МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)

«Математическое образование»
(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему «**МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ**»

Студент С.Ю. Холодулина ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель И.В. Антонова ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель программы д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2019 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2019 г.

Тольятти 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **3**

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ 10

§ 1. История возникновения и развития понятия функции в математике....... 10

§2. Характеристика содержательной функциональной линии в школьном курсе математики 14

§3. Различные подходы к формированию понятия функции в общеобразовательной школе.. 20

§4. Системы задач на формирование понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы 33

Выводы по первой главе.. 42

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ 44

§5. Анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы..... 44

§6. Анализ задач ЕГЭ по теме исследования 56

§7. Методический проект изучения темы «Функция $y = sinx$ и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских 62

§8. Результаты педагогического эксперимента 86

Выводы по второй главе.. 95

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.. 96

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 98

ПРИЛОЖЕНИЕ.. 106

ВВЕДЕНИЕ

Актуальностьисследования. «В современных условиях углубляется перестройка школы, целью которой является обеспечение высокого качества образования и развития учащихся. В связи с этим в последние десятилетия внимание ученых-математиков, педагогов, психологов сосредоточено на поиске эффективных средств изучения предмета математики.

Специфика математики как предмета состоит в том, что: 1) понятия математики представляют собой сложную логико-гносеологическую категорию высокого уровня абстракции по сравнению с предметами естественнонаучного цикла; 2) процесс образования, развития и применения математических понятий – сложный, длительный, многоуровневый и многоэтапный процесс.

В целях повышения теоретического уровня, мировоззренческой и практической направленности предметного обучения программы и учебники по математике неоднократно совершенствовались. Произошли заметные позитивные изменения в понятийном аппарате школьного курса математики: уточнены и усилены многие теоретические знания, модельные представления. Однако вместе с этим до настоящего времени до сих пор не преодолены многие недочеты и противоречия в содержании предмета, в существующих подходах формирования математических понятий» [41].

Как известно, «эффективность обучения математике во многом определяется системой работы учителя, одним из важных компонентов которой является *методика формирования основных математических понятий*. В связи с этим требуется перестройка процесса обучения математике с целью формирования у учащихся целостных систем понятий.

Психолого-дидактические основы формирования понятий в процессе обучения разработаны Л.С. Выготским, П.Я. Гальпериным, В.А. Крутецким, Н.А. Менчинской, Ж. Пиаже, М.А. Холодной, И.С. Якиманской.

Теоретическим основам формирования понятий в процессе обучения математике посвящены исследования М.Б. Воловича, Я.И. Груденова, В.А.

Гусева, В.А. Далингера, Т.А. Ивановой, Е.И. Лященко, Ю.М. Колягина, В.И. Крупича, Г.И. Саранцева и др.

Методические аспекты формирования понятий в школьном курсе математики нашли отражение в работах И.В. Егорченко, А.Л. Жохова, М.И. Зайкина, Л.С. Капкаевой, Л.М. Наумовой, М.А. Родионова, А.В. Усовой, Р.А. Утеевой и др.» [4].

Проблеме формирования понятий посвящено большое количество диссертационных исследований, которые были рассмотрены в следующих аспектах: мыслительной деятельности; системы задач; моделирования; современных технологических средств обучения; активизации познавательной деятельности и использования житейского опыта; логического компонента понятия; теории деятельностного подхода и др. [1].

Как нами было отмечено, «к числу основных понятий современной математики относится понятие функции, которое прошло долгий исторический путь развития, прежде чем вошло в науку и школьный курс математики. Функциональная линия - один из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, учение о числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она пронизывает целый курс математики. В 5 – 6-х классах осуществляется функциональная пропедевтика, в 7-9 классах происходит систематическое изучение функционального материала. Затем тема «Функции» продолжает изучаться в старших классах.

Ю.М. Колягин в учебном пособии «Методика преподавания математики в средней школы: Частные методики» утверждает, что понятие функции – одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальной действительностью. В нем ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов и явлений. Функции, их свойства и графики образуют основу школьного курса математики. Вокруг функциональной линии группируется вся современная школьная алгебра, начала математического анализа и в некоторой степени геометрия. Специфичность данной линии заключается в ее возможности устанавливать в обучении внутрипредметные и межпредметные связи» [51].

Немецкий математик и педагог Ф. Клейн (1849 – 1925) был убежден в ведущей роли понятия функции и в математике-науке, и в обучении математике. Ф. Клейн в книге «Элементарная математика с точки зрения высшей» писал: «Какое же понятие в современной математике доминирует? Это есть понятие о функции. Понятие о функции должно играть основную, так сказать, руководящую роль в курсе средней школы. Понятие это должно быть выяснено учащимися очень рано и должно пронизывать все преподавание алгебры и геометрии».

Нами было установлено, что «согласно *федеральному государственному образовательному стандарту* основного общего образования результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать: 1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; 2) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей» [51, С. 5-6].

Задачи по теме «Функции» включены в *основной государственный экзамен*: в первой части они встречаются в заданиях №5, 15, во второй части – в задании №23. Кроме того, задачи по теме исследования присутствуют и в *едином государственном экзамене* (базовый уровень: №11, 14, профильный уровень:В2, В12, С6).

Методике изучения функциональной линии в школьном курсе математики посвящены ряд диссертационных работ, в которых раскрываются вопросы, связанные с функциональной пропедевтикой и трактовкой понятия функции; изучением элементарных функций и их свойств; системой задач при развитии понятия функции; взаимосвязями функциональной и алгоритмической линий [1]; «дифференцированной работой учителя математики при формировании понятия функции» (И.В. Антонова [1], 2004 г.); «формированием понятия функции в условиях реализации межпредметных связей физики с математикой» (Е.В. Турчанинова [44], 2005 г.).

Отметим, что несмотря на имеющийся положительный опыт в методике формирования понятия функции в школьном курсе математики, учителя математики испытывают некоторые затруднения в ее реализации на практике, недооценивают важность формирования данного понятия и не всегда уделяют ему должное внимание.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречиями между:* необходимостью качественного усвоения обучающимися понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школыи недостаточной разработанностью методики его формирования.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявлениеметодических особенностей формирования понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучияматематике в углубленном курсе старших классов общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика формирования понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей формирования понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы и экспериментальной проверке методики ее формирования.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что качественное усвоение понятия функции достигается, если: выявить методические особенности формирования понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы и с их учетом разработать методику формирования данного понятия.

Задачи исследования:

1. Изучить исторические аспекты возникновения и развития понятия функции в математике.

2. Выявить основные цели и задачи обучения функциональной линии в школьном курсе математики, требования к математической подготовке обучающихся.

3. Представить различные подходы к формированию понятия функции в общеобразовательной школе.

4. Разработать системы задач на формирование понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

5. Выполнить анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы.

6. Рассмотреть задачи ЕГЭ по теме исследования.

7. Разработать методический проект изучения темы «Функция $y = \sin x$ и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских для обучающихся старших классов общеобразовательной школы.

8. Провести педагогический эксперимент.

Для решения поставленных задач будут применяться следующие **методы исследования:** анализ научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ школьных программ, учебников и учебных пособий; анализ собственного опыта работы в школе; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2017/18 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы);

2 семестр (2017/18 уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации;

3 семестр (2018/19 уч.г.): проведение анализа школьных учебников и задач ЕГЭ по теме исследования; разработка методического проекта изучения темы«Функция $y = \sin x$ и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских для обучающихся старших классов общеобразовательной школы;

4 семестр (2018/19 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем предложены методические рекомендации по формированию понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- изучены исторические аспекты возникновения и развития понятия функции в математике;

- выявлены основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики общеобразовательной школы, требования к математической подготовке обучающихся;

- рассмотрены различные подходы к формированию понятия функции в общеобразовательной школе;

- представлены системы задач на формирование понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по формированию понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы; разработанный методический проект по изучению темы «Функция$y = \sin x$и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских; система задач по теме исследования.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по формированию понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

2. Методический проект изучения темы «Функция $y = \sin x$ и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских для обучающихся старших классов общеобразовательной школы.

3. Системы задач, направленные на формирование понятия функции, для обучающихся 10-11 классов общеобразовательной школы.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Апробация результатов исследования осуществлялась путем выступлений на научно-исследовательском семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры.Теоретические выводы и практические результаты исследования освещены в материалах IX Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (г. Тольятти, апрель
2019 г.) [52].

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (практики по получения профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности) и преддипломной практик на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе МБУ «Школа №10» г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях.

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы и приложения.

Объем работы - 103 страницы.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. История возникновения и развития понятия функции в математике

Нами определено, что автор статьи [7] Н.Я. Виленкин пишет, что *идея функциональной зависимости* берет своё начало с давних времен. Именно тогда люди стали обдумывать связь происходящих вокруг явлений.

Не смотря на то, что они не владели способностями вычислений, люди замечали, что, например, уровень сытости общины находится в прямой зависимости от числа собранных грибов.

Постепенно количество известных людям зависимостей между величинами росло. Многие из них получили числовое выражение. Так, например, если два барана можно было обменять на 6 лукошек грибов, то четыре – на 12. Таким образом появилась мысль о *пропорциональности величин*.

Позже человечество стало сталкиваться с другими, более замысловатыми зависимостями. Так, например, у людей возникла потребность понимать *зависимости объемов геометрических фигур* от их размеров.

В Древнем Вавилоне в целях упрощения вычислений, вавилоняне составляли таблицы. Они являлись нечем иным как табличным заданием функций: $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2, y = x^3, y = x^2 + +x^3$.

Тем не менее, от составления таблиц до формирования общего понятия функции прошло достаточно много времени.

Первые исследования общих зависимостей между величинами принадлежат ученому из Франции Николаю Оресми. Свои исследования он начал в 14 веке. Его рукописные тексты включают в себя рисунки, которые похожи на нынешние *графики функций*. Отметим, что Николай Оресми помимо изображения этих графиков пытался разбить их на группы, провести их классификацию. Но его замыслы обгоняли степень развития науки, а именно, требовалось обладать умением выражать зависимости между величинами при помощи формулы. В связи с этим, лишь в 16 веке, когда появилась *идея переменных*, возникла возможность развития понятия функции дальше.

Само понятия переменной величины было введено в математику французом Рене Декартом (1596 – 1650). Взаимосвязи между величинами начали представлять в виде чисел. При записи взаимосвязей он стал применять не только цифры, но и буквы. Эти зависимости Рене Декарт записывал в виде уравнений. Чтобы наглядно продемонстрировать записанные уравнения, Р. Декарт заменял все величины длинами отрезков. Данный момент является началом возникновения координатного метода. Параллельно с Р. Декартом схожую мысль развивал математик из Франции Пьер Ферма (1601 – 1665).

Вместе с этим, к началу 17 века математики уже работали с эллипсом, гиперболой, параболой и другими кривыми. Но при этом не было единой схемы исследования кривых. Открытия Р. Декарта и П. Ферма способствовали получению и исследованию новых кривых по их аналитическому виду [6, С. 10 – 12].

Далее, после возникновения *идеи переменных* и *буквенной алгебры* вся мощь математиков была обращена на изучение соответствий между величинами. При помощи координат они обрели графический вид.

Нами было определено, что изначально само понятие функции было в тесной зависимости с геометрическими, а также *механическими представлениями*.

И. Ньютон пришел к идее о переменной величине в связи с изучением вопросов механики. Так, функция для него представлялась как величина, которая менялась с течением времени. А Рене Декарт и Пьер Ферма пришли у идее о переменной величине в связи с рассмотрением геометрических вопросов.

Впервые сам термин *«функция»* был употреблен немецким математиком Г. Лейбницем в 1673 году. Изначально оно применялось в узком смысле, связываясь лишь с геометрическими мыслями. Иными словами, понятие функции еще не было освобождено от своей *геометрической трактовки* [6, С. 16 – 17].

Нами было выявлено, что в начале 18 века было осуществлено перемещение от *интуитивно-геометрического представления* о функции к ее *аналитическому* определению. Большую роль в данном переходе сыграл математик И. Бернулли (1667 – 1748). Именно И. Бернулли в 1718 году «определил функцию переменной величины *как количество, образованное каким угодно способом из этой переменной и постоянных*» [11, С. 99].

Так, «в 1748 г. Леонард Эйлер определил функцию переменной величины как *аналитическое выражение*, составленное каким-либо способом из этой переменной величины и из чисел, либо постоянных величин» [51]. Ему же принадлежит обозначение функции $y = f\ x$ [57, С. 3].

Н.Я. Виленкин, проводя анализ определения И. Бернулли, которое было дано выше, акцентирует внимание на том, что в нем нет ни слова о том, как именно должно быть образовано «количество». В связи с этим возникает потребность решить вопрос о *допустимых способах задания функции*.

К концу первой половины 18 века уже было исследовано колоссальное количество механических вопросов, связанных с движение конкретных точек. Теперь внимание ученых было сосредоточено на вопросах механики сплошных тел, а именно, на проблеме исследования колебаний струны. В решение данного вопроса свой вклад внесли такие ученые, как Эйлер, Даламбер, Д. Бернулли и другие. Работая над вопросом колебаний струны, Эйлер и Даламбер параллельно получили решение, где первоначально отклонение струны могло *на различных участках задаваться различными* *выражениями*. Но необходимо отметить, что Даламбер считал, что начальное условие должно быть задано только одним выражением для всех x, а Эйлер, наоборот, настаивал на правильности этого решения [7, С. 43].

В возникший спор был вмешан Даниил Бернулли. Решение данного вопроса он представил в виде суммы бесконечного ряда, составленного из тригонометрических функций. Д. Бернулли был убежден, что предложенная им формула является самым общим случаем. Однако, Эйлер и Даламбер не разделили его мысль, так как она опровергала существовавшее в то время мнение ученых о том, что «два различных выражения не могут задавать одну и ту же функцию» [57, С. 6].

В итоге этот «спор привёл к тому, что в конце 18 столетия математики, определяя функцию, избегали говорить о том, как она задана» [6, С. 20].

Финальный разрыв понятия функции и ее формулы был осуществлен в первой половине 19 века благодаря французскому математику Фурье.

Благодаря этой идее в 19 веке осуществляется переход к *обобщенному определению функции*, данному впервые немецким математиком Л. Дирихле в 1837 г.: «*y есть функция переменной x (на отрезке $a \leq x \leq b$), если каждому значению x (на этом отрезке) соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие - аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами*». К схожему определению параллельно с Л. Дирихле пришел и русский математик Н.И. Лобачевский (1834 г.) [12, С. 24].

Итак, нами определено, что в конце первой половины 19 столетия понятие функции освободилось от абсолютизма математической формулы. *Идея соответствия* стала новым основанием общего определения понятия функции.

Во второй половине 19 столетия, в период создания теория множеств, «понятие функции стало отождествляться с *понятием отображения*»[35, С. 8].

Создатели теории множеств Г. Кантор и Р. Дедекинд дали *общее определение отображения*. Это позволило внести ясность в *понятие обратной функции, сложной функции* и изучить совокупность иных вопросов.

С начала первой половины 20 столетия вокруг определения Дирихле начали возникать конфликты. В 1930 г. после выхода в свет труда «Основы квантовой механики» Поля Дирака остро встала потребность дальнейшего развития понятия функции, а именно, его расширения. Он ввел *дельта-функцию*[51].

В общем виде понятие обобщенной функции было введено французом Лораном Шварцем [11, С. 25 – 26].

Таким образом, в [51] нами выявлено, что «понятие функции в своем историческом развитии прошло через несколько этапов. История развития понятия функции показывает широту, сложность и многогранность данного понятия. Над ним трудились большое количество ученых. Схема изучения функциональной линии в школьном курсе математики строится с учетом исторических аспектов развития понятия функции. Исторический подход к понятию функции в школьном курсе предполагает повторение в обучении основных этапов, через которые это понятие прошло в науке»[22, С. 259].

§2. Характеристика содержательной функциональной линии в школьном курсе математики

В *федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования*утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» *должны отражать*:

1) «формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

4) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

5) овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучений, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;

6) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах» [46].

Нами было установлено, что «в сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой содержится указание на то, что в курсе математики содержание функциональной линии направлено на получение обучающимися определенных знаний о функции *как фундаментальной математической модели*, позволяющей исследовать и анализировать окружающие нас явления и процессы. Овладение функциональным материалом содействует формированию у обучающихся умения использовать словесный, графический и символьный языки математики. Помимо этого, материал функциональной линии позволяет продемонстрировать роль математической науки в развитии других наук» [51, С. 16].

В результате изучения темы «Функции» в школьном курсе математики основной школы учащиеся должны:

- **знать**:

1. Систему функциональных понятий.

2. Функциональный язык и символику.

3. Элементарные функциональные зависимости.

- **уметь**:

1. Применять систему функциональных понятий, функциональный язык и символику.

2. Строить графики элементарных функций.

3. Анализировать график функции с целью указания ее основных свойств.

4. Применять функционально-графические представления для описания и анализа зависимостей окружающего нас мира и математических задач.

5. Применять графические представления для решения и исследования уравнений, неравенств, систем.

В статье Т.А. Пескова подчеркивается, что «образовательное, практическое и воспитательное значение изучения функций состоит в том, что оно позволяет устанавливать законы изменения различных величин окружающей нас действительности в зависимости от других величин» [34].

В *федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования* [46] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (базовый уровень) *должны отражать*:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

2) сформированностьпредставлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;

3) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.

«Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (углубленный уровень) – требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и *дополнительно отражать*:

1) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

2) сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

В примерной основной образовательной программе среднего общего образования от 28 июня 2016 года [38, С. 107 – 111] указывается, что в ходе изучения раздела «Функции» на *базовом уровне* выпускник научится:

1. Оперировать на базовом уровне основными понятиями функциональной линии.

2. Оперировать на базовом уровне понятиями: прямая и обратная пропорциональность, линейная, квадратичная, логарифмическая и показательная функции, тригонометрические функции.

3. Распознавать графики элементарных функций.

4. Соотносить графики элементарных функций с формулами, которыми они заданы.

5. Находить по графику приближённо значения функции в заданных точках.

6. Определять по графику свойства функции.

7. Строить эскиз графика функции, удовлетворяющей приведенному набору условий (промежутки возрастания / убывания, значение функции в заданной точке, точки экстремумов и т.д.).

В *повседневной жизни* и при изучении других предметов:

1. Определять по графикам свойства реальных процессов и зависимостей.

2. Интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации.

Кроме того, выпускник *получит возможность научиться*:

1. Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции.

2. Строить графики изученных функций.

3. Описывать по графику и в простейших случаях по формуле поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения.

4. Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков.

В *повседневной жизни* и при изучении других учебных предметов:

1. Определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей.

2. Определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радиосвязи и др. (амплитуда, период и т.п.).

В ходе изучения раздела «Функции» на *углубленном уровне* выпускник научится:

1. Владеть понятиями степенная, показательная, логарифмическая функции; строить их графики и уметь применять их свойства при решении задач.

2. Владеть понятиями тригонометрические функции; строить их графики и уметь применять свойства тригонометрических функций при решении задач.

3. Владеть понятием обратная функция; применять это понятие при решении задач.

4. Применять при решении задач свойства функций: четность, периодичность, ограниченность, преобразования графиков функций.

5. Владеть понятиями числовая последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессия; применять при решении задач их свойства и признаки.

Кроме того, выпускник *получит возможность научиться*:

1. Владеть понятием асимптоты, применять его при решении задач.

2. Применять методы решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Выявлено, что Л.А. Горина в статье [13] указывает, что «систематическое использование функционального материала открывает учащимся возможность видеть *внутренние связи* между понятием функции и другими понятиями курса школьной математики, содействовать овладению алгебраическими знаниями. Автор подчеркивает взаимосвязь функциональной линии с линиями уравнений и неравенств, тождественных преобразований и арифметических вычислений. Активное использование графиков при обучении функциям обеспечивает *развитие гармоничного математического мышления*» [51].

Нами было установлено, что «Д. Денбэл в статье [56] отмечает, что функции являются неотъемлемой частью математики. Учащиеся сталкиваются с функциями не только на уроках алгебры и геометрии, а также в других науках. Например, геометрические преобразования плоскости можно воспринимать и исследовать как функции. Функции предоставляют возможность моделировать явления и ситуации, находящиеся за пределами математики» [51, С. 21].

Таким образом, в [51] нами определено, что «можно сформулировать следующие основные *цели обучения функциональной линии*:

1. Формирование у учащихся целостного представления об окружающем мире и взаимосвязи его компонентов на основании исследования реальных зависимостей при помощи функций.

2. Формирование навыков использования функций в повседневной жизни.

3. Формирование у учащихся знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с функциональной линией, в математике и других науках.

4. Формирование у учащихся навыков перевода информации из одного вида в другой: из графической в текстовую, табличную, на язык формул».

§3. Различные подходы к формированию понятия функции в общеобразовательной школе

В работе [51] были выявлены методические особенностиобучения функциям в курсе алгебры основной школы. В результате анализов учебной литературы [21,22, 35]и анализа статей [2, 3, 5, 14, 16, 54] был сделан вывод о том, что «подходить к обучению функциям нужно менее формально, максимально используя *графическое представление функции*. При обучении функциям в курсе алгебры основной школы рекомендуется подкреплять графическими примерами все определения понятий, формулировки свойств. Необходимо использовать *наглядно-образный материал*, активизирующий познавательную деятельность учащихся, повышающий их интерес и качество знаний; устанавливать связь *с жизненными представлениями учащихся*, так как в субъектном опыте учащихся накоплен довольно большой запас зависимостей, в том числе и функциональных; учитывать *связь с содержанием других учебных предметов*, которая реализуется с помощью *метаметодического подхода* к образовательному процессу. Данный подход обеспечивает *целостность образовательного процесса, интеграцию различных учебных предметов* и способствует *реализации требований федерального государственного образовательного стандарта*» [51, С. 89].

Нами установлено, что «при обучении функциям целесообразно использовать компьютерные технологии, что позволяет активизировать устойчивый интерес к математике, получить всесторонние представления об изучаемом математическом объекте, дает возможность рационально расходовать время на уроке. Данные технологии можно использовать при объяснении нового материала, при проведении лабораторно-графических работ, в исследовательской деятельности, а также при подготовке учителя к уроку» [51, С. 89].

Определено, что «Е.В. Турчанинова в [44, 45] рассматривает формирование понятий «функция» и «функциональная зависимость величин» у учащихся основной школы в условиях реализации межпредметных связей физики с математикой. Автор отмечает, что условиями эффективного формирования у учащихся данных понятий являются следующие *положения*:

- осуществление единого подхода к формированию понятий «функция» и «функциональная зависимость величин» в процессе обучения физике и математике, включая применение единой терминологии при формировании данных понятий, предъявление единых требований к их усвоению, использование единых критериев оценки сформированности этих понятий;

- показ учащимся применения математических знаний о понятии «функция» и «функциональная зависимость величин» в процессе изучения физики при формировании физических понятий, исследовании физических явлений и процессов, изучении физических законов.

Как замечает автор, большую роль в процессе формирования научных понятий у школьников играют упражнения. Особое значение при формировании и развитии понятия «функция» имеют упражнения межпредметного характера. Е.В. Турчанинова обращает внимание на то, что на уроках математики необходимо предлагать учащимся задачи физического содержания, а на уроках физики - использовать математические знания учащихся. Это, по мнению автора, будет способствовать уточнению содержания понятия «функция», расширению объема данного понятия, конкретизации понятия «функциональная зависимость физических величин», использованию знаний по математике для объяснения сущности физических процессов и законов» [45].

Токарева Л.И. в [41-43] отмечает, что в 10-11 классах целесообразно обобщать и систематизировать знания учащихся по изучению уравнений, неравенств, функций.

Нами было установлено, что «Е.В. Власова обращает внимание на то, что учащиеся обычно «не видят» функцию, заданную *неявно* (например, $xy = 10,\ 5x + y - 1 = 0$). Для ликвидации данных ошибок рекомендуется «давать учащимся *упражнения* следующего типа: придумайте функцию, заданную неявно, и попробуйте задать каждую из них в явном виде. После введения понятия функции, рассмотрения вопроса о нахождении значения функции при заданном значении аргумента необходимо давать учащимся задания на понимание и использование *функциональной символики*» [46].

Приведем примеры указанных заданий.

Задача 1 [9, С. 54]. «Найдите функцию $f(x)$, если известно, что $f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = 4x$».

Задача 2 [9, С. 54]. «Найдите $f(2)$, если для любого $x \neq 0$ выполнено равенство: $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$».

Нами было установлено, что «А. Серпинская в статье [60] указывает, что в обучении функциям очень важно мотивировать учащихся. Они должны быть заинтересованы в объяснении и выявлении зависимостей. Учащимся должна быть предоставлена возможность использовать знания о функциях в объяснении феноменов их повседневной жизни, а также в других науках. Внимание акцентируется на том, что функции в аналитической форме должны сначала появляться как инструменты при моделировании определенных ситуаций, будь то в реальной жизни или науке. Однако представление реальной ситуации не должно быть идеализировано до такой степени, чтобы превратить построение модели в простое упражнение с уникальным ответом. Выбор модели, по мнению автора, должен быть предметом обсуждения в классе. Автор считает необходимым предоставить учащимся широкий спектр способов задания функции. Также должна быть предоставлена возможность приобрести определенную гибкость в использовании этих способов» [51, С. 79].

Как отмечает В.П. Покровский [35], понятие функции невозможно сравнить с какими-либо понятиями, которые напоминают функцию, но имеют отличия от нее. Поэтому на уроках автор рекомендует давать учащимся задачи, направленные на выяснения, является ли заданная зависимость функциональной. Также важно, чтобы учитель требовал от учащихся приводить собственные примеры как функциональных, так и не функциональных зависимостей.

В методике обучения функциям, как отмечает автор, один из ведущих моментов – комбинирование методов исследования функций: графического и аналитического. Это содействует гармоническому развитию мышления учеников. Помимо этого, ребятам целесообразно продемонстрировать, что исследование функции несет в себе большой практический смысл. Например, благодаря исследованию функции можно предсказать поведение реального процесса, описываемого этой функцией. При введении какого-либо свойства функции немаловажно продемонстрировать учащимся его применение при решении различных задач математики. Например, при решении уравнений, неравенств, текстовых задач «на экстремум».

Нами было установлено, что существует*методическая схема* изучения числовых функций. Данную схему можно использовать при изучении любого конкретного вида функций. Она содержит в себеследующие этапы:

1. Мотивация введения нового вида функции. На данном этапе нужно рассмотреть несколько текстовых задач, решая которые, учащиеся приходят к определенной функции.

2. Формулировка определения функции через её аналитическое задание. На данном этапе ученики получают точное представление о функции, о её признаках, которые выделяют эту функцию среди остальных, учатся распознавать ее по формуле.

3. Построение графика функции. В ходе этого этапа учащиеся не только учатся строить графики конкретных частных случаев функции, но и выясняют влияние параметров на особенность расположения графика функции в системе координат, а также учатся отличать график данной функции от графиков функций других видов.

4. Исследование функции на основные свойства.

5. Применение изученных свойств функции данного вида. Данный этап способствует закреплению основного теоретического материала, связанного с изучаемым видом функций [35, С. 30].

Автор акцентирует внимание на том, что целостное представление о том или ином виде функций (свойства, график, применение) может быть получено только после реализации всех этапов представленной схемы.

Одной из ключевых тем курса алгебры и начала математического анализа 10-11 классов является «Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке». В статье [15] Т.Ю. Дёмина отмечает, что нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин. В связи с этим необходимо сформировать у учащихся устойчивые умения и навыки по решению задач по данной теме. В этой статье автор предлагает систему задач для проведения урока-повторения по данной теме. Начать урок автор предлагает с повторения понятий наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке и теоремы о том, что функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений. После чего необходимо вместе с учащимися сформулировать *алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$:

1) найти критические точки функции на интервале $(a; b)$;

2) вычислить значения функции в найденных точках и на концах отрезка;

3) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

На завершающем этапе урока-повторения автор рекомендует рассмотреть практическую задачу.

Задача 3. Какими должны быть стороны прямоугольного участка площадью 1600 м^2, чтобы на его ограждение было израсходовано наименьшее количество материала?

Для закрепления и отработки материала Т.Ю. Дёмина считает целесообразным предложить учащимся выполнить индивидуальное домашнее задание.

А.Д. Нахман в статье [29] считает, что в курсе алгебры 10-11 классов материал функциональной линии необходимо выделить в отдельный блок содержания «Функции и их свойства». Функции и их графики – средство решения многих исследовательских учебных задач и задач математического моделирования, встречающихся в контрольно-измерительных материалах единого государственного экзамена по математике. Вместе с тем отмечается недостаточнаясформированность у учащихся предметных компетенций по соответствующему материалу.

Автор считает целесообразным свести к минимуму вопросы типа «понятие…», «свойства…», дав им соответствующую «деятельностную интерпретацию»: «нахождение…», «использование». В рамках общих целей изучения математики на базом и профильном уровнях автор рассматривает следующие *задачи*:

1) интегрирование в некоторые общие представления свойств функций, с которыми учащиеся знакомились на отдельных примерах (периодичности, характера четности и др.);

2) выработку общих приемов решения целых классов заданий;

3) формирование у учащихся культуры математических рассуждений и доказательств.

А.Д. Нахман предлагает следующие *методы обучения*:

1. *Обзорное рассмотрение*. Понятия и факты, знакомые учащимся по примерам конкретных типов функций, необходимо собрать воедино, проиллюстрировать в общем случае графически. Целесообразно также изложить обзорно вопросы, связанные с понятиями и свойствами непрерывности, производной и первообразной функции.

2. *Отработка алгоритмов решения стандартных задач*. Стандартные задачи рассматриваются в рамках репродуктивного метода. Отрабатываются алгоритмы исследования функции на четность (нечетность), монотонность, экстремумы и другие.

3. *Теоретические упражнения*. Выполнение теоретических упражнений способствует предотвращению многих типичных ошибок и неверных аналогий.

В статье [29] автор приводит методические комментарии к некоторым вопросам и темам, которые, на взгляд автора, представляются наиболее важными:

1. *Нахождение области определения функции, заданной аналитически.* Поиск области определения функции часто связан с решением неравенств. Необходимо выделить ситуации, когда неравенства требуется объединить в систему, а когда – в совокупность. В соответствии с этим следует сформировать у учащихся умения находить пересечение и объединение

числовых множеств. С этой целью может использоваться, например, такая задача.

Задача 4. Найдите область определения функции:

а) $y=\log_x(5-x)$; б) $y=\sqrt{\sqrt{x+2}-2}$.

2. *Суперпозиция функций (сложная функция)*. Важной составляющей данной темы являются вопросы синтеза суперпозиции функций (построение сложной функции по заданной цепочке основных элементарных функций) и ее анализа (восстановление цепочки по заданной сложной функции). Умение решать последнюю задачу необходимо для освоения техники дифференцирования. Приведем пример задачи на анализ суперпозиции функций.

Задача 5. О функциях f и g известно, что $f(2x)=4(x-1)$ при всех значениях x и $f(g(x))=\frac{4(1-x)}{x}$ при $x\neq 0$. Найдите $g(x)$.

Решение. Определим вид функции g. Положим $g=2x$. Ввиду произвольности x получим $f(g)=2g-4$ для каждого значения g. Если$g=g(x)$, то $f(g(x))=2g(x)-4$. С другой стороны, $f(g(x))=\frac{4(1-x)}{x}$, значит, $2g(x)-4=\frac{4(1-x)}{x}$. Отсюда $g(x)=\frac{2}{x}$.

Автор отмечает, что прием замены переменной, состоящий в переходе от суперпозиции$f(\varphi(x))$к функции $f(t)$, где $t=\varphi(x)$, можно использовать не только при решении уравнений и неравенств. Нередко он позволяет «увидеть» нужную формулу в процессе упрощения выражений.

3. *Обратная функция*. При изучении данной темы отрабатывается алгоритм нахождения функции, обратной данной, обращается внимание на взаимное расположение графиков таких функций.

4. *Применение свойств функций при решении задач повышенного и высокого уровней сложности*. Несмотря на то, что соответствующие задания носят нестандартный характер, их решение облегчается определенными стандартными «функциональными» приемами.

Х.Ш. Шихалиев в статье [55] рассматривает методику введения понятия «тригонометрическая функция» в школе. Автор считает, что начинать знакомство учащихся с этим понятием следует с родового понятия «функция», затем следует переход к видовому варианту – функции угла. Возвращаясь позже к другим вариантам знакомства с этим понятием, следует рассматривать их в качестве следствий такого общего подхода.

Затем, осознанный подход к любому преобразованию тригонометрических выражений происходит через восприятие определения функции, а это и есть, как замечает автор, основа повышения качества знаний и формирования математической культуры школьника. При таком подходе дальнейшее изучение материала, связанного с тригонометрией, протекает проще и осознанно.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» представлено много конспектов по теме «Тригонометрические функции и их свойства». Так, например, учитель математики Т.Н. Овчинникова для повторения понятия четная или нечетная функция предлагает задание «математическое лото». Учащимся раздаются таблицы, в ячейках которых расположены формулы функций. Требуется заштриховать те ячейки, в которых расположена чётная (нечётная) функция. Это задание можно дать детям как индивидуально, так и для работы в группе.

Также в данном конспекте учитель математики предлагает задание для работы в группах по построению графиков тригонометрических функций. Т.Н. Овчинникова отмечает, что «работа в группе сообща над заданием, ученик соотносит своё «Я» с самим собой и окружающими, сравнивая разное или одинаковое видение задачи и процесса её решения, оценивая свои возможности и притязания. Здесь формируется умение работать в группе, умение отстаивать свою точку зрения и принимать точку зрения товарищей» [32].

Ребятам каждой из групп предлагается самостоятельно в тетрадях построить графики тригонометрических функций, предварительно определив её область определения, область значения и период. Каждая группа получает также заготовки системы координат на листе формата А4 или А3, на которых им необходимо изобразить выполненное задание. При построении графиков можно использовать фломастеры разного цвета.

Задания для 1 группы:

1. В одной системы координат постройте графики функций: $y = \sin x; y = 3sinx; y = sinx - 2$.

2. Найдите область определения, область значения функции, период функции и постройте график функции $y = cos2x + 3$.

Задания для 2 группы:

1. В одной системы координат постройте графики функций: $y = \cos x; y = cos2x; y = cos2x - 1$.

2. Найдите область определения, область значения функции, период функции и постройте график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Задания для 3 группы:

1. В одной системы координат постройте графики функций: $y = \cos x; y = -2cosx; y = 3 - cosx$.

2. Найдите область определения, область значения функции, период функции и постройте график функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Затем каждой из групп рекомендовано защитить выполненную работу перед остальными. Работа каждого участника группы оценивается всей группой.

А.Г. Мордкович рассматривает тактику и стратегию введения в школьном курсе математики формальных определений свойств функций. Под стратегией автор понимает ответ на вопрос, *когда* дать формальное определение, а пот тактикой – *как* подойти к формальному определению. Как отмечает А.Г. Мордкович, «иногда целесообразнее выбрать постепенной к нему подход на основе предварительного изучения понятия на более простых уровнях: наглядно-интуитивный (визуальный), рабочий (описательный) и формальный. Наглядно-интуитивный уровень – это характеристика того или иного свойства функции по ее графику» [26]. Рабочий – это ответ на вопрос «Как ты понимаешь, что такое …». Формальный уровень – это ответ на вопрос «Что такое …».

Свой подход А.Г. Мордкович объясняет тем, что учащиеся 7-9 классов более восприимчивы к новым математическим понятиям, чем школьники старших классов.

А.Г. Мордкович рекомендует все свойства функций, какие возможно, лучше перенести в основную школу, а в старшей школе впервые появляются лишь три свойства: периодичность, дифференцируемость и экстремум. Таким образом, по таблице видно, что в 7 классе работа со школьниками ведется только на наглядно-интуитивном уровне, в 8 классе их преимущественно переводят на рабочий уровень и только в 9 классе – на формальный уровень.

Н.М. Карпушина в статье [17] описывает математическую игру «Девятка» (аналог популярной карточной игры), которую можно использовать при проведении урока-повторения темы «Функции».

В игре могут принимать участие два, три, четыре или шесть человек. В начале игры они получают по одинаковому числу перемешанных произвольным образом карт. Игрокам необходимо выложить четыре одинаковых по структуре цепочки, состоящих из расположенных в заданном порядке девяти карт одной масти. Карты одной масти отражают в той или иной форме сведения о конкретном изучаемом понятии, характеризуя его с разных сторон. Так, например, для темы «Тригонометрические функции» масти карт могут быть следующие: синус, косинус, тангенс и котангенс, а достоинства карт – название функции, формула, свойства и график.

Игроки по очереди выкладывают на стол – согласно установленному порядку – имеющиеся на руках карты. В данном случае порядок карт в любой цепочке такой:

1. Название тригонометрической функции.

2. Задающая её формула.

3. Область определения, множество значений функции.

4. Наименьший положительный период.

5. Чётность (нечётность).

6. Нули функции.

7. Промежутки монотонности.

8. Точки экстремума.

9. График функции.

Данный порядок соответствует логике изучения свойств функций. Кроме того, он отражает общую схему исследования функций, использующуюся для построения их графиков. Выстраивая карты в указанном порядке, ученики фактический воспроизводят алгоритм исследования функции. Победителем (проигравшим) считается игрок, первым (последним) избавившийся от всех карт.Н.М. Карпушина отмечает, что такие же карты можно изготовить и для других видов функций, свойства которых подробно изучаются в школьном курсе алгебры. Например, степенная функция с натуральным показателем (целым отрицательным показателем), логарифмическая функция, показательная функция.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» представлено много конспектов на закрепление темы «Применение производной в решении прикладных задач». Так, например, учитель математики Н.Д. Винокурова[8] предлагает конспект урока подготовки к ЕГЭ. Целью данного урока является систематизация предметных знаний, умений, навыков, универсальных учебных действия (решение предметных задач). В результате данного урока учащиеся учатся решать и придумывать текстовые задачи, практико-ориентированные прикладные задачи, исследовать функцию с помощью производной. Помимо этого, данный урок позволяет увидеть роль и место математики в других дисциплинах и окружающей жизни, а также применять знания и умения в решении тестовых работ ЕГЭ.

А. Панора в статье [59] отмечает, что учащиеся сталкиваются с большим количеством препятствий при изучении понятия функции. Данную проблему автор связывает с неправильным подходом к их обучению. Также автор замечает, что на способности учащихся решать задачи, связанные с функциями, влияет типичный характер школьных задач, что приводит к использованию стандартных процедур. В соответствии со стандартной дидактической последовательностью учащихся просят определить свойства функции, используя данный график.

Автор замечает, что одной из основных характеристик понятия функции является то, что функция может быть представлена различными способами (таблица, графики, уравнения, описание), и важным аспектом ее понимания является возможность использовать эти представления и уметь переходить от одного способа к другому.Чтобы иметь возможность использовать эти различные представления, учащиеся должны понимать основные особенности каждого из них и их ограничения. А.Панора считает, что одним из способов улучшить понимания учащимися некоторых математических понятий (в том числе и понятия функции) может быть использование графических технологий.

Лиза Л. Климент в [58] отмечает, что представления учащихся о некотором математическом понятии могут сильно отличаться от математически приемлемого определения. Представления учащихся о понятиях часто очень узкие или, наоборот, они могут включать ошибочные предположения.Так, общие представления учащихся о понятии функции включают следующее:

- функция должна быть задана одним правилом. Некоторые учащиеся считают, что функция с разделенной областью определения представляет собой две или более функции;

- график функции должен быть непрерывным. Например, учащиеся часто не рассматривают график функции наибольшего целого числа в качестве представления функции;

- функция должна быть взаимно-однозначной. Например, $f\ x\ =$ 12часто не считается функцией, поскольку она не является взаимно-однозначной.

Эти чрезмерно узкие взгляды препятствуют правильному формированию понятия функции у учащихся. В связи с этим, при обучении понятия функции Лиза Л. Климент рекомендует акцентировать внимание на данных вопросах.

Таким образом, в [51] нами выявлено, что «подходить к обучению функциям нужно менее формально, максимально используя *графическое представление функции*. Необходимо использовать *наглядно-образный материал*, активизирующий познавательную деятельность учащихся, повышающий их интерес и качество знаний; устанавливать связь *с жизненными представлениями учащихся*». Кроме того, в методике обучения функциям одним из основных аспектов является сочетание графического и аналитического методов исследования функций. Это способствует гармоничному развитию мышления учащихся. Существует определенная *методическая схема* изучения числовых функций. Данная схема применима для изучения любого конкретного вида функций и включает в себя 5 этапов (мотивация введения нового вида функции, формулировка определения, построения графика, исследование функции на основные свойства, применение свойств функции к решению задач).

§4. Системы задач на формирование понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы

Ранее, в [51] были описаны требования к системам упражнений по теме «Функции».

Было выявлено, что Е.И. Лященко выделяет следующие *особенности системы задач на усвоение понятия и его определения*:

1. Наличие задач, связанных с показом практической значимости нового понятия или с его значимостью для дальнейшего продвижения в изучении математики.

2. Наличие задач на актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия.

3. Наличие задач на выделение существенных признаков понятия.

4. Наличие задач на распознавание формируемого понятия.

5. Наличие задач на усвоение текста определения понятия

6. Наличие задач на использование символики, связанной с понятием.

7. Наличие задач на установление свойств понятия.

8. Наличие задач на применение понятия [51, С. 102].

Также были выявлены «следующие принципы отбора и составления систем упражнений:

1. *Принцип систематичности.* В системе задач должны присутствовать упражнения на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного, упражнения, связывающие новый факт с ранее изученным материалом, и упражнения на систематизацию изученного материала.

2. *Принцип последовательности.* Упражнения располагаются в порядке возрастания сложности: от менее сложного к более сложному.

3. *Принцип прочности.* Данный принцип проявляется в наличии однотипных упражнений» [51, С. 103].

С учетом рассмотренных различных требований к системам упражнений, нами были составлены системы задач, удовлетворяющие требованиям Е.И. Лященко, на следующие темы: «Функции и способы их задания», «Функции $y = sin\, x, y = cos\, x$, их свойства и графики», «Функции $y = tg\, x, y = ctg\, x$, их свойства и графики», «Показательная функция, её свойства и график», «Логарифмическая функция, её свойства и график». Ответы и указания к решению систем задач представлены в Приложении А.

Система задач на тему «Функции и способы их задания»

Задача 1.«Площадь треугольника со стороной a и высотой h, опущенной на эту сторону, равна 20. Выразите длину стороны a, как функцию длины высоты h и найдите область определения и множество значений этой функции»[24, С. 39].

Задача 2. «В баке, емкость которого $8\,м^3$, находится $2\,м^3$ воды. Каждую минуту в бак поступает по $0,15\,м^3$ воды. Сколько кубометров (V) воды будет в баке черезtмин? Задайте функцию V формулой. Сколько воды будет в баке через 20 мин; 24 мин; 30 мин; 35 мин? Через сколько минут в баке будет $3{,}5м^3$; $6{,}2м^3$ воды?» [51, С. 106].

Задача 3. Какие из данных таблиц (а, б) задают функциональную зависимость переменной y от переменной x?

а)

x	- 1	0	1	2
y	0	1	2	3

б)

x	2	3	4	5	3
y	- 2	4	9	8	8

Задача 4. «Решите данное уравнение относительно yи относительно x. Исходя из полученных решений и допустимых значений переменных, выясните, можно ли говорить, что данное уравнение задает функцию вида$y = f(x)$или/и вида $x = \varphi\ y$: а) $2x + 3y = 24$;б) $7x - 5y = 35$» [24, С. 40].

Задача 5. «Заполните пропуски. Функцией называется такая ________ переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует __________ значение переменной y» [51, С. 104].

Задача 6. «Найдите значение функции $f\ 3$,$f\ -2$,$f\ 0$,если$f\ x\ =$ $x +\ x$ » [27, С. 15].

Задача 7. «Пусть $f\ x\ = -3x + 2$.Найдите: а) $f\ -x$; б) $f(x + 5)$; в) $f(f\ 1\ )$; г) $f(f\ x\ )$» [24, С. 42].

Задача 8. «Найдите естественную область определения функции: а) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3x+2}$; б) $f(x)=\sqrt{x^3-4x}$; в) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$» [36, С. 215].

Задача 9.«Правило f, задающее функцию$y=f(x)$, ставит в соответствие каждому двузначному числу сумму его цифр. Найдите: 1) $D(f)$; 2) $f(17), f(35), f(59)$; 3) при каких значениях xфункция$f(x)$принимает значение, равное 3; 4) наибольшее и наименьшее значения функции»[27, С. 11].

Задача 10. «Постройте график функции:

$$y=\begin{cases} x+2, \text{если } -4 \le x \le -2; \\ 0, \text{если } -2 < x \le 0; \\ x^2, \text{если } 0 < x \le 3. \end{cases}$$

Используя заданный график функции, установите: 1) какова область определения функции $y=f(x)$; 2) чему равны наименьшее и наибольшее значения функции; 3) при каких значениях аргумента значение функции равно нулю, больше нуля, меньше нуля; 4) где функция возрастает, где убывает» [51, С. 105].

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Функции и способы их задания», как №1, 2, 4 – на аналитическое задание функции, №3,5 – на понимание формируемого понятия, №8 – на нахождение области определения функции, №6, 9 – на нахождении значения функции по заданному значению аргумента и наоборот, №10 – на построение графика функции, №7 – на применение функциональной символики.

Система задач на тему «Функции $y=\sin x, y=\cos x$,

их свойства и графики»

Задача 11. «Найдите значение функции: а) $2\sin(x-\frac{\pi}{6})+1$при $x=\frac{4\pi}{3}$; б) $-\sin(x+\frac{\pi}{4})$при $x=-\frac{\pi}{2}$» [24, С. 90].

Задача 12. «Принадлежит ли графику функции $y=2\cos(x-\frac{\pi}{6})+1$ точка с координатами: а) $(0;\ \sqrt{3}+1)$; б) $(\frac{\pi}{6}; 1)$; в) $(\frac{\pi}{2}; 2)$; г) $(\frac{\pi}{6}; 3)$»[24, С. 91]?

Задача 13. Ответьте письменно на следующие вопросы: 1) в каком случае говорят, что задана функция $y = sinx$числового аргумента x; 2) в каком случае говорят, что задана функция $y = cosx$числового аргумента x?

Задача 14. «Постройте график функции $y = \cos x$на промежутке от 0 до 2π, взяв за единицу 2,5 см. Выделите цветными карандашами те точки графика, ординаты которых: а) равны: $0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) больше: $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) меньше: $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$» [27, С. 155].

Задача 15.«Найдите область определения функции: 1) $y = sin2x$; 2) $y = cos\frac{x}{2}$; 3) $y = sin\ \sqrt{x}$» [19, С. 313].

Задача 16. «Определите промежутки возрастания (убывания) функции $y = sinx$ на отрезке: а) $\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$; в) $-\pi; \pi$; г) $0; 2\pi$ »[30, С. 284].

Задача 17. «Дано: $f\ x\ = 2x^2 - x + 1$.Докажите, что $f\ sinx\ = 3 -$ $-2cos^2x - sinx$» [24, С. 95].

Задача 18. «Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа: 1) $cos\frac{\pi}{7}$и $cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $cos\frac{8\pi}{7}$и $cos\frac{10\pi}{7}$; 3) $\cos 1$и $\cos 3$» [19, С. 313].

Задача 19. «Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = cosx, \\ y = -x^2 + 2x - 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = cosx, \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$ » [24, С. 97]?

Задача 20. «Сила переменного электрического тока – функция, зависящая от времени, выражается формулой$I = A\ sin(\omega t + \varphi)$, где $A -$ амплитуда колебания, ω – частота, $\varphi -$ начальная фаза. Построить график этой функции, если $A = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$» [19, С. 309].

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Функции $y = sin\ x, y = cos\ x$, их свойства и графики», как №11, 12 – на нахождение значения функции по заданному значению аргумента, №13 – на понимание формируемых понятий, №14, 20 – на построение графиков функций, №15, 16, 18 – на установление свойств данных функций, №17 – на понимание функциональной символики, №19 – на применение понятия.

Система задач на тему «Функции $y = tg\ x, y = ctg\ x$, их свойства и графики»

Задача 21. «Вычислите: а) $tg\ \ -\frac{31\pi}{6}$; б) $ctg\ \ \frac{35\pi}{3}$; в) $tg\ \ -\frac{263\pi}{4}$; г) $ctg\ \ -\frac{173\pi}{2}$ » [36, С. 341].

Задача 22. Ответьте письменно на следующие вопросы: 1) в каком случае говорят, что задана функция $y = tgx$числового аргумента x; 2) в каком случае говорят, что задана функция $y = ctgx$числового аргумента x?

Задача 23. «Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = tgx$ на заданном промежутке: а) на интервале $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; б) на полуинтервале $\frac{3\pi}{4}; \pi$; в) на отрезке $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}$; г) на полуинтервале $\pi; \frac{3\pi}{2}$ » [24, С. 112].

Задача 24. «Исследуйте функцию$y = f(x)$на четность, если: а) $f\ \ x\ \ = tgx - cosx$; б) $f\ \ x\ \ = tgx + x$; в) $f\ \ x\ \ = ctg^2x - x^4$» [24, С. 113].

Задача 25. «Дана функция$y = f(x)$, где $f\ \ x\ \ = tgx$.Докажите, что: а) $f\ \ 2x + 2\pi\ \ + f\ \ 7\pi - 2x\ \ = 0$; б) $f\ \ \pi - x\ \ + f\ \ 5\pi + x\ \ = 0$» [24, С. 113].

Задача 26. Используя график функции $y = ctgx$: 1) найдите приближенное значение: а) $ctg\frac{\pi}{6}$; б) $ctg1$; в) $ctg2$; 2) сравните значения: а) $ctg\frac{\pi}{11}$и $ctg\frac{\pi}{12}$; б) $ctg\frac{\pi}{7}$и $ctg\frac{8\pi}{7}$; в) $ctg1$и $ctg2$[27, С. 162].

Задача 27. «Постройте график функции и выясните её свойства: 1) $tg\ \ x + \frac{\pi}{4}$; 2) $y = tgx - 2$; 3) $y = ctgx + 1$» [19, С.320].

Задача 28. «Решите графически уравнение: а)$tgx = -\sqrt{3}$; б) $tgx = 1$; в) $tgx = -1$; г) $tgx = 0$» [24, С. 112].

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Функции $y = tg\, x, y = ctg\, x$, их свойства и графики», как №21 – на нахождение значения функции по заданному значению аргумента, №22 – на понимание формируемых понятий,№23, 24 – на установление свойств данных функций, №25 – на понимание функциональной символики, №26, 28 – на применение понятия, №27 – на построение графиков функций.

Система задач на тему «Показательная функция, её свойства и график»

Задача 29. «Период полураспада плутония равен 140 сут. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса 8 г (примечание: радиоактивный распад описывается формулой $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_0}}$, где $m(t)$ и $m_0 -$ массы радиоактивного вещества соответственно в момент времени tи в начальный момент времени $t = 0$, T_0 $-$период полураспада)»[19, С. 48]?

Задача 30. «Решите уравнение, представляя его правую часть в виде степени с тем же основанием, что и степень в левой части: 1) $2^x = 16$; 2) $5^x = 625$; 3) $5^x = \frac{1}{125}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$» [27, С. 84].

Задача 31. «Принадлежит ли графику функции $y = 2^x$точка: 1) $A(5; 32)$; 2) $B(-3; 0{,}125)$; 3) $C(4{,}5; 16\sqrt{2})$; 4) $D\left(-1{,}5; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$» [27, С. 83]?

Задача 32. «Определите a, если известно, что график функции $y = a^x$проходит через точку: 1) $M(0{,}5; 3)$; 2) $K(2; 5)$» [27, С. 84].

Задача 33. «Среди заданных функций укажите те, которые являются показательными: а) $y = 3^x$; б) $y = x^3$; в) $y = x^{\frac{5}{3}}$; г) $(\sqrt{3})^x$» [25, С. 63].

Задача 34. Постройте график функции: а) $y = 2^x$; б) $y = 2^{x+3}$; в) $y = 2^x - 1$ [30, С. 147].

Задача 35. Заполните пропуски. Функцию _____, где $a > 0$, $a \neq$ ___, называют показательной функцией.

Задача 36. «Докажите, что для функции$y = f(x)$, где $f(x) = 2^x$, выполняется равенство: а) $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$; б) $f(x+1) \cdot f(2x) = 2f^3(x)$» [25, С. 68].

Задача 37. Найдите область определения функции: 1) $y = 3^{\frac{1}{x}}$; 2) $0{,}2^{\frac{1}{x^2}}$; 3) $2^{\sqrt{x-1}}$ [19, С. 49].

Задача 38. «Выясните, является ли функция: 1) $y = 2^x + 2^{-x}$; 2) $y = 2^x - 2^{-x}$чётной, нечётной, или она не является ни чётной, ни нечётной» [27, С. 84].

Задача 39. «Решите графически неравенство: 1) $2^x > -x + 3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq x + 4$» [19, С. 50].

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Показательная функция, её свойства и график», как №29 – на демонстрацию практической значимости нового понятия, №30 – на актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия, №31 – на нахождение значения функции по заданному значению аргумента, № 32, 33, 35 – на понимание формируемого понятия, №34 – на построение графиков функций, №36 – на понимание функциональной символики, №37, 38 – на установление свойств данных функций, №39 – на применение понятия.

Система задач на тему «Логарифмическая функция, её свойства и график»

Задача 40. Во сколько раз «полуваттная» (наполненная газом) лампа, температура нити накала которой 2500 градусов абсолютной шкалы испускает больше света, чем пустотная с нитью, накалённой до 2200 градусов?

Задача 41. Пользуясь определением логарифма, найдите: а) $\log_2 4$; б) $\log_3 81$; в) $\log_{0,5} 0{,}125$; г) $\log_3 \frac{1}{27}$; д) $\log_{0,5} 8$[27, С. 91].

Задача 42. «Найдите значение логарифмической функции $y = \log_3 x$в указанных точках: а) 3^7; б) 3^{-3}; в) $3^{-1,7}$» [25, С. 90].

Задача 43.«Какие из указанных функций являются логарифмическими: а) $y = \log_2 4 + x$; б) $y = \log_3 \pi - 3x$; в) $y = \log_{0,5} x - -\log_4 2$; г) $y = \log_{0,2} \pi + 9x$» [25, С. 89]?

Задача 44. В одной системе координат постройте графики функций $y = \log_2 x$и $y = \log_3 x$. Используя графики, сравните числа: а) $\log_2 5$и $\log_3 5$; б) $\log_2 0{,}9$и $\log_3 0{,}9$[27, С. 92].

Задача 45. Ответьте письменно на следующие вопросы: а) как называют функцию $y = \log_a x \;\; a > 0, a \neq 1$?б) какова область определения данной функции? в) на каком промежутке данная функция непрерывна[30, С. 156]?

Задача 46. «Дано: $f\ x\ = \log_2 x$.Докажите, что выполняется следующее соотношение: а) $f\ 2^x\ = x$; б) $f\ 4^x\ + f\ 8^x\ = 5x$» [25, С. 91].

Задача 47. «Найдите область определения функции: 1) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$; 2) $y = \log_{\ 3}(-x^2 + 5x + 6)$; 3) $y = \log_{0,7} \frac{x^2-4}{x+3}$» [18, С. 110].

Задача 48. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке: а) $y = \log_3 x$, $\frac{1}{3}; 9$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\frac{1}{8}; 16$ [25, С. 92].

Задача 49. Решите графически уравнение: а) $\log_2 x = -x + 1$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2x - 2$ [18, С. 94].

Задача 50. Постройте и прочитайте график функции:

$$y = \begin{matrix} -4x + 4, \text{если } x < 1, \\ \log_2 x, \text{если } x \geq 1. \end{matrix}$$

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Логарифмическая функция, её свойства и график», как №40 – на демонстрацию практической значимости нового понятия, №41 – на актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия, №42 – на нахождение значения функции по заданному значению аргумента, № 43, 45 – на понимание формируемого понятия, №44, 50 – на построение графиков функций, №46 – на понимание функциональной символики, №47, 48 – на установление свойств данных функций, №49 – на применение понятия.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты:

1. Исследована история возникновения и развития понятия функции в математике. Определено, что в своем историческом развитии понятие функции «прошло через несколько этапов (пропедевтический, введение понятия функции через механические и геометрические представления, аналитическое определение функции, функция как отображение, дальнейшее развитие понятия функции с 20 века)» [51]. Схема изучения функциональной линии в школьном курсе математики основывается на истории становления понятия функции.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы. Так, «при изучении функций у учащихся формируется целостное представление об окружающем мире и взаимосвязи его компонентов, навыки использования функций в повседневной жизни; знания, умения и навыки использования понятийного аппарата, связанного с функциональной линией, в математике и других науках» [51].

3. Определено, «что подходить к обучению функциям нужно менее формально, максимально используя *графическое представление функции*. Необходимо использовать *наглядно-образный материал*, активизирующий

познавательную деятельность учащихся, повышающий их интерес и качество знаний; устанавливать связь *с жизненными представлениями учащихся»* [46]Кроме того, в методике обучения функциям, как отмечает автор, одним из основных аспектов является сочетание графического и аналитического методов исследования функций. Это способствует гармоничному развитию мышления учащихся.

Существует определенная *методическая схема* изучения числовых функций. Данная схема применима для изучения любого конкретного вида функций и включает в себя 5 этапов (мотивация введения нового вида функции, формулировка определения, построения графика, исследование функции на основные свойства, применение свойств функции к решению задач).

4. Разработаны системы задач по теме «Функции» в куре алгебры общеобразовательной школы, удовлетворяющие требованиям Е.И. Лященко. Системы задач представлены на следующие темы: «Функции и способы их задания», «Функции $y = sin\ x, y = cos\ x$, их свойства и графики», «Функции $y = tg\ x, y = ctg\ x$, их свойства и графики», «Показательная функция, её свойства и график», «Логарифмическая функция, её свойства и график». Каждая система задач подобрана в соответствии с основными знаниями и требованиями, предъявляемыми к ученику после окончания изучения темы.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§5. Анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы

Рассмотрев перечень учебников математики для учащихся 10-11 классов Ю.М. Колягина [19, 20], Г.К. Муравина [27, 28], С.М. Никольского [30, 31], М.Я. Пратусевича [36, 37], рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации №15 от 26.01.2017 г. [48], за основу мы взяли учебник Г.К.Муравина и О.В. Муравиной.

Изучение алгебры в 10 классе по данному учебнику начинается с главы «Функции и графики». В первом пункте «Понятие функции» учащиеся повторяют определение функции, функциональную символику и основные математические термины функциональной линии. Авторы дают следующее определение функции.

«Определение 1. Переменную y называют *функцией* переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y. Переменную x называют *аргументом* функции y» [51].

После этого авторы отмечают, что правило, по которому для каждого допустимого значения x находят соответствующее ему значение функции, обозначают какой-либо буквой. Так, например, чтобы указать, что значения y получают из значений x по правилу f, пишут: $y = f(x)$.

Далее авторы дают определения понятиям «область определения функции» и «область значений функции», а также вводят соответствующие обозначения.

Определение 2. Множество допустимых значений аргумента называют *областью определения функции* и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Определение 3. Множество, которое составляют все значения функции, называют *областью значений функции* и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

В работе [51] нами было установлено, что «всё многообразие задач по теме «Функции» в учебниках 7-9 классов условно можно разделить на следующие *типы задач*:

I. Задачи на понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики.

II. Задачи на построение графиков элементарных функций.

III. Задачи на описание свойств функций на основе изучения поведения их графиков.

IV. Задачи, направленные на понимание функции как важнейшей математической модели для описания процессов и явлений окружающего мира, применение языка функций для описания и исследования зависимостей между физическими величинами.

V. Задачи на построение более сложных функций (кусочно-заданные, при помощи преобразований графиков функций) на основе графиков изученных функций.

VI. Задачи на использование функциональных представлений и свойств функций для решения уравнений, неравенств, систем» [51, С. 34].

В учебниках математики 10-11 классов рассматриваемых нами авторов всё многообразие задач также можно разделить на данные типы. Так, в качестве упражнений после пункта «Понятие функции» Г.К. Муравин и О.В. Муравина предлагают в основном задачи на понимание и использование функциональных понятий, терминов, функциональной символики.

Задача 1. Является ли y функцией x, если $y-$ это: 1) площадь прямоугольника, а x его: а) диагональ; б) периметр; в) отношение длин сторон; 2) число десятых в десятичной записи x; 3) двузначное число, а $x-$ сумма его цифр; 4) дата, а $x-$ температура воздуха в конкретном городе в 10 ч; 5) дата, а $x-$ количество автомобилей, выпущенных за данные сутки заводом АВТОВАЗ? В каких случаях x является функцией y?

Задача 2. В книге 300 страниц. Петя каждый день прочитывает по 50 страниц этой книги. Обозначив буквой y количество не прочитанных Петей страниц, а буквой x – число дней, когда Петя читает данную книгу: 1) задайте аналитически функцию y; 2) укажите её естественную и реальную область определения.

Кроме того, в этом же пункте представлены задачи на нахождение области определения и области значений функции по её аналитическому и графическому представлениям.

В учебнике С.М. Никольского [30] понятие функции и связанная с ним терминология повторятся в рамках параграфа «Корень степени n». Авторы начинают пункт «Понятие функции и ее графика» с рассмотрения примеров зависимостей между реальными величинами. Авторы приводят следующие примеры.

1. Площадь круга S есть функция радиуса: $S=\pi R^2$ ($\pi-$постоянная).

2. Объем V некоторого количества газа есть функция давления этого газаp: $V=\frac{c}{p}$ (c – постоянная).

3. Длина катета прямоугольного треугольника с заданной гипотенузой есть функция угла α, лежащего против этого катета: $a = c\ sin\alpha$ (c −длина гипотенузы).

Далее С.М. Никольский напоминает учащимся определение функции.

Определение 4. Пусть дано некоторое множество чисел X и пусть в силу некоторого вполне определенного закона (f) каждому числу x из множества X ставится в соответствие одно вполне определенное число y, тогда говорят, что наX задана функция $y = f\ x$.

Далее приводятся примеры функций:

1) пусть каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное $3x$. Этим соответствием задана функция $y = 3x$ с областью определения R;

2) если каждому действительному числу x поставлено в соответствие одно и то же действительное число c, то говорят, что задана функция $y = c$ с областью определения R.

Также авторы отмечают, что кроме формулы, функцию можно задать графиком. Среди задачного материала преобладают задачи на нахождение области определения функции и построение графиков функции.

В учебнике М.Я. Пратусевича[36] функциям посвящена четвертая глава «Функция. Основные понятия». В рамках данной главы авторы дают следующее определение функции.

Определение 5. Пусть заданы некоторые множества X и Y произвольной природы и закон f, который каждому элементу x множества X ставит в соответствие ровно один элемент y множества Y: $\forall x \in X \to^{f} y \in Y$. Тогда говорят, что на множестве X задана функция f со значениями в множестве Y и пишут: $X \to Y$.

Авторы замечают, что «как синоним введенного понятия функции употребляется также слово «отображение»: отображение множества Xв множество Y. Отмечается, что, как правило в математике слово «отображение» употребляется для соответствий самой общей природы. Слово «функция» употребляется обычно, если речь идет о соответствиях между числовыми множествами или множествами природы, близкой к числовым множествам (например, множества остатков от деления целых чисел по данному модулю). Также авторы отмечают, что нет никакой необходимости, чтобы множества X и Y имели числовую природу, не является также необходимым, чтобы область определения содержала бесконечное число элементов. Далее приводятся следующие примеры.

Пример 1. Пусть $X -$ множество всех треугольников на плоскости, а $Y -$ множество всех окружностей этой же плоскости. Каждому треугольнику ставим в соответствие окружность, вписанную в этот треугольник. Это вполне определенный закон, который каждому элементу множества X(треугольнику) ставит в соответствие ровно один элемент множества Y (окружность).

Пример 2. Пусть X – множество всех отрезков на плоскости, а $Y = R -$ множество всех вещественных чисел. Выберем единицу измерения и поставим в соответствие каждому отрезку число, равное его длине. Это тоже функция» [36].

Далее авторы знакомят учащихся с новым понятием.

Определение 6. Функция такого вида, т.е. отображение из произвольного множества в числовое, называется *функционалом*.

После этого М.Я. Пратусевич вводит понятия равных или совпадающих функций, образа и прообраза элементов и множеств, а также рассматривает различные виды функций. Все новые понятия иллюстрируются примерами.

Определение 7. Отображение «на» - отображение изXвY, при котором прообраз любого элемента из Y непуст или, что то же самое, образ X есть Y.

Определение 8. Взаимно однозначное соответствие – отображение, сопоставляющее различным значениям аргумента различные значения отображения.

Определение 9. Преобразование – взаимно однозначное отображение множества на себя.

Тем не менее, далее авторы замечают, что в дальнейшем речь будет идти только о числовых функциях. После этого рассматриваются способы задания функции, график функции и повторяются некоторые элементарные функции:

1. Степенная функция $y = x^r$, где $r-$ фиксированное число. Отмечается, что ранее учащиеся изучали степенную функцию $y = x^n$ с натуральным показателем и целым показателем, а в курсе 10 класса будут рассмотрены степени и с рациональным показателем $y = x^r, r \in Q$.

2. Целые рациональные функции, или многочлены, - функции вида $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ и $n \in N$. Среди этих функций авторы выделяют следующие: константа, линейная функция и квадратичная функция.

3. Дробно-рациональные функции – функции вида

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_0} \quad (b_k \neq 0).$$

Стоит отметить, что, рассматривая различные способы задания функции, помимо табличного, описательного, графического и аналитического авторы знакомят учащихся также с параметрическим способом.

Параметрический способ задания функции– это задание значения y как функции отxс помощью системы уравнений такого вида:

$$\begin{cases} x = f(t), \text{где } f(t) \text{ и } g(t) - \text{некоторые функции,} \\ y = g(t), \text{где } t \in M \ (M - \text{некоторое числовое множество}). \end{cases}$$

При этом переменная t называется параметром. Если удается исключить параметр из системы, можно получить аналитическое задание функции.

Пример 3. Система $\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ задает функцию, явный вид которой можно получить, исключив параметр из системы. Из первого уравнения находим $t = \frac{x-3}{2}$. Подставив найденное выражение во второе уравнение, получаем $y = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1$.

При этом М.Я. Пратусевич отмечает, что при параметрическом задании бывает сложно выяснить, задается ли данной системой функция.

Также в рамках данной главы рассматриваются темы «Кусочное задание функции» и «Некоторые свойства функций». Авторы дают формальные определения следующим свойствам функций: ограниченность функций, монотонность и экстремумы функции, четность и нечетность функции, периодичность функции. Кроме того, рассматривается применение графиков функций к решению уравнений и неравенств, а также композиция функций и обратная функция.

Г.К. Муравин и О.В. Муравина [27] в пункте «Прямая, гипербола, парабола и окружность» обобщают и систематизируют материал о ранее изучаемых функциях. Вместе с этим, авторы определяют прямую, гиперболу и параболу как *геометрические места точек плоскости*.

Определение 10. Прямая – геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

Определение 11. Гипербола – геометрическое место точек, разность расстояний от каждого из которых до двух данных точек равна данному числу.

Определение 12. Парабола – геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой.

В завершении данного пункта авторы отмечают, что окружность не является графиком функции, так как для нее не выполняется требование однозначности выражения yчерезx.

В качестве упражнений на закрепление данного материала представлены задачи на построение графиков различных функций, исследование функции по графику, задание функции различными способами, а также на исследование расположения графиков функции в зависимости от значений коэффициентов, входящих в формулу.

Задача 3. Задайте аналитически линейную функцию, график которой проходит через точки $A(-1;2)$, $B(1;-1)$.

Задача 4. Имеет ли асимптоты график функции: 1) $y = \frac{3}{2|x|}$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$?

В пункте «Непрерывность и монотонность функций» авторы учебника знакомят учащихся с понятием *непрерывных функций*, приводят примеры и контрпримеры. При этом стоит отметить, что авторы связывают понятие непрерывность функции с возможностью изобразить её график, не отрывая карандаш от бумаги. Такое представление, как замечают авторы, вполне достаточно для решения задач. С более строгим определением непрерывности учащиеся знакомятся в курсе 11 класса.

Далее, авторы знакомят учащихся с теоремой о промежуточном значении, которая применяется при решении различных задач.

Теорема о промежуточном значении. Если непрерывная на отрезке функция принимает на его концах значения разных знаков, то по крайней мере в одной точке этого отрезка она обращается в нуль.

Авторы приводят эту теорему без доказательства, при этом отмечают, что если непрерывная на промежутке функция не обращается в нуль ни в одной его точке, то на этом промежутке она сохраняет знак. На этом свойстве функции основан приём решения неравенств, который называется методом интервалов.

Также в данном пункте авторы дают определение функции, возрастающей/убывающей на некотором промежутке. И замечают, что возрастающие и убывающие функции называют *монотонными*, а промежутки возрастания и убывания называют *промежутками монотонности*.

Среди задачного материала преобладают задачи на нахождение точек разрыва, построение кусочно-заданных функций, решение неравенств методом интервалов, нахождение промежутков возрастания и убывания функции. Завершается данная глава пунктом «Квадратичная и дробно-линейная функции. Преобразование графиков».

Среди задачного материала преобладают задачи на построения графиков различных функцией с использованием преобразования графиков. Рассматриваемые преобразования графиков зафиксированы в Таблице 1.

Задача 5. С помощью преобразований постройте график уравнения: а) $y = x + 3$; б) $y = x - 1$; в) $y = 4 + 3x - x^2$.

Тема «Элементарные преобразования графиков функций» рассматривается также и в учебнике М.Я. Пратусевича.

Также в курсе 10 класса Ю.М. Колягин, Г.К. Муравин и О.В. Муравина, С.М. Никольский, М.Я. Пратусевич рассматривают темы «Степенная функция $y = x^n$ при натуральном n», «Показательная и логарифмическая функции», «Тригонометрические функции и их свойства».

Курс алгебры 11 класса в учебнике Г.К. Муравина и О.В. Муравиной начинается с главы «Непрерывность и пределы функции». В рамках данной главы авторы дают строгое определение понятию *«непрерывность функции в точке»*.

Таблица 1

Преобразования графиков функций

Исходный график	**Преобразование**	**Новый график**
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс	$y = -f(x)$

$y = f(x)$	Растяжение от оси абсцисс в k раз	$y = kf(x)$
$y = f(x)$	Перенос вдоль оси абсцисс на a	$y = f(x - a)$
$y = f(x)$	Перенос вдоль оси ординат на a	$y = f(x) + a$
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси ординат	$y = f(-x)$
$y = f(x)$	Симметрия относительно начала координат	$y = -f(-x)$
$y = f(x)$	Уничтожение части графика слева от оси ординат и дублирование оставшейся части симметрично относительно оси ординат	$y = f(\|x\|)$
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс частей графика, расположенных в нижней полуплоскости	$y = \|f(x)\|$
$y = f(x)$	Уничтожение части графика под осью абсцисс и дублирование оставшейся части симметрично относительно оси абсцисс	$\|y\| = f(x)$

Определение 13. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Среди задачного материала преобладают задачи на нахождение области определения и точек разрыва функции, а также на построение графиков функции.

Задача 6. Найдите область определения и точки разрыва функции:

а) $y = \frac{2x+6}{x^2-9}$; б) $y = \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$; в) $y = \frac{x^2}{x^3-2x^2-8x}$.

Также в данной главе Г.К. Муравин и О.В. Муравина рассматривают нахождение асимптот графиков функции с помощью пределов. Авторы знакомят учащихся с условием существования *вертикальной асимптоты* $x = a$: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Помимо этого авторы вводят понятие *наклонной асимптоты* – прямой $y = kx + b$.

Определение 14. Прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (kx + b)\right) = 0$.

Следующая глава посвящена производной функции и её применению к исследованию функций. Авторы знакомят учащихся с алгоритмом нахождения касательной к графику функции в определенной точке:

1. Найти ординату (y_0) точки касания.

2. Найти разность: $y - y_0$.

3. Найти угловой коэффициент касательной: $k = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

4. Написать уравнение касательной: $y = k \ x - x_0 \ + y_0$. Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Задача 7. Найти уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Так как x_0 является левой границей области определения, точка M может приближаться к точке M_0 только справа, а значит, нужно искать правый предел: $\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

Предел не существует, однако ясно, что угол наклона секущей MM_0 стремится к 90°. При этом касательная или параллельна оси ординат, или, как в данном случае, совпадает с ней.

Ответ: уравнение касательной $x = 0$.

Центральное место в курсе математики 11 класса занимает тема «Производная функции и ее применение к исследованию функций». В рамках данной темы учащиеся знакомятся с условием возрастания (убывания) функции.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции. Если во всех точках некоторого промежутка производная функции положительна (отрицательна), то на этом промежутке функция возрастает (убывает).

Основываясь на достаточном условии возрастания (убывания), авторы знакомят учащихся с достаточными условиями максимума и минимума функции.

Утверждение 1. Если при переходе через критическую точку производная непрерывной функции изменяет знак с «плюса» на «минус» (с «минуса» на «плюс»), то это *точка максимума (минимума)*.

Среди задачного материала преобладают задачи на схематическое построение графиков функции, нахождение критических точек и промежутков монотонности функции.

Задача 8. Изобразите график какой-нибудь функции $y = f(x)$, зная, что: а) функция определена на интервале $(-4; 3)$; б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4)$; в) $f'(x) < 0$ для любого x из интервала $(-4; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из интервалов $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$; г) нули функции $x = -1$ и $x = 2$.

В курсе математики 11 класса во всех учебниках рассматриваемых нами авторов также рассматривается применение производной к нахождению наибольших и наименьших значений функции. Г.К. Муравин и О.В. Муравина отмечают, что если функция $y = f(x)$ рассматривается на отрезке, то своё наибольшее и наименьшее значение на нём она может принимать либо в его концах, либо в критических точках.

Задача 9. Найти наименьшее и наибольшее из значений, которые принимает функция $f(x) = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение. 1. Найдем критические точки функции на отрезке $[-2; 3]$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3; f'(x) = 0: x = -1 \text{ или } x = 1.$$

2. Найдем значения функции в критических точках и на концах отрезка: $f(-2) = 1, f(-1) = 5, f(1) = 1, f(3) = 21$.

3. Сравним данные значения функции: $f(-2) = f(1) < f(-1) < f(3)$.

Ответ: 1 и 21.

Задача 10. Из квадратного листа картона 1 х 1 м вырезают по углам квадраты и сгибают коробку. Какие стороны должны иметь отрезанные квадраты, чтобы объём полученной коробки был наибольшим?

Решение. 1.Обозначим искомую сторону буквой x и выразим объем коробки как функцию с аргументом x: $V\;\; x\;\; = (1-2x)^2 x,\; 0 < x < 0{,}5$, то есть $D\;\; V\;\; = \;\; 0; 0{,}5\;\;$.

2. Найдем наибольшее значение функции $V\;\; x\;\;$. $V' = 1 - 8x + 12x^2$, $V' = 0$: $12x^2 - 8x + 1 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. В области определения оказывается единственная критическая точка – точка максимума $x = \frac{1}{6}$. Значит, в этой точке функция принимает своё наибольшее значение.

Ответ:$\frac{1}{6}$ м.

Помимо этого, авторы знакомят учащихся и с применением второй производной к исследованию функций.

Утверждение 2. На промежутке, где вторая производная принимает только положительные (отрицательные) значения, функция вогнута (выпукла).

Итак, анализ учебников показал, что, несмотря на некоторые различия как в содержании функционального материала по классам, так и его распределении во многих рассматриваемых учебниках основными темами 10 класса являются темы «Показательная и логарифмическая функции», «Тригонометрические функции и их свойства». В 11 классе центральное место занимают темы «Непрерывность и пределы функции», «Производная функции и её применение к исследованию функций».

§6. Анализ задач ЕГЭ по теме исследования

Нами были выделены основные типы задач, которые встречаются в **части В**(задания В2, В12) единого государственного экзаменапрофильного уровня по данной теме исследования:

1) задачи на определение величины по графику;

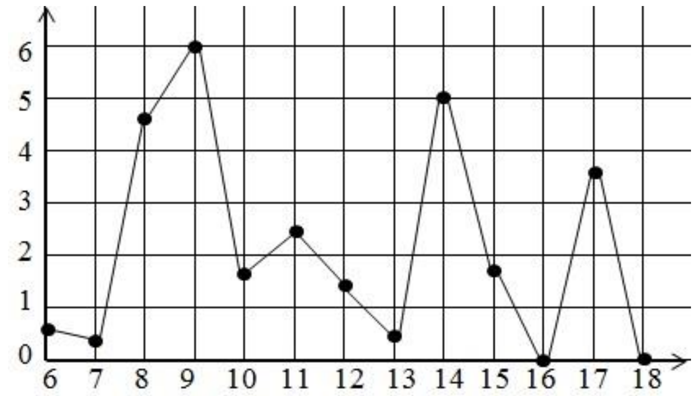


Рис. 1

Задача 1.На Рисунке 1 жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Петрозаводске с 6 по 18 января 2015 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода в Петрозаводске выпадало более 3 миллиметров осадков.

Решение.Требуется определить количество дней (по горизонтали), когда количество осадков (по вертикали) было более 3 миллиметров. Проводим график функции $y = 3$ и считаем количество точек, расположенных выше данной прямой. В итоге получаем, что в Петрозаводске в течение 4 дней выпадало более 3 миллиметров осадков.

Ответ:4.

2) задачи на исследование степенных и иррациональных функций;

Задача 2. «Найдите точкумаксимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$» [47].

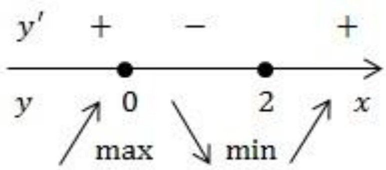


Рис. 2

Решение.Имеем:

$y' = 3x^2 - 6x = 3x\ \ x - 2\ $.

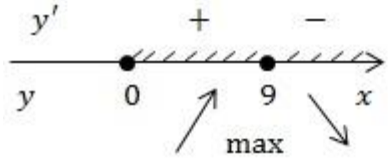
Найдем нули производной: $3x\ \ x - 2\ = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0, \\ x=2. \end{matrix}$После определения знаков производной функции изобразим на Рисунке 2 поведение функции. Искомая точка максимума $x = 0$.

Ответ:0.

Задача 3. «Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x +$ $+1$на отрезке $\ 1; 9\ $» [47].

Решение.Заметим, что $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1$и найдем производную этой функции: $y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 3 = -\sqrt{x} + 3$.Найдем нули производной:

$$\begin{matrix} -\sqrt{x} + 3 = 0, \\ 1 \le x \le 9 \end{matrix} \Leftrightarrow x = 9.$$



После определения знаков производной функции изобразим на Рисунке 3 поведение функции.

Рис. 3

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является: $y\ 9\ = 10$.**Ответ:**10.

3) задачи на исследование показательных и логарифмических функций;

Задача 4. «Найдите точку минимума функции$y = 2x^2 - 5x + lnx - 3$» [47].

Решение.Имеем: $y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}$. Далее найдем нули производной:

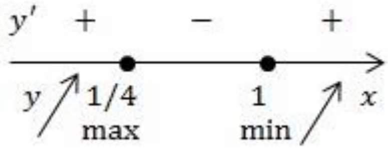


Рис. 4

$$4x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 1, \\ x = 0{,}25. \end{matrix}$$

После определения знаков производной функции изобразим на Рисунке 4 поведение функции.Искомая точка минимума $x = 1$.

Ответ: 1.

4) задачи на исследование тригонометрических функций;

Задача 5. «Найдите наибольшее значение функции$y = 15x - 3sinx +$ $+5$на отрезке $-\frac{\pi}{2}; 0$ » [47].

Решение.Имеем:$y' = 15 - 3cosx$. Уравнение $y' = 0$ не имеет корней, производная положительна при любом значении переменной, следовательно,функция возрастающая. Таким образом, $y_{\text{наиб}} = y\ 0\ = 15 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5$.

Ответ:5.

5) задачи на исследование функций без помощи производной;

Задача 6.«Найдите точку минимума функции$y = \log_5\ x^2 - 6x +$ $+12\ + 2$» [47].

Решение.Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае – в точке 3. Так как функция $y = \log_5 x$возрастает, и заданная функция $y = \log_5 (x^2 - 6x + 12) + 2$ определена в точке 3, она также достигает в ней минимума.

Ответ:3.

Задача 7. «Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{-6 + 12x - x^2}$» [47].

Решение.Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае – в точке 6. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$возрастающая, и заданная функция определена в точке 6, она также достигает в ней максимума.

Ответ:6.

б) задачи на исследование частных и произведений;

Задача 8. «Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2+1}{x}$» [47].

Решение.Имеем:

$$y' = -\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = -\left(x + \frac{1}{x}\right)' = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

На Рисунке 5 изображено поведение функции.Искомая точка минимума $x = -1$.

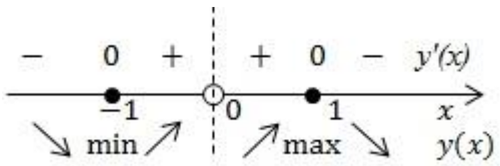


Рис. 5

Ответ:-1.

Задача 9. «Найдите наименьшее значение функции$y = (x-2)^2 e^{x-2}$на отрезке $[1; 4]$ » [47].

Решение.Имеем:

$$y' = \left((x-2)^2\right)' e^{x-2} + (x-2)^2 \left(e^{x-2}\right)' = x(x-2)e^{x-2}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} x\ \ x-2\ \ e^{x-2}=0, \\ 1\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=0, \\ 1\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

После определения знаков производной функции изобразим на Рисунке 6 поведение функции.

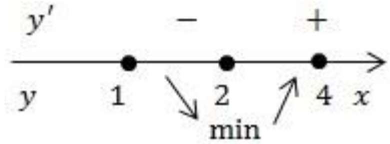


Рис. 6

В точке $x=2$заданная функция имеет минимум, который является ее наименьшим значением на заданном отрезке. Итак, $y_{\text{наим}}=y\ \ 2\ \ =0$.

Ответ:0.

В **части С**(задание С6) основным типом задач по исследуемой теме являются:

1) задачи с параметром

Задача 10.«Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f\ \ x\ \ =x^2-3x+2-\ \ x^2-5x+4\ \ -a$пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках» [47].

Решение.Рассмотрим вспомогательную функцию$g\ \ x\ \ =x^2-3x+$ $+2-\ \ x^2-5x+4\ \ .$

График функции $f\ \ x$, представленный на Рисунке 7, пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g\ \ x\ \ =a$имеет менее трех различных корней. Если $x\le 1$или $x\ge 4$, то $\ x^2-5x+4\ =x^2-5x+4$, и $g\ \ x\ \ =2x-2$.Если $1<x<4$, то $\ x^2-5x+4\ =-x^2+$ $+5x-4$, и $g\ \ x\ \ =2x^2-8x+6$.График функции $g\ \ x$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g\ \ x\ \ =a$имеет менее трех корней, только если $a\le$ $g(2)$или $a\ge g(1)$, то есть при $a\le -2$или $a\ge 0$.

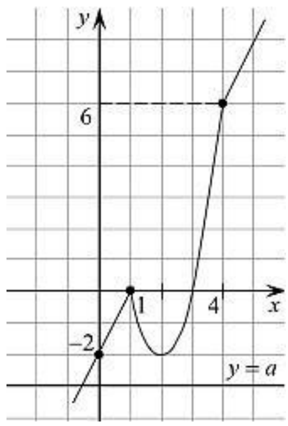


Рис. 7

Ответ: $\ -\infty;2\ \ \cup\ \ 0;+\infty\ \ .$

Задача 11. «Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f\ \ x\ \ =x^2-2\ \ x-a^2\ \ -8x$имеет более двух точек экстремума» [47].

Решение.1.Функция$f(x)$имеет вид:

1) при $x \geq a^2$: $f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 5$;

2) при $x \leq a^2$: $f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$,поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3$.

2. Все возможные виды графиков функции показаны на Рисунке 8:

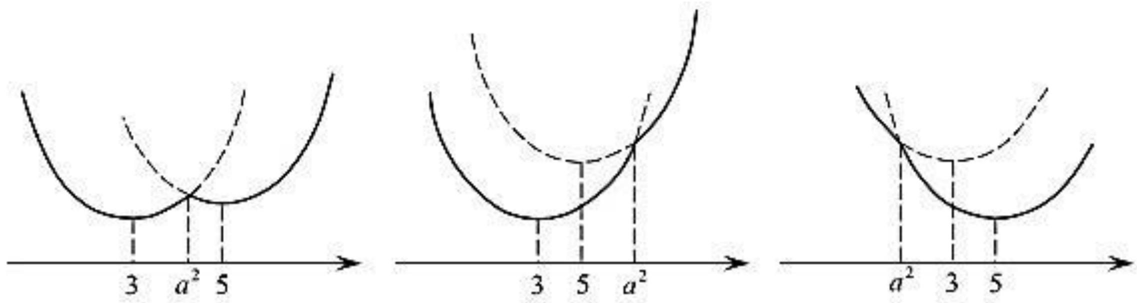


Рис. 8

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2, f(a^2))$.

3. Функция$y = f(x)$имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1): $3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}$.

Ответ:$-\sqrt{5} < a < -\sqrt{3}$; $\sqrt{3} < a < \sqrt{5}$.

Итак, в*части B* единого государственного экзамена профильного уровня содержатся задачи на: определение величины по графику, исследование степенных и иррациональных функций, исследование показательных и логарифмических функций, исследование тригонометрических функций, исследование функций без помощи производной, исследование частных и произведений.В*части*Cединого государственного экзамена представлены задачи с параметром.

Таким образом, в едином государственном экзамене по математике профильного уровня в основном представлены задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения различных классов функций, а также задачи с параметром.

§7. Методический проект изучения темы «Функция $y = sinx$ и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских

Слово «тригонометрия» в буквальном переводе означает «измерение треугольников» (от греческого «тригон» - треугольник и «метрео» - измеряю). В данном случае измерение треугольников следует понимать как решение треугольников. Возникновение тригонометрии связано с землемерием, астрономией и строительным делом.

Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер, но затем органически вошла в математический анализ, механику, физику и технические дисциплины. Тригонометрические функции применяются при решении уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, распространения волн, движения различных механизмов, для изучения переменного электрического тока и т.д. Тригонометрические функции, а в частности, функция $y = sinx$, имеют важное значение для всей математики. Синусоида – один из самых популярных графиков в физике. С ней непосредственно связано практически любое колебание.

Актуальность выполнения методического проекта по данной теме обусловлена следующими причинами:

1) содержание изучаемого материала по данной теме позволяет включить учащихся в творческий процесс открытия необходимых знаний;

2) материал, рассматриваемый в теме актуален для подготовки учащихся к сдаче итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена.

Цель данного проекта: спроектировать изучение темы «Функция $y = sinx$ и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских.

Далее рассмотрим методический анализ теоретического и практического содержаний по теме «Функция $y = \sin x$и её свойства» в рекомендованных Минобрнауки РФ учебниках алгебры и начал математического анализа 10-11 классах [48].

Методический анализ темы.

Базовые знания:

- понятие функции;
- основные свойства функции;
- радианная мера угла;
- понятие синуса угла;
- основные тригонометрические формулы.

Рассматриваемые сведения:

- понятие функции $y = sinx$;
- график функции $y = sinx$;
- период функции;
- основные свойства функции $y = sinx$.

Теоретический материал.

Были проанализированы следующие учебники: Г.К. Муравин и О.В. Муравина [27], С.М. Никольский [30], М.Я. Пратусевич [36].

Данная тема в рассмотренных учебниках изучается в 10 классе в объеме от 2-х до 3-х часов. Так, на обучение этой теме в учебнике Г.К. Муравина отводится 3 часа, в учебниках С.М. Никольского, М.Я. Пратусевича – по 2 часа [39].

Во всех данных учебниках в рамках данной темы рассматриваются график функции $y = sin\,x$ и её свойства, но определение функции $y = sin\,x$ рассматривается только в учебниках С.М. Никольского, М.Я. Пратусевича. У Г.К. Муравина и О.В. Муравиной данное определение дается в рамках темы «Синус и косинус любого угла».

В *учебнике Г.К. Муравина и О.В. Муравиной* [27] изучение данной темы рассматривается в пункте «Свойства и график функции $y = \sin x$» и начинается с того, что авторы напоминают учащимся, что они уже знакомы с некоторыми свойствами данной функции, эти свойства удобно использовать при построении графика функции $y = \sin x$. То есть с самим понятием функции $y = \sin x$ учащиеся уже знакомы.

Перед данной темой в пункте «Синус и косинус любого угла» авторы напоминают учащимся понятие синуса острого угла прямоугольного треугольника. Затем, чтобы ввести понятие синуса произвольного угла, авторы рассматривают единичную окружность – окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Синус произвольного угла определяется следующим образом:

Определение 1. Синусом угла φ называется ордината конечной точки поворота точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол φ: $y = sin\varphi$.

Далее авторы отмечают, что рассматривая φ как переменную, можно заметить, что любому её значению соответствует единственное значение выражения $sin\varphi$. Следовательно, формула $y = sin\varphi$ задает функцию переменной φ.

В *учебнике С.М. Никольского* [30] изучение данной темы сразу начинается с определения функции $y = sinx$.

Определение 2. Если каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное синуса угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция $y = sinx$, называемся синусом числового аргумента x.

В *учебнике М.Я. Пратусевича* [36] функция $y = sinx$ определяется следующим образом:

Определение 3. Функция, ставящая в соответствие каждому вещественному числу его синус, называется функцией синус.

После введения понятия функции $y = sinx$ авторы всех рассматриваемых нами учебников строят график данной функции на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Далее авторы отмечают, что график функции $y = sinx$ на других промежутках можно получить из построенной части графика. Так, авторы замечают, что формула $\sin \pi - x = \sin x$ позволяет, используя симметрию графика относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, построить его на промежутке от 0 до π. Формула $\sin\ -x\ = -\sin x$ позволяет получить график функции на промежутке от $-\pi$ до 0, используя симметрию относительно начала координат.

Г.К. Муравин и О.В. Муравина обращают внимание на то, что формула $\sin\ 2\pi + x\ = \sin x$ показывает, что значения функции $y = \sin x$ через каждые 2π повторяются. После этого вводится понятие периода функции.

Определение 4. Положительное число Tназывается периодом функции$y = f(x)$, если для любого значения x из её области определения выполняются условия:

1) $x - T$ и $x + T$ тоже входят в область определения функции;

2) $f\ x - T\ = f\ x\ = f\ x + T$.

Функции, имеющие период, называют периодическими.

Авторы всех рассматриваемых нами учебников замечают, что полученный график называется *синусоидой*. Это первый график тригонометрических функций, который был опубликован в 30-х годах XVII в. Далее авторы рассматривают основные свойства функции $y = \sin x$.

Основные свойства функции $y = \sin x$:

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Область значений функции: $y \in\ -1; 1$.

3. Нечётная функция, так как для любого значения x выполняется условие $\sin\ -x\ = -\sin x$. График симметричен относительно начала координат.

4. Периодическая функция, наименьшим периодом является число 2π.

5. Функция возрастает на промежутках $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число. Функция убывает на промежутках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число.

6. Функция принимает своё наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число. Функция принимает своё наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число.

7. Функция принимает значение, равное нулю, при$x = \pi n$, где $n -$любое целое число.

8. Функция непрерывна на промежутке $-\infty; +\infty$.

Задачный материал.

Среди задачного материала во всех рассматриваемых нами учебниках присутствуют следующие *типы задач* на формирование понятия функции $y = \sin x$: «задачи, связанные с показом практической значимости нового понятия или с его значимостью для дальнейшего продвижения в изучении математики; задачи на выделение существенных признаков понятия; задачи на установление свойств понятия; задачи на применение понятия» [21].

Приведем примеры указанных типов задач.

1. «Задачи, связанные с показом практической значимости нового понятия или с его значимостью для дальнейшего продвижения в изучении математики» [21].

Пример 1. Используя график и свойства функции $y = \sin x$, сравните: 1) $\sin 160°$ и $\sin 170°$; 2) $\sin 230°$ и $\sin 300°$; 3) $\sin 1$ и $\sin 2$; 4) $\sin 5$ и $\sin 6$ [27, С. 149].

2. Задачи на выделение существенных признаков понятия.

Пример 2. а)Постройте график функции $y = \sin x$ по точкам на отрезке $[0; \pi]$. б) Относительно какой прямой симметричен график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ [30, С. 285]?

3. Задачи на установление свойств понятия.

Пример 3. Исследуйте на четность и нечетность функцию: а) $y = \sin(3x + x^3)$; б) $y = \sin|x|$ [36, С. 352].

4. Задачи на применение понятия.

Пример 4. Сколько корней имеет уравнение: а) $\sin x = x^2$; б) $\sin x = -x^2$; в) $\sin x = \frac{x}{10}$; г) $\sin x = \frac{x}{100}$ [30, С. 285].

Стоит отметить, что в данных учебниках не представлены *задачи на использование символики*, связанной с понятием. В связи с этим можно дополнительно воспользоваться задачником А.Г. Мордковича [24]:

Пример 5. Известно, что $f(x) = 3\sin x$. Найдите: а) $f(-x)$; б) $2f(x)$; в) $2f(x) + 1$; г) $f(-x) + f(x)$ [24, С. 94].

Также заметим, что в учебнике С.М. Никольского по данной теме, на наш взгляд, приведено недостаточное количество задач (всего 9 задач).

Итак, особых различий в изучении данной темы в учебниках рассматриваемых нами авторов не наблюдается. Почти все авторы начинают с определения, затем переходят к графику функции, а далее рассматривают основные свойства.

Данный методический проект предназначен для математического профиля. Это обусловлено содержанием темы в примерной основной общеобразовательной программе среднего общего образования на углубленном уровне, разнообразием задачного материала по содержанию и уровню сложности.Кроме того, проект может повысить интерес к изучению математики и расширить кругозор учащихся. Помимо этого, при изучении темы «Функция $y = sinx$ и её свойства» осуществляется возможность подготовки учащихся к единому государственному экзамену по математике профильного уровня (задание № 12).

Основным учебником математики для математического профиля выбран учебник Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [27].

Рассматриваемая в данном проекте тема относится к 4 Главе «Тригонометрические функции и их свойства». Само понятие синуса угла вводится в п.14 «Синус и косинус любого угла», а тема рассматривается в п.18 «Свойства и график функции $y = \sin x$».

В результате изучения данной темы учащиеся должны уметь:

- «находить область определения и область значений функции $y = \sin x$;

- проверять, является ли заданное число периодом, находить период функции;

- решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства с помощью графика функции $y = \sin x$ или единичной окружности;

- называть свойства функции $y = \sin x$;

- строить график функции $y = \sin x$ и выполнять задания по данному графику;

- приводить примеры реальных явлений (процессов), количественные характеристики которых описываются с помощью функции $y = \sin x$» [39].

Для профильного уровня изучения математики на тему «Функция $y = \sin x$ и её свойства» по программе Г.К. Муравина, О.В. Муравиной отводится 3 часа, в течение которых рассматриваются график функции $y = \sin x$ и её основные свойства. Само понятие функции $y = \sin x$ вводится в п.14 «Синус и косинус любого угла», на изучение которого отводится так же 3 часа.

Проведем анализ практического опыта учителей по теме «Функция $y = sinx$ и её свойства», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» представлено много конспектов по теме «Функция $y = \sin x$ и её свойства». Так, например, учитель математики Н.П. Харина в [50] рассматривает план урока введения нового знания. На уроке автор рекомендует познакомить учащихся с историей возникновения слова «синус». После введения понятия функции $y = \sin x$ учащимся предлагается записать план исследования графика данной функции в тетрадях.

План исследования графика функции $y = \sin x$:

1. Область определения.

2. Область значения.

3. Нули функции.

4. Промежутки возрастания, убывания функции.

5. Промежутки знакопостоянства.

6. Четность функции.

7. Монотонность функции.

8. Наименьшее и наибольшее значения функции.

С.И. Остапенко в [33] рассматривает формы, методы и средства обучения тригонометрическим функциям в курсе алгебры основной школы. При изучении данной темы автор считает целесообразным использовать такие типы уроков как *уроки-лекции* и *уроки-практикумы*. В качестве контроля уровня знаний автор рекомендует использовать такие методы как *фронтальный опрос* и *самостоятельная работа*.

Е.А. Горский при изучении тригонометрических функций рекомендует использовать *электронные средства обучения*. Так, например, при изучении темы «Преобразование графиков тригонометрических функций» можно использовать среду динамической геометрии *GeoGebra*.

В элективном курсе В.М. Филатовой «Такая разнообразная тригонометрия» [49] на тему «Графики тригонометрических функций» отводится 2 часа. На данных занятиях учащиеся учатся строить графики сложных тригонометрических функций, а также функций с модулями и обратными тригонометрическими функциями.

Таким образом, анализ темы в статьях [33; 50] и опыт изучения темы посредством элективных курсов [49], показывает интерес к теме «Функция $y = \sin x$ и её свойства».

Рассмотрим основные цели и задачи изучения темы «Функция$y = \sin x$ и её свойства».

Цель: учить строить график функции $y = \sin x$; исследовать функцию на основные свойства; использовать свойства данной функции при решении уравнений, неравенств и их систем; ввести понятие периодической функции.

Задачи:

- формировать навыки построения графика функции $y = sin\,x$;
- формировать навык исследования данной функции на основные свойства;
- формировать навык нахождения периода функции.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в проекте «Функция $y = \sin x$ и её свойства», способствует:

- развитию познавательного интереса и мотивации к математике;
- дополнительно подготовить к государственной итоговой аттестации по материалам и в форме ЕГЭ;
- формированию качества математических знаний, тем самым повышая предметные математические компетенции.

В примерной основной образовательной программе среднего общего образования от 28 июня 2016 года [38, С. 107 – 111] указывается, что в ходе изучения раздела «Функции» на *углубленном уровне* выпускник научится:

1. Владеть понятиями степенная, показательная, логарифмическая функции; строить их графики и уметь применять их свойства при решении задач.
2. Владеть понятием тригонометрические функции; строить их графики, уметь применять их свойства при решении задач.
3. Владеть понятием обратная функция; применять его при решении задач.
4. Применять при решении задач свойства функций: четность, периодичность, ограниченность, преобразования графиков функций.

5. Владеть понятиями числовая последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессии; применять при решении задач их свойства и признаки.

В результате изучения темы «Функция $y = \sin x$и её свойства» ученик должен:

знать/понимать:

– основные свойства функции $y = \sin x$;

– понятие периода функции;

уметь:

– находить область определения, область значений функции $y = \sin x$;

– проверять, является ли заданное число периодом, находить период функции;

– решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства с помощью графика функции $y = \sin x$ или единичной окружности;

– называть свойства функции $y = \sin x$;

– строить график функции $y = \sin x$ и выполнять задания по данному графику;

– приводить примеры реальных явлений (процессов), количественные характеристики которых описываются с помощью функции $y = \sin x$.

Проведем обоснования целесообразности использования технологии творческих мастерских для реализации данной темы на практике.

Г.К. Селевко пишет о том, что «технологию исповедует группа французских учителей «Французская группа нового воспитания», которая основывается на идеях свободного воспитания Ж.-Ж. Руссо, Л. Толстого, С. Френе, на психологии гуманизма Л.С. Выготского, Ж. Пиаже, К. Роджерса» [40,С. 420].

Автор замечает, что такое название технология получила благодаря тому, что в ней присутствует мастер, создающий порядок действий, который позволяет начать творческий процесс.

Специфика мастерской в том, что она представляет собой ряд упражнений, которые необходимо выполнить ученикам, при этом направляя их в нужную сторону. При этом учащиеся сами выбирают путь исследования, средства, темп работы и т.д.

Целью для мастера является не сообщение информации, а передача способов работы.

Н.Г. Михайлова в статье [23] замечает, что отличительная черта мастерской состоит в том, что каждый получает возможность проявить свой талант. В процессе работы царит атмосфера открытости, доброжелательности, сотворчества в общении, пробуждение у учащегося личной заинтересованности в изучении проблемы. Всё это способствует обеспечению взаимосвязи процессов обучения, самовоспитания и взаимообучения, взаимовоспитания. Также очень важно, что оценка работ учащегося в мастерской происходит через самооценку, афиширование и групповую работу, а не через формальное оценивание работ.

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова и др. пишут, что «*мастерская состоит из системы заданий*, которая: 1) позволяет уйти от информационной формы обучения (передачи информации учителем); 2) включит учащихся в творческий процесс открытия знаний, построения системы новых знаний и включения их в систему имеющихся; 3) предоставит школьникам абсолютную свободу (выбор пути исследования, выбор средств для достижения цели, выбор темпа работы и т.д.)»[22, С. 245].

Авторами отмечается, что *мастерские строятся* по определенному *алгоритму*: «*индивидуальная работа* по выполнению предложенного задания (на базе имеющихся знаний, использования личного жизненного опыта); *работа в парах* (обмен результатами индивидуальной работы); *работа в группах* (выработка общего мнения группы); *обмен мнениями* в классе (группы представляют итоги своей работы); *коррекция* (группы вносят исправления и дополнения в свой вариант выполнения задания, учитывая результаты рабы других групп); *слово учителя* (акцентирование внимания на ключевых моментах, выделение находок, ошибок); *обсуждение мастерской* (подведение итогов, формулирование нерешенных проблем). Данную *технологию* можно *применять* и при изучении новой темы, и при повторении, и закреплении изученного материала. Можно сочетать разные варианты работы, начиная с работы в парах и заканчивая работой всего класса» [22, С. 246].

Спроектируем изучение темы «Функция $y = sin\, x$и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских.

Для профильного уровня изучения математики на тему «Функция $y = \sin x$ и её свойства» по программе Г.К. Муравина, О.В. Муравиной отводится 3 часа, в течение которых рассматриваются график функции $y = \sin x$и её основные свойства.

Исходя из этого, с учетом выбранной нами технологии мастерских, спроектируем изучение темы «Функция $y = \sin x$и её основные свойства» для 2-х уроков.

Мастерская 1.**Познание теории по теме «Функция $y = \sin x$и её основные свойства»**

Цель: учиться строить график функции $y = \sin x$; «открыть» свойства данной функции; ввести понятие периода функции.

Образовательная задача: вспомнить понятия функции, синуса произвольного угла; учиться строить график функции $y = \sin x$; «открыть» свойства данной функции; ввести понятие периода функции.

Развивающая задача: развивать самостоятельность, умение работать в группах.

Воспитательная задача: повышать интерес к математике, формировать логическое мышление.

Предполагаемые результаты: уметь строить график функции $y = \sin x$; исследовать данную функцию на её основные свойства; свободно оперировать понятием период функции.

Ход мастерской (45 мин):

1.Организационный момент и ознакомление с планом мастерской – 2 мин.

2. **Фронтальная работа с классом** (выработка общего мнения) – 5 мин.

Учитель задает вопросы учащимся (актуализация знаний).

1. Сформулируйте определение функции.

2. Какие свойства функции вы знаете?

3. Перечислите, какие функции вам уже знакомы.

4. Что называют синусом произвольного угла α?

В результате *устного опроса* предполагается получить следующие ответы:

1. «Переменную y называют функцией переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y» [27, С. 8].

2. Область определения, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке, монотонность, непрерывность, ограниченность, выпуклость, область значений, чётность.

3. Линейная функция, обратная пропорциональность, квадратичная функция, степенная функция, показательная и логарифмические функции.

4. «Число, равное ординате точки единичной окружности, соответствующей углу α, называют синусом угла α и обозначают $\sin\alpha$» [30, С. 204].

Учитель: мы с вами уже знакомы с большим количеством функций (линейная, квадратичная, обратная пропорциональность, степенная, показательная, логарифмическая и другие), а также умеем строить их графики и знаем их основные свойства.

На предыдущих уроках мы с вами познакомились с понятием синуса произвольного угла и говорили о том, что формула $y = \sin x$ задаёт функцию. Возникает вопрос: как выглядит график функции$y = \sin x$ и какими свойствами данная функция обладает.

3. **Индивидуальная работа** (на базе имеющихся знаний) – 10 мин.

Задание 1 (каждый учащийся получает карточку с заданиями).

1. Запишите в тетради тему мастерской «Функция $y = \sin x$ и её свойства».

2. По приведенной ниже Таблице 2 приближённых значений $y = \sin x$ для некоторых значений из отрезка $0; \frac{\pi}{2}$ постройте график данной функции на этом отрезке.

Таблица 2

Приближенные значения функции $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$	0	0,13	0,29	0,38	0,5	0,61	0,71	0,79	0,87	0,92	0,97	0,99	1

Примечание: для удобства по оси абсцисс возьмите за $\frac{\pi}{6}$ 4 клетки, а по оси ординат за единицу - 8 клеток.

3. Применяя формулы $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin -x = -\sin x$ достройте полученный график на промежутке$[-\pi; \pi]$. Сделайте соответствующие выводы. Если возникают затруднения, обратитесь к учебнику на странице 145.

4. Используя формулу $\sin 2\pi + x = \sin x$ достройте полученный график на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$. Сделайте выводы.

Зафиксируйте ответы в тетради. Выполните корректировку записей после обсуждения в паре.

4. **Фронтальная работа с классом** (выработка общего мнения) – 2 мин.

Учитель обобщает полученные результаты: *графиком функции* $y = sin\, x$ является кривая, которая называется *синусоидой*. График функции $y = \sin x$ на других промежутках можно получить из построенной части графика на промежутке $0; \frac{\pi}{2}$. Так, формула $\sin \pi - x = \sin x$ позволяет, используя симметрию графика относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, построить его на промежутке от 0 до π. Формула $\sin\ -x\ = -\sin x$ позволяет получить график функции на промежутке от $-\pi$ до 0, используя симметрию относительно начала координат.

Формула $\sin\ 2\pi + x\ = \sin x$ показывает, что значения функции $y = \sin x$ через каждые 2π повторяются. Положительное число Tназывается *периодом функции*$y = f(x)$, если для любого значения x из её области определения выполняются условия:

1) $x - T$ и $x + T$ тоже входят в область определения функции;

2) $f\ x - T\ = f\ x\ = f\ x + T$.

Функции, имеющие период, называют *периодическими*.

Учитель: теперь, зная, как выглядит график функции $y = \sin x$, выясним, какими свойствами она обладает.

5. **Работа в группах** – 18 мин.

Задание 2 (выдается каждой группе). Заполните Таблицу 3 значений функции $y = \sin x$, приведённую ниже. По данным значениям постройте график функции, затем продолжите этот график на промежутке $-2\pi; 2\pi$.

Таблица 3

Значения функции $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Примечание: рекомендуется выбрать следующий масштаб: по оси ординат 1 см $= 1$, по оси абсцисс 1 см $= \frac{\pi}{3}$.

Задание 3 (выдается каждой группе). По построенному графику и на основе уже имеющихся знаний ответьте на предложенные вопросы и запишите ответы в тетрадь. При возникновении затруднений, обратитесь к учебнику.

1. Какие значения может принимать аргумент функции $y = \sin x$? Какие значения может принимать функция?

2. Определите, какой является функция $y = \sin x$: чётной, нечётной, ни чётной, ни нечётной.

3. Определите промежутки возрастания и убывания функции.

4. Каково наибольшее и наименьшее значения функции? При каких значениях аргумента они достигаются?

5. Найдите нули функции.

6. Является ли функция $y = \sin x$ периодической? Если да, то каков её наименьший период?

7. Является ли данная функция ограниченной?

8. Сделайте вывод о выпуклости функции $y = \sin x$.

В результате выполнения *задания 2* предполагается получить следующие *ответы*:

1. Аргумент функции может принимать любые значения. Функция принимает любые значения от -1 до 1.

2. Функция $y = \sin x$ является нечётной, так как для любого значения x выполняется равенство $\sin\ -x\ \ = -\sin x$.

3. Функция возрастает на промежутках $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число. Функция убывает на промежутках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число.

4. Функция принимает своё наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число. Функция принимает своё наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число.

5. Функция принимает значение, равное нулю, при$x = \pi n$, где $n -$любое целое число.

6. Функция $y = \sin x -$ периодическая функция, наименьшим периодом является число 2π.

7. Функция ограничена и снизу и сверху. Это следует из того, что для любого x: $-1 \leq \sin x \leq 1$.

8. Функция выпукла вверх на отрезке $[0; \pi]$, выпукла вниз на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и т.д.

6. **Комментарии учителя** – 5 мин.

7. **Обсуждение мастерской** – 5 мин.

1. *Графиком функции*$y = \sin x$ является кривая, которая называется *синусоидой*. График функции $y = \sin x$ на других промежутках можно получить из построенной части графика на промежутке $0; \frac{\pi}{2}$. Так, формула $\sin \pi - x = \sin x$ позволяет, используя симметрию графика относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, построить его на промежутке от 0 до π.

Формула $\sin -x = -\sin x$ позволяет получить график функции на промежутке от $-\pi$ до 0, используя симметрию относительно начала координат.

2. Формула $\sin 2\pi + x = \sin x$ показывает, что значения функции $y = \sin x$ через каждые 2π повторяются. Положительное число *T*называется *периодом функции*$y = f(x)$, если для любого значения x из её области определения выполняются условия:

1) $x - T$ и $x + T$ тоже входят в область определения функции;

2) $f \; x - T \; = f \; x \; = f \; x + T$.

Функции, имеющие период, называют периодическими.

3. *Основные свойства* функции $y = \sin x$:

1) область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$;

2) область значений функции: $y \in \; -1; 1$;

3) нечётная функция;

4) периодическая функция, наименьшим периодом является число 2π.

5) функция возрастает на промежутках $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число; функция убывает на промежутках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число.

6) $y_{\text{наиб}} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $y_{\text{наим}} = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n -$ любое целое число;

7) функция принимает значение, равное нулю, при$x = \pi n$, где $n -$любое целое число;

8) функция ограничена и снизу и сверху;

9) функция выпукла вверх на отрезке $[0; \pi]$, выпукла вниз на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и т.д.

8. **Задание на дом** – 2 мин. (п. 18, подготовить сообщение об истории развития понятия функции в математике).

Мастерская 2.**Изучить – значит научиться решать задачи по теме «Функция $y = \sin x$ и её свойства»**

Цель: учить находить период заданной функции; строить графики функций и исследовать их на основные свойства; применять график функции $y = \sin x$ к решению уравнений.

Образовательная задача: формировать умения решать задачи на построение графиков функций и их исследование на основные свойства; применение графика функции $y = \sin x$ к решению уравнений; на нахождение периода функции.

Развивающая задача: развивать самостоятельность, умение работать в группах.

Воспитательная задача: повышать интерес к предмету, формировать логическое мышление.

Предполагаемые результаты: свободное применение понятия функции $y = \sin x$, её графика и свойств при решении задач.

Ход мастерской (45 мин):

1.Организационный момент и ознакомление с планом мастерской – 2 мин.

2. **Индивидуальная работа** – 8 мин.

Задание 1. Решите самостоятельно задачи. Обсудите ответ в паре.

Задача 1. Принадлежит ли графику функции $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 2$ точка: а) $0; \frac{3}{2}$; б) $\frac{2\pi}{3}; \frac{3}{2}$; в) $4\pi; 2{,}5$ [24, С. 91]?

Задача 2. Исследуйте функцию на четность: а) $f\ x\ = x + \sin x$; б) $f\ x\ = \frac{\sin^2 x}{x^2-1}$ [24, С. 92].

Задача 3. Определите промежутки возрастания (убывания) функции $y = \sin x$ на отрезке: а) $\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$; в) $-\pi; \pi$;г) $0; 2\pi$ [30, С. 284].

В результате выполнения задания 1 предполагается получить следующее решение задач:

Задача 1. Решение. а) $x = 0$, $y = -\sin\frac{\pi}{6} + 2 = 1{,}5 \Rightarrow$ точка $0; \frac{3}{2}$ принадлежит графику функции; б) $x = \frac{2\pi}{3}$, $y = -\sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + 2 = -\sin\frac{\pi}{6} +$ $+2 = 1{,}5 \Rightarrow$ точка $\frac{2\pi}{3}; \frac{3}{2}$ принадлежит графику функции; в) $x = 4\pi$, $y = -\sin\ 4\pi + \frac{\pi}{6}\ + 2 = -\sin\frac{\pi}{6} + 2 = 1{,}5 \Rightarrow$ точка $4\pi; 2{,}5$ не принадлежит графику функции.

Ответ: а) принадлежит, б) принадлежит, в) не принадлежит.

Задача 2. Решение. а)$f\ -x\ = -x + \sin\ -x\ = -x - \sin x$, то есть$f\ -x\ = -f(x)$ $\Rightarrow$функция $f\ x\ = x + \sin x$ является нечётной;

б) $f\ -x\ = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{sin^2 x}{x^2-1} \Rightarrow f\ -x\ = f\ x$ $\Rightarrow$данная функция чётная.

Ответ: а) нечётная; б) чётная.

Задача 3. Решение.По графику функции $y = \sin x$ определяем, что: а) функция убывает на промежутке $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$, возрастает на $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$; б) функция убывает на промежутке $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$, возрастает на $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$; в) функция убывает на промежутке $-\pi; -\frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2}; \pi$, возрастает на $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$; г) функция убывает на промежутке $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$, возрастает на $0; \frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

3. **Фронтальная работа с классом** (выработка общего мнения) – 3 мин.

Учитель:

1. Итак, при решении первой задачи мы пользовались табличными значениями функции $y = \sin x$, учились определять, принадлежит ли заданная точка графику данной функции.

2. При решении второй задачи мы использовали понятие чётной функции, а также формулу $\sin -x = -\sin x$.

3. При решении третьей задачи мы использовали понятие возрастания (убывания) функции.

4. **Работа в группах** – 22 мин.

Обсудите в группе поиск решения предложенных задач. Самостоятельно запишите решение задач. Сверьте ответы в группе.

Задание 2 (карточка выдается каждой группе).

Задача 1. Найдите область значений заданной функции $y = \frac{1}{\sin x + 2}$ [24, С. 93].

Задача 2. Найдите основной период функции $y = \sin 2x$.

Задача 3. Постройте график функции $y = \sin \ x - \frac{\pi}{4} \ + 1$.

Задача 4. Известно, что $f \ x \ = \sin 2x$. Найдите: а) $f(-x)$; б) $2f(x)$; в) $f \ -\frac{x}{2}$; г) $f \ -x \ + f \ x$ [24, С. 95].

Задача 5. Решите графически уравнение $\sin x + x = 0$.

Задача 6. Дана функция $y = f(x)$, где $f \ x \ = \begin{matrix} 2x + 2\pi, \text{если } x \leq -\pi, \\ \sin x, \text{если } -\pi < x \leq 0, \\ -2x, \text{если } x > 0. \end{matrix}$

а) Вычислите: $f(-\pi - 2)$, $f \ -\frac{\pi}{6}$, $f(2)$;

б) постройте график функции $y = f\ \ x\ $;

в) прочитайте график функции $y = f\ \ x\ $ [24, С. 99].

В результате выполнения задания 2 предполагается получить следующее решение задач:

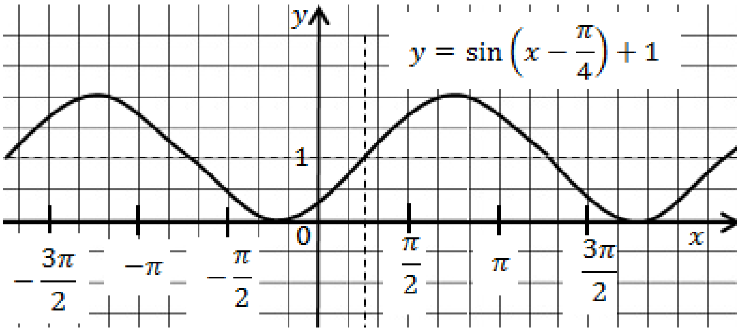


Рис. 9

Задача 1. Решение. Так как $-1 \le \sin x \le 1$, то при $\sin x = 1$ имеем $y = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, при $\sin x = -1$ имеем$y = \frac{1}{-1+2} = 1 \Rightarrow E\ \ y\ \ = \ \ \frac{1}{3}; 1\ $.

Ответ: $\ \frac{1}{3}; 1\ $.

Задача 2. Решение. Основной положительный период функции $y = Asin\ \ ax + b\ \ + c$равен $T = \frac{2\pi}{a} \Rightarrow$ основной период данной функции равен$T\ = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Ответ: π.

Задача 3. Решение. График данной функции представлен на Рисунке 9.

Задача 4. Решение.а) $f\ \ -x\ \ = \sin\ \ -2x\ \ = -\sin 2x$;б)$2f\ \ x\ \ = = 2\sin 2x$;в) $f\ \ -\frac{x}{2}\ \ = \sin\ \ 2 \cdot\ \ -\frac{x}{2}\ \ \ = \sin\ \ -x\ \ = -\sin x$; г) $f\ \ -x\ \ + +f\ \ x\ \ = -\sin 2x + \sin 2x = 0$.

Ответ: а) $-\sin 2x$; б) $2\sin 2x$;в) $-\sin x$; г) 0.

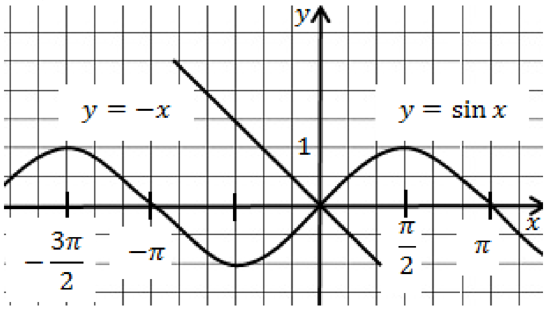


Рис. 10

Задача 5. Решение. Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = -x$. Абсцисса точки пересечения данных графиков и будет являться решением уравнения. Графики представлены на Рисунке 10. Получаем, что $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

Задача 6. Решение. а) $f\ \ -\pi-2\ \ =-2\ \ -\pi-2\ \ +2\pi=2\pi+4+2\pi=$ $=4\pi+4;\ f\ \ -\frac{\pi}{6}\ \ =\sin\ \ -\frac{\pi}{6}\ \ =-\frac{1}{2};\ f\ \ 2\ \ =-2\cdot 2=-4;$

б) график функции представлен на Рисунке 11;

в) 1) $E\ \ f\ \ =\ \ -\infty;0\ \ ;$ 2) $D\ \ f\ \ =(-\infty;+\infty);$ 3) $y_{\text{наим}}$ не существует, $y_{\text{наиб}}=0;$ 4) функция возрастает на $\ -\infty;-\pi\ \cup\ -\frac{\pi}{2};0\ $, функция убывает на $\ -\pi;-\frac{\pi}{2}\ \cup[0;+\infty);$ 5) непериодическая; 6) ни чётная, ни нечётная.

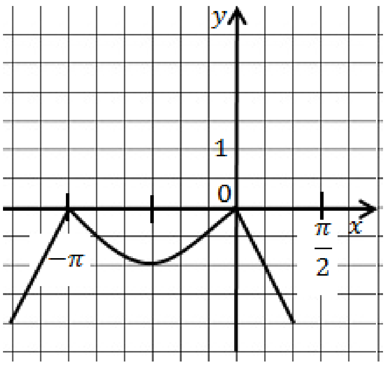


Рис. 11

5. **Комментарии учителя** – 5 мин.

Учитель:

1. Итак, при решении первой задачи мы использовали понятие области значений функции.

2. При решении второй задачи мы использовали понятие основного периода функции.

3. При решении третьей задачи мы применяли преобразования графиков функций.

4. Четвертая задача направлена на понимание функциональной символики.

5. При решении пятой задачи мы учились применять график функции $y=\sin x$ к решению уравнений.

6. При решении шестой задачи мы использовали понятие кусочно-заданной функции, а также основные свойства функции.

Группа называет ответы к задачам. Учитель сравнивает ответы. Корректировка хода решения задач.

6. **Обсуждение мастерской** – 3 мин.

Учитель: сегодня мы с вами учились применять понятия функции $y=\sin x$, её график и свойства при решении задач.

7. **Задание на дом** – 2 мин. (Подготовка к проверочной работе: №309(а), 313, 314).

*Итоговый контроль.*Исходя из того, что технология творческих мастерских, как правило, строится по заданному алгоритму (индивидуальная работа, работа в парах, работа в группах, обмен мнениями в классе, коррекция, слово учителя и обсуждение мастерской и на изучение темы «Функция $y = sin\, x$ и её свойства» дается три часа, на третьем уроке изучения темы целесообразно провести итоговый контроль в форме итоговой проверочной работы.

Итоговая проверочная работа состоит из пяти задания:

- *первая задача* связана с нахождением области значений функции;

- *вторая задача* связана с построением графика функции;

- *третья задача* направлена на понимание функциональной символики;

- *четвертая задача* связана с применением графика функции $y = \sin x$ к решению уравнений (дополнительные знания: линейная функция);

- *пятая задача* связана с построением графика функции и ей основными свойствами (дополнительные знания: кусочно-заданные функции).

Критерии оценки:

Задание 1 – 0-1 балл;

Задание 2 – 0-1 балл;

Задание 3 – 0 - 4 балла;

Задание 4 – 0-2 балла;

Задание 5 – 0-2 балла.

Отметка «5» ставится за 9-10 баллов; отметка «4» - за 7-8 баллов; отметка «3» - за 5-6 баллов; отметка «2» - за 0-4 баллов.

Примерный вариант итоговой проверочной работы по теме «Функция $y = sin\, x$ и её свойства».

Задача 1. Найдите область значений заданной функции $y = \frac{2}{\sin x - 3}$ [24, С. 93].

Задача 2. Постройте график функции $y = \sin\ x - \pi\ \ - 1$.

Задача 3. Известно, что $f\ x\ = 3\sin x$. Найдите: а) $f(-x)$; б) $2f(x)$; в) $2f\ x\ + 1$; г) $f\ -x\ + f(x)$ [24, С. 94].

Задача 4. Решите графически уравнение $\sin x = 2x$.

Задача 5. Постройте и прочитайте график функции:

$$y = \begin{matrix} x^2, \text{если } x < 0, \\ \sin x, \text{если } x \geq 0. \end{matrix}$$

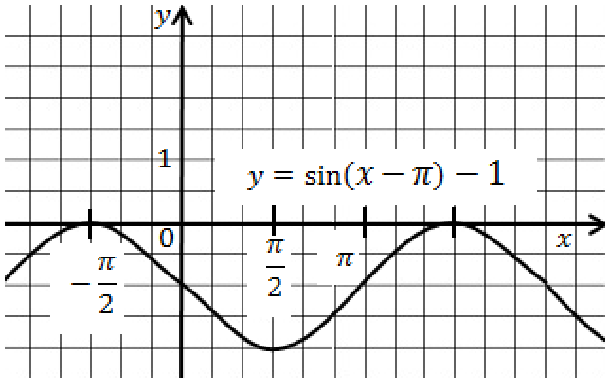


Рис. 12

Решение итоговой проверочной работы:

Задача 1.

Решение.

Так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, то при $\sin x = 1$ имеем $y = \frac{2}{1-3} = -1$, при $\sin x = -1$ имеем $y = \frac{2}{-1-3} = -0{,}5 \Rightarrow\Rightarrow E\ \ y\ \ = \ -0{,}5; -1\ .$

Ответ: $-0{,}5; -1\ .$

Задача 2. Решение. График данной функции представлен на Рисунке 12.

Задача 3. Решение. а) $f\ -x\ = 3\sin\ -x\ = -3\sin x$; б) $2f\ x\ = 2 \cdot 3\sin x = 6\sin x$; в) $2f\ x + 1\ = 2 \cdot 3 \cdot \sin x + 1 = 6\sin x + 1$; г) $f\ -x\ + +f\ x\ = 3\sin\ -x\ + 3\sin x = -3\sin x + 3 sin\ x = 0$.

Ответ: а) $-3\sin x$; б) $6\sin x$; в) $6\sin x + 1$; г) 0.

Задача 4.Решение. Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = 2x$. Абсцисса точки пересечения данных графиков и будет являться решением

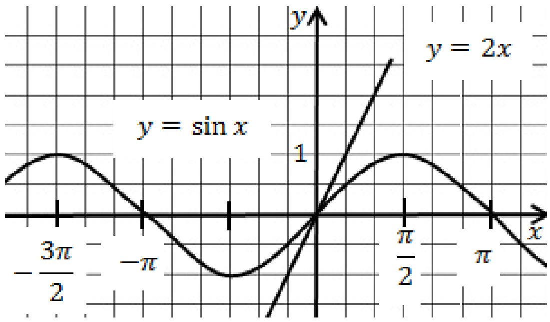


Рис. 13

уравнения. Графики представлены на Рисунке 13. Таким образом, получаем, что $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Задача 5. Решение. График данной функции представлен на Рисунке 14. По графику определяем, что:

1) $E\ y\ =\ 1;+\infty\ ;$

2) $D\ y\ = (-\infty;+\infty)$;

3) нули функции: $x = 2\pi k,\ k \in Z$;

4) $y < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $y > 0$ при $x \in\ -\infty; 0\ \cup$ $[0; 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, где $k \in Z$;

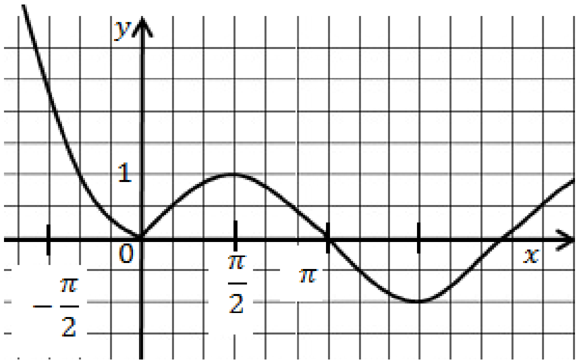


Рис. 14

5) функция возрастает при $x \in\ 0; \frac{\pi}{2}\ \cup (\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{2} + 2\pi k)$, функция убывает при $x \in (-\infty; 0] \cup$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$;

6) $y_{наиб}$ не существует, $y_{наим} = -1$;

7) непериодическая;

8) ни чётная, ни нечётная.

§8. Результаты педагогического эксперимента

Нами был проведен констатирующий эксперимент на базе МБУ «Школа №10» г.о. Тольятти в 2018-2019 учебном году. В эксперименте участвовало 30 учеников 10-х классов.

Цель констатирующего эксперимента – определение у учащихся уровня сформированности функциональных понятий, умения решать задачи по теме «Функции» за курс алгебры 7-9 классов.

В [51] нами было выявлено, что в курсе алгебры 7-9 классов у учащихся происходит первое знакомство с понятием функции и связанной с данным понятием терминологией. В основной школе учащиеся знакомятся с основными элементарными функциями, а в 10-11 классе материал по теме «Функции» систематизируется и обобщается. Кроме того, происходит дальнейшее знакомство с конкретными видами функций. В частности, учащиеся знакомятся с тригонометрическими функциями, показательной и логарифмической функциями. А также учатся исследовать функцию методами математического анализа.

Чтобы продолжение изучения темы «Функции» в 10-11 классе прошло успешно, учащимся по окончании 9 класса необходимо уже обладать базой соответствующих знаний и умений. В [51] нами были проанализированы программа учебника Ю.Н. Макарычева, а именно, что должны знать учащиеся после окончания 9 класса и задания, встречающиеся на ОГЭ по заданной теме.

В итоге была составлена контрольная работа №1, которая была предложена учащимся, где представлены следующие *типы задач*:

- на нахождение области определения функции;

- на понимание функциональной символики;

- на построение графика функции и её исследование;

- на применение графиков функций к решению уравнений, неравенств и их систем;

- на построение графика функции (задачи из ОГЭ).

Ниже представлены варианты контрольной работы, где продемонстрировано решение задач.

1 вариант

Задача 1. Найдите область определения функции $y = \frac{\overline{x+2}}{\overline{x-2}-3}$ [27, С. 11].

Решение. Для нахождения области определения составим следующую систему:

$$\begin{cases} x+2\geq 0, \\ x-2\geq 0, \\ \sqrt{x-2}-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq 2, \\ \sqrt{x-2}\neq 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq 2, \\ x-2\neq 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq 2, \\ x\neq 11. \end{cases}$$

Решением данной системы является объединение промежутков: $x\in [2;11) \cup (11;+\infty)$.

Ответ: $x\in [2;11) \cup (11;+\infty)$.

Задача 2. Пусть $f(x) = -3x+2$. Найдите: а) $f(-x)$; б) $f(x+5)$; в) $f(f(1))$; г) $f(f(x))$ [53].

Решение. а) $f(-x) = -3\cdot(-x)+2 = 3x+2$; б) $f(x+5) = -3\cdot(x+5)+2 = -3x-15+2 = -3x-13$; в) $f(1) = -3+2 = -1$, $f(f(1)) = f(-1) = 3+2 = 5$; г) $f(f(x)) = -3(-3x+2)+2 = 9x-6+2 = 9x-4$.

Ответ: а) $3x+2$; б) $-3x-13$; в) 5; г) $9x-4$.

Задача 3. «Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} x+2, \text{если } -4\leq x\leq -2; \\ 0, \text{если } -2< x\leq 0; \\ x^2, \text{если } 0< x\leq 3. \end{cases}$$

Используя заданный график функции, установите: 1) какова область определения функции $y=f(x)$; 2) чему равны наименьшее и наибольшее значения функции; 3) при каких значениях аргумента значение функции равно нулю, больше нуля, меньше нуля; 4) где функция возрастает, где убывает» [51, С. 105].

Решение. График функции представлен на Рисунке 15.

По графику определяем, что: 1) область определения функции: $[-4;3]$; 2) $y_{\text{наим}}=-2$, $y_{\text{наиб}}=9$; 3) при $x\in[-2;0]$ значение функции равно нулю, при $x\in(0;3]$ значение функции больше нуля, при $x\in[-4;-2)$ значение функции меньше нуля; 4) функция возрастает на $[-4;-2] \cup [0;3]$.

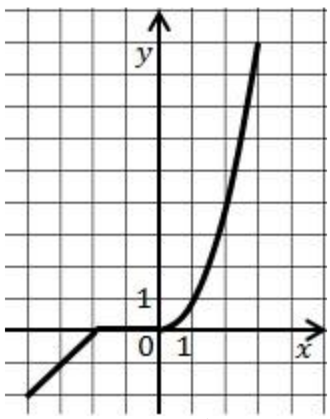


Рис. 15

Ответ: 1) $[-4;3]$; 2) $y_{\text{наим}}=-2$, $y_{\text{наиб}}=9$; 3) при

$x \in \ -2; 0 \ \ y = 0$, при $x \in \ 0; 3 \ y > 0$, при $x \in \ -4; -2 \ \ y < 0$; 4) функция возрастает на $\ -4; -2 \ \cup \ 0; 3 \ $.

Задача 4. Решите графически систему уравнений: $\begin{aligned} y = x^2 - 6x + 4, \\ xy = 12 \end{aligned}$ [51].

Решение. Графиком первого уравнения является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты её вершины:$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$, $y_0 = 9 - 18 + 4 = -5$. Графиком второго уравнения является гипербола $y = \frac{12}{x}$. Чтобы решить данную систему уравнений графическим способом нужно изобразить в одной координатной плоскости графики данных уравнений и найти их точки пересечения. Координаты точек пересечения и будут являться решением данной системы: $x \approx 5{,}7$; $y \approx 2{,}1$.

Ответ: $x \approx 5{,}7$; $y \approx 2{,}1$.

Задача 5. «Постройте график функции

$$y = \frac{2{,}5 \ x \ \ - 1}{x \ \ - 2{,}5x^2}$$

и определите, при каких значениях kпрямая$y = kx$не имеет с графиком общих точек.

Решение. «1) область определения данной функции: $x \ \ - 2{,}5x^2 \neq 0$; Следовательно, раскрыв знак модуля, получаем:

$$\begin{aligned} x - 2{,}5x^2 \neq 0, \\ -x - 2{,}5x^2 \neq 0. \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x(1 - 2{,}5x) \neq 0, \\ -x(1 + 2{,}5x) \neq 0. \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x \neq 0, \\ x \neq \pm 0{,}4. \end{aligned}$$

2) раскроем модули и учитывая область определения заданной функции, упростим полученные выражения:

$$x > 0 \colon y = \frac{2{,}5x - 1}{x - 2{,}5x^2} = \frac{2{,}5x - 1}{-x(2{,}5x - 1)} = -\frac{1}{x},$$

$$x < 0 \colon y = \frac{-2{,}5x - 1}{-x - 2{,}5x^2} = \frac{-2{,}5x - 1}{x(-2{,}5x - 1)} = \frac{1}{x}.$$

Итак, получили:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} \text{ при } x > 0, \\ \dfrac{1}{x} \text{ при } x < 0; \end{cases}$$

3) построим график данной функции, учитывая найденную область определения: $x \neq 0, x \neq \pm 0{,}4$.График данной функции изображен на Рисунке 16;

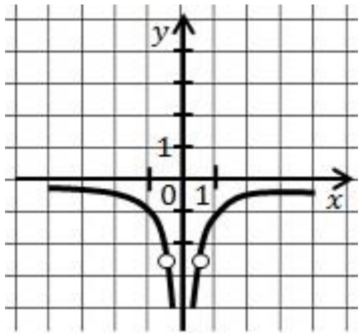


Рис. 16

4) определим, при каких значениях kпрямая$y = kx$ не имеет с графиком общих точек. Известно, что прямая$y = kx$ проходит через начало координат. По построенному графику видим, что прямая $y = kx$ не будет иметь с графиком общих точек, если она пройдет через точку $(0{,}4; -2{,}5)$ или $(-0{,}4; -2{,}5)$ – выколотые точки. Подставим по очереди данные точки в уравнение $y = kx$ и отсюда найдем искомые значения k:

$$-2{,}5 = 0{,}4k \ \Rightarrow k = -2{,}5 : 0{,}4 = -6{,}25,$$

$$-2{,}5 = -0{,}4k \ \Rightarrow k = -2{,}5 : \ -0{,}4 \ = 6{,}25.$$

Кроме того, прямая $y = kx$ не будет иметь с графиком общих точек при $k = 0$. При всех остальных значениях k прямая будет пересекаться с графиком заданной функции. Итак, $k = 0, \pm 6,25$» [51, С. 98].

Ответ: $k = 0, \pm 6,25$.

2 вариант

Задача 1. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+3}-2}$ [27, С. 11].

Решение. Для нахождения области определения составим следующую систему:

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0, \\ x + 3 \geq 0, \\ \sqrt{x+3} - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -5, \\ x \geq -3, \\ \sqrt{x+3} \neq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq -5, \\ x \geq -3, \\ x + 3 \neq 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq -5, \\ x \geq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решением данной системы является объединение промежутков: $x \in \ -3; 1 \ \cup \ 1; +\infty$.

Ответ: $x \in \ -3; 1 \ \cup \ 1; +\infty$.

Задача 2. Пусть $f \ x \ = \frac{3x+2}{x-2}$. Найдите: а) $f \ \frac{1}{x}$; б) $f(2x-1)$; в) $f(f \ 5 \ )$; г) $f \ f \ x$ [24, С. 42].

Решение. а) $f \ \frac{1}{x} \ = \frac{3\cdot \ \frac{1}{x} \ +2}{\frac{1}{x}-2} = \frac{2x+3}{1-2x}$; б) $f \ 2x-1 \ = \frac{3 \ 2x-1 \ +2}{2x-1-2} = \frac{6x-1}{2x-3}$; в) $f \ 5 \ = \frac{3\cdot 5+2}{5-2} = \frac{17}{3}$, $f \ f \ 5 \ = \frac{3\cdot\frac{17}{3}+2}{\frac{17}{3}-2} = 5\frac{2}{11}$; г) $f \ f \ x \ = \frac{3\cdot\frac{3x+2}{x-2}}{\frac{3x+2}{x-2}-2}$, выполнив тождественные преобразования, получим: $f \ f \ x \ = \frac{11x+2}{x+6}$.

Ответ: а) $\frac{2x+3}{1-2x}$; б) $\frac{6x-1}{2x-3}$; в) $5\frac{2}{11}$; г) $\frac{11x+2}{x+6}$.

Задача 3. Постройте график функции:

$$y = \begin{matrix} x+1, \text{если} -4 \le x \le -1; \\ 0, \text{если} -1 < x \le 0; \\ x^2, \text{если}\ 0 < x \le 3. \end{matrix}$$

Используя заданный график функции, установите: 1) какова область определения функции $y = f(x)$; 2) чему равны наименьшее и наибольшее значения функции; 3) при каких значениях аргумента значение функции равно нулю, больше нуля, меньше нуля; 4) где функция возрастает, где убывает.

Решение. График функции представлен на Рисунке 17.

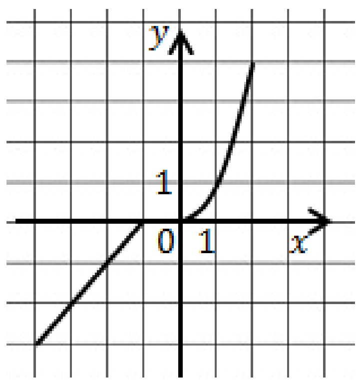


Рис. 17

По графику определяем, что: 1) область определения функции: $[-4; 3]$; 2) $y_{\text{наим}} = -3$, $y_{\text{наиб}} = 9$; 3) при $x \in [-1; 0]$ значение функции равно нулю, при $x \in (0; 3]$ значение функции больше нуля, при $x \in [-4; -1)$ значение функции меньше нуля; 4) функция возрастает на $-4; -1 \ \cup \ 0; 3$.

Ответ: 1) $[-4; 3]$; 2) $y_{\text{наим}} = -3$, $y_{\text{наиб}} = 9$; 3) при

$x \in \ -1; 0\ \ y = 0$, при $x \in \ 0; 3\ \ y > 0$, при $x \in \ -4; -1\ \ y < 0$; 4) функция возрастает на $-4; -1\ \cup\ 0; 3$.

Задача 4. Решите графически систему уравнений: $\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5, \\ xy = -6 \end{cases}$[53].

Решение. Графиком первого уравнения является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты её вершины:$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$, $y_0 = 4 - 8 - 5 = -9$.

Графиком второго уравнения является гипербола $y = -\frac{6}{x}$. Чтобы решить данную систему уравнений графическим способом нужно изобразить в одной координатной плоскости графики данных уравнений и найти их точки пересечения. Координаты точек пересечения и будут являться решением данной системы: $x \approx -5{,}2$; $y \approx 1{,}2$.

Ответ: $x \approx -5{,}2$; $y \approx 1{,}2$.

Задача 5. «Постройте график функции

$$y = \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{x+2}$$

и определите, при каких значениях mпрямая$y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. 1) найдем область определения данной функции: $x \neq -2$;

2) разложим на множители многочлен $x^2 + 3x + 2$:

$x^2 + 3x + 2 = 0$,

$$D = 9 - 8 = 1,$$

$$x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1, x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2,$$

следовательно, $x^2 + 3x + 2 = \ x+1\ \ x+2$.

Таким образом,

$y = \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{x+2} = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x+2}$.

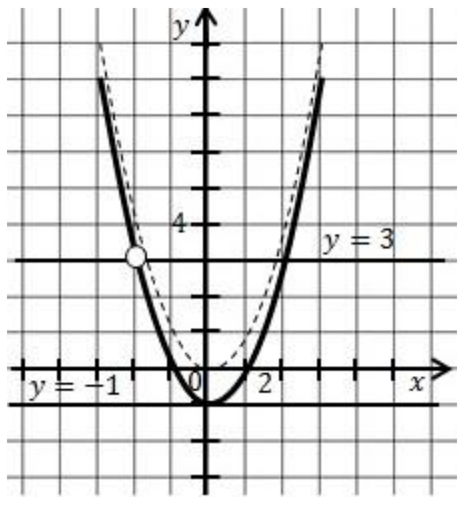


Рис. 18

Учитывая, что $x \neq -2$, сократим данное выражение на $x + 2$ и применим справа налево формулу разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$y = x - 1 \quad x + 1 = x^2 - 1;$$

3) таким образом, в ходе тождественных преобразований мы получили, что $y = x^2 - 1$, при этом $x \neq -2$. График функции изображен на Рисунке 18;

4) определим по построенному графику при каких значениях mпрямая$y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Прямая $y = m$параллельна оси Ox. Только прямые $y = -1$ и $y = 3$ пересекают график данной функции ровно в одной точке. Итак, $m = -1$ и $m = 3$» [51, С. 101].

Ответ: -1; 3.

В Таблице 4 представлены результаты контрольной работы.

Анализ таблицы показывает, что больше всего затруднений у учащихся вызывают задания на применение графиков функций к решению уравнений, неравенств и их систем (справилась только половина учащихся). Кроме того, большие трудности у учащихся возникают при решении задач на построение графиков функции (задачи из ОГЭ). С этим задание справилось только 43,3% учащихся, а 23,4% совсем не приступили к выполнению данного задания.

Таблица 4

Результаты контрольной работы

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступили к заданию
1.	83,3% (25)	16,7% (5)	0% (0)
2.	70% (21)	16,7% (5)	13,3% (4)
3.	56,7% (17)	36,7% (11)	6,6% (2)
4.	50% (15)	40% (12)	10% (3)
5.	43,3% (13)	33,3% (10)	23,4% (7)

Помимо этого стоит заметить, что задачи на нахождение области определения функции умеют решать достаточно большое количество учащихся. В Таблице 5 представлены выявленные виды ошибок у учащихся.

Таблица 5

Выявленные виды ошибок у учащихся

Задание 1		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Неверно найдено пересечение решения системы неравенств
1	2	2
Задание 2		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Неверно подставлено значение в формулу
1	1	4

Задание 3		
Виды ошибок		
Неверно построен график функции	Неверно найдены наименьшее и наибольшее значения функции	Неверно определены промежутки возрастания, убывания функции
5	3	3

Задание 4			
Виды ошибок			
Неверно построен график первого уравнения	Неверно построен график второго уравнения	Вычислительная ошибка	Неверно найдена точка пересечения графиков
5	4	3	5
Задание 5			
Виды ошибок			
Неверно выполнены преобразования	Не рассмотрена ОДЗ	Неверно построен график функции	Неверно найден искомый параметр
3	5	5	3

В Таблице 6 представлены полученные результаты:

Таблица 6

Количественный анализ контрольной работы

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	13,3% (4)
«4»	23,3% (7)
«3»	30% (9)
«2»	33,4% (10)

Таким образом, можно сделать вывод о том, что подавляющее большинство учащихся испытывают затруднения при решении задач по теме «Функции». Большие затруднения у учащихся с задачами на применение графиков функций к решению уравнений, неравенств и их систем, построение графиков функции (задачи из ОГЭ). Помимо этого, учащиеся допускают большое количество арифметических ошибок, в результате чего приходят к неправильному ответу, несмотря на то, что алгоритм решения верный.

В рамках *поискового этапа эксперимента* во второй половине 2018-2019 учебного года на базе МБУ «Школа №10» г.о. Тольятти в старших классах была осуществлена апробация системы задач на формирование понятия функции в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, представленных нами §4 главы I работы, по темам: «Функции и способы их задания», «Функции $y = sin\, x, y = cos\, x$, их свойства и графики», «Функции $y = tg\, x, y = ctg\, x$, их свойства и графики», «Показательная функция, её свойства и график», «Логарифмическая функция, её свойства и график».

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала функциональной линии в учебниках алгебры различных авторов. Определено, что несмотря на некоторые различия как в содержании функционального материала по классам, так и его распределении во многих рассматриваемых учебниках основными темами 10 класса являются темы «Показательная и логарифмическая функции», «Тригонометрические функции и их свойства». В 11 классе центральное место занимают темы «Непрерывность и пределы функции», «Производная функции и её применение к исследованию функций».

2.Выделены основные типы задач единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) по теме «Функции».Определено, что в*части В* единого государственного экзамена профильного уровня содержатся задачи на: определение величины по графику, исследование степенных и иррациональных функций, исследование показательных и логарифмических функций, исследование тригонометрических функций, исследование функций без помощи производной, исследование частных и произведений.В*части*Сединого государственного экзамена представлены задачи с параметром.

3. Разработан методический проект по теме «Функция $y = \sin x$и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских.

4. Проведен педагогический эксперимент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Исследована история возникновения и развития понятия функции в математике. Определено, что схема изучения функциональной линии в школьном курсе математики основывается на истории становления понятия функции.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы, требования к математической подготовке обучающихся.

3. Определено, «что подходить к обучению функциям нужно менее формально, максимально используя *графическое представление функции*. Необходимо использовать *наглядно-образный материал*, активизирующий познавательную деятельность учащихся, повышающий их интерес и качество знаний; устанавливать связь *с жизненными представлениями учащихся»* [46]Кроме того, в методике обучения функциям, как отмечает автор, одним из основных аспектов является сочетание графического и аналитического методов исследования функций. Это способствует гармоничному развитию мышления учащихся.

4. Разработаны системы задач, удовлетворяющие требованиям Е.И. Лященко, по теме исследования.

5. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала функциональной линии в учебниках алгебры различных авторов. Определено, что несмотря на некоторые различия как в содержании функционального материала по классам, так и его распределении во многих рассматриваемых учебниках основными темами 10 класса являются темы «Показательная и логарифмическая функции», «Тригонометрические функции и их свойства». В 11 классе центральное место занимают темы «Непрерывность и пределы функции», «Производная функции и её применение к исследованию функций».

6. Выделены основные типы задач единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) по теме «Функции». Определено, что в*части B* единого государственного экзамена профильного уровня содержатся задачи на: определение величины по графику, исследование степенных и иррациональных функций, исследование показательных и логарифмических функций, исследование тригонометрических функций, исследование функций без помощи производной, исследование частных и произведений.В*части C*единого государственного экзамена представлены задачи с параметром.

7. Разработан методический проекта по теме «Функция $y = \sin x$и её свойства» в рамках технологии творческих мастерских.

8. Проведен констатирующий и поисковый эксперимент, который выявил недостаточный уровень умения решать задачи по теме «Функции».

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонова, И.В. Дифференцированная работа учителя математики при формировании понятия функции в курсе алгебры основной школы [Текст]: дис. канд. пед. наук./ И.В. Антонова. – Тольятти, 2003. – 185 с.

2. Антонова, И.В. К формированию понятия функции в курсе алгебра 7-9-х классов / Проблемы современного математического образования в пед.вузах и школах России: Тез.докл.межрегион.науч.конв. / Вятск. гос. пед. ун-т. – Киров, 2001. – С. 71 – 72.

3. Антонова, И.В. О трактовке понятия функции в школьных учебниках алгебры 7-9 классов / Гуманитаризация математического образования в школе и везу: Межвуз. сб. науч. трудов. Вып. 2. – Саранск: Поволжск. Отд. РАО, Морд. гос. пед. ин-т – СММО, 2002. – С. 125-128.

4. Антонова И.В. Дифференцированная работа учителя математики при формировании понятия функции в курсе алгебры основной школы / Проблемы математического образования и культуры. Сб. тезисов Межд. науч. конф. – Тольят. гос. ун-т. – Тольятти, 2003. – С. 61-62.

5. Барыбин, К. С. Функции и их графики / К.С. Барыбин // Математика в школе, 1952. - № 6. – С. 26-33.

6. Виленкин, Н.Я. Функции в природе и технике [Текст]: книга для внеклас. чтения IX – X кл./ Н.Я. Виленкин. – 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1985. – 192 с.

7. Виленкин, Н.Я. Как возникло и развивалось понятие функции/ Н.Я. Виленкин // Квант, 1977. - № 7. – С. 41 – 45.

8. Винокурова, Н.Д. Урок математики по теме «Применение производной. Прикладные, текстовые задачи» 11-й класс [Электронный ресур]// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2019. – Режим доступа: https://открытыйурок.рф/статьи/644410. Последнее обновление 13.05.19.

9. Власова, Е.В. Еще раз об изучении функции в средней школе / Е.В. Власова // Математика в школе, 2002. - № 6. – С. 53 – 57.

10. Гусев, В.А. Смирнова, И.М. Магистерская диссертация по методике преподавания математики: Методические рекомендации. – М.: Прометей, 1996. – 107 с.

11. Глейзер, Г.И. История математики в школе IV – VI кл. [Текст]: пособие для учителей/ Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1981. – 239 с.

12. Глейзер, Г.И. История математики в школе IX – X кл. [Текст]: пособие для учителей/ Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.

13. Горина, Л.А. О развивающем потенциале функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы/ Л.А. Горина // Математика в школе. – 2011. - № 2. – С. 69 – 73.

14. Громова, Е.В. Обучение понятию функции в основной школе с помощью компьютерных технологий/ Е.В. Громова, И.С. Сафуанов // Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». – 2013. – № 1(25). - С. 91-99.

15. Дёмина, Т.А. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке/ Т.А. Дёмина // Математика в школе, 2010. - №1. – С. 10 – 14.

16. Дундукова, И.В. Возможности использования программы УМК «Живая математика» при изучении функциональной линии в курсе алгебры 7-9 класса [Электронный ресурс]/ И.В. Дундукова, Е.Н. Балибардина, Г.П. Бердникова// Актуальные проблемы непрерывного педагогического образования в условиях реализации федеральных государственных и профессиональных стандартов: сборник трудов по итогам IV Всероссийской заочной научно-практической конференции, г. Михайловка, 20 ноября 2015 г. – М: Планета. – 2015. – С. 78-83. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_25559955_51157205.pdf. – Последнее обновление 11.05.2019.

17. Карпушина, Н.М. Математические карты: игра «Девятка»/ Н.М. Карпушина// Математика в школе, 2015. - №10. – С. 47 – 51.

18. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала математического анализа [Текст]: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.

19. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс [Текст] учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень)/ Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В, Ткачева и др. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 366 с.

20. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [Текст] учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень)/ Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В, Ткачева и др. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 264 с.

21. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

22. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов математ. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. – М.: Дрофа, 2007. - 320 с.

23. Михайлова, Н.Г. Педагогическая технология мастерских, как средство развития творческих способностей обучающихся/ Н.Г. Михайлова, Л.В. Торопцева//Вестник научных конференций. -2016. - №12-4. - С. 118-119.

24. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд. стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.

25. Мордкович, А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни)/ А.Г.Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд. стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

26. Мордкович, А.Г. Свойства функций и кванторы / А.Г. Мордкович// Математика в школе, 2013. - №2. – С. 45-49.

27. Муравин, Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс [Текст]: учебник/ Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

28. Муравин, Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс [Текст]: учебник/ Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 318 с.

29. Нахман, А. Д. Функции и их свойства в программе подготовки к ЕГЭ/ А. Д. Нахман // Математика в школе, 2010. - №3. – С. 62 – 67.

30. Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил.

уровни/ С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

31. Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни/ С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 464 с.

32. Овчинникова, Т.Н. Урок математики по теме «Тригонометрические функции, их свойства и графики» 10-й класс [Электронный ресурс]// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2019. – Режим доступа: https://открытыйурок.рф/статьи/630123. Последнее обновление 16.05.19.

33. Остапенко, С.И. Формы, методы и средства обучения тригонометрическим функциям в курсе алгебры основной школы / С.И. Остапенко, А.И. Мишустин// Сборник: наука и образование: отечественный и зарубежный опыт. Шестнадцатая международная научно-практическая конференция, 2018. – С. 175-179.

34. Песков, Т.А. Об изучении функций в средней школе/ Т.А. Песков // Математика в школе, 1951. – № 5. – С. 52 – 56.

35. Покровский, В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия [Текст]: учеб.-метод. Пособие/ В.П. Покровский – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.

36. Пратусевич, М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень/ М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2009. – 415 с.

37. Пратусевич, М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень/ М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2010. – 463 с.

38. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического

объединения по общему образования [Электронный ресурс]/ М-во образования и науки РВ. – М.: Просвещение, 2016. – 569 с. Режим доступа: http://fgosreestr.ru/.pdf. – Последнее обновление 16.05.19.

39. Программы для общеобразоват. школ, гимназий, лицеев: Математика. 5-11 кл. / Сост. Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк. – 3-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2002. – 320 с.

40. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие. – М.: Народное образование, 1998. – С. 173.

41. Токарева, Л.И. Формирование систем математических понятий у учащихся общеобразовательных школ [Текст]: автореферат докторской диссертации по педагогике/ Л.И. Токарева. – Москва, 2010. – 30 с.

42. Токарева, Л.И. Обобщение и систематизация знаний учащихся по изучения уравнений, неравенств, функций в 10-11 классах [Текст]: метод. рек. для учителей математики средних шк. / Л.И. Токарева // Математика. – 2003. - №29. – С. 24-29.

43. Токарева, Л. И. Методическая система формирования математических понятий и их систем у учащихся школ и студентов вузов [Текст] / Л. И. Токарева // Методология и методика формирования научных понятий у учащихся школ и студентов вузов: материалы респ. науч.-практ. конф. / Челяб. гос. пед. ун-т. – Челябинск, 2000. – С. 200-203.

44. Турчанинова, Е.В. Формирование понятий «функция» и «функциональная зависимость величин» у учащихся основной школы в условиях реализации межпредметных связей физики с математикой [Текст]: автореферат дис. канд. пед. наук./ Е.В. Турчанинова. – Челябинск, 2005. – 28 с.

45. Турчанинова, Е.В. Понятие «функция» в физике и математике [Текст]: программа элективного курса / Сост. Е.В. Турчанинова. – Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2005. – 21 с.

46. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/938. – Последнее обновление 07.02.2019.

47. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/. – Последнее обновление 12. 03. 2019.

48. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» [Электронный ресурс]/ Приказ Министерства образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2014. – 164 с. Режим доступа: http://god2015.com/files/Prikaz_253.pdf. – Последнее обновление 15.05.2019.

49. Филатова, В.М. Программа элективного курса «Такая разнообразная тригонометрия» [Электронный ресурс]// Ведущий образовательный портал России «Инфоурок». Режим доступа: https://infourok/. – Последнее обновление 03.05.19.

50. Харина, Н.П. Урок математики по теме «Функция $y = \sin x$, её свойства и график» 10-й класс [Электронный ресурс]// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2019. – Режим доступа: https://открытыйурок.рф/статьи/672659. Последнее обновление 16.04.19.

51. Холодулина, С.Ю. Методика обучения функциям в курсе алгебры основной школы/ С.Ю. Холодулина: бакалаврская работа по направлению подготовки «Педагогическое образование», направленность (профиль) «Математика и информатика». – Тольятти, ТГУ. – 2017. – 122 с.

52.Холодулина, С.Ю. Методика обучения функции $y = \sin x$ в общеобразовательной школе/ С.Ю. Холодулина//Математика и математическое образование: сборник трудов IX Международной научной конференции «Математика. Образование.Культура» (Россия, г. Тольятти, ТГУ, 24-26 апреля 2019 года)/ под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2019. - с. 370-374.

53. Холодулина, С.Ю. Система задач на формирование понятия линейной функции в школьном курсе математики/ С.Ю. Холодулина// Математика и математическое образование: сборник трудов VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», 26-29 апреля 2017 года, Россия, г. Тольятти/ под общ. ред. Р.А. Утеевой – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. – с. 457 – 460.

54. Цукарь, А.Я. Изучение функций в VII классе с помощью средств образного характера / А.Я. Цукарь // Математика в школе, 2000. - № 14. – С. 20-27.

55. Шихалиев, Х.Ш. К методике введения понятия «тригонометрическая функция» в школе/ Х.Ш. Шихалиев // Математика в школе, 2012. - №9. – С. 47 – 51.

56. Denbel, D.G. Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum/ D.G. Denbel // Journal of Education and Practice, 2015. - № 1. – P. 77 – 81.

57. Kleiner, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey/ I. Kleiner// The College Mathematics Journal, 1989. - № 4. – P. 282 – 300.

58. Lisa L. Clement . What do students really know about functions [Электронныйресурс]. 2001. PP. 745 – 748. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.535.8420&rep=rep1&type=pdf (дата обращения: 15.04.2018).

59. Panaoura A., Michael-Chrysanthou P., Philippou A. Teaching the concept of function: definition and problem solving [Электронныйресурс]. 2016. PP. 440 – 445. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286927/document (дата обращения: 17.05.2018).

60. Sierpinska, A. On understanding the notion function/ A. Sierpinska// The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 1992. - P. 25 – 58.

Приложение А

Ответы и указания решения к системам задач по теме «Функции» в курсе алгебры общеобразовательной школы

Функции и способы их задания

1. Имеем: $20=\frac{1}{2}ah\Rightarrow 40=ah\Rightarrow a=\frac{40}{h}$. Итак, получаем функцию: $y=a=\frac{40}{h}$. Далее, $D(y)=(0;+\infty)$, $E(y)=(0;+\infty)$.

Ответ: $a=\frac{40}{h}$, $D(y)=(0;+\infty)$, $E(y)=(0;+\infty)$.

2. Ответ: $V=0{,}15t+2$; 5м^3; $5{,}6\text{м}^3$; $6{,}5\text{м}^3$; $7{,}25\text{м}^3$; 10 мин; 28 мин.

3. Ответ: а) да; б) нет.

4. а) $2x+3y=24\Rightarrow x=12-1{,}5y$, $y=8-\frac{2}{3}x$; б) $7x-5y=35\Rightarrow x=5+\frac{5}{7}y$, $y=1{,}4x-7$.

Ответ: данные уравнения задают функцию.

5. Ответ: зависимость; единственное.

6. Ответ: $f(3)=6, f(-2)=0, f(0)=0$.

7. Ответ: а) $3x+2$; б) $-3x-13$; в) 5; г) $-9x-4$.

8. Ответ: а) $x\neq-1;-2$; б) $x\in(-2;0)\cup[2;+\infty)$; в) $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

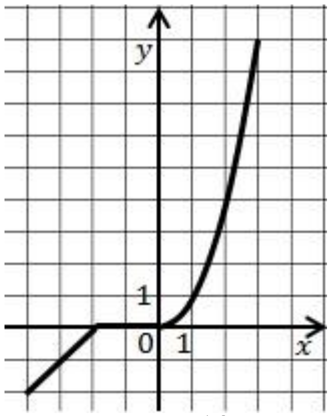


Рис. 19

9. Ответ: 1) $D(f)=\{10;11;\ldots;98;99\}$; 2) $f(17)=8$, $f(35)=8$, $f(59)=14$; 3) $f(x)=3$ при $x=30;21;12$; 4) $\max f(x)=f(99)=18$, $\min f(x)=f(10)=1$.

10. График функции представлен на Рисунке 19.

Функции $y=sin\ x, y=cos\ x$, их свойства и графики

11. Ответ: а) 0; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) да.

13. Ответ:а)функция,ставящая в соответствие каждому вещественному числу его синус, называется функцией синус; б) функция,ставящая в соответствие каждому вещественному числу его косинус, называется функцией косинус.

14. Воспользоваться графиком функции $y = \cos x$.

15. Ответ: 1) $x \in R$; 2) $x \in R$; 3) $x \geq 0$.

16. Воспользоваться графиком функции $y = \sin x$.

17. Подставить в $f\ \ x\ \ = 2x^2 - x + 1$ вместо $x \sin x$ и преобразовать полученное тригонометрическое выражение.

18. Ответ: 1) $cos\frac{\pi}{7}$>$cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $cos\frac{8\pi}{7}$<$cos\frac{10\pi}{7}$; 3)$\cos 1$ >$\cos 3$.

19. Применить графический метод решения систем уравнений.

20. Подставить значения переменных в формулу и построить график.

Функции $y = tg\ x, y = ctg\ x$, их свойства и графики

21. а) $tg\ \ -\frac{31\pi}{6}\ \ = tg\ \ -\frac{31\pi}{6} + 5\pi\ \ = tg\ \ -\frac{\pi}{6}\ \ = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{\overline{3}}{3}$; б) $ctg\ \ \frac{35\pi}{3}\ \ = ctg\ \ \frac{35\pi}{3} - 11\pi\ \ = ctg\frac{2\pi}{3} = -\frac{\overline{3}}{3}$; в) $tg\ \ -\frac{263\pi}{4}\ \ = tg\ \ -\frac{263\pi}{4} + 65\pi\ \ = tg\ \ -\frac{3\pi}{4}\ \ = -tg\frac{3\pi}{4} = -1$; г) $ctg\ \ -\frac{173\pi}{2}\ \ = ctg\ \ -\frac{173\pi}{2} + 86\pi\ \ = ctg\ \ -\frac{\pi}{2}\ \ = -ctg\frac{\pi}{2} = 0$.

Ответ: а) $-\frac{\overline{3}}{3}$; б)$-\frac{\overline{3}}{3}$; в) -1; г) 0.

22. Воспользоваться определениями функции $y = tg\ x$ и функция $y = ctg\ x$.

23. Воспользоваться графиком функции $y = tgx$.

24. а) $f\ \ -x\ \ = tg\ \ -x\ \ - \cos\ \ -x\ \ = -tgx - \cos x \Rightarrow$ данная функция ни четная, ни нечетная; б) $f\ \ -x\ \ = tg\ \ -x\ \ - x = -tgx - x = -f(x)$ $\Rightarrow$данная функция нечетная; в) $f\ \ -x\ \ = ctg^2\ \ -x\ \ - (-x)^4 = ctg^2 x - x^4 = f(x)$ $\Rightarrow$ данная функция четная.

Ответ: а) ни четная, ни нечетная; б) четная.

25. а)$tg\ \ 2x + 2\pi\ \ + tg\ \ 7\pi - 2x\ \ = tg\ \ 2x\ \ + tg\ \ -2x\ \ = tg\ \ 2x\ \ - tg\ \ 2x\ \ = 0$; б) $tg\ \ \pi - x\ \ + tg\ \ 5\pi + x\ \ = tg\ \ -x\ \ + tgx = -tgx + tgx = 0$, что и требовалось доказать.

26. Воспользоваться графиком функции $y = ctgx$.

27. Взять за основу графики функций $y = tg\,x$ и $y = ctgx$. Далее воспользоваться элементарными преобразованиями графиков функций.

28. Ответ: а) $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; б) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; г) $x = \pi + \pi n,\ n \in Z$.

Показательная функция, её свойства и график

29. Подставить исходные значения переменных ($T_0 = 140,\ m_0 = 8$, $t = 3650$) в формулу $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_0}}$ и вычислить.

30. Ответ: 1) $x = 4$; 2) $x = 4$; 3) $x = -3$; 4) $x = -\frac{2}{3}$.

31. Ответ: 1) да; 2) да; 3) да; 4) да.

32. Ответ: 1) $a = 9$; 2) $a = \pm\sqrt{5}$.

33. Ответ: а), г).

34. Взять за основу график функции $y = 2^x$. Далее воспользоваться элементарными преобразованиями графиков функций.

35. Ответ: $y = a^x$; $a \neq 0$.

36. а) $2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2}$; б) $2^{x+1} \cdot 2^{2x} = 2^{3x+1} = 2 \cdot 2^{3x} = 2f^3(x)$, что и требовалось доказать.

37. Ответ: 1) $x \neq 0$; 2) $x \neq 0$; 3) $x > 1$.

38. 1) $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x) \Rightarrow$ данная функция является четной; 2) $f(-x) = 2^{-x} - 2^{-(-x)} = 2^{-x} - 2^x \Rightarrow$ данная функция является ни четной, ни нечетной.

Ответ: 1) чётная; 2) ни четная, ни нечетная.

39. 1) графики функций $y = 2^x$ и $y = -x + 3$ пересекаются в точке $(1; 2)$, $x > 1$; 2) графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = x + 4$ пересекаются в точке $(-1; 3)$, $x \geq -1$.

Ответ: 1) $x > 1$; 2)$x \geq -1$.

Логарифмическая функция, её свойства и график

40. Обозначив искомое отношение через x, имеем уравнение: $x =$ $= (\frac{2500}{2200})^{12} = \ {\frac{25}{22}}^{12}$, откуда $\lg x = 12(\lg 25 - \lg 22) \Rightarrow x = 4{,}6$.

Ответ: 4,6.

41. а) $\log_2 4 = 2$; б) $\log_3 81 = 3$; в) $\log_{0,5} 0{,}125 = 3$; г) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$; д) $\log_{0,5} 8 = -3$.

Ответ: а) 2; б) 3; в) 3; г) -3; д) -3.

42. а) $y = log_3 3^7 \Rightarrow y = 7$; б) $y = log_3 3^{-3} \Rightarrow y = -3$; в) $y = log_3 3^{-1,7} \Rightarrow y = -1{,}7$.

Ответ: а) 7; б) -3; в) $-1{,}7$.

43. Ответ: в.

44. Ответ: а) $\log_2 5 > \log_3 5$; б) $\log_2 0{,}9 < \log_3 0{,}9$.

45. Ответ: а) функция $f\ x\ = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ называется логарифмической функцией; б) область определения данной функции – множество положительных чисел; в) данная функция непрерывна на множестве положительных чисел.

46. а)$\log_2 2^x = x$; б) $\log_2 4^x + \log_2 8^x = \log_2 2^{2x} + \log_2 2^{3x} = 2x + 3x = 5x$, что и требовалось доказать.

47. а) $x^2 - 3x - 4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; б) $-x^2 + 5x + 6 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$; в) $\frac{x^2-4}{x+3} > 0 \Rightarrow$ $x^2 - 4 \quad x + 3 \ > 0 \Rightarrow x \in (-3; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: а) $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; б)$x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$; в)$x \in (-3; -2) \cup (2; +\infty)$.

48. Ответ: а) $y_{\text{наиб}} = 3$, $y_{\text{наим}} = -1$; б) $y_{\text{наиб}} = 3$, $y_{\text{наим}} = -4$.

49. Ответ: а) $x = 1$; б) $x = 1$.

50. Функция представляет собой кусочно-заданную функцию, область определения которой$(-\infty; +\infty)$.