МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)

«Математическое образование»
(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему «**МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «КОМБИНАЦИИ СФЕРЫ И МНОГОГРАННИКОВ» В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ**»

Студент Е. А. Абейсекера ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель Е.В. Потоскуев ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель программы д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________ 2019 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________ 2019 г.

Тольятти 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ …………………………………………………………………3

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ……………...……………………… 8

§1. Основные цели и задачи дифференциации обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы …………….……………….8

§2. Типы учебных заданий при обучении геометрии в старшей школе…... 20

Выводы по первой главе ……………………………………….……… 27

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ …………………………………………………… 29

§3. Методические аспекты обучения решению задач при изучении темы «Комбинации сферы и куба» …………………………………………….… 29

§4. Методические аспекты обучения решению задач при изучении темы «Комбинации сферы и правильного тетраэдра» …………………..……… 55

§5. Педагогический эксперимент и его результаты …………………………. 68

Выводы по второй главе ………………………………………………… 72

ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………...…….. 73

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ…………………………... 75

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Современная информационная эпоха характеризуется динамичностью, глобализацией, стремительным ростом информации и вытеснением человека из производственной деятельности. Поэтому человечеству предстоит жить в динамичном информационном мире, в котором знания важнее природных ресурсов, навыки важнее знаний, умение обучаться важнее навыков, а умение творчески перерабатывать знания важнее умения обучаться. В связи с этим если раньше целью образования было дать прочные знания и довести их до умений и навыков, то на современном этапе – это развитие личности, способной к самореализации и быстрой адаптации, к изменяющимся условиям жизни в новых реалиях открытого общества, то есть умеющей учиться.

Значит, для современного образованного человека одним из важных критериев является его конкурентоспособность, умение применять полученные знания, самостоятельно исследовать новые и решать возникающие при этом проблемы. Именно эти задачи помогают решать ключевые изменения ФГОС общего среднего образования.

Одной из целей стандарта по математике является «развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности» [54]. А важным компонентом математического образования является геометрия, которая способствует приобретению знаний о пространстве и практически значимых умений, развитию пространственного мышления и математической культуры.

«Решение геометрических задач, особенно стереометрических, вызывает у ученика большие трудности» [48, с.13].

Перед учителем встает задача помочь учащимся преодолеть барьер перед решением задач по геометрии и достигнуть того, что дети смогут применить необходимые знания самостоятельно.

Одним из результатов освоения геометрии в профильных классах является умение решать задачи на комбинации многогранников и тел вращения. Данная тема является традиционной, входит в школьную программу и практически ею завершается изучение школьного курса геометрии в 11 классе.

«В процессе обучения школьников поиску решения задач на комбинацию сферы с другими телами у учащихся развиваются такие способности, как способность анализировать, сравнивать, устанавливать связи между объектами, делать умозаключения» [18].

Таким образом, *актуальность темы исследования* обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречиями между тем, что выпускники теряются при решении конкретных задач, при этом демонстрируя хорошие теоретические знания. Поэтому разработка методики решения задач на комбинации сферы и многогранников является актуальной.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление теоретических и методических основ по разработке методики обучению решению геометрических задач на примере темы «Комбинации сферы и многогранников» в углубленном курсе геометрии старшей школы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в углубленном курсе старших классов общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения решению задач по теме «Комбинации сферы и многогранников» в углубленном курсе геометрии старшей школы по УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Цель исследования:выявить теоретические и методические основы по разработке методики обучению решению геометрических задач на примере темы «Комбинации сферы и многогранников» в углубленном курсе геометрии старшей школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что если будут определены теоретико-методические основы методики обучению решению геометрических задач на примере темы «Комбинации сферы и многогранников» в углубленном курсе и на их основе будет разработана система задач, удовлетворяющая определенным требованиям, то это будет способствовать формированию умений обучающихся решать геометрические задачи.

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие **задачи:**

1. Определить основные цели и задачи дифференциации обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы.

2. Выделить типы учебных заданий при обучении геометрии старшей школы.

3. Проанализировать методические аспекты обучения решению задач при изучении темы «Комбинации сферы и куба».

4. Разработать методические рекомендации подифференциации обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы на примере тем «Комбинации сферы и куба» и «Комбинации сферы и тетраэдра».

5. Описать проведение педагогического эксперимента.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; педагогический эксперимент и обработка его результатов.

Научно-методическую основу исследования составили научно-методические работы Л.И. Звавича и Е.В. Потоскуева [28, 30, 31, 33, 36, 37, 42, 45].

Основные этапы исследования:

1 семестр (2017/18уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников геометрии, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2017/18уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2018/19уч.г.): разработка системы задач по теме «Комбинации сферы и куба» для учащихся математических классов и методического проекта по теме «Комбинация сферы и правильного тетраэдра».

4 семестр (2018/19уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна исследования заключается в выявление теоретических и методических основ по разработке методики обучению решению геометрических задач на примере темы «Комбинации сферы и многогранников» в углубленном курсе геометрии старшей школы на основе УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что в немна основе применения принципа «от простого к сложному» разработана система геометрических задач по темам «Комбинации сферы и куба» и «Комбинации сферы и тетраэдра» для обучающихся старшей школы.

На защиту выносятся методические рекомендации пообучениюрешению задач по темам «Комбинации сферы и куба» и «Комбинации сферы и тетраэдра» в углубленном курсе геометрии старшей школы по УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Апробация результатов исследования осуществлялась путем выступлений на: научно-исследовательском семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры; научной студенческой конференции «Дни науки» Тольяттинского государственного университета,Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество»: (Тольятти, 5 декабря 2018 года).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций осуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ, а также в период работы учителем математики в МБУ «Гимназия № 77»г.о. Тольятти.

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав и заключения.

Первая глава посвящена теоретическим основам методики обучения решению геометрических задач в углубленномкурсе геометрии старшей школы. В ней определены основные цели и задачи дифференциации обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы. Также выделены типы учебных заданий при обучении геометрии в старшей школе.

Во второй главе раскрываются методические аспекты обучения решению задач при изучении тем «Комбинации сферы и куба», «Комбинации сферы и тетраэдра». Также здесь приведено описание педагогического эксперимента.

Список литературы состоит из 61 наименования.

Глава I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

§ 1.Основные цели и задачи дифференциации обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы

Вопросы обучения математике в средней и старшей школе имеют большое значение для успешного развития современного общества. Личность ученика, его интересы и потребности в развитии мышления и выборе будущей профессии находятся в центре внимания педагогической науки.

Е.В. Потоскуев в статье [32, с.10] выделяет следующие *задачи* обучения математике при дифференциации математического образования:

1) обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых как в повседневной жизни, так и в дальнейшей профессиональной деятельности, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения специального образования;

2) развить у учащихся познавательную активность и любознательность, логическое мышление и пространственное воображение.

Решить данные задачи помогает такой учебный предмет как геометрия, где целью образования является развитие высокой математической культуры и развития математических способностей личности, востребованных ею и обществом.

«Важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой усваивается система математических знаний, умений и навыков, является решение задач. В психологических исследованиях показано, что задача - важнейшее средство формирования системы знаний у учащихся, развития их мышления, обучения их действиям по самостоятельному приобретению знаний»[15, с.4].

Включение в предмет деятельности учеников работу с математическими понятиями, определениями, основными методами и алгоритмам возможно только тогда, когда они представлены в форме задач, стимулирующих активность учащихся.

Г.И. Саранцев в диссертационном исследовании определил, «что задача - многоаспектное явление обучения, занимающее большое место в учебном процессе и выступающее способом организации и управления учебно-познавательной деятельности учащихся, носителем действий, адекватных содержанию обучения математике, средством целенаправленного формирования знаний, умений и навыков, одной из форм методов обучения, средством связи теории с практикой» [49, с.5].

Показательным фактором осознанного овладения различными знаниями, умениями и навыкам учащимися в математике является умение решать задачи.

При проектировании геометрического содержания, необходимо учитывать следующие аспекты:

1) развитие пространственного воображения и визуального мышления;

2) общекультурное развитие за счет формирования математического словаря;

3) учет уникального многовекового опыта и последующих интеллектуальных традиций;

4) предоставление максимального опыта решения различных типов геометрических задач учащимся;

5) использование полученных геометрических знаний в повседневной и профессиональной сферах;

6) важность решения геометрических задач для развития вычислительных навыков с помощью формул.

Основные цели обучения систематическому курсу геометрии:

1) «создание условий для саморазвития и самообразования ученика в процессе изучения геометрии (развитие личности ученика и преобразование его субъектного опыта);

2) познание окружающей среды через формирование геометрической картины мира и опыта взаимодействия с окружающим миром;

3) определение геометрической составляющей искусства, изучение истории цивилизации в рамках знакомства с историей геометрии как науки;

4) развитие логического мышления и пространственного воображения;

5) формирование коммуникативных, исследовательских умений, развитие творческой активности и самостоятельности, навыков конструирования и моделирования;

6) систематизация и обобщение геометрического опыта учеников, изучение геометрических фигур, их свойств, отношений на плоскости и в пространстве как идеальных моделей реальных объектов и отношений;

7) освоение геометрического материала как базы для изучения смежных дисциплин (физика, химия, география, астрономия), основы для продолжения образования (предпрофессиональная и профессиональная подготовка), познания окружающего мира;

8) знакомство с логическим строением геометрии как примером построения научной системы, изучение и освоение различных способов обоснований (доказательство и опровержение), методов решения задач, формирование опыта работы с задачами» [25].

В России в начале XVIII в. появилась государственная система математического образования, и с того же времени в курс математики было включено геометрическое содержание. А начиная с середины того же века, геометриястала отдельным учебным предметом, по которому появились первые учебные пособия таких авторов, как Д.Ф. Аничкова, Н.Г. Курганова и др. Эти учебники сначала были доступны только для военно-учебных заведений, но со временем по ним могли учиться уже и гражданские лица. Это послужило толчком к разделению направлений в преподавании геометрии на теоретическое и прикладное. Результатом того, что эти направления, либо сменяя друг друга, либо взаимодействуя, стало их проявление в школьных программах по геометрии и по сегодняшний день.

Геометрическое содержания в математическом образовании сформировалось к середине XIX в. И было отображено в учебном пособии Ф.И. Буссе для гимназий и училищ. Тогда же и появилась сначала профильная дифференциация обучения геометрии, а затем и уровневая, представленная в учебниках А.Ю. Давидова.

Дифференциация обучения математике в школе — проблема сложная, которая волнует практически всех преподавателей и методистов, «так как для подхода к решению этой проблемы многие годы фактически не было никаких условий: единые программы, одинаковые школы, общие для всех домашние задания, недифференцированная система контроля» [20, с.37].Поэтому наблюдается необходимость в более сбалансированном подходе, где будут учитываться все индивидуальные способности учащегося, и, в частности, будут сокращены некоторые содержательные геометрические линии с учетом перечисленных выше общих целей [20].

В Таблице 1 приведены различные подходы к понятию индивидуализации и дифференциации обучения.

Дифференциация обучения учитывает доминирующие особенности групп учащихся, что является одним из средств достижения индивидуального подхода. При этом ее эффективность обусловлена уровнем разработок средств управления учебно-познавательной деятельностью учеников с учетом их индивидуальных особенностей.

Дифференциация обучения делится на такие виды, как: внутренняя (уровневая),внешняя (профильная), широкая, поисковая и непрерывная.

Таблица 1

Различные подходы к понятию индивидуализации
и дифференциации обучения

Автор	Определение
Н.К. Гончаров [12]	Под индивидуализацией понимается «подход к обучению с позиции всестороннего развития личности и определенного понимания взаимоотношений личности и общества, при котором необходимо различать индивидуальные качества личности учащегося, его эмоциональный, психический настрой, и индивидуальные способности и склонности, касающиеся изучаемых в школе предметов деятельности» [12, с. 45]. Под дифференциацией обучения понимается «система, которая должна обеспечить условия для всестороннего развития каждого учащегося с учетом его индивидуальных интересов, возможностей и способностей, а также социально-экономических потребностей общества» [12, с.47].
«Педагогическая энциклопедия» [24]	Под индивидуализацией обучения понимается «организация учебного процесса, при котором выбор способов, приемов, темпа обучения учитывает индивидуальные различия учащихся, уровень их развития и способностей к учению» [24, с. 89]. Под дифференцированным обучением понимается «разделение учебных планов и программ в старших классах средней школы» [24, с. 94].
Н.М. Шахмаев [56]	«Учебно-воспитательный процесс, для которого характерен учет типичных индивидуальных различий учащихся, принято называть дифференцированным, а обучение в условиях этого процесса — дифференцированным обучением» [56, с. 35].
Г.Д. Глейзер [11]	Под дифференцированным подходом к учащимся понимается«система управления их индивидуальной деятельности с учетом как индивидуальных психологических различий(особенностей) отдельных обучаемых, так и доминирующих особенностей групп учащихся, исходя из этого дифференцированноеобучение есть учебно-воспитательный процесс, протекающийс подобной системой управления познавательной деятельностьюучащихся» [11, с. 19]. Под индивидуализацией обучения понимается «система управления учебно-познавательной деятельностью учащихсяс учетом индивидуальных психических особенностей каждогоученика. Таким образом, ориентированное обучение есть индивидуализированное обучение. При этом индивидуализированное обучение рассматривается как один из видов дифференцированного обучения, его наиболее полное воплощение» [11, с.21].
И.Э. Унт [53]	Под индивидуализацией понимается «учет в процессе обучения индивидуальных особенностей учащихся во всех его формах и методах, независимо от того, какиеособенности и в какой мере учитываются» [53, с. 67]. Под дифференциацией понимается «учет индивидуальных особенностей учащихся в той форме, когда учащиеся группируются на основании каких-либо особенностей для отдельногообучения; и как правило, такое обучение в этом случае происходит по

	нескольким различным учебным планам и программам» [53, с. 63].

В статье Г.В. Дорофеева было дано определение уровневой дифференциации, как«системы обучения, при которой каждый ученик, овладевая некоторым минимумом общеобразовательной подготовки, являющейся общезначимой и обеспечивающей возможности адаптации в постоянно изменяющихся жизненных условиях, получает право и гарантированную возможность уделять преимущественное внимание тем направлениям, которые в наибольшей степени отвечают его склонностям» [16, с. 12].

Таким образом, «уровневая дифференциация выражается в том, что, обучаясь в одном классе, по одной программе и учебнику, учащиеся могут усваивать материал на различных уровнях, т.е. она осуществляется в условиях обычных ежедневных занятий в классе, ориентированная на всех учащихся, опирающаяся на индивидуальные возможности, потребности и способности учащихся» [56, с.18].

Профильная дифференциация обучения в старших классах позволяет ученикам выбрать направление своего дальнейшего образования, так как для каждого направления используются «разные учебные планы и программы. Разновидностью профильной дифференциации является углубленное изучение предметов» [14, с.120].

Основные правила, по которым происходит организация системы профильной дифференциации, были перечислены в статье Ю.М. Колягина:

1) «профильная дифференциация должна вводиться после получения школьниками единого базового образования и утверждения в своих наклонностях;

2)на старшей ступени обучения следует обеспечить возможно большее количество направлений обучения;

3) по каждому учебному предмету целесообразно объединять различные направления обучения в блоки по принципу сходства целей и задач обучения для создания единых программ для каждого блока;

4) при составлении программ и учебников, выборе форм и методов обучения следует учитывать возрастные особенности подростков, склонных к данному виду деятельности;

5) математика должна входить в набор обязательных учебныхпредметов любого из профилей» [17, с.14].

Стоит отметить, что «внутренняя дифференциация присутствует и во всех формах внешней дифференциации, так как на уровне «отобранных» учащихся также срабатывает их индивидуальность, и не учитывать ее просто невозможно» [14, с.145].

Согласно Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования «профильное обучение является средством дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющим за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования» [46].

Программа базового уровня освоения предмета предполагает освоение учащегося минимума содержания, определенного государственными стандартами, за учебное время, определенное базисным учебным планом (БУПом) на освоение предмета на базовом уровне.

Программа профильного уровня освоения предмета предполагает увеличение объема содержания образования и времени на его освоение по сравнению с базовым уровнем.

В ФГОС среднего общего образования [47] представлены *требования к предметным результатам освоения базового курса математики*. Одними из них являются:

1) сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать

разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

2) владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

3) владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием.

Требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

4) сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

Одним из результатов освоения геометрии в профильных классах является умение решать задачи на комбинации многогранников и тел вращения. Данная тема является традиционной, входит в школьную программу и практически ею завершается изучение школьного курса геометрии в 11 классе.

Основная цель изучения темы – это «дать учащимся систематические сведения об основных видах тел вращения и их комбинаций» [33, с.120].

Таблица 2

Содержание темы в действующих учебниках геометрии

Автор	*Содержание обучения*	*Цель*
Атанасян Л.С. [8, с.79]	Глава «Цилиндр, конус, шар» §3. Сфера. 3.1. Сфера и шар. 3.2. Уравнение сферы. 3.3. Взаимное расположение сферы и плоскости. 3.4. Касательная плоскость к сфере. 3.5. Площадь сферы.	«Дать учащимся систематические сведения об основных телах и поверхностях вращения – цилиндре, конусе, сфере, шаре» [8]; рассмотреть взаимное расположение сферы и прямой, а также различные комбинации круглых тел и многогранников.
Погорелов А.В. [8, с.174]	Глава «Тела вращения» § 5. Шар. 6. Сечение шара плоскостью. 7. Симметрия шара. 8. Касательная плоскость к шару. 9. Пересечение двух сфер. 10. Вписанные и описанные многогранники. 11. О понятии тела и его поверхности в геометрии.	«Познакомить учащихся с простейшими телами вращения и их свойствами. Дать понятия касательной плоскости к шару, касательной к шару, точки касания, многогранников, описанных около шара и вписанных в шар» [8, с.175].
Александров А.Д. [7]	Глава «Фигуры вращения» 1. Сфера и шар. 1.1. Определения сферы и шара. 1.2. Взаимное расположение шара и плоскости. 1.3. Касательная плоскость сферы. 1.4. Свойства сферы. Изображение сферы. 2. Симметрия сферы и шара. 2.1. Сфера центрально-симметричная фигура. 2.2. Сфера - зеркально-симметричная фигура. 2.3. Сфера - фигура вращения. 3. Цилиндр. 4. Конус. 5. Геометрия окружности.	Познакомить учащихся с простейшими свойствами пространственных фигур вращения (сферы и шара, цилиндра и конуса), с их плоскими сечениями, а также рассмотреть те планиметрические вопросы, которые входят в Стандарт и связаны с окружностью.
Смирнова И.М. [7]	Глава «Круглые тела» 1. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. 2. Многогранники, вписанные в сферу. 3. Многогранники, описанные около	«Сформировать представления учащихся о круглых телах, изучить случаи их взаимного расположения, научить

	сферы.	изображать вписанные и описанные фигуры»[7, с.59].

Продолжение таблицы 2

Потоскуев Е.В. [38]	Глава «Фигуры вращения» § 4. Шар и сфера. 4.1. Определение шара, сферы и их элементов. 4.2. Изображение сферы. 4.3. Уравнение сферы. 4.4. Пересечение шара и сферы с плоскостью. 4.5. Плоскость, касательная к сфере и шару. 4.6. Вписанные и описанные шары и сферы.	Ввести определения: цилиндра и конуса вращения; сферы и шара; вывести формулы вычисления площади боковой и полной поверхностей; формировать умения наглядно изображать призмы, пирамиды, правильные многогранники, вписанные в цилиндр и конус; сферу в комбинации с конусом, многогранниками, цилиндром

Круглые тела рассматриваются на примере конкретных геометрических тел, изучается их взаимное расположение с касательной и секущей плоскостями. В процессе ознакомления с теоретическим содержанием начинают улучшаться и развиваться пространственные представления у обучающихся, а значительное количество решаемых задач способствует формированию логической культуры и графических умений учащихся.

В Таблице 2 представлено содержание данной темы в действующих учебниках геометрии.

Таким образом, обязательный минимум содержания основных образовательных программ по теме «Тела и поверхности вращения» включает в себя только такие темы «Шар и сфера, их сечения, касательная плоскость к сфере».

На профильном уровне данное содержание расширяется и включает в себя еще такие темы, как: «Сфера, вписанная в многогранник, сфера, описанная около многогранника».

В результате изучения учащиеся *должны знать*:

- «формулировки аксиом планиметрии, основных теорем и их следствий;

- возможности геометрии для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения.

Должны уметь:

- соотносить плоские геометрические фигуры и трехмерные объекты с их описаниями, чертежами, изображениями; различать и анализировать взаимное расположение фигур;

- изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи;

- решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;

- проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса;

- вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, объемы и площади поверхностей пространственных тел и их простейших комбинаций» [38, с.28];

- строить сечения многогранников и изображать сечения тел вращения.

В УМК Е.В. Потоскуева [36] на изучение параграфа «Шар и сфера» согласно авторской программе[38] выделяются 12 учебных часов.

В программе представлена характеристика основных видовучебной деятельностипо теме «Комбинация сферы и многогранников»:

– «формулировать определение сферы, вписанной в двугранный и многогранный угол; сферы и шара, вписанных в многогранник и описанных около него.

– верно и наглядно изображать сферу, в комбинации с многогранниками, цилиндром и конусом и другими сферами.

– решать задачи: а) на взаимное расположение сферы и плоскости; сферы и двух плоскостей; сферы и двугранного угла; б) на комбинации сферы с пересекающими ее многогранниками; в) на комбинации сфер с вписанными в нее, и описанными около нее многогранниками и фигурами вращения.

– векторно-координатным методом решать задачи на комбинации сферы с многогранниками;

– корректно аргументировать утверждения, возникающие по ходу решения задачи на комбинацию сферы (шара) с многогранниками, цилиндром, конусом и другими сферами (шарами)» [38, с.29].

Итак, на основе вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. На базовом уровне изучения геометрии тема «Комбинации сферы и многогранников» не рассматривается.

2. На профильном уровне данная тема изучается только частично в теме «Вписанные и описанные шар или сфера».

3. На углубленном и профильном уровне она более полно представлена в УМК Е.В. Потоскуева [36] по сравнению с другими УМК по геометрии.

Таким образом, выбор УМК Е.В.Потоскуева, Л.И. Звавича [36] можно обосновать следующими причинами:

– «учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждений» [47];

– учебник дает большие возможности для подробного изучения темы «Комбинация сферы и многогранников», включая и богатый задачный материал по ней.

– «данный УМК в полном объеме соответствует требованиям к уровню подготовки старшеклассников к вступительным экзаменам в вузы и их уровню подготовки к ЕГЭ по геометрии» [22].

§ 2.Типы учебных заданий при обучении геометрии в старшей школе

Задачи по стереометрии способствуют «развитию пространственных представлений, умения логически мыслить, помогают более глубокому усвоению всего школьного курса математики и помогают творческому овладению всей совокупностью математических знаний» [13, с.4].

Содержательный компонент методической системы обучения стереометрии содержит теоретический и задачный материал, но при этом понимание теориивыстраивается через решение задач.

Дж. Пойа высказался о том, как важно уметь решать задачи следующим образом: «Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности» [24, с.18].

Кроме того, «геометрические задачи являются одной из главных составляющих содержания учебного предмета математики, которое включает также и понятия и их определения; алгоритмы; математические утверждения: аксиомы, теоремы, леммы» [6, с.10].

Из зарубежного опыта преподавания геометрии также было установлено, что «лучшее понимание и усвоение теории (а именно различных теорем, определений, правил, алгоритмов) происходит именно тогда, когда ученик решает самостоятельно задачи, поэтому данный процесс должен быть основным при обучении геометрии» [58, с.435].

Точное определение к понятию «задача» отсутствует. Так, например, «Л.Л. Гурова считает, что задача - объект мыслительной деятельности, содержащий требование некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющих раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными ее элементами» [15, с. 55].

По мнению автора, наиболее распространенным считается понимание задачи как определенной системы, которое определил Г.А. Балл: задача в самом общем виде — это система, обязательными компонентам которой являются: а) предмет задачи, находящийся в исходном состоянии; б) модель требуемого состояния предмета задачи (эта модель отождествляется с требованием задачи.

«Более общим считается определение задачи как цели, заданной в определенных условиях. Но при любом подходе определения задачи можно выделить в ее структуре те компоненты, которые относятся к мыслительной деятельности учащихся» [15].

1. «Условие — предметная область задачи (объекты) и отношения между объектами.

2. «Обоснование — теоретические или практические основы перехода от условия к заключению посредством операций, которые составляют решение задачи» [24].

3. «Решение — та совокупность действий, операций, которую надо произвести над известными компонентами, чтобы выполнить требование, выраженное в заключении.

4. «Заключение — требование отыскать неизвестные компоненты, проверить правильность, сконструировать, построить, доказать и т.п.» [15]

В настоящее времяпод выражением «решение задач» в обучениипонимают [15]:

- «решение задачи как план (способ, метод) осуществления требования задачи»;
- «решение задачи как процесс выполнения плана, выполнения требования»;
- «решение задачи как результат выполнения плана решения».

Процесс решения задачи носит субъективный характер и определяется различными факторами. В зависимости от того, какие компоненты задачи неизвестны решающему, Ю.М. Колягин [13] предлагает следующую типологию задач, где классификация задач происходит по величине проблемности: [15, с.157].

1.*Стандартные задачи*– все четыре компонента известны.

Такие задачи часто используются на разных этапах усвоения теоретического материала. Например, учащимся предлагается после введения правила непосредственно применить его или после введения определения понятия — проверить, относится ли некоторый объект к этому понятию (задачи «на распознавание»). Этот вид задач необходим, так как позволяет не только усвоить понятие, но и осуществить «обратную связь», оценить, как поняли учащиеся новый материал.

Задача 1. «Основание пирамиды – равнобедренная трапеция. Ортогональная проекция вершины пирамиды на плоскость основания есть точка, расположенная вне трапеции. Можно ли около такой трапеции описать сферу?»[18, с.52].

Ответ: так как в основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, сумма противоположных углов которой равняется $180°$, то около нее можно описать окружность.

2.*Обучающие задачи* – неизвестен один компонент.

Задача 2.«В правильный тетраэдр с ребромa вписана сфера. Найдите радиус сферы» [37, 3.286].

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

3. Неизвестны два компонента *–поисковые задачи.*

Задача 3.«Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между двумя точками, одна из которых лежит на сфере, вписанной в куб с ребром а, а другая — на сфере, описанной около этого куба» [37, 3.246].

Ответ: $0{,}5a(\sqrt{3}-1)$ и $0{,}5a(\sqrt{3}+1)$.

4.Неизвестны три компонента *–проблемные задачи.*

Задача 4.«Точка A лежит внутри двугранного угла. Точки A_1 и A_2 – проекции точки A на грани двугранного угла, а точка K – проекция точки A на ребро двугранного угла. Докажите, что около четырехугольника AA_1KA_2 можно описать окружность, диаметр которой равен AK» [37, 4.040].

Также структура задачи определяет и уровень проблемности в деятельности, которая направлена на решение задачи [15, с.77]:

- репродуктивная или алгоритмическая (воспроизведение изученного способа - решение задачи производится с помощью непосредственного применения определений, теорем, то есть, для имеется алгоритм);

- продуктивная (использование известного способа в новых ситуациях, привлечение знаний из других тем курса),

- творческая (использование эвристик–для решения задачи необходимо найти способ решения, который не является очевидной конкретизацией некоторого обобщенного правила известного ученику).

Задача 5. «Две соседние грани треугольной пирамиды – прямоугольные треугольники с общей гипотенузой c. Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы» [37, 3.328].

Ответ: $0{,}5c$.

Кроме типологии по структуре и уровню проблемности в деятельности существуют и другие типологии математических задач. Задачи классифицируютпо:

- «математическому содержанию (У и З принадлежат определенному разделу математики): арифметические, алгебраические, геометрические, тригонометрические, комбинаторные и т.д.;

- методу решения (представлены О и Р): практические, арифметические (на основе зависимостей между компонентами арифметических действий), алгебраические (составление уравнений, неравенств и их систем, графический), геометрические (через использование геометрических фигур и их свойств), комбинированные;

- характеру требований (представлен в З): задачи на вычисление, на доказательство, объяснение, преобразование, конструирование, построение и т.п.;

- специфике языка: текстовые (условие представлено на естественном языке), сюжетные (присутствует фабула), абстрактные (предметные)» [15, с.79].

Стоит отметить, что «всякая типология задач является условной и зависит от многих обстоятельств. Так, например, одну и ту же задачу бывает можно решить и арифметическим, и алгебраическим, и геометрическим методом, поэтому отнесение задачи к тому или иному виду по степени проблемности во многом зависит от того, кто решает эту задачу. Несмотря на это, различные типологии позволяют учителю более осознанно подходить к отбору задач в зависимости от целей обучения» [15, с.81].

Наиболее широко в методической литературе представлено деление задач по функциональному значению с:

- дидактическими функциями (задачи, предназначенные на непосредственное применение изучаемой теории, закрепление основных понятий и фактов);

Задача 6. «Докажите, что можно описать шар около: а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильной призмы; в) прямой треугольной призмы; г) правильной пирамиды; д) правильного тетраэдра. Как найти центр этого шара?» [37, 3.234].

- познавательными функциями (задачи, содержащие новую для учащихся учебную информацию, и ориентированные на более глубокое усвоение основного материала школьного курса; в процессе их решения учащиеся знакомятся с новыми в познавательном отношении теоретическими сведениями - новыми понятиями, фактами, методами решения задач);

Задача 7. «В прямую призму вписана сфера радиуса r. Периметр основания призмы равен *P*. Найдите площадь полной поверхности призмы» [37, 3.273].

Ответ: $3r \cdot P$

- развивающими функциями (задачи, содержание которых несколько отходит от основного курса, предназначенные для развития числовой и геометрической интуиции, пространственного представления и воображения, а также логического мышления);

Задача 8.«Основание *ABCD* куба $ABCDA_1B_lC_1D_1$ является основанием правильной четырехугольной пирамиды *MABCD*. Сфера проходит через все девять указанных точек. Ребро куба равно *a*. Какие значения может принимать высота пирамиды?» [37, 3.311].

Ответ: $\dfrac{a(\sqrt{3}+1)}{2}$; $\dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$.

Так, «одна и та же задача в зависимости от ее роли в процессе обучения может выполнять различные функции. Кроме того, определяющим является место данной задачи среди набора или системы задач.

Задачи, как средство обучения, подразделяются на обучающие (направлены на формирование знаний, умений и навыков обучающихся) и контролирующие(призваны осуществлять контроль над уровнем сформированности знаний, умений и навыков)» [24, с.113].

В зависимости от роли задач в дифференцированном обучении их можно разделить на три группы [4, с.47].

Первую группу составляют задачи и их серии, ориентированные на целенаправленную работу по формированию определенных свойств. В эту группу относятся:

- задачи, целью решения которых является формирование аналитико-синтетического типа восприятия;

- задачи, на формирование умений анализировать, сравнивать, обобщать, т.е. задачи, направленные на формирование приемов мыслительной деятельности;

- задачи, направленные на формирование умений по переводу информации из одной формы представления в другую;

- задачи, ориентированные на формирование таких качеств мышления, как критичность, гибкость и т.д.

Вторую группу составляют задачи, при решении которых, в основном, преобладают процессы учета индивидуальных особенностей учащихся.

Третью группу отличает сочетание обоих процессов: и учета, и формированиясвойств, представляющих индивидуальныеособенности учащихся.

Итак, анализ научно-методической литературы свидетельствует о том, что существуют различные типы учебных заданий при обучении геометрии.

Каждая типология имеет свои особенности, которые следует учитывать учителю математики на практике.

Типология задач позволяет дифференцировать задания для обучающихся с учетом не только базового и углубленного уровней, но и с учетом индивидуальных особенностей каждого обучающегося.

Основные выводы по первой главе

Стереометрические задачи в учебном процессе могут использоваться не только в качестве приложения к теоретическим основам с целью его закрепления, но и способны играть роль пропедевтического средства, способны ставить проблемы, формировать базовые умения и навыки, включать их в систему ранее усвоенных, эффективно организовывать повторение, реализовывать внутрипредметные связи, развивать логическое и пространственное мышление и т.п.

Поэтому важно обучить каждого учащегося основным приемам решения стереометрических задач, не зависимо от их уровня знаний и умений. Положительные результаты от дифференцированного подхода к обучению решения геометрических задач достигается за счет таких факторов, как:

1) обучение по тем учебным пособиям, где есть выбор заданий для любого уровня учащихся;

2) развитие математическихспособностей, которое может проявиться и интересом к задачам поискового-исследовательского характера;

3) отбор более заинтересованных и мотивированных учеников.

УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича является одним из лучших учебных пособий, содержание которогопредставляется доступно, логично и выразительно, что способствует применению данного учебника для любого уровня знаний и способностей учащихся. Информация, изложенная в учебном пособии, дает большие возможности дляподробного изучения темы «комбинация сферы и многогранника», обращая внимание на опорные факты, которые помогут при решении задач.

Богатый задачный материал позволяет подобрать задания различного уровня сложности, для решения которых могут применяться различные способы.

Задания, содержащиеся в данном УМК позволяют:

– развить познавательный интерес и мотивацию к математике;

– развить навыки работы с учебной литературой;

– дополнительно подготовиться к государственной итоговой аттестации по математике и в форме ЕГЭ;

– формировать качества математических знаний, повышая предметные математические компетенции.

Глава II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

§ 3.Методические аспекты обучения решению задач при изучении темы «Комбинации сферы и куба»

Одним из результатов освоения геометрии в профильных классах является умение решать задачи на комбинации многогранников и тел вращения. В курсе стереометрии данные задачи являются наиболее интересными. Их решение требует и хорошего геометрического воображения и фактических знаний из различных разделов школьного курса геометрии.

При этом наиболее разнообразные задачи получаются при различных комбинациях сферы и многогранников, при решении которых, как правило, возникает необходимость определить расположение центра сферы и точек касания сферы с различными плоскостями и прямыми.

Е.В. Потоскуев в методическом пособии рекомендует перед тем, как приступить к решению задач, где рассматриваются сфера и вписанные в нее многогранники, предварительно прорешать задачи по таким темам, как «взаимное расположение серы и плоскости», «сфера, вписанная в двугранный (трехгранный) угол», «пересекающиеся сфера и многогранник».

С этой целью можно использовать свойства и утверждения, касающиеся хорд, секущих и касательных к сфере, а так же аспекты взаимного расположения сферы и плоскости.

Для лучшего понимания рекомендуется провести аналогию данных утверждений с планиметрией, как представлено в Таблице 3.

Таблица 3

Знания, необходимые для решения задач

Планиметрия	**Стереометрия**
«Если расстояние от центра окружности до данной прямой больше радиуса, то прямая не имеет с окружностью общих точек» [2].	«Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше радиуса, то плоскость не имеет с шаром общих точек» [36].
Если расстояние от центра окружности до данной прямой равно радиусу окружности, то прямая имеет с ней только одну общую точку.	«Если расстояние от центра шара до данной плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку» [36].
Если расстояние от центра окружности до данной прямой меньше радиуса окружности, то пересечением окружности с прямой является хорда. Центр этой хорды является основание перпендикуляра, проведенного из центра окружности на прямую. Расстояние *r* от центра хорды до точек пересечения прямой с окружностью в этом случае равно $r=\sqrt{R^2-d^2}$, где R – радиус шара, а *d* – расстояние от центра окружности до прямой. Данная прямая называется *касательной прямой* к окружности.	«Если расстояние от центра шара до данной плоскости меньше радиуса шара, то пересечением шара с плоскостью является круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара на плоскость, или сам центр шара, если плоскость проходит через этот центр. Пересечением сферы с плоскостью является окружность указанного круга. Радиус *r* сечения в этом случае равен $r=\sqrt{R^2-d^2}$, где R – радиус шара, а *d* – расстояние от центра шара до плоскости сечения» [36]. Данная плоскость называется *касательной плоскостью* к шару.
Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.	«Если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания» [36].
Если диаметр окружности делит пополам хорду, то он перпендикулярен этой хорде.	«Диаметр шара, делящий его хорду пополам, перпендикулярен этой хорде» [36].
Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны.	«Отрезки всех касательных прямых, проведенных к шару из одной расположенной вне шара точки, равны между собой» [36].
Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.	«Произведение длин отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же внутреннюю точку шара, есть величина постоянная (равная R^2-a^2, где *R* – радиус шара, *a* — расстояние от центра шара до данной точки)» [36].
«Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть» [2].	«Если из одной и той же точки вне шара проведены к нему секущая и касательная, то произведение длины отрезка всей секущей на длину отрезка ее внешней части равно квадрату длины отрезка касательной (и равно a^2-R^2, где *R* –

	радиус шара, а – расстояние от центра шара до данной точки)» [30, с.188].

В качестве актуализации знаний по этому вопросу, учащимся можно предложить выполнить устно следующие *стандартные задачи* алгоритмической деятельности с дидактической функцией:

Задача 1.«Плоскость проходит через центр сферы и пересекает ее по окружности, длина которой равна 6. Найдите диаметр сферы» [37, 3.146].

Ответ: $\frac{6}{\pi}$.

Задача 2. «Найдите длину линии пересечения сферы радиуса 5 и плоскости, удаленной от центра этой сферы на расстояние, равное 3» [37, 3.147].

Ответ: 8π.

Задача 3.«Плоскость удалена на расстояние, равное 3, от центра сферы радиуса 10. На какое наибольшее расстояние удалены от этой плоскости точки сферы?» [37, 3.148].

Ответ: на 13.

Далее необходимо учащимся напомнить о взаимном расположении сферы и двух плоскостей. В этом вопросе выделяют два аспекта, когда плоскости параллельны и когда пересекаются.

1.«При решении задач на взаимное расположение сферы и двух параллельных плоскостей достаточно рассмотреть сечение данных плоскостей и сферы той диаметральной плоскостью сферы, которая перпендикулярна этим плоскостям. Тогда в сечении получается окружность и две параллельные прямые, поэтому решение данной задачи сводятся к решению планиметрической задачи на взаимное расположение окружности и двух параллельных прямых» [33, с.128].

Задача 4. «Две параллельные плоскости касаются сферы радиуса 2. Найдите расстояние между плоскостями» [37, 3.169].

Ответ: 4.

Задача 5. «Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 12. Центр сферы, касающейся одной из этих плоскостей, удален от другой плоскости на расстояние, равное 8. Найдите радиус сферы» [37, 3.171].

Ответ: 4 или 20.

Задача 6.«Сфера пересекает две параллельные плоскости по равным окружностям радиуса 3. Найдите радиус сферы, если расстояние между плоскостями равно 8» [37, 3.173].

Ответ: 5.

2.«Задачи на комбинацию сферы и двух пересекающихся плоскостей соответствует задачам на комбинацию сферы и двугранного угла» [33]. В данном вопросе можно также провести аналогию о взаимном расположении окружности и угла (Таблица 4).

Таблица 4

Знания, необходимые для решения задач

Планиметрия	**Стереометрия**
Под биссектрисой угла понимается геометрическое место внутренних точек угла, равноудалённых от сторон угла.	Под биссекторной полуплоскостью двугранного (биссектором) угла понимается множество точек, равноудаленных от граней данного угла.
Окружность называют вписанной в угол, если она лежит внутри угла и касается его сторон.	«Сфера называется вписанной в двугранный угол, если она касается его граней» [36].
«Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла» [2].	«Центр вписанной в двугранный угол сферы лежит на биссекторе этого угла» [36].

Учащимся будет полезно знать формулу, по которой можно вычислить радиус r сферы, вписанной в двугранный угол:

$$r = m \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

где α – величина двугранного угла,m – расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

«При решении задачи на комбинацию сферы и двугранного угла (сферы и двух пересекающихся плоскостей) достаточно рассмотреть сечение двугранного угла и сферы (двух плоскостей и сферы) той диаметральной плоскостью сферы, которая перпендикулярна ребру двугранного угла (прямой пересечения данных плоскостей). Тогда в сечении получается окружность и плоский угол (окружность и две пересекающиеся прямые), поэтому решение данной задачи сводится к решению планиметрической задачи на комбинацию окружности и плоского угла (окружности и двух пересекающихся прямых)»[34, с.9].

Задача 7.«Сфера радиуса *r* касается граней двугранного угла в 60°» [37, 3.182].

Ответ: $2r$.

Задача 8.«Центр шара, касающегося двух взаимно перпендикулярных плоскостей, удален от общей прямой этих плоскостей на расстояние, равное 4. Найдите радиус шара» [37, 3.183].

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Задача 9.«Расстояние от центра сферы радиуса 6 до прямой*a* равно 18. Через прямую *a* проведены две плоскости, касающиеся этой сферы. Найдите величину угла между этими плоскостями» [37, 3.184].

Ответ: $2\arcsin\frac{1}{3}$.

Задача 10.«В шаре радиуса 13 см проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстоянии 4 см и 12 см от центра шара. Найдите длину их общей хорды» [37, 3.195].

Решение.«Пусть точки *O, A* и *B* – центры соответственно сферы и данных ее сечений, прямая *c* – линия пересечения плоскостей сечения, *M* – точка пересечения прямой *c* и диаметральной плоскости, перпендикулярной этой прямой. Тогда в прямоугольнике *OAMB* находим:

$$OM^2 = OA^2 + OB^2 = 160.$$

Если *PK* – общая хорда сечений, то *M* – середина этой хорды, причем *OP* = 13. Значит, в прямоугольном треугольнике *OMP* получаем:

$MP = \sqrt{OP^2 - OM^2} = 3$, следовательно, *PK*=2*MP*=6» [33].

Ответ: 6.

Для дальнейшего решения задач на комбинации сферы и куба рекомендуется рассмотреть вопрос о сфере и трех попарно перпендикулярных плоскостях, то есть о сфере, вписанной в трехгранный угол, у которого все плоские углы прямые. В этом частном случае из формулы (1) следуют следующие соотношения, которые будут полезны при решении задач:

1) $m = r\sqrt{2}$, (2)

где *m*– расстояние от центра сферы до ребра трехгранного угла,
r – радиус сферы;

2) $d = r\sqrt{3}$, (3)

где *d*– расстояние от центра сферы до вершины трехгранного угла.

Для закрепления данного материала целесообразно будет рассмотреть решение следующей задачи.

Задача 11.«Сфера радиуса *r* касается каждой из трех попарно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус сферы, касающейся этих трех плоскостей и данной сферы» [37. 3.207].

Решение.«Пусть *A* – общая точка трех данных плоскостей, точка *B*– центр сферы ω радиуса *r*, *O* и *R* – соответственно центр и радиус сферы ω_1, касающейся этих трех плоскостей и сферы ω.

Возможны два случая:

1) сфера ω_1 расположена между сферой ω и точкой *A*;

2) сфера ω расположена между сферой ω_1 и точкой *A*.

1. Пусть *M* – точка касания сфер. Тогда: $AO = R\sqrt{3}$, $AB = r\sqrt{3}$, $OM = R$, $BM = r$. Так как $OB = OM + BM = AB - OA$, то $r\sqrt{3} - R\sqrt{3} = r + R$ или $R(\sqrt{3}+1) = r(\sqrt{3}-1)$, откуда $R = \dfrac{r(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} = r(2-\sqrt{3})$.

2. Пусть L – точка касания сфер» [33]. Тогда: $AO = R\sqrt{3}$, $AB = r\sqrt{3}$, $OL = R$,

$BL = r$. Так как $OB = OL + BL = OA - AB$, то $R\sqrt{3} - r\sqrt{3} = r + R$ или $R(\sqrt{3}-1) = r(\sqrt{3}+1)$, откуда $R = \dfrac{r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = r(2+\sqrt{3})$.

Ответ: $r(2-\sqrt{3})$ или $r(2+\sqrt{3})$.

3.1. Пересекающиеся сфера и куб

После актуализации знаний по теме взаимного расположения сферы и плоскости (плоскостей), в УМК Е.В. Потоскуева предлагаются задачи на пересекающиеся сферы и многогранник.

Здесь возможны несколько случаев: сфера может проходить через некоторые вершины (или вершину) многогранника, пересекая при этом некоторые его грани или сфера может пересекать все грани многогранника, при этом в каждой его грани появляется окружность или дуга окружности – линия их взаимного пересечения.

Но при подборе задач необходимо руководствоваться принципом «от простого – к сложному» [41, с.333].

Рекомендуется обратить внимание учащихся на то, что в различных конфигурациях сфер и пересекающихся с ними многогранников окружности их взаимных пересечений различным образом расположены по отношению граней этих многогранников. Некоторые из этих окружностей вписаны в грани многогранника, некоторые – описаны около них, некоторые – пересекают стороны многоугольника – грани многогранника [41, с.14].

1. Рассмотрим случай, когда сфера проходит через одну вершину куба, пересекая при этом некоторые его грани.

Задача 12.«У сферы радиусом 2 центр располагается в вершине*A* куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4. Какова длина линии пересечения сферической поверхности с поверхностью куба?» [37, 3.212].

Указание: обратить внимание учащихся на то, что сфера пересекает три грани куба. Пересечением сферической поверхности и грани куба является четверть окружности с радиусом сферы.

Ответ: 3π .

Задача 13.«Середина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$является центром сферы радиуса6. Найдите длину линии пересечения сферической поверхности с поверхностью куба, если ребро куба равно 12» [37, 3.212].

Указание: обратить внимание учащихся на то, что сфера пересекает две грани куба. Пересечением сферической поверхности и грани куба является половина окружности с радиусом сферы.

Ответ: 12π .

2. Рассмотрим случай, когда сфера может проходить через некоторые вершины куба.

Задача 14.«Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A_1. Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $\frac{S}{\pi}$ » [18, с.52].

Решение.

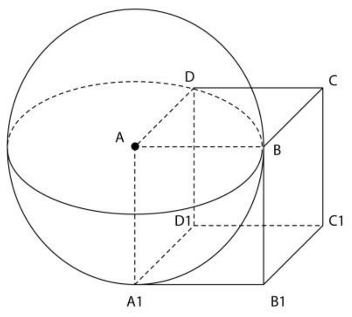


Рис. 1.

Так как сфера проходит через две вершины куба, значит, ее радиус равен ребру куба.

В кубе содержится 1/8 часть сферы и, соответственно, 1/8 ее площади поверхности равна:

$$\frac{1}{8}S = \frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}6^2 = 1{,}28\pi .$$

Ответ: 1,28.

Данный тип задачи формирует умения анализировать, сравнивать, обобщать; встречается в профильном ЕГЭ (8 задание), рассчитан на учащихся всех уровней. А ниже представлены задачи, позволяющие формировать умения по переводу информации из одной формы представления в другую.

Задача 15.«Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и вершины A, C»[13, с.105].

Решение. Пусть E, F, K – середины ребер AA_1, BB_1 и AB. Сфера проходит через точки E, F. Значит, центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости, проходящей через точку K. Сфера проходит через точки A, C (рис. 2). Следовательно, центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости DBB_1D_1. Таким образом, центр сферы лежит на пересечении плоскостей α и DBB_1D_1.

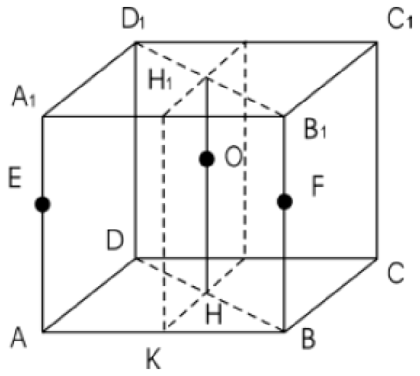


Рис. 2.

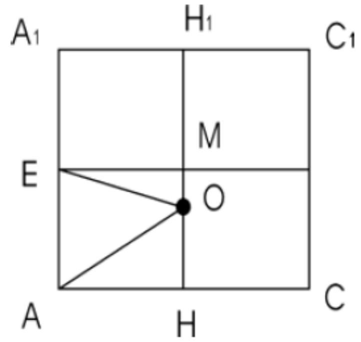


Рис. 3.

Рассмотрим сечение ACC_1A_1 (рис. 3). $OE = OA = R$, $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$EO^2 = EM^2 + MO^2$, $AO^2 = AH^2 + OH^2$. Так как $EM = AH$, $EO=AO$, то $OM = OH = \frac{a}{4}$. Тогда $R = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{2}} = \frac{3a}{4}$.

Ответ: $\frac{3a}{4}$.

Задача 16.«$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 1. Найдите радиус шара, проходящего через вершины C, C_1 и касающегося прямых AB, AD» [13, с.107].

Решение.«Шар проходит через вершины C, C_1, следовательно, центр шара лежит на серединной перпендикулярной плоскости $PMKN$, где P, M, K, N – середины ребер.

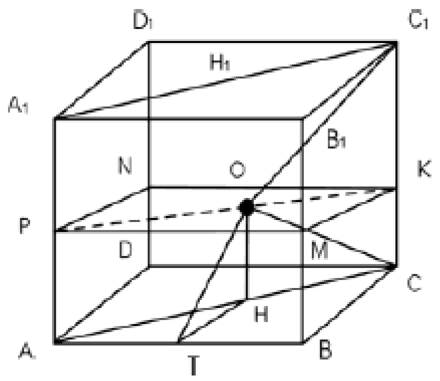


Рис. 4.

Далее, шар касается AB, AD. Значит, центр шара лежит на плоскости ACC_1A_1. Следовательно, центр шара лежит на пересечении указанных плоскостей – прямой PK» [13].

Если O – центр шара, то $OH \perp AC$, $HT \perp AB$, $OT = OC = OC_1 = R$.

Пусть $OK = x$. Тогда $R^2 = OC^2 = x^2 + \frac{1}{4}$, $PO = AH = \sqrt{2} - x$, $HT = \frac{AH}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{2}}$. В результате получаем уравнение $x^2 + \frac{1}{4} = R^2 = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

Тогда, $R^2 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7 + 4\sqrt{2}}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}}{2}$

Более подготовленным ученикам рекомендуется предложить задачу повышенной трудности, ориентированную на формирование таких качеств мышления, как критичность, гибкость и т. д. Но стоит отметить, что некоторые задачи на комбинацию шара и куба полезно решать, не прибегая к изображению этих фигур. Примером может служить решение следующей задачи.

Задача 17.«Шар радиуса R проходит через все вершины грани куба и касается противоположной грани. Найдите ребро куба» [37, 3.218].

Решение.

Пусть ребро куба равно a, шар касается нижнего основания куба в точке P и проходит через все вершины верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$; O – точка пересечения диаметра PM с этой гранью. Тогда в прямоугольном треугольнике PC_1M имеем: $PM = 2R$, $OP = a$, $OC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, и из соотношения $OC_1^2 = OP \cdot OM$ получаем $\frac{a^2}{2} = a(2R - a)$, откуда $a = \frac{4}{3}R$.Ответ: $\frac{4}{3}R$.

3.2. Сфера, касающаяся всех ребер куба

Интересны случаи, когда сечениями сферы плоскостями всех граней многогранника являются окружности, вписанные во все его грани, то есть окружности, касающиеся его рёбер. Но такая геометрическая ситуация может быть в том случае, когда данная сфера касается всех рёбер этого многогранника [41, с.14].

В этой связи учащимся можно задать вопрос исследовательского характера: как определить положение центра такой сферы, ее радиус, расстояния от ее центра до граней, рёбер и вершин данного многогранника? Поэтому целесообразно предложить учащимся решение следующей задачи.

Задача 18.«Сфера касается всех рёбер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$с ребром 12. Каково положение центра этой сферы и чему равен ее радиус?»[37, с. 15].

Решение. Допустим, сфера S касается всех рёбер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдем ее центр и радиус.

Заметим: если прямая m касается сферы S в точке A, то плоскость α (не касательная к сфере), проходящая через прямую m, пересекает эту сферу по некоторой окружности ω, для которой прямая m является касательной в точке A.

Так как гранями куба являются равные квадраты, то пересечениями сферы S с гранями куба являются равные окружности, вписанные в эти квадраты (рис. 4) (радиусы этих окружностей равны 6 – половине длины ребра куба). Это означает, что центром искомой сферы Sявляется точка, равноудаленная от всех граней куба. Такой точкой в кубе является его центр O - середина диагонали BD_1 (рис.4).

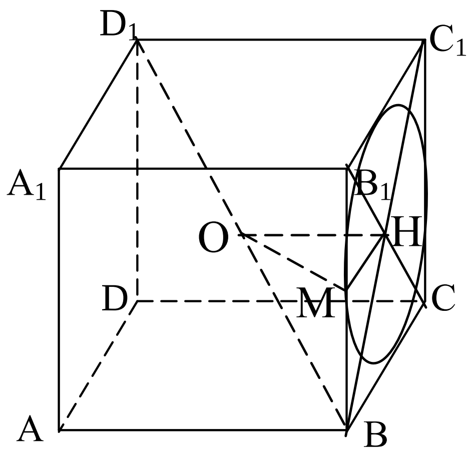


Рис. 5.

Пусть точка H – центр окружности пересечения сферы с гранью BCC_1B_1, M – точка касания этой окружности с ребром BB_1.

Прямая, проходящая через центр сферы и центр окружности ее пересечения с данной плоскостью, перпендикулярна этой плоскости, поэтому $OH \perp (B_1BC)$. Тогда $OH = \frac{1}{2}AB = 6$ – расстояние от центра O сферы до грани куба.

Точка M касания этой окружности с ребром BB_1является точкой касания сферы S с этим ребром. Поэтому отрезок OM – радиус сферы S. В прямоугольном ΔOMH: $OM = \sqrt{OH^2 + MH^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$.

Ответ: центр сферы – центр куба; радиус сферы равен $6\sqrt{2}$.

Задача 19.«Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер куба с ребром a. Определите расстояние от центра этой сферы до грани, ребра и вершины куба»[37, 3.216].

Решение.«С учетом того, что все грани куба – это равные квадраты, то вписанные в них окружности, по которым грани куба пересекают сферу, равны. Тогда радиусы этих окружностей равны половине длины ребра куба, то есть $0{,}5a$. Таким образом, центр сферы O равноудален от каждой грани куба на расстояние, равное $0{,}5a$, от каждого из ребер куба – на расстояние, равное $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0{,}5a\sqrt{2}$, а от каждой из вершин куба – на расстояние равное $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0{,}5a\sqrt{3}$» [33].

Ответ: радиус – $0{,}5a$; до грани – $0{,}5a$; до ребра – $0{,}5a\sqrt{2}$; до вершины – $0{,}5a\sqrt{3}$.

3.3. Вписанная сфера в куб и описанная сфера около куба

При обучении решению данного типа задач, необходимо повторить определения вписанной сферы и описанной окло многогранник, и ряд других важных утверждений, приведенных в Таблице 5.

Таблица 5

Знания, необходимые для решения задач

Планиметрия	Стереометрия
Окружность называется вписанной в квадрат, если она касается всех его сторон.	«Сфера называется вписанной в куб, если она касается всех его граней» [30, с.189].
Центр вписанной окружности в квадрат находится в точке пересечения диагоналей квадрата.	Центр вписанной сферы в куб находится в точке пересечения диагоналей этого куба.
В любой квадрат можно вписать круг.	В любой куб можно вписать шар.
Радиус вписанной окружности равен половине стороны квадрата.	Радиус вписанной сферы в куб равен половине длины ребра куба.
Окружность называется описанной около квадрата, если все вершины этого квадрата лежат на окружности.	«Сфера называется описанной около куба, если все вершины этого куба принадлежат поверхности сферы» [30, с.190].
Центр описанной окружности около квадрата находится в точке пересечения диагоналей квадрата.	Центр описанной сферы около куба находится в точке пересечения диагоналей куба.
Около любого квадрата можно описать окружность.	Около любого куба можно описать сферу.
Радиус описанной окружности около квадрата равен половине длины диагонали квадрата.	Радиус описанной сферы около куба равен половине длины диагонали куба.
Центры вписанной окружности в квадрат и описанной около него совпадают.	Центры вписанной сферы в куб и описанной около него совпадают.

Следует обратить внимание на то, что «центр описанной сферы может лежать как внутри многогранника, так и внеего или на его поверхности (например, на ребре) и проектируется в центр описанной около любой грани окружности. Кроме того, перпендикуляр, опущенный из центра этой сферы на на ребро многогранника, делит эторебро как хорду сферы» [33].

В УМК Е.В. Потоскуева для базового уровня рассматривается основные задачи на нахождение площади поверхности сферы.

Задача 20.«Дан куб с ребром 1 см. Найти площадь поверхности шара: а) вписанного в куб; б) описанного около этого куба» [37, 3.279].

Решение: а) шар называется вписанным в куб, если он касается всех его граней. Так каквсе грани куба – равные квадраты, то вписанные в них

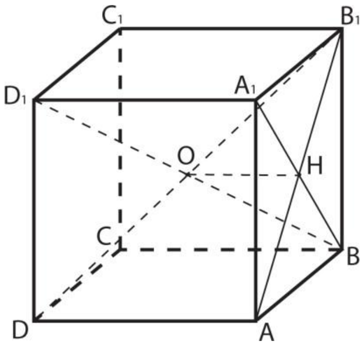


Рис. 6.

окружности, по которым грани куба пересекают сферы, равны. Радиусы этих окружностей в два раза меньше величины ребра куба. Таким образом, центр шара удален от каждой грани куба на расстояние, равное половине ребра (рис 6).

Значит, $r = OH = \frac{1}{2}.$

Площадь поверхности шара: $S_{пов.} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \pi.$

б) Так как шар с центром *O* и радиусом *R* описан около куба, значит он проходит через вершины этого куба. Центр шара равноудален от вершин куба, значит, он совпадает с точкой пересечения диагоналей куба. Значит, диаметр шара совпадает с точкой пересечения диагоналей куба (рис.6). Найдем диагональ куба:

$$D = BD_1 = \sqrt{DD_1^2 + AB^2 + AD^2} = \sqrt{3 \cdot 1^2} = \sqrt{3};\ R = OB = \frac{BD_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Площадь поверхности шара: $S_{пов.} = 4\pi R^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi = 3\pi.$

Ответ: а) π см^2; б) 3π см^2.

Для более подготовленных учащихся можно предложить следующую задачу повышенной сложности.

Задача 21.«Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между двумя точками, одна из которых лежит на сфере, вписанной в куб с ребром*a*, а другая — на сфере, описанной около этого куба» [37, 3.246].

Ответ: $0{,}5a(\sqrt{3}-1)$ и $0{,}5a(\sqrt{3}+1)$.

3.4. Комбинации двух сфер с кубом

В УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича для профильного уровня рассматриваются уже задачи о центрах нескольких сфер.

В статье [43, с.27] автор предлагает несколько важных опорных фактов, которые используются при решении задач на комбинации сферы с кубом.

Перед тем, как их рассмотреть, необходимо напомнить о том, что:

- во время построения чертежа при решении задач на комбинации нужно «изображать только те фигуры (точки, отрезки, окружности и др.), которые «работают» при решении данной задачи, при необходимости выполнить дополнительные построения на сделанном чертеже» [39, с. 19]. Таким образом, на чертеже достаточно только указать центр сферы, показать точку касания, если сфера касается грани куба, или построить центр окружности - линии пересечения сферы с гранью куба.

- «на биссекторе двугранного угла лежат центры всех сфер, вписанных в этот угол» [1, с. 204];

- «на луче прямой пересечения биссекторных полуплоскостей двугранных углов данного трехгранного угла лежат центры всех сфер, вписанных в этот трехгранный угол» [1, с. 204];

В результате, учащийся должен ясно видеть положение центра сферы в различных комбинациях с кубом и уметь определять зависимость между радиусом сферы и линейными элементами куба, входящих в комбинацию.

Важные опорные факты:

1) *центр сферы, касающейся всех трех граней куба, имеющих общую вершину, лежит на диагонали куба, исходящей из этой вершины*.

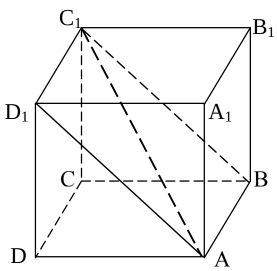


Рис. 7.

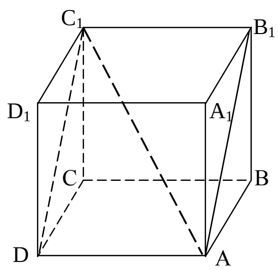


Рис. 8.

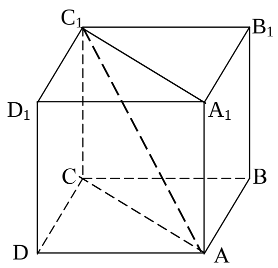


Рис. 9

На рис.7, 8 и 9 диагональные сечения ABC_1D_1, AB_1C_1D, ACC_1A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, являясь биссекторами его двугранных углов с ребрами соответственно AB, AD и AA_1, содержат центры всех сфер, вписанных в эти двугранные углы. Так как эти диагональные сечения имеют общую прямую AC_1, то диагональ AC_1 данного куба содержит множество всех точек куба, равноудаленных от всех трех его граней с общей вершиной A, и множество

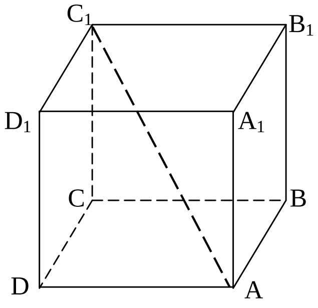


Рис. 10

всех точек куба, равноудаленных от всех трех его граней с общей вершиной C_1.

Это означает, что диагональ AC_1 (рис.10) куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$является носителем центров всех сфер (шаров), вписанных в трехгранные углы этого куба с вершинами A и C_1.

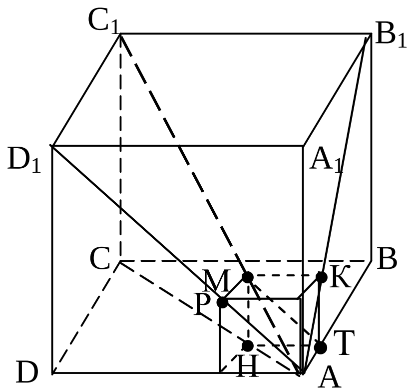
Аналогично, диагональ BD_1куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. содержит центры всех сфер (шаров), вписанных в его трехгранные углы с вершинами B и D_1.

2) «*если сфера радиуса R касается всех трех граней куба, имеющих общую вершину, то расстояние от центра сферы до» [33]:*

- *каждой из этих трех граней куба равно R;*

- *данной вершины равно* $R\sqrt{3}$*;*

- *каждого ребра, исходящего из данной вершины, равно* $R\sqrt{2}$.



Если сфера ω с центром M радиуса R касается всех граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, содержащих вершину A, соответственно в точках H, K и P (рис.11), то:

а) $MH \perp (ABC)$, $MK \perp (AA_1B)$,$MP \perp (AA_1D)$;

б) $MH=MK = MP = R$;

в) $MT \perp AB$.

Значит:

а) отрезок MT является диагональю

Рис. 11. квадрата со стороной R и имеет длину, равную $R\sqrt{2}$; б) отрезок MA, соединяющий центр этой сферы с вершиной A, является диагональю куба с ребром, равным R, и имеет длину, равную $R\sqrt{3}$.

Проиллюстрируем использование данных опорных фактов при решении задач на комбинации сферы и куба.

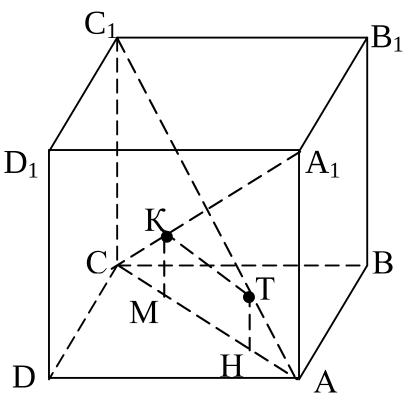
Задача 22.«В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены два касающиеся друг друга равных шара. При этом первый шар касается всех граней куба, содержащих вершину A, второй - всех граней куба, содержащих вершину C. Найдите радиусы этих шаров, если ребро куба равно 17» [42, с.153].

Решение: пустьR – радиус данных шаров ω_1 и ω_2, точки $T \in AC_1$ и $K \in CA_1$ – их центры; H и M – точки касания данных шаров с гранью $ABCD$ куба (рис.12), тогда $KM \perp (ABC)$, $TH \perp (ABC)$ (как радиусы, проведенные в точки касания).

Так как $(AA_1C) \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей) и $K \in (AA_1C)$, $T \in (AA_1C)$, то $H \in AC$ и $M \in AC$, где

$AC=(AA_1C) \cap (ABC)$. Тогда $AH + HM + MC = AC = 17\sqrt{2}$, при этом

$MH = KT = 2R$ (расстояние между центрами данных касающихся шаров).



Так как $AT = CK = R\sqrt{3}$, $TH = KM = R$, то $AH = MC = R\sqrt{2}$. Тогда имеем: $2R\sqrt{2} + 2R = 17\sqrt{2}$, откуда

$$R = \frac{17\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{17(2-\sqrt{2})}{2} = 8{,}5\cdot(2-\sqrt{2}).$$

Ответ: $8{,}5\cdot(2-\sqrt{2})$.

Рис. 12.

Рассмотрим решение задачи, рассчитанной для профильного уровня, выбранной из УМК Е.В. Потоскуева.

Задача 23.«Дан куб, ребро которого равно 1 см. Сфера с центром *O* касается всех ребер куба. Найдите радиус сферы, касающейся данной сферы и трех граней куба, имеющих общую вершину *A*»[37, 3.279].

Решение.«Если сфера касается всех ребер куба, то каждая грань куба пересекает ее по окружности, вписанной в эту грань. Так как все грани куба – равные квадраты, то вписанные в них окружности равны, и радиус каждой равен половине ребра куба. Значит, центр *O* сферы равноудален от всех граней куба на расстояние, равное половине ребра, и точка *O* совпадает с центром куба» [33]. Тогда $OP=R$, где R – радиус этой сферы, а точка P (середина ребра AA_1), - есть точка касания сферы и этого ребра (рис. 13).

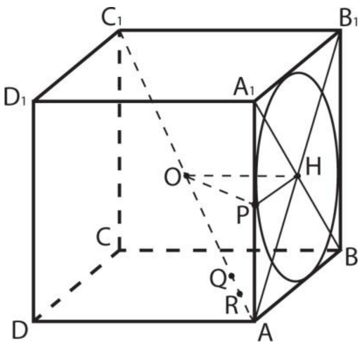


Рис. 13.

Пусть точка H – центр грани AA_1B_1B куба. Имеем: $OH \perp (AA_1B)$, значит, $OH \perp PH$, где $PH \parallel AB$, при этом OH равен половине ребра куба, значит, PH тоже равен половине ребра куба. Радиус первой сферы находится по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике OPH:

$$OP = R = \sqrt{OH^2 + HP^2} = \sqrt{(0{,}5)^2 + (0{,}5)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а в прямоугольном треугольнике OAH:

$$OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{(0{,}5)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

«Пусть точка R – центр шара радиуса r, касающегося данного шара в точке Q и плоскостей трех граней куба, имеющих общую вершину A $(R \in OA, Q \in OA)$» [33]. Найдем r. Учитывая, что $OA = OQ + QR + RA$, $OA = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OQ = OP = R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $QR = r$ и $RA = r\sqrt{3}$ (как диагональ куба с ребром r), имеем: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + r + r\sqrt{3}$. Упростив, получаем: $r = \frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ см.

Задача 24.«В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две касающиеся друг друга внешним образом сферы, радиусы которых относятся как 3:7. При этом первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая - всех граней куба, содержащих вершину D. Найдите радиусы этих сфер, если ребро куба равно 12»[37, 3.242].

Решение.«Пусть сфера ω_1 радиуса r касается всех граней куба, содержащих вершину A, сфера ω_2 радиуса R касается всех граней куба,

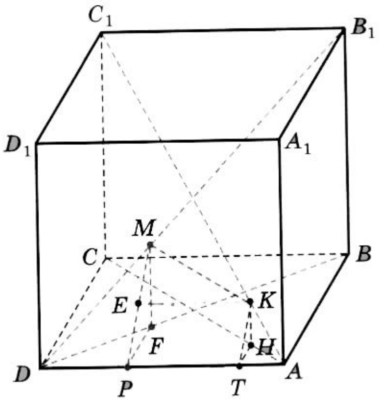


Рис.14.

содержащих вершину D, при этом $r:R$= 3:7; точки $K \in AC_1$ и $M \in DB_1$–центры этих сфер соответственно»[33] (рис.14); H и F – точки касания соответственно данных сфер с гранью $ABCD$ куба, при этом $H \in AC$, $F \in DB$. Тогда $KH \perp (ABC)$, $MF \perp (ABC)$ (как радиусы, проведенные в точки касания). Проведем в грани $ABCD$ отрезки $HT \perp AD$, $FP \perp AD$(рис.14).

Длины этих отрезков равны радиусам сфер соответственно ω_1 и ω_2, то есть $HT = r$, $FP = R$. Тогда в равнобедренных прямоугольных треугольниках HKT и MFP, катеты которых равны соответственно r и R, находим: $KT = r\sqrt{2}$, $MP = R\sqrt{2}$.

Из перпендикулярностей $HT \perp AD$, $FP \perp AD$ следует $KT \perp AD$, $MP \perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах). А так как точки K и M лежат на пересекающихся диагоналях AC_1 и DB_1, расположенных в плоскости ADC_1, то точки P, M, K и T лежат в одной плоскости. Тогда из $KT \perp AD$, $MP \perp AD$

следует $KT||MP$, значит, четырехугольник $PMKT$ – прямоугольная трапеция с основаниями $MP = R\sqrt{2}$, $KT = r\sqrt{2}$ и боковой стороной $MK = r + R$.

Учитывая $r:R$= 3:7, имеем: $r = \frac{3}{7}R$, тогда $MK = = r + R = \frac{3}{7}R + R = \frac{10}{7}R$.

Найдем высоту TP этой трапеции, для чего проведем отрезок $KE||TP$. Тогда $KE \perp MP$, значит, ΔMKE – прямоугольный, в котором $MK=r+R$,

$$ME=MP–PE=MP–KT= R\sqrt{2} - r\sqrt{2} = \sqrt{2}(R-r) = \sqrt{2}(R - \frac{3}{7}R) = \frac{4\sqrt{2}R}{7}.$$

Поэтому $KE = \sqrt{MK^2 - ME^2} = \sqrt{(\frac{10}{7}R)^2 - (\frac{4\sqrt{2}R}{7})^2} = \frac{2\sqrt{17}R}{7}$, следовательно,

$PT= KE = \frac{2\sqrt{17}R}{7}$.

Так как $AT = r$, $PD = R$, то из $AT + TP + PD = AD$ получаем:

$$\frac{3}{7}R + \frac{2\sqrt{17}R}{7} + R = 12 \Rightarrow \frac{(10+2\sqrt{17})R}{7} = 12 \Rightarrow R = \frac{7\cdot 12}{10+2\sqrt{17}} = \frac{7\cdot 12\cdot(10-2\sqrt{17})}{32} =$$

$= 7\cdot 0{,}75\cdot(5-\sqrt{17}) = 5{,}25\cdot(5-\sqrt{17})$. Тогда $r = \frac{3}{7}\cdot 7\cdot 0{,}75\cdot(5-\sqrt{17}) =$

$= 2{,}25\cdot(5-\sqrt{17})$.

Ответ: $2{,}25\cdot(5-\sqrt{17})$ и $5{,}25\cdot(5-\sqrt{17})$.

При решении задач на комбинации сферы и многогранника необходимо, прежде всего, вырабатывать умение анализировать геометрическую ситуацию, в которой находятся данные многогранник и сфера. При этом решение задачи должно начинаться с рисунка, на котором необходимо верно, наглядно и лаконично изобразить фигуры, заданные её условием. Далее, после установления логических взаимосвязей между данными и искомыми элементами изображенных фигур становится возможным производить аргументированные обоснования возникающих умозаключений и необходимые вычислительные операции, безошибочное завершение которых приводит к нужному и верному ответу к задаче.

Рассмотрим, например, решение следующей задачи, в процессе которого сочетаются логические обоснования утверждений, аргументированные построения необходимых геометрических фигур и мотивированные вычислительные операции.

Задача 25.«Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус сферы, проходящей через три его вершины одной грани, если центр этой сферы лежит на сфере, вписанной в данный куб»[28, с.197].

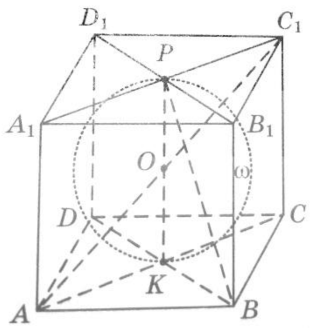


Рис. 15

Решение.Пусть ω_1– сфера, вписанная в данный куб; ω_2 – сфера с центром на сфере ω_1, проходящая через его вершины *A, B* и *C*. Найдем радиус *R* сферы ω_2.

Обозначим: *О* – центр данного куба, *К* — центр его грани *ABCD* (рис. 15).

Сфера ω_2 проходит через вершины *А*, *В* и *С*, поэтому она проходит и через вершину *D*, значит, ее центр *М* принадлежит прямой *ОК*. А так как центр сферы ω_2, кроме того, лежит на сфере ω_1, то искомый центр сферы ω_2 является точкой пересечения прямой *ОК* и сферы ω_1. Таких точек две – точка *К* и точка *Р* – центр грани $A_1B_1C_1D_1$.

Это означает, что одна из сфер имеет своим центром точку *Р*, а ее радиус равен $PB = \sqrt{PK^2 + AK^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 0{,}5\sqrt{6}$.

Вторая сфера имеет своим центром точку *К*, а ее радиус равен $KA = 0{,}5\sqrt{2}$.

Ответ: $0{,}5\sqrt{2}$ или $0{,}5\sqrt{6}$.

3.5. Решение задач векторно-координатным методом

Наряду с геометрическим методом решения задач по стереометрии, применение которого не возможно без хорошей теоретической базы, логического размышления, умения грамотно построить чертеж, необходимо выработать навык использования и векторно-координатного метода, который является универсальным для вычисления элементов в комбинации различных геометрических фигур.

Умение правильно использовать учащимися тот или иной способ решения будет способствовать улучшению математической культуры учащихся.

Векторно-координатного метод является универсальном и будет полезен ученикам любого уровня: для сильных (при решении олимпиадных или конкурсных заданий, когда время строго ограничено) и для слабых, которые не способны видеть «геометрическую картину» и взаимосвязь элементов.

Требования к тому, что должен знать и уметь ученик для применения координатно-векторного метода:

-уметь разными способами задавать систему координат для данной задачи и находить координаты вершин куба, прямоугольного параллелепипеда, правильной пирамиды, правильной призмы;

- уметь находить координаты вектора через координаты начала и конца;

- знать формулу косинуса угла между векторами;

- уметь составлять уравнение плоскости по координатам трёх точек, принадлежащих этой плоскости;

- знать формулу расстояния от точки до плоскости.

Таким образом, чтобы решение задач с помощью векторов и координат было эффективным, необходимо научить учащихся:

- переводить условие геометрической задачи в векторно-координатную символику и терминологию из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения (например, поместить куб так, чтобы одна из его вершин оказалась в начале координат) ;

- грамотно выполнить соответствующие алгебраические операции над координатами и векторами;

- перевести полученные результаты обратно на «геометрический язык».

Продемонстрируем решение задачи данным методом на примерах следующих заданий.

Задача 26.«Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус сферы, проходящей через вершину A, середину ребер DC и BB_1 и центр грани $A_1B_1C_1D_1$» [13, с.120].

Решение: введем систему координат с началом в вершине A, выбрав оси так, чтобы вершины B, D и A_1 имели соответственно координаты (1,0,0), (0,1,0) и (0,0,1) (рис. 16).

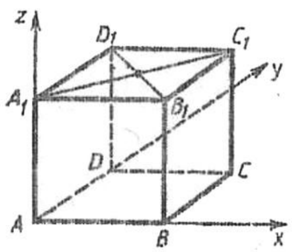


Рис. 16

Координаты середин ребер DC и BB соответственно $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ и $\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$, центра грани $A_1B_1C_1D_1$ – $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

Уравнение сферы с центром (x_0, y_0, z_0) и радиусом r имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$.

Последнее уравнение можно преобразовать к виду $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$.

Обратно, выделяя полные квадраты по x,y,z, можно последнее уравнение привети к виду: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$. Поскольку сфера содержит начало координат, то $D=0$. Тогда для A, B и C получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{5}{4}+\frac{1}{2}A+B=0, \\ \frac{5}{4}+A+\frac{1}{2}C=0, \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+C=0. \end{cases}$$

Решив данную систему, находим: $A=-\frac{13}{14}$, $B=-\frac{11}{14}$, $C=-\frac{9}{14}$. Таким образом, уравнение сферы примет вид: $x^2+y^2+z^2-\frac{13}{14}x-\frac{11}{14}y-\frac{9}{14}z=0$

или $\left(x-\frac{13}{28}\right)^2+\left(y-\frac{11}{28}\right)^2+\left(z-\frac{9}{28}\right)^2=\frac{371}{28^2}$. Тогда искомый $R=\frac{\sqrt{371}}{28}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{371}}{28}$.

Задача 27.«Сфера касается бокового ребра AA_1 и непараллельных ребер основания AB, A_1D_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходит через точку $M\in CC_1$, причем $CM=\frac{1}{3}$. Найдите радиус сферы»[22, с.32].

Решение.Пусть сфера касается ребра AA_1 в точке N, ребра AB – в точке P, ребра A_1D_1 – в точке K (рис. 17). Тогда $A_1K=A_1N$, $AN=AP$ как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки.

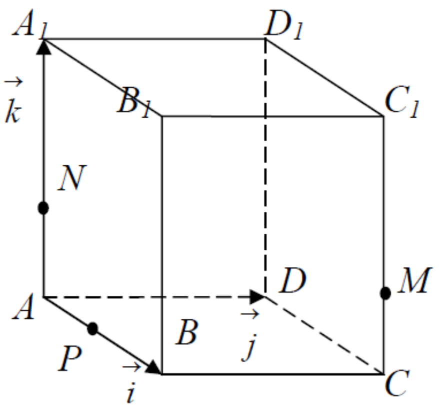


Рис. 17.

Пусть $AN=x$. Тогда $A_1K=A_1N=1-x$, так как $AA_1=A_1D_1=1$.

Введем прямоугольный базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ с началом в вершине A куба, как показано на рисунке 17 и определим координаты точек M, N, P, Kв этом базисе. Имеем: $N(0,0,x)$; $P(x,0,0)$; $K(0,1-x,1)$и $M\left(1,1,\frac{1}{3}\right)$.

Пусть $O(x_0,y_0,z_0)$ - центр данной сферы. Тогда $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{OK}\perp\overrightarrow{A_1D_1}$. Так как $\overrightarrow{A_1D_1}\parallel\overrightarrow{AD}$, то $\overrightarrow{OK}\perp\overrightarrow{AD}$. Таким образом $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$; $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=0$; $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. Отсюда $z_0=x, y_0=1-x, x_0=x$, то есть $O(x,1-x,x)$.

Так как $OK^2=ON^2=OP^2=OM^2=R^2$, где R – радиус сферы, то получаем систему:

$$\begin{cases} x^2+(x-1)^2=R^2; \\ (x-1)^2+x^2+\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=R^2. \end{cases}$$

Решая которую, находим $R=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3.6. Задачи на комбинацию сферы и шара из ЕГЭ

Рассмотрим некоторые задания, которые встречаются в экзаменационных тестах профильного уровня по математике.

Задача 28.«Внутри куба расположены два равных шара, касающихся друга. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней. а) докажите, что центры шаров принадлежат диагонали куба, исходящей из общей для граней вершины; б) Найдите радиусы этих шаров, если ребро куба равно 13» [19, с.332].

Решение: а) центр шара равноудален от трех плоскостей граней куба.

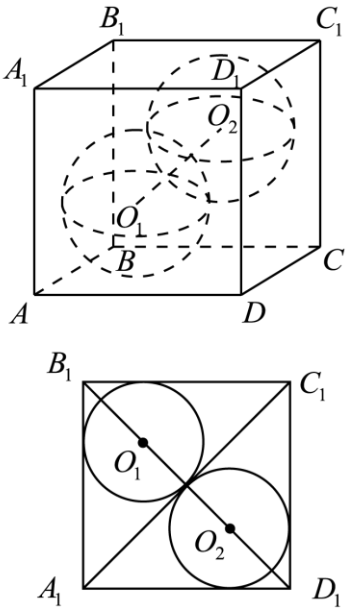


Рис. 18.

Множество точек, равноудаленных от двух плоскостей есть бисеекторная полуплоскость. Диагональные сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, являясь биссекторами его двугранных углов, содержат содержат центры всех сфер, вписанных в эти двугранные углы. Так как эти диагональные сечения имеют общую прямую – диагональ данного куба, то она, соответсвенно, содержит множество всех точек куба, равноудаленных от всех трех его граней с общей вершиной. Это означает, что диагональ куба является носителем центров всех шаров, вписанных в данный трехгранный угол;

б) пусть центры шаров O_1, O_2 лежат на диагонали BD_1, а радиусы шаров равны R. Тогда диагональ куба равна $BD_1 = 13\sqrt{3}$, с другой стороны – $BD_1 = BO_1 + O_1O_2 + O_2D_1$, откуда $O_1O_2 = 2R$, а $BO_1 = O_2D = \sqrt{3}R$ - как диагональ куба со стороной R. Получаем уравнение: $13\sqrt{3} = 2R + 2\sqrt{3}R$, откуда $R = \dfrac{13\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$.Ответ: $\dfrac{13\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$.

Задача 29.«Вокруг куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A, B и M образует угол 15° с плоскостью ABC. А) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A, B и M; б) найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы»[19, с.328].

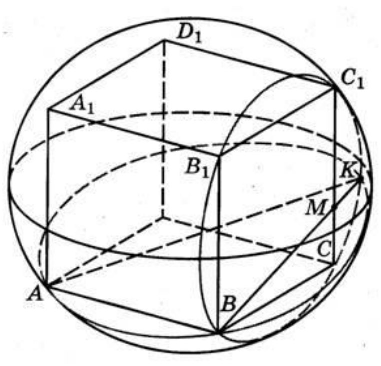


Рис. 19.

Решение:

а)сечение сферы плоскостью ABM является окружностью. Пусть прямая BM вторично пересекает сферу в точке K. Искомая линия – описанная окружность вокруг прямоугольного треугольника ABK;

б) Точка K – точка пересечения прямой BM с описанной окружностью квадрата BCC_1B_1. Треугольник BKC_1 – прямоугольный, так как BC_1- диаметр окружности, следовательно, угол $\angle BKC_1 = 90°$, значит $BK = BC_1 \cdot \cos\angle MBC_1$. Так как $\angle MBC = 15°$, то $\angle MBC_1 = 45° - 15° = 30°$. Следовательно, $BK = BC_1 \cdot \cos 30° = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABK. Длина описанной вокруг него окружности равна произведению ее диаметра AK на число π. Значит, по теореме Пифагора имеем: $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{4+6} = \sqrt{10}$. Длина линии пересечения плоскости ABM и сферы равна $AK \cdot \pi = \sqrt{10}\pi$.Ответ: $\sqrt{10}\pi$

3.7. Задачи для самостоятельного решения

1. «Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1,4 является центром сферы, проходящей через точку A_1. Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $\frac{S}{\pi}$» [37].

Ответ: 1,96.

2. «Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 8. Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и вершины A, C» [37].

Ответ: 6.

3. «Шар радиуса $\sqrt{5}$ проходит через все вершины грани куба и касается противоположной грани. Найдите ребро куба» [37]. Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

4. «Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер куба с ребром $\sqrt{3}$. Определите расстояние от центра этой сферы до грани, ребра и вершины куба» [37].Ответ: радиус – $\frac{\sqrt{3}}{2}$; до грани – $\frac{\sqrt{3}}{2}$; до ребра – $\frac{\sqrt{3}}{6}$; до вершины – $4{,}5$.

5. «Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между двумя точками, одна из которых лежит на сфере, вписанной в куб с ребром *4*, а другая — на сфере, описанной около этого куба» [37].Ответ: $2(\sqrt{3}-1)$ и $2(\sqrt{3}+1)$.

6. «Найдите площадь поверхности шара, вписанного в куб, площадь поверхности которого равна 6» [37].Ответ: π.

7. «В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены два касающиеся друг друга равных шара. При этом первый шар касается всех граней куба, содержащих вершину A, второй - всех граней куба, содержащих вершину C. Найдите радиусы этих шаров, если ребро куба равно 13» [37].Ответ: $\frac{13\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}$.

§ 4.Методические аспекты обучения решению задач при изучении темы «Комбинации сферы и правильного тетраэдра»

Тема «Комбинация сферы и правильного тетраэдра» является одной из важных в курсе стереометрии. Часто у учащихся возникают проблемы с построением чертежа, и как следствие, с решением задач по этой теме.

На базовом уровне изучения геометрии данная тема не рассматривается, на профильном уровне – раскрывается частично, касаясь только вопроса вписанной и описанной сферы, и на углубленном профильном уровне она более полно представлена в УМК Е.В. Потоскуева [37] в различных комбинациях.

Основная цель изучения темы обусловлена следующими причинами:

- тема предусмотрена ФГОС на профильном уровне, но не достаточно полно отражена в современных учебниках геометрии;

- методические проблемы, связанные с определением содержания темы;

- материал, рассматриваемый в теме, актуален для подготовки учащихся к сдаче итоговой аттестации по математике в форме ЕГЭ.

В Таблице 6 представлены базовые знания, которые необходимы для решения задач по теме «Комбинация сферы и правильного тетраэдра».

Таблица 6

Знания, необходимые для решения задач

Планиметрия	Стереометрия
1. Вписанная и описанная окружности. 2. Теоремы об окружности, вписанной в треугольник, описанной вокруг треугольника. 3. Признаки равенства и подобия треугольников. 4. Соотношения между углами и сторонами равнобедренного и прямоугольного треугольников. 5. Свойства правильных многоугольников (можно вписать и описать окружность, способ нахождения радиуса).	1. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. 2. Понятие многогранника, его виды. 3. Понятие пирамиды, ее элементы, виды пирамид. 4. Понятие сферы, ее элементы. 5. Объем пирамиды, площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности. 6. Многогранные углы. 7. Понятие и свойство касательной плоскости к сфере.

6. Площади многоугольников. 7. Свойство пересечения медиан в треугольнике. 8. Понятие геометрического места точек.	

Проведем анализ различных вариантов комбинации сферы с правильным тетраэдром, рассматривая основные модели базовых конфигураций.

4.1. Пересекающаяся сфера и правильный тетраэдр.

Если сфера проходит через одну или несколько вершин тетраэдра, пересекая при этом все или некоторые его грани, то линией их взаимного пересечения будет либо окружность, либо дуга. При решении задач необходимо учитывать этот факт.

Задача 30.«Высота *DH* правильного тетраэдра *ABCD* является диаметром сферы. Найти длину линии пересечения сферы с поверхностью тетраэдра, если высота тетраэдра 6»[37, 3.224].

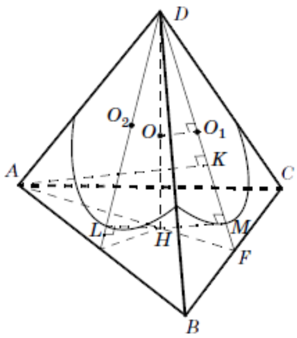


Рис. 20.

Решение.

«Так как высота *DH* правильного тетраэдра *ABCD* является диаметром сферы (*H* — центроид правильного ΔABC), то сфера касается грани *ABC* в точке *H*.

Высота*DH*правильного тетраэдра *ABCD* принадлежит биссекторным плоскостям двугранных углов при боковых ребрах этого тетраэдра, следовательно, центр *O* данной сферы равноудален от всех трех его боковых граней. Это означает, что в пересечении сферы с плоскостями этих граней получаются равные окружности, при этом точка *D* является общей для всех трех окружностей, а окружности каждых двух соседних боковых граней пересекаются на общем ребре этих граней.

Найдем длину линии пересечения грани *DBC* (треугольника *DBC*) со сферой. Если *F* – середина *BC* и $\angle HDF = \alpha$, то $\sin\alpha = \dfrac{HF}{FD} = \dfrac{\frac{1}{3}AF}{FD} = \dfrac{\frac{1}{3}FD}{FD} = \dfrac{1}{3}$

Так как (*AFD*) ⊥ (*BCD*), то центр O_1 окружности пересечения сферы и грани *DBC* принадлежит медиане *DF*» [33], при этом $OO_1 \perp (BCD)$, значит, $OO_1 \perp DF$. (Если точка *K* — центроид грани *BCD*, то $AK \perp (BCD)$, $K \in DF$ и $OO_1 \parallel AK$) Тогда в прямоугольном треугольнике OO_1D находим: $O_1D = OD\cos\alpha = 2\sqrt{2}$ – длина радиуса окружности пересечения плоскости грани *DBC* и сферы.

Так как $\angle BDC = 60°$, то пересечением грани *BCD* и сферы является третья часть окружности радиуса $2\sqrt{2}$, т. е. дуга этой окружности, имеющая длину $\dfrac{2\pi \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$. Тогда линия пересечения сферы и боковой поверхности тетраэдра представляет собой объединение трех таких дуг и имеет длину, равную $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi \cdot 3 = 4\sqrt{2}\cdot\pi$.

Ответ: $4\sqrt{2}\cdot\pi$.

4.2. Сфера, касающаяся всех ребер правильного тетраэдра.

Частным случаем пересечения сферы и правильного тетраэдра выделяют ситуацию, когда сечениями сферы плоскостями всех граней тетраэдра являются окружности, вписанные во все его грани, то есть окружности, касающиеся ребер тетраэдра. Данная геометрическая ситуация возникает в том случае, «когда сфера касается всех рёбер этого тетраэдра. Поэтому учащимся на профильном уровне можно предложить задачу исследовательского характера по данной модели: как определить положение центра такой сферы, ее радиус, расстояния от ее центра до граней, рёбер и вершин правильного тетраэдра» [41, с. 17].

Задача 31. «Сфера касается всех ребер правильного тетраэдра с ребром 8. Найдите: а) расстояния от центра этой сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра; б) радиус сферы» [41, с.18].

Решение.

«Пусть точка *M* – центроид правильного тетраэдра Р*ABC*.

Тогда $PM:MO$= 3:1, откуда следует, что:

$PM = \frac{3}{4}PO,\ OM = \frac{1}{4}PO$(рис.20)» [33].

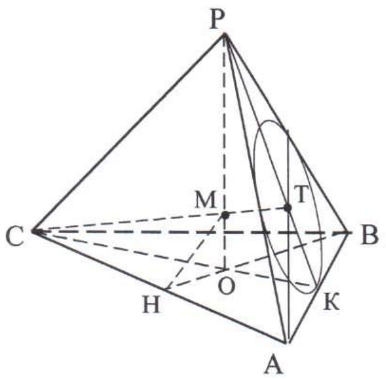


Рис. 20.

«В правильном тетраэдре *PABC* все медианы равны, поэтому его центроид равноудален от всех его вершин, значит, точка *M* – центр сферы, описанной около этого тетраэдра. Центроид*M* правильного тетраэдра также равноудален от всех его граней (медиана правильного тетраэдра перпендикулярна соответствующей его грани), поэтому он является центром сферы, вписанной в этот тетраэдр. (Об этом свидетельствует и тот факт, что в точке *M* пересекаются биссекторы двугранных углов тетраэдра при ребрах *AB, AC* и *AP*). Таким образом, в правильном тетраэдре *PABC* (рис.20) имеем: $PM = R$ – радиус описанной сферы, $OM = r$- радиус вписанной сферы.

По условию задачи, сфера касается всех ребер правильного тетраэдра *PABC*. Тогда пересечением этой сферы с гранями тетраэдра являются равные окружности (они вписаны в равные правильные треугольники - грани данного тетраэдра). Это означает, что центром этой сферы является точка тетраэдра, равноудаленная от его граней. Такой точкой в правильном тетраэдре *PABC* является его центроид*M*» [33].

а) «в прямоугольном $\triangle POB$имеем: $OP = \sqrt{PB^2 - OB^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$.

Тогда: $MP = \frac{3}{4} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$ - расстояние от центра сферы до вершины тетраэдра; $OM = \frac{1}{4} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ - расстояние от центра сферы до грани тетраэдра.

Далее, $BH \perp AC$, $PO \perp (ABC) \Rightarrow AC \perp (PBH) \Rightarrow MH \perp AC \Rightarrow$ длина *MH* – расстояние от центра сферы до ребра тетраэдра. Найдем *MH*.

В прямоугольном ΔOMH имеем: $OH = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $OM = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, тогда $MH = \sqrt{OH^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{2}$.

б) центр*M* сферы равноудален от граней правильного тетраэдра *PABC*. От грани *ABC* точка *M* удалена на расстояние $OM = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. При этом сфера пересекает эту грань по окружности, вписанной в правильный треугольник *ABC* со стороной 8. Радиус этой окружности равен $OH = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Значит, отрезок $MH = \sqrt{OH^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{2}$ является радиусом нашей сферы» [33].

Ответ: а) $2\sqrt{6}$ - расстояние до вершины; $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ - расстояние до грани; $2\sqrt{2}$ - расстояние до ребра; б) $2\sqrt{2}$ - длина радиуса сферы.

Таким образом, необходимо обратить внимание учащихся на то, что «радиус такой сферы равен расстоянию от центра сферы до ребра тетраэдра, так как эта сфера касается его ребер» [33].

4.3. Вписанная сфера в правильный тетраэдр и описанная сфера около правильного тетраэдра

При обучении решению данного типа задач, необходимо повторить ряд утверждений, приведенных в Таблице 7.

Также учащимся полезно знать такие важные аспекты, как:

1) «если все плоские углы трехгранного угла равны по $60°$, то расстояние от вершины угла до центра вписанного в этот угол шара радиуса r равно $3r$, а расстояние от центра этого шара до ребра тетраэдра равно $r\sqrt{3}$;

2) любая вершина правильного тетраэдра проектируется в центр окружности, описанной около ее противоположной грани;

3) прямая, проведенная через центр любого сечения сферы перпендикулярно плоскости этого сечения, проходит через центр данной сферы» [33];

4) «центр сферы, описанной около правильного тетраэдра, принадлежит любой его высоте, т. е. все высоты правильного тетраэдра проходят через центр описанной около него сферы;

5) все высоты правильного тетраэдра проходят через центр вписанной в него сферы;

6) центр вписанной сферы в тетраэдр делит его высоты в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра» [33].

Таблица 7

Знания, необходимые для решения задач

Планиметрия	**Стереометрия**
Окружность называется вписанной в правильный треугольник, если она касается всех его сторон.	«Сфера называется вписанной в правильный тетраэдр, если она касается всех его граней» [36, с.189].
Центр вписанной окружности в правильный треугольник находится в точке пересечения его биссектрис, медиан и высот.	Центр вписанной сферы в правильный тетраэдр находится в точке пересечения биссектральных плоскостей двугранных углов.
В правильный треугольник можно вписать круг.	В правильный тетраэдр можно вписать шар.
Радиус вписанной окружности в правильный треугольник равен произведению стороны треугольника на $\sqrt{3}/6$.	Радиус вписанной сферы в правильный тетраэдр равен произведению ребра тетраэдра на $\sqrt{6}/12$.
Окружность называется описанной около правильного треугольника, если все вершины его лежат на окружности.	«Сфера называется описанной около правильного тетраэдра, если все его вершины принадлежат поверхности сферы» [36, с.190].
Около треугольника можно описать	Около правильного тетраэдра можно

окружность.	описать сферу.
Радиус описанной окружности около правильного треугольника равен произведению стороны треугольника на $\sqrt{3}/3$	Радиус описанной сферы около правильного тетраэдра равен произведению ребра тетраэдра на $\sqrt{6}/4$.
Центры вписанной окружности в правильный треугольник и описанной около него совпадают.	Центры вписанной сферы в правильный тетраэдр и описанной около него совпадают.

Задача 32.«Найти площадь поверхности сферы: а) вписанной в правильный тетраэдр с ребром 12 см; б) описанной около этого же тетраэдра»[33, с.142].

Решение.«Так как, с одной стороны, любая вершина правильного тетраэдра проектируется в центр окружности, описанной около ее противоположной грани, с другой стороны, прямая, проведенная через центр любого сечения сферы перпендикулярно плоскости этого сечения, проходит через центр данной сферы, описанной около правильного тетраэдра, принадлежит любой его высоте, т.е. высоты правильного тетраэдра проходят через центр описанной около него сферы» [33, с.142].

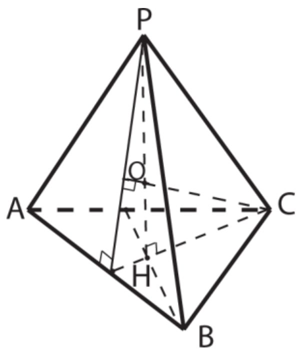


Рис. 21.

«Аналогично, все высоты правильного тетраэдра проходят через центр вписанной в него сферы и делятся этим центром в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра» [33, с.142].

Центры сферы вписанной в правильный тетраэдр и сферы, описанной около него, совпадают.

а) Радиус $r = OH$ (рис.21) сферы с центром O, вписанной в правильный тетраэдр вычисляется по формуле:

$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, где a – длина ребра правильного тетраэдра. Значит, $r = \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{12\sqrt{6}}{12} = \sqrt{6}$ (см).

Найдем площадь поверхности сферы: $S_{пов.} = 4\pi r^2 = 4\cdot 6\pi = 24\pi$ (см^2)

б) Радиус $R = OP$ (рис.3) сферы с центром O, описанной около правильного тетраэдра вычисляется по формуле: R= $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, где a – длина ребра правильного тетраэдра. Значит, $R = \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{12\sqrt{6}}{4} = 3\sqrt{6}$ (см)

Найдем площадь поверхности сферы: $S_{пов.} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 54\pi = 216\pi$ (см^2)

Ответ: а)24π см^2; б) 216π см^2.

Для понимания факта приведенных выше соотношений, учащимся рекомендуется решить следующую задачу:

Задача 33.«В правильный тетраэдр вписана сфера радиуса r. Найдите радиус сечения этой сферы плоскостью, перпендикулярной высоте тетраэдра и делящей ее в отношении 2:1, считая от вершины тетраэдра»[37, 3.290].

Решение.Пусть ω - вписанная сфера в тетраэдр $PABC$, точка O – центр данной сферы; M – точка пересечения высоты PH тетраэдра с плоскостью сечения сферы ω, K – точка, принадлежащая этому сечению. Очевидно, что MK – это радиус искомого сечения (рис. 22). Рассмотрим треугольник KMO – он прямоугольный, так как плоскость сечения перпендикулярна высоте тетраэдра, значит, по теореме Пифагору имеем:

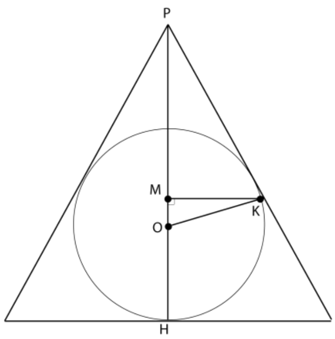


Рис. 22.

$MK = \sqrt{OK^2 - OM^2}$. Рассмотрим высоту тетраэдра PH: с одной стороны $PH = 4r$, с другой стороны $PH = 3MH$. Значит, $MH = \frac{4}{3}r$. Тогда $OM = MH - OH = \frac{4}{3}r - r = \frac{1}{3}r.$ Найдем MK: $MK = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{3}\right)^2} = \frac{2r\sqrt{2}}{3}$ - радиус искомого сечения.

Ответ: $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$.

4.4. Решение задач векторно-координатным методом

Прежде чем приступить к решению стереометрических задач координатным методом, «необходимо сначала решить эту задачу конструктивно, геометрически. Иначе говоря, необходимо составить «геометрический алгоритм» ее решения, что естественным образом связано с повторением и углублением материала в школьной геометрии» [33].

Задача 34.«Найдите площадь сферы, описанной около тетраэдра РАВС, если: $P(0;0;-6)$, $A(0;0;0)$, $B(8;0;0)$, $P(0;-2;0)$»[28, с.106].

Решение. Площадь сферы находится по формуле: $S_{сф} = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы. Так как радиус сферы равен расстоянию от любой точки сферы до ее центра, то для решения задачи достаточно найти координаты центра *T* сферы, описанный около заданного координатами своих вершин тетраэдра *PABC*.

Известно, на что множеством всех точек пространства, равноудаленных от данных точек *E* и *F*, является плоскость серединных перпендикуляров отрезка *EF*. Поэтому центром сферы, описанной около тетраэдра, является точка пересечения плоскостей серединных перпендикуляров трех любых не лежащих в одной плоскости рёбер этого тетраэдра.

Пусть α, β, γ – плоскости серединных перпендикуляров рёбер соответственно *AB*, *BC*, *AP* тетраэдра *PABC*; *K, H, M* – середины соответственно этих ребер.

Находим: $K(4;0;0)$, $H(4;-1;0)$, $M(0;0;-3)$; $\overrightarrow{AB}(8;0;0)$, $\overrightarrow{CB}(8;2;0)$ и $\overrightarrow{PA}(0;0;-6)$ – векторы, перпендикулярные соответственно плоскостям α, β, γ в качестве векторов нормалей стоит взять векторы $\vec{n}_1(1;0;0) \parallel \overrightarrow{AB}$, $\vec{n}_2(4;1;0) \parallel \overrightarrow{CB}$ и $\vec{n}_3(0;0;1) \parallel \overrightarrow{PA}$. Тогда уравнения плоскостей $\alpha = (K, \vec{n}_1)$, $\beta = (H, \vec{n}_2)$ и $\gamma = (M, \vec{n}_3)$ имеют вид соответственно: $x - 4 = 0$, $4x + y - 15 = 0$, $z + 3 = 0$.

Координаты точки $T = (\alpha \cap \beta) \cap \gamma$ являются решением системы,

$$\begin{cases} x - 4 = 0, \\ 4x + y - 15 = 0, \\ z + 3 = 0, \end{cases}$$

составленной из уравнений плоскостей α, β, γ. Решением ее является тройка: $x = 4,\ y = -1,\ z = -3$. Значит, равноудалённой от всех вершин тетраэдра *PABC* является точка $T(4;-1;-3)$ – искомый центр сферы, описанной около этого тетраэдра. Причем удалена эта точка от вершин на расстояние, равное $TA = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26} = R$. Тогда $S_{сф} = 4\pi(\sqrt{26})^2 = 104\pi$ (кв. ед).

Ответ: 104π.

4.5. Задачи на комбинацию сферы и правильного тетраэдра из ЕГЭ

Рассмотрим некоторые задания, которые встречаются в экзаменационных тестах профильного уровня по математике.

Задача 35.«В правильный тетраэдр *ABCD* вписан шар. Из точки *D* на грань *ABC* тетраэдра опущена высота *DE*. Точка *P* является серединой отрезка *DE*. Через точку *P* проведена плоскость, перпендикулярно к *DE*. Из всех точек, которые принадлежат одновременно шару и проведенной плоскости, взята точка *O*, являющаяся ближайшей к точке *A*. Найти расстояние от точки *O* до грани *ABD*, если объем шара равен 1» [50, с.332].

Решение.Пусть высота тетраэдра *ABCD* равна *DE=h*, точка *M* – центр вписанной сферы с радиусом *r*. Учитывая тот факт, что центр вписанной сферы в тетраэдре делит его высоту в отношении 3:1, считая от вершины, то середина высоты *DE* (точка *P*) лежит на поверхности шара и противоположна *E*. Плоскость, перпендикулярная высоте *DE*, параллельна плоскости

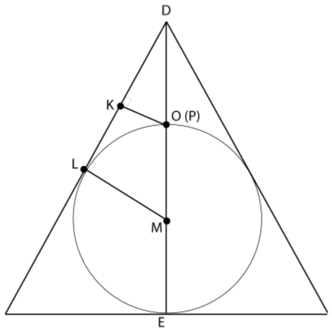


Рис. 23.

основания тетраэдра и проходит через точку P, значит, данная плоскость является касательной к шару. Отсюда следует, что точка O совпадает с точкой P.

Опустим перпендикуляры из точки O и центра шара M на грань ABD. Основанием данных перпендикуляров будут соответственно точки K и L.

Образуются два подобных прямоугольных треугольника ΔDOK и ΔDML Составим отношение сходственных сторон: $\frac{KO}{LM} = \frac{DO}{DM}$, откуда получаем: $\frac{KO}{r} = \frac{2h}{3h}$. Поэтому искомое расстояние KO между точкой O и гранью ABDбудет равно $KO = \frac{2}{3}r$. Вычислимr. Поскольку $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 1$, то $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$, поэтому искомое расстояние равно $KO = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2}{9\pi}}$.

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi}}$.

Задача 36.«Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равных шара. Каждый шар касается трёх других и трёх граней тетраэдра. Найдите радиусы шаров» [50, с.332].

Решение:пусть r – искомый радиус. Соединим попарно центры шаров.

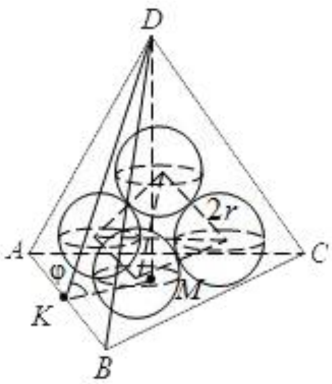


Рис. 24.

Получим правильный тетраэдр со стороной $2r$. Так как шары вписаны в трёхгранные углы при вершинах правильного тетраэдра, то их центры лежат на соответствующих высотах тетраэдра. Поэтому центр правильного тетраэдра с вершинами в центрах данных шаров совпадает с центром O данного правильного тетраэдра.

Пусть шар радиуса r с центром O_1, вписанный в трёхгранный угол с вершиной D, касается плоскости грани ABD данного правильного тетраэдра $ABCD$ со стороной a в точке P.Тогда:

$$O_1P = r, OD = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}a\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{4}, OO_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}2r\sqrt{6} = \frac{r\sqrt{6}}{2},$$

$$O_1D = OD - OO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4} - \frac{r\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}(a-2r)}{4}.$$

Пусть M – центр основания ABC, K – середина AB, φ – угол между высотой тетраэдра и плокостью его грани. Из прямоугольного треугольника DMK находим, что $\sin\varphi = \frac{MK}{DK} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \div \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}$. Значит, $O_1D = \frac{O_1P}{\sin\varphi}$, или $\frac{\sqrt{6}(a-2r)}{4} = 3r$, откуда находим, что $r = \frac{a(\sqrt{6}-1)}{10}$.

Ответ: $r = \frac{a(\sqrt{6}-1)}{10}$.

4.6. Задачи для самостоятельного решения

1. «В тетраэдр вписан шар радиуса 5. Найдите расстояние от центра шара до вершин и до ребер этого тетраэдра, если все ребра тетраэдра равны» [37].

Ответ: 15 – до вершины; $5\sqrt{3}$ – до ребер.

2. «Высота правильного тетраэдра равна 9 см. Найдите объем вписанного в него шара» [37].

Ответ: 36π см^3.

3. «Около правильного тетраэдра описана сфера радиуса $\sqrt{3}$. Найдите: а) расстояние от центра сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра; б) длину ребра тетраэдра» [37].

Ответ: а) $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 1; б) $2\sqrt{2}$.

4.«Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен *3*» [22].

Ответ: $\frac{27\sqrt{6}}{4}$.

5. «Вершина *A* правильного тетраэдра *ABCD* с ребром $a = \sqrt{1{,}5}$ является центром сферы, радиус которой равен высоте этого тетраэдра. Найдите длину линии пересечения сферы поверхностью тетраэдра» [37].

Ответ: π.

6. «Сфера касается всех ребер правильного тетраэдра с ребром 3. Найти: *а)* радиус сферы; *б)* расстояния от центра этой сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра» [39].

Ответ:а) $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; *б)* расстояние до вершины $\frac{3\sqrt{6}}{4}$; расстояние до грани $\frac{3\sqrt{6}}{12}$; расстояние до ребра $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

7. «В шар вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписан шар. Найти отношение поверхностей двух шаров» [22] .

Ответ: 9.

§5. Педагогический эксперимент и его результаты

Констатирующий этап эксперимента проводился на базе МБУ «Гимназия № 77» г. о. Тольятти в 2017/18 уч. г. В нём приняли участие учителя математики (4 человек) и обучающиеся 11 класса (20 человек).

В ходе констатирующего этапа экспериментального исследования проводилось изучение в выявлении трудностей при изучении темы «Комбинации сферы и многогранников».

Основными задачами данного этапа эксперимента являлись:

- определение основных типов геометрических задач, получивших распространение в практике учителей математики, приёмов и принципов и методики их реализации;

- мониторингдеятельности учителей и учеников;

- выявление методических особенностей изучения темы «Комбинация сферы и многогранников».

Основные методы исследования: изучение опыта учителей математики по организации учебной работы при решении задач по теме исследования, изучение учебно-методической документации общеобразовательной школы, анкетирование учителей и обучающихся.

Анкетирование учителей математики по вопросам использования разнообразных типов геометрических задач, трудности в обучении их решению позволило сделать выводы, что большинством учителей геометрические задачи по теме «комбинации сферы и многогранников» воспринимаются в основном, как творческие задачи. Различные типы геометрических задач, предложенные в анкете, учителя используют частично, например, задачи на доказательство, рассматриваются всеми учителями в процессе закрепления теоремы, следствия и т.д., однако, задачи, на приведение примеров и контрпримеров не пользуются спросом среди опрошенных учителей.

Большинство учителей математики (75%) считают целесообразным не частое решение заданий по теме исследования, отдавая предпочтения другим темам, объясняя это тем, что задачи по теме «Комбинации сферы и многогранников» встречаются редко в заданиях по ЕГЭ, по сравнению с задачами по другим темам.

Лишь один учитель регулярно рассматривает задачи по данной теме на уроках в классе и предлагает для дальнейшего закрепления навыковпрорешать подобные задания самостоятельно дома.

Также стоит отметить, что большинство учителей более сложные виды задач по теме «Комбинации сферы и многогранников», где в задании указаны более одной сферы, предлагают уже не всем учащимся, а более успешным и продвинутым в математике.

В качестве домашних заданий учителя математики, в основном, предлагают ученикам самостоятельные, контрольные, тестовые работы, проектные задания. Такие виды работ как домашние лабораторные, практические работы, написание сочинений, домашние задание на составление задач и т. д. задаются крайне редко.

Опрос среди учителей, также показал, что использование различных типов задач по теме «Комбинации сферы и многогранников» улучшает качество усвоения учебного материала.

Причины, по которым учителя редко включают задачи на комбинации сферы с многогранниками, стали: недостаточное методическое и техническое обеспечение учебного процесса, нехватка времени, трудоёмкость процесса организации.

Анкетирование обучающихся с целью изучения отношения школьников к домашней работе по математике показало следующее:

1. Большинство опрошенных учеников (60%) негативно воспринимает домашние задания по математике. Связано это с тем, что: 1) нехватка времени из-за большой учебной нагрузки и подготовки к вступительным экзаменам в ВУЗы; 2) однотипность домашних заданий; 2) отсутствие помощи и указаний в решении со стороны учителя.

2. Среди учащихся опрос показал, что многие выбирают задачи не с учебника, а сайта «Решу ЕГЭ», где предлагается большинство заданий на вычисление. Задачи на «доказательство» и «построение» встречаются реже, вызывает у учащихся определенные трудности.

3. Выполняют домашнее задание регулярно 50% обучающихся.

4. Игнорирование домашних заданийопрошенные ученики объяснили следующими причинами:

50% – большой объём домашней работы;

30% – нерегулярная проверка со стороны учителя;

20% – утрата интереса из-за однотипных заданий.

5. По мнению респондентов, разнообразные виды домашних заданий им предлагаются в основном 1 раз в месяц.

6. Большинство обучающихся отметили, что выполняли бы систематические разнообразные виды домашних заданий с удовольствием, если бы учитель оказывал соответствующую помощь 36%.

Таким образом, установлено, что:

1. Учителя математики указывают на некоторые причины (недостаточное методическое и техническое обеспечение учебного процесса, нехватка времени, трудоёмкость процесса организации) которые препятствуют регулярному обучению решения геометрических задач.

2. Только половина учеников систематически выполняют домашние задания по математике, но отрицательно к ним относятся ввиду отсутствия разнообразия в предлагаемых заданиях, а также отсутствия помощи со стороны учителя.

Полученные результаты констатирующего этапа эксперимента определили актуальность использования различных типов геометрических задач, их положительное влияние на мотивацию и успеваемость обучающихся и необходимость разработки системы задач по теме «комбинация сферы и многогранников» и методики ее реализации в современных условиях обучения математике.

Выводы по второй главе

Основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1) установлено, что при обучении решению задач на комбинацию сфер и многогранников следует обучить учащихся:

- вырабатывать умение анализировать геометрическую комбинацию, в которой находятся сфера и многогранник;

- грамотно выполнить чертеж, на котором необходимо верно, наглядно и лаконично изобразить фигуры, заданные её условием. При этомво время построения чертежа при решении задач на комбинации нужно «изображать только те фигуры (точки, отрезки, окружности и др.), которые работают при решении данной задачи, при необходимости выполнить дополнительные построения на сделанном чертеже» [39, с.33];

- установить логические взаимосвязи между данными и искомыми элементами полученной модели;

- производить аргументированные обоснования возникающих умозаключений и необходимые вычислительные операции, безошибочное завершение которых приводит к нужному и верному ответу к задаче.

2) представлена подборка геометрических задач по темам: «Комбинация сферы и куба» и «Комбинация сферы и правильного тетраэдра» для учащихся в старшей школе;

3) проведен педагогический эксперимент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данного исследования получены следующие результаты:

1. В работе были выделены основные цели и задачи дифференциации обучения решению задач в углубленном курсе геометрии старшей школы, суть которых заключается в том, чтобы обеспечить каждому учащемуся, независимо от его уровня знаний и способностей, условия для повышения его математической культуры, а также удовлетворения познавательных потребностей и развития мотивации к научно-исследовательской деятельности.

2. Рассмотрены и определены цели изучения темы «Комбинация сферы и многогранников», а так же основные требования к знаниям, умениям учащихся по этой теме согласно ФГОС среднего (полного) общего образования на базовом и профильном уровнях освоения математики в старших классах.

3. Проведен анализ учебников по геометрии за 10-11 класс, который показал, что на базовом уровне изучения геометрии тема «Комбинация сферы и правильного тетраэдра» не рассматривается, на профильном уровне данная тема раскрывается частично в виде темы «Вписанные и описанные сферы», а на углубленном профильном уровне она более полно представлена в УМК Е.В. Потоскуева и дополнена такими темами как «Пересекающиеся сфера и многогранник» и «Сфера, касающаяся всех ребер многогранника». Таким образом, рассмотрение данной темы недостаточно освещено в современных учебниках.

4. В работе были рассмотрены основные методические аспекты по обучению решения задач по темам «Комбинации сферы и куба» и «Комбинации сферы и правильного тетраэдра» в углубленном курсе геометрии старшей школы.

5. Проведен анализ задачного материала по темам «Комбинации сферы и куба» и «Комбинации сферы и правильного тетраэдра» по УМК Е.В. Потоскуева и представлена типология задач с примерами.

6. Разработаны системы задач по теме исследования для учащихся 10-11-х классов.

7. Проведен констатирующий этап педагогического эксперимента с целью выявления у учащихся умений решать задачи по теме «Комбинация сферы и многогранника», а также умений применять различные методы и приемы при решении задач по этой теме.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙЛИТЕРАТУРЫ

1. Абейсекера, Е.А. Комбинация сферы и куба // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – 1 оптический диск. – с. 205-207.

2. Александров, А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: Учеб. для 10–11 кл. общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2002,- 319с.

3. Атанасян, Л.С., Бутусов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 10-11кл: учеб. Для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни .- М.: Просвещение, 2007, - 255с.

4. Бескин, Н.М. Методика геометрии. Учебник для педагогических институтов. — М.: Учпедгиз, 1947. — 276 с.

5. Бикмурзина, Р.Р. Дифференцированный подход к формированию познавательной самостоятельности студентов младших курсов вузов в процессе обучения математике: Дисс. . канд. пед. наук / Р.Р. Бикмурзина. - Саранск, 1996. – 195 с.

6. Болтянский, В.Г. Как учить поиску решения задач / В.Г. Болтянский, Я.И. Грудёнов// Математика в школе. – 1988. – №1. – С.8–14.

7. Бурмистрова, Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 10—11 классы. Базовый и углубл. уровни: учеб. пособие для учителей общеобразоват. организаций / сост. Т. А. Бурмистрова. — М. : Просвещение, 2015. — 143 с.

8. Гаврилова, Н.Ф. Рабочие программы по геометрии: 7-11 классы . - М.: ВАКО, 2011. - 192 с.

9. Гаевская, А.Е. Элективный курс по теме «Комбинации многогранников и сферы» // А.Е. Гаевская. URL: https://infourok.ru/

10. Гангнус, Р.В. Геометрия: Часть 2. Стереометрия/ Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц – М.: Книга по Требованию, 2013. – 328 с.

11. Глейзер, Г.Д. Проблемы индивидуальности и дифференциации в вечерней школе. — Л.: Изд-во АПП СССР, 1981.

12. Гончаров, Н.К. Дифференциация и индивидуализация образования и воспитания в современных условиях. — М.: АПН СССР, 1971.

13. Готман, Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения/Э.Г. Готман. – М.: МЦНМО, 2006. – 160 с.

14. Гусев, В.А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе: дисс. докт. пед. наук / В.А. Гусев. Москва, 1990. – 398 с.

15. Далингер, В.А. Методика обучения стереометрии посредством решения задач : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 370 с.

16. Дорофеев, Г.В., Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Фирсов В. В. Дифференциация в обучении математике// Математика в школе. - 1990. - № 4.

17. Колягин, Ю.М., Ткачева М. В., Федерина Н. Е. Профильная дифференциация обучения математике// Математика в школе. - 1990. - № 4.

18. Лебедева, С.В. Решение задач на комбинацию сферы с другими телами с помощью системы подводящих вопросов / С.В. Лебедева // Вестник Ставропольского государственного университета. - 2011. - № 4. С. 51-55.

19. Лысенко, Ф.Ф. Математика. ЕГЭ-2018. Тематический тренинг. 10-11 классы: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.О. Иванова. – Ростов н/Д: Легион, 2017. – 432 с.

20. Морозова, Л.В. Из опыта дифференцированного обучения / Л.В. Морозова // Математика в школе. 1998. – № 6. – С. 37.

21. Орлов, В.В. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентовматемат. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. – М.: Дрофа, 2007. - 320 с.

22. Осипенко, Л.А. Комбинации сферы и многогранников. Задачи и упражнения / Л.А. Осипенко. – Иркутск, 2009 – 89 с.

23. Погорелов, А.В. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобр. учреждений. – М.: «Просвещение», 2004.– 398с.

24. Подходова, Н.С. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 1 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова [и др.] ; под редакцией Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 274 с. — (Образовательный процесс). — ISBN 978-5-534-08766-6. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/433438 (дата обращения: 19.06.2019).

25. Подходова, Н.С. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова [и др.] ; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 299 с. — (Серия : Образовательный процесс). — ISBN 978-5-534-08768-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/434099 (дата обращения: 12.05.2019).

26. Потоскуев, Е.В. Без рисунка не найти решение // Математика. – 2015. - №4. – С. 16 – 23.

27. Потоскуев, Е.В. В единстве логической и графической культуры залог решения геометрических задач // Математическое образование. – 2012. - №1 (61). – С. 30 – 40.

28. Потоскуев, Е.В. Векторно-координатный метод решения задач стереометрии. ФГОС / Е. В. Потоскуев. – М. : Издательство «Экзамен», 2019. – 223 с.

29. Потоскуев, Е.В. Векторный метод решения стереометрических задач // Математика. – 2009. - №6. – С. 27 – 34.

30. Потоскуев, Е.В. Геометрическая поэма : хрестоматия / Е.В. Потоскуев. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014. – 383 с.

31. Потоскуев, Е.В. Геометрический компонент профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом вузе : учебно-методическое пособие / Е.В. Потоскуев. – Тольятти : ТГУ, 2009. – 400 с.

32. Потоскуев, Е.В. Геометрия и становление творческой личности / Е.В. Потоскуев // Математика в школе. 2009. – № 6. – С. 10-12.

33. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 11 кл. : методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева №Геометрия. 11 кл.» / Е.В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — 2-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2007. — 220 с.

34. Потоскуев, Е.В. Еще раз о необходимости корректной аргументации при решении стереометрической задачи // Математика в школе. – 2007. - №5. – С. 2 – 9.

35. Потоскуев, Е.В. Логически рассуждая, решаем геометрическую задачу // Математика. – 2014. - №9. – С. 40 – 53.

36. Потоскуев, Е.В. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 11 кл. : учебник / Е.В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — 3-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2016. — 384 с.

37. Потоскуев, Е.В. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 11 кл. : задачник / Е.В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — 3-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2016. — 236 с.

38. Потоскуев, Е.В. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 10—11 классы. Рабочая программа к линии УМК Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича : учебно-методическое пособие / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — М. : Дрофа, 2017. — 65 с.

39. Потоскуев, Е.В. О верных и наглядных рисунках и корректной аргументации при решении задач на комбинации многогранников и фигур вращения // Математика в школе. – 2010. - №4. – С. 19 – 27.

40. Потоскуев, Е.В. О необходимости аргументации при решении стереометрических задач // Математическое образование. – 2009. - №4 (52). – С. 11 – 18.

41. Потоскуев, Е.В. О сферах касающихся всех ребер многогранника // Математика для школьников. 2013. – № 2. – С. 14-21.

42. Потоскуев, Е.В. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. ФГОС / Е.В Потоскуев. 2-е изд., перераб. И доп. – М. : Издательство «Экзамен», 2017. – 223 с.

43. Потоскуев, Е.В. Опорные задачи: сфера, куб и правильный тетраэдр // Математика. – 2013. - №5. – С. 26 – 31.

44. Потоскуев, Е.В. Рекомендации по изучению стереометрии. Комбинации тел вращения // Учебно-методическая газета «Математика». - № 10. – 2009.

45. Потоскуев, Е.В. Самостоятельные работы по геометрии. 11 класс / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич – М.: Илекса, 2017. – 120 с.

46. Приказ Минобразования РФ от 18.07.2002 N 2783 "Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования" http://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=EXP&n=308747#03033787019972387

47. Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 N 413 (ред. от 29.06.2017) "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования" (Зарегистрировано в Минюсте России 07.06.2012 N 24480) http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_131131/

48. Рузин, Н.К. Задача как цель и средство обучения математике // Математика в школе. - № 4. - 1980. - С. 13-15.

49. Сарацев, Г.И. Теоретические основы методики упражнений по математике в средней школе: Автореф. дисс. доктора пед. наук. - Л.: Изд-во Ленинградского педуниверситета, 1987. - 36 с.

50. Семёнов, А.Л., Ященко И.В. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А.Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с. – (Готовимся к ЕГЭ).

51. Смирнов, В.А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 64 с.

52. Смирнова, И.М., Смирнов В.А. Геометрия: Учеб. пособие для 10-11 классов гуманитарного профиля. - М.: Просвещение, 1997, - 259с.

53. Унт, И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. — М.: Педагогика, 1990.

54. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]: // Министерство образования и науки Российской Федерации. URL: http://минобрнауки.рф/документы/543

55. Черняева, А.Р. Реализация деятельностного подхода в процессе формирования пространственного мышления учащихся при обучении построению сечений многогранников, дис…,Омск, 2004

56. Шахмаев, И.М. Дифференциация обучения в средней общеобразовательной школе // Дидактика средней школы. — М.: Просвещение, 1982.

57. Adolphus T. Problems of Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools in Rivers State, Nigeria [Электронныйресурс] // International Journal of Emerging. Sciences. 2011. Vol. 1. PP. 143-152. URL: http://dspace.stir.ac.uk/bitstream/1893/26189/1/Problems_of_Teaching_and_Learning_of_Geo.pdf (датаобращения 17.04.2018).

58. González E., Guillén G. In search of elements for a competence model in solid geometry teaching. Establishment of relationships [Электронныйресурс] // Proceedings of CERME. 2009. Vol. 6. PP. 806-815. URL: http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5-14-gonzalez- guillen.pdf (дата обращения 17.04.2018).

59. Herbst P., K. Kosko K. Mathematical Knowledge for Teaching High School Geometry [Электронныйресурс] // PME-NA Proceedings. 2012. Vol. 34. PP. 438-444. URL: https://pdfs.semanticscholar.org/8930/d32b930090334b113c2c625c76b93f7cab36.pdf (дата обращения 17.04.2018).

60. Jones K. Issues in the teaching and learning of geometry [Электронныйресурс] // Aspects of Teaching Secondary Mathematics. 2002. Vol. 1. PP. 121-139. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.586.6619&rep=rep1&type=pdf (дата обращения 17.04.2018).

61. Morris R. Studies in mathematics education. Teaching of geometry. Vendome :Unesco, 1986. 187 p. URL: http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001248/124809eo.pdf (дата обращения 17.04.2018).