МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)

«Математическое образование»
(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему «**МЕТОДИКА РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАНИТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ**»

Студент Ю.С. Святкина_________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель И.В. Антонова _________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель программы д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ___________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2019 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ___________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2019 г.

Тольятти 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальностьисследования. Проблема преемственности является важным условием в реализации качественной математической подготовки обучающихся общеобразовательной школы. В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом (далее ФГОС) психолого-педагогические условия реализации основной образовательной программы должны обеспечивать преемственность содержания и форм организации образовательной деятельности при получении среднего общего образования.

Вопросом преемственности в педагогике занимались Г.И. Исаенко [47], А.Г. Мороз [85], Г.И. Щукина [127], такие педагоги-классики, как А. Дистервег [41], К.Д. Ушинский [112], И.Г. Песталоцци [91] и др.

Проблема преемственности математического образования исследовалась в работах Г.А. Клековкина [50], Н.Б. Истоминой [48], Е.И. Лященко [62], Г.И. Саранцева [103], К.И. Нешкова [88], М.И. Башмакова, Н.Я. Виленкина [26], А.Г. Мордковича [84] и др., а также в зарубежной литературе [131-135].

В настоящее время в курсе алгебры общеобразовательной школы прослеживаются линии учебников в соответствии с ФГОС таких авторских коллективов, как А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир [12-14; 76; 77] (5-9 класс); С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. [6; 9; 68, 70, 73, 75]; Г.К. Муравин, О.В. Муравина [7; 8; 10; 67; 69; 71; 72; 74] (5-11 класс); Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. [2-4] (7-11 класс), которые отражают преемственность в изучении математики в основной и старшей школах; в курсе геометрии – в учебниках В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, В.В. Прасолова [36-38]; А.В. Погорелова [34] (7-9 класс); Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. [33; 35] (7-11 класс). Следует отметить, что С.М. Никольский, М.К. Потапов и Г.К. Муравин, О.В. Муравина имеют завершенные линии учебников по алгебры с 5 по 11 класс; по геометрии данного принципа придерживаются авторы Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов (7-11 класс).

Анализ ранее выполненных диссертационных работ, посвященных реализации преемственности в обучении математике, показал, что в них были разработаны:

- «теория преемственности в формировании аналогии в младшем и среднем звеньях школы, показана необходимость дифференцированного подхода к использованию аналогии в соответствии с различными ее видами и условиями применения» (М.Н. Сизова[107], 1999);

- «методика изучения уравнений в русле концепции, направленная на формирование приемов умственной деятельности в процессе изучения материала, а так же система упражнений, отвечающая требованиям методической концепции развивающего обучения, которая позволила реализовать преемственность в изучении данной темы между начальной и средней школой» (О.Э. Городниченко [39], 2000);

- «концептуальный подход к построению методической системы реализации преемственности при обучении математике, синтезирующий результаты, полученные при решении этой проблемы на психолого-педагогическом и методическом уровнях и учитывающий специфику философской сущности категории «преемственность» (З.А. Магомеддибирова [63], 2003);

- «концепция развивающего обучения математике, построенного на основе установления преемственных связей самим учеником, которая интегрирует методологическую, педагогическую, психологическую и методическую составляющие» (В.М. Туркина [110], 2003);

- «личностно-развивающая методика реализации принципа преемственности в обучении учащихся начальной и основной ступеней школы с углубленным изучением математики, направленная на развитие самостоятельности школьников, формирование положительной мотивации в выстраивании учебной траектории, раскрытие потенциала и математических способностей» (Р.Н. Москалева [87], 2007);

- «методическая система осуществления преемственности реализации прикладной направленности обучения математике в основной и старшей школе, представленная взаимосвязанными блоками (содержательно-целевым, процессуальным, результирующим), основанная на сформулированных дидактических положениях, предполагающих использование идей проблемного и развивающего обучения, применение информационных технологий» (Н.В. Решетникова [100], 2009).

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречиями между* сложившимися педагогическими условиями реализации преемственности в соответствии с ФГОС, вызванными процессами модернизации школьного математического образования, и фактическим состоянием методики реализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования,** котораясостоит в обосновании и разработке некоторых методических положений по решению проблемы преемственности в процессе обучения математике учащихся основной школы при переходе в старшие классы общеобразовательной школы (на примере темы «Тождественные преобразования»).

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предметом исследования является методика реализации преемственности при обучении математике обучающихся общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностейреализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе и разработке методики реализации преемственности (на примере темы «Тождественные преобразования»).

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что если в общеобразовательной школе использовать методику обучения, направленную на реализацию преемственности при обучении математике обучающихся, то это будет способствовать повышению качества математической подготовки учащихся 10-11 классов.

Задачи исследования:

1. Выделить различные подходы к понятию преемственности.
2. Рассмотреть вопрос реализации преемственности обучения в Федеральном государственном образовательном стандарте.
3. Выявить методические особенности реализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе.
4. Раскрыть методику реализации преемственности при обучении тождественным преобразованиям в общеобразовательной школе.
5. Спроектировать изучение темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» с применением технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова.
6. Разработать элективный курс по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» в курсе алгебры и начал математического анализа.
7. Провести педагогический эксперимент и представить его результаты.

Для решения поставленных задач будут применяться следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования; экспертиза разработанного элективного курса.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2017/18уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы).

2 семестр (2017/18уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2018/19 уч.г.): разработка методики реализации преемственности при обучении тождественным преобразованиям в общеобразовательной школе; проектирование изучения темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» с применением технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова; разработка элективного курс по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» в курсе алгебры и начал математического анализа;

4 семестр (2018/19 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем предложены методические рекомендации по реализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе на примере темы «Тождественные преобразования» в курсе алгебры общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- рассмотрены различные подходы к понятию преемственности;

- выявлены методические особенностиреализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе на примере темы «Тождественные преобразования».

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по реализации преемственности при обучении теме «Тождественные преобразования» в курсе алгебры общеобразовательной школы; проект изучения темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» с применением технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова; элективный курс по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» для обучающихся 10-х классов.

На защиту выносится:

1. Методические рекомендации по реализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе на примере темы «Тождественные преобразования».

2. Содержание методического проекта по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» с применением технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова в условиях реализации преемственности между средним и старшим звеном общеобразовательной школы.

3. Элективный курс по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» для обучающихся 10-х классов.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на: научно-исследовательском семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры;международной научной конференции «Артемовские чтения» (г. Пенза, март 2018 г.); всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (г. Тольятти, 2018 г.), первом этапе научной студенческой конференции «Дни науки» института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г. Тольятти, апрель 2019 г.).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций, программы элективного курса была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а так же в ходе прохождения производственной практики на базе ЧОУ школы «ЛАДА» г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в 3 публикациях.

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы (135 наименований) и Приложений.

Объем работы составляет 99 страниц.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

§1. Понятие преемственности обучения математике

Раскроем понятие преемственности при обучении в различной литературе.

В педагогике под преемственностью понимают: фактор, способствующий качественному усвоению знаний учащихся (А. Дистервег, К.Д. Ушинский, И.Г. Песталоцци); общепедагогический принцип, требующий по отношению к обучению постоянного обеспечения непрерывной связи «между отдельными сторонами, частями, этапами и ступенями обучения и внутри них; расширения и углубления знаний, которые получены на предыдущих этапах обучения; преобразования некоторых представлений и понятий в стройную систему знаний, умений и навыков; поступательно-восходящего развертывания процесса обучения в соответствии с содержанием, формами и методами работы при обязательном учете качественных изменений, которые совершаются в личности учащихся» (А.Г. Мороз, [85, С.10]).

В методической литературе преемственность рассматривают как:

- некоторую связь, обладающую важными для развития учащихся особенностями и имеющую большое значение для процесса обучения в школе (К.И. Нешков, [88, С.13]). Правильное понимание преемственности эффективно влияет на организацию процесса обучения математике в общеобразовательной школе, в том числе его определенных этапов; осуществление методических исследований, связанных с вопросами повторения в процессе обучения, линейного и концентрического построении курсов и др.

-«сохранение из старого всего ценного и рационального, без чего новое не может существовать, но это не простое сохранение, не механическое повторение элементов старого в новом, а сохранение их в переработанном виде. Занимая место старого, сохраняя в нем все ценное, положительное, новое выступает как более высокое качественное образование» (Н.Б. Истомина, [48, С.6]);

- повторение «высшей ступени развития определенных моментов предшествующих этапов, возврат к старому, но на более высоком уровне» (Г.А. Клековкин, [50, С.11-12]), которые отражают так называемый *принцип преемственности обучения*. Его реализация должна осуществляться в следующей последовательности:

а) изучение специфических проявлений преемственности в процессах физиологического, психического, личностного и деятельностного развития учащегося;

б) систематизация их возрастных возможностей;

в) обобщение карт, содержащих тенденции и закономерности качественных изменений в процессах их индивидуального развития во всех классах обучения в их единстве и взаимосвязи и, в частности, отражающих сензитивные периоды в развитии его психических свойств и познавательных процессов.

Культуролог Э.А. Баллер при анализе специфики в зависимости от типов развития выделяет «*две формы преемственности:* преемственность на одном уровне и преемственность на разных уровнях. Преемственность на одном уровне связана с количественными изменениями (эволюцией). Преемственность на различных уровнях характерна для качественных изменений (скачков)» [20, С.17].

Остановимся на некоторых особенностях реализации преемственности при обучении математике.

В.М. Туркина показывает, что с целью решения проблемы преемственности необходимо предусмотреть возможность *превращения* *ученика* из объекта учения в его *субъект*. Такое превращение возможно, если в процессе учения создаются условия для овладения учеником определенного вида учебной деятельностью, в частности математической [111, С. 59-60].

М.Ш. Семикова рассматривает вопросы преемственности с учетом применения определенных *приемов и методов обучения*; *активизации мыслительной деятельности* учащихся.

Автор рассматривает некоторые *вопросы преемственности в активизации мыслительной деятельности* учащихся 1-4-х и 5-6-х классов по следующим направлениям [106, С. 77]:

1) учебное (усвоение математических знаний умений, навыков, математического языка и математических методов;

2) познавательное (как в широком смысле - получение учениками информации об окружающей жизни, природных и общественных явлениях, достижениях науки и техники, подвигов героев труда, так и в математическом смысле - ознакомление с важнейшими понятиями современной математики, с приложениями математики в практической деятельности человека, усвоение приемов работы со всеми познавательными источниками, которые имеют место в обучении математике, например с учебником, выполнение практической работы, предваряющей или завершающей изучение нового материала по какой-либо теме и т.д.);

3) развивающее (усвоение логических операций сравнения, обобщения, абстрагирования, конкретизации и др., овладение творческими структурами мышления, усвоение приемов доказательства истинности и опровержения ложности суждений и методов естественно-научного исследования, особенно в использовании опыта, эксперимента в теоретическом познании) [106, С. 78].

Так же М.Ш. Семикова замечает, что, учитывая все эти направления в их взаимосвязи, можно перейти к выводам о необходимости и полезности межпредметных связей между математикой и другими учебными предметами, внутрипредметных связей между арифметическими, алгебраическими и геометрическими вопросами. Например, использование графических средств для изучения аналитических вопросов имеет отношение не только к взаимосвязи геометрического и арифметического материала, но и к развитию учащихся, так как знакомит их с таким научным методом, как математическое моделирование.

Автор указывает на то, что выбор тех или иных приемов, методов обучения; его организационных форм в 1-4-х и 5-6-х классах не может быть случайным, так как определяется как общими целями обучения математики, так и специфическими целями каждого этапа обучения. Например: 1) *на этапе изучения и осмысливания нового материала*, начиная с начальных классов, много внимания уделяется видам фронтальной работы с учащимися постепенным включением в нее (как составного звена изучения нового материала) различных видов самостоятельной работы (различных как по форме, так и по развитию творческой активности учащихся); 2) *на этапе учета успеваемости* наиболее важное значение приобретают вопросы индивидуализации контроля и оказания помощи тем ученикам, которые в ней нуждаются [106, С. 79].

В исследовании Е.Г. Винокурова, П.П. Неустроева [27] описывается решение проблемы преемственности между начальной и основной школой, которая связана с *психологической неподготовленностью* учащихся.

В исследовании С.А. Павленко [90, С. 4] представлен один из путей эффективной реализации принципа преемственности в общеобразовательной и высшей школах - *решение практико-ориентированных задач*.

В работах Ш.И. Ганелин [31] и Б.Г. Ананьев [16] раскрывается понятие преемственности на общетеоретическом уровне как инструмент, позволяющий управлять процессом обучения. Так, Б.Г. Ананьевым определено, что проблема преемственности в педагогической науке возникает в связи с составлением программ для смежных ступеней обучения. Автор указывает на необходимость обеспечения взаимосвязи знаний в *содержании и методах обучения*, а также *взаимосвязи работы учителей* на смежных ступенях обучения; для разрешения данной проблемы предлагаются следующие пути решения:

- необходимо обеспечить преподавание системы знаний, умений и навыков учащихся по предмету;

- проследить формирование системы знаний по годам обучения;

- учесть различные сочетания методов преподавания и руководства самостоятельной работой при установлении связи между старым и новым материалом [16, С. 26].

Б.Г. Ананьев и Ш.И. Ганелин сходятся во мнении, что преемственность в обучении нужно рассматривать не только *с позиции учителя*, но и *с позиции учащегося*: развитие знаний, умений и навыков в его сознании, установление системы и внутренней их взаимосвязи, осмысливание пройденного на новом, более высоком уровне.

Как уже говорилось выше, в дидактике и теории и методике обучения математике отмечена особая роль повторения в осуществлении двухсторонних преемственных связей нового и старого материала.

Так же, полагаясь на работы таких авторов, как Ю.М. Колягин [52], Д. Пойа [92], Г.И. Саранцев [102], П.М. Эрдниев [128], Е.А. Комарова [53] выделяет еще один путь решения проблемы преемственности - использование *обобщенных приемов математической деятельности*.

В.Ф. Шаталов указывает на роль схем в систематизации материала, обозначая значимость упражнений на построение схем, и считает, что *символическая наглядность* может быть использована как одно из основных *средств* обеспечения преемственности при изучении математики [122, С. 86-88].

Таким образом, под преемственностью в обучении мы понимаем установление необходимой связи между содержанием учебного материала и организацией его обучения при изучении школьного курса математики.

§2. Реализация преемственности обучения математике в федеральном государственном образовательном стандарте

Рассмотрим вопрос реализации преемственности между материалом 7-9 классов на углубленном уровне и 10-11 классов профильного уровня согласно примерной программе среднего и основного общего образования [96; 97] по следующим линиям: числовая, линия уравнений и неравенств и функциональная.

В курсе 7-9 классах и в курсе 10-11 классах по *числовой линии* обучающиеся должны:

- свободно оперировать понятиями: натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество целых чисел, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанное число, рациональное число, множество рациональных чисел, иррациональное число, корень степени n, действительное число, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел;
- понимать и объяснять разницу между позиционной и непозиционной системами записи чисел; переводить числа из одной системы записи (системы счисления) в другую;
- доказывать и использовать признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 3, 6, 9, 10, 11 суммы и произведения чисел при выполнении вычислений и решении задач;
- выполнять округление рациональных и иррациональных чисел с заданной точностью;
- сравнивать действительные числа разными способами;
- упорядочивать числа, записанные в виде обыкновенной и десятичной дроби, числа, записанные с использованием арифметического квадратного корня, корней степени больше 2;
- находить НОД и НОК чисел разными способами и использовать их при решении задач;

- выполнять вычисления и преобразования выражений, содержащих действительные числа, в том числе корни натуральных степеней;

Вместе с этим, в 10-11 классах, с учетом выполнения вышеуказанных требований к знаниям/умениям учащихся, они научатся выполнять стандартные тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных, иррациональных выражений.

Рассмотрим линию уравнений и неравенств. Так, при изучении данной линии,в курсе 7-9 классах и в курсе 10-11 классах обучающиеся должны:

- свободно оперировать понятиями: уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений;
- решать разные виды уравнений и неравенств и их систем, в том числе некоторые уравнения 3 и 4 степеней, дробно-рациональные и иррациональные;
- по окончании 7-9 классов знать, а по окончании 10-11 классов применять теорему Виета для уравнений степени выше второй;
- понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать;
- использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения;
- решать алгебраические уравнения и неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами;
- владеть разными методами доказательства неравенств;
- решать уравнения в целых числах;
- изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями, неравенствами и их системами.

На основе изученного материала данной линии и с учетом вышеуказанных требований школьники 10-11 классов так же:

- овладеют основными типами показательных, логарифмических, иррациональных, степенных уравнений и неравенств стандартными методами их решений и применять их при решении задач;

- научатся применять теорему Безу к решению уравнений;

- овладеют методами решения уравнений, неравенств и их систем, научатся выбирать метод решения и обосновывать свой выбор.

Приведем требования к знаниям/умениям учащихся по *функциональной линии.* При изучении данной линиив курсе 7-9 классах и в курсе 10-11 классах обучающиеся должны:

- выпускник основной школы должен свободно оперировать, а выпускник общеобразовательной школы владеть и уметь применять при решении задач следующие понятия: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график зависимости, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность функции, наибольшее и наименьшее значения, четность/нечетность функции, периодичность функции, график функции;

- строить графики функций: линейной, квадратичной, дробно-линейной, степенной при разных значениях показателя степени, $y=|x|$;

- использовать преобразования графика функции $y=f(x)$ для построения графиков функций $y=af(kx+b)+c$;

- анализировать свойства функции и вид графика в зависимости от параметров;

- свободно оперировать, а по окончании средней школы владеть и применять при решении задач следующие понятия: последовательность, ограниченная последовательность, монотонно возрастающая (убывающая) последовательность, предел последовательности, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, характеристическое свойство арифметической (геометрической) прогрессии;

- использовать метод математической индукции для вывода формул, доказательства равенств и неравенств, решения задач на делимость;
- исследовать последовательности, заданные рекуррентно;
- решать комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии.

Вместе с этим, окончив 10-11 класс ученик должен:

- «владеть понятием степенная функция;
- строить ее график и уметь применять свойства степенной функции при решении задач;
- владеть понятиями показательная функция, экспонента; строить их графики и уметь применять свойства показательной функции при решении задач;
- владеть понятием логарифмическая функция; строить ее график и уметь применять свойства логарифмической функции при решении задач;
- владеть понятиями тригонометрические функции; строить их графики и уметь применять свойства тригонометрических функций при решении задач;
- владеть понятием обратная функция; применять это понятие при решении задач;

Таким образом, в федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования [96] и федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования [97] прослеживается необходимая связь между содержанием учебного материала по математике, для реализации преемственности ее обучения должна быть так же осуществлена связь и с организацией обучения в ходе дальнейшего изучения школьного курса математики.

§3. Методические особенности реализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе

Проблема преемственности в обучении математике не является новой. М.А. Гаврилова и Н.В. Печникова выделили основные этапы ее развития:

Первый этап: *конец 50-х гг. – начало 60-х годов* XX столетия, когда была активная дискуссия по подготовке проекта реформирования математического образования. Период *характеризуется*: а) *сложившейся специфики методики изучения арифметики в начальной школе*, расходившейся с методикой преподавания курса арифметики в V классе; б) *отсутствием* в учебниках начальной школы *обоснованных правил*; в) сильно отличающимися *формами записей в тетрадях, требованиями к степени подробности в изложении решений текстовых задач*.

Второй этап: начало 70-х годов, когда была введена трехлетняя начальная школа, поэтому проблема преемственности требовала особого внимания.

Третий этап: конец 80-х -начало 90-х, когда в процессе реформы общеобразовательная школа стала одиннадцатилетней и обучение начиналось с 6 лет [30, С. 53-54].

Т.А. Иванова выделяет *четвертый этап* появления процесса преемственности: конец 90-х г. XX в- начало XXI в, где главная цель образования состоит в формировании разносторонне развитой, творческой личности, способ-ной реализовать творческий потенциал в динамичных социально-экономических условиях как в собственных интересах, так и в интересах общества[30, С. 53].

А.М. Пышкало, связывая методические аспекты проблемы преемственности с проблемами развития методики обучения математике, рассматривает условия решения данной проблемы: 1) необходимость *комплексного, системного подхода к изучению методики обучения математике, ее элеме-тов и их взаимосвязей*, так как только такой подход создает основу для раз-работки конкретных методических положений, направленных на повышение качества и эффективности обучения математике; 2) научные исследования в области методики, дающие все необходимое для обоснования курса математики; 3) учет известных элементов методики и конкретных методических рекомендаций, составляющих определенную методическую систему [99, С. 5].

Г.С. Шамсутдинова видит *причины проблемы преемственности в обучении математике в*:1) поиске решения многих методических проблем преподавания нового курса математики 5-го класса *вне связи с системой учебно-воспитательной работы начальных классов*;2) *отсутствии учета* того, что в начальных классах обучение и воспитание учащихся происходит под *руководством одного учителя; 3*) *недостаточном знании учителями математики 5-х классов содержания обучения* в начальных классах, приводящее затрачиванию большого количества времени на изучение того материала, который уже хорошо усвоен учащимися; 4) переоценивании сил учащихся, к которым предъявляются завышенные требования или резко увеличивается объем заданий, что приводит к снижению успеваемости учащихся 5-х классов.5) нарушение преемственности *в методах работы с учащимися*, связанное с неразъяснением домашнего задания как в начальных классах, а так же не с каждодневной его проверкой [120, С. 163-164].

К.И. Нешков с целью решения проблемы преемственности в обучении математике предлагает учитывать взаимосвязи следующих понятий [88, С. 17]: а) преемственности и повторения; б) преемственности и пропедевтики; в) преемственности и «переучивания». Остановимся на них.

Преемственность и повторение

Автор отмечает, что слова К.Д. Ушинского о «Введении неустанного повторения, предупреждающего забвения»- не должны пониматься слишком прямолинейно, так как построение школьного курса математики, при котором повторение, способствующее преемственности при изучении понятия или системы понятий, дает возможность проявиться основным качествам преемственности. В *упражнениях на повторение* должно: а) появляться новое;

б) отмирать старое, несущественное в соответствии с логикой развития изучаемого понятия, в соответствии с повышением уровня образования учащихся.

Таким образом, преемственность в повторении автор видит в *обеспечении непрерывного развития системы понятий* с целью сохранения на достаточно высоком уровне некоторых навыков учащихся.

Преемственность и пропедевтика

Вопрос возникновения пропедевтики связаны с серьезных трудностей при формировании некоторого понятия или при слишком концентрированном изложении некоторой темы. В этом случае необходимо распределить материал на больший промежуток времени: а) *с выделением начального концентра,* что приводит к получению пропедевтического курса; б) *непрерывным образом,* включая часть материала в другую тему, в результате чего получится пропедевтика некоторого понятия.

Правильно решить вопрос проблемы преемственности, по мнению К.И. Нешкова, можно лишь при полном учете всех требований преемственности. Понимание преемственности может выделить существенные части темы и расположить их так, чтобы ее прохождение представляло в полном смысле слова развитие с надлежащим образом установленными связями между отдельными частями и этапами изучения [88, С. 15-16].

Преемственность и «переучивание»

Вопрос о переучивании по отношению к преемственности достаточно серьезен и имеет непосредственное отношение к рассматриваемой теме.

Автор отмечает, что если в последующем классе незначительно изменяется формулировка какого-либо известного учащимся правила, или вводится новый термин взамен употреблявшегося ранее, или дается другая формулировка известной задачи, или применятся другой способ рассуждения, то данный вопрос становится актуальным.

К.И. Нешков видит в преемственности в обучении возможность для обеспечения осуществления взаимосвязи между представлениями, понятиями, умениями и навыками. Она способствует осознанию основных идей математики и позволяет установить связи с другими предметами, а так же более глубокому осмыслению и лучшему запоминанию изученного материала.

Б.К. Темиргалиева рассматривает преемственность как «объективная необходимая связь между новым и старым в процессе развития» [109, С. 205] и предлагает решать проблему преемственности, доведя до автоматизма вычислительные навыки. Для этого можно использовать работу с карточками, регулярного проведения устного счета, развитие речи учащихся (комментирование своего решения у доски), индивидуальный подход, учет пробелов в знаниях учащихся.

А.К. Мендыгалиева [80], проведя анализ проблемы преемственности в обучении математике в начальной и основной школе, рассматривая внедрение различных УМК в начальной и основной школе, дает ряд рекомендации по обеспечению преемственности, которые так же применимы при переходе из среднего в старшее звено общеобразовательной школы.Автор предлагает пути решения проблемы: активные методы обучения, способствующих формирование общеучебных умений и навыков; согласованные образовательные стандарты на смежных ступенях обучения; внутриредметные связи в содержательно-методической линии курса математики; последовательность подачи основных понятий, единая символика и терминология; сформированность основных учебных умений и навыков, необходимых для дальнейшего изучения курса алгебры; требовательность к уровню подготовки учащихся; единая структура и принцип построения учебных пособий.

В.Б. Михайлова [82] считает, что неотъемлемой частью преемственного обучения в математике является заинтересованность учащихся. Развивать интерес автор предлагает посредством выполнения проектных заданий, позволяющих учащимся видеть практическую пользу от изучения той или иной темы.

И.П. Лобанок, придерживаясь определения Л.А. Сафоновой, под преемственностью понимает «сложный педагогический феномен, обеспечивающий непрерывное и результативное осуществление учебной деятельности, совершенствование и систематизацию знаний, умений и навыков учащихся, а так же их психическое развитие и ведущий к интеграции как внутрипредметного, так и межпредметного характера» [61, С. 143]. Для реализации преемственных связей автор предлагает организацию повторения для упрочнения старых и установления новых связей. Для этого рекомендуется чаще ссылаться на известные теоремы, правила, которые позволят лучше понять новый математический факт.

В.В. Кафарова и Т.А. Французова под преемственностью понимают установление необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения. Данные авторы, полагаясь на мнение ученого П.М. Эрдниева, предлагают использовать принцип укрепления дидактических единиц (УДЕ). Данный принцип помогает достичь целостности математических знаний и позволяет создать более совершенную последовательность разделов материала, которая обеспечит единство школьного курса математики [49].

А.З. Салахов преемственность рассматривает как связь между явлениями, где новые сменяют старые, сохраняя в себе некоторые их элементы. Автор считает, что содержательно-методические линии курса математики должны отражать идейную сторону математики-науки и быть необходимым средством в обеспечении преемственности всего материала курса [101].

Таким образом, при реализации преемственности обучения математике школьников в общеобразовательной школе необходимо учитывать методические аспекты и опыт ее реализации учителями математики, что показано нами в статье [104]. Кроме того, Н.В. Аммосова указывает, что «последовательное осуществление преемственности придает обучению перспективный характер, при котором отдельные темы рассматриваются не изолированно друг от друга, а в той взаимосвязи, которая позволяет изучение каждой текущей темы строить не только с опорой на предыдущие знания, но и широкой ориентировкой на последующие темы» [15, С. 26].

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты:

1. Выполнен анализ структуры различных трактовок понятия преемственности в обучении. Определено, что под преемственностью в обучении обычно понимают некоторую связь, обладающую важными для процесса развития учащихся особенностями и имеющую большое значение для всего процесса обучения в школе.

2. Рассмотрен вопрос реализации преемственности обучения в Федеральном государственном образовательном стандарте.

3. Выявлены методические особенности реализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе. Определено, что для эффективного обучения учащихся, необходимо: 1) довести до автоматизма вычислительные навыки; 2) использовать активные методы обучения, способствующие формированию общеучебных умений и навыков; 3) использовать согласованные образовательные стандарты на смежных ступенях обучения; 4) осуществлять внутрипредметные связи в содержательно-методической линии курса математики; 5) соблюдать последовательность при подаче основных понятий, использовать единую символику и терминологию; 6) сформировать у учащихся основные учебные умения и навыки, необходимые для дальнейшего изучения курса алгебры; 7) осуществлять требовательность к уровню подготовки учащихся;

8) применять единую структуру и принцип построения учебных пособий; 9) заинтересовать учащихся посредством выполнения проектных заданий, позволяющих учащимся видеть практическую пользу от изучения той или иной темы; 10) использовать принцип укрепления дидактических единиц (УДЕ), который позволит достичь целостности математических знаний и позволит создать единство школьного курса математики.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ТОЖДЕСТВЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§4. Реализация преемственности при обучении тождественным преобразованиям в общеобразовательной школе

Линия тождественных преобразований - одна из главных линий школьного курса математики. Благодаря этим преобразованиям формируются представления об аналитических методах математики. Большинство математических задач предполагает выполнение тех или иных тождественных преобразований.

Тождественные преобразования не являются отдельной темой, а играют роль вспомогательного инструмента на протяжении всего курса математики, алгебры и начал анализа, а так же геометрии, тем самым осуществляя преемственность изучаемого материала.

В результате изучения линии тождественных преобразований углубленном уровне в 7-9 классах учащийся получит возможность [116]:

«- свободно оперировать понятиями степени с целым и дробным показателем;

- выполнять доказательство свойств степени с целыми и дробными показателями;

- оперировать понятиями «одночлен», «многочлен», «многочлен с одной переменной», «многочлен с несколькими переменными», коэффициенты многочлена, «стандартная запись многочлена», степень одночлена и многочлена;

- свободно владеть приемами преобразования целых и дробно-рациональных выражений;

- выполнять разложение многочленов на множители разными способами, с использованием комбинаций различных приемов;

- использовать теорему Виета и теорему, обратную теореме Виета, для поиска корней квадратного трехчлена и для решения задач, в том числе задач с параметрами на основе квадратного трехчлена;

- выполнять деление многочлена на многочлен с остатком;

- доказывать свойства квадратных корней и корней степени n;

- выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни, корни степени n;

- свободно оперировать понятиями «тождество», «тождество на множестве», «тождественное преобразование»;

Согласно примерной основной программы среднего общего образования [97] по результатам изучения линии тождественных преобразований на углубленном уровне в 10-11 классах общеобразовательной школы, учащиеся научатся:

- выполнять вычисления и преобразования выражений, содержащих действительные числа, в том числе корни натуральных степеней;

- выполнять стандартные тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных, иррациональных выражений;

- выполнять равносильные преобразования уравнений;

- свободно использовать тождественные преобразования при решении уравнений и систем уравнений;

Таким образом, по требованиям к результатам изучения линии тождественных преобразований между основной и старшей школами на углубленном уровне видно, что осуществлена преемственность в содержании учебного материала. Например, в 7-9 классах должны были выполнять тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни и корни n-й степени, а в 10-11 классах учащиеся выполняют уже преобразования выражений, содержащих действительные числа, в том числе корни натуральных степеней.

Рассмотрим методические аспекты реализация преемственности при обучении тождественным преобразованиям в общеобразовательной школе.

Н.М. Епифанова [43] отмечает, что при изучении тождественных преобразований алгебраических выражений существует два подхода: *алгебраический* и *функциональный*. *Алгебраический подход* заключается в изучении действий над числами, *функциональный* - входящие в выражения буквы понимают как переменные, а тождественные преобразования опираются на условия равенства функций.

Основы тождественных преобразований закладываются еще в начальной школе (законы арифметических действий), в 5 классах учащиеся знакомятся с первыми основными тождествами (например, $ab = ba,$ $a(b+c) = ab + ac$ и др.) и применяются при выполнении следующих видов заданий:

1. Найдите значение выражения, используя рациональный способ вычисления: $45 \cdot 327 + 73 \cdot 45$.

Решение: $45 \cdot 327 + 73 \cdot 45 = 45 \cdot (327 + 73) = 45 \cdot 400 = 18000$.

2. Вычислите рациональным способом: $399 \cdot 60$.

Решение: $399 \cdot 60 = (400 - 1) \cdot 60 = 400 \cdot 60 - 1 \cdot 60 = 24000 - 60 = 23940$.

3. Сократите дробь: $\frac{216}{324}$.

Решение: $\frac{216}{324} = \frac{108 \cdot 2}{108 \cdot 3} = \frac{2}{3}$.

По мнению Н.М. Епифановой, выполняя подобные упражнения, учащиеся готовятся к знакомству с понятием «тождественное преобразование», а так же к целесообразности выполнения тех или иных преобразований.

Вместе с этим автором подчеркивается, что в 6 классе учащиеся знакомятся с понятием «коэффициент», с выражениями вида: $3a$, $-7b$, $14ac$, но понятие «одночлен» пока не вводится. Так же учащиеся раскрывают скобки и приводят подобные слагаемые при помощи распределительного свойства умножения.

Пример: $2a+7b+11a=a(2+11)+7b=13a+7b.$

И.С. Цай приводит последовательность изучения тождественных преобразований выражений в школьном курсе алгебры (Табл.1) [23]:

Таблица 1

Последовательность изучения тождественных преобразований выражений в общеобразовательной школе

Класс	*Виды выражений*
7	Целые выражения (одночлены и многочлены)
8	Дробно-рациональные выражения, арифметические квадратные корни
9 (10)	Степень с рациональным показателем
9 (10)	Корень n-й степени
10	Тригонометрические выражения
11	Логарифмические выражения

Впервые с определением понятия тождества учащиеся знакомятся в 7 классе. *Тождество* - равенство, верное при любых значениях переменной. Но в 8 классе, например, при изучении рациональных дробей у нас появляется ОДЗ выражений, и мы должны учитывать последовательность изучения тождественных преобразований выражений в школьном курсе алгебры уже введении нового определения: *тождество* - равенство, верное при всех допустимых значениях, входящих в него переменных. В противном случае преобразования будут не тождественными.

Например, $\frac{a^2}{a}=a$, при $a\neq 0$ или $\sqrt{x^2}=x,$ при $x>0.$

С помощью некоторых тождеств доказываются остальные тождества и принимаются в качестве аксиом (формулы сокращенного умножения, свойства степени с натуральным показателем и др.) [43].

Благодаря тождественным преобразованиям учащиеся постоянно повторяют действия с рациональными (в дальнейшем иррациональными) числами, что благотворно влияет на технику устных вычислений; учащиеся учатся обосновывать выполненные преобразования; способствуют развитию дедуктивного мышления; развивают умению следить за изменением области определения [23].

В качестве типовых задач рассмотрим следующие преобразования, выполненные учащимися:

Пример 1. Вычислить: $\left((-16)^4\right)^{\frac{1}{4}}$.

Решение 1-го ученика: $\left((-16)^4\right)^{\frac{1}{4}} = (-16)^{4\cdot\frac{1}{4}} = (-16)^1 = -16.$

Решение 2-го ученика: $\left((-16)^4\right)^{\frac{1}{4}} = (65536)^{\frac{1}{4}} = 16.$

Кто из учащихся выполнил верное преобразование и получил правильный ответ? *Ответ:* решение ученика 2 верное.

Пример 2. Решите уравнение: $\lg x^2 = 4.$

Решение 1-го ученика:

$$\begin{aligned} &\lg x^2 = 4 \\ &2\lg x = 4 \\ &\lg x = 2 \\ &x = 100 \end{aligned}$$

Решение 2-го ученика:

$$\begin{aligned} &\lg x^2 = 4 \\ &\lg x^2 = \lg 10^4 \\ &\lg x^2 = \lg 10000 \\ &x^2 = 10000 \\ &x = 100 \end{aligned}$$

Кто из учащихся решил уравнение правильно?

Ответ: решение ученика 2 верное.

Как отмечает И.С. Цай, одной из особенностей изучения тождественные преобразований является *совместное изучение взаимно обратных преобразований* [23].

Например, представьте многочлен в виде произведения: $6x+4xy+3y+2y^2$ и выполните умножение: $(3x+2y)(3-3x)$.

Доказательство теорем и вывод формул, решение уравнений и неравенств, исследование функций и решение многих других заданий не обходится без тождественных преобразований. То есть тождественные преобразования являются средством для решения различного рода содержательных задач.

Вместе с этим, Е.А. Комарова при реализации преемственности обучения математике в общеобразовательной школе предлагает проводить обобщающие уроки по основным содержательным линиям в конце каждого учебного года, что позволит систематизировать материал более эффективно. Автор считает, что полезно объединять на таких уроках смежные классы, чтобы создавались условия для многократного повторения и обобщения основных функциональных понятий и умений [53, с. 13].

Рассмотрим опыт учителем математики на предмет реализации преемственности при изучении тождественных преобразований в общеобразовательной школе.

С.Л. Чернышова [118] на уроке систематизации и обобщения по теме «Преобразование тригонометрических выражений» на этапе актуализации знаний использует вводный тест для проверки вычислительных навыков учащихся и выявления ошибок. Затем для проведения обобщения автором используются развивающие задания, такие как: выявить закономерность и продолжить запись, на определение недостающих данных и др. На уроке ведется работа в группах, в ходе которой обучающиеся пользуются карточками–образцами, а затем переходят к самостоятельному решению заданий по теме. При выполнении этих заданий учащиеся используют такие изученные ранее тождественные преобразования, как: раскрытие скобок и вынесение общего множителя за скобки, формулы сокращенного умножения, преобразование выражений, содержащих основные тригонометрические тождества, изученных на уроках геометрии в 8-9 классах на уроках геометрии.

Отметим, что А.Г. Мордкович для запоминания формул тригонометрии и применении их при преобразовании тригонометрических выражений рекомендует не заставлять школьников заучивать эти формулы, а использовать их в виде наглядного материала и, применяя эти формулы при выполнении многочисленных заданий, учащиеся постепенно запомнят их без всякого принуждения. Так же автор предлагает «рецепт» как помочь учащимся при решении сложного примера осуществить удачный выбор той или иной формулы:

1. Начинать преобразования следует с формул приведения, если они есть.

2. Использование трех законов:

Закон №1. «Увидел сумму- делай произведение».

Закон № 2. «Увидел произведение- делай сумму».

Закон № 3. «Увидел квадрат- понижай степень».

А.Г. Мордкович утверждает, что при использовании этих законов при преобразовании тригонометрических выражений все сложится удачно. Рассмотрим предложенный автором пример, в котором требуется решить уравнение $\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$.

Применим третий закон- увидев квадрат, понижай степень:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1$$

$$\cos 2x - \cos 6x = 0.$$

Далее применим первый закон- увидев сумму, делай произведение:

$$-2\sin 4x \sin 2x = 0$$

$$\sin 4x = 0; \qquad \sin 2x = 0;$$

$$x = \frac{\pi n}{4}; \; x = \frac{\pi n}{2}.$$

Заметим, что первая серия корней содержит в себе вторую, поэтому в ответ можно записать так: $x = \frac{\pi n}{4}$.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4}$.

С.В. Афанасьева [18] предлагает на уроке «Тождественные преобразования логарифмических выражений» задания на применение логарифмических выражений в общем виде, что позволяет учителю составлять любое количество индивидуальных вариантов по решению типовых заданий.

При решении заданий на тождественные преобразования логарифмических выражений автор использует свойства степеней с натуральным показателем, тождественные преобразования выражений, содержащих которые, изучались в основной школе.

Приведем некоторые типовые задания в общем виде:

1. Найдите значение выражения: $-a \log_a \log_a \sqrt[a]{\sqrt[a]{a}} = 2a$;

2. Найдите значение выражения: $k \cdot c \cdot \log_2 a \cdot \log_{\mathrm{a}} \sqrt[c]{2^b} = k \cdot c \cdot \frac{b}{c} = k \cdot b$;

3. Найдите значение выражения: $bcn \cdot \log_{a^n} \sqrt[c]{a^{\log_{b^4} b + \log_{(n^4)} (n^3)}} = b$.

Т.Н. Купцова [60] на уроке систематизации и обобщения в 11 классе по теме «Показательные уравнения и методы их решения с применением компьютерных технологий» показывает, что для успешного решения показательных уравнений первоначально необходимо определить тип данного уравнения. Затем при помощи тождественных преобразований привести его к нужному виду, что позволит применить определенный метод решения данного уравнения. Автором приводятся различные алгоритмы для преобразования показательных уравнений и методов их решения. При выполнении заданий, отобранных для урока, учащиеся используют следующие тождественные преобразования из основной школы: метод группировки, вынесение общего множителя за скобки, использование тождества «степень степени», тождества «степени произведения».

Л.А. Попова [95] урок «Тождественные преобразования степенных выражений» выстраивает с опорой на предшествующий в основной школе материал, проводя фронтальный опрос учащихся: определение тождества, определение и методы решения тождественных преобразований выражений, степени с рациональным показателем, формулы сокращенного умножения, формула перехода от отрицательного показателя степени. Для успешного усвоения материала, учащимся предлагается компьютерная презентация, включающая в себя задания на актуализацию знаний, устный счет, задания на отыскание ошибок в решенных примерах задания-тренажеры на формирование и совершенствование практических умений и навыков.

Таким образом, рассмотрев методические аспекты реализации преемственности при обучении тождественным преобразованиям на уроках математики в общеобразовательной школе, возникает необходимость раскрыть их в рамках реализации элективных курсов.

§5. Проектирование изучения темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» с применением технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова

Очень часто при решении задач по различным разделам математики возникает необходимость в использовании тождественных преобразований. Тригонометрические функции, имея большую вариативность преобразований тригонометрических выражений, представляют особый интерес при изучении математики, потому как являются обширным полем для получения навыков работы с математической символикой, формулами и выражениями.

Тема «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» входит в федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования (ФГОС СОО) [113], но на ее изучение и практическое применение уделяется недостаточно времени в учебном процессе.

Основная цель изучения темы обусловлена следующими причинами:

- тема предусмотрена ФГОС, но методика ее изучения различна в современных учебниках алгебры и начал математического анализа;

- методические проблемы, связанные с определением содержания темы;

- материал, рассматриваемый в теме актуален для подготовки учащихся к сдаче итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Цель данного проекта: спроектировать изучение темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в рамках технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова.

Основные задачи проекта:

- выполнить методический анализ теоретического и практического содержаний выбранной темы;

- обосновать выбор профиля для реализации темы проекта;

- обосновать выбор основного учебника для выбранного профиля;

- выполнить анализ практического опыта учителей по теме проекта;

- выделить основные цели и задачи изучения темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений»;

- дать характеристику уровня требований к знаниям, умениям и навыкам учащихся по данной теме;

- обосновать целесообразность использования технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова для реализации темы на практике;

- разработать конспекты уроков по теме.

Новизна проекта состоит в том, что в нем реализована технология интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова при изучении темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

Практическая значимость проекта: представленная методическая разработка может быть использована учителями математики на практике в старших классах.

Нами был проведен методический теоретического и практического содержаний по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в рекомендованных Минобрнауки РФ учебниках по алгебре и началам математического анализа 10-11 классов.

Методический анализ темы.

Базовые знания:

– понятие тождества;

– понятие тождественного преобразования;

– формулы сокращенного умножения;

– преобразование выражений, содержащих степени с рациональным показателем;

– основное тригонометрическое тождество;

– понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла;

– преобразование целых выражений;

– преобразование дробно-рациональных выражений;

– преобразование выражений, содержащих корни n-ой степени.

Вводимые понятия:

– понятие тождества;

– способы доказательства тождеств;

– задачи на доказательство тождеств;

– свойства тригонометрических функций;

– формулы приведения;

– формулы связи тригонометрических функций углов α и $-\alpha$;

– формулы сложения, формулы двойных и половинных углов, формулы суммы и разности синусов, формулы суммы и разность косинусов.

Были проанализированы следующие учебники по алгебре и началам математического анализа: А.Ш. Алимова [78], С.М. Никольский [6], А.Г. Мордковича [5].

Определены сходства и различия представленного теоретического материала по заданной теме в указанных учебниках. Место темы в курсе, класс, в котором изучается и количество уроков, которое отводится на изучение темы по учебникам разных авторов рассмотрим в Таблице 2.

Рассмотрим содержания темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в выбранных нами учебниках.

Таблица 2

Место темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в курсе алгебры и начал математического анализа

Учебник	*Место темы*	*Класс*	*Кол-во часов*
Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / *Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин* и др.- М.: Просвещение, 2015.- 463 с.	Данная тема рассматривается в главе V «Тригонометрические формулы» после изучения тем «Действительные числа», «Степенная функция», «Показательная функция» «Логарифмическая функция». После рассматриваемой нами темы изучаются «Тригонометрические уравнения» и «Тригонометриические функции».	10	На изучение главы V отводится 27 часов.
Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / *А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.* – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.	Главе 5 «Преобразование тригонометрических выражений» предшествуют главы «Действительные числа», «Числовые функции», «Тригонометрические функции», «Тригонометрические уравнения». После рассматриваемой темы идут «Комплексные числа».	10	На изучение главы отводится от 21 до 30 часов (из расчета 4,5 или 6 часов в неделю)
Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват.	Отдельно тема не рассматривается, а материал входящий в нее описывается в главе II «Тригонометрические формулы. Тригоно-	10	На изучение главы отводится от 45 до 59 часов (из рас-

учреждений: базовый и профил. уровни / *С.М. Никольский и др.*- М.: Просвещение, 2013.- 432 с.	метрические функции». До изучения данной главы рассматривается глава I «Корни, степени, логарифмы», а после ее изучения глава III «Элементы теории вероятностей».		чета 4 или 5 часов в неделю)

В отличие от остальных авторов **Ш.А. Алимов** тему «Тригонометрические тождества» выделяет отдельно в главе V «Тригонометрические формулы». Автор в начале параграфа рассматривает пример *на доказательство справедливости равенства*:

Задача 1 [78, С. 139]. Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Доказательство: По определению $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, и поэтому $1 + ctg^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. Эти преобразования верны, так как $\sin\alpha \neq 0$ при $\alpha \neq \pi k,\ k \in Z$.

Затем данное равенство рассматривается как равенство справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв и называется *тождеством*. Ш.А. Алимов обращает внимание на то, что «обычно при доказательстве тригонометрических тождеств или при упрощении выражений допустимые значения углов не устанавливают, если это не требуется в условии задачи» [78, С. 139] и приводит в качестве подтверждения две задачи:

Задача 2 [78, С.139]**.** Доказать тождество $\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

Доказательство: $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

Задача 3 [78, С.140]**.** Доказать тождество $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Доказательство. Чтобы доказать данное тождество, покажем, что *разность между левой и правой частями равна нулю*:

$$\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} - \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - (1 - \sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1 - \sin\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha(1 - \sin\alpha)} = 0.$$

На данных примерах автор показывает различные *способыдоказательства тождеств* (*преобразование левой части к правой и наоборот*; установление того, что *разность между левой и правой частью равна нулю*) и далее вводит сам *термин*. Вместе с этим обращается внимание на то, что иногда удобно *преобразовывать и левую, и правую часть к одному и тому же выражению*.

Задача 4 [78, С.140]**.** Докажите тождество $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha.$

Доказательство: $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$

В учебнике Ш.А. Алимова тема «Тригонометрические тождества» рассматривается в начале главы V «Тригонометрические формулы», то есть на момент изучения данной темы учащиеся знакомы только с зависимостью между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла. Весь *задачный материал* этого параграфа направлен на отработку навыков *применения основного тригонометрического тождества* $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ и *формул сокращенного умножения*.

По мере изучения главы «Тригонометрические формулы», в каждом из изучаемых параграфов имеются *задания на преобразование тригонометрических тождеств*, то есть уже добавляются *задания с использованием формул* приведения, формул сложения, формул синуса, косинуса и тангенса двойного и половинного угла, формулы суммы и разности синусов, формулы суммы и разности косинусов. Тем самым наблюдаться *преемственность содержания* теоретического материала темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» между основной и старшей школами.

В учебнике С.М. Никольского [6] в 10 классе изучаются тригонометрические функции, но отдельно тема «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» не рассматривается. В пункте 7.4 «Основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$» параграфа 7 автор в качестве теоремы с доказательством вводит основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Понятия тождественных преобразований в данном учебнике не вводится, но в этом же параграфе предлагаются *задания на* тождественные преобразования тригонометрических тождеств *с использованием тождественных преобразований*, известных учащимся из основной школы: *вынесение общего множителя за скобку*, *применение формул сокращенного умножения*. Далее в пункте 8.2 «Основные формулы для $tg\alpha$ и $ctg\alpha$» параграфа 8 «Тангенс и котангенс угла» автор знакомит учащихся с основными формулами для $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ и так же предлагает *задания на тождественные преобразования тригонометрических выражений, содержащих данные функции*. Затем в параграфе 9 «Формулы сложения» изучаются различные тригонометрические формулы и решается большое количество задачного материала, содержащего задания на тождественное преобразование тригонометрических выражений.

Методический проект по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» предназначен для математического профиля. Это обусловлено содержанием темы в примерной основной общеобразовательной программе среднего общего образования на углубленном уровне, а так же разнообразием по уровню сложности и содержанию задачного материала. Данный проект направлен на повышение интереса учащихся к предмету и их математической грамотности. Дает возможность получить практические умения и навыки выполнения заданий на тождественные преобразования тригонометрических выражений, тем самым, осуществляя подготовку к единому государственному экзамену профильного уровня (в качестве отдельного задания № 9). Тождественные преобразования тригонометрических выражений так же используются для решения тригонометрических уравнений (задание № 13) [89; 114].

Основным учебником математики для математического профиля выбран учебник Ш.А. Алимова [78]. Данный учебник является учебником для общеобразовательных учреждений, рекомендованный Министерством образования и науки Российской Федерации.

Рассматриваемая в данном проекте тема относится к Главе V. «Тригонометрические формулы». В параграфах § 21-25 повторяются основные понятия, используемые при изучении тождественных преобразований тригонометрических выражений в курсе основной школы при изучении геометрии: *радианная мера угла*; *значения синуса*, *косинуса, тангенса числа*; *зависимость между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла*.

В параграфе §26 «Тригонометрические тождества» автор дает определение *понятия тождества*, приводит *способы доказательств тождеств*, показывает их применение на примерах. В последующих шести параграфах изучаются различные тригонометрические формулы (формулы приведения, формулы сложения, формулы синуса, косинуса и тангенса двойного и половинного угла, формулы суммы и разности синусов, формулы суммы и разности косинусов), отрабатываются навыки применения этих формул при тождественных преобразованиях тригонометрических выражений.

В авторской программе [116] отмечается, что в результате изучения темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» учащиеся должны:

- выявлять и применять зависимость между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла;

- применять при преобразованиях и вычислениях формулы связи тригонометрических функций углов α и $-\alpha$, формулы сложения, формулы двойных и половинных углов, формулы приведения, формулы суммы и разности синусов и косинусов, произведения синусов и косинусов;

- доказывать тождества, применяя различные методы, используя все изученные формулы;

- применять все изученные свойства и формулы при решении прикладных задач и задач повышенной сложности.

Приведем анализ практического опыта учителей по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

В статье С.А. Коченевской и Л.А. Осиповой «Тригонометрия в заданиях ЕГЭ» [55], проанализировав задачный материал базового и профильного уровня экзамена, авторы пришли к выводу, что основу выполнения задач по тригонометрии составляют: преобразования тригонометрических выражений, простейшие тригонометрические уравнения, использование модели единичной окружности. И на основании этого считают, что при подготовке к решению тригонометрических задач ЕГЭ необходимо выделить теоретический минимум выполнения этих заданий, а так же разработать систему занятий по подготовке к их решению.

В статье С.Н. Водолад и Е.А. Титовой «Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции в курсе алгебры и математического анализа» [28] приводится алгоритм, а так же примеры на преобразование обратных тригонометрических функций. Авторы отмечают, что тождественные преобразования тригонометрических функций, а особенно обратных тригонометрических функций, считается трудной для усвоения школьниками темой и при выполнении подобных заданий следует начинать с анализа структуры данного выражения и составления плана действий. В заключении статьи говорится, что задания, связанные с преобразованием выражений- вид творческой деятельности, а поиск решения – процесс «изобретательства».

На сайте педагогического сообщества «Урок.рф» представлены конспекты уроков по данной теме. Учитель Е.А. Кошелева на уроке закрепления знаний предлагает учащимся игру-соревнование «К вершине Знаний». Игра состоит из заданий, направленных на отработку навыков *преобразования тригонометрических выражений*. Задания включают в себя *устную работу* на знание основных формул тригонометрии, на доказательство тригонометрических тождеств, на применение основного тригонометрического тождества, упрощение выражений и др. [56].

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» учителем С.И. Шишко представлен урок обобщающего повторения по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений». Учитель предлагает рассаживать учащихся на определенные места (ряды) в соответствии с определенными уровнями подготовки. Задания, в соответствии с уровнем сложности, лежат у учащихся на партах. Они включают в себя задания на повторение теоретического материала, практические *задания на упрощение тригонометрических выражений с помощью формул сокращенного умножения и основного тригонометрического тождества*, практические задания на *применение тригонометрических формул двойного и половинного аргумента, формул приведения*. Автором предусмотрено проведение разноуровневой самостоятельной работы [127].

На ведущем образовательном портале «Инфоурок» В.В. Пыженко предлагает урок с использованием презентации «Тождественные преобразования тригонометрических выражений». Предложенный учителем материал к уроку содержит систему упражнений, подробные указания к их решению, необходимый справочный материал, применение которого способствует развитию навыков преобразования тригонометрических выражений [99].

В элективном курсе М.А. Созоненко «Тригонометрия в ЕГЭ» на изучение темы «Преобразования тригонометрических выражений» [109] отводится 5 часов, в течение которых рассматриваются соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формулы кратных аргументов и обратные тригонометрические функции.

В авторской программе элективного курса Т.А. Бураковой «Трудные вопросы математики» [21] на рассмотрение темы «Тригонометрия» отводится 8 часов. Курс ориентирован на расширение базового уровня знаний учащихся, дает возможность познакомиться с интересными нестандартными вопросами тригонометрии, включая в себя следующие темы: «Тригонометрические функции», «Основные тригонометрические формулы», «Тригонометрические выражения», «Тождества», «Тождественные преобразования тригонометрических выражений», «Преобразование выражений с помощью формул приведения», «Преобразование выражение с помощью формул суммы и разности», «Преобразование выражений с помощью формул двойного угла», «Преобразование выражений с помощью нескольких формул».

Л.Л. Ковалева в элективном курсе «Методы решения нестандартных задач по математике» [51] на раздел «Преобразование тригонометрических выражений» отводит 3 часа, которые включают в себя: преобразование тригонометрических выражений с помощью основных тригонометрических формул, вычисление значений выражений, содержащих тригонометрические функции, преобразование тригонометрических выражений нестандартными методами.

На сайте «Решу ЕГЭ» [89] представлен материал для подготовки к ЕГЭ по математике. Упражнения по теме проекта «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» встречаются в заданиях №9, 13.

Таким образом, анализ темы в статьях [28; 55], опыт изучения темы посредством элективных курсов [21; 51; 109] опыт изучения темы на уроках математики [56; 99; 127], подготовка школьников к единому государственному экзамену показывает интерес к теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

Определим основные цели и задачи изучения темы «Тождественные преобразования тригонометрических тождеств».

Цель: обучение применению тригонометрических тождеств при вычислениях, преобразованиях тригонометрических выражений, решении простейших тригонометрических уравнений, используя при этом доказательные рассуждения [117].

Задачи:

- формировать умение выполнять преобразование тригонометрических выражений;

- формировать умение применения тождественных преобразований тригонометрических выражений при решении математических задач.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в проекте «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» способствует формированию познавательного интереса к предмету, развитию творческих способностей; способствует развитию умений самостоятельно определять цели деятельности по усвоению и применению знаний тригонометрии как математической модели реальной ситуации; дает возможность к дополнительной подготовке к ЕГЭ.

В стандарте по математике (профильный уровень) прописано, что учащиеся должны:

знать/ понимать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

- значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций;

- различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;

уметь:

проводить преобразования числовых и буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции;

В соответствии с *примерной основной образовательной программе среднего общего образования*[98] по математике на углубленном уровне для обеспечения возможности успешного продолжения образования по специальностям, связанным с осуществлением научной и исследовательской деятельности в области математики и смежных наук по теме «Тождественные преобразования тригонометрических тождеств» выпускник научится:

- свободно выполнять тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных выражений.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

- составлять и оценивать разными способами числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов.

В соответствии с учебным пособием для учителей общеобразовательных организаций по алгебре и начал математического анализа *Т.А. Бурмистровой* [11] в результате изучения темы «Тождественные преобразования тригонометрических тождеств» обучающийся на базовом и углубленном уровнях должен:

- выявлять зависимости между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла; применять данные зависимости для доказательства тождества, в частности на определенных множествах;

- применять при преобразованиях и вычислениях формулы связи тригонометрических функций углов α и $-\alpha$, формулы сложения, формулы двойных и половинных углов, формулы приведения, формулы суммы и разности синусов, суммы и разности косинусов;

- доказывать тождества, применяя различные методы, используя все изученные формулы.

Проведем обоснования целесообразности использования технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова.

Технология В.Ф. Шаталова в своей основе имеет идею повышения наглядности изучаемого материала с целью лучшего, более активного усвоения и запоминания учебного материала.

Системность образовательной модели В.Ф. Шаталова обусловлена взаимосвязью всех ее частей и логикой учебно-воспитательного процесса.

Выделим основные особенности и условия эффективности применения данной технологии [54]:

– блочное планирование и блочный контроль знаний;

– использование при объяснении нового материала опорных сигналов и конспектов;

– глубокое прочное понимание, усвоение и использование учебного материала для решения задач обеспечивается за счет: коллективного решения задач, когда каждый имеет возможность принять участие в обсуждении путей решения задачи; систематическое использование поурочных карточек, конспектов и упражнений для осознанного изучения материала и подготовки к решению задач; технологии поэлементного обучения решению задач;

– использование циклического развития практических навыков учащихся;

– создание доброжелательной атмосферы на уроке;

– развитие речи учащегося;

– предоставление учащимся свободы выбора задач для домашнего задания по количеству и уровню сложности;

– оперативный контроль усвоения знаний;

– повышение творческой самостоятельности учащихся.

Как отмечается А.А. Шитовой, система обучения математике В.Ф. Шаталова достаточно продуктивна. При изучении математики по ней у обучающихся формируются прочные теоретические знания, а так же практические навыки их применения, благодаря чему они добиваются высоких показателей обученности [126].

Н.И. Попов, А.Н. Марасанов в статье «О методологическом подходе в обучении тригонометрии» рассматривают различные технологии обучения математике, которые рационально применять при изучении тригонометрии. Одной из приведенных авторами технологий является технология В.Ф. Шаталова, в отношении которой авторы пишут, что «объем, глубина и надежность усваиваемого школьниками учебного материала, как показали многие исследования, определяются не продолжительностью непрерывного занятия одним и тем же учебным предметом, а частотой возврата к ранее изученному материалу и методическим наращиванием сложности изучаемых разделов на значительных по протяженности отрезках времени» [95, С. 141].

Вместе с этим, в [123, С. 50] указывается, что разработанная В.Ф. Шаталовым технология обучения вносит существенный вклад в педагогическую науку и практику, отражая тем самым мировые тенденции развития дидактики. Реализация ее отдельных положений способствует повышению эффективности урока как одной из форм совместной деятельности учителя и обучающихся.

Кроме того, автором в книге «Быстрая тригонометрия» [122] опубликованы методические материалы, предназначенные для учителей и родителей, в которых содержатся опорные конспекты и схемы по курсу «Тригонометрия».

Спроектируем изучение темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в рамках технологии В.Ф. Шаталова.

В методическом пособии по выбранному учебнику Ш.А. Алимова на изучение Главы V «Тригонометрические формулы» отводится 27 часов.

С учетом выбранной нами технологии В.Ф. Шаталова, спроектируем изучение темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» на примере *темы «Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов»*, на изучение которой отводится 3 часа, в соответствии с требованиями новых образовательных стандартов к типам уроков в зависимости от их целей.

Остальные темы главы «Тригонометрические формулы» могут быть спроектированы с использованием данной технологии аналогичным образом.

1. *Тип урока: урок открытия новых знаний, обретение новых умений, навыков.*

Конспект урока № 1 по теме «Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов» (45 минут).

Цель урока: познакомить учащихся с формулами суммы и разности синусов, суммы и разности косинусов; показать их применение при преобразовании тригонометрических выражений.

Оборудование: компьютер, интерактивная доска.

Ход урока:

I. Организационный момент (2 мин).

II. Этап актуализации знаний (5 мин).

1. Найдите значение выражения:

а) $\cos 720^0$ (Ответ: 1) в) $ctg 450^0$ (Ответ: 0)

б) $\sin(-225^0)$ (Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$) г) $tg 330^0$ (Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$)

2. Углом какой четверти является угол:

а) $\frac{2\pi}{3}$ (Ответ: II) в) $\frac{3\pi}{8}$ (Ответ: I)

б) $-0{,}8\pi$ (Ответ: III) г) $5{,}28$ (Ответ: I)

3. Упростите:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$ (Ответ: $1+\sin 2\alpha$)) г) $\cos^2\alpha-1+\sin^2\alpha$ (Ответ: 0)

б) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (Ответ: $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$) д) $tg^2\alpha+1-\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (Ответ: 0)

в) $1-2tg\alpha\cdot ctg\alpha$ (Ответ: -1) е) $(\sin\alpha-1)(\sin\alpha+1)$ (Ответ: $-\cos^2\alpha$)

III.Объяснение нового материала (25 мин).

Для введения формулы суммы синусов, рассмотрим **задачу 1** [78, С. 161]: Упростить выражение $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

Для решения этого задания необходимо напомнить учащимся формулу сложения и формулу синуса двойного угла, изученные ранее. Учитель открывает ***слайд***(Рис. 1) *с формулами и проговаривает их* с учетом методики В.Ф. Шаталова [122]: «Синус первого на косинус второго плюс косинус первого на синус второго». По мнению автора технологии, предложенная форма ответа срабатывает безошибочно, заостряя внимание на порядковом номере угла, а не на его названии.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Рис. 1.

Один из учащихся работает у доски, проговаривая каждое свое действие, остальные в своих тетрадях.

Решение:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

В ходе выполнения данного задания просматривается *преемственность в содержании материала* с материалом, изученным в основной школе по теме «Тождественные преобразования»: при упрощении выражения обучающиеся приводят подобные слагаемые, используют табличное значение для синуса 30^0, а так же при его преобразовании применяют формулу суммы синусов и формулу синуса двойного угла.

После успешного решения задачи 1, учитель показывает формулу (Рис. 2) при помощи которой можно решить это задание другим способом, более простым. Формула сумма синусов появляется на экране электронной доски:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (1)$$

Рис. 2.

Учитель. Для *запоминания* этой формулы есть простое *стихотворение*:

«***Чтобы сумму синусов найти, нужно постараться:***

Синус полусуммы на косинус полуразности в пути будут умножаться,

Теперь произведение надо удвоить.

Легко эту формулу можно усвоить!»

Учащиеся вместе с учителем медленно хором повторяют стихотворение 2 раза, при этом учитель комментирует его на формуле.

Учитель. Снова решим **задачу 1**, но теперь уже с помощью формулы суммы синусов: $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}=$

$$=2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{12}+\alpha-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{12}-\alpha+\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Теперь, докажем справедливость формулы, введя определенные обозначения: $\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=y$. Отсюда, $x+y=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$, а $x-y=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{2\beta}{2}=\beta$, поэтому $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$

$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Учитель. Существует и формула разности синусов, а так же формулы суммы косинусов и разности косинусов.

Учитель показывает формулы на следующем *слайде* (Рис. 3):

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\qquad(2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad(3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad(4)$$

Рис. 3.

Учитель. Откройте *тетради для записи правил* и запишите формулы (1)-(4).

Учитель. При доказательстве данных формул, обратим внимание на то, что формулы (3) и (4) доказываются так же, как и формула (1), а формула (2) доказывается путем замены в формуле (1) β на $-\beta$.

Учитель. Рассмотрим применение данных формул при преобразовании различных тригонометрических выражений.

Задача 2 [78, С. 162]. Вычислить $\sin 75^0 + \cos 75^0$.

Учитель открывает следующий слайд (Рис. 4), на котором помещены все *четыре* формулы.

Учитель. Какая из формул подходит для выполнения этого задания? Нужны ли тождественные преобразования, чтобы применить какую–то из формул? Какие? Кто из вас хочет попробовать выполнить его на доске?

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4)$$

Рис. 4.

Учитель. Но прежде, чем переходить к решению, вспомним *мнемотическое правило* для применения *формул приведения*: если ключевая точка располагается на оси OY, то есть на вертикальной оси, лошадь говорит «да» и приводимая функция меняет свое название: синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс и наоборот; если ключевая точка располагается на оси OX, то есть на горизонтальной оси, лошадь говорит «нет» (киваем головой вдоль оси OX) и приводимая функция своего названия не меняет.

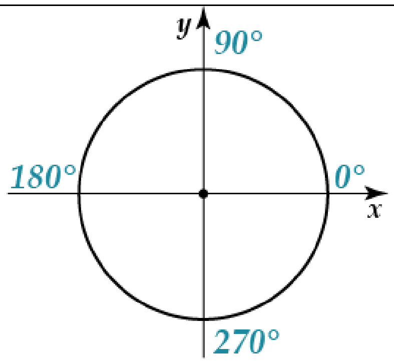
Знак правой части равенства совпадает со знаком приводимой функции, стоящей в левой части равенства.

Учитель рассказывает правило, показывая на окружности (Рис. 5).

Решение: $\sin 75^0 + \cos 75^0 = \sin 75^0 + \cos(90^0 - 15^0) = \sin 75^0 + \sin 15^0 =$

$$= 2\sin\frac{75^0 + 15^0}{2}\cos\frac{75^0 - 15^0}{2} = 2\sin 45^0 \cos 30^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

При выполнении задачи 2 просматривается *преемственность в содержании материала* с материалом, изученным в курсе основной школы по теме «Тождественные преобразования»: формулы приведения, используют табличное значение синуса 45^0 и косинуса 30^0, а так же при преобразовании применяется формула суммы синусов.



$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (1)$$

Рис. 5.

Учитель. Всем ли понятно решение задачи? Какой момент в решении вызвал наибольшие затруднения? Перейдем к следующей задаче.

Задача 3 [78, С. 162].Преобразовать в произведение: $2\sin\alpha + \sqrt{3}$.

Учитель. Кто попробует выполнить это задание у доски? Что нам потребуется для выполнения преобразований?

После того как учащиеся правильно назвали формулу, которую будет использовать, учитель открывает ее на новом слайде (Рис. 6):

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\quad(1)}$$

Рис. 6.

Решение: $$2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=2\cdot2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Выполняя тождественные преобразования в ходе решения этой задачи, учащиеся сталкиваются с *преемственностью в содержании материала* с материалом, изученным в курсе основной школы: вынесение общего множителя за скобки, использование табличного значения для синуса 60^0, а так же при преобразованиях использовалась формула суммы синусов.

Учитель. Теперь рассмотрим, изученные нами сегодня формулы, на более сложных примерах.

Задача 4 [78, С. 163]**.** Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha+\cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

Решение: Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Учитель. Вспомним наибольшее и наименьшее значение косинуса и синуса. Обратимся к *таблице синусов и косинусов различных углов*, которая находится в ваших *тетрадях для записи правил*.

После ответа учеников учитель открывает следующий *слайд* (Рис. 7):

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Рис. 7.

Учитель. Верно, наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее равно 1. Отсюда, наименьшее значение полученного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$, а наибольшее значение равно $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$.

При решении *задачи 4* использовалась формула сумма синусов, а так же формулы приведения, изученные в основной школе.

Учитель. Мы с вами рассмотрели *формулы преобразования суммы в произведение*, но при преобразовании некоторых тригонометрических выражений необходимы и *формулы преобразования произведения в сумму или разность*.

Учитель открывает слайд (Рис. 8), проговаривает формулы, учащиеся записывают их в *тетрадь для правил*.

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right) \qquad (5)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right) \qquad (6)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right) \qquad (7)$$

Рис. 8.

IV. Этап первичного закрепления новых знаний (7 мин).

Учитель приглашает двух учеников к доске, остальные выполняют в тетрадях.

№ 537 (2, 3) [78, С. 163]. Упростите выражение:

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=-2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta}{2}=$

$=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta=\sqrt{2}\sin\beta$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=$

$$=\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\right)\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha=2\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha.$$

Выполняя тождественные преобразования в ходе решения этой задачи, учащиеся сталкиваются с *преемственностью в содержании материала* с материалом, изученным в курсе основной школы: формулы сокращенного умножения, использование табличного значения для синуса и косинуса 45^0, а так же при преобразованиях использовалась формула суммы синусов, разность синусов, разность косинусов, синус двойного аргумента.

Задача 5 [78, С.163]**.**Докажите тождество

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

Доказательство.

Учитель. Какие преобразования вы предлагаете сделать? Кто из вас хочет показать решение у доски?

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta.$$

В ходе выполнения этого задания при преобразовании тригонометрического выражения использовалась формула сумма синусов, а так просматривается преемственность в содержании материала с материалом, изученным в основной школе по теме «Тождественные преобразования»: приведение подобных слагаемых.

V. Подведение итогов урока (4 мин).

Учитель. Сегодня на уроке мы познакомились с еще одним блоком тригонометрических формул. Достаньте свои «тригонометрические деревья» (Рис. 9) [22] и занесите последний блок формул, записывать их мы будем на правом стволе.

Учащиеся записывают формулы в соответствии с деревом, на котором оформляет формулы учитель.

Учитель. Теперь, когда наше дерево полностью готово, давайте разберемся его правый ствол и научимся легко *запоминать тригонометрические формулы*. Итак, в основании ствола дерева находятся *четыре формулы*, самая главная из них выделена жирным шрифтом. Если мы хотим перейти от *косинуса суммы* к *косинусу разности* или от *синуса суммы* к *синусу разности*, то воспользуемся равенством $-\beta = +(-\beta)$.

Складывая (вычитая) равенства, охваченные фигурными скобками, лежащие в основании дерева, мы получаем *формулы для произведения косинусов, произведения синусов, произведения синуса на косинус*. Стрелки, идущие от фигурных скобок, подскажут вам ход следующих преобразований.

С помощью подстановок, записанных оранжевым цветом, мы от нижних формул правого ствола, переходим к верхним формулам.

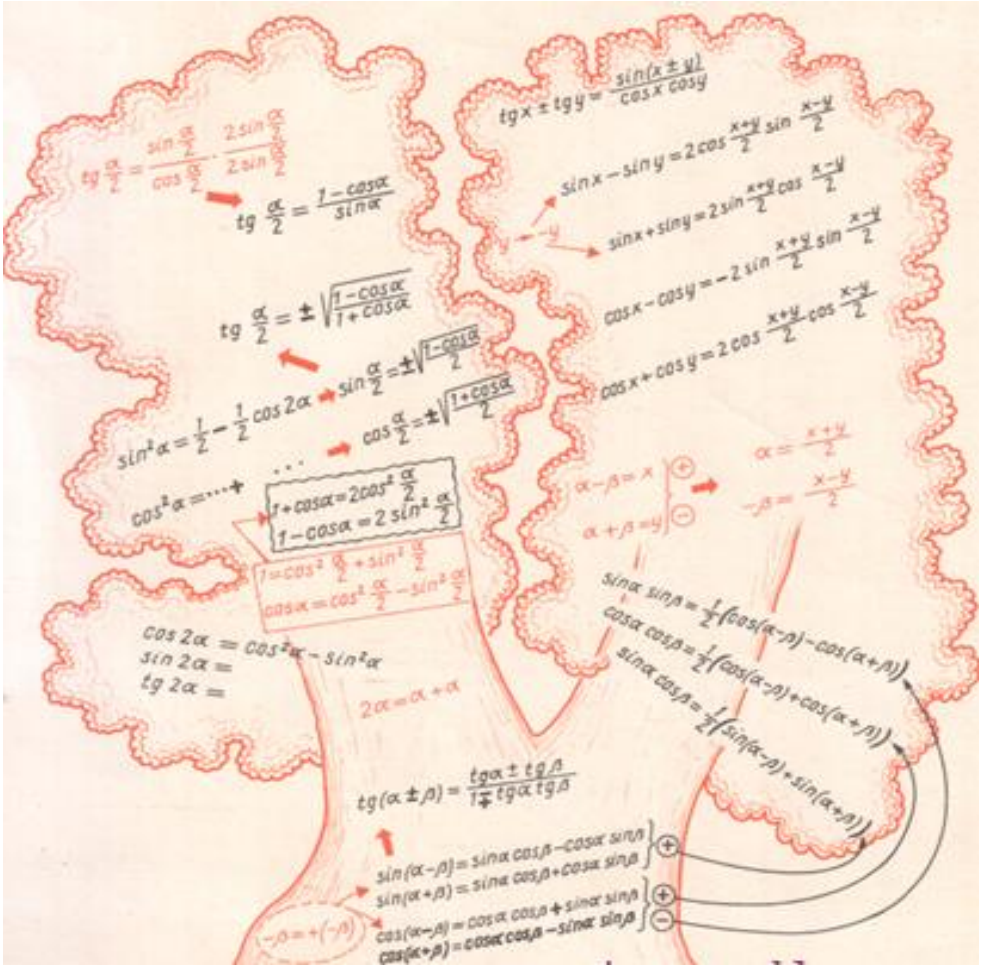


Рис. 9.

Учитель. Оцените, пожалуйста, свою деятельность на уроке. В чем возникли затруднения? Запишемдомашнее задание(появляется на слайде).

VI. Домашнее задание (2 мин): I. 1) № 537 (1), 539 (1), 542(1) выполнить с опорой на дерево тригонометрических формул; 2) разобраться с деревом формул и быть готовым объяснить у доски структуру на следующем уроке. II. 1) № 537 (1), 539 (1), 542(1) двумя способами, 543 выполнить с опорой на дерево тригонометрических формул; 2) разобраться с деревом формул и быть готовым объяснить у доски структуру на следующем уроке.

Отметим, что в соответствии с технологией В.Ф. Шаталова учитель предлагает, а не вменяет учащимся в обязанность решить задачи. Сложность и количество задач для домашнего выполнения ученик выбирает самостоятельно [54].

2. Тип урока: урок рефлексии.

Конспект урока № 2 по теме «Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов» (45 минут).

Цель урока: выработать навыки применения формул суммы и разности синусов и косинусов при преобразовании тригонометрических выражений разного уровня сложности.

Оборудование: компьютер, интерактивная доска.

Ход урока:

I. Организационный момент (2 мин).

II.Устная работа (10 минут).

Учитель показывает слайды на интерактивной доске, учащиеся отвечают «по цепочке».

1. Найти значение выражения:

а) $\cos 30^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ответ: $\sqrt{3}$)

б) $2\sin 60^0 + \sin 90^0$ (Ответ: $\sqrt{3}+1$)

в) $2tg45^0 \cdot ctg45^0$ (Ответ: 2)

г) $tg30^0 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Ответ: 0)

д) $42\sin^2 30^0 + 42\cos^2 30^0$ (Ответ: 42)

е) $\cos 0^0 + 5tg180^0$ (Ответ: 1)

2. Укажите наименьшее и набольшее значение выражения:

а) $2-\sin\alpha$ (Ответ: наим. -1,наиб.- 3)

б) $3+\sin\alpha$ (Ответ: наим. - 2, наиб. - 4)

в) $1+\cos\alpha$ (Ответ: наим.- 0, наиб.-2)

г) $4-\cos\alpha$ (Ответ: наим.- 3, наиб. -)

3. Определите знак выражения:

а) $\cos 10^0 \cdot \sin 15^0$ (Ответ: знак «+»)

б) $tg100^0 \cdot \cos 205^0$ (Ответ: знак «+»)

в) $\cos(-45^0)\sin(-45^0)$ (Ответ: знак «-»)

г) $ctg(-2^0)tg48^0$ (Ответ: знак «-»

4. Вычислите:

а) $\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}$ (Ответ: 0)

б) $\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi$ (Ответ: 2) в) $\sin 7\pi$ (Ответ: 0)

г) $\cos^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}$ (Ответ: 1)

д) $tg\pi + ctg\frac{\pi}{2}$ (Ответ: 0)

е) $\cos(-3\pi)$ (Ответ: -1)

5. Упростите:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$ (Ответ: $1+\sin 2\alpha$)

б) $tg^2\alpha+1-\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (Ответ: 0)

в) $1-2tg\alpha\cdot ctg\alpha$ (Ответ: -1)

г) $(\sin\alpha-1)(\sin\alpha+1)$ (Ответ: $-\cos^2\alpha$)

д) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (Ответ: $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$)

е) $\cos^2\alpha-1+\sin^2\alpha$ (Ответ: 0)

II. Закрепление изученного материала (29 мин).

Учитель. На прошлом уроке мы с вами изучили формулы суммы и разности синусов и косинусов, а также формулы преобразования произведения в сумму или разность. Давайте откроем «*тригонометрическое дерево*», один из вас объяснит структуру дерева у доски.

При выполнении сегодняшних заданий вы можете обращаться к этим по мере необходимости, так же они будут перед вами на доске.

Учитель открывает слайд с формулами (Рис. 10) и записывает задания на урок: № 538 (2,4), 539 (2,4), 540 (1), 544 (1), 545 (1) , 557 .

Учащиеся работают у доски и в тетрадях, учитель ведет контроль работы, отвечает на возникшие вопросы.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) \qquad (5)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) \qquad (6)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \qquad (7)$$

Рис. 10.

Учащиеся, отвечающие у доски, комментируют каждое свое действие, что способствует развитию математической речи и более глубокому осмыслению своих действий.

№ 538. Вычислить:

Решение:

2) $\sin 105^0 - \sin 75^0 = 2\sin\frac{105^0 - 75^0}{2}\cos\frac{105^0 + 75^0}{2} = 2\sin 15^0 \cos 90^0 = 0;$

4) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} == -2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4} =$

$= -2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$

В данных заданиях использовались следующие преобразования за курс основной школы, благодаря которым мы можем наблюдать *преемственность в содержании* материала: «подстановка» табличных значений синуса и косинуса, формулы приведения, а так же тождественные преобразования при помощи формул разности синусов и разности косинусов, изученные на предыдущем уроке.

№ 539 (2,4). Преобразовать в произведение:

Решение:

2) $1-2\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right) = 2\left(\sin 30^0 - \sin\alpha\right) = 2\cdot 2\cdot \sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2} =$

$= 4\sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2}.$

4) $1+\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$

В этих заданиях использовалось такие тождественные вынесение общего множителя за скобки, формулы приведения, табличное значение синуса, формула разности и суммы синусов.

№ 540 . Доказать тождество:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha} = tg2\alpha$

Учитель. Каким способом мы будем доказывать данное тождество? Какие способы доказательства тождеств вы знаете?

Учащиеся, затрудняющиеся ответить на эти вопросы, обращаются к своим тетрадям с правилами.

Доказательство:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}} = tg2\alpha$$

$$\frac{2\sin 2\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos 2\alpha\cos(-\alpha)} = tg2\alpha$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = tg2\alpha.$$

При доказательстве прослеживается *преемственность в содержании* материала с материалом курса основной школы по теме «Тождественные преобразования»: использовалось приведение подобных слагаемых и формула зависимости тангенса от синуса и косинуса, а так же из курса старшей школы использовалась формула суммы синусов, суммы косинусов.

№ 544 (1). Доказать тождество $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и вычислить $tg267^0 + tg93^0$.

Решение.

Учитель. Каким способом мы будет преобразовывать данное тождество? А возможен ли другой способ?

Преобразуем левую часть тождества, представив тангенс как отношение синуса к косинусу и приведем полученные дроби к общему знаменателю:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg267^0 + tg93^0 = \frac{\sin 360^0}{\cos 267^0 \cos 93^0} = 0.$$

№ 545 (1). Разложить на множители: $1-\cos\alpha+\sin\alpha$.

Решение: $1-\cos\alpha+\sin\alpha = \cos 0^0 - \cos\alpha + \sin\alpha = -2\sin\dfrac{0+\alpha}{2}\sin\dfrac{0-\alpha}{2} + \sin\alpha =$

$$= -2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

№ 557. Упростить выражение $\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right) \cdot \dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}$.

Решение:

$$\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right) \cdot \frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)} = \frac{\cos\beta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{1-(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{\cos(\pi-(\beta-\alpha))} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{1-(-\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{-\cos(\beta-\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{2\sin^2 2\alpha}{-1} = \frac{2\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = -4\sin 2\alpha.$$

Выполняя тождественные преобразования в ходе решения этой задачи, учащиеся сталкиваются с *преемственностью в содержании материала* с материалом, изученным в курсе основной школы: использование основного тригонометрического тождества, формул приведения, а так же при преобразованиях использовалась формулы удвоенного аргумента для синуса и для косинуса, изученные в курсе старшей школы.

Ученик, отвечающий у доски, комментирует свое решение, называя каждую используемую формулу и вид тождественного преобразования.

В этом преобразовании использовали из курса основной школы формулы приведения, формулы связи тригонометрических углов α и $-\alpha$,из курса старшей школы использовались формулы косинуса разности, синуса двойного угла.

IV. Подведение итогов урока (2 мин).

Учитель. Оцените, пожалуйста, свою деятельность на уроке. В чем возникли затруднения? Запишем домашнее задание (появляется на слайде).

V.Домашнее задание(2 мин): I. 1) № 541 (1), 545 (4), 546 (1); 2) знать структуру «тригонометрического дерева»; II. 1) № 545 (1), 545 (4), 542 (2), 555; 2) знать структуру «тригонометрического дерева».

Сложность и количество задач для домашнего выполнения ученик выбирает самостоятельно, выбирая I или II вариант.

Итоговый контроль. На тему «Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов» на углубленном уровне отводится 3 часа. Первые 2 часа мы показали с применением технологии В.Ф. Шаталова, целесообразно провести итоговый контроль в форме проверочной работы на третьем уроке изучении темы.

Контроль должен быть достаточно разнообразен и полон, охватить все этапы обучения. Итоговая проверочная работа должна констатировать уровень знаний и умений, которыми овладел учащийся в ходе изучения темы «Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов», на которой мы показываем обучение тождественным преобразованиям тригонометрических выражений.

Все задания проверочной работы направлены на выявление пробелов в тождественных преобразованиях тригонометрических выражений при помощи формул суммы и разности синусов, суммы и разности косинусов.

Критерии оценки: задание 1 (а) - 1 балл; задание 1 (б) - 2 балла; задание 2 – 3 балла; задание 3 – 4 балла; задание 4 (а) – 5 баллов; задание 4 (б) – 5 баллов; задание 5 – 6 баллов.

Отметка «5» ставится от 18 баллов и выше; отметка «4» — за 14-17 баллов; отметка «3» — за 10-13 баллов; отметка «2» - за 0-9 баллов.

Примерный вариант проверочной работы составлен с использованием методической литературы [120, С. 144-147]:

Вариант 1

1. Преобразовать в произведение:

а) $\sin 18^0 + \sin 20^0$;   б) $\cos\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4}$.

2. Упростите выражение $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$.

3. Доказать тождество: $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = tg\alpha.$

4. Преобразовать в произведение:

а) $\sin 10^0 + 2\sin 5^0 \cos 15^0 + \cos 50^0$;   б) $\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha$.

5*. Вычислить без помощи таблиц: $tg 9^0 - tg 27^0 - tg 63^0 + tg 81^0$.

Вариант 2

1. Преобразовать в произведение:

а) $\sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{8}$;   б) $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{7}\right)$.

2. Упростите выражение $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

3. Доказать тождество: $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)} = -ctg\alpha$.

4. Преобразовать в произведение:

а) $\sin 40^0 - 2\cos 10^0 \sin^2 15^0 + \sin 20^0$; б) $\sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha + \sin 10\alpha$.

5*. Вычислить без помощи таблиц: $\cos 36^0 + \cos 108^0$.

§6. Элективный курс по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» в курсе алгебры и начал математического анализа

Обучаясь в основной школе, учащиеся приобретают определенное количество опорных знаний и умений, которые составляют фундамент, на котором строится дальнейшее обучение в старшей школе согласно принципу преемственности [15, С. 252]. В качестве примера соблюдения данного принципа представим разработанный нами для старших классов элективный курс «Алгебраические задачи на доказательство тождеств». Данный элективный курс направлен на углубление, обобщение и расширение знаний и умений учащихся по математике, а также – на формирование умений и навыков, связанных с доказательством тождеств, обеспечивая преемственность между основной и старшей школой.

Элективный курс «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» отвечает требованиям к целям и задачам обучения математике учащихся 10 класса старшей школы.

Содержание рабочей программы данного элективного курса составлено на основе Федерального Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования и соответствует основному курсу математики для общеобразовательной школы; развивает базовый курс математики на старшей ступени общего образования; реализует принцип преемственности изучаемого материала на уроках алгебры и начал анализа с помощью систем упражнений, связанных с доказательством тождеств, которые углубляют и расширяют школьный курс математики, и одновременно обеспечивают преемственность в знаниях и умениях учащихся основного курса математики старших классов, что способствует расширению и углублению базового общеобразовательного курса алгебры и начал анализа.

Актуальностьпредлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1) материал, предлагаемый в данной программе, углубляет и расширяет знания учащихся по теме «Алгебраические тождества и их доказательства»;

2) содержание изучаемого материала по данной теме позволяет включить обучающихся в творческий процесс открытия необходимых знаний;

3) рассматриваемый материал является традиционным и актуален при подготовке обучающихся к вступительным экзаменам в ВУЗ.

Цель курса: повышение уровня математической подготовки выпускников общеобразовательной школы и расширение знаний учащихся по теме «Алгебраические тождества и их доказательства».

Задачипрограммы элективного курса:

- обобщение, систематизация и углубление знаний по теме;
- развитие мыслительных, творческих способностей учащихся;
- развитие математического мышления;
- пробуждение интереса к получению новых знаний;

Новизнапрограммы ЭК состоит в том, что она углубляет знания обучающихся старших классов по теме «Алгебраические тождества и их доказательства», реализуя принцип преемственности изучаемого материала основной и старшей школы с помощью решения систем упражнений, включающих олимпиадные задания и задания вступительных экзаменов в различные ВУЗы.

Рабочая программа элективного курса «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» рассчитана на 17 часов (Табл. 3).

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности.

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- правильно употреблять математические термины;

- уметь определять способ доказательства тождества по его виду;

- знать нестандартные способы доказательства тождеств, содержащихся в олимпиадах и вступительных экзаменах в ВУЗы.

*Формы занятий:*урок-практикум, урок обобщения, урок самостоятельного решения задач, учебно-исследовательская конференция.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется в результате решения задач учащихся на уроках;итоговая контрольная работа;защита проектов.

Данная программа может быть использована, как в общеобразовательных, так и в классах с углубленным и профильным изучением математики.

Таблица 3

Календарно-тематическое планирование

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
I	**Тождества, доказываемые с помощью формул сокращенного умножения и простейших тождественных преобразований**	4	Уроки-практикумы
1	Решение задач на доказательство тождеств	2	
2	Решение задач на доказательство алгебраических тождеств, содержащих степени с целыми показателями	1	
3	Решение олимпиадных задач	1	
II	**Числовые тождества**	4	Уроки-практикумы
4	Решение задач на доказательство тождеств	2	
5	Решение задач на доказательство тождеств с помощью формул сложных радикалов	1	
6	Решение олимпиадных задач	1	
III	**Тождества, содержащие заданное условие**	4	Уроки-практикумы
7	Решение задач на доказательство тождеств	3	
8	Решение олимпиадных задач	1	
IV	**Обобщающее повторение**	5	
9	Задания вступительных экзаменов в ВУЗ	1	Урок- практикум

10	Итоговая контрольная работа	1	Урок самостоятельного решения задач
11	Анализ контрольной работы, работа над ошибками	1	Урок-обобщение
12-13	Защита проектов	2	Учебно-исследовательская конференция

Опишем содержание элективного курса «Алгебраические задачи на доказательство тождеств».

Раздел I.Тождества, доказываемые с помощью формул сокращенного умножения и тождественных преобразований (4 ч).

Формулы сокращенного умножения. Вынесение общего множителя за скобки. Разложение квадратного трехчлена на множители. Степень с целым показателем. Решение задач на доказательство тождеств. Решение задач на доказательство алгебраических тождеств, содержащих степени с целыми показателями. Решение олимпиадных задач.

Основная цель – рассмотреть решение задач на применение формул сокращенного умножения, вынесение общего множителя за скобки, сокращение дробей.

В данном разделе учащиеся знакомятся с основными способами доказательства тождеств:

1) выполнить равносильные преобразования левой (правой) части тождества. Если в итоге получаем правую (левую) часть, то тождество считается доказанным;

2) выполнить равносильные преобразования левой и правой части тождества. Если в результате получим одинаковый результат, то тождество считается доказанным;

3) из правой (левой) части тождества вычитаем левую (правую) часть. Производим над разностью равносильные преобразования. И если в итоге получаем нуль, то тождество считается доказанным.

Задача 1 [18, С. 74]**.** Доказать тождество.

$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\frac{(a+1)(b+1)}{abc}+\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}.$$

Данное тождество доказывается при помощи равносильных преобразований левой части.

$$\frac{abcd+bcd+(a+1)cd+(a+1)(b+1)d+(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$$

$$\frac{bcd(a+1)+(a+1)cd+d(a+1)(b+1)+(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$$

$$\frac{(a+1)cd(b+1)+(a+1)(b+1)(d+c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$$

$$\frac{(a+1)(b+1)(cd+d+c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$$

$$\frac{(a+1)(b+1)(d(c+1)+(c+1))}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$$

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd},$$ что и требовалось доказать.

Задача 2 [57, С.15]**.** Доказать тождество.

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}\ .$$

Это тождество решается равносильным преобразованием левой и правой части.

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}-\frac{c-a}{(b-c)(a-b)}+\frac{a-b}{(a-c)(b-c)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

$$\frac{(b-c)^2+(a-c)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

$$\frac{b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2+a^2-2ab+b^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{2(b-c)(a-c)+2(a-b)(a-c)-2(a-b)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{2ab-2bc-2ac+2c^2+2a^2-2ac-2ab+2bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}-$$
$$-\frac{2ab+2ac+2b^2-2bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$ что и требовалось доказать.

Задача 3 [81, С. 80]. Доказать тождество.

$$\frac{x^{-2}+y^{-2}}{(x+y)^2}+(2x^{-1}+2y^{-1}):(x+y)^3=(xy)^{-2}$$

Докажем данное тождество, путем вычитания из левой части правую, и проведя равносильные преобразования, в результате чего должны получить ноль.

$$\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{(x+y)^2}+\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\cdot\frac{1}{(x+y)^3}-\frac{1}{x^2y^2}=0$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2y+2x}{xy}\cdot\frac{1}{(x+y)^3}-\frac{1}{x^2y^2}=0$$

$$\frac{(x^2+y^2)(x+y)+(2y+2x)xy}{x^2y^2(x+y)^3}-\frac{1}{x^2y^2}=0$$

$$\frac{(x+y)(x^2+y^2+2xy)}{x^2y^2(x+y)^3}-\frac{1}{x^2y^2}=0$$

$$\frac{(x+y)(x+y)^2}{x^2y^2(x+y)^3}-\frac{1}{x^2y^2}=0$$

$$\frac{(x+y)^3}{x^2y^2(x+y)^3}-\frac{1}{x^2y^2}=0$$

$$\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{x^2y^2}=0$$

$0=0$, что и требовалось доказать.

Раздел II. Числовые тождества (4 ч). *Избавление от корня. Формула сложных радикалов. Степень с дробным показателем.*

Основная цель - рассмотреть решение задач с корнями, сложными радикалами и дробными показателями. Рассмотреть олимпиадные задачи, так как числовые тождества встречаются наиболее часто.

В этом разделе элективных уроков одна из тем - «Доказательство тождеств с помощью формул сложных радикалов». .

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},\ \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Данная тема рассматривается в курсе 8 класса углубленной программы по алгебре. В старших же классах мы можем предложить на применение данных формул более сложные задания, например $\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}+\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}=4$ [44, С. 36].

При решении каждого из тождеств, направляем учащихся на правильный выбор способа доказательства тождества. Данного тождество рациональнее доказывать, выполняя равносильные преобразования левой части.

В этом разделе элективного курса также рассматривается ряд *олимпиадных задач*, например: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ [59, С. 26]. Данное тождество доказывается преобразованием левой и правой частей, при его доказательстве применяется также метод замены переменных.

Задача 1 [24, С. 110]**.** Докажите тождество.

$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$

Данное тождество доказывается при помощи возведения левой и правой части в квадрат.

$10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$

$10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}=2+2\sqrt{6}+3+5+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$

$10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}=10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60},$ что и требовалось доказать.

Задача 2 [31, С. 40]**.** Докажите тождество.

$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})=1.$ Так как правая часть не требует преобразований, будем преобразовывать левую часть. Представим второй множитель, стоящий в левой части уравнения в виде корня третьей степени.

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}=1$$

Представим подкоренное выражение второго множителя в виде куба разности: $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}}=1.$

Запишем произведение в виде одного корня и воспользуемся формулой разность квадратов: $\sqrt[3]{(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})}=1$

$$\sqrt[3]{26^2-225\cdot 3}=1$$

$1=1$, что и требовалось доказать.

Задача 3 [31, С. 35]. Докажите тождество.

$\left(\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{\frac{1}{2}}=-\sqrt[4]{2}.$ Заменим первую скобку на А, а вторую скобку на В и преобразуем отдельно каждое выражение, содержащееся внутри этих скобок:

$$A=\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}=\frac{\sqrt[12]{2^9}+\sqrt[12]{2^{12}}}{\sqrt[12]{2^3}+\sqrt[12]{2^4}}-\sqrt[12]{2^8}=\frac{\sqrt[12]{\left(2^3\right)^3}+\sqrt[12]{\left(2^4\right)^3}}{\sqrt[12]{2^3}+\sqrt[12]{2^4}}-\sqrt[12]{2^8}=$$

$$=\left(\sqrt[12]{2^3}+\sqrt[12]{2^4}\right)\left(\sqrt[12]{2^6}-\sqrt[12]{2^3\cdot 2^4}+\sqrt[12]{2^8}\right)-\sqrt[12]{2^8}=\sqrt[12]{2^6}-\sqrt[12]{2^7}=\sqrt[12]{2^6}\cdot\left(1-\sqrt[12]{2}\right)==\sqrt{2}\cdot\left(1-\sqrt[12]{2}\right);$$

$$B=\sqrt{\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}}=\sqrt{\frac{\sqrt[12]{2^9}-\sqrt[12]{2^{12}}}{\sqrt[12]{2^3}-\sqrt[12]{2^4}}-3\sqrt[12]{2^7}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt[12]{2^3}-\sqrt[12]{2^4}\right)\left(\sqrt[12]{2^6}+\sqrt[12]{2^7}+\sqrt[12]{2^8}\right)}{\sqrt[12]{2^3}-\sqrt[12]{2^4}}-3\sqrt[12]{2^7}}==\sqrt{\left(\sqrt[12]{2^4}-\sqrt[12]{2^3}\right)^2}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\left(\sqrt[12]{2}-1\right)=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[12]{2}-1\right);$$

Подставим полученное выражения в исходное тождество:

$\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt[12]{2}\right)}{\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[12]{2}-1\right)}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}=-\sqrt[4]{2},$ что и требовалось доказать.

Раздел III.Тождества, содержащие заданное условие (4 ч). *Метод подстановки. Различные условия, содержащие тождества.*

Основная цель - познакомить учащихся с тождествами, которые содержать различные условия.

Чаще всего встречаются задания на доказательство тождеств, в которых вместо одной переменной требуется подстановка выражения, возможно, содержащее в себе несколько переменных или наоборот.

Задача 1 [25, С.8]**.** Пусть $a+b+c=2p$. Докажите, что $4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2=16p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)$.

Данное тождество докажем преобразованием левой части, используя формулу разность квадратов.

В нем также приводятся *задачи вступительных экзаменов* в ВУЗы, в которых наиболее часто встречаются задания на доказательство тождеств с условием. Они имеют нестандартные способы решения. Обратимся к одному из них.

Задача 2 [1, С. 58]**.** Докажите, что если $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, то $x+y=0$.

Умножим обе части равенства на $(x-\sqrt{x^2+1})$:

$$(x^2-(x^2+1))(y+\sqrt{y^2+1})=x-\sqrt{x^2+1}$$
$$(x^2-x^2-1)(y+\sqrt{y^2+1})=x-\sqrt{x^2+1}$$
$$-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$$
$$y=-\sqrt{y^2+1}-x+\sqrt{x^2+1} \qquad (1)$$

Теперь умножим то же самое равенство на $(y-\sqrt{y^2+1})$:

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})(y-\sqrt{y^2+1})=y-\sqrt{y^2+1}$$
$$(x+\sqrt{x^2+1})(y^2-(y^2+1))=y-\sqrt{y^2+1}$$
$$-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}$$
$$x=-\sqrt{x^2+1}-y+\sqrt{y^2+1} \qquad (2)$$

Сложим (1) и (2):

$$x+y=-\sqrt{x^2+1}-y+\sqrt{y^2+1}-\sqrt{y^2+1}-x+\sqrt{x^2+1}$$
$$x+y=-(x+y)$$

$x+y=0,$ что и требовалось доказать.

Раздел IV.Обобщение и заключение (5 ч). *Домножение на сопряженное. Аналитический метод доказательства тождеств. Разбор заданий для поступающих в ВУЗы. Контрольная работа и ее разбор. Защита проектов.*

Из анализа заданий вступительных экзаменов в ВУЗы, видно, что часто в них используется тождества, имеющие условие.

Задача 1. Докажите, что если $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$, то $x+y=0$.

Данное тождество носит более сложный характер, и доказываться будет нетрадиционно: в два этапа домножая на выражения, сопряженные выражениям, стоящим в левой части.

Задача 2 [58, С. 21]**.** Доказать, что если $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$ то $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$

Преобразуем левую часть равенства, путем вынесения у каждого корня общий множитель за скобку:

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=\sqrt{\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)}+\sqrt{\sqrt[3]{y^4}\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)=\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Таким образом, $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}=a$, то есть $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, что и требовалось доказать.

Контрольная работа по теме «Доказательство тождеств различных видов», позволяющая оценить степень усвоения учащимися программы данного элективного курса.

1. Докажите тождество [19, С.34]: $\dfrac{\left(a^2-3a-3\right)^2-16a^4}{a^3-1}+\dfrac{3a}{2-\dfrac{9a-5}{5a-3}}=\dfrac{9}{a-1}.$

2. Доказать тождество [31, С.39]: $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1.$

3. Доказать [31, С.40], что если $a+b=1,$ то $\dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{a^3-1}=\dfrac{2\left(b-a\right)}{a^2b^2+3}.$

Приведем ***темы проектов*** для учащихся в рамках данного элективного курса.

Предлагаемые ниже темы исследовательских работ могут быть использованы при выполнении индивидуальных или групповых проектов или в качестве индивидуальных научно-исследовательских работ.

Темы выдаются в начале изучения программы. Защита проектов или работ проходит в рамках учебно-исследовательской конференции. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся.

1. Бином Ньютона.Тождества с биномиальными коэффициентами.

План работы:

1. Биография Блеза Паскаля.
2. Открытие треугольника Паскаля, его построение.
3. Свойства треугольника Паскаля, возведение в степень с его помощью.
4. Тождества с биномиальными коэффициентами и их доказательство.

Рекомендуемая литература:

1. Анохин В.А. Проблемы арифметики и бином Ньютона/ В.А. Анохин, К.Н. Шихаев// Интеграл.- 2011.- № 5.- С. 107-110.

2. Попов Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике. Изд. 3-е, стереотипн. – М.: Ком Книга, 2006. – 216 с.

2. Успенский В.А. Треугольник Паскаля / В.А. Успенский.- М.: URSS, 2015.- 56 с.

2. Использование тождественных преобразований при решении олимпиадных задач.

План работы:

1. Виды уравнений, встречающихся в олимпиадных заданиях.

2. Тождественные преобразования при решении уравнений повышенного уровня.

3. Примеры олимпиадных задач на решение уравнений с использованием тождественных преобразований.

Рекомендуемая литература:

1. Шеврин Л.Н. Тождества в алгебре // Соросовский образовательный журнал.- 1996.- № 7.- С. 111-118.

2. Яковлева Т.Х. Математика. Тождественные преобразования. Решение уравнений // Т.Х. Яковлева.- Д.: ЗФТШ МФТИ, 2014.- 20 с.

3. Ясиновый Э.О применении законов арифметических действий в тождественных преобразованиях // Математика в школе, 1953.- № 5. С.21-24

Список рекомендуемой литературы для учителя

1. Агаханов Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов и др.- М.: МЦНМО, 2007.- 472 с.
2. Анохин В.А. Проблемы арифметики и бином Ньютона/ В.А. Анохин, К.Н. Шихаев// Интеграл.- 2011.- № 5.- С. 107-110.
3. Балаян Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике дл подготовки к ЕГЭ: 9-11 кл. / Э.Н. Балаян.- Ростов н/Д: Феникс, 2013.- 317 с.
4. Виленкин Н.Я. Алгебра 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений и шк. с углубл. изучением математики / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др.; под ред. Н.Я. Виленкина.- 9-е изд..- М.: Просвещение, 2010.- 303 с.
5. Виленкин Н.Я. Алгебра: для 8 кд.: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углуб. изуч. Математики / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др. – М.: Просвещение, 1995. – 256 с.
6. Виленкин Н.Я. Алгебра для 9 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. Математики / Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло.- 2-е изд.- М.: Просвещение, 1998.- 384 с.
7. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич.- 5-е изд. – М.: Просвещение, 1999.- 271 с.
8. Егерев В.К. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В.К. Егерев, В.В. Зайцев и др.; Под ред. М.И. Сканави.- 6-е изд.- М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013.- 608 с.
9. Зайкин М.И. Преобразование сложных радикалов. Элективный курс по математике / М.И. Зайкин.- Арзамас: АГПИ, 2008.- 132 с.

10. Звавич Л.И. Алгебра. Углубленное изучение. 8 кл.: задачник / Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский. – 4-е изд., испр. - М.: Мнемозима, 2006.- 284 с.

11. Звавич Л.И. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский.- 7-е изд.- М.: Мнемозина, 2010.- 271 с.

12. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева и др.- 4-е изд.- М.: Мнемозина, 2010.- 264 с.

13. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор.- М.: Просвещение, 1990.- 416 с.

14. Кречмар В.А. Задачник по алгебре / В.А. Кречмар.- М.: Наука, 1968.- 416 с.

15. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике/ Е.Д. Куланин, В.П. Норин.- 5-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2003.- 624 с.

16. Макарычев Ю.Н. Алгебра: доп. главы к ше. Учеб. 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. И Кл. с углубд. Изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк.- 5-е изд.- М.: Просвещение, 2003.- 207 с.

17. Макарычев Ю.Н. Алгебра. Дидактические материалы. 8 класс: с углубл. изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк .- 6-е изд. – М.: Просвещение, 2010.- 157 с.

18. Макарычев Ю.Н. Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс: с углубл. изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк .- 6-е изд. – М.: Просвещение, 2008.- 143 с.

19. Медынский М.М. Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях. Книга 3: Тождественные преобразования выражений / М.М. Медынский. – М.: Эдитус, 2015.- 256 с.

20. Миндюк Н.Б. Разноуровневые дидактические материалы по алгебре. 8 класс / М.Б. Миндюк, Н.Г. Миндюк.- М.: Генжер, 1996.- 96 с.

21. Морозова Е.А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги / Е.А. Морозова и др.- 4-е изд., испр. и доп. М.: Просвещение, 1976.- 288 с.

22. Попов Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике. Изд. 3-е, стереотипн. – М.: Ком Книга, 2006. – 216 с.

23. Феоктистов И.Е. Алгебра. 8 класс. Дидактические материалы. Методические рекомендации / И.Е. Феоктистов.- 3-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2013.- 173 с.

24. Шеврин Л.Н. Тождества в алгебре // Соросовский образовательный журнал.- 1996.- № 7.- С. 111-118.

25. Яковлева Т.Х. Математика. Тождественные преобразования. Решение уравнений // Т.Х. Яковлева.- Д.: ЗФТШ МФТИ, 2014.- 20 с.

26. Ясиновый Э.О применении законов арифметических действий в тождественных преобразованиях// Математика в школе, 1953.- № 5. С.21-24.

Список рекомендуемой литературы для учащихся

1. Агаханов Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов и др.- М.: МЦНМО, 2007.- 472 с.

2. Анохин В.А. Проблемы арифметики и бином Ньютона/ В.А. Анохин, К.Н. Шихаев// Интеграл.- 2011.- № 5.- С. 107-110.

3. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич.- 5-е изд. – М.: Просвещение, 1999.- 271 с.

4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева и др.- 4-е изд.- М.: Мнемозина, 2010.- 264 с.

5. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике / Е.Д. Куланин, В.П. Норин.- 5-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2003.- 624 с.

6. Медынский М.М. Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях. Книга 3: Тождественные преобразования выражений / М.М. Медынский. – М.: Эдитус, 2015.- 256 с.

7. Попов Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике. Изд. 3-е, стереотипн. – М.: Ком Книга, 2006. – 216 с.

8. Шеврин Л.Н. Тождества в алгебре// Соросовский образовательный журнал.- 1996.- № 7.- С. 111-118.

9. Яковлева Т.Х. Математика. Тождественные преобразования. Решение уравнений // Т.Х. Яковлева.- Д.: ЗФТШ МФТИ, 2014.- 20 с.

Таким образом, реализация данного элективного курса в старшей школе позволит осуществлять обучение школьников согласно принципу преемственности, а также осознанно и системно формировать у них понятие тождества и способов его доказательства [105].

§7. Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент проводился на базе ЧОУ школа «ЛАДА» г.о. Тольятти в период прохождения преддипломной практики (с 18 апреля по 18 мая 2019 г.). В эксперименте участвовало 22 ученика 11-х класса, обучающиеся по учебному пособию, ориентированному на общеобразовательные классы, Ш.А. Алимова.

Целью констатирующего этапа эксперимента являлось выявление у учащихся умения выполнять тождественные преобразования, применяя различные методы и приемы.

Проанализировав задания ЕГЭ по заданной теме, нами была составлена контрольная работа, содержащая следующие типы заданий:

- тождественные преобразования 7-9 класс (задание 1-3);
- преобразование алгебраических выражений (задание 4-6);
- преобразование тригонометрических выражений (задание 7-9);
- преобразование логарифмических выражений (задание 10-12).

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Задание 1 [89]. Представьте в виде произведения: $k^3 - 216$.

Задание 2 [114]. Упростите выражение $\dfrac{a^{-11} \cdot a^4}{a^{-3}}$ и найдите его значение при $a = -\dfrac{1}{2}$. В ответ запишите полученное число.

Задание 3 [114]. Сократите дробь $\dfrac{(x+7)^2 - (x-7)^2}{x}$.

Задание 4 [114]. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[28]{3} \cdot 3 \cdot \sqrt[21]{3}}{\sqrt[12]{3}}$.

Задание 5 [89]. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{13} + \sqrt{7})^2}{10 + \sqrt{91}}$.

Задание 6 [114]. Найдите значение выражения $20^{-3,9} \cdot 5^{2,9} : 4^{-4,9}$.

Задание 7 [89]. Найдите значение выражения $3\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,8$.

Задание 8 [89]. Найдите значение выражения $\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin^2\dfrac{15\pi}{8}$.

Задание 9 [114]. Найдите значение выражения $\dfrac{16\sin 98 \cdot \cos 98}{\sin 196}$.

Задание 10 [114]. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 4}{\log_2 14} + \log_{14} 3,5$.

Задание 11 [114]. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

Задание 12 [114]. Найдите значение выражения $\log_a \dfrac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$.

Вариант 2

Задание 1 [114]. Найдите значение выражении $\dfrac{xy + y^2}{15x} \cdot \dfrac{3x}{x+y}$.

Задание 2 [89]. Найдите значение выражения $\frac{a^2-16b^2}{4ab}:\left(\frac{1}{4b}-\frac{1}{a}\right)$ при $a=3\frac{1}{13}, b=4\frac{3}{13}$.

Задание 3 [89]. Вычислите: $\frac{7^{-7}\cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$.

Задание 4 [114]. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[15]{5}\cdot 5\cdot \sqrt[10]{5}}{\sqrt[6]{5}}$.

Задание 5 [114]. Найдите значение выражения $\frac{2^{3,2}\cdot 6^{6,2}}{12^{5,2}}$.

Задание 6 [89]. Найдите значение выражения $\sqrt{65^2-56^2}$.

Задание 7 [114]. Найдите значение выражения $30tg3^0\cdot tg87^0-43$.

Задание 8 [89]. Найдите значение выражения $\frac{24(\sin^2 17^0-\cos^2 17^0)}{\cos 34^0}$.

Задание 9 [114]. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Задание 10 [114]. Найдите значение выражения $4\log_{1,25}5\cdot\log_5 0{,}8$.

Задание 11 [89]. Найдите значение выражения $\log^2_{\sqrt{7}}49$.

Задание 12 [89]. Найдите значение выражения $(-\log_2 12)(-\log_6 12)$.

Приведем результаты данной контрольной работы (Табл.4).

Таблица 4

Результаты контрольной работы

на тему «Тождественные преобразования»

Раздел	*Выполнили верно*	*Выполнили неверно*	*Не приступили к заданию*
Тождественные преобразования, 7-9 класс (1-3 задания)	64 % (14)	36 % (8)	0 % (0)
Преобразование алгебраических выражений (4-6 задания)	59 % (13)	32 % (7)	9 % (2)
Преобразование тригонометрических выражений (7-9 задания)	55 % (12)	27 % (6)	18 % (4)
Преобразование логарифмических выражений (10-12 задания)	55 % (12)	27 % (6)	18 % (4)

По результатам проведенной работы выявлены следующие виды ошибок (Табл. 5).

Таблица 5

Виды ошибок обучающихся

Тождественные преобразования 7-9 класс (1-3 задания)		
Виды ошибок		
Вычислительная	Неверно применена формула (правило)	Не доведено до ответа
0	6	2
Преобразование алгебраических выражений (4-6 задания)		
Виды ошибок		
Вычислительная	Неверно применена формула (правило)	Не доведено до ответа
0	7	2
Преобразование тригонометрических выражений (7-9 задания)		
Виды ошибок		
Вычислительная	Неверно применена формула (правило)	Не доведено до ответа
1	7	3
Преобразование логарифмических выражений (10-12 задания)		
Виды ошибок		
Вычислительная	Неверно применена формула (правило)	Не доведено до ответа
1	6	4

Проведя анализ, допущенных учащимися ошибок, можно сделать вывод, что учащиеся чаще всего «не видят» формулу, которую нужно применить в конкретном задании, путают формулы в тригонометрических и логарифмических выражениях, редко допускают вычислительные ошибки.

В данном эксперименте, для более глубокой оценки знаний и умений учащихся, был применен расчет коэффициента усвоения учебного материала, предлагаемый В.А. Гусевым [40].

Правильно выполненное задание оценивалось в 1 балл, неправильно выполненное - в 0 баллов. Исходя из этого, коэффициент усвоения учебного материала (К) рассчитывался по формуле: К=$\frac{N}{n}$, где N- сумма верных ответов, n- общее количество ответов.

Так, «при К, равном от 1,00 до 0,90 (или от 100 % до 90 % правильных ответов), оценка «5»; при К от 0,80 до 0,70 (или от 80 % до 70 %), оценка «4»; при К от 0,60 до 0,50 (от 60 % до 50 %), оценка «3»; наконец, при К ниже 0,50 (50 %)- оценка «2»» [33, С. 30]

По результатам эксперимента мы получили следующие результаты (Табл.6):

Таблица 6

Результаты контрольной работы № 1

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	30 %
«4»	40 %
«3»	23 %
«2»	7 %

Анализ контрольной работы позволил сделать следующий вывод: процентное соотношение учащихся справившихся с данной контрольной работой составляет 93 %. У обучающихся имеются ошибки, связанные с неправильным применение формул, необходимых для тождественных преобразований выражений. Стоит обратить внимание на то, что повысив уровень выполнения тождественных преобразований в основной школе, учащиеся будут успешнее выполнять данный вид заданий в 10-11 классах.

В рамках *поискового этапа эксперимента* во второй половине 2018-2019 учебного года в ЧОУ школа «ЛАДА» г.о. Тольятти в старших классах была осуществлена апробация разработанного элективного курса по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» в курсе алгебры и начал математического анализа и задачного материала по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений», представленных нами §5 и §6 работы.

Таким образом, при реализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе необходимо устанавливать связь между содержанием учебного материала и организацией его обучения.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1. Раскрыта методика реализации преемственности при обучении тождественным преобразованиям в общеобразовательной школе. Установлено, что при реализации преемственности обучения математике в общеобразовательной школе рекомендуется проводить обобщающие уроки по основным содержательным линиям в конце каждого учебного года, что позволит систематизировать материал более эффективно.

2. Спроектирован методический проект по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» с применением технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова по учебнику Ш.А. Алимова [78].

3. Разработан элективный курс по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» в курсе алгебры и начал математического анализа.

4. Проведен педагогический эксперимент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и результаты исследования.

1. Выделены различные подходы к понятию преемственности. Под преемственностью в обучении мы понимаем установление необходимой связи между содержанием учебного материала и организацией его обучения при дальнейшем изучении школьного курса математики.

2. Рассмотрен вопрос реализации преемственности обучения в Федеральном государственном образовательном стандарте.

3. Выделены методические особенности реализации преемственности при обучении математике в общеобразовательной школе.

4. Рассмотрена методика реализации преемственности при обучении тождественным преобразованиям в общеобразовательной школе.

5. Спроектирован методический проект по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» с применением технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова.

6. Разработан элективный курс по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» в курсе алгебры и начал математического анализа.

7. Проведен констатирующий эксперимент, который показал, что те учащиеся, которые усвоили на недостаточном уровне тождественные преобразования в 7-9 классах (разложение на множители, вынесение общего множителя за скобки, использование формул сокращенного умножения),

имею аналогичные ошибки при тождественных преобразованиях выражений, изучаемых в старших классах.

8. Апробирован элективный курс по теме «Алгебраические задачи на доказательство тождеств» в процессе поискового этапа педагогического эксперимента.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаханов Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов и др.- М.: МЦНМО, 2007.- 472 с.
2. Алгебра 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин Ю.М., М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин.- М.: Просвещение, 2012.- 319 с.
3. Алгебра 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин Ю.М., М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин.- М.: Просвещение, 2013.- 336 с.
4. Алгебра 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин.- М.: Просвещение, 2014.- 336 с.
5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.
6. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский и др.- М.: Просвещение, 2013.- 432 с.
7. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин.- М.: Дрофа, 2013.- 288 с.

8. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. Методическое пособие к учебникам Г.К. Муравина, О.В. Муравиной «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень» / Муравина О.В.- М.: Вертикаль (Дрофа), 2013.- 49 с.

9. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учрежд.: базовый и профил. уровни/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.- М.: Просвещение, 2009.- 256 с.

10. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина.- М.: Дрофа, 2013.- 256 с.

11. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10-11 классы: учеб. пособие для учителей общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни/ [сост. Т.А. Бурмистрова].- М: Просвещение, 2016.- 128 с.

12. Алгебра: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир.- М.: Вентана-Граф, 2015.- 272 с.

13. Алгебра: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир.- М.: Вентана-Граф, 2013.- 256 с.

14. Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир.- М.: Вентана-Граф, 2014.- 304 с.

15. Аммосова Н.В. Реализация преемственности в процессе обучения математике при переходе из начального в среднее звено общеобразоват. школы: учебное пособие.- Астрахань: Изд-во Астрахан. обл. ин-та усовершенствования учителей, 2005.- 78 с.

16. Ананьев Б.Г. О преемственности в обучении // Советская педагогика.- 1953.- № 2.- С. 23-35.

17. Анохин В.А. Проблемы арифметики и бином Ньютона / В.А. Анохин, К.Н. Шихаев// Интеграл.- 2011.- № 5.- С. 107-110.

18. Афанасьева С.В. Урок математики по теме «Тождественные преобразования логарифмических выражений» 10-й класс [Электронный ресурс]// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок 2003-2019.- Режим доступа: https://festival.1september.ru/.- Последнее обновление 14.05.2019.

19. Балаян Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ: 9-11 классы/ Э.Н. Балаян.- Ростов н/Д: Феникс, 2013.- 317 с.

20. Баллер Э.А. Преемственность в развитии культуры.- М., 1967.

21. Буракова Т.А. Элективный курс по математике для 10 класса «Трудные вопросы математики» [Электронный ресурс]// Ведущий образовательный портал России «Инфоурок».- Режим доступа: http://infourok.ru/. – Последнее обновление 12.05.19.

22. Бурмистренко Т.Н. Как запомнить формулы тригонометрии: сайт учителя математики «Математический Тандем» [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://repetitor-problem.net/.- Последнее обновление 12.05.19.

23. Васильева Г.Н. Методика изучения математики в основной школе: курс лекций для организации самостоятельной работы студентов по вопросам частных методик/ Г.Н. Васильева, В.П. Краснощекова, И.С. Цай, Л.Г. Ярославцева. - Пермь: Изд-во ПГПУ, 2011. - 94 с.

24. Виленкин Н.Я. Алгебра 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений и шк. с углубл. изучением математики / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др.; под ред. Н.Я. Виленкина.- 9-е изд..- М.: Просвещение, 2010.- 303 с.

25. Виленкин Н.Я. Алгебра для 9 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. Математики / Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло.- 2-е изд.- М.: Просвещение, 1998.- 384 с.

26. Виленкин Н.Я. О путях совершенствования содержания и преподавания школьного курса математики/ Н.Я. Виленкин, Р.К. Таваркиладзе.- М.: Просвещение, 1980.- С. 25.

27. Винокуров Е.Г. Преемственность в обучении математике/ Е.Г. Винокуров, П.П. Неустроев// Вестник научных конференций.- 2017.- № 3-2 (19).- С. 29-30.

28. Водолад С.Н. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции, в курсе алгебры и математического анализа/ С.Н. Водолад, Е.А. Титова// Творческие и прикладные аспекты современной науки.- Курск, 2014.- № 6-1.- С. 15-17.

29. Выгодский Л.С. Избранные психологические исследования.- М.: Изд-во АПН РСФСР, 1956.- 519 с.

30. Гаврилова М.А., Печникова Н.В. Преемственность как гуманитарная составляющая обучения математике/ М.А. Гаврилова, Н.В. Печникова// Гуманитаризация математического образования в школе и вузе: Межвуз, сб. науч. тр. вып. 2.- Саранск: Поволжск. отд. РАО, МГПИ им. М.Е. Евсевьева, СВМО.- 2002.- 157 с.

31. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич.- 5-е изд. – М.: Просвещение, 1999.- 271 с.

32. Ганелин Ш.И. Принципы дидактики и их взаимосвязи у классиков педагогики // Советская педагогика.- 1961.- № 5.- С. 121-134.

33. Геометрия 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина.- 22-е изд. – М.: Просвещение, 2013.- 255 с.

34. Геометрия 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов.- 2-е изд.- М.: Просвещение, 2014.- 240 с.

35. Геометрия 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина.- 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014.- 384 с.

36. Геометрия. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовничего.- М.: Просвещение, 2010.- 127 с.

37. Геометрия. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовничего.- М.: Просвещение, 2011.- 175 с.

38. Геометрия. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовничего.- М.: Просвещение, 2012.- 143 с.

39. Городниченко О.Э. Преемственность в изучении уравнений между начальной и средней школой: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Городниченко Ольга Эдуардовна.- М., 2000.- 182 с.

40. Гусев В.А. Магистерская диссертация по методике преподавания математики: Методические рекомендации/ В.А. Гусев, И.М. Смирнова.- М.: Прометей, 1996.- 107 с.

41. Дистервег А. Избранные педагогические сочинения.- М.: Учпедгиз, 1956.- С. 136-203.

42. Егерев В.К. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В.К. Егерев, В.В. Зайцев и др.; Под ред. М.И. Сканави.- 6-е изд.- М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013.- 608 с.

43. Епифанова Н.М. Методика обучения алгебре основной школы (материалы к лекционным занятиям): учебно-методическое пособие.- Ярославль: Изд-во ЯГПУ имени К.Д.Ушинского, 2006.- С.42-48.

44. Зайкин М.И. Преобразвоание радикалов. Элективный курс по математике / М.И. Зайкин.- Арзамас: АГПИ, 2008.- 132 с.

45. Звавич Л.И. Алгебра. Углубленное изучение. 8 кл. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский. – 7-е изд. - М.: Мнемозима, 2010.- 271 с.

46. Звавич Л.И. Алгебра. Углубленное изучение. 8 кл.: задачник/ Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский- 4-е изд., испр.- М.: Мнемозима, 2006.- 284 с.

47. Исаенко Г.Н. Роли исторической преемственности в развитии науки.- М.: Знание, 1969.- 24 с.

48. Истомина Н.Б. Преемственность при изучении чисел в начальной и основной школе/ Н.Б. Истомина, Г.В. Воителева. - М.: Московский Психолого-социальный институт, 2003. - С. 3-36.

49. Кафарова В.В. Реализация преемственности в обучении математике учащихся 5-6 классов на основе использования укрупнения дидактических единиц/ Т.А. Французова, В.В. Кафарова// Актуальные проблемы современного образования.- Астрахань, 2017.- № 1 (22).- С. 77-82.

50. Клековкин Г.А. К проблеме преемственности в обучении // Проблемы современного математического образования в пед. вузах и школах России: Тезисы докладов II межрегиональной научной конференции.- Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2001.- С. 11-14.

51. Ковалева Л.Л. Элективный курс по математике «Методы решения нестандартных задач по математике» для 11 класса [Электронный ресурс]// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2019.- Режим доступа: http://festival.1september.ru/- Последнее обновление 14.05.19.

52. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч.1, 2.- М.: Просвещение, 1977.

53. Комарова Е.А. Преемственность в обучении математике. Методическое пособие.- Вологда. Издательский центр ВИРО, 2007.- 108 с.

54. Кондракова С.О. Опорные сигналы В.Ф. Шаталова- средство активации творческого подхода к учебному процессу [Электронный ресурс]// Научная электронная библиотека.- Режим доступа: http://cyberleninka.ru/.- Последнее обновление 18.05.19.

55. Коченевская С.А. Тригонометрия в заданиях ЕГЭ/ С.А. Коченевская, Л.А. Осипова// Информационно-коммуникационные

технологии в педагогическом образовании.- Новокузнецк, 2017.- 1 (48).- С. 40-42.

56. Кошелева Е.А. Урок математики по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» 10-й класс [Электронный ресурс]// Педагогическое сообщество «УРОК.РФ» 2017-2019.- Режим доступа: http://урок.рф.ru/.- Последнее обновление 14.05.19.

57. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал математического анализа/ В.С. Крамор.- М.: Просвещение, 1990.- 416 с.

58. Кречмар В.А. Задачник по алгебре / В.А. Кречмар.- М.: Наука, 1968.- 416 с.

59. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике / Е.Д. Куланин, В.П. Норин.- 5-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2003.- 624 с.

60. Купцова Т.Н. Урок математики по теме «Показательные уравнения и методы их решения с применением компьютерных технологий» 10-й класс [Электронный ресурс]// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок 2003-2019.- Режим доступа: https://festival.1september.ru/.- Последнее обновление 14.05.2019.

61. Лобанок И.П. Связь между пропедевтикой и преемственностью в обучении математике// Итоги научных исследований ученых МГУ имени А.А. Кулешова.- Могилев, 2017.- С. 143-145.

62. Лященко Е.И. Методический анализ учебного материала по математике // Современные проблемы преподавания математики, сборник статей.- М.: Просвещение, 1985.- С. 143-150.

63. Магомеддибирова З.А. Методическая реализация преемственности при обучении математике: дис. докт. пед. наук: 13.00.02 / Магомеддибирова Зульпат Абдулгалимовна.- М., 2003.- 300 с.

64. Макарычев Ю.Н. Алгебра. Дидактические материалы. 8 класс: с углубл. изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк .- 6-е изд. – М.: Просвещение, 2010.- 157 с.

65. Макарычев Ю.Н. Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс: с углубл. изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк .- 6-е изд. – М.: Просвещение, 2008.- 143 с.

66. Макарычев Ю.Н. Алгебра: доп. главы к ше. Учеб. 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. И Кл. с углубд. Изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк.- 5-е изд.- М.: Просвещение, 2003.- 207 с.

67. Математика. 5 кл.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина.- М.: Дрофа, 2014.- 318 с.

68. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.- М.: Просвещение, 2015.-272 с.

69. Математика. 6 кл.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина.- М.: Дрофа, 2014.- 319 с.

70. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.- М.: Просвещение, 2012.-256 с.

71. Математика. 7 кл.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина.- М.: Дрофа, 2013.- 285 с.

72. Математика. 8 кл.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина.- М.: Дрофа, 2013.- 254 с.

73. Математика. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.- М.: Просвещение, 2014.-301 с.

74. Математика. 9 кл.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина.- М.: Дрофа, 2014.- 315 с.

75. Математика. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.- М.: Просвещение, 2014.- 335 с.

76. Математика: 5 класс: учебник для общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир.- М.: Вентана-Граф, 2014.- 304 с.

77. Математика: 6 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир.- М.: Вентана-Граф, 2014.- 304 с.

78. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др.- М.: Просвещение, 2015.- 463 с.

79. Медынский М.М. Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях. Книга 3: Тождественные преобразования выражений / М.М. Медынский. – М.: Эдитус, 2015.- 256 с.

80. Мендыгалиева А.К. Обеспечение преемственности в обучении математике как условие повышения его качества// Вестник Брянского государственного университета.- Брянск, 2012.- № 1-2.- С. 205-210.

81. Миндюк Н.Б. Разноуровневые дидактические материалы по алгебре. 8 класс / М.Б. Миндюк, Н.Г. Миндюк.- М.: Генжер, 1996.- 96 с.

82. Михайлова В.Б. Преемственность в обучении математике между начальными и средними классами/ В.Б. Михайлова// Актуальные проблемы преподавания в начальной школе: сборник статей всероссийской научно-практической конференции.- Саратов: Изд-во «Саратовский источник», 2016.- С. 238-241.

83. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, Л.О. Денищева Л.О. и др.- 4-е изд.- С.: Мнемозима, 2010.- 264 с.

84. Мордкович А.Г. Новая концепция школьного курса алгебры // Математика в школе.- 1996.- № 6.- С. 28-33.

85. Мороз А.Г. Пути обеспечения преемственности в самостоятельной учебной работе учащихся средней общеобразовательной школы и студентов вуза.- Киев, 1972.

86. Морозова Е.А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги / Е.А. Морозова и др.- 4-е изд., испр. и доп. М.: Просвещение, 1976.- 288 с.

87. Москалева Р.Н. Реализация принципа преемственности в обучении учащихся начальной и основной ступеней школы с углубленным изучением математики: дис. канд. пед. наук: 13.00.02/ Москалева Рания Нургаяновна.- Магнитогорск, 2007.- 211 с.

88. Нешков К.И. Некоторые вопросы преемственности при обучении математике // Преемственность в обучении математике: Пособие для учителей / Сборник статей. Срст. А.М. Пышкало.- М., «Просвещение», 1978.- С. 13-18.

89. Образовательный портал для подготовки к экзаменам.- Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/.- Последнее обновление 16.05.19.

90. Павленко С.А. Практико-ориентированные задачи как средство реализации принципа преемственности при обучении математике в условиях реализации ФГОС/ С.А. Павленко// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.- 2015.- № 12-5.- С. 14-15.

91. Песталоцци И.Г. Избранные педагогические произведения в 3 томах.- М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1961.- 1896 с.

92. Пойа Д. Как решать задачу. Пер. с англ.- М.: Учпедгиз, 1961.- 208 с.

93. Попов Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике. Изд. 3-е, стереотипн. – М.: Ком Книга, 2006. – 216 с.

94. Попов Н.И. О методологическом подходе в обучении тригонометрии/ Н.И. Попов, А.Н. Марасанов// Знание. Понимание. Умение.- М., 2008.- № 4.- С. 139-141.

95. Попова Л.А. Урок математики по теме «Тождественные преобразования степенных выражений» 10-й класс [Электронный ресурс]// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок 2003-2019.- Режим доступа: https://festival.1september.ru/.- Последнее обновление 14.05.2019.

96. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию [Электронный ресурс] / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. Режим доступа: http://fgosreestr.ru/.pdf. – Последнее обновление 16.05.19.

97. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию [Электронный ресурс]/ М-во образования и науки РФ.- М.: Просвещение, 2016.- 569 с. Режим доступа: http://fgosreestr.ru/.pdf.- Последнее обновление 16.05.19.

98. Пыженко В.В. Урок математики по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» 10-й класс [Электронный ресурс]//Ведущий образовательный портал России «Инфоурок».- Режим доступа: http://infourok.ru/.- Последнее обновление 11.05.19.

99. Пышкало А.М. Методические аспекты проблемы преемственности в обучении математике// Преемственность в обучении математике: Пос. для учителей. Сб. статей сост. А.М. Пышкало.- М.: Просвещение, 1978.- С. 3-12.

100. Решетникова Н.В. Преемственность реализации прикладной направленности обучения математике в основной и старшей школе: дис. канд. пед. наук: 13.00.02/ Решетникова Наталья Валерьевна.- Барнаул, 2009.- 224 с.

101. Салахов А.З. Принцип преемственности в обучении математике// Инновационное развитие современной науки: проблемы, закономерности, перспективы.- Пенза, 2019.- С. 15-17.

102. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике.- М.: Просвещение, 1995.- 240 с.

103. Саранцев Г.И. Цели обучения математике [Электронный ресурс] // Математика в школе.- М., 1999.- № 6.- С. 24.

104. Святкина Ю.С. Алгебраические тождества и их доказательства/ Ю.С. Святкина// «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – 1 оптический диск. - С.245-247.

105. Святкина Ю.С. Понятие преемственности в обучении математике/ И.В. Антонова, Ю.С. Святкина// Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы: сборник статей XIV Международной научно-практической конференции. Под общей редакцией М.А. Родионова.– Пенза: Издательство «Пензенский государственный университет».-2018. - С. 148-151.

106. Семикова М.Ш. О преемственности в обучении математике в I-IIIbIV-V классах// Преподавание алгебры и геометрии в школе: Пособие для учителей/ Сост. О.А. Боковнев.- М.: Просвещение, 1982.- С. 77-81.

107. Сизова М.Н. Преемственность в формировании аналогии при обучении математике в начальных и 5-6 классах средней школы: дис. канд. пед. наук: 13.00.02/ Сизова Марина Николаевна.- Самара, 1996.- 186 с.

108. Созоненко М.А. Элективный курс по алгебре и началам математического анализа для 10 класса: «Тригонометрия в ЕГЭ»// [Электронный ресурс]// Социальная сеть работников образования. Режим доступа: http://nsportal.ru/.- Последнее обновление 11.05.19.

109. Темиргалиева Б.К. Преемственность между обучением математике в начальном и среднем звене школы- одно из условий непрерывного образования ребенка// Актуальные проблемы современного образования.- Астрахань, 2014.- № 1 (16).- С. 205-209.

110. Туркина В.М. Различные подходы к осуществлению преемственных связей в обучении математике// Проблемы современного

математического образования в педвузах и школах России: Тез. докладов II межрегиональной научной конференции.- Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2001.- С. 59-60.

111. Туркина В.М. Установление преемственных связей в преподавании математики в условиях развивающего обучения: дис. докт. пед. наук: 13.00.02 / Туркина Валентина Михайловна.- С.-П., 2003.- 340 с.

112. Ушинский К.Д. Русская школа / Сост., предисл., коммент. В.О. Гусаковой /Отв. ред. О.А. Платонов.- М.: Институт русской цивилизации, 2015.- 688 с.

113. Федеральный государственный образовательный стандрат среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]/ М-во образования и науки РФ.- М.: Просвещение, 2012.- 52 с. Режим доступа: http://минобрнауки.рф/documents/2365. - Последнее обновление 24.04.19.

114. Федеральный институт педагогических измерений.- Режим доступа http://www.fipi.ru/.- Последнее обновление 15.05.19.

115. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» [Электронный ресурс] / Приказ Министерства образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2014. - 164 с. Режим доступа: http://god2015.com/files/Prikaz_253.pdf. - Последнее обновление 15.05.19.

116. Федорова Н.Е. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций/ Н.Е. Федорова, М.В. Ткачева.- М.: Просвещение, 2017.- 172 с.

117. Феоктистов И.Е. Алгебра. 8 класс. Дидактические материалы. Методические рекомендации / И.Е. Феоктистов.- 3-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2013.- 173 с.

118. Чернышова С.Л. Урок математики по теме «Преобразование тригонометрических выражений» 10-й класс [Электронный ресурс]//

Фестиваль педагогических идей «Открытый урок 2003-2019.- Режим доступа: https://festival.1september.ru/.- Последнее обновление 14.05.2019.

119. Шабунин М.И. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы к учебнику Ш.А. Алимова и др.: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни/ М.И. Шабунин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова.- 8-е изд.- М.: Просвещение, 2017.- 207 с.

120. Шамсутдинова Г.С. Учет особенностей работы в начальных классах - необходимое условие преемственности дальнейшего обучения математике// Преемственность в обучении математике: Пособие для учителей. Сб. статей сост. А.М. Пышкало.- М.: Просвещение, 1978.- С. 163-169.

121. Шаталов В.Ф. Быстрая тригонометрия.- М.: ГУП ЦРП «Москва-Санкт- Петербург», 2002.-72 с.

122. Шаталов В.Ф. Точка опоры.- М.: Педагогика, 1987.- 159 с.

123. Шаталов В.Ф. Эксперимент продолжается.- М.: Педагогика, 1989.- 336 с.

124. Шеврин Л.Н. Тождества в алгебре // Соросовский образовательный журнал.- 1996.- № 7.- С. 111-118.

125. Шитова А.А. Образовательная модель В.Ф. Шаталова как технология интенсивного обучения// Вестник Ессентукского управления, бизнеса и права.- Ессентуки,2014.- № 8.- С. 223-226.

126. Шишко С.И. Урок математики по теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» 10-й класс [Электронный ресурс]// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2019.- Режим доступа: http://festival.1september.ru/.- Последнее обновление 15.05.19.

127. Щукина Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся: научное издание.- М.: Педагогика, 1988.- 208 с.

128. Эрдниев П.М. Некоторые вопросы методики обучения арифметике и алгебре в средней школе.- Элиста, 1960.- 62 с.

129. Яковлева Т.Х. Математика. Тождественные преобразования. Решение уравнений // Т.Х. Яковлева.- Д.: ЗФТШ МФТИ, 2014.- 20 с.

130. Ясиновый Э.О применении законов арифметических действий в тождественных преобразованиях// Математика в школе, 1953.- № 5. С.21-24.

131. Coad J., Keith J. Curriculum continuity in mathematics: a case study of the transition from primary to secondary school [Электронныйресурс] // University of Southampton Centre for Research in Mathematics Education Working Paper, 1999.- p.1-7. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.539.6864&rep=rep1&type=pdf.

132. Continuity and transitions in learner development [Электронныйресурс] // Europian Commission, 2017.- p. 1-7. URL: https://ec.europa.eu/education/sites/education/files/2017-learner-development-guiding-principles_en.pdf .

133. Ismail S.F.Z.H., Shahrill M., Mundia L. Factors Contributing to Effective Mathematics Teaching in Secondarive Mathematy School in Brunei Darussalam [Электронныйресурс] // Procedia - Social and Behavioral Sciences. 2015.- p. 474-481. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042815024295.

134. Johnstone – Wilder P., Pimm D. Learning to teach Mathematics in the Secondary School a Companion to School Experience. London: Routledge, 1999.- p. 297 URL: ftp://ftp.math.ethz.ch/EMIS/journals/ZDM/zdm001r2.pdf .

135. Seefeldt C., Galper A. Continuity of learning [Электронныйресурс] // Excerpt from Active Experiences for Active Children: Social Studies, 2006.- p. 11-12. URL: https://www.education.com/reference/article/continuity-learning/.

Приложение А

Решение заданий контрольной работы из элективного курса

по теме «Доказательство тождеств различных видов»

1.Докажите тождество: $\dfrac{(a^2-3a-3)^2-16a^4}{a^3-1}+\dfrac{3a}{2-\dfrac{9a-5}{5a-3}}=\dfrac{9}{a-1}$.

Доказательство:

$$\frac{a^4+9a^2+9-6a^3-6a^2+18a-16a^4}{a^3-1}+\frac{3a}{\dfrac{10a-6-9a+5}{5a-3}}=\frac{9}{a-1}$$

$$\frac{-15a^4-6a^3+3a^2+18a+9}{a^3-1}+\frac{3a(5a-3)}{a-1}=\frac{9}{a-1}$$

$$\frac{-15a^4-6a^3+3a^2+18a+9+(15a^2-9a)(a^2+a+1)}{a^3-1}=\frac{9}{a-1}$$

$$\frac{-15a^4-6a^3+3a^2+18a+9+15a^4+15a^3+15a^2-9a^3-9a^2-9a}{a^3-1}=\frac{9}{a-1}$$

$$\frac{9a^2+9a+9}{(a-1)(a^2+a+1)}=\frac{9}{a-1}$$

$\dfrac{9}{a-1}=\dfrac{9}{a-1}$, что и требовалось доказать.

2. Доказать тождество: $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt6}\cdot(5+2\sqrt6)(49-20\sqrt6)}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt8}=1$.

Доказательство:

$$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{3\cdot2}+2}\cdot(3+2\sqrt{3\cdot2}+2)(49-20\sqrt6)}{\sqrt{9\cdot3}-3\sqrt{9\cdot2}+3\sqrt{4\cdot3}-\sqrt{4\cdot2}}=1$$

$$\frac{\sqrt{(\sqrt3-\sqrt2)^2}\cdot(\sqrt3+\sqrt2)^2(49-20\sqrt6)}{3\sqrt3-9\sqrt2+6\sqrt3-2\sqrt2}=1$$

$$\frac{(\sqrt3-\sqrt2)(\sqrt3+\sqrt2)^2(49-20\sqrt6)}{9\sqrt3-11\sqrt2}=1$$

$$\frac{((\sqrt3-\sqrt2)(\sqrt3+\sqrt2))(\sqrt3+\sqrt2)(49-20\sqrt6)}{9\sqrt3-11\sqrt2}=1$$

$$\frac{\left((\sqrt3)^2-(\sqrt2)^2\right)(49\sqrt3-20\sqrt{18}+49\sqrt2-20\sqrt{12})}{9\sqrt3-11\sqrt2}=1$$

$$\frac{(3-2)\left(49\sqrt{3}-20\sqrt{9\cdot 2}+49\sqrt{2}-20\sqrt{4\cdot 3}\right)}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=1$$

$$\frac{49\sqrt{3}-60\sqrt{2}+49\sqrt{2}-40\sqrt{3}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=1$$

$$\frac{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=1$$

$1=1,$ что и требовалось доказать.

3. Доказать, что если $a+b=1,$ то $\dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{a^3-1}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$

Доказательство:

$$\frac{a(a^3-1)-b(b^3-1)}{(b^3-1)(a^3-1)}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{a^4-a-b^4+b}{a^3b^3-a^3-b^3+1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{(a^4-b^4)-(a-b)}{a^3b^3-(a^3+b^3)+1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a-b)}{a^3b^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)+1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{(a-b)(a+b)\left((a+b)^2-2ab\right)-(a-b)}{a^3b^3-(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)+1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{(a-b)\left((a+b)\left((a+b)^2-2ab\right)-1\right)}{a^3b^3-(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)+1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{(a-b)(1-2ab-1)}{a^3b^3-1+3ab+1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{(a-b)(-2ab)}{a^2b^3+3ab}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{(b-a)\cdot 2ab}{ab(a^2b^2 3)}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3},$ что и требовалось доказать.

Приложение Б

Ответы к контрольной работе на констатирующем этапе эксперимента

Вариант 1

1. $(k-6)(k^2+6k+36)$.
2. 16.
3. 84.
4. 3.
5. 2.
6. 0,8.
7. 0,84.
8. 1.
9. 8.
10. 1.
11. 81.
12. 14.

Вариант 2

1. 1,5.
2. 20.
3. $\frac{1}{49}$..
4. 5.
5. 1,5.
6. 33.
7. -13.
8. -24.
9. -0,2.
10. -4.
11. 4.
12. 1.