МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математическое образование»
(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему «**СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ МЕЖДУНАРОДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКИХ ШКОЛЬНИКОВ**»

Студент Е.А. Курьянова ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)
Научный
руководитель Р.А. Утеева ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель программы д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________2019 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________2019 г.

Тольятти 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальностьисследования. В примерных основных образовательных программах основного общего [67] и среднего [68] образования отмечено, что оценка образовательных достижений учащихся осуществляется в ходе: государственной итоговой аттестации выпускников средней школы (11 класс) в форме единого государственного экзамена (ЕГЭ), государственной итоговой аттестации выпускников основной школы (9 класс) в форме основного государственного экзамена (ОГЭ). Так же система оценки образовательных достижений учащихся включает процедуру внутренней оценки – портфолио (работы учащегося, так и отзывы на эти работы: наградные листы, дипломы за участие в олимпиадах).

Под общероссийской системой оценки качества образования понимается совокупность организационных и функциональных структур, норм и правил, обеспечивающих основанную на единой концептуально-методологической базе оценку образовательных достижений обучающихся, эффективности деятельности образовательных учреждений и их систем, качества образовательных программ с учётом запросов основных потребителей образовательных услуг [38].

Согласно общероссийской системы оценки качества образования (ОСОКО) [16, С. 4] в настоящее время в России оценка общеобразовательных достижений учащихся, а в частности математического образования, кроме итоговой аттестации выпускников и олимпиад, проводится и в ходе международных сравнительных исследований (TIMSS, PISA).

Опыт международных исследований показывает, что для объективной оценки качества математического образования российских школьников необходимо ориентироваться не только на результаты, показанные учениками в определенный период времени, но и учитывать динамику изменений результатов нескольких циклов оценки.

Очевидным является тот факт, что оценка качества математического образования российских школьников зависит от уровня разработанности содержательного и методического аспектов для подготовки школьников к международным исследованиям качества математического образования.

В научной и учебно-методической литературе рассмотрены различные направления повышения качества математического образования такие, как разработка методологических основ методики обучения математике (Г.И. Саранцев [83]), дифференцированное обучение (Р.А. Утеева [95], Г.Д. Дорофеев [26]), реализация интеграции и разработка интегрированных курсов (Н.С. Сайдуллаева [82], Ю.М. Колягин [33]), укрупнение дидактических единиц (П.М. Эрдниев [104]), мотивация учебной деятельности (М.А. Родионов [79], Г.И. Саранцев [83).

В исследованиях Ш.А. Амонашвили, Г.Ю. Ксензовой понятие «оценка» чаще всего трактуется как процесс, то есть «оценка» и «оценивание» не разделяются [8]. Л.М. Фридман [100] рассматривает понятие «оценка» как результат, а Е.И. Перовский [63] трактует, что термин «оценка» - единство процесса и результата.

Анализ ранее выполненных диссертационных работ, посвященных международным исследованиям по оценке качества математического образования, показал, что они были рассмотрены в аспекте:

– *оценки качества математического образования учащихся классов с углубленным изучением математики* (Н.В. Тропина, 2000); в работе «раскрыта взаимосвязь различных функций проверки знаний, умений и навыков учащихся в процессе обучения, основанном на уровневой дифференциации, определяются уровни сформированности оценочных умений учащихся. На основе системного изучения исследовательской деятельности представлена классификация исследовательских работ учащихся» [88];

– *социально-педагогических факторов в международных исследованиях в образовании* (Н.А. Найденова, 2007 [55]) в диссертации подчеркивается роль мониторинга качества образования как инструмента, способствующего адекватности оценивания результативности систем образования разных стран. Приведена иерархическая и структурированная классификация факторов на разных уровнях управления (федеральном, региональном, муниципальном, школьном);

– *теории и методики оценки качества математических знаний учащихся средних общеобразовательных учреждений* (Е.М. Юртанова, 2007 [105]), автором рассмотрены знания учащихся как деятельность и ее результат, с выделением действий при использовании технологии мониторинга качества математических знаний;

– формирования *общеучебных умений учащихся основной школы на основе интерактивных компьютерных заданий* (Т.А. Ханнанова, 2010), показан «анализ результатов мониторингов уровня учебных достижений российских школьников на международном уровне и разработана методика совместного использования интерактивных компьютерных заданий и заданий на бумажном носителе по исследуемому предмету» [102];

– *исследования показателей качества образования в Российской Федерации с учетом региональных особенностей* (Т.А. Комкина, 2012 [36]);

– *методических инноваций для системного обновления начального математического образования* (Т.В. Смолеусова, 2017 [86]), в диссертации предложена классификация методических инноваций, систематизированы типы методических инноваций (целевые, содержательные, организационно-деятельностные). Обоснованы и выявлены виды методических инноваций для каждого типа.

Результаты констатирующего эксперимента, анализ международного сравнительного мониторингового исследования качества математического образования TIMSS и международной программы оценки образовательных достижений учащихся PISA, а также мониторинг ежегодной международной математической олимпиады позволили сделать вывод о том, что математическая подготовка учащихся неоднородна. Российская система обучения математике обеспечивает большинство учащихся значительным багажом академических знаний, но не способствует развитию умения выходить за пределы учебных ситуаций, в которых формируются эти знания, применять их в ситуациях, приближенных к реальной жизни.

Таким образом, все вышеизложенное свидетельствует о наличии противоречия между повышением качества математического образования российских школьников и фактическим состоянием уровня разработанности содержательного и методического аспектов для подготовки школьников к международным исследованиям качества математического образования.

Необходимость разрешения этого противоречия определяет актуальность **проблемы диссертационного исследования:** выявлениесодержательно-методических особенностей международных исследований по оценке качества математического образования российских школьников.

Объект исследования: математическое образование российских школьников.

Предмет исследования: содержательно-методические особенности международных исследований по оценке качества математического образования российских школьников.

Цель исследования заключается в выявлении содержательно-методических особенностей международных исследований по оценке качества математического образования российских школьников.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что еслибудут определены содержательно-методические особенности международных исследований и на их основе будет разработана система задач, удовлетворяющая определенным требованиям, то это будет способствовать повышению качества математического образования российских школьников.

Задачи исследования:

1. Раскрыть историю становления школьного математического образования.

2. Определить понятие оценки качества математического образования.

3. Рассмотреть международные исследования TIMSS и PISA.

5. Раскрыть вопрос оценки качества математического образования на международных олимпиадах.

6. Разработать систему задач для подготовки школьников к международному исследованию оценки качества математического образования.

7. Представить методические рекомендации по подготовке к олимпиадам.

8. Разработать методические рекомендации для подготовки к международному исследованию учащихся по теме «Элементы теории вероятностей».

9. Описать результаты педагогического эксперимента.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; констатирующий и поисковый этапы эксперимента по проверке основных положений исследования; экспертиза разработанной системы задач для подготовки школьников к международным исследованиямPISA (математическая грамотность), методических рекомендаций по подготовке к олимпиадам, исследованию TIMSS по предметной области «Анализ данных».

Основные этапы исследования:

1 семестр (2017/18 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы).

2 семестр (2017/18 уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2018/19 уч.г.): разработка методических рекомендаций по решению контекстных задач в рамках международного исследования PISA, программы для подготовки школьников по оценке математической грамотности.

4 семестр (2018/19 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования в том, что в диссертацииивыявлены и обоснованы теоретические и методические основы международных исследований по математике.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что в нем:

– представлена история становления школьного математического образования; дан обзор контрольно-оценочной деятельности в обучении; определено понятие оценки качества математического образования, раскрыты его основные характеристики;

– рассмотрены мониторинговые международные исследования TIMSS и PISA; основные проблемы оценки качества математического образования российских школьников;

– раскрыты содержательные и методические особенности международных исследований по оценке качества математического образования.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны:

– методические рекомендации для решения контекстных задач PISAи TIMSS;

– система задач по оценке математической грамотности в рамках международного исследования PISA;

– методическиерекомендации по подготовке к олимпиадам;

– методические рекомендации для подготовки учащихся к международному исследованию по теме «Элементы теории вероятностей».

Достоверность полученных результатов **и обоснованность** выводов опираются на методологическую базу исследования, современные положения теории и методики обучения математике, анализ педагогической практики и опыт работы.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по решению контекстных задач PISA и TIMSS.

2. Система задач по оценке математической грамотности в рамках международного исследования PISA.

3. Методические рекомендации для подготовки учащихся к международному исследованию по теме «Элементы теории вероятностей».

Апробация результатов исследования осуществлялась путем выступлений на: научно-исследовательском семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры; научной студенческой конференции «Дни науки» Тольяттинского государственного университета (апрель 2018 г. диплом 1-ой степени по направлению секции «Теория и методика обучения математике» на первом этапе, диплом 1-ой степени по направлению секции «Математика» на первом этапе, диплом 3-ей степени по направлению «Математика, физика, IT» на втором этапе, апрель 2019 г. диплом 1-ой степени по направлению секции «Теория и методика обучения математике» на первом этапе); XLIV Самарской областной студенческой научной конференции (г. Самара, апрель 2018 г. диплом 3-ей степени по направлению секции «Математика»); Международной заочной научно-практической конференции студентов и молодых ученых «Математика и современность»

(30 октября – 10 ноября 2017 г., г. Луганск); V Международной научной конференции «Математическое образование: современное состояние и перспективы» (20-21 февраля 2019 г., г. Могилев, Беларусь), IX международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (24-26 апреля 2019, г. Тольятти).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций, системы задач для подготовки школьников к международному исследованию, была осуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик на базе НИЛ «Школа математического развития и образования - 5^{+}» Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе школы МБУ «Школа № 75» г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в 7 публикациях.

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы (110 наименований) и приложений.

Объем работы составляет 141 страницу.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕЖДУНАРОДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

§1. История становления школьного математического образования

Анализ различных источников по истории математики показал, что математическое образование было всегда непрерывно связанно с жизнью. Становление математического образования, в частности школьного, можно разделить на периоды:

1. *Зарождение математического образования от Киевской Руси до конца XVII века.*

I. Эпоха X-XII вв. В эту эпоху параллельно с общим развитием культуры шло и сравнительно быстрое распространение математических сведений. Высокий уровень математических знаний на этот период представлен в математико-хронологическом сочинении Кирика Новгородца «Наставление, как человеку познать счисление лет». Данный труд содержал достаточно грамотные математические расчеты и носил «диссертационный» характер [86, С. 5].

II. Эпоха XII-XIVвв. уровень высокой, на тот момент, математической грамотности локально находился только в Новгороде, так как был не затронут татаро-монгольским нашествием. Данная эпоха характеризуется резким падением математической культуры, духовенство выступают, как агрессор, практически запретив книги по математике.

III. Эпоха XV-XVIIвв. Математическое образование продолжало носить латентный характер. Арифметика и геометрия служили средством решения практических задач. Математические определения и утверждения не точны, доказательства отсутствовали.Согласно Ю.М. Колягину [33], Т.С Поляковой [63] системы образования, в частности математического, не существовало.

2. Рубеж становления математического образования XVII-XIX вв.

Благодаря указам Петра Іпроисходит массовость образования, создаются «Цифирные школы» [86, С. 8]. Как отмечают А.Н. Колмогоров, Ю.М. Колягин [33], Т.С. Полякова [63] эпоха XVII-XIXвеков ознаменовалась реформированием российского математического образования.Как свидетельствуют авторысодержание математического образования носит прикладной характер.Т.С. Поляковой раскрыто, как постепенно в данный период «математика приобретает утилитарный характер» [63, С. 77]. И в результате реформ первой половины XIX века, создается «трехуровневая система математического образования, включавшая начальное (приходские и уездные училища), среднее (гимназии) и высшее математическое образование (университеты)»[63, С. 78].

3. Советская школа XX в.

В труде Ю.М. Колягина[33, С. 105] сказано, что математические знания должны служить некоторой основой для подготовки учащихся к профессиональной деятельности.Абстрактная математика выходит на передний план, практическая составляющая математики в школьном математическом образовании выполняет «иллюстративную роль» [33, С. 105].Период 1918-1931 гг. отмечается как полная хаотизация всей системы образования и падения качества знаний учащихся, так как была осуществлена первая реформа школьного образования, поиск новых форм и методов обучения в «трудовых школах» [38, С. 77]

В статье И.П. Костенко [38, С. 75] отмечается, что оценка качества школьного математического образования с 1937-1970 гг., в приведенных им выборках, процент успеваемости оценивались приближенно.

В работе «История и результаты реформ математического образования России (1931-2009)» [38, С. 75] приведена тенденция изменения качества математических знаний школьников за 78 лет (Рис. 1).

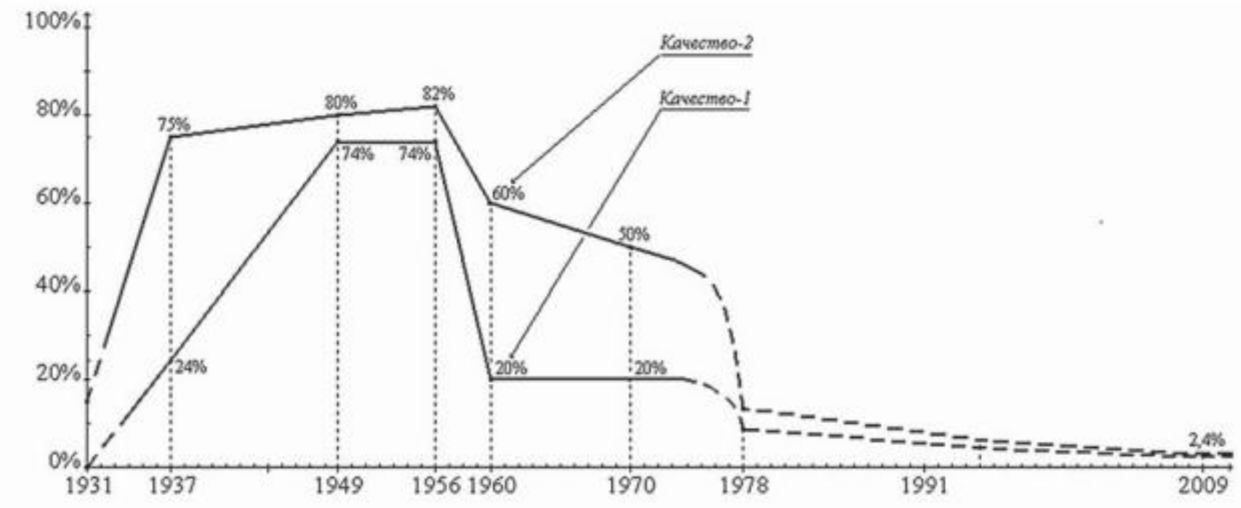


Рис. 1. Оценка качества школьного математического образования
с 1931-2009 гг.

На Рис. 1 качество-1 – показатель процента отличных и хороших отметокв различных выборках; качество-2 – показатель процента успеваемости. Автор [38, С. 77] делит промежуток с 1931-2009 гг. на три части:

1) 1931-1956 гг. – рост качества.

И.П. Костенко делает вывод, что в данный период «проходил под знаком жестко поставленной государством перед школой задачи подготовки для техникумов и для высшей школы вполне грамотных людей, хорошо владеющих математическим аппаратом» [38, С. 77]

2) 1956-1978 гг. – падение качества.

В результате реформы 1970 г. методической системы отечественного образования, программ и учебников Ю.М. Колягин отмечает, что «математические знания выпускников школ страдают формализмом; навыки вычислений, элементарных алгебраических преобразований, решения уравнений фактически отсутствуют» [33, С. 127]. Выпускники школ оказались практически не подготовленными к изучению математики в высших учебных заведениях.

3) 1978-2009 гг. – самые низкие показатели качества.

Продолжается падение качества математического образования. Происходит стабилизация качеств 1 и 2 практически на нулевом уровне.

В работе «История школьного математического образования в России» [86, С. 40] сообщается, что переломный момент в естественнонаучном и математическом образовании стала реформа 1998 года: правительство России снимает с себя ответственность за образование, в частности, финансирование образовательных учреждений.

Несмотря на все трудности и изменения, с которыми пришлось столкнуться школьному естественнонаучному и математическому образованию, сXXвека Россия построила свою собственную школу математического образования. Математическое образование сильно отличалось от европейского, главным образом тем, что проблемами преподавания математики занимались выдающиеся математики и методисты, и основное влияние на их работы оказывала сама математика.

§2. Понятие оценки качества математического образования

Общий интерес к проблеме оценки качества образования и качества интеллектуальных ресурсов на международном уровне определяется ростом значения образования для социально-экономического развития стран.Согласно Федеральному закону об образовании в РФ *качество образования* определяется «как комплексная характеристика общеобразовательной деятельности и подготовки обучающегося, выражающая степень их соответствия федеральным государственным образовательным стандартам, федеральным государственным требованиям и (или) потребностям физического или юридического лица, в интересах которого осуществляется образовательная деятельность, в том числе степень достижения планируемых результатов образовательной программы» [15, С. 85].

То есть *качество образования* может характеризовать как подготовку обучающегося, так и образовательную деятельность, а основой для *оценки качества* будут служить федеральные образовательные стандарты, потребности заказчиков образования.

В проекте концепции развития процедур оценки качества образования РФ на 2015-2021 гг. под *общероссийской системой оценки качества образования(ОСОКО)* понимается «совокупность организационных и функциональных структур, норм и правил, обеспечивающих основанную на единой концептуально-методологической базе оценку образовательных достижений обучающихся, эффективности деятельности образовательных учреждений и их систем, качества образовательных программ с учётом запросов основных потребителей образовательных услуг» [37, С. 4].

Обзор научной и учебно-методической литературы зарубежных (I.V.S. Mullis [108], WuM. [110], GronmoL.S. [105], HutchisonD. [106]) и российских ученых (Ковалева Г.С. [29], Болотов В.А. [13; 14], Борисенков В.П., Пискунова Е.В.) [45, С. 357]свидетельствует о том, что проблема повышения качества математического образования в настоящее время является одной из актуальных проблем.

На данный момент в России сформирована единая система оценки качества образования (ЕСОКО), которая проводит мониторинг знаний учащихся на разных ступенях обучения в школе, выявляет, анализирует и решает проблемы системы образования в разрезе предметов, общеобразовательных учреждений, стране (Рис. 2).

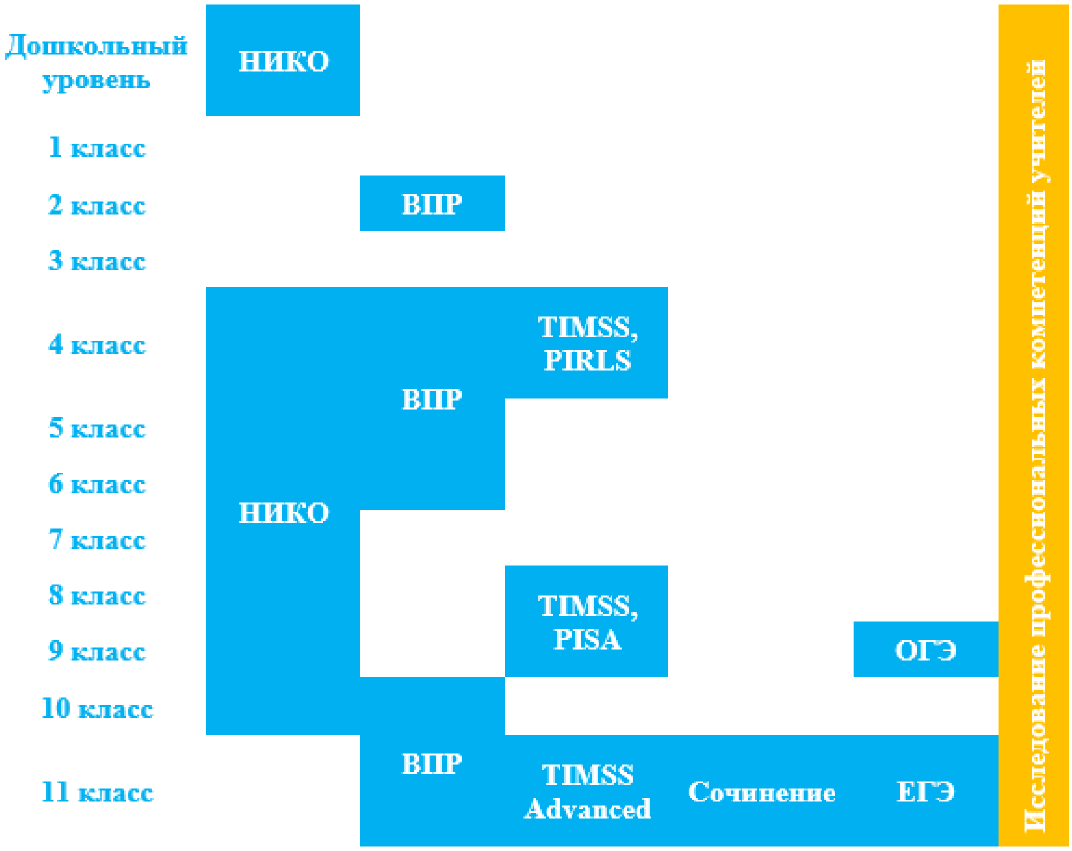


Рис. 2. Процедуры ЕСОКО

В настоящее время оценка качества школьного, в частности математического образования, является многоуровневой и состоит из нескольких процедур:

1. НИКО (Национальное исследование качества образования) - общероссийская программа по оценке качества среднего образования [27, с. 14]. Данное выборочное исследование проводится с 2014 года (организатор Рособрнадзор), не реже двух раз в год, например, оценка качества знаний по математике 5,6 и 7 классы (октябрь 2014 г.), 4 классы (апрель 2015 г.), 5, 7 и 10 классы (октябрь 2019 г.).

2. ВПР (Всероссийские проверочные работы) –массовая оценочная процедура в РФ [26, С. 19]. Предусматривает написание проверочных контрольных работ, которые учащиеся пишут в начале и по завершению учебного года. «В процессе проверки оцениваются все основные элементы подготовки обучающихся по определенным предметам, которые

обеспечивают школьникам возможность успешного продолжения образования и, в определенной мере, отражают их способность выполнять свойственные возрасту социальные роли, взаимодействовать с другими людьми в современном обществе» [26, С. 19]. Благодаря данному исследованию проводится мониторинг результатов введения ФГОС.

3. ОГЭ (Основной государственный экзамен) –основная форма государственной итоговой аттестации по программам основного общего образования выпускников 9 классов (проводится ежегодно с 2014 года).По результатам сдачи экзамена учащийся может продолжить обучение в старшей школе или в учреждениях среднего профессионального образования. Обязательным предметом для сдачи ОГЭ является математика.

4. ЕГЭ (Единый государственный экзамен) – основная форма государственной итоговой аттестации по программам среднего общего образования выпускников 11 классов (проводится ежегодно с 2001 года). С 2015 года экзамен по математике предусматривает два уровня: базовый и профильный уровни.

5. Исследование профессиональных компетенций учителей.

«Исследование проводится с целью создания и апробации инструментария для формирования национальной системы учительского роста и определения (уточнения) подходов к оценке компетенций учителей на основе единых федеральных оценочных материалов» [38, С. 21]. В частности, участниками исследования являются учителя математики.

6. Международные сравнительные исследования качества образования.

Данные исследования помогают понять, насколько конкурентоспособной является российская математическая школа (TIMSS, TIMSSAdvanced, PISA) на данный момент, выявить и сравнить тенденции изменения, происходящие в системе образования различных стран-участниц, проанализировать факторы, позволившие странам-лидерам добиться успеха.

Благодаря данным процедурам и их инструментарию анализируются и выявляются различные факторы, влияющие на результаты работы школы.

В свою очередь образовательное учреждение может провести объективную самодиагностику и получить информацию о качестве знаний учащихся. Участие России в международных сравнительных исследованиях имеет большое значение, главным образом для создания общероссийской единой системы оценки качества образования, а также судить о своем положении в мировой системе образования с учетом международных образовательных стандартов.

§3. Международное исследование TIMSS

Международное исследование качества математического и естественнонаучного образования (TheTrendsinInternationalMathematicsandScienceStudy, TIMSS) – периодическое мониторинговое исследование качества и тенденций развития математического и естественнонаучного направления национальных систем образования [80, С. 4] (Таблица 1).

Международные исследования образовательных достижений учащихся проводятся с 1960 года, благодаря деятельности Международной ассоциации по оценке достижений в сфере образования (TheInternationalAssociationfortheEvaluationofEducationalAchievement, IEA) – независимая организация, учрежденная в 1958 году [95, С. 171].

Российская Академия образования совместно с Министерством образования и науки РФ, Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки проводит международное сравнительное исследование качества математического и естественнонаучного образования TIMSSв России. Участие в данном исследовании, позволяет выявить тенденции развития российского математического и естественнонаучного образования с учетом международных стандартов, а также получить аналитический материал о программах, учебниках, требованиях к учебным достижениям школьников и особенностях учебного процесса в странах мира [15, С. 85]. С помощью Центра оценки качества образования Института стратегии развития образования РАО разрабатывается инструментарий исследования, по формированию репрезентативной выборки учащихся, по обработке и анализу результатов.

Таблица 1

Международное исследование качества математического и естественнонаучного образования

Наименование	Международное исследование качества математического и естественнонаучного образования (TheTrendsinInternationalMathematicsandScienceStudy, TIMSS)
Цель	Сравнительная оценка математической и естественно-научной подготовки учащихся начальной, средней и старшей школы в странах с различными системами образования и выявление факторов, влияющих на уровень этой подготовки.
Участники	4 класс, 8 класс, 11 класс (AdvancedTIMSS).
Направления	- математическое образование; - естественнонаучное образование.
Сроки проведения	Каждые 4 года
Инструментарий	- «тесты достижений; - анкеты (для учащихся, учителей, администрации образовательного учреждения); - методическое обеспечение (руководство по формированию выборки, руководство по проведению тестирования и др.); - программное обеспечение (по отбору классов и учащихся, по вводу данных)» [29, С. 9].
Организаторы	МЭА (IEA – InternationalEnergyAgency, Франция) – Международное энергетическое агентство; Центр обработки данных Международной ассоциации по оценке образовательных достижений (DPCIEA – DataProcessingCenterIEA, Германия); Координация всего исследования осуществляется Международным координационным центром в Бостонском колледже (ISC– InternationalStudyCenter, Boston College, США).

Так,«*целью данного исследования* является сравнительная оценка общеобразовательной подготовки учащихся 4, 8 и 11 классов по математике и естествознанию в странах с различными системами образования и выявление особенностей образовательных систем, определяющих различные уровни достижений учащихся» [110, С. 6].

Данное исследование спланировано таким образом, что его результаты позволяют отслеживать тенденции в математическом образовании стран-участниц каждые 4 года, когда учащиеся 4 классов становятся учащимися 8 класса. Для выпускных 11 классов с углубленным изучением математики и естествознания проходит «расширенное» исследование (TIMSSAdvanced).Таким образом, осуществляется мониторинг учебных достижений учащихся начальной, основной и старшей школы, а также изменений, происходящих в математическом и естественнонаучном образовании при переходе из начальной в основную школу.

Во всех странах отбор школ должен был проведён вероятностным методом из списка всех школ страны с учетом числа учащихся выбранной параллели в данной школе. Так как отсутствует единый список школ страны, формирование выборки школ в России для участия в исследовании, включало дополнительный этап – отбор регионов. Выбор регионов проводился в пропорции к их размеру (учитывалось число школ и учащихся в данном регионе). Во всех регионах, вошедших в выборку страны, составлялся полный список школ региона с необходимой информацией, и на этой основе в Центре оценки качества образования ИСМО РАО формировалась национальная выборка школ и учащихся, которая затем утверждалась Международным координационным центром [13, С. 55]. Известно, что «выборка считается представительной, если коэффициент участия составляет не менее 85%, а исключения разного уровня не превышают 5%:

– исключения на национальном уровне (специальные коррекционные школы);

– исключения на уровне школ (учащиеся с функциональными нарушениями, с отклонениями в развитии, учащиеся, для которых русский язык не является родным (обучались на русском языке менее 1 года)» [14, с. 56].

Этапы формирования выборки:

1. «Выборка регионов.

2. Работа с базами образовательных организаций регионов (подготовка баз к выборке образовательных организаций).

3. Формирование выборки образовательных организаций:

– формирование выборки исследования TIMSSв 4 и 8 классах;

– утверждение выборок в Международном координационном центре исследования TIMSS.

4. Связь с образовательными организациями (получение списков классов и учащихся).

5. Выбор участников исследования (выборка классов, учащихся).

6. Ввод информации об участниках исследования.

7. Подготовка документации для проведения тестирования в отобранных образовательных организациях» [80, С. 14].

Так, «Инструментарий международного исследования TIMSS включает:

– тесты достижений;

– анкеты (для учащихся, учителей, администрации образовательного учреждения);

– методическое обеспечение (руководство по формированию выборки, руководство по проведению тестирования и др.);

– программное обеспечение (по отбору классов и учащихся, по вводу данных)» [29, С. 9].

Исследование проводится циклично, на данный момент прошел седьмой цикл исследования (1995 год, 1999 год, 2003 год, 2007 год, 2011 год, 2015 год, 2019 год). С 1995 года по 2015 год каждая волна исследования проходила в бумажном формате (paper-basedassessment, PBA). Каждому учащемуся предоставлялась тетрадь с заданиями, в которой выполнялась работа по математике и естественнонаучным дисциплинам (физика, химия, биология, география) (Рис. 3).

С 2019 года тестирование TIMSSизменяет технологию проведения, происходит переход на электронную платформу, формат участия – компьютерный (computer-basedassessment, CBA (Рис. 4) [23].

Для сбора информации о состоянии факторов, влияющих на результаты обучения, каждый цикл исследования проводится анкетирование национальных экспертов, учащихся, учителей, а также администрации образовательных учреждений, в которых проводится исследование.

Рис. 3. Варианты тетрадей TIMSS-2015 для 4, 8 и 11 классов.

Рис.4. Компьютерный формат тестирования TIMSS-2019.
Приветственный экран для прохождения теста.

Для национальных экспертов были разработаны 4 анкеты о содержании и организации математического и естественнонаучного образования в начальной и основной школе (о программах, стандартах, учебниках, системе оценивания образовательных достижений). Для учащихся составлены анкеты, касающиеся их отношения к математике и естествознанию, внеклассных мероприятий, а также есть вопросы о своей семье. Для учителей были составлены вопросы, с помощью которых собиралась информация об особенностях преподавания математики и естествознания в 4 и 8 классах в отобранных для исследования школах, о профессиональной подготовке учителей и их педагогических установках. Анкеты для администрации имеют вопросы, связанные с обеспечением учебного процесса в их образовательных учреждениях и другими особенностями школьной жизни [15, с. 16].

Каждый вариант тестирования для 4 и 8 классов состоит из двух частей «Математика» и «Естествознание». Для 11 классов первый блок «Математика (профильный уровень)», второй «Физика (профильный уровень)» (Таблица 2).

Таблица 2

Тестирование TIMSS

Направления	**Общие характеристики**	**Классы**		
		4 класс	**8 класс**	**11 класс**
Математика	Время написания	36 мин.	45 мин	90 мин.
	Количество заданий	19	25	26
Естествознание	Время написания	36 мин.	45 мин.	90 мин.
	Количество заданий	21	31	28

В данной статье [43, С. 171] нами представлен анализ содержания тестов TIMSS для учащихся средней и старшей школы, выявлены предметные области для каждого из исследуемых классов (Таблица 3).

В 11 профильных классах, в отличии от содержательных областей тестирования для 4 и 8 классов, выделены только три предметных области: «Алгебра», «Геометрия» «Элементы математического анализа». Области «Анализ данных» нет, а содержательная область «Числа» входит в алгебру.

В исследовании TIMSS было выделяют четыре уровня математической подготовки 4 и 8 классов. Описание данных уровней было составлено разработчиками международных тестов совместно с экспертами стран-участниц. Так, на низких уровнях виды математической деятельностиявляются составными частями деятельности учащихся 4 и 8 классов, присущей более высокому по сравнению с ними уровню [107] (Таблица 4).

Таблица 3

Предметные области тестирования TIMSS

4 класс	8 класс	11 класс
Предметные области		
Алгебра		
Текстовые задачи. Приближенные вычисления. Деление с остатком. Арифметические действия. Числовые последовательности.	Алгебраические выражения. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств. Числовые последовательности. Функции. Зависимости.	Числовые и буквенные выражения. Делимость многочленов. Основная теорема алгебры. Тригонометрия. Предел функции. Непрерывность функции. Асимптоты.Производная функции. Уравнение касательной к графику функции. Первообразная функции. Формула Ньютона-Лейбница. Решение рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических уравнений и неравенств.
Геометрия		
Геометрические фигуры. Геометрические величины и их измерения. Симметрия. Оси симметрии. Углы. Пространственные отношения.	Прямые и углы. Геометрические фигуры на плоскости. Тела в пространстве Равенство и подобие. Местоположение и взаимное расположение фигур. Симметрия и движения в пространстве и на плоскости. Свойства и единицы измерения. Инструменты, техника измерения.	Геометрия на плоскости. Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Объемы тел и площади их поверхностей. Координаты и векторы.
Анализ данных		**Элементы математического анализа**
Сбор и организация данных. Диаграммы: столбчатые и круговые. Интерпретация данных.	Сбор и организация данных. Представление данных. Интерпретация данных. Вероятность и статистика.	Табличное и графическое представление данных. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник

		Паскаля. Элементарные и сложные события. Вероятность и статистическая частота наступления события.

Продолжение Таблицы 3

Числа		
Натуральные числа. Четность числа. Делимость чисел. Многозначные числа.	Целые числа. Обыкновенные и десятичные дроби. Свойства чисел. Отношения, пропорции и проценты.	Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами в разной форме записи. Комплексно сопряженные числа. Возведение в натуральную степень (формула Муавра).

Таблица 4

Уровни достижения математической подготовки

4 класс	8 класс
Уровень подготовки	
Высший – 1000 – 625 баллов	
Учащиеся могут применять свои знания в различных достаточно сложных ситуациях, аргументировать свои действия; решать разнообразные многошаговые текстовые задачи, включающие прямо пропорциональные величины; показать достаточно глубокое понимание обыкновенных и десятичных дробей. Учащиеся могут в разнообразных ситуациях применять геометрические знания о некоторых двумерных и трехмерных фигурах. Ученики, достигшие высшего уровня, могут сделать вывод на основе статистических данных и обосновать его.	Учащиеся могут проводить рассуждения с имеющейся информацией, делать выводы, обобщения. Учащиеся могут: решать разнообразные задачи, связанные с применением обыкновенных дробей, процентов и пропорций, обосновывать свои выводы; интерпретировать сделанное обобщение на математический язык, составить модели предложенных ситуаций; решать разнообразные проблемы, с помощью уравнений, применением необходимых формул,графиков функций; приводят рассуждения, связанные со свойствами геометрических фигур, а также с данными, представленными в различных источниках или в непривычных формах, для решения многошаговых задач.
Высокий -624 – 550баллов	
Учащиеся могут применять свои знания при решении задач:решать текстовые задачи, требующие выполнения действий с	Учащиеся могут применять свои знания в различных, достаточно сложных ситуациях. Учащиеся используют для решения

натуральными числами; использовать различные алгоритмы письменного сложения, вычитания, умножения и деления многозначных чисел; способы проверки правильности вычислений (прикидка и оценка суммы, разности, произведения, частного). Учащиеся могут продолжить последовательность, чтобы найти ее последующий член.	задач информацию из нескольких источников, которая может включать, например, разные виды чисел. Соотносят между собой обыкновенные, десятичные дроби и проценты. Имеют базовые знания алгоритмов действий с алгебраическими выражениями.

Продолжение таблицы 4

Демонстрируют понимание симметрии и некоторых геометрических свойств. Учащиеся интерпретируют и используют информацию, представленную на различных графиках, диаграммах, в частотных таблицах для завершения построения, например, столбчатой диаграммы.	Для решения задач предметной области «Геометрия» используют свойства прямых, углов, треугольников, четырехугольников и прямоугольной четырехугольной призмы (прямоугольного параллелепипеда). Анализируют данные, представленные на разнообразных графиках.
Средний –549 - 475баллов	
Учащиеся могут применить базовые математические знания в простых четко определенных ситуациях. Учащиеся демонстрируют понимание натуральных чисел и некоторое понимание обыкновенных дробей. Учащиеся моделируют трехмерный объект на основе его двумерного изображения на плоскости. Интерпретируют информацию на столбчатых диаграммах, различных графиках и таблицах.	Учащиеся могут применять базовые математические знания в разнообразных ситуациях.Решать задачи, содержащие десятичные и обыкновенные дроби, пропорции и проценты. Осуществлять в выражениях и формулах числовые подстановки и выполнять соответствующие вычисления, осуществлять подстановку одного выражения в другое; выражать из формул одну переменную через остальные. Моделируют двумерное изображение на плоскости с соответствующим трехмерным геометрическим объектом. Учащиеся читают, интерпретируют и строят графики и таблицы; Имеют базовые представления о вероятности.
Низкий – 474 - 400баллов	
Учащиеся имеют некоторые базовые математические знания.Выполняют сложение, вычитание, умножение, деление натуральных чисел в пределах тысячи. Распознают на чертежах, моделях основные пространственные тела, имеют некоторое представление о параллельных и перпендикулярных прямых. Они могут прочитать информацию и завершить построение простых столбчатых диаграмм и таблиц.	Учащиеся имеют некоторые знания о натуральных числах, десятичных дробях и действиях с ними, некоторых графиках и диаграммах.Содержание заданий этого уровня свидетельствует о том, что у учащихся имеется элементарное понимание натуральных чисел и десятичных дробей. Они могут установить соответствие информации, представленной в таблице, столбчатой и круговой диаграмме читать простые линейные графики.

Международное исследование TIMSSоценивает образовательные достижения учащихся в познавательных областях (Таблица 5). В зависимости от класса и приоритетной на момент проверки познавательной области, процентное соотношение заданий в тестировании может изменятся.

Таблица 5

Познавательные областиTIMSS

	Процентное соотношение заданий в TIMSS		**Характеристика результатов обучающихся**
	4 класс	**8 класс**	
Область: **Знание**	40 %	30 %	- знает, что такое математическое доказательство; примеры доказательств; методы доказательств; - знает, что такое алгоритм; примеры алгоритмов; - знает, как используются математические формулы, уравнения и неравенства; примеры их применения для решения задач; - знает, как различные функции могут описывать реальные зависимости; приводить примеры такого описания; - знает, как потребности реальной жизни привели математическую науку к необходимости расширения понятия числа; примеры числовых систем; - знает вероятностный характер закономерностей окружающего мира; примеры статистических закономерностей и вывод; - знает как из потребностей практических расчетов возникла геометрия; примеры геометрических объектов, утверждений о них (аксиомы, свойства, признаки, теоремы, леммы);
Область: **Применение**	40 %	45%	- интерпретирует текстовый материал, схемы, графики, диаграммы на математический язык; - составляет формулы, выполняет расчеты по формулам, выражающие зависимости между реальными величинами; - моделирует практические ситуации и исследует построенную модель с использованием математического аппарата; - решает задачи, опираясь на изученные свойства фигур и отношений между ними, применяя дополнительные построения, алгебраический и тригонометрический аппарат, идеи симметрии; - решает практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин (используя при необходимости технические средства);

Область: **Рассуждение**	20 %	25%	- описывает зависимости между физическими величинами соответствующими формулами при исследовании практических ситуаций; - выстраивает аргументацию при доказательстве; - распознает логически некорректные рассуждения; - решает практические задачи в повседневной деятельности с использованием действий с числами, процентов, длин, площадей, объемов, времени, скорости; - решает учебные и практические задачи, требующие систематического перебора вариантов; - сравнивает шансы наступления случайных событий, оценивает вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставляет модели с реальной ситуацией.

Ниже приведем примеры заданий 8 класса тестирования TIMSS, иллюстрирующие различные области содержания, уровни достижений.

Задание 1.«*Содержание:* Числа

Вид деятельности: Знание

Уровень достижений: Низкий» [76, С. 4].

Чему равно 3^3?
A) 6
B) 9
C) 27
D) 33

Ответ: C) 27.

В отчете Федеральной службы по надзору в сфере образования и наукидан комментарий, что данное задание базового уровня для российских восьмиклассников. Проверялось умение вычислять степень целого числа. Данное умение начинает формироваться в начальной школе, является одним из важных для продолжения обучения в старших классах. Не владеют этим умением, вместо того, чтобы применить алгоритм возведения в степень восьмиклассники умножали показатель степени на данное число - 15% учащихся. Справились с данным заданием явное большинство - 84% учеников, результат оказался ниже лидирующих стран, но выше среднего результата по всем странам-участницам [76, С. 5].

Задание 2.«*Содержание:*Анализ данных

Вид деятельности: Знание

Уровень достижений: Средний

На графике показана самая высокая и самая низкая температура в каждый из дней недели в одном из городов в Зедландии. В какой день разность между самой высокой и самой низкой температурой была равна 10°С?

A) в среду
B) в четверг
C) в пятницу
D) в субботу» [73, С. 5].

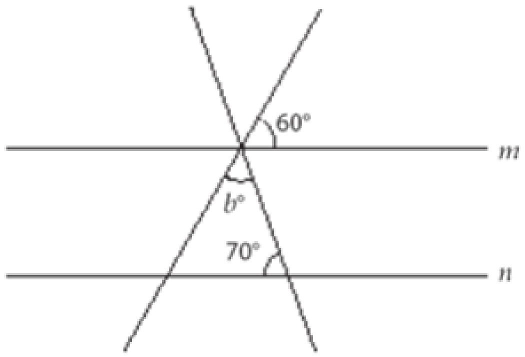
Ответ: B) в четверг.

В данном задании необходимо было приближенно оценить разность между высокой и низкой температурой в каждый день недели и выяснить, когда разность равна 10°С, то есть сопоставить зависимость между качественной и количественной величиной (температура - день недели). В комментарии эксперта сказано, что большинство учащихся справились с заданием (72%), показав овладение проверяемым умением. Оставшийся процент восьмиклассников (25%), скорее всего, были не внимательны при чтении графика температуры. Результат 8-х классов России оказался ниже лидирующих стран, но выше среднего значения всех стран, участвующих в исследовании.

Задание 3. [76]. *Содержание:* «Геометрия»

Вид деятельности: «Рассуждение»

Уровень достижений: Высокий



Прямые m и n параллельны. Чему равна величина угла b?

Ответ: __________.

Ответ: $\angle b = 50^o$.

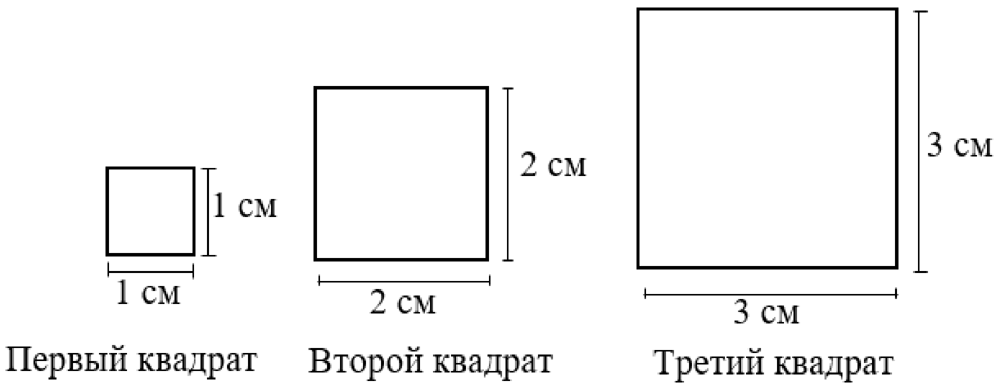
TIMSS относят данную задачу к высокому уровню сложности, так как при ее решении потребуется не менее двух известных фактов. Однако, в учебниках по геометрии для общеобразовательных учреждений, например, в учебнике Л.С. Атанасяна, данный тип задач относится к репродуктивному уровню учебной деятельности. Решение может быть основано на свойствах углов, образованных при параллельных прямых и секущей. Искомый угол является смежным с углом, равным сумме углов 60^o и 70^o. Тогда угол $\angle b = 180^o - \ 60^o + 70^o$, $\angle b = 50^o$ [95, С. 172].

Задание 4. *Содержание:* «Алгебра».

Вид деятельности: «Применение».

Уровень достижений: Высший.

«Дима составляет последовательность квадратов. Каждый раз он увеличивает длину стороны квадрата на одно и то же число. Ниже изображены три первых квадрата в этой последовательности.



А. Какова будет площадь пятого квадрата?» [72].

A. $10\ см^2$ B. $16\ см^2$ C. $25\ см^2$ D. $100\ см^2$

B. Какова будет площадь квадрата с номером n?

$S_n =$ __________________________.

Ответ: C. $25\ см^2$; $S_n = n^2$.

Проверяется умение распознать на рисунке закономерность составления последовательности квадратов и применить эту закономерность для составления формулы -члена. Нетипичное задание для российских учебников по алгебре. Обычно дается некоторая числовая последовательность, для которой необходимо определить закономерность для составления -члена. В данном случае, закономерность представлена в виде геометрических фигур, все необходимые данные нужно извлечь из построений, распознать закономерность и составить формулу для вычисления квадрата с номером n. Поэтому для учащихся 8 класса данное задание можно отнести к высшему уровню сложности.

Оценка результатов выполнения тестирования по каждой стране происходит с помощью моделей тестирования IRT(Item Response Theory – «Математико-статистическая теория оценки латентных параметров заданий теста и уровня подготовленности испытуемых» [3, С. 3]). По каждому из двух направлений (математическое образование или естественнонаучное образование) каждому участнику присваивается балл по международной 1000-бальной шкале. В 1995 году была разработана международная шкала, среднее значение которой приняли за 500 баллов с учетом среднего значения баллов всех стран, принимающих участие в исследовании. Результаты всех последующих циклов исследования сопоставляются с этой шкалой, что позволяет сравнивать результаты и выявлять тенденции в их изменении.

В данной работе мы проследили результаты международного исследования TIMSSпо оценке качества математического образования 8 классов с 1995 - 2015 год [69; 70; 71; 72; 73; 76] (Рис. 5).

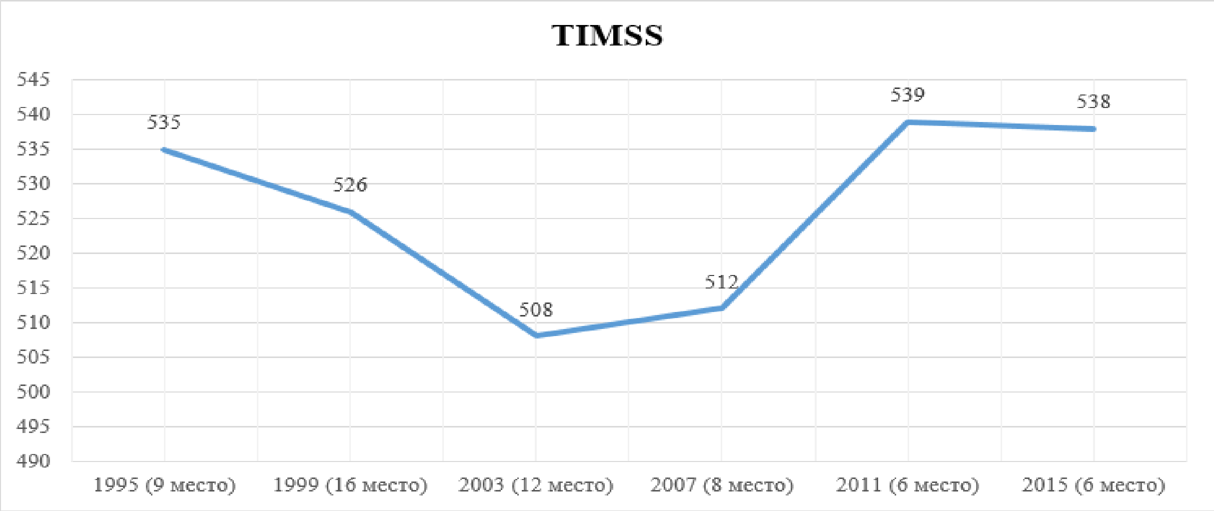


Рис. 5. Результаты российских школьников 8 класса по математической подготовке с 1995-2015 гг.

На протяжении всех циклов исследования TIMSSРоссия сохранила лидирующие позиции, приведем результаты анализа данных сравнительной оценки математической подготовки учащихся начальной (4 класс – 7 место, 564 балла), средней (8 класс – 6 место, 538 баллов) и старшей школы (11 класс углубленный курс – 1 место, 540 баллов; 11 класс – 4 место, 485 баллов) (Рис. 6-7).

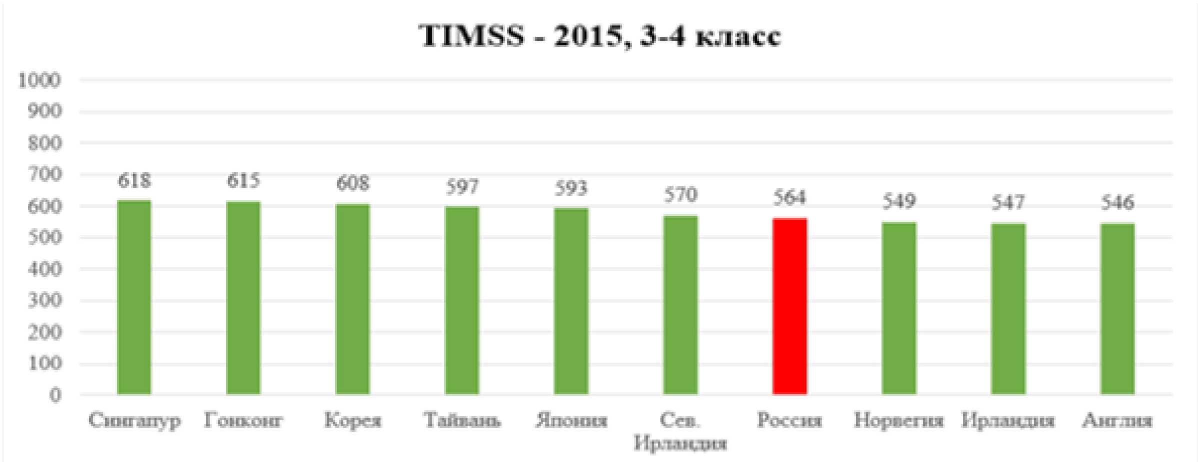
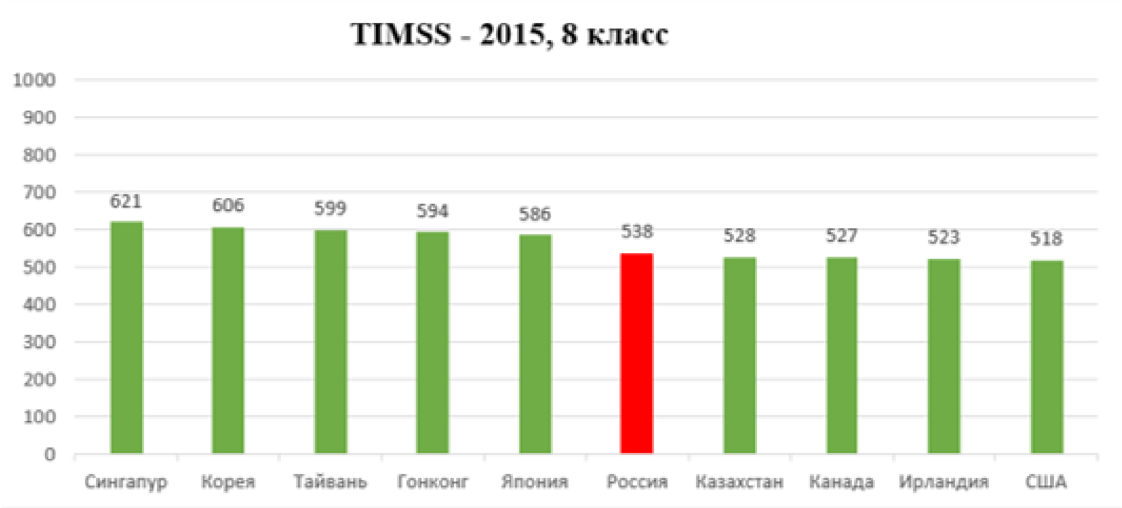


Рис. 5. Результаты TIMSS-2015(математическое направление)3-4 классы



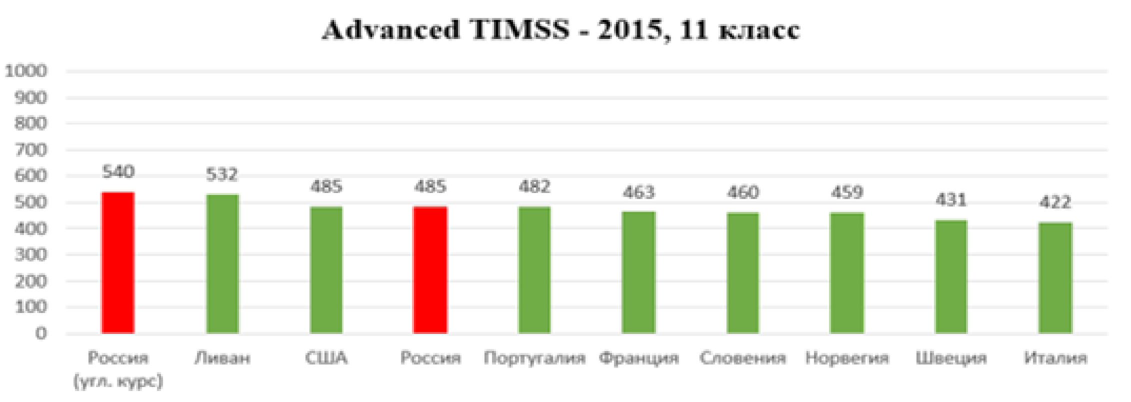


Рис. 6. Результаты TIMSS-2015 (математическое направление) 8, 11 классы

В исследованиях 8 класса по математике TIMSS-2015 Россия в международной шкале заняла 6 место [76]. Результаты лидирующей группы стран значительно превышают результаты российских учащихся. Высший уровень математической подготовки в России продемонстрировали 14% учеников 8 класса и 32% высокий уровень. Для сравнения, в лидирующих странах высокий уровень подготовки по математике показали от 67% школьников в Японии (5 место) до 81% в Сингапуре (1 место). Базовый уровень, то есть способность применять математические знания в простых ситуациях, − 32% школьников. Низкий уровень – 17% восьмиклассников и 5% учеников не отвечают международному стандарту низкого уровня [42, С. 172].

Так как в исследовании TIMSSразработка задачного материала осуществляется на основе содержания программы по математике, а значит точно ориентированы на предметную область, задания имеют ясную математическую структуру, так знакомую из учебников по математике, поэтому российские учащиеся успешно справляются с данным тестированием.

§4. Международное исследование PISA

Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся (ProgrammeforInternationalStudentAssessment, PISA) – мониторинговое исследование качества общего образования, оценивающие образовательные достижения учащихся 15-летнего возраста [109] (Таблица 6).

В 1997 году при Организации экономического сотрудничества и развития (ОСЭР) была разработана международная программа по оценке образовательных достижений учащихсяпотрем основным направлениям: грамотность чтения, математическая грамотность, естественнонаучнаяграмотность. Впервые в России тестирование было проведено в 2000 году[95, С. 172]. «При участии Министерства образования и науки РФ, Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки исследование PISAпроводится Центром оценки качества образования Института содержания и методов обучения Российской академии образования» [109].

Таблица 6

Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся

Наименование	Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся (ProgrammeforInternationalStudentAssessment, PISA).
Цель	Оценка образовательных достижений учащихся 15-летнего возраста.
Участники	Учащиеся 15 лет (8-10 класс).
Направления	- грамотность чтения; - математическая грамотность; - естественнонаучная грамотность; - компетентность в решении проблем.

Сроки проведения	Каждые 3 года
Инструментарий	- тесты достижений (различный формат участия); - анкеты (для учащихся, учителей, администрации образовательного учреждения); - единое методическое обеспечение для всех стран участниц (руководство по проведению тестирования, формированию выборки и др.); - программное обеспечение (тестирования, по отбору учащихся, по вводу данных).
Организаторы	ОСЭР (OECD – Organisation for Economic Co-operation and Development, Франция) – Организация экономического сотрудничества и развития.

С 2015 года тестирование PISA предусматривало два формата участия - бумажный (paper-basedassessment, PBA) и компьютерный (computer-basedassessment, CBA) продолжительностью 2 часа [95, С. 171]. Полный переход на компьютерный формат осуществлен в 2018 году. Переход на формат CBA значительно упрощает организацию проведения, обработку данных, а также позволяет оценить знания по дополнительным направлениям (финансовая грамотность и др.).

В каждом цикле тестирования выбирается приоритетный раздел: доминирующему направлению будут соответствовать две трети заданий. Например, в PISA-2012 большая часть заданий была посвящена математике[44, С. 251]. Ключевым направлением оценки образовательных достижений в 2018 году стала грамотность чтения и понимая текста. Рассмотрим содержательные области, виды деятельности учащихся и контекст задач по оценке математической грамотности PISA-2018 (Таблица 7).

Таблица 7

PISA-2018 «Математическая грамотность»

Область оценки: **Математика**		
Объект оценки	**Содержание**	**Деятельность**
«Математическая грамотность – способность человека определять и понимать роль математики в мире, в котором он	Содержательные области математики: - «Количество»; - «Пространство и форма»; - «Изменения и	Виды деятельности: - Формулировать ситуации математически (*formulatingsituationsmathematically*); - Применять математические факты (*employingmathematics*);

живет, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражда-нину» [95, С. 171].	отношения»; - «Неопределенность и данные» [95, С. 171].	- Интерпретировать (*interpretingmathematics*) [110, с. 7].

Международными экспертами PISA определены два основополагающих принципа понятия «Математическая грамотность».

Первый -«Фундаментальные математические идеи» - затрагивает такие предметные области как:

- «Изменения и отношения» (задачи на зависимость между переменными, задачи на вычисление алгебраических выражений, на установление зависимости, решение уравнений, использование понятие функции);

- «Количество» (оперирование понятиями натурального числа, обыкновенные и десятичные дроби, целые числа, отношения, пропорции и проценты);

- «Пространство и форма» (геометрические измерения, расположение и движение фигур, пространственная визуализация);

«Неопределенность и данные» (интерпретация данных, организацию и представление данных, задачи по теории вероятности, научное прогнозирование).

Второй принцип - «Математическая компетентность». Под компетентностью понимается способность учащихся применять полученные в школе знания и умения в реальных жизненных ситуациях [31, С. 12].

M. Wuвыделяет три уровня навыков [110, с. 11]:

– «воспроизведение» (применение и распознавание математических объектов);

– «установление связей» (интерпретация решений и установление связей между разными формами информации);

– «рассуждение» (поиск закономерностей и решение комплексных задач).

L.S. Gronmo и D. Hutchison в статьях [105; 106] определяют виды деятельности при решении учащимися задач из исследования PISA:

– формулировать ситуации математически (*formulatingsituationsmathematically*) включает способность распознавать и выявлять возможности использовать математику, принять имеющуюся ситуацию и трансформировать ее в форму, поддающуюся математической обработке, создавать математическую модель, отражающую особенности описанной ситуации;

– применять математические факты (*employingmathematics*) включает способность применять математические понятия, факты, процедуры, рассуждения и инструменты для получения решения или выводов;

– интерпретировать (*interpretingmathematics*) включает способность размышлять над математическим решением или результатами, интерпретировать и оценивать их в контексте реальной проблемы.

Один из аспектов математической грамотности – это применение математики в различных *ситуациях*, которые связаны с личной и школьной жизнью, обучением и научной деятельностью, общественной жизнью.

Задания по математике распределены по 6 уровням сложности, каждому из которых соответствует определенный показатель компетенций обучающегося [79]. Один блок заданий может содержать вопросы различных уровней сложности (Таблица 8).

Приведем примеры заданий из различных предметных областей математической грамотности и уровней сложности.

Задача 1.

«Содержание: Пространство и форма

Вид деятельности: Формулировать (создать модель решения).

Уровень сложности: 6 уровень.

ВРАЩАЮЩАЯСЯ ДВЕРЬ

Вращающаяся дверь имеет три стеклянных перегородки, которые вместе с этой дверью вращаются внутри кругового пространства. Внутренний диаметр этого пространства 2 метра (200 сантиметров). Три дверные перегородки делят пространство на три равных сектора.

Ниже на плане (Рис. 8) показаны дверные перегородки в трёх разных позициях, если смотреть на них сверху.

Два дверных проёма (пунктирные дуги на рисунке) имеют одинаковый размер.

Таблица 8

Уровни достижения математической грамотности

Уровень	Минимальный балл	Уровни достижения учащихся
6	669	Участники исследования, достигшие 6 уровня, обладают способностями математического мышления и рассуждения; находятразличныеспособы решения проблемной ситуации с применением математического аппарата; формулируют и аргументируют свое решение, доказательство, выводы; объясняют причину выбора правильного ответа.
5	607	На данном уровне учащиеся могут составлять математические модели сложных ситуаций, выбирать, сравнивать и оценивать соответствующие стратегии решения, аргументировать свою точку зрения.
4	544	Участники умеют обобщать признаки, факты и аргументы, основанные на интерпретации и рассуждении представленных математических ситуаций; легко работать с конкретными моделями для каждой предложенной ситуации; интегрировать разные задания,

		включая символические обозначения и направлять их в аспекты реальной проблемной ситуации.
3	482	Могут четко выполнять описанные процедуры, в том числе те, которые требуют последовательного решения. Математические задачи данного уровня включают достаточно простые модели и стратегии решения задач. Участники умеют работать с процентами, дробями, десятичными числами и пропорциональными отношениями.
2	420	«Участники выбирают и применяют соответствующие математические знания, если решение задачи состоит из небольшого числа шагов. Такие задания требуют интерпретации и распознавания ситуации посредством извлечения необходимой информации из одного источника. Учащиеся на этом уровне могут использовать основные алгоритмы, формулы для решения задач» [32, С. 5].
1	357	«Учащиеся обычно могут выполнить только какой-нибудь один вид деятельности, состоящий в применении базовых математических фактов или методов, или выполняют несложные вычисления. Они могут распознать информацию, представленную в форме знакомой диаграммы или знакомого текста, в котором явно и просто сформулирована или легко определяется математическая задача. Решение предполагает применение стандартного способа, состоящего из одного шага» [30].

Если эти проёмы слишком широкие, то вращающиеся перегородки не смогут закрыть открытое пространство, и воздух сможет свободно поступать через вход и выход.

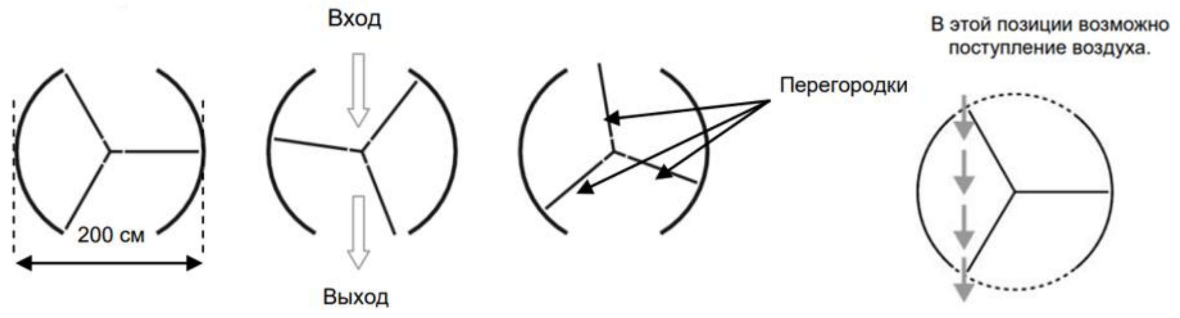


Рис. 7. Дверные перегородки

Это приведёт либо к нежелательной потере тепла, либо к его увеличению. Этот случай показан на рисунке справа. Какую наибольшую длину дуги в сантиметрах может иметь каждый дверной проём, чтобы воздух никогда не мог свободно поступать через вход и выход?» [95, С. 54]

Решение.*Модель вращающийся двери* – окружность, разделенная 3 радиусами на 3 равные части.

Например, можно рассуждать следующим образом:

Окружность двери разделена на 3 равных сектора.

Значит, 2 сектора, закрытые стеклянными стенками, занимают$\frac{2}{3}$ окружности, а на 2 дверных проёма остается $\frac{1}{3}$ (Рис. 9).Из соображений симметрии двух проёмов каждый из них не может быть больше половины трети ($\frac{1}{6}$ части) окружности двери.

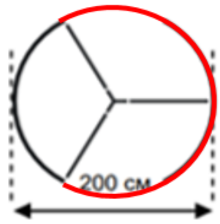


Рис. 8. Дверь, разделенная на 3 равныхсектора

Для решения проблемы нужно вспомнить известную учащимся формулу длины окружности: $l = 2\pi r$.

Необходимо знать длину радиуса окружности двери.

В условии сказано, что диаметр двери равен 200 см, значит, радиус равен 100 см.

Длина окружности: $l = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 100 = 628$;

$628 : 6 \approx 104{,}7$ (см) длина искомой дуги.

Ответ: 104,7 см.

В задании представляется реальная ситуация, и чтобы вычислить длину искомой дуги, необходимо интерпретировать ее геометрическую модель. Необходимо знать формулу длины окружности. Ответ считается верным: $103; 105$, или $\frac{100\pi}{3}$, а также 100, если значение $\pi \approx 3$.Подобных задач нет в российских учебниках. Сложность выполнения данной задачи для школьников состоит в большом количестве информации, представленной в различной форме. Понятия окружности в тексте не упоминается, а значит учащимся необходимо увидеть, что именно она является моделью вращающейся двери.

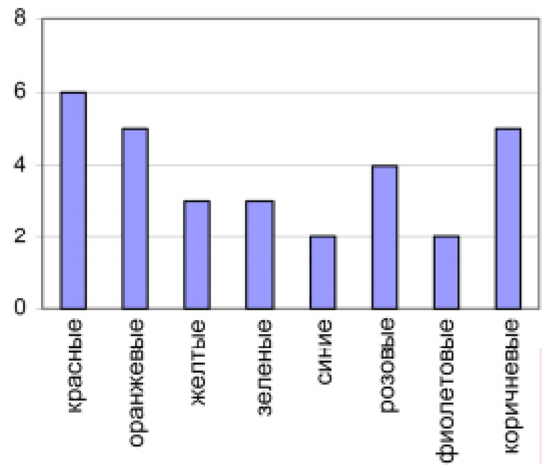
Задача 2.Содержание: Неопределенность и данные

Вид деятельности:«Интерпретировать»

Уровень сложности:3 уровень

«ЦВЕТНЫЕ КОНФЕТЫ

Мама Роберта разрешила ему вынуть из коробки одну конфету, не заглядывая в коробку. Число конфет различного цвета в коробке показано на диаграмме.



Какова вероятность того, что Роберт вынет красную конфету?» [61, С. 23]

A. 10% B. 20% C. 25% D. 50%

Решение:

Найдём число конфет в коробке по данным, приведённым на диаграмме:

$6 + 5 + 3 + 3 + 2 + 4 + 2 + 5 = 30$ конфет и из них 6 красных. Вероятность вынуть красную конфету равна отношению числа красных конфет к общему числу конфет:

$\frac{6}{30} = 0{,}2 = 20\%.$

Ответ: B.

Данная задача требует простых математических действий. Необходимые данные представлены на столбчатой диаграмме. Пользуясь определением вероятности и извлеченными данными из данной модели ситуации (столбчатая диаграмма) участники исследования находят вероятность события. Данное задание проверяет также умение работать с процентами, дробями, десятичной записью числа.

Задание 3 [61].Содержание: Количество

Вид деятельности:«Применять»

Уровень сложности:1 уровень (вопрос 1, 2), 4 уровень (вопрос 3).

КОНВЕРТАЦИЯ

Софус Ли из Норвегиипланировал отправится на математическую конференцию в Париж. Ему необходимо конвертировать некоторую сумму норвежских крон (KR) на евро (EUR).

ВОПРОС 1.

В обменном пункте Софус Ли узнал, что курс между норвежской кроной и евро был: $1\ KR = 7{,}32\ EUR$.

Софус Ли конвертировал 5000 норвежских крон на евро по данному курсу. Сколько евро получил Софус Ли?

Решение.

Одна норвежская крона обменивалась на $7{,}32\ EUR$. Следовательно, за $5000\ KR$Софус Ли получил: $5000 \cdot 7{,}32 = 36600\ EUR$.

Ответ: $36600\ EUR$.

ВОПРОС 2.

Через неделю по завершению математической конференции Софус Ли вернулся в Норвегию. У него осталось $1449\ EUR$, он обменял их снова на норвежские кроны. Сколько норвежских крон получил Софус Ли, если курс изменился следующим образом: $1\ KR\ = 7{,}5\ EUR$?

Решение.

Так как $7{,}5\ EUR = 1\ KR$, то $1449 : 7{,}5 = 193{,}2\ KR$ получил Софус Ли.

Ответ: $193{,}2\ KR$.

ВОПРОС 3.

За неделю котировка обновилась, вместо $7{,}32\ EUR$ стала $7{,}5\ EUR$ за $1\ KR$. Была ли котировка в пользу Софуса Ли, когда он снова обменял евро на норвежские кроны?

Решение.

Если бы котировка осталась прежней, то за $1449\,EUR$ Софус Ли получил бы $1449{:}\,7{,}32 \approx 197{,}95\,KR$, что больше полученных $193{,}2\,KR$. Котировка была не в пользу Софуса Ли.

Ответ: нет.

Отметим, что данное задание представлено некоторой сюжетной линией, и от вопроса к вопросу эта сюжетная линия разворачивается. Задание включает в себя несколько уровней сложности. Первый и второй вопрос задачи ясно сформулирован, представлена вся необходимая информация, остается выполнить действия, которые явно следуют из описания предложенной ситуации. При решении третьего пункта задачи необходим анализ, сравнение предложенных данных в проблемной ситуации, а также потребуется аргументация ответа от учащегося.

Анализируя задания из тестирования PISA, отметим, что формулировка задач значительно отличается от формулировки заданий в российских учебниках. А именно: в них достаточно многословно описывается некоторая близкая к реальной ситуация, которая может включать факты и данные, не являющиеся необходимыми для решения проблемы [95, С. 171].

В международной оценке образовательных достижений по математической грамотности в 2015 году из 72 стран-участниц Россия заняла 32 место. Результат математической грамотности у учащихся 15-летнего возраста составил 487 баллов (Рис. 10).

По данным министерства образования и науки РФ в исследованиях PISA-2015 9% учеников имеют высокий уровень математической подготовки, 81% российских школьников 15 лет продемонстрировали успешное применение математических знаний и умений, число учащихся с низким уровнем математической грамотности составило 10% [43, С. 172].

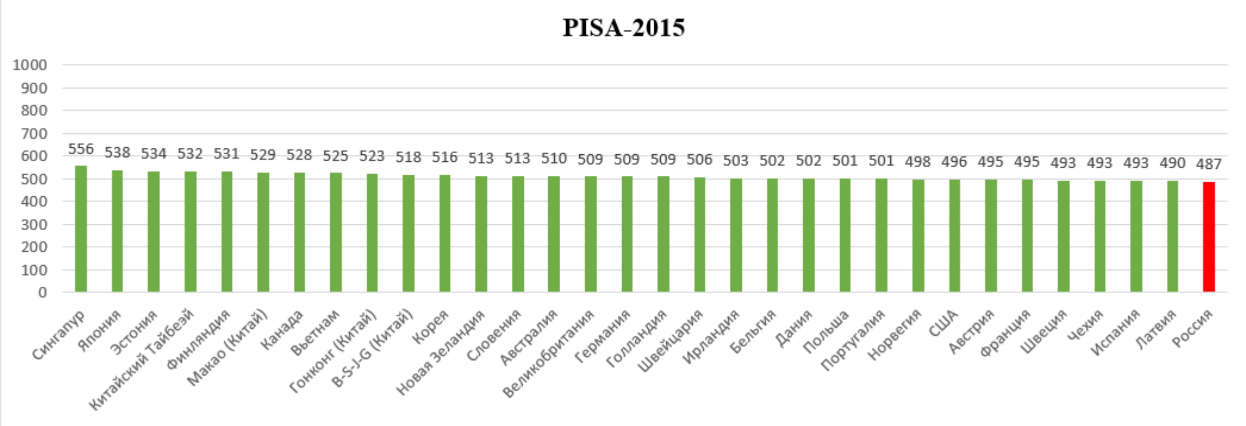


Рис.9. Результаты российских учащихся по математической грамотности, PISA-2015

Оценка уровня TIMSS -2015 математических достиженийвосьмиклассников и оценка грамотности PISA 2015 года охватывают широкий спектр знаний и понимანийучащимися в математике средней школы (Mullis I.V.S., Martin M.O., 2016a), и оба они охватывают широкий диапазон окружающихособенностей (Kuger M., Klieme E, 2016), но из-за ряда различий в концептуализации и плане исследования: российские школьники успешно справляются с заданиями TIMSS, чего нельзя сказать про исследование PISA.Тест PISA основан на более общей концепции «жизненных навыков», которую учащиеся должны использовать, чтобы быть готовыми к дальнейшему обучению, начиная успешную профессиональную карьеру и становясь осознанным гражданином. Однако,он также известен концепциями математических компетенций, которые разделяются и используются для руководства математическим образованием во всем мире. Как следствие, задачи теста PISA чаще всего встраиваются в реальные контексты и обеспечивают более длинный текст, чем аналогичные задачи TIMSS.На сегодняшний день ни один российский учебник не может предложить оптимальное количество заданий для подготовки учащихся к исследованию PISA, неудивительно, что значительная часть учащихся затрудняется составлять математические модели подобных ситуаций.

§5. Оценка качества математического образования на международных олимпиадах

Олимпиады - эффективное средство поиска и отбора талантливых молодых людей и их раннего погружения в науку. Отмечается, что «деятельность вокруг олимпиад стала заметным явлением в области современного математического образования. Их роль далеко не ограничивается обнаружением талантливых учащихся. Благодаря олимпиадной математике удается увидеть роль стандартных математических идей и рассуждений, появились подборки олимпиадных задач по темам «принцип Дирихле», «раскраска», «инварианты», объединенные единством метода» [97, С. 16].

Математические олимпиады зарождались и развивались постепенно. Начиная со средних веков (1530-1535 гг.) математики предлагали своим современникам решить некоторую задачу, ответ которой не очевиден.Например, знаменитое состязание итальянцев А. Фиоре и Н. Тартальи об общем решении кубических и уравнений четвертой степени [97, С. 31], или публичный вызов Ф. Виету, сделанный в 1593 г. бельгийским математиком А. Роменом, решить уравнение сорок пятой степени:

$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{38} + \cdots - 3795x^3 + 45x = A$ [5, С. 46].

Инициатором проведения первой олимпиады в России (Санкт-Петербург) стал геометр Б.Н. Делоне. В 1935 г. была проведена первая математическая олимпиада под руководством П.С. Александрова в Москве. Многие страны охватила волна олимпиадного движения и уже в 1959 г. в Румынии состоялась первая Международная математическая олимпиада школьников [10, С. 21]. В 1986 году составителями Г.А. Гальпериным, А.К. Толпыго был опубликован первый сборник задач «Московские математические олимпиады».

Выявлению талантливых учеников, особенностей работы с ними и их общее развитие личности посвящены многочисленные труды (В.А. Крутецкого, Ю.Д. Бабаевой, М.А. Холодной).

Н.П. Кострикина отмечает, что «из задач легко увидеть те, которые способствуют закреплению навыков и умений в процессе обучения и те, которые являются *нестандартными задачами* и поясняет, что нет универсального метода для решения нестандартных задач. Объясняется это тем, что данные задачи в какой-то степени являются неповторимыми» [4, с. 49]. Л.М. Фридман пишет, что «*нестандартные задачи* – это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения»[99, с. 48].

Для выявления математических способностей у учащихся В.А. Крутецкий выделяет две группы свойств:

1. Общие свойства личности (целеустремленность, увлеченность математикой);

2. Свойства «математического ума», такие как:

– формализация математического материала;

– обобщение математического материала (выделение наиболее значимого, видеть закономерности);

– оперирование числовой и знаковой символикой математического языка;

– способность к поэтапному логическому рассуждению, связанному с потребностью в доказательствах;

– умение мыслить свёрнутыми структурами;

– способность к обратимости мыслительно процесса (от индуктивного к дедуктивному способу мышления и наоборот);

– гибкость мышления (независимость от влияния шаблонов и алгоритмов) [15, с. 97].

Этапы математических олимпиад в России:

– школьный этап;

– городской этап;

– районный этап;

– окружной этап;

– республиканский этап;

– Всероссийская математическая олимпиада;

– Международная математическая олимпиада.

На международной математической олимпиаде в 2018 году российские школьники заняли 2 место, хотя на протяжении семи лет Россия на не входила в тройку победителей. Несомненно, решение олимпиадных задач по математике разных уровней, начиная со школьного и заканчивая международным, невозможно свести к определенным алгоритмам и «натаскиванию» учащихся. Гальперин Г.А. писал, что для успеха на олимпиаде необходимы некоторые специальные типы одаренности, которые вовсе не обязательны для успешной исследовательской работы[100, С. 55].

В своих работахВ.З. Шарич[102, С. 101], А.Я. Белов [28, С. 190] отмечают, что на сегодняшний момент олимпиадное движение переживает кризис в трех направлениях:

1. Форматный кризис.По словам В.З. Шарича: «Олимпиадное движение вышло из естественного русла работы с одаренными детьми и в большинстве своем превратилось в суррогат вступительных экзаменов» [102, С. 104]. Некоторые выпускники,подстраховывая себя, массово участвуют в различных интеллектуальных соревнованиях(приказ Минобрнауки России «Об утверждении перечня олимпиад школьников и их уровней»), в надежде оказаться призером олимпиады, и получить льготы при поступлении в вуз. С другой стороны, возникает потребность увеличения спроса на качественное математическое образование.

2. Этический кризис.С целью оценки качества образовательных учреждений Министерство образования и науки проводит ежегодно

мониторинг «Топ-500 лучших школ». Для составления рейтинга, каждой школе присуждается балл. Одно из весомых достижений – участие школьников в олимпиадах. Администрация школы привлекает чрезмерное внимание к учащимся, которые могут достичь данных успехов, как следствие, участие в олимпиаде перестало быть добровольным.

3. Содержательный кризис.Перед методической комиссией, каждый год стоит проблема: составить «новые, то есть не встречавшиеся нигде ранее задачи. Если в первых олимпиадах встречались новые для школьников идеи – принцип Дирихле, понятие инварианта, раскраски и другие, то на сегодняшний день изобрести новую идею чрезвычайно трудно» [97, С. 23].

Пример 1. «В городе Ленинграде живет более 5 миллионов человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос» [97, С. 41]

Доказательство.(принцип Дирихле) Допустим, что в городе Ленинграде у всех людей разное количество волос, то таких людей$n < 1000000$. Согласно условию, количество людей $k > 5000000$, а значит, $k > n$. По принципу Дирихле найдутся хотя бы два человека с одинаковым количеством волос на голове.

Пример 2.«На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots 19, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a + b - 1$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?» [97, С. 142]

Решение(понятие инварианта). Вычислим исходную сумму чисел, написанную на доске: $x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + +12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$. На каждом шаге сумма всех чисел уменьшается на 1. Шагов 19. Значит, после 19 операций число p будет равно: $p = 210 - 19 = 191$. В данном случае инвариант – сумма всех чисел, записанных на доске. В приведенном решении инвариант прост, что допускает совсем тривиальное истолкования. Рассмотрим случай для любого набора чисел. Для любого набора из n чисел рассмотрим величину x - сумму всех чисел, уменьшенную на n. Допустим, что с набором чисел произведено описанное в условии преобразование. Если сумма x всех чисел набора, кроме a и b, равна S, то до преобразования $x = \mathrm{S} + \mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{n}$, а после преобразования: $x = \mathrm{S} + \ \mathrm{a} + \mathrm{b} - 1 \ - \ n - 1 \ = \mathrm{S} + \mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{n}$. Исходная величина x до преобразования и после преобразования не изменилась, значит данная величина – инвариант.Ответ: $p = 191$.

Решение современных олимпиадных задач представляют собой комбинации известных идей, а сложность задачи измеряется количеством и разнообразием идей, которые требуется в ней применить. В математике неизбежно появляются новые идеи, но как правило, они слишком сложны для школьных олимпиад, соответственно, требуется нетривиальная методическая переработка этих идей.

На каком бы этапе не проходила олимпиада, она всегда привлекала четкостью и «прозрачностью критериев, объективностью определения победителей при глубоком математическом содержании» [11, С. 3].

Выводы к главе I

1. Представлен анализ различных источников по истории становления математического образования с X-XXIв. Проанализированы реформы образования с 1931-2009 гг. и их отражение на оценке качества математической подготовки учащихся.

2. Представлен анализ научной, учебно-методической литературы о проблеме повышения качества математического образования, определено понятие оценки качества образования. Рассмотрены процедуры ЕСОКО, благодаря которым анализируются и выявляются факторы, влияющие на математическую подготовку школьников на всех стадиях обучения.

3. Рассмотрено периодическое мониторинговое исследование качества и тенденций развития математического и естественнонаучного образования TIMSS. Представлен анализ содержания тестов TIMSS 4,8 и 11 классов,

выявлены предметные области инструментария, характеристика результатов испытуемых. Подсчитан процент содержания заданий в каждой познавательной области 4 и 8 классов. Проанализированы и представлены результаты с 1995-2015 гг. по математической подготовке.

4. Рассмотрена международная программа по оценке математической грамотности PISA. Представлены содержательные области инструментария, виды деятельности учащихся, контекст задач, результаты российских школьников PISA-2015.

5. Рассмотрен анализ научной и учебно-методической литературы олимпиадного движения, факторы, характеризующие кризис в олимпиадной математике, мониторинг результатов России в международной математической олимпиаде за последние 10 лет.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЕЙ К ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

§6. Система задач для подготовки школьников к международному исследованию оценки качества математического образования

В Праге состоялось 46-е совещание представителей стран в Управляющем совете PISA. В 2021 году основное направление оценка математической грамотности 15-летних учащихся[109].

Представлена концепция направления «математическая грамотность» исследования PISA-2021 (Рис.11) [36].

Рис.10. Основы исследования математической грамотности PISA-2021

Согласно представленной концепции, система задач, предлагаемая в данной работе, удовлетворяет следующим требованиям.

1. Система задач охватывает все содержательные области математики международного исследования PISA-2021.

2. Система задач учитывает все виды деятельности учащихся, выделенные экспертами при составлении инструментария.

3. Система задач содержит различные контекстные ситуации, которые определены в PISA-2021.

4. Система задач содержит задания по возрастанию трудности (от простого к сложному). Данный материал может быть использован при подготовке учащихся к международному исследованию по оценке образовательных достижений «Математическая грамотность».

Для составления данной системы задач использовались задания из прошлых лет тестирования PISA; дополнена авторскими задачами, по тем предметным областям, которых недостаточно представлено в учебниках.

Согласно проведенному анализу содержания тестов TIMSS-2015 и PISA-2015 на предметные области, и процентное содержание аналогичных заданий в учебниках алгебры[7; 19; 34; 48; 49] и геометрии 8-9 классов [9; 85].

Таблица 9

Процентное содержание аналогичных задач международных исследований в российских учебниках

	TIMSS	%	PISA	%	Алгебра и Геометрия (%)	
					8 класс	9 класс
Предметные области	Алгебра	30	Изменения и отношения	25	70	63
	Анализ данных	20	Неопределенность и данные	25	7	17
	Числа	30	Количество	25	23	20
	Геометрия	20	Пространство и форма	25	25	23

Из таблицы 9 видно, что в рассмотренных учебниках содержится достаточное количество задач по указанным в международных исследованиях разделам. Исключение составляет «Неопределенность и данные» (включающий стохастическую линию, организацию и представление данных), а также недостаточное количество задач по геометрии, имеющих практическую направленность [43, С. 172].

Система задач содержательной области «Изменения и отношения»:

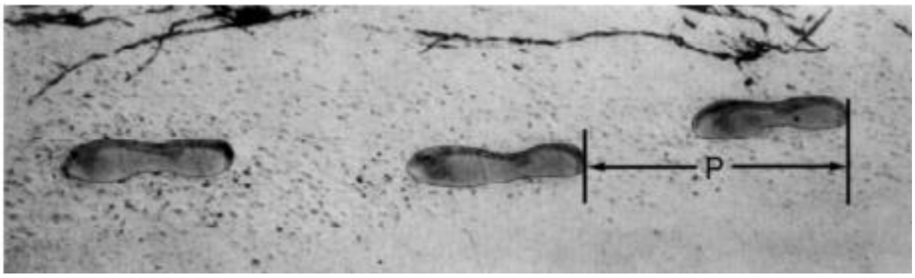
Задача 1.

«*Содержание:* Изменение и отношения

Вид деятельности: Применять

Уровень сложности: 2 уровень (вопрос 1, 2).

ПОХОДКА



На рисунке изображены следы идущего человека. Длина шага P – расстояние от конца пятки следа одной ноги до конца пятки следа другой ноги. Для походки мужчин зависимость между n и P приближенно выражается формулой $\frac{n}{P} = 140$, где n – число шагов в минуту, P – длина шага в метрах.

ВОПРОС 1.Используя данную формулу, определите, чему равна длина шага Сергея, если он делает 70 шагов в минуту» [56].

Решение. Из данной формулы получаем: $\frac{n}{P} = 140 \;\; \Leftrightarrow \;\; P = \frac{n}{140}$.

По условию Сергей делает 70 шагов в минуту, значит, $n = 70$. Длина его шага (в метрах) равна $P = \frac{70}{140} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5 метров.

«ВОПРОС 2.

Павел знает, что длина его шага равна 0,80 м. Используя данную выше формулу, вычислите скорость Павла при ходьбе в метрах в минуту (м/мин), а затем в километрах в час (км/ч)» [57].

Решение. Из данной формулы имеем:

$\frac{n}{P} = 140 \quad \Leftrightarrow \quad n = 140P.$

По условию длина шага Павла равна $P = 0{,}80$ м. За минуту он делает $n = 140 \cdot 0{,}80 = 112$ шагов.

Значит, за минуту Павел проходит $112 \cdot 0{,}80 = 89{,}6$ метров. Скорость Павла равна:$V = 89{,}6$м/мин.$= 5{,}376$ км/ч.

Ответ: $89{,}6$м/мин.; $5{,}376$ км/ч.

Задание 2.

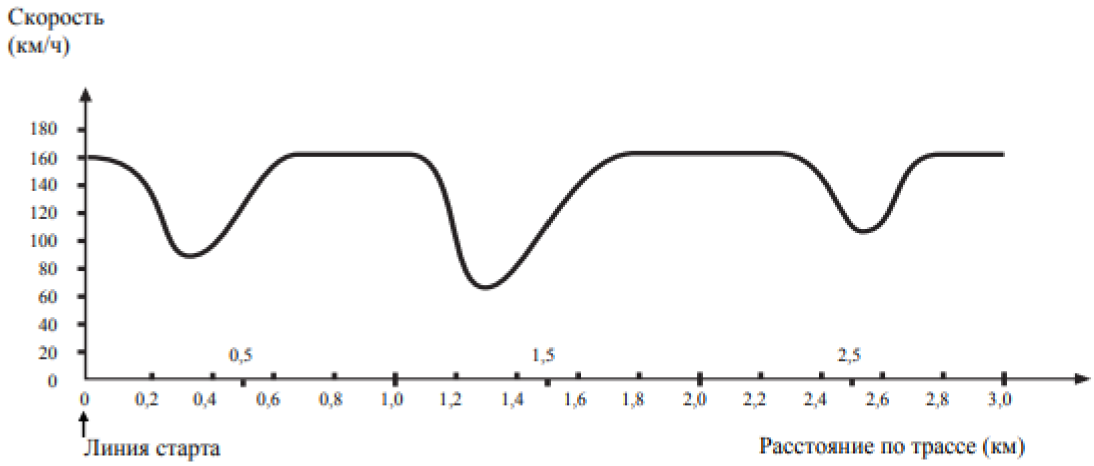
«*Содержание:* Изменения и отношения

Вид деятельности: Интерпретировать

Уровень сложности: 2 уровень (вопрос 1,2), 4 уровень (вопрос 3)

СКОРОСТЬ ГОНОЧНОЙ МАШИНЫ

На графике показано, как изменялась скорость гоночной машины, когда она проходила второй круг по трёххилометровой кольцевой трассе без подъёмов и спусков.



ВОПРОС 1.

Чему примерно равно расстояние от линии старта до начала самого длинного прямолинейного участка трассы?

A. 0,5 км B. 1,5 км C. 2,3 км D. 2,6 км» [31].

Решение. При выезде на прямолинейный участок трассы машина сначала разгоняется до максимальной скорости, затем продолжает движение с набранной скоростью и в конце участка машина притормаживает, чтобы вписаться в поворот. Причём, чем длиннее прямолинейный участок, тем больше продолжается движение с максимальной скоростью. Из графика видно, что дольше всего максимальная скорость сохранялась между 1,8 и 2,3 км. Значит, эта часть графика соответствует самому длинному прямолинейному участку трассы, его начало находится в 1,5 км от линии старта.

Ответ: В.

ВОПРОС 2.

«Что можно сказать о скорости машины при прохождении трассы между отметками 2,6 км и 2,8 км?

A. Скорость машины оставалась постоянной.

B. Скорость машины увеличивалась.

C. Скорость машины уменьшалась.

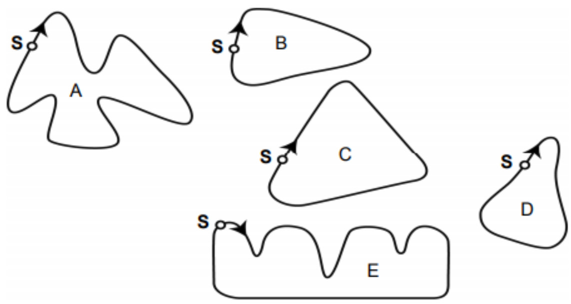
D. По данному графику невозможно определить изменение скорости машины» [30].

Решение. Из графика видно, что скорость машины на этом участке увеличивалась со 110 км/ч до 160 км/ч.

Ответ: В.

«ВОПРОС 3.

Ниже изображены пять различных по форме гоночных трасс:



S — линия старта

По какой из этих трасс ехала гоночная машина, график скорости которой приведён ранее?» [30].

Решение.Согласно графику скорости, трасса содержит три прямолинейных участка: точка старта находится на самом коротком из них.

Минимальная скорость у машины между средним и длинным участками, значит, между ними должен быть поворот. Данным требованиям удовлетворяет форма трассы В.

Ответ: В.

Задание 3.

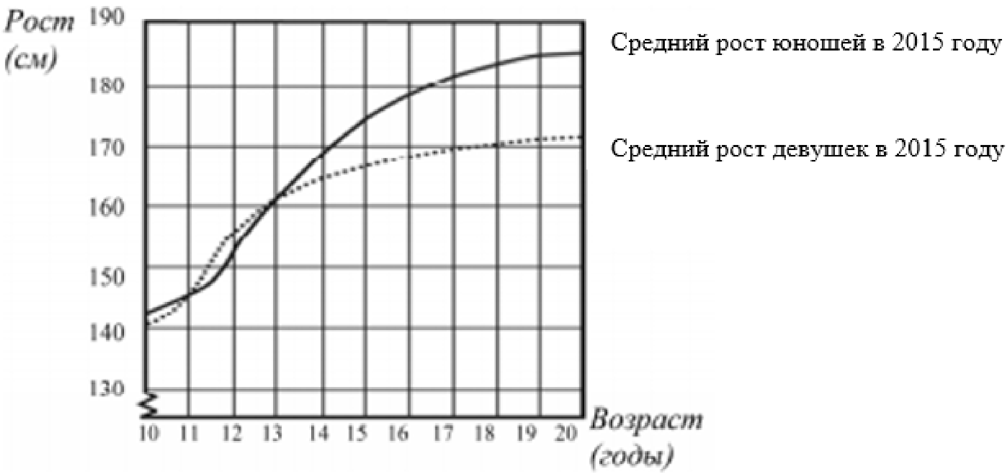
Содержание: Изменение и отношения

Вид деятельности: Применять

Уровень сложности: 3 уровень (вопрос 1,2)

ТЕНДЕНЦИЯ РОСТА

«На графике представлен средний рост юношей и девушек в России в 2015 году.



ВОПРОС 1.

По сравнению с 2000 годом средний рост пятнадцатилетних девушек в 2015 году увеличился на 1,9 см и стал равным 164,6 см. Чему был равен средний рост пятнадцатилетних девушек в 2000 году?» [30].

Решение.

В 2000 году средний рост пятнадцатилетних девушек был равен:

$164{,}6 - 1{,}9 = 162{,}7$ см.

Ответ: 162,7 см.

«ВОПРОС 2.

Пользуясь графиком, определите, в каком возрасте девушки в среднем выше юношей того же возраста» [30].

Решение.Условие «Девушки в среднем выше юношей» будет соответствовать область кривой, построенной пунктирной линией, которая располагается выше кривой, построенной сплошной линией. Следовательно, данной промежуток: $11; 13$.

Ответ: 11-13 лет.

Система задач содержательной области «Неопределенность и данные»:

Задача 4 [30].

Содержание: Неопределенность и данные

*Вид деятельности:*Интерпретировать

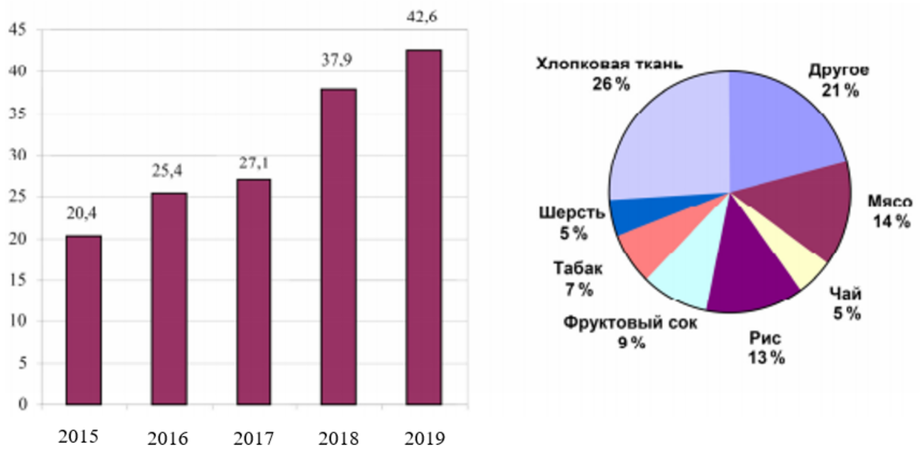
Уровень сложности: 1 уровень (вопрос 1), 2 уровень (вопрос 2)

ПРИБЛЬ

На диаграммах представлена информация о ежегодной прибыли сети супермаркетов «Магнит» и проданных товаров в 2019 году.

Ежегодная прибыль сети супермаркетов «Магнит» в миллионах рублей, 2015-2019

Распределение проданных товаров в 2019 г.



ВОПРОС 1.Какую прибыль (в миллионах рублей) получила сеть супермаркетов «Магнит» в 2016 году?

Решение. Из столбчатой диаграммы видно, что в 2016 году прибыль составила 25,4 млн.рублей.

Ответ: 25,4 млн. рублей.

ВОПРОС 2.

Какова стоимость всего мяса, проданного в 2019 году?

A. 285,6 миллионов рублей

B. 3,04 миллионарублей

C. 5,96 миллионов рублей

D. 5,97 миллионов рублей

Решение. Из столбчатой диаграммы видно, что в 2019 году прибыль сети супермаркетов «Магнит» составила 42,6 миллионарублей. Из диаграммыпроданных товаров доля стоимости мяса составляла 14%, следовательно, $42{,}6 \cdot 0{,}14 = 5{,}964 \approx 5{,}96$ млн. рублей.

Ответ: C.

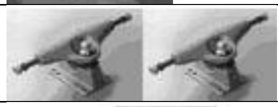
Задание 5.СКЕЙТБОРД

Содержание: Неопределенность и данные

Вид деятельности: Интерпретировать

Уровень сложности: 2 уровень (вопрос 1), 4 уровень (вопрос 2)

«Сергей большой любитель кататься на скейтборде. Он нередко заходит в магазин «Спорт», чтобы выяснить цены на некоторые товары. В этом магазине можно купить полностью собранный скейтборд. Но можно купить платформу, один комплект из 4 колес, один комплект из 2 держателей колес, а также комплект металлических и резиновых составных частей и собрать свой собственный скейтборд. Цены в магазине на эти товары были следующие:

Товар	Цена в зедах (денежная единица)	
Собранный скейтборд	82 или 84	
Платформа	40, 60 или 65	
Один комплект из 4 колес	14 или 36	
Один комплект из 2 держателей колес	16	
Один комплект металлических и резиновых деталей скейтборда (подшипники, резиновые прокладки, болты и гайки)	10 или 20	

ВОПРОС 1.

Сергей хочет сам собрать для себя скейтборд. Какую наименьшую цену и какую наибольшую цену можно заплатить в этом магазине за все составные части скейтборда?» [30].

Решение.

Скейтборд по минимальной стоимости: $40 + 14 + 16 + 10 = 80$ зедов.

Скейтборд по максимальной стоимости: $65 + 36 + 16 + 20 = 137$ зедов.

Ответ: 80 зедов; 137 зедов.

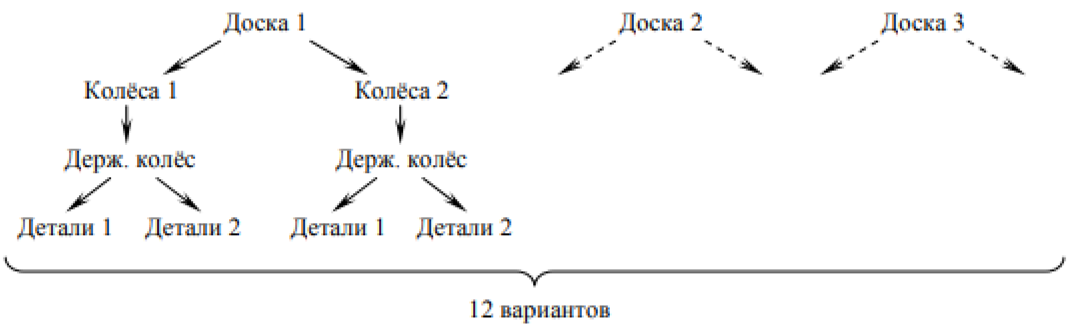
ВОПРОС 2.

«В магазине предлагаются на выбор три различных вида досок, два различных комплекта колес, два различных комплекта металлических и резиновых деталей. При этом имеется только один выбор комплекта держателей колес. Сколько различных скейтбордов может собрать Сергей из предлагаемых составных частей?

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12» [30]

Решение.

Изобразим сборку скейтбордав виде графа:



Ответ: D.

Задание 6.*Содержание:* Неопределенность и данные

Вид деятельности: Интерпретировать

Уровень сложности: 2 уровень (вопрос 1), 6 уровень (вопрос 2)

АВТОМОБИЛЬ ГОДА

«Эксперты журнала«За рулем» использует рейтинговую систему для оценки новых автомобилей и присваивает звание «Автомобиль года» автомобилю, получившему наивысшую общую оценку. Была проведена оценка пяти новых автомобилей, и их рейтинги представлены в таблице.

Автомобиль	**Система безопасности (B)**	**Экономия топлива (T)**	**Экстерьер (Y)**	**Эргономика (U)**
Lada	2	1	3	3
Gaz	3	1	3	3
Mazda	2	3	1	1
Opel	3	2	2	1
Volvo	3	1	1	3

Рейтинги означают следующее:

3 балла-отлично;

2 балла- хорошо;

1 балл- удовлетворительно.

S- «Общая оценка»» [31].

ВОПРОС 1.

«Чтобы дать общую оценку автомобилю эксперты используют следующую формулу: $S = 3 \cdot B + T + Y + U$.

Подсчитайте общую оценку автомобиля Volva»[30].

Решение.

$S = 3 \cdot 3 + 1 + 2 + 3 = 15$.

Ответ: 15.

«ВОПРОС 2.

Производители марки Volvo, полученные результаты считает несправедливыми. Запишите такую формулу подсчета общей оценки, чтобы марка Volvoстала «Автомобилем года». Необходимо включить все четыре критерия оценки автомобиля, и его надо записать, вставив соответствующие коэффициенты в места, обозначенные точками в формуле.

$Overallrating = \ldots \cdot B + \ldots \cdot T + \ldots \cdot Y + \ldots \cdot U$» [30].

Решение. За систему безопасности и эргономику Volvo получил наивысший балл, поэтому коэффициенты при B и Uследует брать наибольшие. За экономию топлива и экстерьеру Volvoминимальные баллы, коэффициенты при Tи U следует брать минимальные.

$Overallrating = 3 \cdot S + 1 \cdot F + 1 \cdot E + 3 \cdot T.$

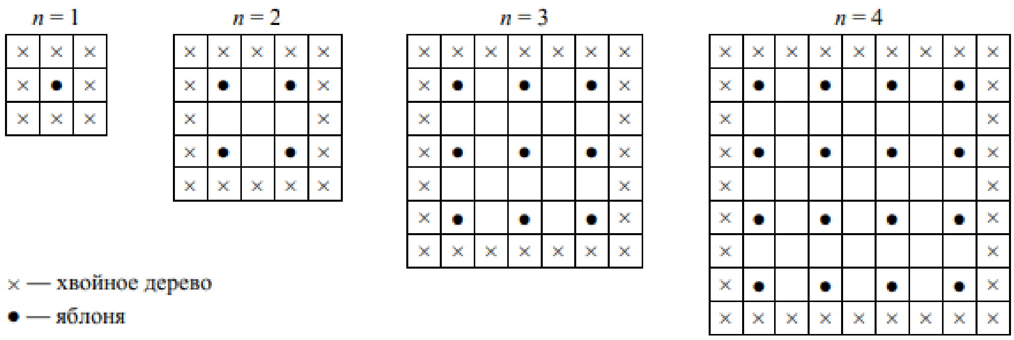
Ответ: $Overallrating = 3 \cdot S + 1 \cdot F + 1 \cdot E + 3 \cdot T.$

Задание 9.*Содержание:* Неопределенность и данные

Вид деятельности: Интерпретировать

Уровень сложности: 3 уровень (вопрос 1), 6 уровень (вопрос 2)

«ЯБЛОНИ». «Фермер на садовом участке высаживает яблони в форме квадрата, как показано на рисунке. Для защиты яблонь от ветра он сажает по краям участка хвойные деревья. Ниже на рисунке изображены схемы посадки яблонь и хвойных деревьев для нескольких значений n, где n — количество рядов высаженных яблонь. Эту последовательность можно продолжить для любого числа n.



ВОПРОС 1.Заполните следующие данные:» [30].

n	Количество яблонь	Количество хвойных деревьев
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Решение.Между n яблонями $(n-1)$ промежуток. Участок внутри хвойных деревьев - квадрат со стороной $n+\ \ n-1\ \ =2n-1$. Участок вместе с хвойными деревьями - квадрат со стороной $2n\ +1$.

Следовательно, число хвойных деревьев равно:
$(2n+1)^2 -\ \ 2n-1\ \ ^2 = 8n$.

Имеем:

n	**Количество яблонь**	**Количество хвойных деревьев**
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

«ВОПРОС 2.

В рассмотренной выше последовательности количество посаженных яблонь и хвойных деревьев подсчитывается следующим образом: количество яблонь равно n^2 , количество хвойных деревьев равно $8n$, где n — число рядов высаженных яблонь. Для какого значения n число яблонь будет равно числу посаженных вокруг них хвойных деревьев?» [30].

Решение.

Прировняем количество яблонь к количеству хвойных деревьев, имеем:

$$n^2 = 8n, \Leftrightarrow n\ \ n-8\ \ = 0 \ \Leftrightarrow \begin{array}{l} n=0, \\ n=8. \end{array}$$

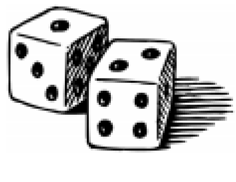
Так как n–число рядов высаженных яблонь $n>0$, следовательно, при $n=8$условие будет выполнятся.

Ответ: 8.

Задание 10.*Содержание:* Неопределенность и данные

Вид деятельности: Применять

Уровень сложности: 4 уровень

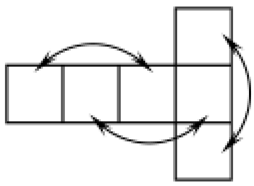


«**ИГРАЛЬНЫЕ КУБИКИ».** «Справа изображены два игральных кубика. Для игральных кубиков выполняется следующее правило: сумма очков, изображённых на двух любых противоположных сторонах кубика, равна семи.

Вы можете сделать обычный игральный кубик, вырезая, складывая и склеивая кусочки картона. Это можно сделать разными способами. Ниже изображены четыре развёртки куба, на которых нанесены очки. Из каких развёрток можно сложить кубик, у которого сумма очков на противоположных сторонах будет равна 7? Обведите слово «Да» или «Нет» в каждой строке» [30].

Развертка	**Выполняется ли правило: сумма очков на противоположных сторонах кубика равна 7?**
I	Да / Нет
II	Да / Нет
III	Да / Нет
IV	Да / Нет

Решение.Соединим противоположные грани кубика на его развёртке стрелками:



Подсчитаем сумму очков в ячейках, соединенных стрелками.

Для I развертки: $1+5=6$, $3+4=7$, $2+6=8$;

для IIразвертки: $4+3=7$, $5+2=7$,$1+6=7$;

для IIIразвертки: $3+4=7$, $1+6=7$, $5+2=7$;

для IVразвертки: $1+3=4$, $4+6=10$, $2+5=7$.

Условие выполняется только для II и III разверток.

Ответ: I - нет, II - да, III - да, IV - нет.

Задание 11._Содержание:_ Неопределенность и данные

Вид деятельности: Применять

Уровень сложности: 5 уровень

ПИЦЦА. «В пиццерии всегда можно получить пиццу с двумя обязательными начинками: сыром и помидорами. Но можно заказать пиццу по своему рецепту с дополнительными начинками. Вы можете выбрать из четырех различных дополнительных начинок: оливок, ветчины, грибов и колбасы. Вера хочет заказать пиццу с двумя дополнительными начинками. Сколько у Веры вариантов выбора различных комбинаций из предлагаемых дополнительных начинок?» [30].

Решение.

Любые 2 из 4 дополнительных начинок Вера может выбрать $C_4^2 = 6$способами.

Ответ: 6.

Задание 12.(Авторская задача)

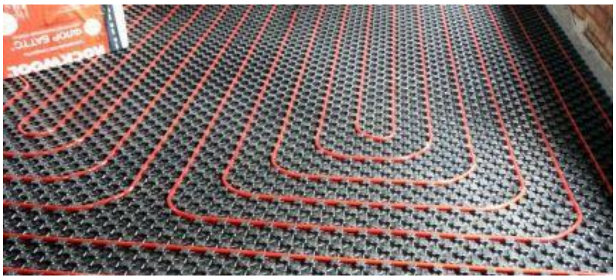
Содержание: Неопределенность и данные

Вид деятельности: «Применять»

Уровень сложности: 5 уровень

ТЕПЛЫЙ ПОЛ

Теплый пол – современная отопительная система, которая все чаще применяется для обогрева помещения взамен радиаторам. Циркуляция нагретого воздуха становится более равномерной, а общие расходы на отопление могут быть значительно меньше, при условии использования водяного контура.



Рабочему необходимо смонтировать систему теплого пола на площади равной 105 $м^2$. В магазине были представлены следующие позиции:

Диаметр трубы для теплого пола	**Расход трубы на 1 $м^2$ монтируемой площади**	**Стоимость 1 м трубы**
$\emptyset$ 16 мм 	6 $м/м^2$	70 руб./м

$\emptyset\,20$ мм 	$5{,}5$ м/м^2	80 руб./м

Какую трубу выгоднее закупить рабочему, учитывая то, что труба продается бухтами кратными 100 м?

Решение. Определим количество трубы на $S = 105$ м^2.

Труба $\emptyset\,16$ мм: $105 \cdot 6 = 630$ м, так как труба продается бухтами кратными 100 м, следовательно, необходимо приобрести 700 м. Значит, затраты составят:

$700 \cdot 70 = 49000$ руб.

Труба $\emptyset\,20$ мм: $105 \cdot 5{,}5 = 577{,}5$ м, так как труба продается бухтами кратными 100 м, следовательно, необходимо приобрести 600 м. Значит, затраты составят:

$600 \cdot 80 = 48000$ руб.

Ответ: выгоднее закупить трубу диаметром 20 мм.

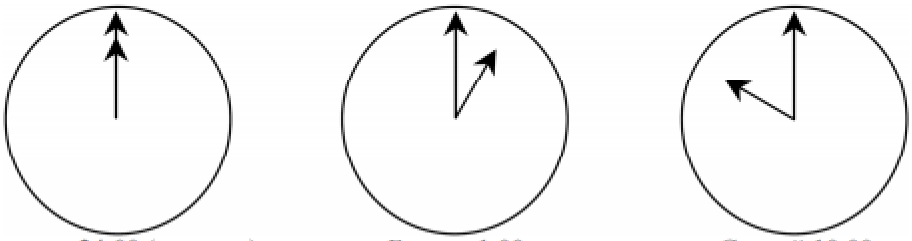
Система задач содержательной области «Количество»:

Задача 13.*Содержание:* Количество

Вид деятельности: Интерпретировать

Уровень сложности: 1 уровень (вопрос 1), 2 уровень (вопрос 2)

«ОБЩЕНИЕ В ИНТЕРНЕТЕ». «Марк (из Сиднея в Австралии) и Ганс (из Берлина в Германии) часто общаются друг с другом в Интернете. Им приходится выходить в Интернет в одно и то же время, чтобы они смогли поболтать. Чтобы определить удобное для общения время, Марк просмотрел таблицы, в которых дано время в различных частях мира, и нашел следующую информацию:



Гринвич 24:00 (полночь) Берлин 1:00 Сидней 10:00

ВОПРОС 1.

Какое время в Берлине, если в Сиднее 19:00?»[31].

Решение.Разница во времени Берлина и Сиднея составляет 9 часов. Значит, если в Сиднее 19:00, то в Берлине 10:00.

Ответ: 10:00.

ВОПРОС 2.

«Марк и Ганс не могут общаться между 9:00 и 16:30 по их местному времени, так как они в это время должны находиться в школе. Они также не могут общаться с 23:00 до 7:00 по их местному времени, так как в это время они спят. Какое время было бы удобно для мальчиков, чтобы они могли поболтать? Укажите в таблице местное время для каждого города» [31]

Город	**Время**
Сидней	
Берлин	

Решение.

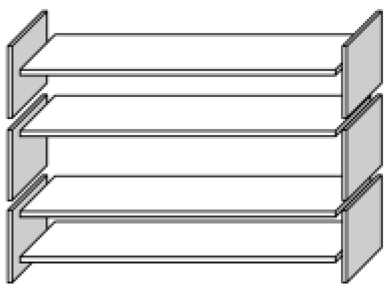
Город	**Время**
Сидней	7:00 - 8:00, 16:30 - 18:00
Берлин	22:00 - 23:00, 7:30 - 9:00

Задача 14._Содержание:_ Количество

Вид деятельности: Применять

Уровень сложности: 2 уровень

«КНИЖНЫЕ ПОЛКИ»



«Чтобы собрать один комплект книжных полок, плотнику нужны следующие детали:

− 4 длинных деревянных панели;

− 6 коротких деревянных панелей;

− 12 маленьких скоб;

– 2 больших скобы;

– 14 шурупов.

У плотника есть 26 длинных деревянных панелей, 33 коротких панели, 200 маленьких скоб, 20 больших скоб и 510 шурупов. Какое наибольшее число комплектов книжных полок может собрать из этих деталей плотник?» [31].

Решение.Длинных панелей: $26:4 \approx 6$; коротких панелей: $33:6 \approx 5$; маленьких скоб: $200:12 \approx 16$; больших скоб: $20:2 = 10$; шурупов: $510 : 36 \approx 36$. Следовательно, деталей хватит на пять комплектов полок. На пятом комплекте закончатся короткие панели.Ответ: 5.

Задача 15 [30].*Содержание:* Количество

Вид деятельности: Применять

Уровень сложности: 3 уровень

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ТЕСТИРОВАНИЯ

У Тимофеяучитель математики предлагает классу демонстрационные тестирования и каждое тестирование оценивается по 100 бальной шкале.СреднийбаллТимофея за четыре первых теста равен 60. По пятому тесту он получил 80 баллов. Чему равен среднийбаллТимофея за пять тестов по математике?

Решение.Пусть x - количество баллов за 4 первых демонстрационных тестирования по математике, тогда по формуле нахождения среднего арифметического: $\frac{x}{4} = 60, \Rightarrow x = 240$ баллов.

$240 + 80 = 320$ баллов за 5 демонстрационных тестов. Следовательно, $320 : 5 = 64$ средний балл Тимофея за пять тестов по математике.

Ответ: 64.

Задание 16. (Авторская задача)

Содержание: Количество

Вид деятельности: «Интерпретировать»

Уровень сложности: 3 уровень (вопрос 1), 1 уровень (вопрос 2)

КОТЕЛЬНАЯ

При строительстве частного дома есть два способа организации котельной. При первом способе капитальные затраты составят 800000 рублей, а ежемесячные расходы составят 4000 рублей. При втором типе организации 1300000 рублей, а ежемесячные расходы 1500 рублей в месяц.

ВОПРОС 1.

Через сколько лет окупится (второй способ станет дешевле первого) реализация второго способа котельной?

Решение. Так как окупаемость – это первичное вложение и плата за содержание, то имеем: $800000 + 4000 \cdot x > 1300000 + 1500 \cdot x, \Rightarrow x > 200$. Значит, реализация второго способа котельной окупится за 201 месяц (16 лет и 9 месяцев).Ответ: 16 лет и 9 месяцев

ВОПРОС 2.

Какой способ организации котельной будет более выгодным, если известно, что через 10 лет дом выставят на продажу?Ответ: первый способ.

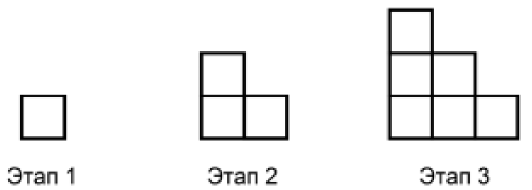
Задание 17.*Содержание:* Количество

Вид деятельности: Применять

Уровень сложности: 4 уровень

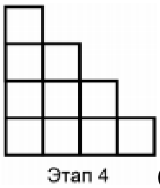
«ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЛЕСЕНОК»

«Роберт рисует последовательность «лесенок», сложенных из квадратов. Ниже показаны этапы построения.



Видно, что на этапе 1 он использовал один квадрат, на этапе 2 − три квадрата и на этапе 3 − шесть квадратов. Сколько квадратов он использует на четвертом этапе?» [57]

Решение. Заметив закономерность построения лесенок, на 4 шаге добавится 4 квадрата, следовательно, квадратов для построения лесенки на 4 этапе понадобится 10.



Ответ: 10.

Задание 18.(Авторская задача)

Содержание: Количество

Вид деятельности: «Интерпретировать»

Уровень сложности: 5 уровень

РАДИАТОРЫ

Площадь жилого помещения составляет $148\,\text{м}^2$. По результатам теплотехнического расчета требуемая тепловая мощность для данного помещения будет составлять $100\ \text{Вт}/\text{м}^2$.

Необходимо закупить радиаторы для обогрева жилого помещения. В магазине были представлены следующие позиции:

Радиатор	**Теплоотдача (Вт на 1 секцию)**	**Стоимость 1 секции**
Rifar Supremo 	202 Вт/сек.	1150 руб.
Royal Pianoforte 	189 Вт/сек.	1080 руб.

Радиаторы какой фирмы на данное помещение обойдутся дешевле, учитывая то, что они продаются секционностью, кратной 2?

Решение. Определим полную тепловую потребность здания $148 \cdot 100 = 14800$ Вт.

Высчитаем количество секций и стоимость закупки:

I тип радиаторов: $14800: 202 \approx 73{,}2$ сек., для покрытия текущей тепловой потребности здания необходимо 74 секции.

Значит, имеем: $74 \cdot 1150 = 85100$ руб.;

II тип радиаторов: $14800: 189 \approx 78{,}3$ сек. для покрытия текущей тепловой потребности здания необходимо 79 секций, но так как количество секций продается кратностью 2, то понадобится 80 секций. Значит, имеем:$80 \cdot 1080 = 86400$ руб.

Ответ: радиаторы фирмы RifarSupremo обойдутся дешевле.

Задание 19.(Авторская задача)

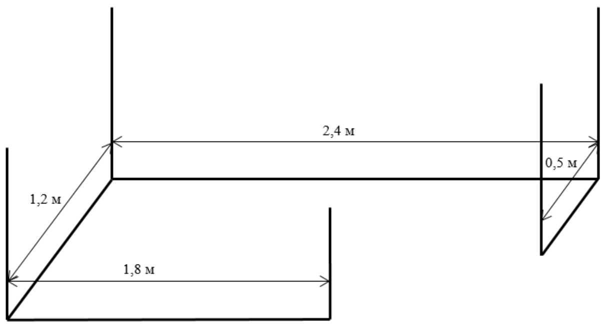
Содержание: Количество

Вид деятельности: Интерпретировать

Уровень сложности: 5 уровень

ОБЛИЦОВКА ДОМА

Блок-хаус – деревянная облицовка стен дома, создающая профиль бревна. Необходимо закрепить этот брус горизонтально на стенах: длиной 2,4 м, 1,2 м, 1,8 м, 0,5 м и высотой в 20 досок.



В магазине были представлены следующие позиции:

Блок-хаус	Длина	Стоимость за 1 доску
Сосна, сорт АВ 	6 м.	500 руб.
Ель, сорт АВ	3 м.	300 руб.

Какой длины выгоднее (дешевле) купить блок-хаус?

Решение.

I. Рассмотрим случай с блок-хаусом длинной 3 м.:

Сумма длин двух стен: $1{,}2 + 1{,}8 = 3$ м., значит закупаем блок-хаус в количестве 20 досок, распиливаем по 1,2 м и 1,8 м.

Для двух стен длинной 2,4 м. и 0,5 м., имеем: $3 - 2{,}4 = 0{,}6$ м., $0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}1$ м., значит закупаем блок-хаус в количестве 20 досок, остаток 20 досок по 0,1 м.

Таким образом, если закупить блок-хаус в количестве 40 досок, то стоимость покупки составит $300 \cdot 40 = 12000$ руб.

II. Рассмотрим случай с блок-хаусом длинной 6 м.:

$(1{,}2 + 1{,}8) \cdot 2 = 6$ м., значит закупаем блок-хаус в количестве 10 досок, распиливаем дважды по 1,2 м и 1,8 м.

$6 - \ 2{,}4 + 2{,}4 \ = 1{,}2$, значит закупаем еще блок-хаус в количестве 10 досок, распиливаем дважды по 2,4 м., остаток составит 10 досок по 1,2 м.

$1{,}2 - \ 0{,}5 + 0{,}5 \ = 0{,}2$, используем остаток 10 досок длиной 1,2 м. После облицовки остаток 10 досок по 0,2 м.

Таким образом, если закупить блок-хаус в количестве 20 досок, то стоимость покупки составит $500 \cdot 20 = 10000$ руб.

Ответ: 6 метровый блок-хаус купить выгоднее.

Система задач содержательной области «Пространство и форма»:

Задание 20.

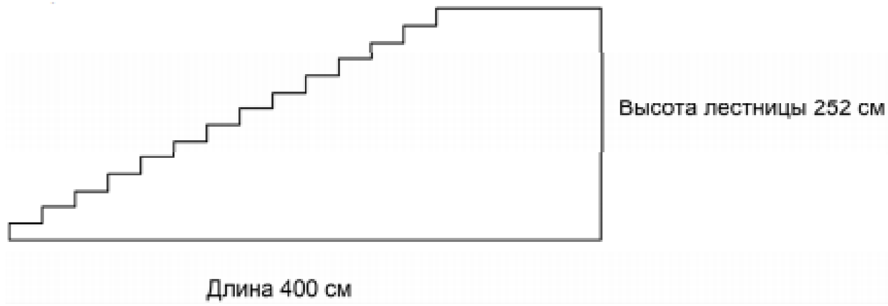
Содержание: Пространство и форма

Вид деятельности: Интерпретировать

Уровень сложности: 2 уровень

«ЛЕСТНИЦА»

«Ниже схематично изображена лестница с 14 ступеньками, высота которой 252 см. Какова высота каждой из 14 ступенек?» [58]



Решение.Из схемы лестницы: высота равна 252 см, количество ступенек 14, следовательно, высота ступеньки равна:$252 : 14 = 18$ см.

Ответ: 18.

Задание 21[59].

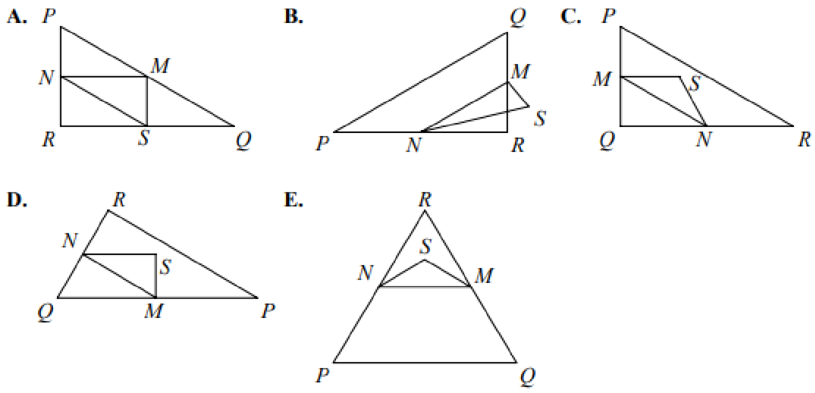
Содержание: Пространство и форма

Вид деятельности: интерпретировать

Уровень сложности: 2 уровень

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Выберите фигуру согласно ее описанию. Треугольник PQR прямоугольный (с прямым углом R). Сторона RQ меньше стороны PR. Точка M– середина стороны PQ и точка N — середина стороны QR; точка S внутри данного треугольника. Отрезок MN больше отрезка MS.



Решение.Треугольник A не подходит, так как его сторона RQ не меньше стороны PR. ТреугольникB не подходит, поскольку точка M не является серединой стороны PQ. ТреугольникиC и E не подходят, так как их углы R не являются прямыми. Фигура D удовлетворяет всем требованиям.

Ответ: D.

Задание 22.

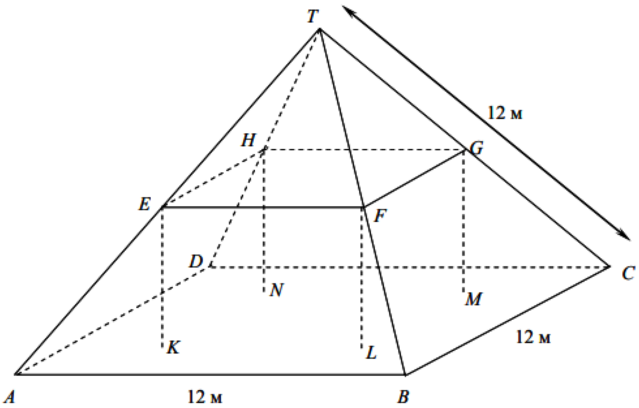
Содержание: Пространство и форма

Вид деятельности: Применять

Уровень сложности: 3 уровень (вопрос 1), 4 уровень (вопрос 2), 6 уровень (вопрос 3)

«**ЖИЛОЙ ДОМ**

На фотографии виден жилой дом, у которого крыша имеет форму пирамиды. Ниже изображена сделанная учащимся математическая модель крыши дома и указаны длины некоторых отрезков.



На данной модели пол у чердака дома – квадрат $ABCD$. Балки, на которые опирается крыша, являются сторонами бетонного блока, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда $EFGHKLMN$. Точка E — середина ребра AT, F — середина BT, G — середина CT, H — середина DT. Все ребра пирамиды равны 12 м.

ВОПРОС 1.

Вычислите площадь пола чердака — квадрата $ABCD$» [60]

Решение. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 12 м. Значит, площадь квадрата равна $12^2 = 144\text{м}^2$.Ответ: 144 м^2.

«ВОПРОС 2.

Найдите длину отрезка $EF-$ горизонтальной стороны бетонного блока» [57].

Решение. Поскольку $E-$ середина ребра AT, а $F-$ середина BT, значит, $EF-$ средняя линия ΔABT. Поэтому EF в 2 раза меньше длины отрезка AB: $12:2=6$ м.Ответ: 6 м.

Задание 23.

ПЛОЩАДЬ КОНТИНЕНТА

Содержание: Пространство и форма

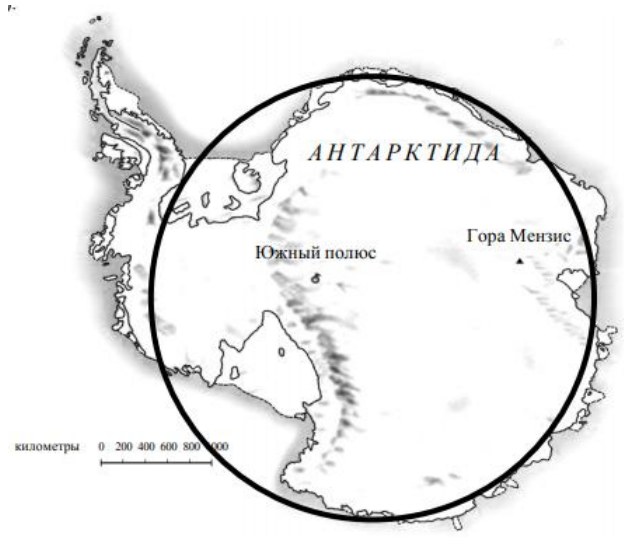
*Вид деятельности:*формулировать

Уровень сложности: 6 уровень

«Ниже изображена карта Антарктиды

Пользуясь масштабом данной карты, определите, чему примерно равна площадь Антарктиды» [56].

Решение. Оценим площадь Антарктиды площадью круга, наложенного на континент.



Измерив линейкой диаметр нарисованного круга и длину 1000 км на масштабной линейке и найдя их отношение, определим реальный размер круга. Он составляет 4000 км. Площадь круга равна примерно 12,6 млн. км^2.

Ответ: 12,6 млн. км^2.

Задание 25.(Авторская задача)

Содержание: Пространство и форма

*Вид деятельности:*формулировать

Уровень сложности: 6 уровень

КАЛИБР

Размеры калибров				
Калибр	12	16	20	28
Гильзы				
Стволы (натуральная величина)				
Диаметр канала			15,7	10,2

ствола, ∅ (мм.)				

В охотничьем оружии используется понятие калибр. Чем больше калибр, тем меньше диаметр канала ствола. За калибр охотничьего оружия принимается целое число шаровидных пуль, которые можно отлить из 1 английского фунта свинца ($1\text{ фунт} = 453{,}6\text{ г.}$). Плотность свинца Pb равна$\rho = 11{,}34\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Охотничьи ружья бывают 12, 16, 20, 28 калибров. Масса одной пули – это отношение 1 фунта к значению калибра. Объем пули – это отношение массы пули к плотности свинца. Необходимо найти диаметры каналов стволов для 12 и 16 калибров.

Решение.

I. Калибр 12, значит целое число шаровидных пуль 12.

Найдем массу одной пули m_{12}: $m_{12} = \frac{1\text{ фунт}}{12} = \frac{453{,}6}{12} = 37{,}8$ г.

Объем пули $v_{12} = \frac{m_{12}}{\rho} == \frac{37{,}8}{11{,}34} \approx 3{,}333\text{см}^3$.Из условия, что пули шаровидной формы:$V = \frac{4\pi R^3}{3}$,

$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 3{,}333}{4\cdot 3{,}14}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}999}{12{,}56}} = \sqrt[3]{0{,}7961} = \sqrt[3]{796{,}1} = 9{,}268$ мм.

$\emptyset = 2R = 18{,}536$мм.

II. Калибр 16, значит целое число шаровидных пуль 16.

Найдем массу одной пули m_{16}: $m_{16} = \frac{1\text{ фунт}}{16} = \frac{453{,}6}{16} = 28{,}35$ г.

Объем пули $v_{16} = \frac{m_{16}}{\rho} = \frac{28{,}35}{11{,}34} = 2{,}5\text{см}^3$.

Из условия, что пули шаровидной формы:

$V = \frac{4\pi R^3}{3}, \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 2{,}5}{4\cdot 3{,}14}} = \sqrt[3]{\frac{7{,}5}{12{,}56}} = \sqrt[3]{0{,}597} = \sqrt[3]{597} \approx 8{,}42$ мм.

$\emptyset = 2R = 2\cdot 8{,}42 = 16{,}84$мм.

Ответ: $\emptyset = 18{,}536$мм. у 12 калибра; $\emptyset = 16{,}84$мм. у 16 калибра.

Отметим, что представленные задачи, согласно отчетам [56; 57; 58; 59; 60; 61] Министерства образования и науки РФ за 2000-2015 гг., вызвали наибольшие трудности у учащихся.

§7. Методические рекомендации по подготовке к олимпиадам

Согласно общероссийской системы оценки качества образования [15, С. 4] и примерным основным образовательным программам основного общего [66] и среднего [67] образования система оценки образовательных достижений, в частности по математике, включает процедуру внутренней оценки – участие в олимпиадах.

Согласно рекомендациям Центральной-предметно-методической комиссии по математике задания каждого этапа математической олимпиады должны удовлетворять определенным требованиям:

1. Задачный материал включает в себя элементы научного творчества, основных математических идей.

2. Вариант заданий должен включать 4-6 задач. Тематика задачного материала охватывать все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, математический анализ, геометрию. Также включать комбинаторику, элементы теории вероятностей, теории чисел, математическую статистику, логические задачи, задачи из наглядной геометрии.

3. Задачный материал должен быть различной сложности составляться на основе различных источников.

Математические олимпиады, можно разделить на четыре типа:

I. Математические олимпиады, вошедшие в ежегодный утвержденный перечень Минобрнауки России с присвоением I, IIи IIIуровней.

II. Всероссийская математическая олимпиада.

III. Ежегодные вузовские олимпиады, по различным причинам не попавшие в перечень утвержденный Министерством образования науки.

IV. Олимпиады, организаторами которых выступают различные организации, отдельные учителя.

Ежегодной Межрегиональной олимпиаде школьников по математике «САММАТ», входящей в перечень олимпиад министерства образования на 2018 – 2019 учебный год, был присвоен второй уровень. Согласно приказу №267 от 4 апреля 2014 года пороговое значение критерия отнесения олимпиады ко второму уровню:

- более 12 субъектов Российской Федерации или не менее двух федеральных округов и не менее 50% от числа регионов;

- доля участников невыпускных классов от общего количества участников не менее 25%;

- на заключительном этапе олимпиады не менее 50% оригинальных творческих заданий заключительного этапа, не менее 40 % заданий высокого уровня сложности [11, С.5].

Данная олимпиада всем вышеперечисленным критериям удовлетворяет. Только в Самарской области по отчетам за 2017-2019 гг. в отборочном туре было заявлено 29158 участников олимпиады 5-11 классы (Таблицы 10-12). В 2017 году в г.о. Тольятти участвовало 1725 учащихся (Таблица10).

Таблица 10

Результаты г.о.Тольятти САММАТ-2017 года

Класс	САММАТ-2017 отборочный тур	САММАТ-2017 заключительный тур	Призеры
5	5	1	-
6	391	81	I место – 1, II место – 1, III место - 15.
7	269	54	I место – 1, II место – 2, III место - 2.
8	316	44	I место – 0, II место – 0, III место - 4.
9	270	45	I место – 0, II место – 0, III место - 3.

10	224	25	I место – 0, II место – 0, III место - 1.
11	250	17	I место – 0, II место – 0, III место - 2.

В заключительный тур г.о. Тольятти прошли 267 участников олимпиады, призерами стали 32 учащихся 6 - 11 классов.

В 2018 году (Таблица 11)количество школьников по Самарской области, принимавших участие в олимпиаде САММАТ возросло, также учащихся выпускных классов участвовало больше, чем в 2017 году.

В заключительный тур Самарской области прошли 1709 участников (30%) олимпиады, призерами стали 128 учащихся 5 - 11 классов. Диплом первой степени г.о. Тольятти – один (ученица 5 класса, Гимназия №9).

Таблица 11

Результаты САММАТ-2018 года

Класс	САММАТ-2018 отборочный тур	САММАТ-2018 заключительный тур	Призеры
5	44	4	I место –0, II место – 0, III место - 1
	1039	272	I место – 3, II место – 1, III место - 6.
7	1059	333	I место – 6, II место – 10, III место - 18.
8	966	322	I место – 2, II место – 9, III место - 21.
9	1003	294	I место – 3, II место – 2, III место - 8.
10	794	243	I место – 0, II место – 3, III место - 10.
11	860	241	I место – 3, II место – 3, III место - 16.

В заключительный тур Самарской области (Таблица 12) прошли 1618 участников олимпиады (27%), призерами стали 116 учащихся 5 - 11 классов.

В ходе анализа результатов отборочного и заключительного тура САММАТ после 7 класса наблюдается спад количества учащихся, занявших призовые места.

Неплохие результаты показали учащиеся при решении олимпиадных задач «теория игр», «задачи на разрезание», большая часть учащихся заключительного тура не справились с заданиями «теория чисел (задачи на делимость)» и решить систему уравнений от трех переменных (САММАТ-2017), аналогичная ситуация у 11 классов.

Таблица 12

Результаты САММАТ-2019 года

Класс	САММАТ-2019 отборочный тур	САММАТ-2019 заключительный тур	Призеры
5	93	30	I место –0, II место – 2, III место - 3
6	1117	276	I место – 8, II место – 10, III место - 25.
7	928	264	I место – 6, II место – 9, III место - 18.
8	1073	265	I место – 0, II место – 5, III место - 5.
9	977	313	I место – 0, II место – 2, III место - 6.
10	962	257	I место – 1, II место – 4, III место - 11.
11	937	213	I место – 0, II место – 0, III место - 11.

А.В. Фарков для выявления талантливых учеников и непосредственной подготовке к олимпиадам при изучении темы в 7 классе «Степень с натуральным показателем» или в качестве повторения ее в старших классах советует предлагать следующие типы задач:

Пример 1 [97].

1. Сравните: 65^{23} и 255^{17};

2. На какую цифру оканчивается число 2007^{2014}?

Решение.

$65^{23} > 64^{23}$, $64^{23} = \ 2^{6\ \ 23} = 2^{138}$;

$255^{17} < 256^{17}$, $256^{17} = \ 2^{8\ \ 17} = 2^{136}$.

Так как $65^{23} > 2^{138}$, $2^{138} > 2^{136}$, а $2^{136} > 255^{17}$, то $65^{23} > 255^{17}$.

2. Число 2007^{2014} определяется последней цифрой числа 7^{2014}.

Вычислим значения степеней:

7^1	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7	7^8	7^9	…
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	…

Можно увидеть закономерность: последними цифрами могут быть 7, 9, 3, 1, а далее следует повтор. Так как $2014 = 503 \cdot 4 + 2$, то 7^{2014} оканчивается той же цифрой, что и 7^2.

Ответ: 1. $65^{23} > 255^{17}$, 2. 9.

Для учащихся 11 классов в качестве обобщения и систематизации темы «Решение уравнений и их систем», предлагаем задачи по представленным типам уравнений: квадратные, рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и уравнения, содержащие знак модуля. Также данным материалом можно воспользоваться для подготовки к олимпиаде школьного или районного уровня. Для самостоятельного решения заданий, в помощь ученику, к каждому заданию сформулирована идея решения.

Пример2.

Решить систему $\begin{cases} \overline{x}\ \ x + 3y \ \ = 36, \\ \overline{y}\ \ 3x + y \ \ = 28. \end{cases}$

«*Идея. Сделать замену. Получить эквивалентную систему, состоящую из суммы и разности уравнений исходной системы. Воспользоваться формулами кубов суммы и разности.*

Указание. Сделать замену $a = \ \ \overline{x}$, $b = \ \ \overline{y}$. После почленного сложения и вычитания система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 64, \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 8. \end{cases}$$

Указание. Свернуть выражения в левых частях уравнений соответственно в куб суммы и разности» **[**39**]**:

$$\begin{cases} (a+b)^3 = 64, \\ (a-b)^3 = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 4, \\ a-b = 2. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену $a = \ \ \overline{x}$, $b = \ \ \overline{y}$ и преобразуем систему, почленно складывая и вычитая уравнения:

$$\begin{cases} a\ \ a^2 + 3b^2 \ \ = 36, \\ b\ \ 3a^2 + b^2 \ \ = 28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 3ab^2 = 36, \\ 3a^2b + b^3 = 28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 64, \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 8. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами куба суммы и разности:

$$\begin{cases} (a+b)^3 = 64, \\ (a-b)^3 = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 4, \\ a-b = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\ 9; 1\ $.

Пример3.

«Найти все пары действительных чисел m и n, при которых уравнение $\ 3x^2 - 2m^2 + mn\ \ ^2 + \ \ 3m^2 - mn + 2n^2 - 12x\ \ ^2 + 4 = 4x - x^2$ имеет хотя бы одно решение.

Идея. Перенести слагаемые из правой части уравнения в левую и выделить полный квадрат.

Указание. Уравнение приводится к виду

$$3x^2 - 2m^2 + mn\ \ ^2 + \ \ 3m^2 - mn + 2n^2 - 12x\ \ ^2 + \ \ x - 2\ \ ^2 = 0.$$

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2-2m^2+mn=0, \\ 3m^2-mn+2n^2-12x=0, \\ x-2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-2m^2+mn=0, \\ 3m^2-mn+2n^2-24=0, \\ x=2. \end{cases}$$

Указание. Умножить обе части первого уравнения на 2 и почленно сложить его со вторым уравнением:

$2n^2+mn-m^2=0.$

Указание. Рассмотреть последнее уравнение как квадратное относительно новой переменной $\frac{n}{m}$» [10].

Решение. Перенесем слагаемые из правой части уравнения в левую и выделим полный квадрат:

$$(3x^2-2m^2+mn)^2+(3m^2-mn+2n^2-12x)^2+(x-2)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2m^2+mn=0, \\ 3m^2-mn+2n^2-12x=0, \\ x-2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-2m^2+mn=0, \\ 3m^2-mn+2n^2-24=0, \\ x=2. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 2 и сложим почленно со вторым уравнением:

$2n^2+mn-m^2=0.$

Поскольку $m=0$ не является решением первого уравнения системы, разделим на $m^2\neq 0$; получим квадратное уравнение относительно величины $\frac{n}{m}$:

$$2\left(\frac{n}{m}\right)^2+\frac{n}{m}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{n}{m}=-1, \\ \frac{n}{m}=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

1) При $m=-n$: $12-2n^2-n^2=0 \Rightarrow n^2=4 \Leftrightarrow n=\pm 2, m=\mp 2.$

2) При $m=2n$: $12-8n^2+2n^2=0 \Rightarrow n^2=2 \Leftrightarrow n=\pm\sqrt{2}, m=\pm 2\sqrt{2}.$

Ответ: $(-2;2)$, $(2;-2)$, $(2\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

Пример 4.

«Решить уравнение $\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log^2{}_x(3x-2)+4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}$.

Идея. Преобразовать логарифмические выражения в правой части и сделать замену переменной.

Указание. Исходное уравнение привести к виду

$\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log^2{}_x(3x-2)+4\log_x(3x-2)+4}$» [2].

Указание. Выполнить замену $\log_x(3x-2)=t$.

Указание. Не забыть вернуться к старой переменной.

Решение. Перейдем в правой части уравнения от логарифма частного к разности логарифмов:

$$\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log^2{}_x(3x-2)+4\log_x(3x-2)+4}.$$

Сделаем замену $\log_x(3x-2)=t$. Тогда уравнение примет вид

$t-2=\sqrt{t^2-4t+4}\Leftrightarrow t-2=|t-2|\Leftrightarrow t\geq 2.$

Возвращаемся к переменной x и решаем получившееся неравенство модифицированным методом интервалов:

$\log_x(3x-2)\geq 2\Leftrightarrow\log_x x^2-\log_x(3x-2)\leq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x^2-3x+2)\leq 0,\\ x>\frac{2}{3},\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}<x<1;\\ 1<x\leq 2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;2]$.

Пример 5.

«Сколько корней на отрезке $[0;1]$ имеет уравнение

$8x(2x^2-1)\cdot(8x^4-8x^2+1)=1$?

Идея. Так как задача рассматривается на отрезке $[0;1]$*, то можно сделать тригонометрическую замену переменной* $t=\cos x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. *Получится тригонометрическое уравнение, левая часть которого легко сворачивается в произведение косинусов.*

Указание. Сделать замену $t=\cos x$. Тогда для того, чтобы ответить на вопрос задачи, надо подсчитать количество решений уравнения

$$8\cos t \;\; 2\cos^2 t - 1 \;\; \cdot \;\; 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 \;\; = 1 \text{ на отрезке } \;\; 0; \frac{\pi}{2} \; .$$

Указание. Последний сомножитель левой части уравнения можно преобразовать следующем образом:

$8\cos^4\mathrm{t} - 8\cos^2\mathrm{t} + 1 = 8\cos^2\mathrm{t} \;\; \cos^2\mathrm{t} - 1 \;\; + 1 = 1 - 2\sin^2 2\mathrm{t} = \cos 4t.$

Итак, уравнение примет вид $8\cos t \cos 2t \cos 4t = 1$.

Указание. Значения переменной t, при которых $\sin t = 0$, не являются решениями уравнения. Умножить обе части уравнения на $\sin t$:

$8\sin t \cos t \cos 2t \cos 4t = \sin t \Leftrightarrow \sin 8t = \sin t.$

Решив это уравнение, посчитайте количество решений, попавших на полуинтервал $(0; \frac{\pi}{2}]$, предварительно исключив те решения, при которых $\sin t = 0$» [10].

Решение. Для любого числа x из отрезка $\;\; 0; 1 \;\;$ существует (и притом единственное) число t из отрезка $\;\; 0; \frac{\pi}{2} \;\;$ такое, что $x = \cos t$. Заменив x на $\cos t$, придем к уравнению

$$8\cos t \;\; 2\cos^2 t - 1 \;\; \cdot \;\; 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 \;\; = 1. \qquad *$$

Требуется определить число корней уравнения $\;\; * \;\;$ на отрезке $\;\; 0; \frac{\pi}{2}$. Преобразуем выражение, стоящее в последних скобках уравнения $\;\; * \;$:

$$8\cos^4\mathrm{t} - 8\cos^2\mathrm{t} + 1 = 8\cos^2\mathrm{t} \;\; \cos^2\mathrm{t} - 1 \;\; + 1 = 1 - 2\sin^2 2\mathrm{t} = \cos 4t.$$

Тогда уравнение $\;\; * \;\;$ преобразуется к виду

$$8\cos t \cos 2t \cos 4t = 1. \quad (**)$$

Так как решения уравнения $\sin t = 0$ не являются решениями уравнения $(**)$, домножим последнее на $\sin t$, при этом мы вносим постороннее решение $t = 0$, которое надо будет потом исключить.

$$8\sin t \cos t \cos 2t \cos 4t = \sin t \Leftrightarrow \;\; 4\sin 2t \cos 2t \cos 4t = \sin t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 8t = \sin t \Leftrightarrow \sin 8t - \sin t = 0 \Leftrightarrow 2\sin \;\; \frac{7t}{2} \;\; \cos \;\; \frac{9t}{2} \;\; = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \sin \;\; \frac{7t}{2} \;\; = 0, \\ \cos \;\; \frac{9t}{2} \;\; = 0; \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} t = \frac{2\pi n}{7}, n \in \boldsymbol{Z}, \\ t = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \boldsymbol{Z}. \end{matrix}$$

Учитывая условие $t \in (0; \frac{\pi}{2}]$, окончательно получим: $t \in \{\frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}\}$.

Ответ: 3 корня.

Пример 6.

«Решить уравнение:

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(21 + 23x + 6x^2) = 4.$$

Идея. Упростить левую часть уравнения путем эквивалентных преобразований; при помощи замены переменной свести уравнение к дробно-рациональному.

Указание. Равносильными преобразованиями привести уравнение к виду $2\log_{3x+7}(2x + 3) + \log_{2x+3}(3x + 7) - 3 = 0$.

Указание. Сделать замену переменной $t = \log_{2x+3}(3x + 7)$; получить дробно-рациональное уравнение.

Указание. Вернуться к исходной переменной» **[**11**]**.

Решение. Разложим функции, стоящие под логарифмами на множители:

$$\log_{3x+7}(2x + 3)^2 + \log_{2x+3}(2x + 3)(3x + 7) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7}(2x + 3) + \log_{2x+3}(3x + 7) - 3 = 0.$$

Введем новую переменную $t = \log_{2x+3}(3x + 7)$. В новых обозначениях уравнение становится дробно-рациональным:

$$t + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 2}{t} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2. \end{array}\right.$$

Найдем соответствующие значения переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{2x+3}(3x + 7) = 1, \\ \log_{2x+3}(3x + 7) = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 3 > 0, \\ 2x + 3 \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} 3x + 7 = 2x + 3, \\ 3x + 7 = (2x + 3)^2; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

Пример 7.

«Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x - 2} = 2\sqrt{2} - 3$ имеет решение.

Идея. (Первый способ) Выделить полный квадрат. (Второй способ) Уравнение является квадратным относительно a. *Записать условие существования решения (*a*) относительно параметра* x»[27].

Пример 8 [27**].**

Найти наибольшее целое отрицательное значение параметра k, при котором уравнение $\frac{2}{2x-k}+\frac{1}{kx-2}=0$ имеет положительное решение.

Идея. Исходное уравнение равносильно системе с учетом области допустимых значений.

Пример 9 [2**].**

Решить уравнение $y^2+2\sqrt{y^2+3y-4}-4+3y=0$.

Идея. С помощью замены переменной $t=\sqrt{y^2+3y-4}$ *свести уравнение к квадратному относительно новой переменной.*

Пример 10.

«Решить уравнение $32^{3(x^3-8)}=8^{19(2x-x^2)}$.

Идея. Привести выражения в левой и правой частях уравнения к степеням по основанию 2 и перейти к равенству показателей, которое будет эквивалентно исходному уравнению. Получившееся рациональное уравнение решить методом разложения на множители» [10].

Пример 11 [11**].**

Решить систему уравнений $\begin{cases} x+3^y=2, \\ x^3+27^y=26. \end{cases}$

Идея. Воспользоваться формулой разложения суммы кубов в произведение.

Пример 12 [1**].**

Решить уравнение $\log_x\ 3x-2\ \ -2=\sqrt{\log_x{}^2\ 3x-2\ \ +4\log_x(\frac{x}{3x-2})}$.

Идея. Преобразовать логарифмическое выражение в правой части и сделать замену переменной $\log_x\ 3x-2\ \ =t$.

Пример 13.

«Найти все пары действительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющие условию $x>0$ и системе уравнений

$$\sin\left((x-\sqrt{\pi})^2+y^2\right)=0,$$

$$\log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2\log_{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}}=2.$$

Идея. При помощи замены переменных свести второе уравнение системы к квадратному. Найти значение суммы x^2+y^2 и далее определить значения x и y из первого уравнения» [28].

Пример 14.

«Решить систему уравнений

$$x-y-\log_2^2(|x|+y+1)+6=0,$$

$$(x-y)^2-6(x-y)\log_2(|x|+y+1)+5\log_2^2(|x|+y+1)=0.$$

Идея. Сделать замену переменных $u=\log_2(|x|+y+1)$, $v=x-y$; решить полученные уравнения и произвести отбор корней»[88].

В своей работе Р.Г. Хазанкин отмечает, что при решении задач олимпиадного характера «все сводится к умелому распознаванию небольшого числа идей, отраженных учителем в ключевых задачах» [100, с. 55-59], то есть в задачах, решенных ранее учащимися, на которых базируется та или иная математическая идея.

При составлении инструментария при подготовке к олимпиадам, задачи можно классифицировать по разделам математики, идеи, которая используется при их решении (алгебраическая, геометрическая, логическая), с особенностями сюжетной линии («клетки и кролики», задачи «на шахматной доске», «скачущая блоха»), методу решения (принцип Дирихле, круги Эйлера, метод раскраски, от противного, на метод математической индукции). Особенность олимпиадной задачи заключается в том, что для ее решения может потребоваться несколько методов или научных математических идей.

§8. Подготовка обучающихся к международным исследованиям по разделу «Элементы теории вероятностей»

В международном исследовании TIMSS-2015 по оценке качества математического образования содержательная область «Данные и вероятность» является самой проблемной для учащихся средней школы [24, С. 39].Рассмотрим некоторые примеры заданий.

Пример 1.

«В коробке лежит 30 фишек красного и синего цвета. Случайным образом из коробки вынули одну фишку, записали ее цвет и положили обратно в коробку. Это было проделано 100 раз, при этом фишка красного цвета появлялась 60 раз. Оцените количество красных фишек в коробке» [24, С. 39].

Решение.Найдем относительную частоту появления красной фишки: $W\ A\ = \frac{60}{100}$. Оценим вероятность подсчета количества красных (30 штук) фишек в коробке:$30 \cdot \frac{60}{100} = 18$ фишек красного цвета.Ответ: 18.

Пример 2.

«В автомате находятся конфеты l разных форм. При кратном нажатии кнопки в автомате конфета в форме шара выпадала n раз. Оцените вероятность появления такой конфеты при первом нажатии кнопки» [24, С. 39].

Решение.Найдем относительную частоту появления конфеты в форме шара: $W\ A\ = \frac{n}{k}$. Ответ: $\frac{n}{k}$.

На Рисунке 12 представлены данные по содержательным областям инструментарияTIMSS-2015.

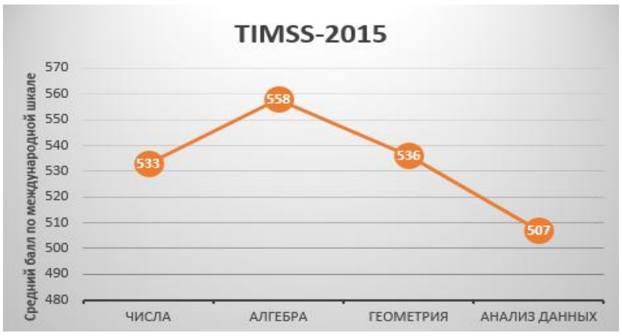


Рис. 11. Содержательные области инструментария

Видим, что неплохие результаты показали с решением задачного материала в области «Алгебра», с содержательной областью «Анализ данных» (507 баллов) учащиеся справились хуже всего.

Приведем результаты верного выполнения заданий российскими восьмиклассниками по разделу «Анализ данных в сравнении с результатами всех стран-участниц (Рис. 13).

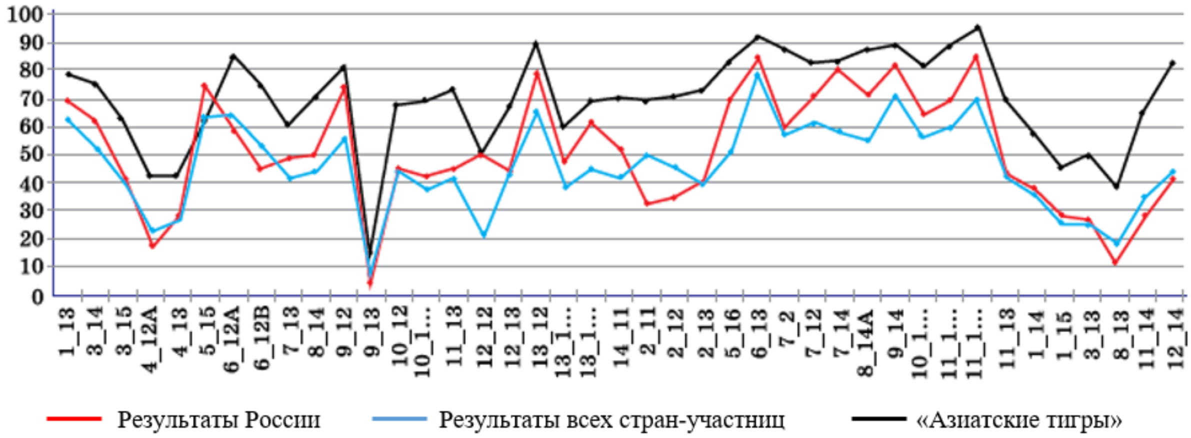


Рис.12. Результаты TIMSS-2015, 8 класс «Анализ данных»

В 2015 году экспертами было разработано 15 различных вариантов, было представлено 35 заданий (41 вопрос) по содержательной области «Данные и вероятность». Результаты российских учащихся, по большинству заданий, выше результатов, показанных всеми участниками исследования, также получаем представление насколько результаты восьмиклассниковРоссии хуже в данной области, проследив процент выполнения заданий «Азиатских тигров» (Сингапур, Корея, Тайвань, Гонконг, Япония).

В данной работе реализована технология уровневой дифференциации обучения Р.А. Утеевой при изучении темы «Элементы теории вероятностей», данная методическая разработка, может быть использована учителями математики при проведении уроков в 10-11 классах. Нами выбрана именно эта технология, так как содержание темы, требования к уровню знаний и умений обучающихся, наличие задач разного уровня позволяют выделить три уровня обучения: базовый, продвинутый и высокий.

$У_1$: *базовый уровень* - определенный программой и учебником минимум знанийи умений, достижение которого обязательно учащимися всех типологическихгрупп.

$У_2$: *продвинутый уровень* - некоторые, выходящие за рамки программы иучебника дополнительные сведения (знания) и формирование прочных умений поприменению этих знаний в различных ситуациях (при решении задач разныхтипов и разной сложности), достижение которого обязательно учащимисятипологических групп А и В.

$У_3$: *высокий уровень* - дополнительные сведения, углубляющие знания учащихсяпо теме и формирующие умения решать задачи повышенной сложности,достижение которого обязательно для учащихся группы А.

В процессе обучения, указанные уровни находятся в диалектической взаимосвязи и поэтому образуют систему.

В основу технологии уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой положены следующие принципы [94]:

1. «Целенаправленность и активность обучения учащихся каждой типологической группы.
2. Постепенное возрастание степени самостоятельности учащихся каждой типологической группы.
3. Взаимосвязь дифференцированных и недифференцированных формучебной деятельности учащихся в обучении».

Методика организации различных форм учебной деятельности и примеры приведены в работах Р.А. Утеевой [90-93].

«Дифференцированное задание – задание, построенное с учётом особенностей типологической группы учащихся, т. е. группы, объединённой «одинаковым» уровнем знаний и умений по предмету (теме, разделу, курсу) и уровнем их усвоения»[91, С. 95].

В каждом классе выделяются четыре типологические группы учащихся, названные условно группами А, В, С, Д (в некоторых случаях в группы А или Д входят 1-2 ученика, либо они вообще отсутствуют)[91, С. 88].

В группу А относят учащихся, знающих «сверхпрограммы»;

В группу В – учащихся с хорошим уровнем знаний и умений;

В группу С–учащихся с минимальным уровнем знаний и умений;

В группу Д – учащихся, достигающих минимального уровня.

С помощью дифференцированных форм учебной деятельности реализуются такие **цели обучения**[95]**:**

С учащимися группы А и В:

1. Расширение и углубление знаний, формирование умений решать задачи повышенной сложности.

2. Развитие устойчивого интереса к предмету, углубление представлений о роли математики в жизни, науке, технике.

3. Развитие умения самостоятельно работать с учебной и научно-популярной литературой.

4. Доведение учащихся до более высокого уровня усвоения знаний и способов деятельности.

С учащимися группы С:

1. Создание соответствующих условий; повторение, ликвидация пробелов, актуализация знаний для успешного изучения новой темы.

2. Развитие и закрепление интереса к математике и к учебной деятельности, выполняемой в процессе обучения математике.

3. Формирование навыков учебного труда, умений самостоятельно работать над задачей.

4. Доведение учащихся до хорошего уровня усвоения знаний и способов деятельности.

С учащимися группы Д:

1. Ликвидация пробелов в знаниях и умениях.

2. Пробуждение интереса к предмету путём использования игровых элементов, занимательных и логических задач наряду с систематической организацией самостоятельной работы учащихся на уроке и дома.

3. Развитие навыков и умений осуществлять самостоятельную деятельность по образцу и в сходных ситуациях, воспроизводить изученный материал, решённую задачу.

4. Доведение учащихся до минимального уровня усвоения знаний и способов деятельности.

На современном этапе развития школьного математическогообразования ориентация на личность является необходимым условиемосуществления образовательного процесса, развивающего и учитывающегоиндивидуальные особенности обучающихся. Дифференциация обученияявляется одним из путей реализации личностно-ориентированного обученияматематике, позволяющая обучающимся получать математическуюподготовку разного уровня в соответствии с их индивидуальнымиособенностями и интересами.

С учетом выбранной технологии уровневой дифференциации обучения Р.А. Утеевой спроектируем изучение темы «Элементы теории вероятностей» на примере подтемы «Случайные события. Классическое определение вероятности». Проект рассчитан на 3 часа для обучающихся 11 класса.

Первоначально выделим содержание каждого уровня знаний и умений.

Базовый уровень (теоретический материал и задачный) достаточно полно раскрыт в учебнике алгебры и математического анализа А.Г. Мордковича 10-11 класс[50] и М.Я. Пратусевича 11 класс[65].

На усмотрение учителя его можно дополнить сведениями: об истории становления понятия вероятности (Х. Гюйгенс, Б. Паскаль [56], П. Ферма, П.Л. Чебышев, А.Н. Колмогоров); рассмотрением задач, связанных с азартными играми (деление выигрышного фонда [48], если игра случайно прервалась, игра в «Дурака», «Покер», «Рулетка» и другие); о теории ошибок[6;12;40;41;46], так как базовый уровень должен содержать не только минимум знаний и умений по теме, но и формировать у учащихся определенный уровень культуры.

Желательно, чтобы данные сведения находились в самом учебнике. Можно предложить учащимся групп Д и Синдивидуальные задания по указанным вопросам в виде небольших сообщений на уроке.

Базовый уровень знаний и умений

Таблица 13

Содержание базового уровня знаний и умений по теме: «Элементы теории вероятностей»

Основные знания	Основные умения
1. Определение понятия эксперимента (опыт).	1. Приводить примеры эксперимента (опыта).
2. Определение понятия событие.	2 Приводить примеры всевозможных событий.
3. Определение понятия достоверного события $P\ A\ = 1$.	3. Приводить примеры достоверных событий.
4. Определение понятия невозможного события $P\ A\ = 0$.	4. Приводить примеры невозможных событий.
5. Определение понятия случайного события$0 < P\ A\ < 1$.	5. Приводить примеры случайных событий.
6. Определение понятия совместные события	6. Устанавливать взаимосвязь событий, приводить примеры совместных событий.
7. Определение понятия несовместные события.	7. Устанавливать взаимосвязь событий, приводить примеры несовместных событий.
8. Определение понятия зависимые события.	8. Устанавливать взаимосвязь событий, приводить примеры зависимых событий.
9. Определение понятия пространства элементарных событий.	9. Уметь работать с элементами пространства элементарных событий.
10. Определение понятия конечного вероятностного пространства.	10. Уметь работать с конечным числом элементов, вместе с заданной на нем функцией p (называемой вероятностью).
11. Определение понятия вероятность	11. Уметь оперировать понятиями:

события.	событие, благоприятствующими данному событию; достоверного события; невозможного события.
12. Теорема (свойства вероятности).	12. Применять данные свойства к решению задачного материала.
13. Понятие классического определения вероятности.	13. Применять понятие классическое определение вероятности к решению задач (исходы равновероятностны).

Приведем примеры индивидуальных заданий для учащихся групп Си Д, соответствующие базовому уровню знаний и умений:

Пример 1. Какие из следующих событий образуют полную группу событий:

1. Выпадение «орла» и выпадение «решка» при бросании монеты;

2. Попадание и промах при выстреле;

3. Появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости один раз;

4. Появление 13 очков при бросании игральной кости один раз.

Ответ: 1-3 образуют полную группу событий, так как в результате проведения опыта, непременно появится хотя бы одно из событий.

Пример 2. Какие из перечисленных событий являются несовместными, а какие равновозможными в данных опытах (в каждой строке отметьте «+» верный вариант):

События	Несовместное	Равновозможное
1. Попадание и промах при одном выстреле.	+	
2. Появление 1, 3, 4, 5 очков при бросании игральной кости.		+
3. Появление 1, 3, 4 очков при одном бросании игральной кости	+	
4. Появление шара с №1, 2, 9 при вынимании одного шара из урны, содержащей 10 перенумерованных шаров.		+
5. Появление карты бубновой, пик, трефовой масти при вынимании карты из колоды.		+

Пример 3. «Из колоды в 36 карт наугад вынимают одну карту. Какова вероятность того, что будет извлечен туз пик?» [17, С. 142].

Решение.Всего карт $n = 36$. «Туз пик» в одном экземпляре, значит есть только один шанс из 36 карт вытянуть именно его. Значит, $p(A) = \frac{1}{36}$.

Ответ: $\frac{1}{36}$.

При решении задач (группы С и Д) на нахождение вероятности события желательно, в качестве раздаточного материала, дать учащимся алгоритм подсчета данной вероятности [50, С. 285] (Рисунок 12):

Задачи на классическое определение вероятности в данных группах подбирать такого типа, где известна величина числа событий n(или его легкая возможность подсчета) и известна величина благоприятных событий m (или его легкая возможность подсчета).

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ СХЕМА

Для нахождения вероятности события А при проведении некоторого испытания следует:

1. Найти число N всех возможных исходов данного испытания;

2. Найти количество N(A) тех исходов испытания, в которых наступает событие А;

3. Найти частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события А;

4. Записать ответ $p(A) = \frac{N(A)}{N}$.

Рис. 12. Классическая вероятностная схема

Продвинутый уровень знаний и умений

Таблица 14

Содержание продвинутого уровня знаний и умений

Основные знания	Основные умения
1. Доказательство о вероятности невозможного события $p(\emptyset) = 0$.	1. Доказывать, что $p(\emptyset) = 0$.
2. Доказательство о вероятности достоверного события $p(\mathbf{\Omega}) = 1$.	2. Доказывать, что $p(\mathbf{\Omega}) = 1$.
3. Доказательство о вероятности суммы событий $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.	3. Доказывать, что $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.
4. Доказательство о вероятности	4. Доказывать, что $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

произведения независимых событий $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.	
5. Доказательство о вероятности суммы двух несовместных событий $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB) = p(A) + p(B)$.	4. Доказывать, в случае двух несовместных событий, что $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
6. Доказательство суммы вероятности события и вероятности противоположного ему события $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.	5. Доказывать, что $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Так, «если достижения базового уровня является обязательным для учащихся каждой группы, то достижение продвинутого уровня есть некоторый идеал для учащихся группы С и является обязательным для учащихся групп А и В» [94] (Таблица 14).

Задачи на классическое определение вероятности в данных группах подбирать такого типа:

– известна величина общего числа событий n, но не известна величина благоприятных событий m: $p(A) = \frac{x}{n}$;

– известна величина благоприятных событий m, но не известно общее число событий n: $p(A) = \frac{m}{y}$;

– не известно общее число событий, и нет данных о числе благоприятных событий (из условия задачи найти данные величины): $p(A) = \frac{x}{y}$;

– известна величина противоположного исхода событий (или его легкая возможность подсчета): $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{x}{n}$.

Нахождение неизвестных данных в задачах осуществляется или элементарными подсчетами, возможно, с применением комбинаторных рассуждений и использованием основных формул комбинаторики.

Высокий уровень знаний и умений

Таблица 15

Содержание высокого уровня знаний и умений

Основные знания	Основные умения
1. Общий случай решения задачи «о	1. Применять основной подход решения

разделе ставки, если игра прервалась досрочно».	общего случая к серии частных случаев данных задач.
2. Общий случай решения задачи кавалера де Мере.	2. Применять основной подход решения общего случая к серии частных случаев данных задач.

Отметим, что «аналогично высокий уровень является необходимым для достижения учащимися группы А и идеалом для учащихся группы В» [94] (Таблица 15).

Теоретический и практический материал для продвинутого и высокого уровня можно найти в книгах [18; 17; 97]. В данной группе рассмотрим задачи смешанного типа:

– задачи на классическое определение вероятности с применением основных формул комбинаторики;

– задачи на классическое определение вероятности с применением комбинаторных правил суммы, умножения.

В высокий уровень также отнесем задачи из ЕГЭ и международного сравнительного исследования TIMSS.

Подбор и составление задач разных типов для каждого уровня по основным темам

Задачи алгоритмического типа для базового уровнядостаточно полно представлены в школьных учебниках математики, в дидактических материалах по теме. Они включают в себя, например, следующие задачи:

Задание 1. «Из колоды в 36 карт наугад вынимают одну карту. Какова вероятность того, что будет извлечен пиковый туз?» [17, С. 142]

Решение.Всего карт $n = 36$. «Пиковый туз» в одном экземпляре, значит есть только один шанс из 36 карт вытянуть именно его. Значит, $p\ A\ = \frac{1}{36}$.Ответ: $\frac{1}{36}$.

Задание 2. «В классе внеочередной дежурный определяется жребием среди 10 человек, еще не дежуривших в этом месяце. На 10 карточках пишутся имена претендентов, после чего все карточки тщательно перемешиваются в коробке и одну карточку вынимают наугад. Тот, чье имя написано на этой карточке, назначается дежурным. Какова вероятность того, что дежурным будет «Сергей»?» [17, С. 142].

Решение.Если имя «Сергей» написано на одной из карточек, значит, $p(A) = \frac{1}{10}$.Ответ: $\frac{1}{10}$.

Задание 3. «Предположим, что 15 имеющих одинаковую квалификацию человек подали заявление на вакансию учителя. 6 претендентов – женщины. Какова вероятность того, что предпочтение будет отдано женщине?» [17, С. 144].

Решение.Всего исходов $n = 15$, так как на работу могут принять любого из 15 человек, подавших заявление. Все исходы равновозможны (выбор осуществляется случайным образом). Женщина окажется выбранной $m = 6$ исходов. Значит, $p(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Задачи полуэвристического типа для базового уровнятакже хорошо представлены в учебниках и дидактических материалах. Приведем примеры таких задач.

Задание 1. «Из колоды в 36 карт наугад вынимают одну карту. Какова вероятность того, что будет извлечен туз?» [17, С. 142]

Решение.Извлечь туз любой масти можно с большими шансами (в колоде 4 туза, шансы увеличиваются в 4 раза). Значит, $p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Задание 2. **«**В классе учатся 15 мальчиков и 10 девочек. По жребию выбирают одного ученика для выполнения поручения классного руководителя. Какова вероятность того, что выбранным окажется мальчик» [17, С. 144].

Решение.Всего исходов: $n = 10 + 15 = 25$. Все исходы равновозможны. Мальчик окажется выбранным при любом из 15 исходов.

Значит, $p(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.Ответ: $\frac{3}{5}$.

Задача 3[78]. Определите вероятность того, что наудачу присвоенного трек-номера посылке на почте России не содержит одинаковых цифр, если номер может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

Решение.Общее число исходов: $n = 10^5 - 1$всего существует трек-номеров с различными пятизначными номерами, исключили трек-номер 00000.

Количество благоприятствующих исходов: $A_{10}^5 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$пятизначных трек-номеров с различными цифрами.

Таким образом, $p\ \ A\ \ = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{10^5 - 1} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10}{11111}$.

Ответ: $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10}{11111}$.

Задачи эвристического типа для базового уровня.Рассмотрим на примере следующих задач:

Задание 1[17, С. 140]. Бросают две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что:

а) выпадут «орел» - О и «решка» - Р?

б) выпадут два «орла»?

Решение.

а) Опыт имеет $n = 4$ равновозможных исхода:

№ варианта	Первая монета	Вторая монета
1	О	О
2	О	Р
3	Р	О
4	Р	Р

Благоприятных исходов $m = 2$. Значит, $p\ \ A\ \ = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

б) Опыт имеет $n = 4$ равновозможных исхода:

№ варианта	Первая монета	Вторая монета
1	О	О
2	О	Р
3	Р	О
4	Р	Р

Благоприятных исходов $m = 1$. Значит, $p\ \ A\ \ = \frac{1}{4}$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$.

Задание 2. «Игральный кубик бросают один раз. Чему равна вероятность того, что на верхней грани кубика окажется: а) четное число очков; б) число очков, больше 2?» [17, С. 143].

Решение.

а) Выпадение всех шести граней равновозможны. Четное число очков на трех гранях: 2, 4, 6. Поэтому вероятность выпадения четного числа очков равна $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

б) Число очков, больше 2, имеется на четырех гранях: 3, 4, 5, 6. Значит, $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$.

Задание 3[77]. Необходимо открыть кодовый замок на входной двери. Известно, что код состоит из 3 цифр: 1, 2, 3. Чтобы открыть замок, нужно набрать эти три цифры в определенном порядке. Каким числом можно оценить успех эксперимента: «замок откроется с первого раза»?

Решение.

Все возможные комбинации:

№	1	2	3	4	5	6
код	123	132	213	231	312	321

Значит, «замок откроется с первого раза» $p(A) = \frac{1}{6}$.Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задачиалгоритмического типа для продвинутого уровня. Рассмотрим на примере следующих задач:

Задача 1[17, С. 140]. Бросают три одинаковые монеты. Какова вероятность того, что выпадет «решка» - «решка» - «решка»?

Решение.

Переберем все возможные варианты, «орел» - О, «решка» - Р.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
I монета	О	О	О	О	Р	Р	Р	Р
II монета	О	О	Р	Р	О	О	Р	Р

III монета	О	Р	О	Р	О	Р	О	Р

Опыт имеет $n = 8$ равновозможных исходов.Благоприятных исходов $m = 1$. Значит, $p(A) = \frac{1}{8}$.Ответ: $\frac{1}{8}$.

Задание 2. «Какова вероятность угадать кодовый трехзначный номер, если он состоит из четных цифр, причем цифры в числе не повторяются» [83].

Решение.Четных цифр - пять $0, 2, 4, 6, 8$;

Выбрать трехзначный номер, из 5 четных цифр (цифры не повторяются): $A_5^3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ способами. Благоприятствующий исход один. Следовательно, вероятность угадать кодовый трехзначный номер, если он состоит из четных цифр: $p(A) = \frac{1}{60}$.Ответ: $\frac{1}{60}$.

Задачи полуэвристического типа для продвинутого уровня:

Задание 1. «Из букв слова «провал» наугад выбираются 5 букв. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно будет составить слово «повар»» [51].

Решение.

$A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Число благоприятных исходов равно 1. Вероятность события$p(A) = \frac{1}{120}$.Ответ: $\frac{1}{120}$.

Задача 2[64]. В ящике лежат 100 одинаковых деталей, 10 из которых бракованные. Какова вероятность того, что среди вынутых наугад 10 деталей не будет ни одной бракованной? Сравните полученную вероятность с числом 0,5.

Решение.Выбор 10 деталей из 100 одинаковых: $n = C_{100}^{10}$. Благоприятствующее событие «выбор 10 деталей, где нет бракованных»: $n = C_{90}^{10}$. Искомая вероятность равна:

$p(A) = \frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}$. Преобразуем данное выражение:

$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93\cdot 92\cdot 91} = \frac{9}{10}\cdot\frac{89}{99}\cdot\ldots\cdot\frac{81}{91}$. Заметим, что каждая из дробей меньше, чем $\frac{9}{10}$. Поэтому искомая вероятность меньше $\frac{9}{10}^{10}$. Заметим, что $10^{10} = (9+1)^{10} > 9^{10} + 10\cdot 9^{9} > 2\cdot 9^{10}$, поэтому $\frac{9}{10}^{10} < \frac{1}{2}$. Значит, полученная вероятность меньше 0,5.

Ответ: $\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93\cdot 92\cdot 91} < 0{,}5$.

Задание 3[83]. В уголовном процессе проходят по делу 50 человек. Из них 15 - свидетели преступления. Имеется возможность опросить 10 человек. Какова вероятность того, что среди опрошенных граждан окажутся 5 свидетелей.

Решение.Выбрать для допроса 10 человек из 50 граждан: C_{50}^{10}способами. Выбрать 5 свидетелей из 15 свидетелей: C_{15}^{5}способами. Выбрать 5 других свидетелей из 35 оставшихся: C_{35}^{5}.

Таким образом, вероятность того, что среди 10 опрошенных окажутся ровно 5 свидетелей: $p\ \ A\ = \frac{C_{15}^{5}\cdot C_{35}^{5}}{C_{50}^{10}}$.Ответ: $\frac{C_{15}^{5}\cdot C_{35}^{5}}{C_{50}^{10}}$.

Задачи эвристического типа продвинутого уровня:

Задача 1[65, С. 283].Найдите вероятность того, что при случайном выборе двух различных чисел от 1 до 50 их сумма будет равна 40.

Решение.

Равновероятностными будут такие исходы, как всевозможные пары выбранных чисел. Значит, пространство элементарных событий составится из пар различных чисел. Без учета порядка чисел в паре таких пар будет:

$C_{50}^{2} = \frac{50!}{2!48!} = \frac{49\cdot 50}{2} = 25\cdot 49$.Пар, благоприятствующих исследуемому событию, без учета порядка чисел в паре, будет 19:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\{1;39\}$	$\{2;38\}$	$\{3;37\}$	$\{4;36\}$	$\{5;35\}$	$\{6;34\}$	$\{7;33\}$	$\{8;32\}$	$\{9;31\}$	$\{10;30\}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$\{11;29\}$	$\{12;28\}$	$\{13;27\}$	$\{14;26\}$	$\{15;25\}$	$\{16;24\}$	$\{17;23\}$	$\{18;22\}$	$\{19;21\}$	

Значит, $p(A) = \frac{19}{C_{50}^2} = \frac{19}{25\cdot 49}$.Ответ: $\frac{19}{25\cdot 49}$.

Задача 2. «В классе 5 девочек и 16 мальчиков. Случайным образом выбирают трех учеников этого класса. Найдите вероятность того, что среди выбранных учеников будут: а) одни мальчики; б) одна девочка и два мальчика; в) один мальчик и две девочки; г) одни девочки; д) дети обоих полов» [65].

Решение.

а) Выбрать трех учеников из всего класса: $n = C_{21}^3$способами. Выбрать троих мальчиков из 16 мальчиков: $n = C_{16}^3$ способами. Таким образом, искомая вероятность равна: $p(A) = \frac{C_{16}^3}{C_{21}^3}$.

б) Выбрать трех учеников из всего класса: $n = C_{21}^3$способами. Выбрать одну девочку из 5 девочек: C_5^1 способами. Выбрать двоих мальчиков из 16 имеющихся: C_{16}^2 способами.

Таким образом, искомая вероятность равна: $p(A) = \frac{C_5^1\cdot C_{16}^2}{C_{21}^3}$.

в) Выбрать трех учеников из всего класса: $n = C_{21}^3$способами. Выбрать одного мальчика из 16 имеющихся: C_{16}^1 способами. Выбрать двоих девочек из 5 имеющихся: C_5^2 способами.

Таким образом, искомая вероятность равна: $p(A) = \frac{C_{16}^1\cdot C_5^2}{C_{21}^3}$.

г) Выбрать трех учеников из всего класса: $n = C_{21}^3$способами. Выбрать троих учеников, которыми будут одни девочки: $m = C_5^3$.

Таким образом, искомая вероятность равна: $p(A) = \frac{C_5^3}{C_{21}^3}$.

д) Возможны два варианта выбора троих учеников:

I. Благоприятствующее событие A: «два мальчика и одна девочка».

Выбрать трех учеников из всего класса: $n = C_{21}^3$способами. Выбрать одну девочку из 5 девочек: C_5^1 способами. Выбрать двоих мальчиков из 16 имеющихся: C_{16}^2 способами.

Искомая вероятность события А равна: $p\;\;A\;\;=\frac{C_5^1 \cdot C_{16}^2}{C_{21}^3}$.

II. Благоприятствующее событие B: «один мальчик и две девочки».

Выбрать трех учеников из всего класса: $n = C_{21}^3$способами. Выбрать одного мальчика из 16 имеющихся: C_{16}^1 способами. Выбрать двоих девочек из 5 имеющихся: C_5^2 способами.

Искомая вероятность равна: $p\;\;B\;\;=\frac{C_{16}^1 \cdot C_5^2}{C_{21}^3}$. Так как нас устраивают оба варианта Iи II, используем теорему о вероятности суммы двух несовместных событий, находим искомую вероятность выбора троих учеников обоих полов: $p\;\;A\;\;+p\;\;B\;\;=\frac{C_5^1 \cdot C_{16}^2}{C_{21}^3}+\frac{C_{16}^1 \cdot C_5^2}{C_{21}^3}$.

Ответ: а) $\frac{C_{16}^3}{C_{21}^3}$; б) $\frac{C_5^1 \cdot C_{16}^2}{C_{21}^3}$; в) $\frac{C_{16}^1 \cdot C_5^2}{C_{21}^3}$; г) $\frac{C_5^3}{C_{21}^3}$; д) $\frac{C_5^1 \cdot C_{16}^2}{C_{21}^3}+\frac{C_{16}^1 \cdot C_5^2}{C_{21}^3}$.

На высоком уровнеучащимся можно предложить следующие задачи**алгоритмического типа:**

Задание 1[17, С. 141]. Бросают четыре одинаковых монеты. Какова вероятность того, что все четыре монеты выпадут орлом вверх?

Решение.

Переберем все возможные варианты, «орел» - О, «решка» - Р

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I монета	О	О	О	О	О	О	О	О	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
IIмонета	О	О	О	О	Р	Р	Р	Р	О	О	О	О	Р	Р	Р	Р
III монета	О	О	Р	Р	О	О	Р	Р	О	О	Р	Р	О	О	Р	Р
IV монета	О	Р	О	Р	О	Р	О	Р	О	Р	О	Р	О	Р	О	Р

Опыт имеет $n = 16$ равновозможных исходов.Благоприятных исходов $m = 1$. Значит, $p\;\;A\;\;=\frac{1}{16}$.Ответ: $\frac{1}{16}$.

Задание 2[17].На тарелке 20 одинаковых на вид пирожков: 2 с мясом, 16 с капустой и 2 с вишней. Рома наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

Решение.Всего пирожков: $n = 20$. Рассматриваемому событию благоприятствует только два события, следовательно $m = 2$. Значит, $p\ A\ = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.Ответ: $\frac{1}{10}$.

Задачи полуэвристического типа для высокого уровня:

Задание 1[68].Из колоды в 36 карт вынуты наудачу три карты. Какова вероятность того, что среди вынутых карт: а) будет ровно один туз; б) будет ровно два туза; в) будет три туза.

Решение.

а) Вынуть из колоды ровно три карты: $n = C_{36}^3$. Чтобы среди этих трех карт был ровно один туз, нужно взять одного из четырех тузов (это можно сделать 4 способами) и выбрать из 32 карт, не являющихся тузами, оставшиеся 2 карты: C_{32}^2 способами.Таким образом, вероятность того, что среди трех карт ровно один туз: $p\ A\ = \frac{4C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{496}{1785}$.

б) Вынуть из колоды ровно три карты: $n = C_{36}^3$. Чтобы среди этих трех карт было ровно два туза, нужно взять двух из четырех тузов: C_4^2 способами.

И выбрать из 32 карт, не являющихся тузами, оставшуюся 1 карту: C_{32}^1 способами.

Таким образом, вероятность того, что среди трех карт ровно два туза: $p\ A\ = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3}$.

в) Вынуть из колоды ровно три карты: $n = C_{36}^3$. Чтобы среди этих трех карт было ровно два туза, нужно взять трех из четырех тузов: $m = C_4^3$ способами.

Таким образом, вероятность того, что среди трех карт ровно три туза: $p\ A\ = \frac{C_4^3}{C_{36}^3}$.Ответ: а) $\frac{496}{1785}$; б) $\frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3}$; в) $\frac{C_4^3}{C_{36}^3}$.

Задание 2. «Ученик знает ответы не на все из 16 вопросов зачета. Сколько вопросов он выучил, если вероятность того, что он сможет ответить на оба из случайно выбранных им вопросов, не меньше $\frac{7}{8}$?» [65]

Решение.

Пусть ученик выучил $a < 16$вопросов. Выбор двух случайных вопросов из 16 вопросов зачета: $n = C_{16}^2$. Благоприятствующее событие «вытянул два вопроса из выученных им»: $m = C_a^2$способами. Тогда вероятность успешного ответа на оба поставленных вопроса равна: $p\ A\ = \frac{C_a^2}{C_{16}^2} = \frac{a(a-1)}{15\cdot16}$.

Решим систему неравенств

$$\begin{matrix} \frac{a(a-1)}{15\cdot16} \geq \frac{7}{8}, \\ a < 16 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a \in\ \ -\infty; -14\ \ \cup\ \ 15; \infty\ \ , \\ a < 16 \end{matrix} \Rightarrow a = 15.$$

Ответ: 15 вопросов выучил.

Задачи эвристического типа для высокого уровня:

Задание 1[83]. Придя с рыбалки, студент Михаил загадочно сказал восьмикласснице Полине: «Я поймал 28 рыб: карпов и карасей. Вероятность наугад вынуть карпа из ведерка с уловом больше вероятности вынуть карася на ее треть. Сколько карпов я поймал и сколько карасей?». Какой правильный ответ он ожидает услышать от Полины?

Решение.Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{matrix} \frac{x}{28} = \frac{y}{28} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{28}, \\ x + y = 28. \end{matrix}$$

где x– число карпов, y – число карасей.Ответ: $\ 16; 12\ $.

Задание 2. (*частный случай задачи кавалера де Мере*) «Что вероятнее: при бросании 4 кубиков хотя бы на одном получить шесть очков или при 24 бросаниях двух костей хотя бы один раз получить два раза по шесть очков?» [65, С. 302].

Решение.Рассмотрим вероятность того, что ни на одном из четырех кубиков не выпадает 6 очков. Общее количество комбинаций на четырех кубиках: 6^4, а количество комбинаций без шестерок: 5^4.

Таким образом, исход «при одном бросании 4 кубиков не выпала шестерка»: $p\left(\overline{A}\right) = \frac{5^4}{6^4}$. Следовательно, вероятность, что выпадет хотя бы одна шестерка: $p\left(A\right) = 1 - \frac{5^4}{6^4}$.

Аналогично, количество исходов при 24 бросаниях двух костей: 36^{24}. При каждом бросании количество исходов, где нет двух шестерок: 35.

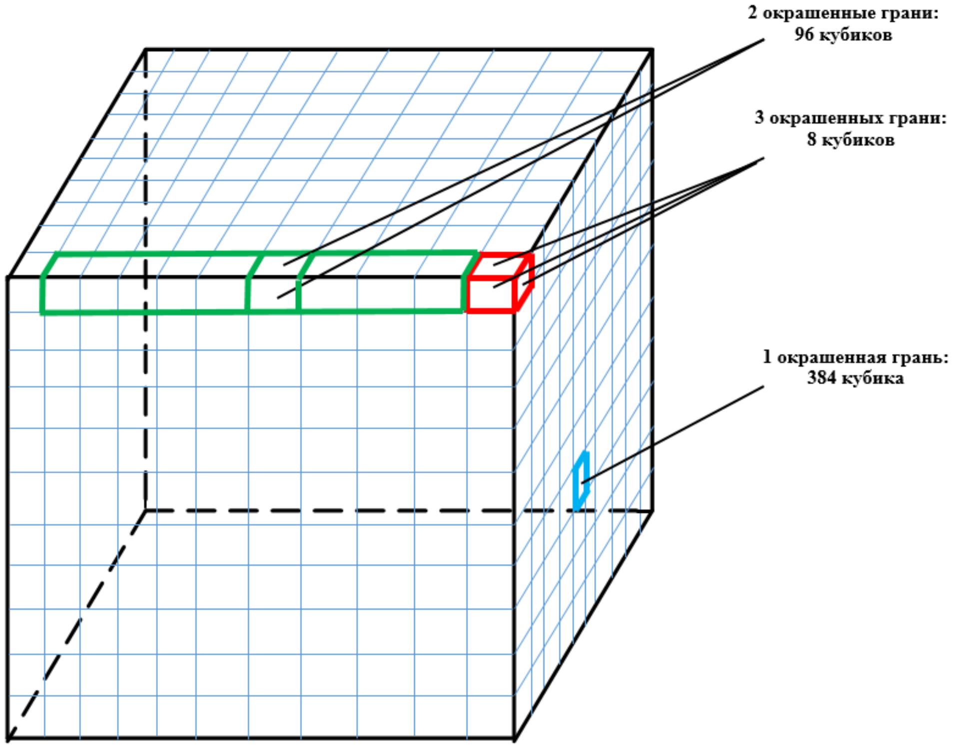
Таким образом, исход «ни разу не выпадает две шестерки»: $p\left(\overline{B}\right) = \frac{35^{24}}{36^{24}}$. Следовательно, вероятность, что выпадут две шестерки: $p\left(B\right) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}}$.

«Остается сравнить числа $1 - \frac{5^4}{6^4}$ и $1 - \frac{35^{24}}{36^{24}}$, то есть сравнить числа $\frac{35^{24}}{36^{24}}$ и $\frac{5^4}{6^4}$, соотношение между которыми такое же, как между $\frac{35^6}{36^6}$ и $\frac{5}{6}$.

Согласно неравенству Бернулли ($(1+x)^n \geq 1 + nx$, при $x > -1$, $n \in \boldsymbol{N}$) $\left(\frac{35}{36}\right)^6 = \left(1 - \frac{1}{36}\right)^6 \geq 1 - 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{6}$. Поскольку сравниваемые числа, очевидно, не равны, получаем, что $\frac{35^6}{36^6} > \frac{5}{6}$, а значит, вероятность получить одну шестерку на четырех кубиках больше, чем получить один раз две шестерки при 24 бросаниях двух кубиков» [64, С. 192].

Задание 3. «Куб с окрашенными гранями распилен на $n =$ 1000кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Извлекаются 3 кубика. Найти вероятность того, что у них будет в сумме $k =$ 3окрашенных грани» [83].

Решение.Длина ребра с учетом распилки: $l = \sqrt[3]{n} = 10$кубиков.



С 3 окрашенными гранями: 8 штук (вершины куба); с 2 окрашенными гранями: $8 \cdot 12 = 96$ штук (12 ребер куба); с 1 окрашенной гранью: $8 \cdot 8 \cdot 6 =$ $= 384$ штуки (6 граней куба); неокрашенных: $1000 - 8 - 96 - 384 = 512$.

Извлечь 3 кубика: $n = C_{1000}^{3}$способов. При извлечении 3 кубиков возможны три случая:

I. Извлечен 1 кубик с тремя окрашенными гранями и 2 неокрашенных кубика: $C_{8}^{1} \cdot C_{512}^{2}$способов;

II. Извлечен 1 кубик с двумя окрашенными гранями, 1 с одной окрашенной гранью и 1 неокрашенный кубик: $C_{96}^{1} \cdot C_{384}^{1} \cdot C_{512}^{1}$ способа;

III. Извлечено 3 кубика у каждого из которых окрашена одна грань: C_{384}^{3} способа.

Количество благоприятствующих исходов:

$m = C_{8}^{1} \cdot C_{512}^{2} + C_{96}^{1} \cdot C_{384}^{1} \cdot C_{512}^{1} + C_{96}^{1} \cdot C_{384}^{1} \cdot C_{512}^{1}$способов извлечь 3 кубика, суммарное количество граней которых равно трем.

Таким образом,вероятность извлечь 3 кубика, суммарное количество граней которых равно трем: $p\ \ A\ = \frac{C_{8}^{1} \cdot C_{512}^{2} + C_{96}^{1} \cdot C_{384}^{1} \cdot C_{512}^{1} + C_{96}^{1} \cdot C_{384}^{1} \cdot C_{512}^{1}}{C_{1000}^{3}}$

Ответ: $\frac{C_8^1 \cdot C_{512}^2 + C_{96}^1 \cdot C_{384}^1 \cdot C_{512}^1 + C_{96}^1 \cdot C_{384}^1 \cdot C_{512}^1}{C_{1000}^3}$.

Выше отмечено, что дифференциация заданий может быть осуществлена по-разному. Приведем пример дифференцированных заданий по теме «Случайные события. Классическое определение вероятности», отличающихся содержанием и уровнем сложности задач для каждой группы. Данные варианты дифференцированных заданий рассчитаны в основном на домашнюю работу каждого учащегося, хотя часть из них, при наличии желания и времени, может быть выполнена учащимися на уроке.

Дифференцированная домашняя работа

Группа А

Задание 1[52]. (*частный случай задачи кавалера де Мере*) Сколько раз следует бросить пару игральных костей, чтобы вероятность одновременного появления хотя бы раз двух шестерок оказалась больше вероятности отсутствия пары шестерок?

Решение.При одном бросании пары (различных) костей имеется 36 исходов, из которых только в одном появятся две шестерки одновременно, а в остальных 35 исходах будут другие результаты.

Пусть A - событие, состоящее в том, что две шестерки не появятся ни разу при nбросаниях пары костей. Тогда $p(A) = \frac{35^n}{36^n}$и $p(A) = 1 - \frac{35^n}{36^n}$. Решим неравенство: $1 - \frac{35^n}{36^n} > 0{,}5$, или $\left(\frac{35}{36}\right)^n < 0{,}5$, $\left(\frac{36}{35}\right)^n > 2$. При достаточно больших n данное неравенство, верно: $\left(\frac{36}{35}\right)^{24} \approx 1{,}966$, а $\left(\frac{36}{35}\right)^{25} \approx 2{,}022$.

Ответ: при $n = 25$бросаниях пары костей появление хотя бы одной пары шестерок более вероятно, чем их отсутствие.

Задание 2[83]. В рюкзаке у Тимофея 3 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Одновременно он достает 6 карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет ровно 2 синих и 2 красных карандаша.

Решение.

Всего карандашей в рюкзаке: $3 + 4 + 3 = 10$ штук.

Извлечь любые 6 карандашей из рюкзака: $n = C_{10}^{6}$способами.

Извлечь 2 синих карандаша из рюкзака: C_3^2 способами;

Извлечь 2 красных карандаша из рюкзака: C_4^2 способами;

Извлечь 2 зеленых карандаша из рюкзака: C_3^2 способами.

Таким образом, благоприятствующее событие $m = C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2$ способами можно извлечь желаемый набор карандашей.

Следовательно, вероятность того, что среди извлеченных Тимофеем из рюкзака 6 карандашей окажется 2 синих и 2 красных: $p\ \ A\ \ = \frac{C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2}{C_{10}^6}$.

Ответ: $\frac{C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2}{C_{10}^6}$.

Задание 3[50, С. 175].Составили множество чисел вида $x = 2^a 5^b$, где $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$(совпадения допускаются). Из этого множества случайным образом выбрали одно число. Какова вероятность того, что оно будет: а) меньше 20; б) нечетным; в) не оканчиваться нулем?

Решение.Рассмотрим числа вида $x = 2^a 5^b$, где $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$b \backslash a$	0	1	2	3	4
0	1	5	25	125	625
1	2	10	50	250	1250
2	4	20	100	500	2500
3	8	40	200	1000	5000
4	16	80	400	2000	10000

Получаем чисел вида $x = 2^a 5^b$, где $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$всего: $n = 5 \cdot 5 = 25$.

а) Чисел меньше 20: $m = 7$ вариантов. Вероятность того, что выбранное число будет меньше 20: $p\ \ A\ \ = \frac{7}{25}$.

б) Число вида $x = 2^a 5^b$, где $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ будет нечетным, если $\begin{matrix} a = 0, \\ b \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{matrix}$. Чисел, удовлетворяющих данному условию: 5 вариантов.

Вероятность того, что выбранное число будет нечетным: $p\ \ A\ \ = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

в) Число вида $x = 2^a 5^b$, где $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ не будет оканчиваться нулем, если $\begin{matrix} a = 0,\ b \in\ 0, 1, 2, 3, 4\ , \\ a \in\ 0, 1, 2, 3, 4\ ,\ b = 0 \end{matrix}$ Чисел, удовлетворяющих данному условию: 9 вариантов. Вероятность того, что выбранное число не будет оканчиваться нулем: $p\ A\ = \frac{9}{25}$.Ответ: а) $\frac{7}{25}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{9}{25}$.

Задание 4[50]. Из чисел, расположенных в пяти первых строчках треугольника Паскаля случайно выбирают одно число. Найдите вероятность того, что это число: а) двузначное; б) нечетное; в) кратное трем; г) не является простым числом.

Решение.

Номер строки	Треугольник Паскаля										
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1

Всего чисел в первых пяти строчках треугольника Паскаля: $n = 21$.

а) всего двузначных чисел: $m = 2$. Следовательно, вероятность того, что случайно выбранное число двузначное: $p\ A\ = \frac{2}{21}$;

б) всего нечетных чисел: $m = 15$. Следовательно, вероятность того, что случайно выбранное число нечетное: $p\ A\ = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$;

в) всего чисел кратных трем: $m = 3$. Следовательно, вероятность того, что случайно выбранное число кратно трем: $p\ A\ = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$;

г) всего составных чисел: : $m = 5$. Следовательно, вероятность того, что случайно выбранное число не является простым: $p\ A\ = \frac{5}{21}$;

Ответ: а) $\frac{2}{21}$; б) $\frac{5}{7}$; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{5}{21}$.

Задание 5[24, С. 39]. Из коробки, не заглядывая в нее, достают один шарик. Известно, что в коробке aшариков синего цвета и вероятность того, что вынутый шарик будет синего цвета, равна p. Сколько всего шариков в коробке?

Решение.По классическому определению вероятности: $p(a) = \frac{a}{x}$, следовательно, $x = \frac{a}{p}$всего шариков в коробке.Ответ: $\frac{a}{p}$.

Группа В

Задание 1.«В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.» [77].

Решение. $p\ A\ = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$вероятность того, что приедет зеленое такси.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

Задание 2. «Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов - первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?» [17].

Решение.

За первые 3 дня: $3 \cdot 17 = 51$ доклад, следовательно, на 4 и 5 день: $75 - 51 = 24$ доклада, а значит, в пятый день: 12 докладов. Таким образом, вероятность, что доклад профессора М. состоится в завершающий день конференции: $p\ A\ = \frac{12}{75} = \frac{4}{25}$.Ответ: $\frac{4}{25}$.

Задание 3[18]. Из цифр $0, 1, 3, 5, 7$ составлено пятизначное число. Найти вероятность, что оно делится на 5, с учетом, что цифры в числе повторятся не могут.

Решение.Общее количество пятизначных чисел: $5! - 4! = 120 - 24 = 96$, исключили случаи 4!, когда ноль стоит в старшем разряде.

Вычислим количество чисел, кратных 5 (число делится на 5, если в младшем разряде находится 5 или 0).

Если число заканчивается нулем, то $4! = 24$ способами можно переставить 4 остальные цифры в старших разрядах.

Если число заканчивается пятеркой, то $4! - 3! = 24 - 6 = 18$ чисел заканчивается 5 (исключили вариант, когда ноль стоит в старшем разряде).

Всего чисел кратных пяти: $24 + 18 = 42$. Таким образом, вероятность того, что наудачу составленное число из данных неповторяющихся в числе цифр будет кратно 5: $p(A) = \frac{42}{96} = \frac{7}{16}$.Ответ: $\frac{7}{16}$.

Задание 4[83]. На сборку поступило 10 деталей, среди которых 4 бракованные. Сборщик наудачу берет 3 детали. Найти вероятности событий: а) A - все детали бракованные; б) B - только одна деталь из трех бракованная; в) C - хотя бы одна из взятых деталей бракованная.

Решение. Выбрать любые 3 из 10 деталей $n = C_{10}^3$ способов.

а) Выбрать 3 бракованные детали: $m = C_4^3$способами. Следовательно, вероятность того, что все три взятые детали бракованные: $p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3}$.

б) Выбрать 1 бракованную деталь: C_4^1 способами;

Выбрать 2 детали без брака: C_6^2 способами.

Благоприятствующее событие «только одна деталь из трех бракованная»: $m = C_4^1 \cdot C_6^2$способами. Следовательно, вероятность того, что только одна деталь из трех бракованная: $p(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3}$.

в) Извлечь 3 детали без брака: C_6^3 способами. Вероятность того, что все три извлеченные детали без брака: $p(\overline{C}) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3}$.

Используя теорему сложения вероятностей противоположных событий, найдем вероятность того, что среди 3 извлеченных деталей хотя бы одна будет бракованной: $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Ответ: а) $\frac{C_4^3}{C_{10}^3}$; б) $\frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3}$; в) $\frac{5}{6}$.

Задание 5[24, С. 39]. В автомате находятся конфеты четырех разных форм. При 130-кратном нажатии кнопки в автомате конфета в форме шара выпадала 27 раз. Оцените вероятность появления такой конфеты при первом нажатии кнопки.

Решение.Благоприятствующих исходов: $m = 27$. Следовательно, вероятность появления конфеты в форме шара: $p(A) = \frac{27}{130}$.Ответ: $\frac{27}{130}$.

Группа С

Задание 1[18]. Из 30-томного собрания сочинений Льва Толстого ученик наугад выбирает один том. Какова вероятность того, что: а) в этом томе окажется роман «Анна Каренина», изданный в одном томе; б) этот том будет иметь четный номер; в) этот том будет иметь нечетный номер.

Решение.

а) Так как роман издан в одном томе, то $p(A) = \frac{1}{30}$.

б) 15 – четных; всего – 30. Значит $p(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

в) 15 – нечетных; всего – 30. Значит $p(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

Ответ: а) $\frac{1}{30}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$.

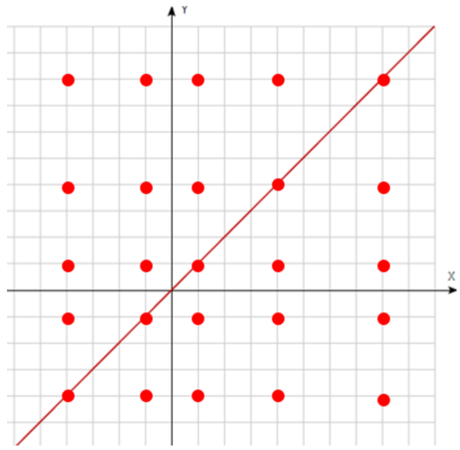
Задание 2. «Набирая номер сотового телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что эти цифры различны: предпоследняя цифра больше последней. Найти вероятность того, что абонент наберет правильный номер» [83].

Решение.Благоприятствующий исход один, следовательно, вероятность того, что абонент наберет правильный номер: $p(A) = \frac{1}{45}$.

Ответ: $\frac{1}{45}$.

Задание 3 [50 С. 173]**.** На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: $-4; -1; 1; 4; 8$(повторения допускаются). Из отмеченных точек случайным образом выбирают одну. Найдите вероятность того, что она лежит: а) правее оси ординат; б) ниже оси абсцисс; в) в четвертой координатной четверти; г) ниже прямой $y = x$.

Решение.Так как повторения допускаются, значит на координатной плоскости можно отметить $5 \cdot 5 = 25$ точек.



а) Правее оси ординат лежат точки, у которых абсцисса положительная: $1; 4; 8$. Количество точек, лежащих правее оси ординат: $3 \cdot 5 = 15$.

Вероятность того, что случайная точка окажется правее оси ординат: $p\ \ A\ \ = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

б) Ниже оси абсцисс лежат точки, у которых ордината отрицательная: $-4; -1$. Количество точек, лежащих ниже оси абсцисс: $5 \cdot 2 = 10$.

Вероятность того, что случайная точка окажется ниже оси абсцисс: $p\ \ A\ \ = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

в) В IVкоординатной четвери лежат точки, у которых абсциссы положительные $1; 4; 8$, а ордината отрицательная $-4; -1$. Количество точек, лежащих в IV координатной четверти: $3 \cdot 2 = 6$.

Вероятность того, что точка окажется в в IV координатной четверти: $p(A) = \frac{6}{25}$.

г) Ниже прямой $y = x$лежит 10 точек с координатами: $y < x$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-1; -4$	$1; -1$	$1; -4$	$4; 1$	$4; -1$	$4; -4$	$8; 4$	$8; 1$	$8; -1$	$8; -4$

Вероятность того, что точка окажется ниже прямой $y = x$: $p(A) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

Ответ: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{6}{25}$; г) $\frac{2}{5}$.

Задание 4. «Участники игры поочередно бросают в мишень дротики. Мишень представляет собой круг, в котором выделены малый круг и кольцевая зона, причем радиус малого круга вдвое меньше радиуса большого круга. Найдем вероятность того, что при попадании дротика в мишень точка попадания окажется в кольцевой зоне (*попадание дротика в любую точку мишени равновероятно и вероятность попадания дротика в любую область прямо пропорциональна площади области*)» [50].

Решение.Пусть R - радиус большого круга мишени, тогда $\frac{R}{2}$- радиус внутреннего круга. Площадь мишени: $n = \pi R^2$, площадь внутреннего круга: $\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$. Следовательно, $m = \pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3\pi R^2}{4}$ - площадь кольцевой зоны. Таким образом, вероятность того, что при попадании дротика в мишень точка попадания окажется в кольцевой зоне: $p(A) = \frac{\frac{3\pi R^2}{4}}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$.Ответ: $\frac{3}{4}$.

Задание 5[24, С. 39]. Насколько вероятно, что завтра будет гроза, если ее вероятность составляет 25%?

1. Точно будет гроза.
2. Скорее всего, будет гроза.
3. Скорее всего, грозы не будет.
4. Грозы не будет.

Ответ: 3. Скорее всего, грозы не будет.

Группа Д

Задание 1[84]. На конференцию «Молодежь. Наука. Общество» приехали 73 ученых из Казахстана, 10 из Греции и 14 из Польши. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что восьмым будет выступать ученый из Казахстана.

Решение.

Всего участников: $73 + 10 + 14 = 97$. Следовательно, вероятность того, что ученый из Казахстана будет делать доклад восьмым: $p\ A\ = \frac{73}{97}$.

Ответ: $p\ A\ = \frac{73}{97}$.

Задание 2[18]. Всего у экзаменатора 25 билетов по теории вероятности, в 10 из них встречается вопрос по теме «Классическое определение вероятности». Вычислите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете студенту не достанется вопроса по теме «Классическое определение вероятности».

Решение.Всего билетов, не содержащих вопроса по теме «Классическое определение вероятности»: $25 - 10 = 15,\ m = 15$. Значит, вероятность того, что студенту не достанется вопроса по теме «Классическое определение вероятности»: $p\ A\ = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Задание 3. «Перед новогодним праздником Деду Морозу выдали набор подарков. Все подарки сделаны в виде одинаковых по размеру пластмассовых шаров. всего в мешок Деда Мороза положили 12 красных, 14 белых, 13 синих и 11 оранжевых шаров. Какова вероятность того, что первый вытащенный подарок будет: а) белого цвета; б) красный или оранжевый; в) одного из цветов российского флага; г) не оранжевого цвета?» [51, С. 173].

Решение.

Всего шаров: $12 + 14 + 13 + 11 = 50$ штук.

а) Вероятность того, что первый вытащенный подарок белого цвета: $p(A) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$;

б) Вероятность того, что первый вытащенный подарок красного или оранжевого цвета: $p(A) = \frac{12+11}{50} = \frac{23}{50}$;

в) Вероятность того, что первый вытащенный подарок одного из цветов российского флага (белый, синий, красный): $p(A) = \frac{14+13+12}{50} = \frac{39}{50}$;

г) Вероятность того, что первый вытащенный подарок не оранжевого цвета: $p(A) = \frac{50-11}{50} = \frac{39}{50}$;

Ответ: а) $\frac{7}{25}$; б) $\frac{23}{50}$; в) $\frac{39}{50}$; г) $\frac{39}{50}$.

Задание 4[51, С. 176]. Для заданного события назовите противоположное:

а) мою новую соседку по парте зовут или Таня, или Аня;

б) явка на выборы была от 40% до 47% включительно;

в) из пяти выстрелов в цель попали хотя бы два;

г) на контрольной я не решил одну или две задачи из пяти.

Решение.

а) Aили Bпротивоположно «не (Aи B)»: Мою новую соседку по парте зовут не Таня и не Аня;

б) Явка на выборы была или от 0% до менее 40%, или более 47% до 100%;

в) Возможное значение попаданий: $U \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Данное событие по числу попаданий: $A \in \{2; 3; 4; 5\}$. Противоположное событие: $B \in \{0; 1\}$.

Из пяти выстрелов в цель попали менее двух раз.

г) на контрольной работе я не решил более двух задач из пяти.

Для *организации контроля* по теме предлагается самостоятельная работа, рассчитанная на 1 урок. Приведем варианты самостоятельной работы, содержание которой дифференцированно с учетом типологических групп.

Группа А

Задание 1.«На борту самолета 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 - за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир Nвысокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру N достанется удобное место, если всего в самолете 300 мест» [77].

Задание 2. «Куб с окрашенными гранями распилен на $n = 216$кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Извлекаются 3 кубика. Найти вероятность того, что у них будет в сумме 2 окрашенные грани» [83].

Задание 3[65, С. 305]. Ученик знает ответы не на все из 16 вопросов зачета. В каком случае вероятность того, что он сможет ответить на один случайно выбранный им вопрос, больше, чем вероятность того, что ему удастся ответить на два (по его выбору) из случайно выбранных им трех вопросов?

Группа В

Задание 1[50, С. 176]. Ученику предложили написать на доске любое натуральное число от 100 до 200. Найдите вероятность того, что это число не является кубом целого числа.

Задание 2.«Из колоды в 36 карт извлекают сразу три карты. Найти вероятность, что эти карты будут дамой, семеркой и тузом» [83].

Задание 3[83]. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом №1 и 4 детали - заводом №2. Наудачу взяты две детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом №1.

Группа С

Задание 1.«На рок-фестивале выступают группы - по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии?» [83]

Задание 2[51 С. 174]. Ученику предложили написать на доске любое натуральное число от 100 до 200. Найдите вероятность того, что это число нечетно.

Задание 3[83]. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет от 2 до 8 очков.

Группа Д

Задание 1 [51, С. 176]. Назовите событие, для которого противоположным является данное событие:

а) на контрольной работе больше половины класса получили пятерки;

б) все семь пулек в тире у меня попали мимо цели;

в) в нашем классе - все умные, и красивые;

г) в кошельке у меня есть или пять рублей одной монетой, или пять долларов одной купюрой.

Задание 2[78]. На тарелке 5 пирожков с картошкой, 3 пирожка с капустой, 7 пирожков с мясом. Арина наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с капустой.

Задание 3[78]. Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно кратно трем?

Решение данной самостоятельной работы представлено в Приложении А.

§9. Педагогический эксперимент и его результаты

Участниками исследования стали 57 учащиеся 8-х классов,обучающихся по учебному пособию Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюка, К.И. Нешкова [49]. Площадками для проведения эксперимента:общеобразовательная школа №75 г.о. Тольятти и математическая школа на базе НИЛ «Школа математического развития и образования - 5^{+}» (с 18.04 по 18.05.2019 г.).

Целью *констатирующего этапа эксперимента* являлось выявление у учащихся умения решать задачи международных сравнительных исследований TIMSS и PISA.

Согласно концепции ОСОКО [15, С. 4], процедурам проводим ЕСОКО [26, с. 3] и примерным основным образовательным программам основного общего [66] и среднего [67] образования оценка качества математической грамотности в ходе проведения международных сравнительных исследований РФ является неотъемлемой частью образовательного процесса.Данный мониторинг помогает выяснить не только проблемные темы образовательных программ по математике для учащихся, но и судить о положении всего российского математического образования в мировой системе с учетом международных образовательных стандартов.

В ходе анализа инструментария TIMSS и PISA, нами были составлены тестирования по проверке усвоения образовательной программы по математике «Тестирование – TIMSS» (Приложение Б) и по оценке математической грамотности «Тестирование - PISA», содержащие следующие типы заданий:

Тестирование – TIMSS

Предметная область: *Числа*

- свойства чисел: применение коммутативного закона при выполнении основных операций и обратных им (задание 3);
- пропорции: свойство пропорций, алгоритм решения пропорций (задание 4, задание 18);
- проценты (задание 6, задание 19);
- обыкновенные дроби, нахождение части числа (задание 8);
- сравнение дробей (задание 17);

Предметная область: *Алгебра*

- решение уравнений с двумя переменными (задание 1);

- алгебраические выражения (задание 2);
- составление математической модели, заданной ситуации (задание 9);
- решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными (задание 10);
- функции и их графики(задание 11);
- выявление закономерностей (задание 20);
- значения квадратного корня из натурального числа (задание 25).

Предметная область: *Геометрия*

- измерение геометрических величин: вычисление площади геометрических фигур, нахождение периметра, применение теоремы Пифагора (задание 5, задание 24);
- симметрия: построение фигуры, симметричной данной относительно указанной прямой (задание 12);
- развертка геометрических тел (задание 16);
- применение теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, подобие треугольников (задание 23);

Предметная область: *Анализ данных*

- вероятность и статистика: интерпретация случайного события, классическое определение вероятности (задание 7, задание 21, задание 22);
- вычисление статистических показателей: среднее значение, мода, медиана, размах, алгоритм подсчета среднего значения нескольких чисел (задание 13, задание 15);
- чтение, построение столбчатой диаграммы на основе данных с указанной точностью (задание 14).

Задачи по оценке математической грамотности (Тестирование - PISA), предложенные нами учащимся, описаны в §6. Международное исследование PISA, содержат следующие типы заданий:

Тестирование - PISA

Содержательная область: *Количество*

- числовые системы: натуральные, целые числа, рациональные числа; основные операции и свойства числовых систем, правила округления (задание 1 - в §6 задание 18 «Радиаторы»; задание 2 - в §6 задание 19 «Облицовка дома»);

- определение закономерности (задание 10 - в §6 задание 17 «Последовательность лесенок»);

Содержательная область: *Изменения и отношения*

- составление буквенных выражений и формул по условию задачи (задание 3 - в §6 задание 1 «Походка», задание 4 - в §6 задание 3 «Тенденция роста»);

Содержательная область: *Пространство и форма*

- измерение геометрических величин: вычисление площади геометрических фигур, объема геометрического тела (задание 5 - в §6 задание 23 «Площадь континента», задание 6 - §6 задание 25 «Калибр»);

Содержательная область: *Неопределенность и данные*

- чтение, извлечение нужной информации из столбчатых и круговых диаграмм, таблиц(задание 7 - в §6 задание 12 «Теплый пол», задание 9 - в §6 задание 4 «Прибыль»);

- решение комбинаторных задач путем перебора вариантов, основных формул комбинаторики(задание 8 - в §6 задание 11 «Пицца»)

Приведем результаты данных тестирований (Таблица 13).

Таблица 13

Результаты тестирования - TIMSS и тестирования - PISA

Предметная (содержательная) область TIMSS (PISA)	Выполнили верно		Выполнили неверно		Не приступили к заданию	
	TIMSS	PISA	TIMSS	PISA	TIMSS	PISA
Числа (Количество)	74% (42)	54% (31)	26% (15)	44% (25)	0% (0)	2% (1)
Алгебра (Изменения и отношения)	72% (41)	68% (39)	28% (16)	32% (18)	0% (0)	0% (0)
Геометрия	51% (29)	47% (27)	39% (22)	39% (22)	10% (6)	14% (8)

(Пространство и форма)						
Анализ данных (Неопределенность и данные)	40% (23)	39% (22)	46% (26)	61% (35)	14% (8)	0% (0)

Проведенный анализ показал, что неплохие результаты показали учащиеся в предметных областях тестирования «Числа» (Количество) и «Алгебра» (Изменения и отношения), как в тестировании TIMSS 74% восьмиклассников, так и в тестировании PISA - 54% учащихся. Проблемными оказались области геометрия (TIMSS - 51%, PISA - 47%) и анализ данных (TIMSS - 40% и PISA - 39% верно выполненных заданий). Анализ работ показал, что для учащихся вызывают трудности задания с обоснованием выбора своего ответа (тестирование - TIMSS). Низкий процент выполненных заданий PISA, такжеговорит о том, что задачи, содержащие информацию в различных формах (столбчатые, круговые диаграммы, таблицы, рисунки) и многословное описание данной проблемы вызывают большие трудности для школьников.

По результатам проведенной работы выявлены(по результатам заданий с открытой формой ответа) следующие виды ошибок (Таблица 14).

Для более детальной оценки полученных результатов, на данном этапе эксперимента был применен расчет коэффициента усвоения учебного материала [21].

Таблица 14

Виды ошибок обучающихся

ТестированияTIMSS и PISA		
Предметная (содержательная) область: Числа (Количество)		
Виды ошибок		
Вычислительная	Неверно применена формула (правило)	Нет обоснования ответа
11	7	-
Предметная (содержательная) область: Алгебра (Изменения и отношения)		
Виды ошибок		
Вычислительная	Неверно применена формула (правило)	Нет обоснования ответа
8	13	-
Предметная (содержательная) область: Геометрия (Пространство и форма)		

Виды ошибок			
Вычислительная	Неверно применена формула (правило)	Нет обоснования ответа	Неверные построения
6	19	9	7
Предметная (содержательная) область: Анализ данных (Неопределенность и данные)			
Виды ошибок			
Вычислительная	Неверно применена формула (правило)	Нет обоснования ответа	Неверные построения
9	17	11	5

Правильный ответ - 1балл, неправильный – 0 баллов; S_t - сумма верных ответов тестирования - TIMSS,n_t - общее число вопросов; S_p - сумма верных ответов тестирования - PISA, n_p - общее число вопросов. В общем случае, коэффициент усвоения учебного материала (K) равен:$K = \frac{S}{10n}$.

«При K, равном от 1,00 до 0,90 (или от 100% до 90% правильных ответов), оценка – «5»; при К от 0,80 до 0,70 (или от 80% до 70%), оценка – «4»; при К от 0,60 до 0,50 (от 60% до 50%), оценка – «3»; наконец, при К ниже 0,50 (50%) – оценка «2»» [21, С. 30]. В ходе эксперимента получили следующие результаты (Таблица 15).

Таблица 15

Результаты тестирований

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку	
	TIMSS	PISA
«5»	20%	3%
«4»	37%	10%
«3»	37%	69%
«2»	6%	18%

Анализ проделанной работы позволяет сделать вывод, что процентное соотношение учащихся справившихся с тестированием TIMSS (94% учеников)больше, чем процент учащихся справившихся с тестированием PISA (82% учеников). Полученные результаты аналогичны результатам мониторинга учащихся 8-х классов по России.

В рамках *поискового этапа эксперимента* во второй половине 2018-2019 учебного года в МБУ «Школа №75» г.о. Тольятти была осуществлена апробация разработанной системы задач для подготовки школьников к международному исследованию оценки качества математического образования (PISA) и набора олимпиадных заданий старшей школы, представленных в §7 данной работы.

Выводы к главе II

1. Раскрыт вопрос оценки качества математического образования на международных олимпиадах.

2. Разработана система задач для подготовки школьников к международному исследованию оценки качества математического образования.

3. Представлены методические рекомендации по подготовке к олимпиадам.

4. Разработаныметодические рекомендации для подготовки к международному исследованию учащихся по теме «Элементы теории вероятностей».

9. Проведен педагогический эксперимент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В ходе проведенного исследования были выявлены*содержательные особенности* международных исследований, а именно вTIMSS разработка задачного материала осуществляется на основе содержания программы по математике. А значит, инструментарий точно ориентирован на предметную область:

- Алгебра;

- Анализ данных;

- Числа;

- Геометрия.

В PISA задачи практической направленности. Разработка инструментария осуществляется на основе проблем, возникающих в повседневной жизни, которые возможно разрешить средствами математики.

Выделены предметные области:

- Изменение и отношения;

- Неопределенность и данные;

- Количество;

- Пространство и форма.

2. *Методические особенности международных исследований.*

Международные экспертыTIMSS и PISA выделяют виды деятельности учащихся при решении представленной проблемы:

- формулировать ситуацию математически (создание математической модели);

- применять математические факты;

- интерпретировать.

В ходе работы выделили содержательно-методические лини PISA и TIMSS:

- Числовая линия;

- Функциональная линия;

- Стохастическая линия;

- Геометрическая линия;

- Линия уравнений и неравенств.

3. Для учителей математики заслуживает внимание ознакомление:

- с выводами о связи результатов международного исследования с факторами, характеризующими различные стороны учебного процесса и его участников (учащиеся, учителя, администрация школы, родители);

- с характером тестовых заданий, структурой вариантов тестов;

- с перечнем математических тем, составленными разработчиками концепции исследования, владение которыми необходимо для успешного написания тестирования.

Для учителей международная ассоциация по оценке образовательных достижений IEA (*InternationalEnergyAgency, Франция*) регулярно организует семинары, в рамках которых проходит ознакомление с используемыми в исследованиях методиками и организуется работа с международными и национальными базами данных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. XVII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ - 2009». 7 – 11 классы. – 2009. – 5 с.

2. XXXVIII Турнир имени М.В. Ломоносова 27 сентября 2015 года. Задания. Решения. Комметарии / Сост. М.А. Зарубина. – М.: МЦНМО, 2017. – 128 с.

3. Аванесов, В.С. Применение тестовых форм в RaschMeasurement // Педагогические измерения, 2005, №4. – С. 3-20.

4. Агаханов, Н. XLV Международная математическая олимпиада / Н. Агаханов, П. Кожевников, Д. Терешин // Квант. – 2005. - №2. – С. 49-53.

5. Агаханов, Н. XLVI Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н. Агаханов, П. Кожевников, О. Подлипский, Д. Терешин // Квант. – 2006. - №5. – С. 46-49.

6. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Коляин, М. В. Ткачева. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2016.

7. Алимов, Ю.М. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – 17-е изд. – М. : Просвещение, 2012. – 287 с.

8. Амонашвили, Ш.А. Воспитательная и образовательная функция оценки учения школьников / Ш. А. Амонашвили: Экспериментально-педагогическое исследование. – М.: Педагогика, 1984. 296 с.

9. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 19-е изд. – М. : Просвещение, 2009. –384 с.

10. Балаян, Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э.Н. Балаян. – 3-е изд. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 364 с.

11. Бегунц А.В., Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005-2015) / А.В. Бегунц, П.А. Бородин [и др.]. – М.: МЦНМО, 2016. – 175 с.

12. Биркгоф, Г. Современная прикладная алгебра.: уч. для вузов, 2-е изд., стер. /Г. Биркгоф, Т. Барти /Пер. с англ. Ю. И. Манина. – СПб.: Лань, 2005. – 400 с.

13. Болотов, В.А. Анализ опыта создания российской системы оценки качества образования. Часть 1 / В. А. Болотов, И. А. Вальдман, Г. С. Ковалева, М. А. Пинская //Управление образованием: теория и

практика. – 2013. С. 55-56 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://iuorao.ru/images/jurnal/11_2/bolotov.pdf.

14. Болотов, В.А. Анализ опыта создания российской системы оценки качества образования. Часть 2 / В. А. Болотов, И. А. Вальдман, Г. С. Ковалева, М. А. Пинская // Управление образованием: теория и практика. – 2013. С. 55-56 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://iuorao.ru/images/jurnal/11_3/bolotov_2.pdf.

15 Болотов, В.А. Российская система оценки качества образования: главные уроки / В. А. Болотов, И. А. Вальдман, Г. С. Ковалева, М. А. Пинская // Качество образования в Евразии. – 2013. - №1. – С. 85-121.

16. Болотов, В.А. Опыт России в области оценки образовательных достижений школьников / В. А. Болотов, Г. С. Ковалева // Инновационные проекты и программы в образовании. – 2010/5/ под ред. А. А. Кузнецова. – Москва, 2010. - С. 3-10.

17. Бродский, Я.С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика / Я.С. Бродский. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. – 544 с.

18. Венцель, Е.С. Теория вероятностей / Е. С. Венцель. − М. Наука, 1969. − 576 с.

19. Виленкин, Н.Я. Алгебра. 9 класс: учеб. с углуб. изуч. матем. / Н. Я. Виленкин, Г. С. Сурвилло, А. С. Симонов, А. И. Кудрявцев. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 369 с.

20. Гаваза, Т.А. «Трудные задачи» по теории вероятностей в средней школе. Методический аспект / Г. А. Гаваза // Естественные и физико-математические науки. – 2015. -№6. – С. 61-68.

21. Гусев, В.А., Смирнова, И.М. Магистерская диссертация по методике преподавания математики: Методические рекомендации. – М.: Прометей, 1996. – 107 с.

22. Демидова, М.Ю. Основные результаты международного исследования качества математического и естественнонаучного образования,

TIMSS-2011. Аналитический отчет /М. Ю. Демидова и др. под науч. ред. Г. С. Ковалевой. М.: МАКС Пресс, 2013. – 154 с.

23. Демонстрационный вариант теста TIMSS-2019 /Министерство просвещения РФ ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» Центр оценки качества образования [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://etimss.testoko.ru/test/.

24. Денищева, Л. TIMSS-2015: Работа над ошибками по теории вероятностей и статистике / Л. Денищева, К. Краснянская // Математика. – 2017. – май-июнь. – С. 39-45.

25. Дорофеев, Г.Д. Дифференциация в обучении математике / Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, В. В. Фирсов // Математика в школе. – 1990.№4. – С.15-21.

26. ЕСОКО. Единая Система Оценки Качества Образования. [Электронный ресурс]. Режим доступа:http://obrnadzor.gov.ru/common/upload/news/infomaterial/ESOCO_rus_Print.pdf

27. Зеленский, А.С. олимпиада школьников «Ломоносов 2014-2015» по математике для 10-11 классов / А.С. Зеленский, А.И. Козко [и др.] // Математика в школе. – 2016. - №1. – С. 12-19.

28. Зубелевич, Г.И. Сборник задач московских математических олимпиад. / Г.И. Зубелевич.- 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1971. – 304 с.

29. Ковалева, Г.С. Возможные направления совершенствования общего образования для обеспечения инновационного развития страны (по результатам международных исследований качества общего образования) /Материалы к заседанию президиума РАО (27 июня 2018 г.) /доклад Ковалевой Г.С. руководителя Центра оценки качества образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.instrao.ru.

30. Ковалева, Г.С. Международная программа PISA. Примеры заданий по чтению, математике и естествознанию / Г.С. Ковалева, Э.А. Красновский, Л.П. Краснокутская // Министерство просвещения Российской Федерации ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» Центр оценки качества образования [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/pisa18/pisa2018_pub.html.

31. Ковалева, Г.С. Результаты международного сравнительного исследования PISA в России /Г. С. Ковалева, Э. А. Красновский, Л. П. Краснокутская, К. А. Краснянская // PISA – Международная программа оценки знаний и умений учащихся. Москва: Центр ОКО ИОСО РАО, 2001. - 20 с.

32. Колягин, Ю.М. Профильное обучение: проблемы и перспективы / Ю. М. Колягин // Математика. – 2005. - №8. – С.17-21.

33. Колягин, Ю.М. Русская школа и математическое образование: Наша гордость и наша боль / Ю. М. Колягин. - М.: Просвещение, 2001. - 318 с.

34. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.

35. Комкина, Т.А. Исследования показателей качества образования в Российской Федерации с учетом региональных особенностей: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук: 08.00.05: М., 2012. – 21 с.

36. Концепция направления «математическая грамотность» исследования PISA-2021 /ФИОКО Федеральный институт оценки качества образования [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://fioco.ru/Contents/Item/Display/2201978.

37. Концепция общероссийской системы оценки качества образования/ под ред. А.Н. Лейбовича. – М. Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки, 2007.

38. Костенко, И.П. История и результаты реформ математического образования России (1931-2009). / Математика и математическое образование: сборник трудов VIIIМеждународной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса), 26-29 апреля 2017 года, Россия, г. Тольятти / под общ. ред. Р.А. Утеевой. - Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. - 468 с.

39. Куланин, Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике. / Е.Д. Куланин [и др.] – 5-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 624 с.

40. Куликов, Л.Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел.: уч. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов / Л. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с.

41. Курьянова Е.А. Простые транзитивные группы подстановок // Естественные и технические науки: тезисы докладов XLIV-й Самарской област. студ. науч. конф. Самара, 10-20 апреля 2018 года. Часть I / отв. ред. А.Ф. Крутов. - Самара: Самарский университет: САМАРАМА, 2018. – С. 42.

42. Курьянова Е.А. Оценка качества математического образования российских школьников в аспекте международных исследований/ Р. А. Утеева, Е. А. Курьянова //Научное отражение. 2017. № 5-6 (9-10). - С. 171-173.

43. Курьянова, Е.А. Международная оценка качества обучения математике школьников в России /Е.А. Курьянова // Математика и современность: материалы Международной заочной научно-практической конференции студентов и молодых ученых. - Луганск: Книта, 2018. – С.171-173.

44. Курьянова, Е.А. О проблеме оценки качества математического образования российских школьников. / Е.А. Курьянова //Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования: материалы XXI Всероссийской (IX с Международным участием) научно-практической конференции. 30 ноября - 1 декабря 2018 года, г. Самара. - Самара: СГСПУ; ООО "Порто-принт", 2018. - С. 251-254.

45. Курьянова, Е.А. Содержательно-методические особенности международных исследований по оценке качества математического образования российских школьников // Математика и математическое образование: сборник трудов по материалам IX международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», 24-26 апреля 2019 г., Россия, г. Тольятти /под общ. ред. Р.А. Утеевой. - Тольятти: Изд-во ТГУ, 2019. - С. 357-362.

46. Курьянова, Е.А. Транзитивные простые группы подстановок и элементы теории групп в школьном курсе математики // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – 1 оптический диск. – С. 232-234.

47. Курьянова, Е.А. Элективный курс «Элементы теории групп» как средство развития обучающихся математической школы // «Математическое образование: современное состояние и перспективы» (к 100-летию со дня рождения профессора А.А. Столяра), 20-21 февраля 2019 года, Беларусь, г. Могилев (в печати).

48. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2013. –287 с.

49. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков. – М.: Просвещение, 2018. –400 с.

50. Мордкович, А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2014. – 309 с.

51. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2009. - 239 с.

52. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2013. - 400 с.

53. Мордкович, А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2014. – 343 с.

54. Найденова, Н.Н. Социально – педагогические факторы в международных исследованиях в образовании: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: 13.00.01: Москва, 2007. – 163 с.

55. Нечаев, В.А. Задачник-практикум по алгебре. Группы. Кольца. Поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения.: уч. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / В. А. Нечаев. – М.: «Просвещение», 1983. – 121 с.

56. Основные результаты международного исследования PISA-2000 /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

57. Основные результаты международного исследования PISA-2003 /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

58. Основные результаты международного исследования PISA-2006 /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в

сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

59. Основные результаты международного исследования PISA-2009 /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

60. Основные результаты международного исследования PISA-2012 /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

61. Основные результаты международного исследования PISA-2015 /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

62. Перовский, Е.И. Проверка знаний учащихся в средней школе/ Е. И. Перовский. – М.: Издательство АПН РСФСР, 1960. – 168 с.

63. Полякова, Т.С. История математического образования в России. - М.: Изд-во Московского ун-та, 2002. - 624 с.

64. Пратусевич, М.Я. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 11 класс: углуб.уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, В. Н. Соломин, А. Н. Головин. – 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 2017. – 286 с.

65. Пратусевич, М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: проф. уровень / М.Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. – М.: Просвещение, 2010. – 463 с.

66. Примерная основная образовательная программа основного общего образования/В редакции протокола №3/15 от 28.10.2015 федерального учебно-методического объединения по общему образованию [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://muravin2007.narod.ru/p101.htm.

67. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования /протокол №2/16-з от 28.06.2016 федерального учебно-методического объединения по общему образованию [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://metodist.lbz.ru/docs/pso16.pdf.

68. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре: уч. пособие. 13-е изд., стер. – СПб: Лань, 2010. – 480 с.

69. Результаты международного исследования TIMSS-1995, 8 класс /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

70. Результаты международного исследования TIMSS-1999, 8 класс /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

71. Результаты международного исследования TIMSS-2003, 8 класс /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

72. Результаты международного исследования TIMSS-2007, 8 класс /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

73. Результаты международного исследования TIMSS-2011, 8 класс /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

74. Результаты международного исследования TIMSS-2015, 11 класс /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.sbnedu.ru/Docs/metod/TIMSS/Report_TIMSS2015_GR11.pdf.

75. Результаты международного исследования TIMSS-2015, 4 класс /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

76. Результаты международного исследования TIMSS-2015, 8 класс /Министерство образования и науки РФ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/public.html#pisa_pub.

77. РешуЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://math.reshuege.ru/.

78. Родионов, М.А. Психология мотивации учебной деятельности / М. А. Родионов, Ю. А. Макаров: учебное пособие. - Пенза: Изд-во ПГПУ им. В. Г. Белинского.- 2004.- 186 с.

79. Руководство по проведению исследования PISA-2018 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://prolschool45.ucoz.ru/DOCUMENTI/PISA/prilozhenie_2_rukovodstvopoprovedenijuissledovanij.pdf

80. Руководство по проведению тестирования TIMSS-2015 (8 класс) /Международное исследование качества математического и естественнонаучного образования /Министерство образования и науки РФ Институт стратегии развития образования Центр оценки качества образования [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://aocoko.ru/omko/mniko/miko/miko-timss/timss-2015/dokumenty-soprovoditelnye-materialy/6-TIMSS-8.pdf.

81. Сайдуллаева, Н.С. Особенности межпредметных связей математики и физики / Н. С. Сайдуллаева, Р. С. Спабекова, М. А. Абдуалиева // Математика и математическое образование: сборник трудов VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 26-29 апреля 2017 года)/ под общ. ред. Р. А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. – С.146-152.

82. Саранцев, Г.И. Методология методики обучения математике / Г. И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 2001. – 144 с.

83. Сборник задач на классическое определение вероятности/ Дополнительный материал к уроку/ Высшая математика [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://mathprofi.ru.

84. Смирнова, И.М. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 2-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2007. – 376 с.

85. Смолеусова, Т.В. Методические инновации для системного обновления начального математического образования: диссертация на соискание ученой степени доктора педагогических наук: 13.00.02: Новосибирск, 2017. – 393 с.

86. Терновая, Н.А. История школьного математического образования в России и за рубежом: Учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 050100 - Педагогическое образование (профиль подготовки - Математическое образование) / Н.А. Терновая - Саратов, 2012. - 76 с.

87. Тропина, Н.В. Оценка качества математического образования учащихся классов с углубленным изучением математики: автореферат на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: 13.00.02: Новосибирск, 2000. – 10 с.

88. Трушин, Б.В. Дистанционный этап олимпиады «Физтех-2012»/ Б.В. Трушин, О.К. Подлипский// Математика в школе. – 2014. -№6. – С. 24-30.

89. Утеева, Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: 13.00.02: Москва, 1998. – 363 с.

90. Утеева, Р.А. Актуальные проблемы реализации стохастической содержательной линии в школьном курсе математики / Р. А. Утеева, Г. С. Оразымбетова// Письма в Эмиссия.Оффлайн. (TheEmissiaOfflineLetters):

электронный научный журнал. – Ноябрь 2012, ART 1908. – СПб., 2012. – URL: http://www.emissia.org/offline/2012/1908.htm.

91. Утеева, Р.А. Дифференцированное обучение математике учащихся средней школы: Пособие по спецкурсу и спецсеминару для студентов математических специальностей педагогических вузов / Р. А. Утеева. - М.: Прометей,1996. - 118 с.

92. Утеева, Р.А. Дифференцированные задания по математике. 6 класс: Пособие для учителя/ Р. А. Утеева – Тольятти, 1996. - 53 с.

93. Утеева, Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография. - М.: Прометей, 1997. - 230 с.

94. Утеева, Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис. …д-ра. пед. наук/Р.А. Утеева – М. – 1998. – 363 с.

95. Утеева, Р.А., Курьянова, Е.А. Оценка качества математического образования российских школьников в аспекте международных исследований /Р.А. Утеева, Е.А. Курьянова//Научное отражение. Научно-издательский центр "НаукоПолис".-2017. - №5-6. – С. 171-173.

96. Фадеев, Д.К. Элементы высшей математики для школьников. - М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1987. – 336 с.

97. Фарков, А.В. Математические олимпиады: методика подготовки: 5-8 классы. - М.: ВАКО, 2012. - 176 с.

98. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс] / М-во 10 3 образования и науки РФ. – М.: Просвещение,2012. – 52 с. Режим доступа: https://минобрнауки.рф/documents/2365. - Последнее обновление 20.06.19.

99. Фридман, Л.М. Теоретические основы обучения математике/ Л. М. Фридман: пособие для педагогических высших учебных заведений. – М.: МПСИ: Флинта, 1998. – 160 с.

100. Хазанкин Р.Г. Как увлечь учеников математикой// Народное образование. 1987. С. 55-59

101. Ханнанова, Т.А. Формирование общеучебных умений учащихся основной школы на основе интерактивных компьютерных заданий по физике: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: 13.00.02: Москва, 2010. – 224 с.

102. Шарич, В.З. Цели и задачи современных математических олимпиад: наука, спорт, поступление или престиж? /Проблемы современного математического образования: Материалы Российско-Американского симпозиума 18-20 ноября 2016 г./ Под ред. А. П. Карпа, С. А. Поликарпова. - М.: МПГУ, 2017. - 148 с.

103. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев: кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.

104. Юртанова, Е.М. Теория и методика оценки качества математических знаний учащихся средних общеобразовательных учреждений: автореферат на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: 13.00.02: Саранск, 2007. – 10 с.

105. Gronmo L.S., Lindquist M., Arora A., Mullis V.S. TIMSS 2015 mathematics frameworks. [Электронныйресурс]// TIMSS 2015 Assessment Frameworks. – 2016. – PP. 3-9. URL: https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_Frameworks_Full_Book.pdf (датаобращения20.06.2019).

106. Hutchison D., Schagen I. Comparisons Between PISA and TIMSS – Are We the Man with Two Watches? [Электронныйресурс]// National Foundation for Educational Research. - 2006. – PP. 1-32. URL: http://www.iea.nl/sites/default/files/irc/IRC2006_Hutchison_Schagen.pdf (датаобращения: 20.06.2019).

107. International Study Center. TIMSS and PIRLS: [сайт]. URL: http://www.timss.org.

108. Mullis I.V.S., Martin M.O., Goh S. TIMSS 2015 encyclopedia: Education policy and curriculum in mathematics and science. [Электронныйресурс] // TIMSS & PIRLS International Study Center. 2016. - URL: http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia (датаобращения 30.05.2019).

109. OECD. Better policies for better lives. Programme for International Student Assessment: [сайт]. URL: http://www.oecd.org/pisa/.

110. Wu, M. A comparison of PISA and TIMSS 2003 achievement result in mathematics. / Margaret Wu, 2009. – p. 26.

Приложение А

Решение самостоятельной работы по теме

«Классическое определение вероятности»

Группа А

1. Решение.Пассажиру Nв самолете удобно на: $m = 12 + 18 = 30$ местах. Следовательно, вероятность того, что Nдостанется удобное место: $p\ A\ = \frac{30}{300} = \frac{1}{10}$.Ответ: $\frac{1}{10}$.

2. Решение.Длина ребра с учетом распилки: $l = \sqrt[3]{216} = 6$кубиков.

С 3 окрашенными гранями: 8 штук (вершины куба); с 2 окрашенными гранями: $4 \cdot 12 = 48$ штук (12 ребер куба); с 1 окрашенной гранью: $4 \cdot 4 \cdot 6 =$ $= 96$ штуки (6 граней куба); неокрашенных: $216 - 8 - 48 - 96 = 64$.

Извлечь 3 кубика: $n = C_{216}^3$способов. При извлечении 3 кубиков возможны два случая:

I. Извлечен 1 кубик с двумя окрашенными гранями и 2 неокрашенных кубика: $C_{48}^1 \cdot C_{64}^2$способов;

II. Извлечено 2 кубика с одной окрашенной гранью и 1 неокрашенный кубик: $C_{96}^2 \cdot C_{64}^1$ способа;

Количество благоприятствующих исходов:
$m = C_{48}^1 \cdot C_{64}^2 + C_{96}^2 \cdot C_{64}^1$способов извлечь 3 кубика, суммарное количество граней которых равно двум.

Таким образом,вероятность извлечь 3 кубика, суммарное количество граней которых равно двум: $p\ A\ = \frac{C_{48}^1 \cdot C_{64}^2 + C_{96}^2 \cdot C_{64}^1}{C_{216}^3}$

Ответ: $p\ A\ = \frac{C_{48}^1 \cdot C_{64}^2 + C_{96}^2 \cdot C_{64}^1}{C_{216}^3}$.

3. Решение.Пусть a - количество вопросов на которые ученик знает ответы, тогда вероятность ответа на 1 случайно выбранный вопрос: $\frac{a}{16}$.

Выбрать любых 3 вопроса из 16 вопросов: C_{16}^3 способами.

Выбрать 3 вопроса, которые ему известны: C_a^3способами.

Выбрать 3 вопроса, из которых ему известны только два: $C_a^2 \cdot C_{16-a}^1$способами. Следовательно, вероятность того, что ученик ответит хотя бы на 2 из 3 случайных вопросов: $\frac{C_a^3+C_a^2\cdot C_{16-a}^1}{C_{16}^3}=\frac{a(a-1)(23-a)}{7\cdot 15\cdot 16}$.

Решим неравенство: $\frac{a(a-1)(23-a)}{7\cdot 15\cdot 16}<\frac{a}{16}, \Rightarrow a\in(0;8)\Rightarrow$
$a\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Таким образом, при данных значениях $a\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$ вероятность того, что ученик сможет ответить на один случайно выбранный им вопрос, больше, чем вероятность того, что ему удастся ответить на два из трех вопросов.Ответ: $a\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Группа В

1. Решение.Всего натуральных чисел от 100 до 200: $n=101$ число. В данном промежутке кубом целого числа является только $125=5^3$, значит, благоприятствующее событие будет состоять: $m=101-1=100$ чисел.Следовательно, вероятность того, что написанное учеником число не является кубом целого числа: $p\ \ A\ \ =\frac{100}{101}$.Ответ: $\frac{100}{101}$.

2. Решение.Извлечь 3 любые карты из колоды: C_{36}^3способами;

Извлечь 1 даму: C_4^1 способами;

Извлечь 1 семерку: C_4^1 способами;

Извлечь 1 туза: C_4^1 способами;

Благоприятствующее событие «извлечены дама, семерка, туз»:
$m=C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1$ способами. Следовательно, вероятность того, что из колоды будут извлечены дама, семерка и туз: $p\ \ A\ \ =\frac{C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1}{C_{36}^3}$.Ответ: $\frac{C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1}{C_{36}^3}$.

3. Решение.Всего деталей: $16+4=20$ штук.

Выбрать любые 2 детали: C_{20}^2способами.

Выбрать 2 детали от завода №2: C_4^2 способами.

Значит, вероятность того, что выбраны 2 детали от завода №2:

$p(\overline{A}) = \frac{C_4^2}{C_{20}^2}$. Следовательно, по теореме вероятности противоположных событий, находим вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом №1: $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_4^2}{C_{20}^2} = 1 - \frac{3}{95} = \frac{92}{95}$.

Ответ: $\frac{92}{95}$.

Группа С

1. Решение. Пусть Дания - Д., Норвегия - Н., Швеция - Ш., тогда расположение среди выступающих рок-групп:

1	2	3	4	5	6
Д-Ш-Н	Д-Н-Ш	Ш-Н-Д	Ш-Д-Н	Н-Д-Ш	Н-Ш-Д

Следовательно, 6 способов взаимного расположения выступающих. Благоприятствующий исход «Дания будет выступать после группы из Швейцарии и после группы из Норвегии»: $m = 2$. Тогда вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии: $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

2. Решение. Всего натуральных чисел от 100 до 200: $n = 101$ число. Количество нечетных чисел от 100 до 200: $m = 50$ чисел. Следовательно, вероятность того, что написанное учеником число нечетное: $p(A) = \frac{50}{101}$. Ответ: $\frac{50}{101}$.

3. Решение. Общее число исходов (возможных комбинаций цифр на двух игральных костях): $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$. Количество благоприятствующих исходов, когда при бросании двух игральных костей выпадает от 2 до 8 очков:

2 очка:	$(1,1)$
3 очка	$(1,2)$, $(2,1)$
4 очка	$(1,3)$, $(3,1)$, $(2,2)$
5 очков	$(1,4)$, $(4,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$
6 очков	$(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)$
7 очков	$(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)$
8 очков	$(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)$

$m = 26$ исходов. Следовательно, вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет от 2 до 8 очков: $p\ \ A\ \ = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.

Ответ: $\frac{13}{18}$.

Группа Д

1. Решение. а) на контрольной работе меньше половины класса получили пятерки;

б) все семь пулек в тире у меня попали в цель;

в) в нашем классе - никто и умный и красивый одновременно;

г) В кошельке у меня нет ни пяти рублей одной монетой, ни пяти долларов одной купюрой.

2. Решение. Всего пирожков на тарелке: $n = 5 + 3 + 7 = 15$штук. Благоприятствующее событие «взят пирожок с капустой»: $m = 3$. Следовательно, вероятность того, что пирожок окажется с капустой:

$p\ \ A\ \ = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.Ответ: $\frac{1}{5}$.

3. Решение. Всего натуральных чисел от 10 до 19: $n = 10$.Числа кратные трем: $12, 15, 18$, а значит $m = 3$. Следовательно, вероятность того, что наудачу выбранное число кратно трем: $p\ \ A\ \ = \frac{3}{10}$.Ответ: $\frac{3}{10}$.

Приложение Б

Задания и решение «Тестирование - TIMSS»

Тестирование - TIMSS

Задание 1.

Какая пара чисел $x; y$ удовлетворяет уравнению$3x + 4y = 24$?

A. $(0; 8)$ B. $(3; 4)$ C. $(4; 3)$ D. $(6; 0)$

Ответ: C. $(4; 3)$.

Задание 2.Приведена формула $t = x - \frac{6,5}{1000} \cdot y$для вычисления температуры t^{o}Сна высоте y метров над уровнем моря при температуре на уровне моря x^{o}С. Чему равна температура на вершине горы, высота которой 2000 м., когда температура на уровне моря 21^{o}С?Ответ: 8^{o}С.

Задание 3.Верными или неверными являются следующие утверждения относительно натурального числа n? Отметьте «+» один ответ для каждого утверждения.

	Верное	Неверное		Верное	Неверное
$n + 4 = 4 + n$			$n \cdot 6 = 6 \cdot n$		
$n - 5 = 5 - n$			$n : 7 = 7 : n$		

Решение.

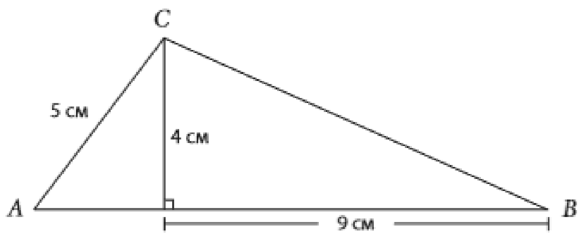
	Верное	Неверное		Верное	Неверное
$n + 4 = 4 + n$	+		$n \cdot 6 = 6 \cdot n$	+	
$n - 5 = 5 - n$		+	$n : 7 = 7 : n$		+

Задание 4.Какое из следующих отношений равно отношению $1:4$?

A. $4:16$ B. $4:7$ C. $4:5$ D. $4:1$

Ответ: A. $4:16$.

Задание 5.Чему равна площадь треугольника ABC?



A. 18 см^2 B. 24 см^2 C. 28 см^2 D. 36 см^2

Ответ: B. 24 см^2.

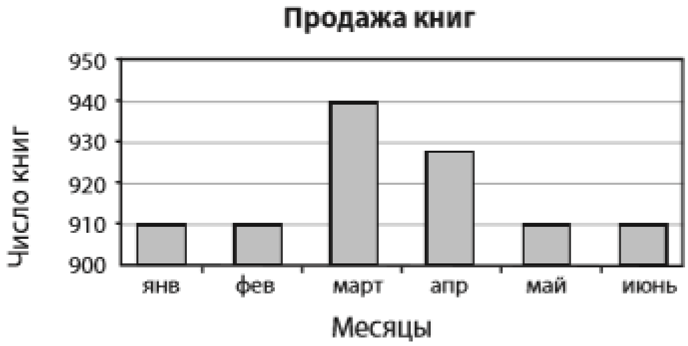
Задание 6.Цветы, которые продала Мария, показаны на круговой диаграмме. Мария продала 4 вида цветов. Она продала одинаковое количество тюльпанов и орхидей.

A. Сколько процентов всех проданных ею цветов составили тюльпаны?

B. Мария продала 40 гвоздик. Сколько всего штук цветов она продала?

Ответ: A. 22,5%; B. 200.

Задание 7.Продавец посмотрел на диаграмму, показывающую число книг, проданных им в первые шесть месяцев 2019 года, и сказал: «В марте я продал в четыре раза больше книг, чем в феврале».



Согласны вы или нет с тем, что сказал продавец? Ответ обоснуйте.

A. Согласен B. Не согласен

Ответ: A.

Задание 8.У Петра, Марка и Сони 150 рублей, чтобы разделить их между собой. Соня взяла 50 рублей, а Марк взял $\frac{3}{5}$ оставшихся рублей. Сколько рублей осталось Петру?

A. 10 B. 40 C. 50 D. 60

Ответ: B. 40

Задание 9.

Класс отправляется на экскурсию в музей. Обед для всего класса стоит aрублей. Входной билет для каждого ученика стоит 50 рублей. В классе xучащихся. Общая стоимость экскурсии kрублей. Запишите формулу для вычисления значения k.

$k =$___________________.Ответ: $k = (a + 50) \cdot k$.

Задание 10.Найдите такие значения xи y, при которых каждое из двух уравнений обращается в верное равенство.

$3x + y = 13$
$5x - y = 27.$’

Ответ: $5; -2$.

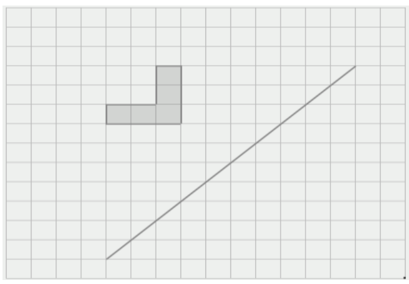
Задание 11.Жанна описала график функции: «График – прямая; График пересекает ось y в точке $(0; 3)$». Какая функция могла бы иметь такой график?

A. $y = x^2 + 3$ B. $y = 3x + 1$ C. $y = 3x^2 - 1$ D. $y = x + 3$

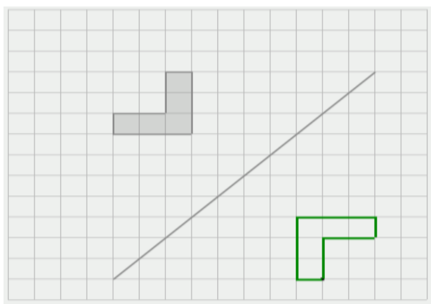
Ответ: D.

Задание 12.

Постройте фигуру, симметричную закрашенной фигуре относительно данной прямой.



Решение.



Задание 13.«За выполнение 4 тестов по математике Артем из 10 возможных баллов получил: 9, 7, 8, 8. Он должен выполнить еще один тест, за который можно получить максимально 10 баллов. Артем хочет, чтобы его средняя оценка по всем тестам была 9 баллов. Есть ли у него возможность это сделать? Объясните свой ответ» [76, С. 6].

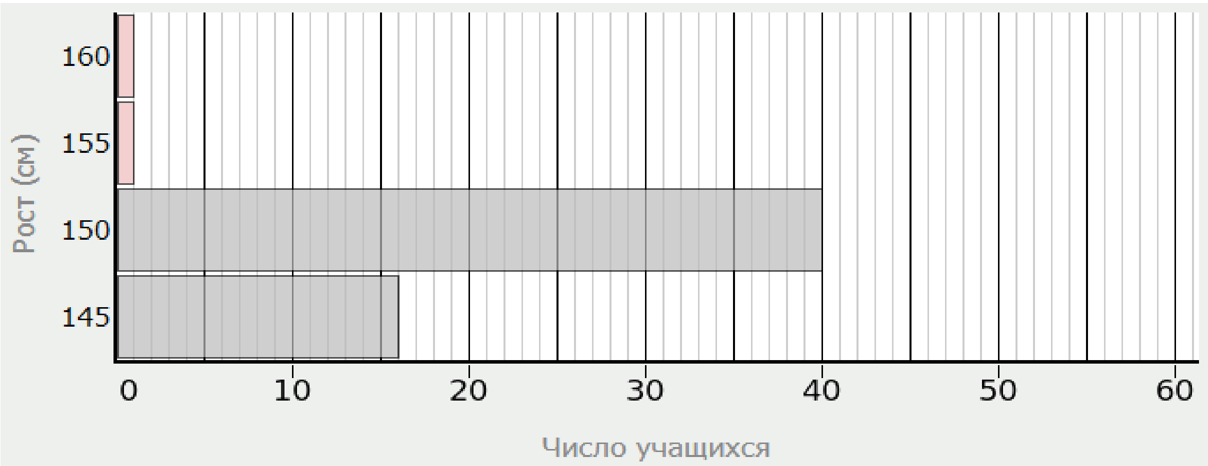
A. Да B. Нет

Ответ: B.

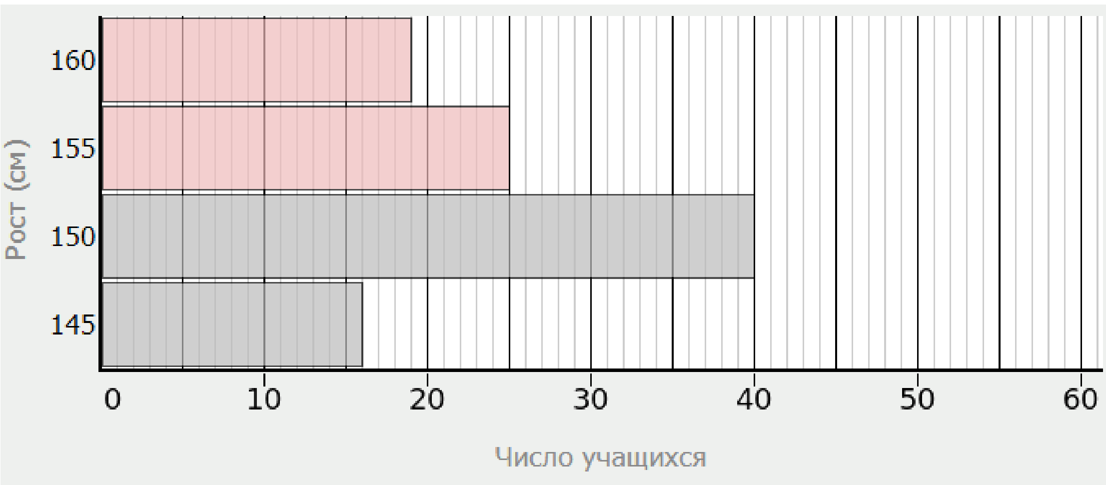
Задание 14.Рост 100 учащихся измерили с точностью до 5 см. В таблице приведены полученные результаты.

Рост (см)	145	150	155	160
Число учащихся	16	40	25	19

Закончите построение столбчатой диаграммы, используя эту информацию.



Решение.



Задание 15.Петя спросил у 7 мальчиков и 7 девочек, какое количество часов в день они используют электронные устройства. Результаты опроса представлены в следующей таблице.

	Количество часов в день, в течение которых использовались электронные устройства							Общее количество часов
Мальчики	1	2	3	3	3	4	5	21
Девочки	1	1	2	2	3	3	3	15

Найдите значения следующих показателей:

A. Среднее значение данных у мальчиков _______,

B. Размах данных у мальчиков _______,

C. Мода данных у девочек _______,

D. Медиана данных у девочек _______.

Ответ: A. 3, B. 4, C. 3, D. 2.

Задание 16.

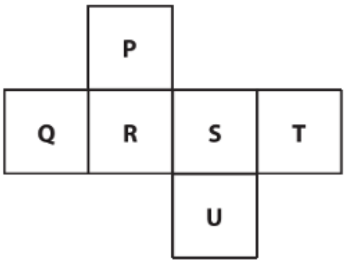
Лиза сложила куб из его развертки, приведенной ниже. Какая грань этого куба будет находится напротив грани Q?

A. P

B. S

C. T

D. U



Ответ: B. S.

Задание 17.Расположите числа в порядке возрастания: $\frac{1}{3}$; 0,09; $\frac{2}{5}$; 0,5.

Ответ: $0{,}09 \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \rightarrow 0{,}5$.

Задание 18.Чему равно значение n, если $\frac{8}{12} = \frac{24}{2n}$.Ответ: $n = 18$.

Задание 19.Георгий и Кирилл купили одинаковые хоккейные клюшки в разных магазинах. Общая цена таких хоккейных клюшек в этих магазинах была одинаковой. Георгий купил хоккейную клюшку, заплатив $\frac{3}{4}$ обычной цены. Кирилл заплатил на 20% меньше обычной цены за свою клюшку. Кто из ребят заплатил за свою клюшку меньше? Объясните свой ответ.

A. Георгий B. Кирилл

Ответ: A.

Задание 20.Запишите правило, по которому, зная какой-нибудь член этой последовательности, можно найти следующий за ним член. $-3; 6; -12; 24; \ldots$Ответ: $-3 \cdot (-2)^{k}$.

Задание 21.Ниже приведен прогноз погоды в Зедландии на завтра.

Насколько вероятно, что завтра в Зедландии будет дождь?

A. Точно будет дождь.

B. Скорее всего, будет дождь.

C. Скорее всего, дождя не будет.

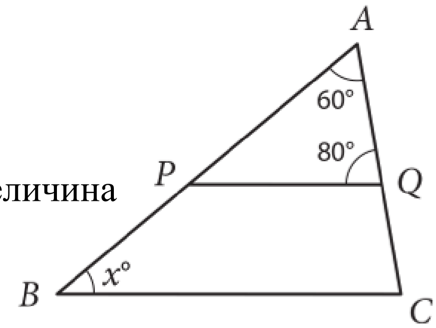
D. Дождя не будет.

Ответ: C.

Задание 22.Автомат выдает шарики жвачки, окрашенные в один из 7 различных цветов. Лева увидел, что люди купили 306 штук жвачки, из которых 23 были синего цвета. Какова оценка вероятности того, что следующая жвачка, выданная автоматом, будет синего цвета?

Ответ: $\frac{23}{306}$.

Задание 23.



Прямые PQи BCпараллельны. Какова величина угла x?

A. 140^{o}

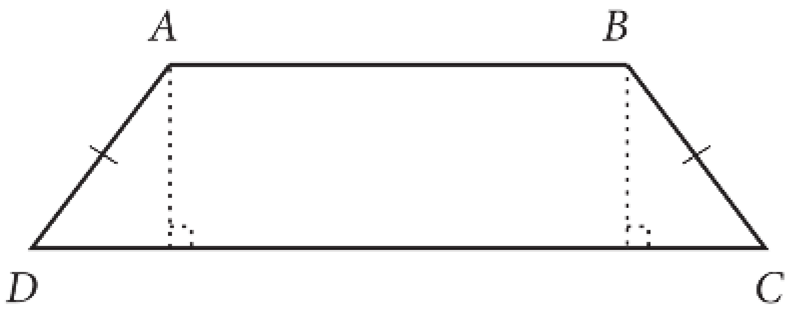
B. 80^{o}

C. 60^{o}

D. 40^{o}

Ответ: D. 40^{o}.

Задание 24.$ABCD$ – трапеция, $AB = 10$см, $CD = 16$см, $AD = BC$. Расстояние между параллельными сторонами ABи CDравно 4 см.



Чему равен периметр этой трапеции?

A. 36 см B. 34 см C. 32 см D. 30 см

Ответ: A. 36 см.

Задание 25.$y = \ \overline{x - 9}$, чему равно значение y, если $x = 25$?

A. 3 B. 4 C. 8 D. 16

Ответ: B. 4.