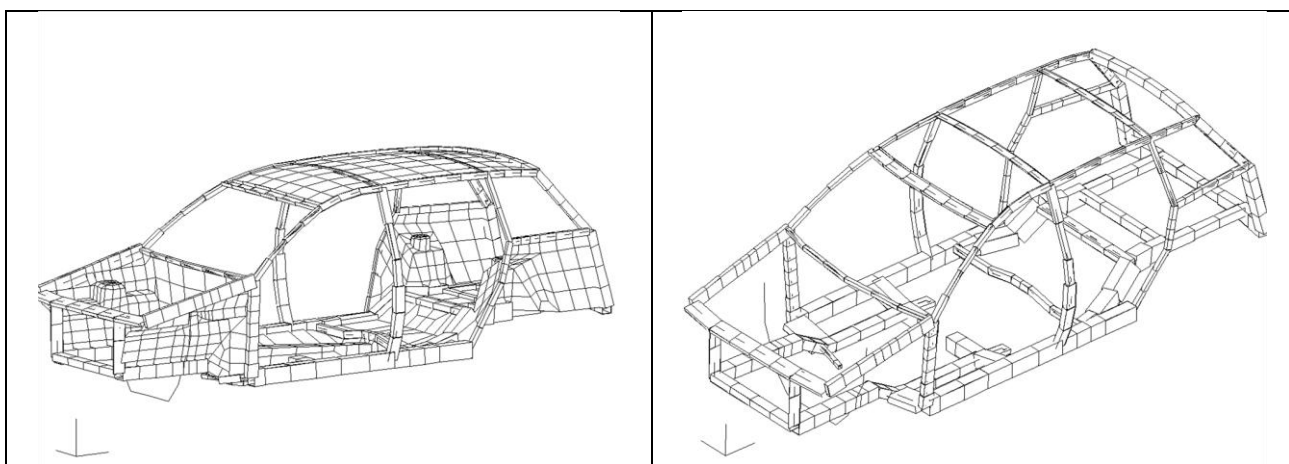


Рисунок 3.1.5 – Результат оптимизации, вид с панелями
Рисунок 3.1.6 – Результат оптимизации, вид без панелей

В представленном проекте поставленная цель достигнута, т.е. получена заданная крутильная жесткость 15000 Н*м./град.

Получены количественные величины используемых сечений. По полученным сечениям, в дальнейшем будет построена оболочечная модель кузова. Данные материалы должны использоваться в дальнейшей конструкторской проработке. Ввиду объемности материалов, численные выражения сечений в данной работе не приводятся.

Анализ сочленений балочных элементов, составляющих каркас кузова, проводился на точной модели снаряженного автомобиля. В качестве такой модели использовалась, модель автомобиля ВАЗ-1118 серия 200 (рисунок 3.1.7).

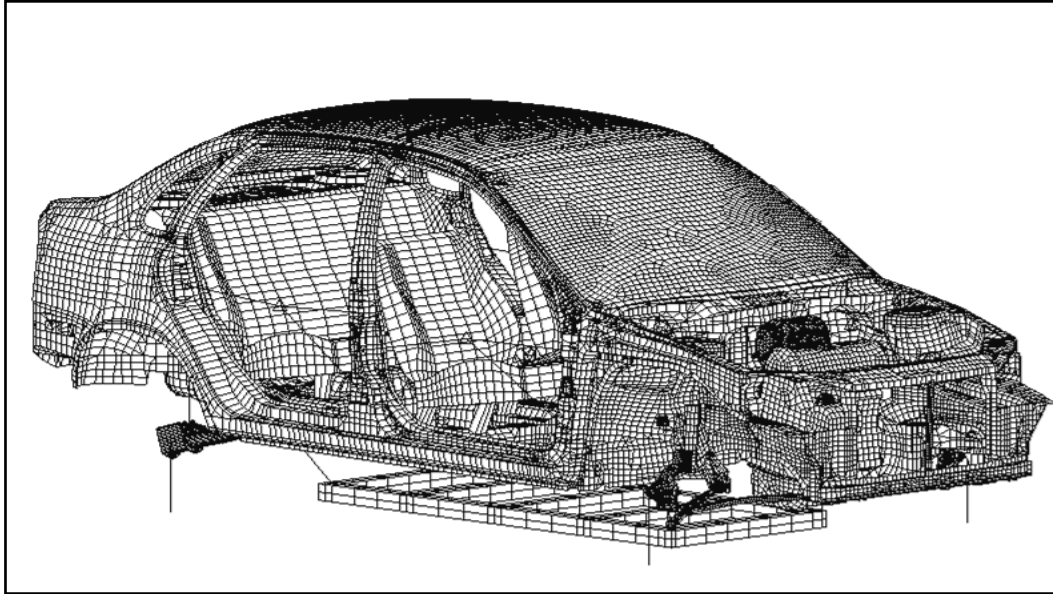


Рисунок 3.1.7 – КЭМ снаряженного автомобиля

В состав модели вошли следующие элементы:

- кузов,
- силовой агрегат,
- передняя подвеска,
- рулевое управление,
- навесные узлы (боковые двери, капот, крышка багажника),
- сидения,
- запасное колесо,
- задняя подвеска,
- колеса,
- вспомогательная рама.

В качестве расчетного случая использовался: - расчет кузова на жесткость при кручении автомобиля при диагональном вывешивании колеса.

В расчете присутствуют передние и задние подвески, настроенные на работу снаряженного автомобиля, согласно экспериментальным характеристикам (рисунки 3.1.8 – 3.1.11).

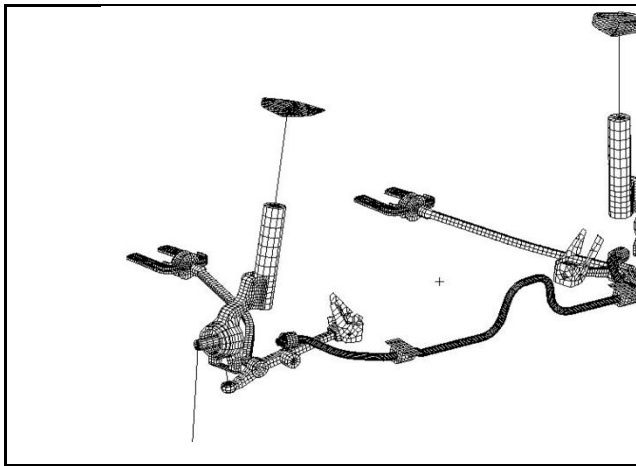


Рисунок 3.1.8 – КЭМ передней подвески

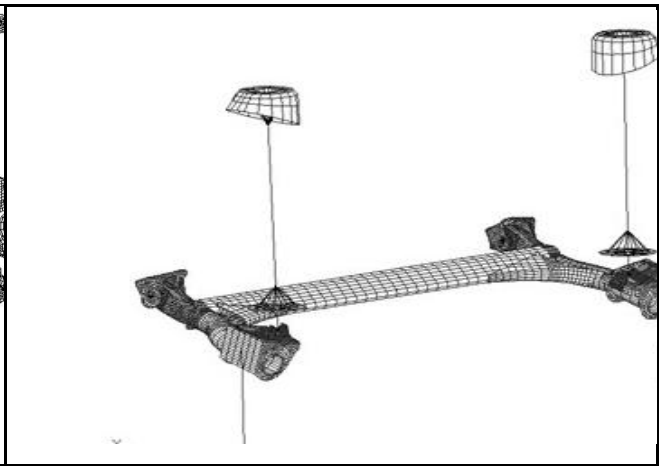


Рисунок 3.1.9 – КЭМ задней подвески

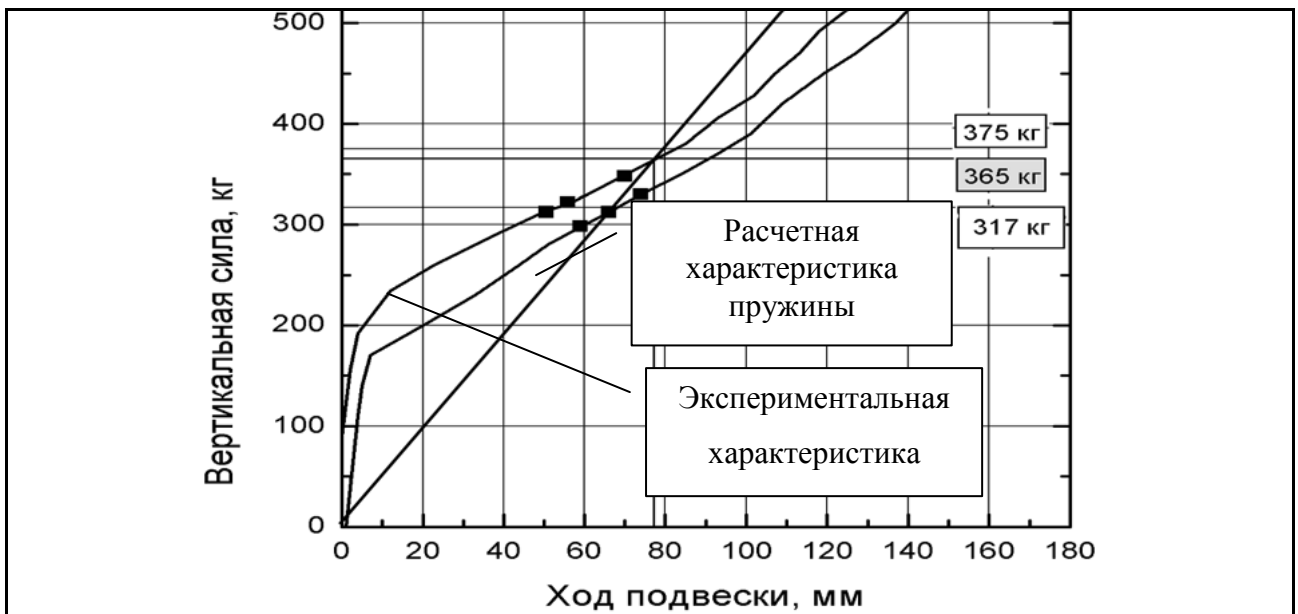


Рисунок 3.1.10 – Экспериментальные характеристики передней подвески

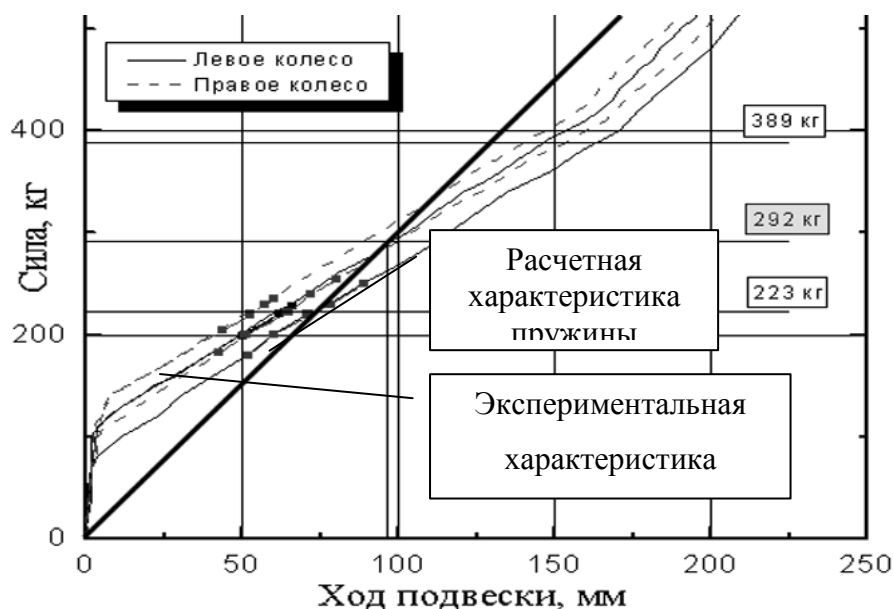


Рисунок 3.1.11 – Экспериментальные характеристики задней подвески

При расчете снаряженного автомобиля на кручение, при диагональном вывешивании колес (режим – все открыто), получена крутильная жесткость кузова в составе автомобиля: $C = 9369 \text{ Н*м/град}$.

Полученная крутильная жесткость принята за исходную. Дальнейший анализ проводился в сравнении с полученной крутильной жесткостью.

Для анализа сочленений, на кузове в местах стыковок балочных элементов были смоделированы специальные вставки (рисунок 3.1.12).

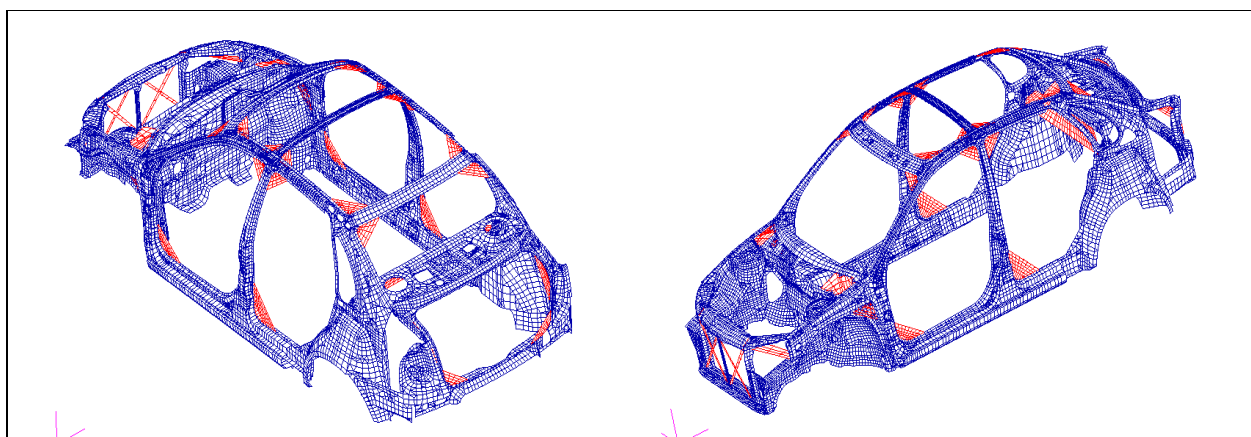


Рисунок 3.1.12 – Специальные вставки на кузове

По идее, используемые вставки не несут ни какой силовой нагрузки. Так как их толщина составляет 0.01 мм. Данные вставки выступают в роли «лакмусовой»

бумажки, показывая степень влияния каждого стыка на общую величину крутильной жесткости автомобиля. Данное утверждение стало возможным благодаря способности расчетного пакета MSC/NASTRAN проводить расчет коэффициентов чувствительности проектных переменных при оптимизационных расчетах.

На каждую такую вставку была сформирована проектная переменная и сформулирована целевая задача оптимизации. В качестве целевой функции выступила функция веса автомобиля, в качестве ограничений на величины статических реакций выступила крутильная жесткость автомобиля в виде величины деформации контрольных точек. А именно была заложена величина крутильной жесткости равная 13000 Н*м/град. в результате расчета получена таблица коэффициентов чувствительности (таблица 3.1.1) на каждую вставку в виде конкретной величины (рисунок 3.1.13). На самом деле эти величины ни чего собой не представляют, они ценны с точки зрения сравнительного анализа между собой. Чем выше величина, тем больший вклад несет данная вставка на величину крутильной жесткости. А как следствие и сам узел сочленения, в котором находится вставка. Следовательно, тем лучше (жестче) надо прорабатывать данное сочленение.

Толщина вставок = 0.01 мм.
Исходная жесткость = 9369 Н*м/град.

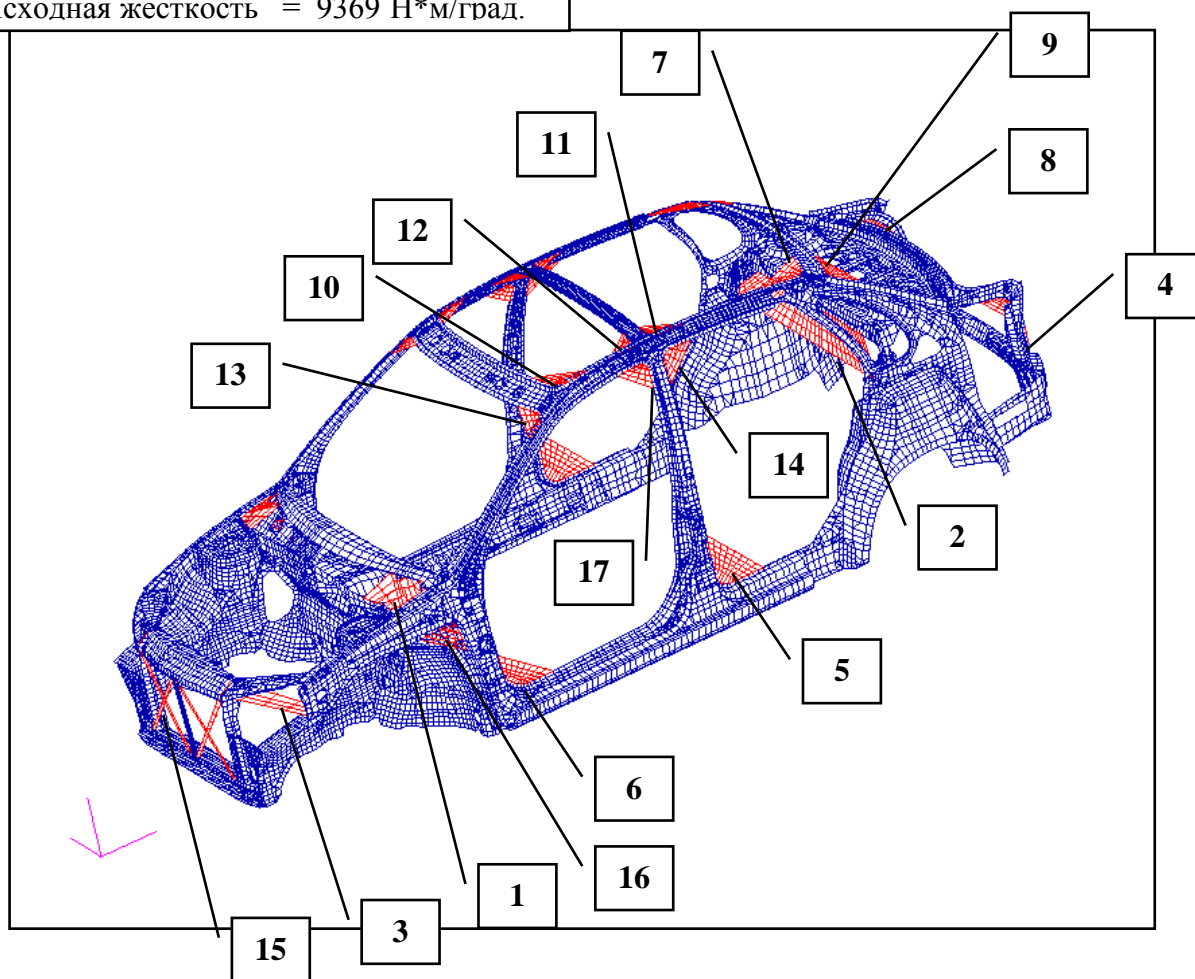


Рисунок 3.1.13 – Вставки на кузове

Попытаемся на примере показать справедливость наших выводов.

На рисунке 3.1.12 представлен каркас кузова 1118 со вставками на некоторых местах стыков несущих элементов, которые были смоделированы в предыдущем расчете. Увеличивая толщину наших вставок до 1 мм. и проведя обычный статический расчет нашей модели на кручение получили крутильную жесткость автомобиля равную $C = 11960 \text{ Н*м/град}$.

Данная величина больше исходного значения крутильной жесткости на 2591 Н*м/град . при этом масса всех «вставок» получилась равной 4.45 кг.

Но все-таки не следует забывать, что используемые вставки есть не что иное, как «связи» накладываемые на узлы стыковок несущих элементов. Реально на конструкции их в таком виде применять нельзя. Они могут лишь только подтолкнуть к поиску правильного решения и правильно выбрать те места,

которые нуждаются в более детальной проработке (ужесточения) для достижения нашей цели.

Таблица 3.1.1 – Таблица коэффициентов чувствительности

Вставка	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Коэффициент (*10 ⁻³)	84,043	31,493	11,079	9,627	8,670	7,708	6,814	6,083	5,244
Вставка	10	11	12	13	14	15	16	17	
Коэффициент (*10 ⁻³)	5,243	4,531	3,793	3,633	3,198	2,572	0,881	0,623	

3.2. Увеличение энергоемкости переднего лонжерона при фронтальном ударе

В качестве примера, иллюстрирующего возможности доводки автомобиля по результатам расчетов, приведена работа по увеличению энергоемкости передних лонжеронов автомобиля, выполненная в программе MSC/DYTRAN.

Моделировался фронтальный удар автомобиля в куб согласно требованиям Правила №12 ЕЭК ООН (фронтальный удар в недеформируемое препятствие со 100%-м перекрытием). Масса автомобиля - 1240кг, начальная скорость удара – 13.9 м/с. Куб имитировался жестким телом.

Расчетная модель представляет собой часть переднего лонжерона до S-образного участка (координата по X=100 мм в автомобильной системе координат), количество элементов – 1500; на задней части лонжерона закреплена масса 620 кг. Закрепление корня лонжерона решено не рассматривать и считать прочным настолько, чтобы выдержать усилие в районе 15-20 тонн.

Усилие деформации серийного лонжерона по результатам расчета, доходит до уровня 11 тонн (110 кН), затем лонжерон теряет устойчивость и усилие падает до 3 тонн.

В ходе расчетного анализа требовалось поднять усилие деформации лонжерона до 20 тонн - уровня необходимого для удовлетворения более жестким

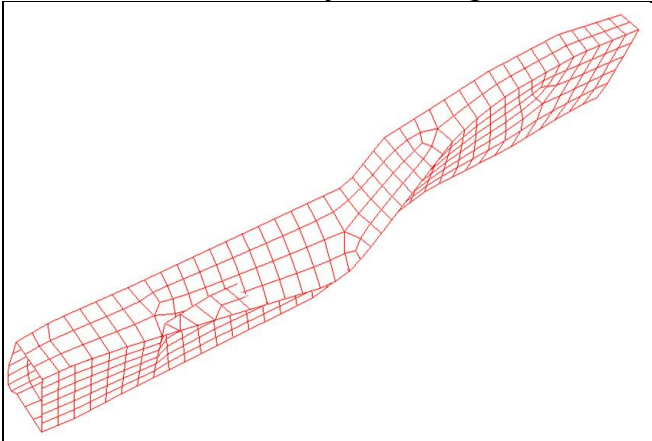
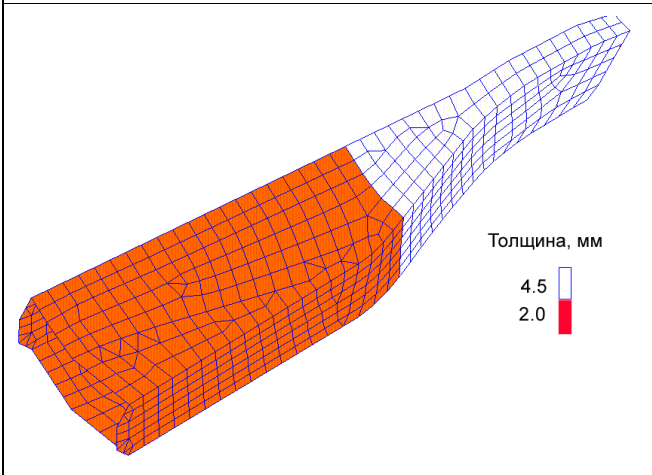
требованиям (Правила №94 ЕЭК ООН) – и избежать потери устойчивости лонжерона.

Было предложено 5 вариантов конструкции переднего лонжерона. Всего вместе с вариациями конструктивных элементов лонжеронов – около 40 вариантов.

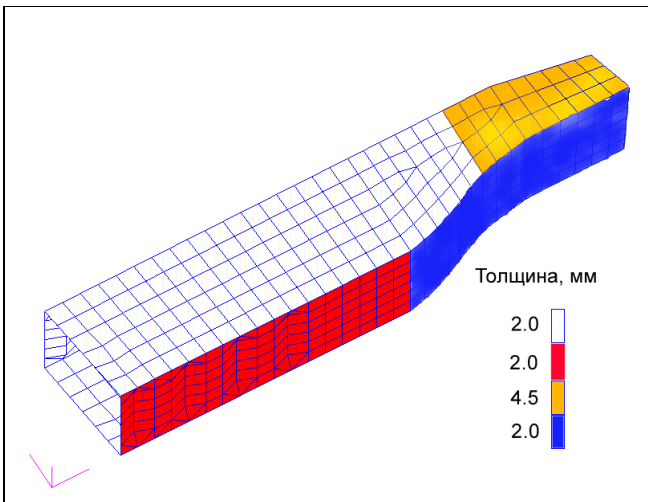
Наилучшие варианты для каждого типа конструкции приведены в табл. 3.2.1.

Полученные в результате обработки расчетов графики усилий деформации лонжерона приведены на рис. 3.2.1 – 3.2.8.

Таблица 3.2.1 – Наилучшие варианты конструкции переднего лонжерона

	<p>Исходный вариант</p>
	<p>1 ВАРИАНТ</p> <p>Конструкция переднего лонжерона I</p> <p>Проштамповки в передней части лонжерона со стороны колеса</p>

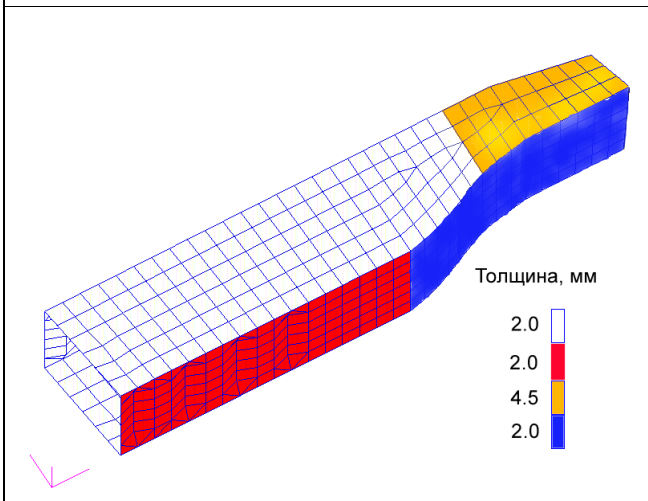
<p>Толщина, мм</p> <p>5.0</p> <p>5.0</p> <p>2.5</p>	<p>2 ВАРИАНТ</p> <p>Конструкция переднего лонжерона II</p>
<p>Толщина, мм</p> <p>4.5</p> <p>2.0</p>	<p>3 ВАРИАНТ</p> <p>Конструкция переднего лонжерона III</p>
<p>Толщина, мм</p> <p>4.5</p> <p>4.5</p> <p>2.0</p>	<p>8 ВАРИАНТ</p> <p>Конструкция переднего лонжерона IV</p>
<p>5.0мм</p> <p>Толщина, мм</p> <p>4.5</p> <p>3.5</p> <p>2.0</p> <p>3.5</p>	<p>16 ВАРИАНТ</p> <p>Конструкция переднего лонжерона IV</p>



37 ВАРИАНТ

Конструкция переднего лонжерона V

по 2 проштамповки на лонжероне со стороны двигателя и колеса;
2 поперечные перемычки внутри лонжерона ($t=1.5\text{мм}$, $X_1=-460$, $X_2=-275$).



40 ВАРИАНТ

Конструкция переднего лонжерона V

1 проштамповка на лонжероне со стороны двигателя и 6 – со стороны колеса;
3 поперечные перемычки внутри лонжерона ($t=1.5\text{мм}$, $X_1=-460$, $X_2=-310$, $X_2=-275$).

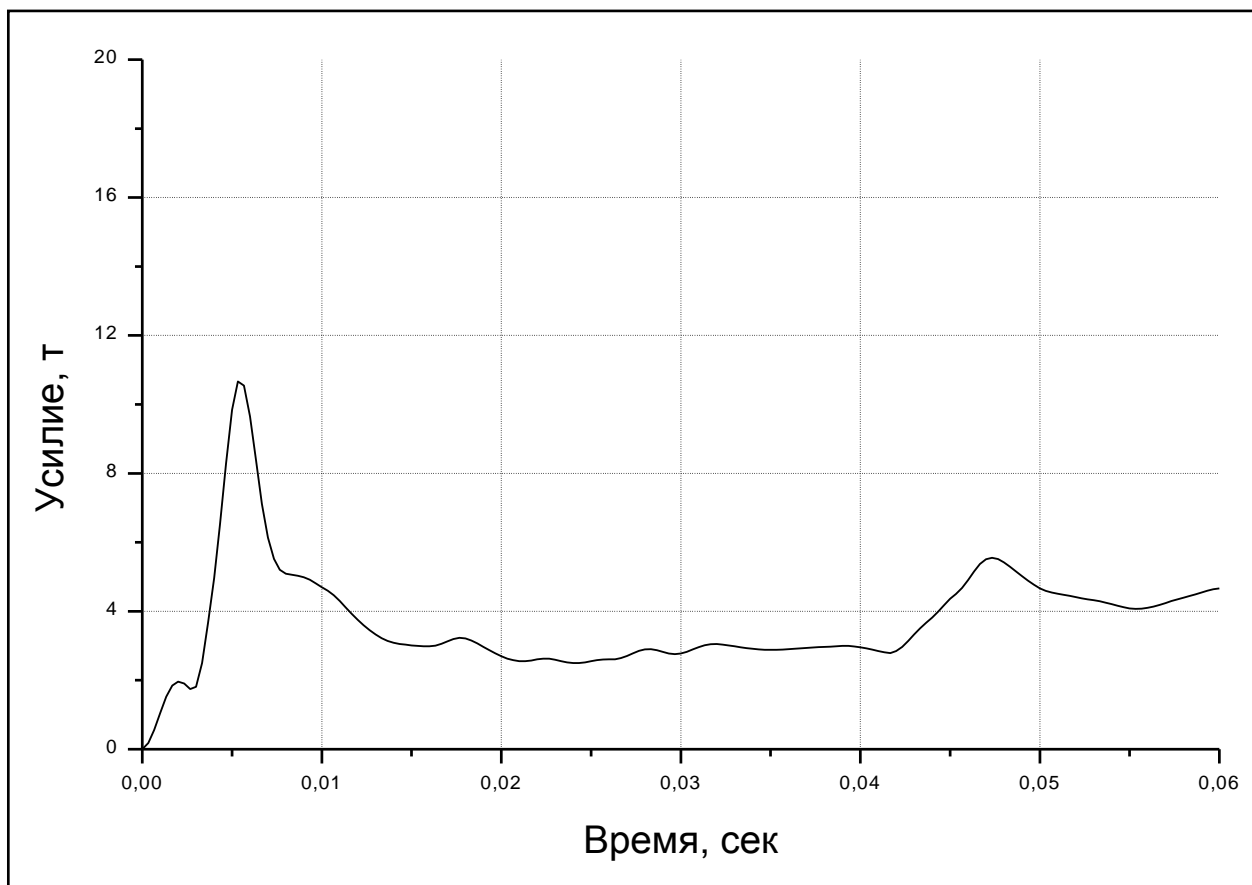


Рисунок 3.2.1 – Исходный вариант

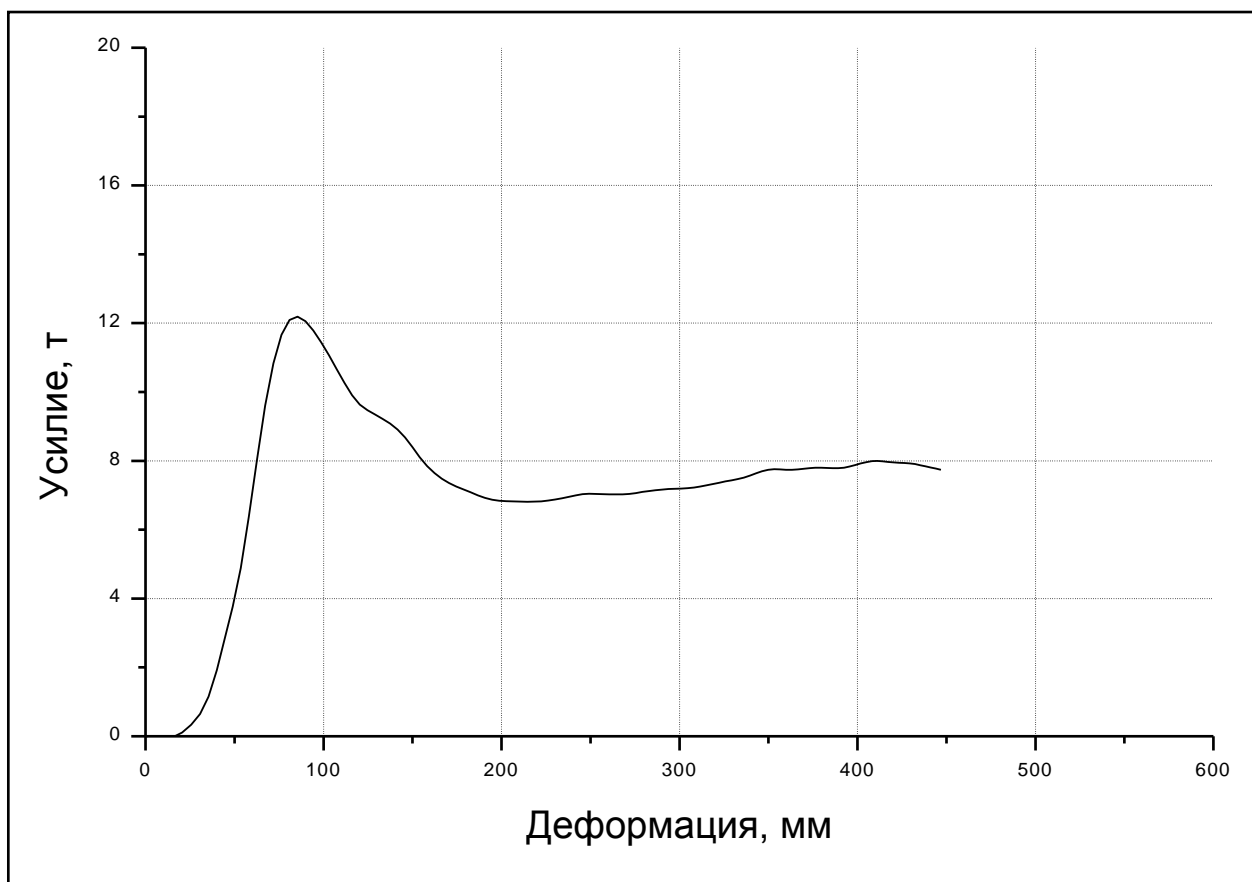


Рисунок 3.2.2 – Вариант 1

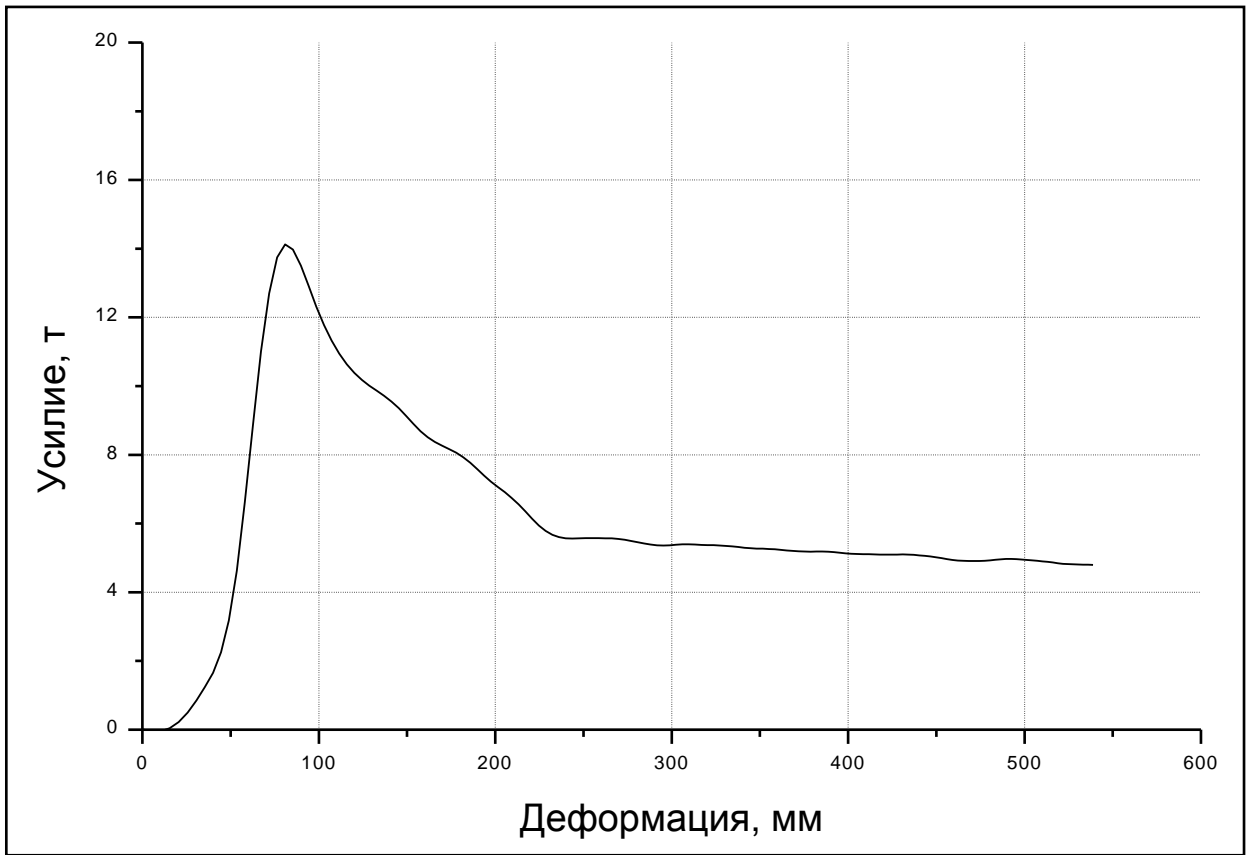


Рисунок 3.2.3 – Вариант 2

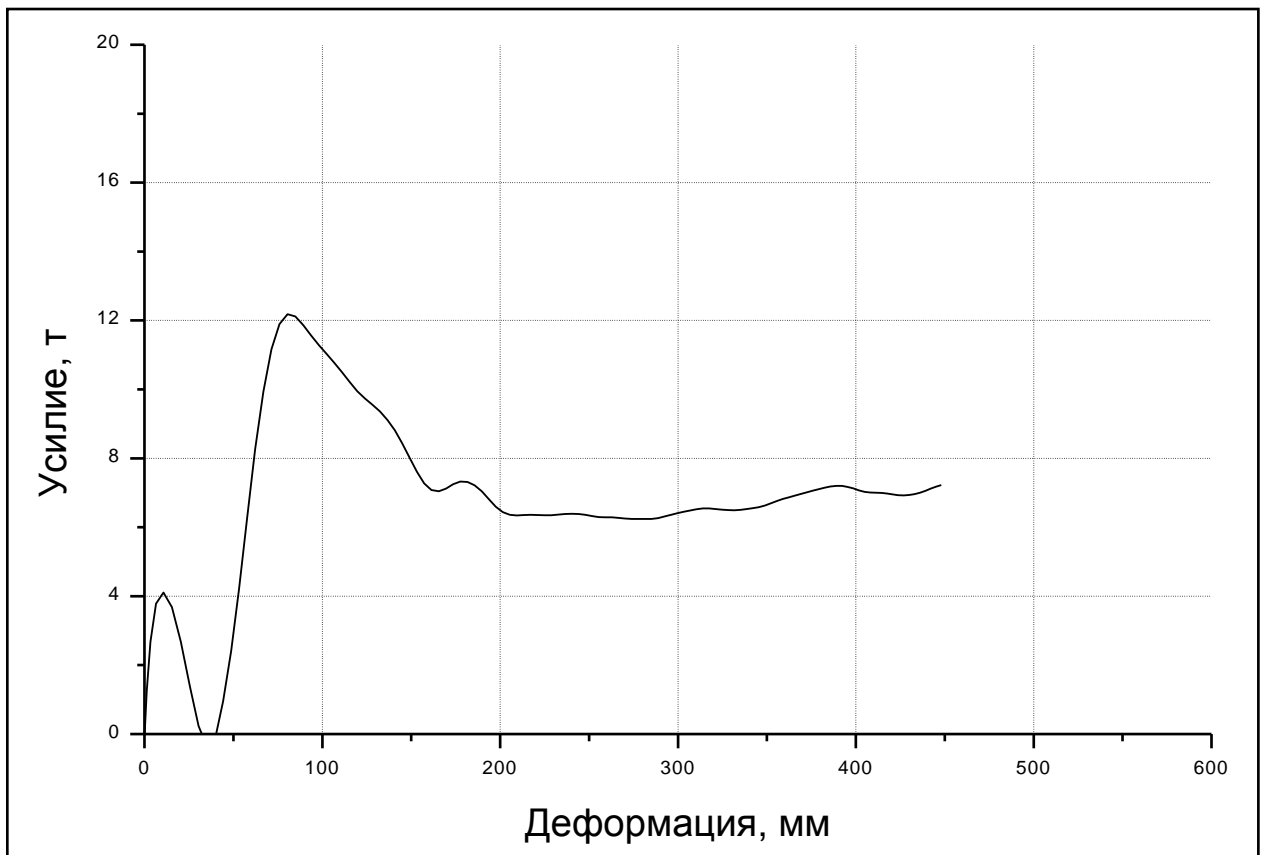


Рисунок 3.2.4 – Вариант 3

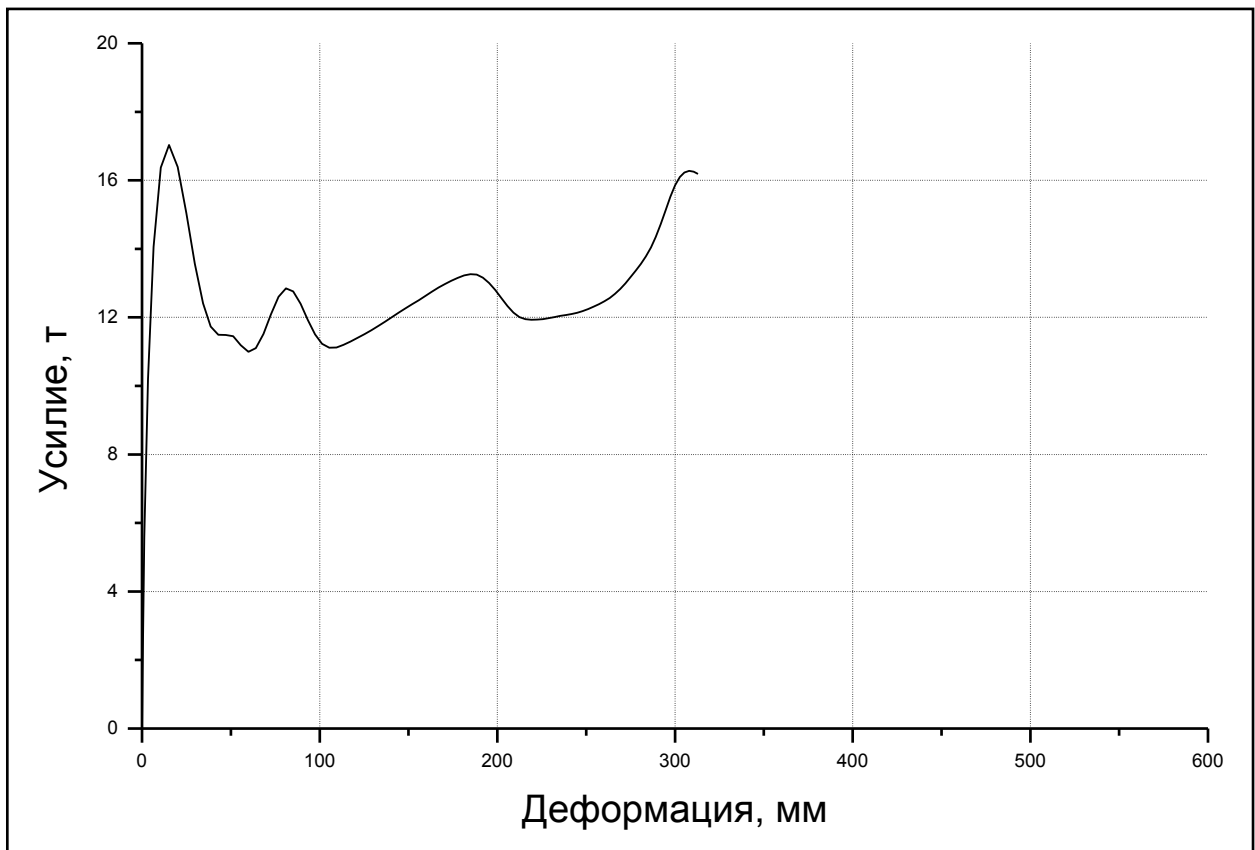


Рисунок 3.2.5 – Вариант 8

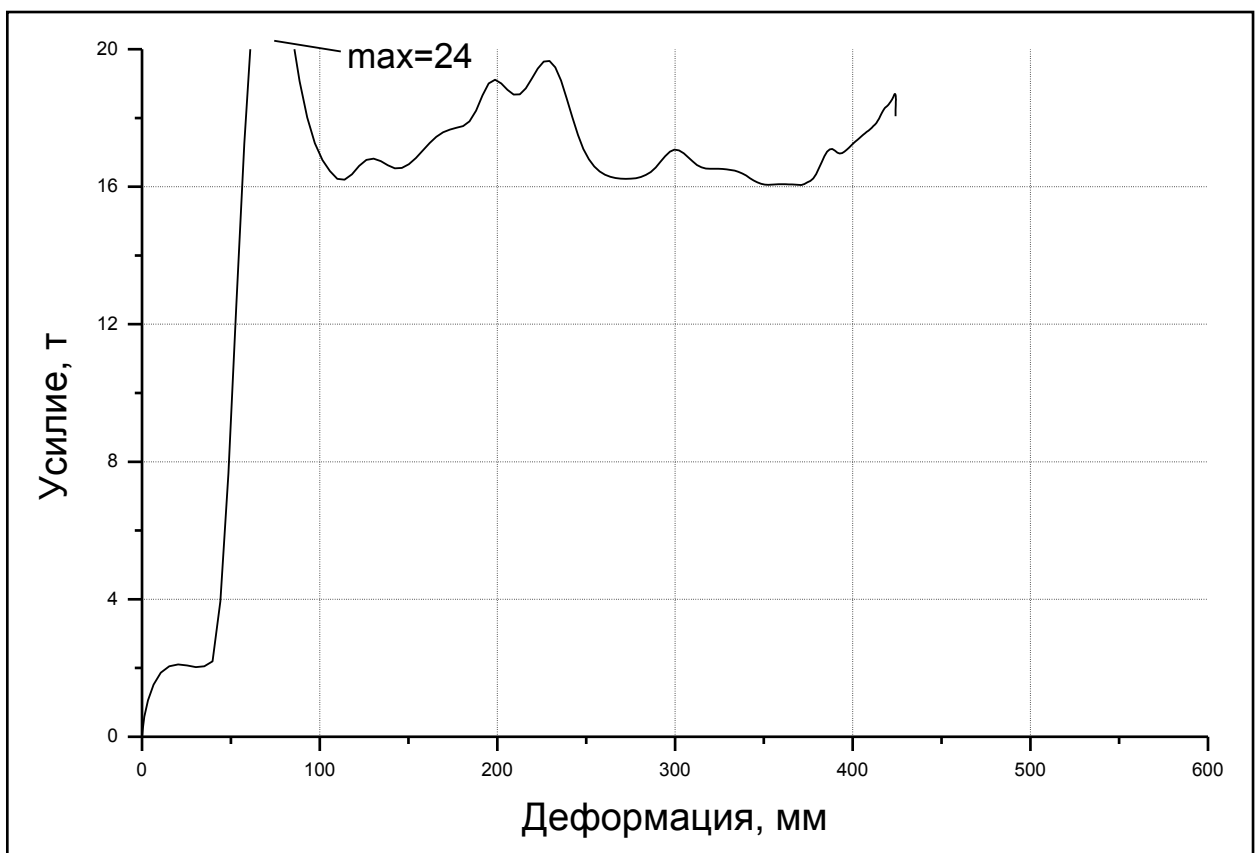


Рисунок 3.2.6 – Вариант 16

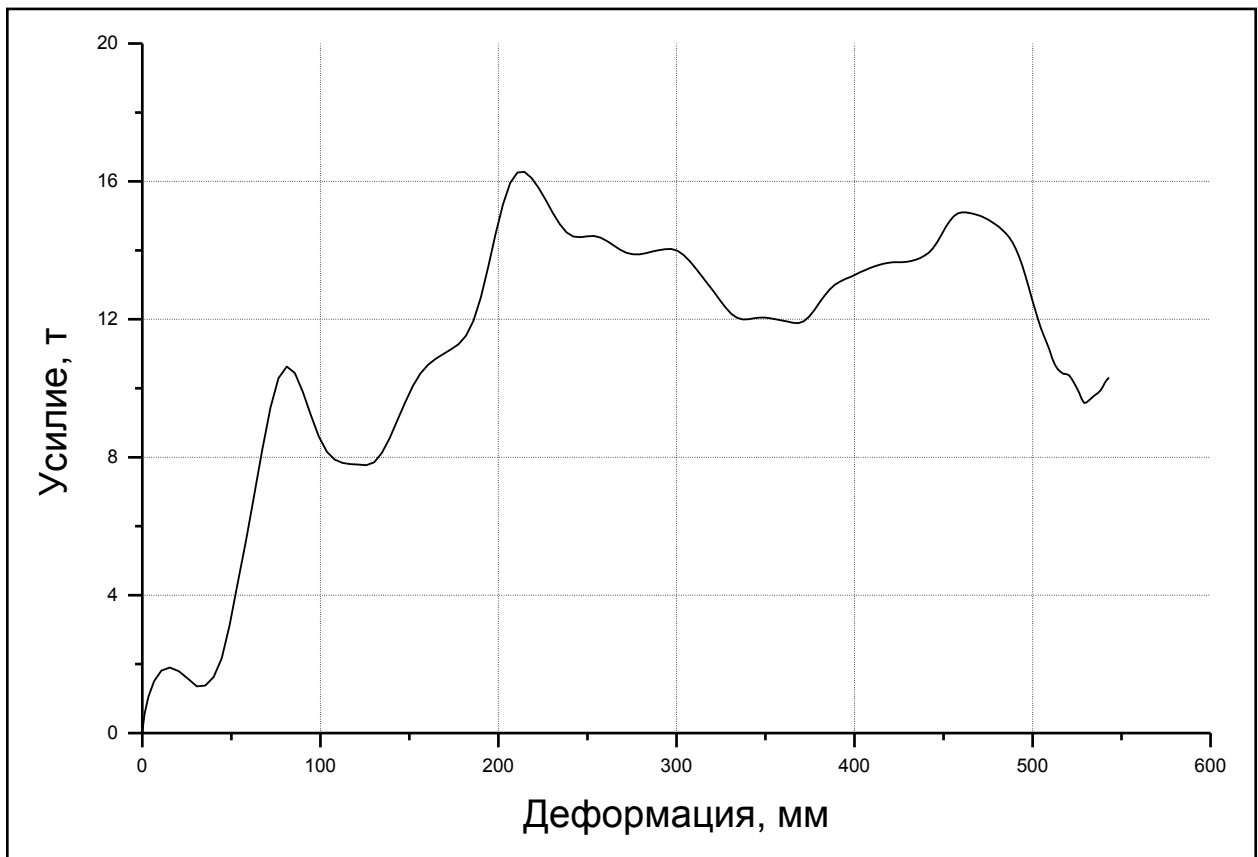


Рисунок 3.2.7 – Вариант 37

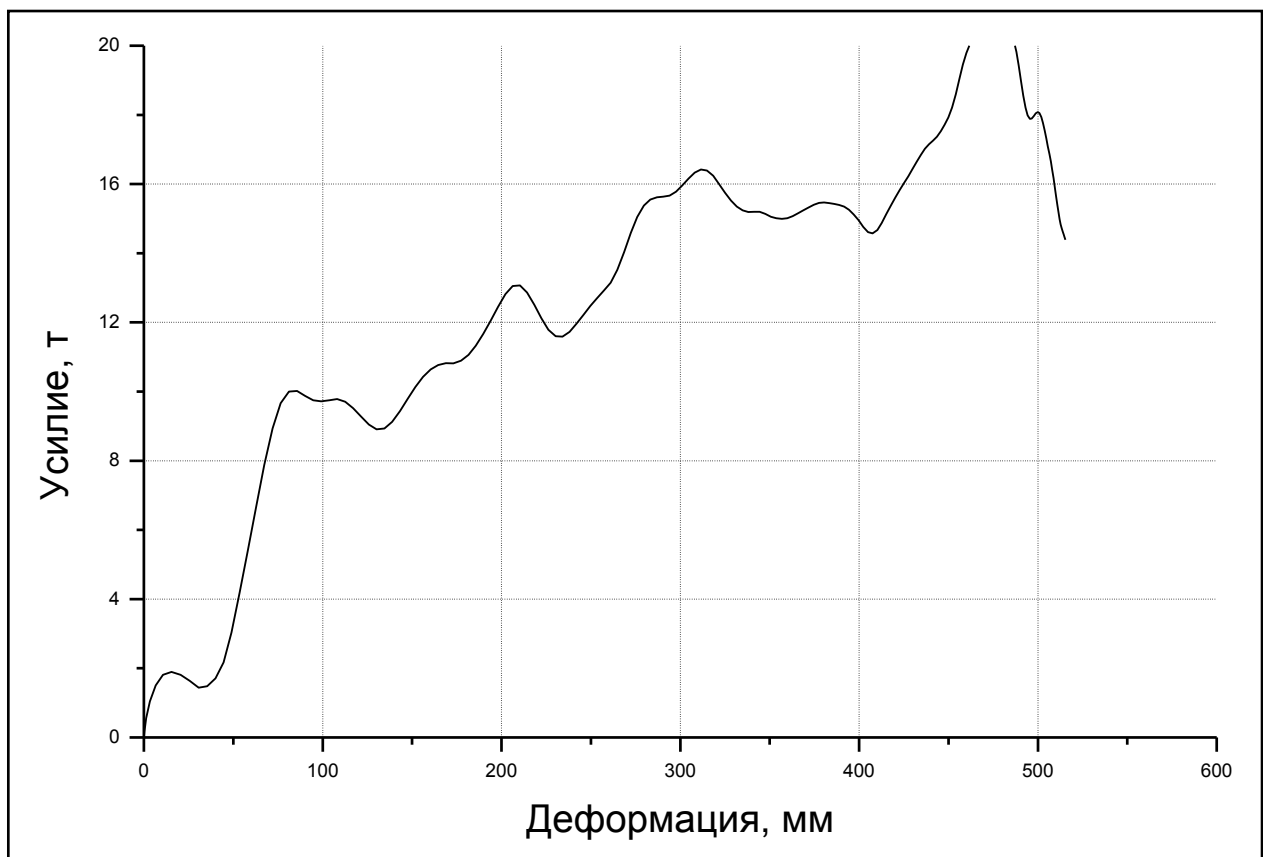


Рисунок 3.2.8 – Вариант 40

По результатам анализа графиков усилия видно, что наибольшее усилие деформации имеет вариант №16, геометрия которого получена в результате согласования с конструкторским подразделением. Однако толщины используемых материалов не рекомендованы к использованию по технологическим соображениям.

Для проведения натурных испытаний рекомендован вариант №40, толщины которого лежат в допустимых пределах. Однако его геометрия требует некоторого изменения конструкции передней части кузова автомобиля.

Модель, обеспечивающая недостаточно адекватные результаты расчетного моделирования, должна быть скорректирована. Процесс модификации модели носит итерационный характер (3 – 4 изменения модели – расчет). В этом случае остается понятным влияние конкретных изменений модели на результат.

Основные этапы оптимизации конечно-элементной модели для удовлетворительного соответствия реальному прототипу следующие:

- проверка модели на конструктивное соответствие испытанному образцу (в плане комплектации);
- более подробное моделирование зон повышенных деформаций и напряжений;
- определение зон разрушения конструкции (отрыв точек сварки, болтов, разрушение материала);
- введение в модель критериев разрушения в соответствующих местах и специальных конечных элементов;
- корректировка соединений между сетками.

Выполнение контрольных расчетов не реже одного на 3 – 4 изменения.

Теперь, имея хорошо отлаженную (валидированную) конечно-элементную модель автомобиля по результатам испытаний прототипа, можно говорить, о доводочных расчетах, которые понадобятся для окончательной, более точной, доводки автомобиля. Перечень доводочных расчетов, которые может включать расчеты, связанные с вопросами локальной жесткости и прочности конкретно взятого узла. Например, появление трещин в местах крепления дополнительно

навешиваемого оборудования (электрический стеклоподъемник, центральный замок, и т. д.) и устранением кузовных дефектов возникающих при эксплуатации автомобиля, которые не были выявлены в предыдущих расчетах из-за более грубой конечно-элементной модели.

Таким образом, обобщая все выше изложенное, можно констатировать, что в данной работе, сделана попытка, показать весь путь расчетного сопровождения проекта от начальной стадии проектирования кузова, его навесных узлов и компонентов до выхода готовой продукции - автомобиля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения данной работы была достигнута цель, а, именно, разработана математическая модель силовой схемы автомобиля, исходя из высокоскоростного фронтального и бокового ударов, жесткости и прочности кузова автомобиля.

Поставленная цель была решена с помощью создания математических моделей с использованием теории подобия и компьютерного моделирования.

В результате выполненной работы получена и опробована на примере новых моделей автомобилей математическая модель. В итоге решения вопросов подобия и условий математического моделирования упругих краевых задач, упругопластических деформаций при сжатии шероховатых поверхностей деталей, а также вязкоупругих деформаций при сопряжении поверхностей деталей технологического оборудования появилась возможность существенно сократить время и затраты при проектировании новых моделей автомобилей.

Разработанная технология позволяет учесть в конструкции автомобиля требования по пассивной безопасности и жесткости кузова на самых ранних этапах проектирования и сократить затраты времени на создание нового автомобиля за счет сокращения циклов работ по доводке его конструкции.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ахметзянов, М.Х. Применение метода фотоупругих покрытий для определения напряжений и деформаций в гибких плитах и оболочках / М.Х. Ахметзянов – Изд. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964. – № 1.
2. Биргер, И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач / И.А. Биргер – М. : Физматгиз, 1961. – 284 с.
3. Бобровский, А.В. Аналитическое исследование распределения остаточных напряжений в заготовке после механической обработки. Сборник научных трудов. Наука. Техника. Образование. Тольятти и регионы / А.В. Бобровский, В.А. Гуляев – Тольятти : 1999. – с. 178-182.
4. Браславский, Д.А. Точность измерительных устройств / Д.А. Браславский, В.В. Петров – М. : Машиностроение, 1976. – 162 с.
5. Вознесенский, В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях / В.А. Вознесенский – М. : Статистика, 1974. – 192 с.
6. Зорин, И.С. О хрупком разрушении упругой плоскости, ослабленной тонким вырезом. Вестник ЛГУ / И.С. Зорин – Л. : 1982. – № 7.
7. Ивлев, Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д. Ивлев, Г.И. Быковцев – М. : Наука, 1971. – 232 с.
8. Игнатьков, Д.А. Остаточные напряжения в неоднородных деталях / Д.А. Игнатьков – Кишинев : Штиница, 1992. – 232 с.
9. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин – М. : Изд. МГУ, 1978. – 256 с.
10. Кобрин, М.М. Определение внутренних напряжений в цилиндрических деталях / М.М. Кобрин, Л.И. Дехтярь – М. : Машиностроение, 1965. – 175 с.
11. Койтер, В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред / В.Т. Койтер – М. : Изд. Иностранной литературы, 1961. – 80 с.

12. Москвитин, В.В. Пластичность при переменных нагрузениях / В.В. Москвитин – М. : Изд. МГУ, 1965. – 264 с.
13. Остаточные напряжения / Ред. Осгуд В.Р. – М. : ИЛ, 1957. – 169 с.
14. Технологические напряжения. Труды II Всесоюзного симпозиума / – М. : 1985. – 390 с.
15. Пригоровский, Н.И. Экспериментальные методы исследования объемного напряженного состояния / Н.И. Пригоровский – М. : Наука, 1966. – 238 с.
16. Прошко, В.М. Исследование напряжений на объемных моделях / В.М. Прошко – М. : Изд. АН СССР, 1956. – 342 с.
17. Сердобинцев, Ю. П., Иванников, А. В. Решение задач конструктора в рамках интеллектуальной информационной системы конструкторско-технологического проектирования пар трения с заданными триботехническими характеристиками: Тезисы докладов Юбилейной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, посвященной 70-летию высшего строительного образования в Волгоградской области. / ВолгГАСА. – Волгоград, 2000. –76 с.
18. Сердобинцев, Ю. П., Сосков, А. А., Игумнов, А. В. Метод повышения износостойкости штампового инструмента при производстве керамических изделий: Автоматизация технологических процессов в машиностроении // Межвуз. сб. науч. тр. / ВолгГТУ. – Волгоград, 1998. – 42 с.
19. Спиридонов, А.А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А.А. Спиридонов – М. : Машиностроение, 1981. – 184 с.
20. Сухарев, И.П. Исследования деформаций и напряжений методом муаровых полос / И.П. Сухарев, Б.Н. Ушаков – М. : Машиностроение, 1969. – 208 с.
21. Физика прочности композиционных материалов. Материалы III Всесоюзного семинара / – Л. : 1979. – 264 с.

22. Финк, К. Измерение напряжений и деформаций / К. Финк, Х. Рорбах – М. : Машгиз, 1961. – 368 с.
23. Челноков, В.А. О спектральном методе в прогнозировании прочности композиционных материалов / В.А. Челноков, М.Н. Голобородько – Л. : 1979. – 156 с.
24. Шевченко, Ю.Н. Термопластичность при переменных нагрузениях / Ю.Н. Шевченко – К. : Наукова Думка, 1970. – 288 с.
25. Patil, S., Tay, Y. Y., Baratzadeh, F., & Lankarani, H. (2017). Modeling of friction-stir butt-welds and its application in automotive bumper impact performance part 2. impact modeling and bumper crash performance. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31(7), 3225-3232. 10.1007/s12206-017-0612-4
26. Kostek, R., & Aleksandrowicz, P. (2017). Simulation of car collision with an impact block. Paper presented at the *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 252(1)10.1088/1757-899X/252/1/012008
27. Kostek, R., & Aleksandrowicz, P. (2017). Simulation of the right-angle car collision based on identified parameters. Paper presented at the *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 252(1)10.1088/1757-899X/252/1/012013
28. Kulkarni, A., Vora, R., & Ravi, K. (2017). Study design and analysis of automobile bumper for pedestrian safety. Paper presented at the *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 263(6)10.1088/1757-899X/263/6/062060
29. Dixit, Y., Begeman, P., Dhaliwal, G. S., Newaz, G., Board, D., Chen, Y., & Faruque, O. (2017). Crashworthiness performance of carbon fiber composite (CFC) vehicle front bumper crush can (FBCC) assemblies subjected to high speed 40% offset frontal impact. Paper presented at the *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings (IMECE)*, 910.1115/IMECE2017-70357
30. Wei, Z., Karimi, H. R., & Robbersmyr, K. G. (2016). Analysis of the relationship between energy absorbing components and vehicle crash response. *SAE Technical Papers*, 2016-April(April)10.4271/2016-01-1541
31. Chen, H., Yang, Y., Wang, Y., & Wang, L. (2014). Study on the effect of beam parameters on automobile bumper collision performance. *Energy Education*

Science and Technology Part A: Energy Science and Research, 32(5), 4373-4380.
Retrieved from www.scopus.com

32. Li, Z., Duan, L., Chen, T., & Hu, Z. (2018). Crashworthiness analysis and multi-objective design optimization of a novel lotus root filled tube (LFT). *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57(2), 865-875. 10.1007/s00158-017-1782-5

33. Teng, T. -, Chang, P. -, Liang, C. -, & Fung, D. -. (2017). Application of crash pulse on the car crashworthiness design. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(9), 1-8. 10.1177/1687814017700096

34. Ispas, N., & Nastasoiu, M. (2017). Analysis of car's frontal collision against pole. Paper presented at the IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 252(1)10.1088/1757-899X/252/1/012012