Тольяттинский государственный университет

П.Ф. Зибров, О.А. Кузнецова

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Тольятти
ТГУ
2009

Федеральное агентство по образованию
Тольяттинский государственный университет
Факультет математики и информатики
Кафедра «Высшая математика и математическое моделирование»

П.Ф. Зибров, О.А. Кузнецова

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Тольятти
ТГУ
2009

УДК 517
ББК 22.51
З59

Рецензенты:
д. т.. н., профессор Тольяттинского государственного университета
Н.И. Лиманова;
к. п. н., профессор Тольяттинского филиала
Московского института коммерции и права *Л.В. Глухова*.

З59 Зибров, П.Ф. Ряды: учеб.-метод. пособие / П.Ф. Зибров, О.А. Кузнецова. – Тольятти : ТГУ, 2009. – 144 с.

Учебно-методическое пособие содержит необходимые теоретические сведения, методические указания, подробно решенные примеры, контрольные вопросы к каждому разделу, практикум, перечень основных понятий к каждому разделу и контрольные задания для студентов.

Предназначено для студентов очной, заочной и дистанционной форм обучения; может быть использовано преподавателями высшей математики при работе над курсом.

Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета математики и информатики Тольяттинского государственного университета.

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие посвящено одному из основных разделов математики – «Ряды». Ряды широко используются в инженерных расчетах и прикладных задачах. Они являются мощным аппаратом для приближенных вычислений значений функций, определенных интегралов, для нахождения приближенного решения дифференциальных уравнений.

В пособии подробно рассмотрены теоретические основы разделов темы «Ряды». Приведены основные определения, теоремы с доказательствами, свойства и примеры решения задач. Пособие содержит практикум для студентов, в который включены глоссарий по каждому разделу, алгоритмы решения задач, подробно разобранные примеры, варианты для самостоятельной работы.

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Основные сведения из теории рядов. Числовая последовательность и ряд. Сходимость ряда, сумма и остаток ряда. Простейшие действия над числовыми рядами.

1.1. Числовая последовательность и ряд. Сходимость ряда. Сумма и остаток ряда

Понятие бесконечного ряда и его суммы являются основными в математическом анализе. Бесконечные ряды используются во многих теоретических исследованиях математического анализа. Например, при определении показательной функции и тригонометрических функций комплексного переменного. Бесконечные ряды играют важную роль в разнообразных приложениях: при вычислении значений функций и вычислении определенных интегралов; при разложении периодического колебания на гармоники; при решении дифференциальных уравнений.

Определение. Если задана бесконечная последовательность чисел

$$u_1, u_2, \ \dots \ , u_n, \ \dots \ , \tag{1.1}$$

то выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.2}$$

называют числовым рядом, а числа $u_1, u_2, \ \dots \ , u_n, \ \dots$ называют членами числового ряда.

Ряд считается заданным, если известно правило, по которому записывается его соответствующий n-й член. Это выражение для произвольного n называется общим членом ряда и записывается с помощью формулы $u_n = f(n)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Пусть $u_n = \dfrac{1}{3^{2n+1}}$.

В этом случае весь ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n=1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{243} + \ldots + \frac{1}{3^{2n-1}} + \ldots .$$

В некотором случае ряд задают рекуррентными соотношениями, связывающими последующие члены с предыдущими членами. Тогда необходимо задать несколько первых членов ряда и формулу, устанавливающую связь между последующими элементами ряда. Например,

$$u_1 = 0, u_2 = 1, \ \dots \ , u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2}.$$

Следовательно, $u_3 = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}, u_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}, \dots$,

и весь ряд имеет следующий вид:

$$0 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \dots \ .$$

Определение. Сумма конечного числа n членов ряда называется его n-й частичной суммой.

Образуем частичные суммы ряда:

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1 \\ &S_2 = u_1 + u_2 \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Они представляют некоторую бесконечную последовательность чисел

$$S_1, \ S_2, \ S_3, \ \dots \ , S_n, \ \dots . \tag{1.4}$$

Определение. Если данная последовательность стремится к конечному пределу

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S , \tag{1.5}$$

то говорят, что бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

сходится, то есть имеет сумму S, и пишут

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Если последовательность S_n не имеет предела, то ряд называется расходящимся.

Рассмотрим примеры сходящихся и расходящихся рядов.

Пример. Ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

сходится при $|q| < 1$, то его частичная сумма S_n в таком случае имеет предел при $n \to \infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{a}{1-q} \cdot$$

Когда $|q| > 1$, ряд расходится, так как частичная сумма S_n не имеет предела при $n \to \infty$ и стремится к бесконечно большой величине

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty .$$

При $q = 1$ получаем ряд $a + a + a + \ldots + a + \ldots$, который расходится, поскольку его частичная сумма $S_n = n \cdot a$ также представляет бесконечно большую величину при $n \to \infty$.

Когда же $q = -1$, ряд $a - a + a - \ldots + a - \ldots$ имеет частичную сумму $S_n = a$ при нечетных n и $S_n = 0$ при четных n. Таким образом, S_n предела не имеет при $n \to \infty$, то есть ряд расходится.

О сумме бесконечного ряда можно говорить только тогда, когда он сходится и сумма первых членов ряда S_n является приближенным выражением для суммы ряда S. Погрешность r_n этого приближения выражается через разность

$$r_n = S - S_n , \tag{1.6}$$

которую называют остатком ряда.

Нетрудно видеть, что остаток r_n также есть сумма бесконечного ряда, в котором отброшены n первых членов ряда, т. е.

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots . \tag{1.7}$$

Точная величина этого остатка чаще всего неизвестна, поэтому важна приближенная оценка указанного остатка.

1.2. Свойства сходящихся рядов

Сходящиеся бесконечные ряды обладают свойствами, позволяющими проводить над ними операции как с конечными суммами.

1. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ имеет сумму S, то ряд

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots, \tag{1.8}$$

полученный в результате умножения всех членов исходного ряда на одно и то же число a, имеет сумму aS.

Так как сумма σ_n первых n членов нового ряда есть

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \ldots + au_n = aS_n,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} aS_n = a \lim_{n\to\infty} S_n = aS. \tag{1.9}$$

2. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать.

Если

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S;$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sigma,$$

то ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots \tag{1.10}$$

сходится и сумма его равна $S \pm \sigma$.

Последнее вытекает из того, что сумма первых членов ряда имеет вид

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) = S_n \pm \sigma_n.$$

Отсюда следует, что сочетательный закон справедлив для любого сходящегося ряда, то есть любые рядом стоящие слагаемые можно объединить в специальные группы и рассмотреть последовательность S_{n_k}, что не изменит предела.

Другие свойства суммы, такие как независимость ее от порядка слагаемых, перемножение двух сумм справедливы не для всякого ряда.

3. Свойство сходимости или расходимости ряда не нарушится, если в ряде отбросить или приписать к нему любое конечное число членов в начале.

Рассмотрим два ряда

$$\begin{aligned} &u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \\ &u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \ldots \end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь второй ряд получен из первого отбрасыванием первых двух слагаемых. Обозначив через S_n сумму первых n слагаемых первого ряда, а через σ_n – то же самое для второго ряда, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+2} &= S_n - (u_1 + u_2) \\ S_n &= \sigma_{n+2} + (u_1 + u_2). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Тогда при $n \to \infty$ величина $(n+2) \to \infty$. S_n имеет предел S, σ_{n+2} имеет предел σ, справедливо и обратное. Пределы S и σ, то есть суммы заданных рядов, различны и удовлетворяют соотношению

$$\sigma = S - (u_1 + u_2)\,. \tag{1.13}$$

В качестве следствия из этого свойства вытекает *заключение*: если сходится ряд, то сходится и любой его остаток. Справедливо и обратное утверждение.

1.3. Вопросы для самоконтроля

1. Определение числового ряда.
2. Определение n-й частичной суммы числового ряда.
3. Определение сходящегося числового ряда.
4. Свойства сходящихся числовых рядов.

2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Знакоположительные ряды. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Признаки сравнения Даламбера, Коши. Обобщенный гармонический ряд.

2.1. Знакоположительные ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд

Особое значение имеют ряды с положительными членами (знакоположительные), для которых все числа

$$u_1, u_2, u_3, \ \dots\ , u_n, \ \dots \geq 0 . \tag{2.1}$$

Следует отметить, что всякий знакоотрицательный ряд можно преобразовать в знакоположительный простым умножением на -1.

Частичная сумма S_n знакоположительного ряда монотонно возрастает при увеличении n, так как с ростом n каждый новый член ряда, попадающий в состав S_n, положителен. Следовательно, о сходимости знакоположительного ряда можно говорить тогда, когда частичная сумма S_n ограничена и имеет предел S при $n \to \infty$. Когда S_n неограниченно возрастает – ряд расходящийся.

Таким образом, для решения одного из основных вопросов о сходимости рядов важно установить необходимые признаки, при помощи которых данное суждение осуществляется по общему члену ряда.

Необходимый признак сходимости ряда. *Если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера.*

Доказательство

Предположим, что ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится и согласно определению его сумма S равна

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S . \tag{2.2}$$

Из этого определения имеет место также равенство

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S . \tag{2.3}$$

Действительно, при $n \to \infty$ и величина $(n-1) \to \infty$. Если из равенства (2.2) вычесть почленно (2.3), то получится соотношение

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0\,. \qquad (2.4)$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$$

из определения частной суммы следует

$$S_n - S_{n-1} = u_n\,. \qquad (2.5)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,. \qquad (2.6)$$

Что и требовалось доказать.

Из доказательства необходимого признака вытекает ***следствие:*** если n-й член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{10} + \ldots + \frac{n}{3n+1} + \ldots$$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right) = \frac{1}{3} \neq 0\,.$$

Рассмотрим гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ . \qquad (2.7)$$

Для него выполняется необходимый признак

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$

хотя ряд расходящийся и $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для доказательства последнего утверждения гармонический ряд представим в следующей форме:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)} + \frac{1}{17} + \ldots\ .$$

В каждой из круглых скобок заменим слагаемые наименьшим из них, тогда

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)^4+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)^8+\ldots\,.$$

Нетрудно видеть, что от проделанной замены сумма членов ряда в каждой скобке уменьшилась и стала равной $\frac{1}{2}$. Так как таких слагаемых можно брать сколько угодно, ее величина стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

Из представленных рассуждений следует: когда сумма меньших слагаемых стремится к бесконечности, то и сумма больших слагаемых гармонического ряда неограниченно возрастает при $n \to \infty$, то есть ряд расходится.

Отсюда вывод: необходимый признак сходимости ряда не является достаточным, то есть при выполнении условия (2.6) ряд не обязательно будет сходиться.

2.2. Необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительных рядов

Как уже отмечалось выше, ряд с положительными членами является сходящимся, если $S_n \to S$, и расходящимся, когда $S_n \to \infty$ или не существует. Сформулируем для знакоположительных рядов необходимое и достаточное условие сходимости.

Для того чтобы ряд с положительными членами был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы сумма S_n его первых членов при всяком n оставалась меньше некоторой постоянной A, не зависящей от n.

Действительно, для подобного ряда сумма S_n не убывает при возрастании n, так как при этом добавляются новые положительные (неотрицательные) слагаемые. Точно такое же поведение имеет и частичная сумма любого остатка положительного ряда, так как такой остаток сам является знакоположительным рядом.

С другой стороны, частичная сумма знакоположительного сходящегося ряда ограниченная, $S_n < S$, где $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ при всяком n, поскольку $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, а сама частичная сумма S_n монотонно возрастает при $n \to \infty$.

Аналогично неравенство $\sigma_k^N < \sigma^N$ при всяком значении k и для частичной суммы σ_k^N N-го остатка.

2.3. Признаки сравнения

Для суждения о сходимости или расходимости рядов с положительными членами полезно бывает сравнить их с другими, более простыми рядами, о сходимости которых заранее известно.

Сформулируем признак сравнения.

Если каждый положительный член ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \ , \tag{2.8}$$

начиная с некоторого u_n*, не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда*

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \ , \tag{2.9}$$

то есть $u_n \le v_n$*, тогда ряд* (2.8) *сходится.*

И наоборот, если каждый член ряда (2.8), *начиная с некоторого* n, *не меньше соответствующего положительного члена расходящегося ряда* (2.9), *то и ряд* (2.8) *тоже расходится.*

Доказательство

Допустим, что справедлива первая часть утверждения

$$u_n \le v_n \tag{2.10}$$

и второй ряд сходится. Тогда, не нарушая общности, можно предположить, что неравенство (2.10) выполняется при всех значениях n, так как часть первых членов по второму свойству сходящихся рядов можно отбросить.

Обозначив через S_n сумму n первых членов ряда (2.8), а через σ_n – частичную сумму второго ряда, запишем на основании (2.10)

$$S_n \le \sigma_n \ . \tag{2.11}$$

Согласно условиям теоремы ряд (2.9) сходится и $\sigma_n \le \sigma$, тогда и частичная сумма S_n ограничена, то есть $S_n \le \sigma$.

Отсюда в силу необходимого и достаточного условия сходимости ряд (2.8) также сходится. Первая часть признака сравнения доказана.

Предположим теперь, что

$$u_n \ge v_n \ . \tag{2.12}$$

Отсюда с полной очевидностью вытекает

$$S_n \geq \sigma_n . \tag{2.13}$$

Однако по условию теоремы второй ряд расходится, и сумма его первых n членов σ_n может быть сделана больше любого наперед заданного числа, отсюда и S_n будет бесконечно большим числом, следовательно, $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и первый ряд расходится.

Что и требовалось доказать.

Пример

1. Используя признак сравнения, покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Для этого достаточно сравнить его с гармоническим, то есть

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad .$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ при $n > 1$ и гармонический ряд расходится, то исходный ряд также расходится. Это можно доказать другим способом.

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} .$$

При $n \to \infty$ $S_n \to \infty$, следовательно, ряд расходится.

2. Нетрудно установить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$, члены которого меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots .$$

Так как второй ряд сходится и каждый член первого меньше членов второго, то есть $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, то согласно признаку сравнения указанный ряд сходится.

На практике признак сравнения чаще применяют в следующем виде.

Если при $n \to \infty$ *существует конечный, отличный от нуля предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A > 0$ *отношения общих членов двух знакоположительных рядов, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.*

Для доказательства последнего утверждения используем определение предела. То есть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N, что при всех $n > N$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad A - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon .$$

При этом ε выбран настолько малым, что $A - \varepsilon > 0$.

Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, тогда по свойству сходящихся рядов сходится ряд с членами $(A+\varepsilon)v_n$. На основании признаков сравнения $u_n < (A+\varepsilon)v_n$ при всех $n > N$, следовательно, первый ряд тоже сходится.

Наоборот, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то из неравенства $(A+\varepsilon)v_n < u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ согласно указанному признаку сходимости рядов.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, а гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то на основании доказанного признака исходный ряд будет расходиться.

Использование признаков сравнения связано с определенными трудностями, заключающимися в том, что для исследуемого ряда необходимо подобрать другой сравниваемый ряд, о сходимости или расходимости которого заранее известно.

Обычно в качестве «эталонного» расходящегося ряда используется гармонический, а сходящегося – ряд из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

2.4. Признак Даламбера

Рассмотрим признак, который позволяет установить сходимость ряда по общему виду его членов.

Теорема. *Если в ряде* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots (u_n > 0)$ *с положительными членами при* $n \to \infty$ *существует предел отношения последующего члена к предыдущему, равный d*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d \,, \tag{2.14}$$

то при $d < 1$ *ряд сходится, при* $d > 1$ *ряд расходится. Когда* $d = 1$, *ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Доказательство

Предположим, что $d < 1$, тогда по определению предела можно выбрать такое число N, что при всех $n \le N$ справедливо неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < d + \varepsilon = q \,. \tag{2.15}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – такая малая величина, что $d + \varepsilon = q < 1$, тогда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q; \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < q; \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < q; \quad \ldots \,. \tag{2.16}$$

Или

$$\begin{aligned} &u_{N+1} < qu_N \\ &u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N \\ &u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3 u_N \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.17}$$

Из соотношения (1.30) следует, что члены ряда

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots \,,$$

являющегося N-м остатком исходного ряда, меньше соответствующих членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$qu_N + q^2 u_N + q^3 u_N + \ldots \,,$$

знаменатель которой $q < 1$. Отсюда следует, что N-й остаток ряда сходится, следовательно, сходится и сам ряд. Что и требовалось доказать.

Если величина $d > 1$, то можно выбрать такое N, что при всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > d - \varepsilon = q, \tag{2.18}$$

где ε – некоторая малая величина, такая, что $q = d - \varepsilon > 1$.

В таком случае каждый последующий член больше предыдущего и не выполняется необходимый признак сходимости, по которому общий член при $n \to \infty$ должен стремиться к нулю. Значит, ряд расходится.

Для рядов, у которых $d = 1$ или предела d не существует, признак Даламбера не применим, потому что они могут быть как сходящимися, так и расходящимися.

Примеры

1) Исследовать ряд $1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n!} + \ldots$ на сходимость.

Решение

1. Находят

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{n!};$$

$$u_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!}.$$

2. Составляется отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, находится предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{(n+1)! 2^{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

3. Ряд сходится.

2) Исследовать ряд

$$1 + \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{3^2}{2^2\cdot 5} + \frac{3^3}{2^3\cdot 7} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)} + \ldots$$

на сходимость.

1. Находят

$$u_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)};$$

$$u_{n+1} = \frac{3^n}{2^n(2n+1)}.$$

2. Составляют отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^n\cdot 2^{n-1}(2n-1)}{2^n(2n+1)3^{n-1}}=\frac{3(2n-1)}{2(2n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}>1.$$

3. Ряд расходится.

2.5. Признаки Коши

1. Локальный признак Коши

Теорема. *Если имеется ряд с положительными членами* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *и* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$ *, то*

1. При $l<1$ ряд сходится.
2. При $l>1$ ряд расходится.
3. При $l=1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1.$$

Ряд сходится.

2. Интегральный признак Коши

Предположим, что члены ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ положительны и не возрастают, то есть

$$u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots\geq u_n\geq u_{n+1}\geq\ldots>0\,. \tag{2.19}$$

Все члены ряда можно изобразить графически, откладывая по оси абсцисс переменную $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, а по оси ординат – соответствующее значение u_n . В общем случае всегда можно найти некоторую непрерывную функцию $y=f(x)$, которая при $x=n$

принимает значение u_n. Соединив плавной кривой соответствующие точки u_n, получим график не возрастающей функции $y = f(x)$ (рис. 1).

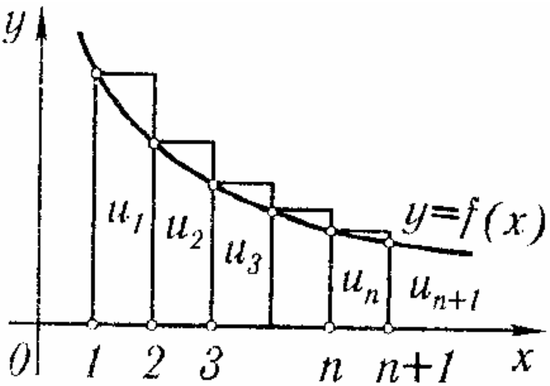


Рис. 1. Графическое изображение суммы n первых членов ряда

Частичную сумму $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ можно представить суммой площадей «выходящих» прямоугольников, заключающей внутри себя площадь криволинейной трапеции. Она ограничена ординатными прямыми $x = 1$ и $x = n + 1$.

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx. \qquad (2.20)$$

С другой стороны, рассматриваемая криволинейная трапеция заключает в себе «входящие» прямоугольники, сумма площадей которых равна

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n+1} = S_{n+1} - u_1. \qquad (2.21)$$

Тогда можно записать

$$S_{n+1} - u_1 \leq \int_1^{n+1} f(x)dx. \qquad (2.22)$$

Неравенства (2.20) и (2.22) приводят к формулировке интегрального признака Коши.

Теорема. *Ряд* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, *члены которого* $u_n = f(n)$ *положительны и не возрастают при увеличении n, сходится, когда интеграл*

$$I=\int_{1}^{\infty} f(x)dx \tag{2.23}$$

сходится, то есть имеет конечный предел, и расходится, когда указанный интеграл равен бесконечности или расходится.

Доказательство

Доказательство сформулированного признака основано на том, что когда интеграл $I=\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ имеет конечную площадь, то

$$\int_{1}^{n+1} f(x)dx<\int_{1}^{\infty} f(x)dx. \tag{2.24}$$

Следовательно, $S_{n+1}-u_1\le I$ или

$$S_{n+1}\le I+u_1. \tag{2.25}$$

С другой стороны,

$$S_n<S_{n+1}<I+u_1, \tag{2.26}$$

то есть частичная сумма S_n остается ограниченной при всех n, следовательно, она имеет предел и исследуемый ряд сходится.

В том случае, когда интеграл $I=\int_{1}^{\infty} f(x)dx\to\infty$ расходится, то интеграл $I=\int_{1}^{n+1} f(x)dx$ при увеличении n может быть больше любого наперед заданного числа N. Тогда из (2.20) следует, что частичная сумма S_n неограниченна и ряд из членов $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ расходящийся.

Таким образом, сформулированный признак полностью доказан.

Нетрудно видеть, что все рассуждения остаются в силе, если соотношение (2.19) выполняется, начиная с некоторого N, тогда в интеграле (2.23) нижний предел изменится с 1 на N, что не влияет на сходимость интеграла. Это позволяет оценивать остаток ряда, члены которого начинаются с N.

Пример. Исследуем с помощью интегрального признака Коши на сходимость гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\ \text{где}\ f(n)=\frac{1}{n}.$$

Отсюда $f(x)=\dfrac{1}{x}$, тогда $I=\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x}=\ln x\ \Big|_1^\infty=\ln\infty=\infty$, интеграл расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, что было установлено раньше.

2.6. Обобщенный гармонический ряд

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$.

Покажем, что с помощью интегрального признака Коши можно судить о сходимости ряда в тех случаях, когда, например, признак Даламбера не применим. Так, отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{(n)^p}}=\frac{n^p}{(n+1)^p}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \text{ при } n\to\infty\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}\to 1.$$

Исходя из принципа Даламбера, ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Запишем для данного ряда функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$, тогда

$$I=\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\ \Big|_1^\infty, & \text{\textit{при} } p\neq 1\\ \ln x\ \Big|_1^\infty, & \text{\textit{при} } p=1.\end{cases}\tag{2.27}$$

Из полученного соотношения следует, что интеграл расходится, если $p\le 1$, и сходится, когда $p>1$. В этом случае показатель $(1-p)<0$ и выражение

$$\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^\infty=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(x^{1-p}-1\right)\right]=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{p-1}}-1\right)=\frac{1}{p-1}.$$

Таким образом, в силу признака Коши обобщенный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ будет расходящимся, если $p\le 1$, и сходящимся, если $p>1$.

Когда $p=1$, получается гармонический ряд, расходимость которого доказывалась различными способами.

При $p=2$ получается ряд обратных квадратов. Его сходимость доказывается методом сравнения с геометрической прогрессией, показатель которой равен $\frac{1}{2}$.

Оценка остатка ряда:

$$r_N < \int_N^{\infty} f^N(x)dx$$

$$S = S_N + r_N < \int_1^N f(x)dx + \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx.$$

2.7. Вопросы для самоконтроля

1. Определение знакоположительного ряда.
2. Необходимый признак сходимости знакоположительного ряда.
3. Достаточный признак расходимости знакоположительного ряда.
4. Гармонический ряд: доказательство расходимости.
5. Необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительных рядов.
6. Признак сравнения. Доказательство.
7. Обобщенный признак сравнения.
8. Теорема Даламбера. Доказательство.
9. Локальный признак Коши.
10. Графическое изображение числовых рядов.
11. Интегральный признак Коши.
12. Обобщенный гармонический ряд: исследование сходимости.

3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

3.1. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница

Перейдем к изучению рядов, члены которых имеют любые знаки. Выделим среди них такие, у которых положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно, то есть

$$\pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_n -)\ldots \; . \tag{3.1}$$

Такие знакопеременные ряды называют знакочередующимися.

Рассмотрим достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда, установленный Лейбницем.

Теорема. *Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_n$ *монотонно убывают, т. е.*

$$|u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots \; ,$$

и предел общего члена ряда при неограниченном возрастании его номера равен нулю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \, ,$$

то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Доказательство

Рассмотрим сначала частичные суммы четного числа $n = 2m$ первых членов

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \, . \tag{3.2}$$

Так как по условию теоремы абсолютные величины членов ряда убывают, то в скобках стоят положительные слагаемые и вся сумма не отрицательна

$$S_{2m} > 0 \tag{3.3}$$

и возрастает с ростом m.

С другой стороны, сумму (3.2) можно представить в следующем виде:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - \, . \tag{3.4}$$

В скобках снова неотрицательные величины, поэтому в результате вычитания их из u_1 получится число меньше, чем u_1.

Из соотношений (3.3) и (3.4) вытекает, что с ростом m частичная сумма S_{2m} растет, ограничена сверху и имеет предел S

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S\ . \tag{3.5}$$

Тогда $0 < S < u_1$.

Для доказательства сходимости ряда нужно показать, что и нечетные частичные суммы также стремятся к пределу S с ростом m.

Запишем следующую частичную сумму

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}\,. \tag{3.6}$$

Найдем предел этой суммы

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + 0 = S\ , \tag{3.7}$$

так как из условия $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$.

Отсюда следует, что частичная сумма как четного, так и нечетного числа членов стремится к одному пределу S, то есть ряд сходится и имеет сумму $S < u_1$.

Теорема доказана.

Пример. Ряд

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

сходится по признаку Лейбница, так как

$$|1| > \left|\frac{-1}{2}\right| > \left|\frac{1}{3}\right| > \ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty} (-1)\frac{n+1}{n!} = 0\,.$$

Установим, чему равен остаток r_n знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, в тех случаях, когда сумму ряда S заменяют некоторой частичной суммой S_n. В этом случае отбрасываются члены, начиная с u_{n+1}. Однако этот остаток ряда сам образует знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница. Поэтому его сумма по абсолютной величине меньше первого члена u_{n+1} этого ряда. Если при этом $u_{n+1} > 0$, то сумма остатка положительна. В том случае, когда $u_{n+1} < 0$, сумма остатка отрицательна, следовательно, сумма общего ряда в первом случае будет величина с недостатком, а во втором случае – с избытком.

Изложенное приводит к простому правилу суммирования рядов рассматриваемого типа.

Например, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ знакочередующийся и удовлетворяет признаку Лейбница, то есть $|1|>\left|\frac{1}{2}\right|>\left|\frac{1}{3}\right|>\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$.

Следовательно, он сходится и его сумма равна $\ln 2$. Однако для нахождения $\ln 2 = 0{,}693147$ он не подходит. Это следует из того, что для вычисления суммы ряда с точностью до $0{,}0001$ необходимо взять 10000 его членов. Действительно, как было показано выше, величина остатка r_n рассматриваемого ряда должна быть меньше $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, то есть $|r_n|<\frac{1}{n+1}\le 0{,}0001$, то есть $n\ge 10000$.

Из полученного результата следует, что изучаемый ряд сходится медленно и не подходит для приблеженных вычислений.

3.2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Рассмотрим знакопеременные ряды общего вида, в которых имеется бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов, сменяющих друг друга по некоторому закону. Такие ряды называют знакопеременными. Рассмотренные в предыдущем параграфе знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Введем для таких рядов понятия абсолютной и условной сходимости.

Определение. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Сходящийся знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если расходится знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Например, ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots$ абсолютно сходящийся, так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Другой ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, как уже было показано, сходится по признаку Лейбница, однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ из абсолютных величин его членов расходится (гармонический ряд).

Рассмотрим достаточный признак сходимости.

Теорема. *Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.*

Доказательство

Запишем частичную сумму S_n первых членов знакопеременного ряда.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n .$$

Объединим в сумму S_n^+ все положительные члены ряда, а в S_n^- абсолютные величины всех отрицательных членов из выделенных n первых членов ряда. Отсюда величина S_n будет

$$S_n = S_n^+ - S_n^- . \qquad (3.8)$$

Составим частичную сумму σ_n из абсолютных величин членов ряда

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| = S_n^+ + S_n^- . \qquad (3.9)$$

По условию σ_n имеет предел, так как ряд из абсолютных величин членов сходится. Обозначим его σ .

Частичные суммы S_n^+ и S_n^- – положительные и возрастающие. Нетрудно увидеть, что $S_n^+ \le \sigma_n < \sigma$ и $S_n^- \le \sigma_n < \sigma$.

Следовательно, S_n^+ и S_n^- ограничены и имеют пределы. Тогда и разность $S_n = S_n^+ - S_n^-$ ограничена и имеет предел при $n \to \infty$, что свидетельствует о сходимости знакочередующегося ряда. Сформулированный признак доказан полностью.

Однако этот признак не является необходимым, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Случай условно сходящегося ряда.

Наиболее простая формулировка доказанной теоремы такова: всякий абсолютно сходящийся ряд, который сходится.

3.3. Свойства абсолютно сходящихся рядов: перестановка и группировка членов, умножение рядов

Рассмотрим следующие основные свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Свойство 1. *Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов*.

Действительно, всякая перестановка членов ряда вызывает перестановку среди положительных или отрицательных членов или же среди обоих одновременно. А так как в предыдущем параграфе было показано, что как положительные, так и отрицательные члены абсолютно сходящегося ряда образуют знакопостоянные ряды, то их суммы не изменяются при перестановке членов. Тогда не изменится и сумма данного абсолютно сходящегося ряда. Что и требовалось доказать. Отметим, что условно сходящиеся ряды данным свойством не обладают.

Нетрудно показать на примере и доказать строго, что сумму условно сходящегося ряда можно сделать равной любому числу, осуществив надлежащую перестановку бесконечного множества членов такого ряда.

Например, в условно сходящемся ряде

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$$

осуществим перестановку членов так, чтобы после каждого положительного стояли два отрицательных, то есть

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right).$$

Если сложить каждый положительный член с каждым следующим за ним отрицательным, то получим

$$S_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right].$$

Сравнивая исходный ряд с полученным, устанавливаем, что их члены отличаются на $\frac{1}{2}$, тогда и сумма также будет отличаться на общий множитель $\frac{1}{2}$, то есть $S_1 = \frac{1}{2} S_2$, что доказывает справедливость сформулированного утверждения.

Свойство 2. *Сумма и разность двух абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд.*

Доказательство

Допустим, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два абсолютно сходящихся ряда, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ сходятся, следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ согласно второму свойству знакоположительных рядов.

Используя известное неравенство $|u_n \pm v_n| \leq |u_n| + |v_n|$, можно утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n \pm v_n|$ сходится по признаку сравнения. Но тогда на основании признака Лейбница сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$.

Что и требовалось доказать.

Свойство 3. *Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S и σ есть новый абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S\sigma$ при любом способе перемножения.* (Примем без доказательства.)

Отметим, что произведение двух рядов

$$
\begin{aligned}
S &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \;; \\
\sigma &= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

записывается в виде соотношения

$$
\begin{aligned}
S\sigma = (u_1 v_1) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots \\
+ \ldots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1) + \ldots \;.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Здесь в каждой группе членов, объединенных скобками, сумма индексов сомножителей постоянна. В первой скобке она равна 2, во второй 3, в третьей 4, в n-й равна $n+1$.

Представленные здесь свойства абсолютно сходящихся рядов приводят к следующему заключению. Абсолютно сходящиеся ряды складываются, вычитаются и перемножаются, как обычные многочлены в алгебре, а суммы этих рядов не зависят от порядка записи их членов.

Примеры

1. Установить сходимость ряда $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$ – числовой знакопеременный ряд.

1. Запишем ряд из абсолютных величин, исследуем его

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots .$$

2. Используем интегральный признак Коши, задав

$$f(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}$$

и вычислив $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(2x-1)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(2x-1)}\Big|_1^{\infty}=0+\frac{1}{2}$.

3. Интеграл сходится, ряд из абсолютных величин сходится. Заданный ряд сходится абсолютно.

2. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots$

1. Записывается ряд из абсолютных величин, исследуем его

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots .$$

2. Воспользуемся интегральным признаком Коши.

$$I=\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx=\ln\left[\ln(x+1)\right]\Big|_1^{\infty}=\ln[\ln\infty]-\ln\ln 2=\infty$$

– расходится.

3. Интеграл расходится, и ряд из абсолютных величин расходится.

4. По теореме Лейбница $\frac{1}{2\ln 2}>\frac{1}{3\ln 3}>\frac{1}{4\ln 4}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\ln(n+1)}=0$.

5. Исследуемый ряд сходится условно.

3.4. Вопросы для самоконтроля

1. Определение знакочередующегося ряда.
2. Достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.
3. Определение знакопеременного ряда.
4. Определение абсолютно сходящегося знакопеременного ряда.
5. Определение условно сходящегося знакопеременного ряда.
6. Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
7. Свойства абсолютно сходящихся знакопеременных рядов.

4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Основные понятия функциональных рядов. Функциональный ряд, область сходимости. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов.

4.1. Функциональный ряд. Область сходимости ряда

Изучим ряды, членами которых являются не числа, а функции аргумента x, то есть

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots . \tag{4.1}$$

Такие ряды называют функциональными. При этом предполагается, что все функции $u_n(x)$ определены и непрерывны в одном и том же интервале. Рассматриваемый ряд является числовым при конкретных значениях x и может сходиться при некоторых величинах x и расходиться при других.

Следовательно, значение $x = x_0$, при котором числовой ряд сходится, называется точкой сходимости ряда.

Совокупность всех точек сходимости ряда называется областью сходимости ряда.

Определение. Множество всех значений аргумента x, при которых из функционального ряда получаются сходящиеся числовые ряды, называют областью сходимости функционального ряда. Множество всех значений x, при которых получаются расходящиеся числовые ряды, называют областью его расходимости.

Например, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^n}$ сходится при всех значениях x, кроме $x=0$; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится при всех действительных значениях x.

Другой функциональный ряд

$$1 + x + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

сходится в интервале $(-1; 1)$, так как записанный ряд представляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма членов такого ряда равна $\frac{1}{1-x}$, где x в данном случае знаменатель прогрессии. При $|x| \geq 1$ ряд расходится.

Нахождение области сходимости более сложных функциональных рядов – задача довольно сложная.

Как следует из последнего примера, сумма ряда также является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости исследуемого ряда. Эту сумму обозначают через $S(x)$:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots .$$

Так же как и в предыдущих разделах, сумму n первых членов ряда обозначают через $S_n(x)$, а остаток ряда через $r_n(x)$. И если функциональный ряд сходится, то его сумма равна $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. Это равносильно тому, что для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ и для каждого x можно указать такой номер N, зависящий от ε и x, то есть $N(\varepsilon,x)$, что

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon , \tag{4.2}$$

как только $n \ge N(\varepsilon,x)$.

Из предыдущих лекций известно, что остаток сходящегося ряда также сходится. Представим сумму остатка $r_n(x)$ в виде

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x). \tag{4.3}$$

Учитывая (2.2), соотношение (2.3) перепишем как неравенство для любого $\varepsilon > 0$, то есть

$$|r_n(x)| < \varepsilon , \tag{4.4}$$

когда $n \ge N(\varepsilon,x)$. Это значит, что для всех x из области сходимости функционального ряда (4.1) выполняется (4.4), которое равносильно соотношению

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 . \tag{4.5}$$

Следовательно, остаток $r_n(x)$ сходящегося функционального ряда стремится к нулю при $n\to\infty$.

4.2. Равномерно сходящиеся функциональные ряды, их свойства

Определение. Функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

называют равномерно (правильно) сходящимся в своей области, если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и для всех x одновременно можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что $|r_n(x)| < \varepsilon$ при $n \ge N(\varepsilon)$.

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости ряда (признак Вейерштрассе).

Теорема. *Если для всех $x \in D$ члены функционального ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов некоторого знакоположительного сходящегося числового ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, то есть* $|u_1(x)| \le a_1$ *,* $|u_2(x)| \le a_2$ *, ...,* $|u_n(x)| \le a_n$ *, ..., то функциональный ряд в области D сходится равномерно.*

Доказательство

По условию теоремы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $a_n > 0$, а

$$|u_n(x)| \le a_n \tag{4.6}$$

для всех x. Из определения равномерной сходимости ряда следует, что

$$|r_n(x)| < \varepsilon \text{ при } n \ge N(\varepsilon).$$

Задав $\varepsilon > 0$, можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что $|\sigma - \sigma_n| < \varepsilon$, как только $n > N(\varepsilon)$. Это равносильно

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n, \tag{4.7}$$

где σ – сумма числового ряда, а σ_n – частичная сумма n первых членов. Составим частичную сумму $S_n(x)$ и предположим, что для всех x

$$S(x) = \lim_{m\to\infty} S_n(x).$$

Тогда $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$.

Оценим остаток функционального ряда.

$$|r_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...| .$$

В силу неравенства (2.6)

$$|r_n(x)| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ...| \text{ или } |r_n(x)| = r_n^{,} ,$$

где $r_n^{,}$ – сумма остатка числового ряда и $r_n^{,} = \sigma - \sigma_n$, следовательно, $r_n^{,} < \varepsilon$ для всех $n > N(\varepsilon)$, тогда и $|r_n(x)| < \varepsilon$, как только $n > N(\varepsilon)$ для любого $x \in D$. А это означает, что функциональный ряд в области D сходится равномерно.

Теорема доказана полностью.

Следствия

1. Из теоремы следует, что равномерно сходящийся ряд в области D сходится абсолютно.

2. Если для функционального ряда существует числовой знакоположительный ряд, удовлетворяющий теореме, то его называют мажорантой, а функциональный ряд – мажорируемым.

3. Мажорируемые ряды – это простейший класс равномерно сходящихся рядов.

Пример. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos 2x}{2!}+\ldots+\frac{\cos nx}{n!}+\ldots\ .$$

Так как $\left|\frac{\cos nx}{n!}\right|\le\frac{1}{n!}$ для всех $x\in(-\infty;\infty)$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ мажоранта сходится, то рассматриваемый функциональный ряд сходится равномерно всюду при $-\infty<x<\infty$.

Выделим основные свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Если для всех $x\in D$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно и его члены – непрерывные функции в указанной области, то сумма ряда есть также непрерывная функция в области D.*

Доказательство

Выберем в области D точку x_0 и запишем для нее

$$S(x_0) = S_n(x_0) + r_n(x_0).$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и оценим

$$|S(x)-S(x_0)|=|S_n(x)-S_n(x_0)+r_n(x)-r_n(x_9)|\le|S_n(x)-S_n(x_0)|+|r_n(x)|+|r_n(x_0)|.$$

Так как $S_n(x)$ – конечная сумма непрерывных функций, то

$$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{для всех}\ |x-x_0|<\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

$|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $n>N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ и $x\in D$ из условия равномерной сходимости ряда. Соответственно, для $x_0\in D$ и $n>N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ следует $|r_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $|S(x)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$ для всех $|x-x_0|<\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, что соответствует определению непрерывной функции *S(x)* в точке x_0. В свою очередь, x_0 – любая точка, принадлежащая области D, поэтому непрерывность суммы ряда доказана для всех точек $x \in D$.

Теорема 2. *Если функциональный ряд сходится равномерно в области D и ряд, составленный из произвольных его членов, также сходится равномерно, то производная суммы ряда равна сумме производных его членов, то есть*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Теорема 3. *Если функциональный ряд сходится равномерно в области D, то в этой области допустимо его почленное интегрирование, то есть*

$$\int_a^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt.$$

4.3. Вопросы для самоконтроля

1. Определение функционального ряда.
2. Определение области сходимости функционального ряда.
3. Остаток функционального ряда. Свойство остатка сходящегося функционального ряда.
4. Определение равномерно сходящегося функционального ряда.
5. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенной ряд. Интервал и область сходимости. Ряды: Тейлора, Маклорена, биномиальный. Разложение в ряд функций.

5.1. Степенной ряд. Интервал и область сходимости

Определение. Функциональный ряд, членами которого являются степенные функции, называют степенным рядом, то есть

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots , \tag{5.1}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n + \ldots$ – постоянные коэффициенты степенного ряда.

Изучение области сходимости степенного ряда связано с теоремой Абеля.

Теорема. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится в некоторой точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится и притом абсолютно в интервале* $(-|x_0|, |x_0|)$, *то есть при всяком* x, *удовлетворяющем неравенству* $|x| < |x_0|$.

Доказательство

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ его общий член $a_n x_0^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$, следовательно, все члены ряда ограничены. Тогда можно найти некоторое положительное число M, при котором для всех n справедливо неравенство

$$\left| a_n x_0^n \right| < M . \tag{5.2}$$

Перепишем степенной ряд в следующем виде

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \tag{5.3}$$

и составим новый ряд из абсолютных величин его членов

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots . \tag{5.4}$$

Учитывая неравенство (5.2), можно перейти к ряду, члены которого представляют геометрическую прогрессию и каждый из них больше, чем в (5.4), то есть

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots . \tag{5.5}$$

Если $|x| < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и прогрессия (5.5) сходится, поэтому сходится и ряд из абсолютных величин (5.4), а это значит, что ряд (5.1) сходится абсолютно.

Если степенной ряд расходится в точке $x = x_0'$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_0'|$.

Действительно, если бы ряд сходился при указанных значениях x, то по первой части теоремы он должен сходиться и в точке x_0', что противоречит условию.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Из теоремы Абеля следует, что для степенного ряда существует такое число R, что для всех $|x| < R$ степенной ряд сходится, а для всех $|x| > R$ ряд расходится.

Определение. Радиусом сходимости степенного ряда называется такое число R, что для всех $|x| < R$ степенной ряд сходится, а для всех $|x| > R$ ряд расходится. Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости ряда.

Область сходимости степенного ряда имеет простой вид. Она представляет собой либо единственную точку числовой оси OX. Например, для ряда

$$1 + x + 2^2x^2 + \ldots + n^nx^n + \ldots$$

при $x = 0$ ряд сходится и суммой имеет единицу; для достаточно больших n $|nx| > 1$, следовательно, при $n \to \infty$ $|n^n x^n| > 1$, что свидетельствует о невыполнении необходимого условия сходимости. Либо промежуток, симметричный относительно точки $x = 0$. Наконец, всю ось OX.

Покажем на примерах.

Так, ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ представляет геометрическую прогрессию со знаменателем x. Этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Здесь на числовой оси точки сходимости лежат в интервале $-1 < x < 1$ и вне этого интервала точки расходимости.

Если ряд имеет вид

$$1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^n} + \ldots,$$

то для любых x, начиная с некоторого большого n, справедливо неравенство $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$. Тогда $\left|\frac{x}{n+1}\right|^{n+1} < \left|\frac{x}{n}\right|^{n+1}, \left|\frac{x}{n+2}\right|^{n+2} < \left|\frac{x}{n}\right|^{n+2}, \ldots$.

Отсюда следует, что с определенного значения n члены ряда по абсолютной величине меньше членов сходящейся геометрической прогрессии. Представленный ряд сходится при любом x. Областью его сходимости является вся ось OX.

Таким образом, для определения радиуса и интервала сходимости степенного ряда следует составить ряд из абсолютных величин его членов, то есть

$$|a_0| + |a_1 x| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \quad (5.6)$$

При всех x из области сходимости (5.6) получаются числовые знакоположительные ряды, для которых имеет место признак сходимости Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| < 1$. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = d$, тогда условие сходимости принимает вид $d\,|x| < 1$ или $|x| < \frac{1}{d} = R$. Интервал сходимости есть $(-R, R)$.

Из сказанного следует, что для определения области сходимости степенного ряда необходимо:

1. Найти интервал сходимости.
2. Исследовать поведение ряда на концах интервала, то есть в точках $x = \pm R$.
3. Сделать выводы.

Пример. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{2^n} + \ldots .$$

1. Определяется радиус сходимости из условия

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\,2^n}{2^{n+1}\,x^{2n-2}}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|x^2\right| < 1.$$

Отсюда $x^2 < 2$ или $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ – интервал сходимости.

2. Пусть $x = -\sqrt{2}$, ряд принимает вид $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{2^n} + \ldots$ – расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

Если $x=\sqrt{2}$, то получим ряд $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}+\ldots$, который расходится.

3. Вывод: область сходимости ряда – интервал $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

5.2. Основные свойства степенных рядов

Прежде чем излагать свойства степенных рядов, докажем две леммы.

Лемма 1. Степенной ряд правильно сходится в любом интервале [-b, b], целиком лежащем внутри интервала сходимости.

Доказательство

Если взять точку x_0, лежащую в интервале сходимости $b<x_0<R$, то по теореме Абеля числовой ряд $|a_0|+|a_1x_0|+\ldots+|a_nx_0^n|+\ldots$ сходится. Тогда для любой точки $x\in[-b,b]$ справедливо неравенство $|x|<|x_0|$ и $|a_nx^n|<|a_nx_0^n|$. Данное неравенство свидетельствует о том, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ правильно сходится в интервале [-b, b].

Лемма 2. Степенной ряд, составленный из производных членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Доказательство

Запишем ряд из производных для заданного

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\ldots\ . \qquad (5.7)$$

Предположим, что существует предел отношений $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. В этом случае радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(n)x^{n-1}$ устанавливаются с помощью признака Даламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ – для исходного ряда;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^n}{na_nx^{n+1}}\right|=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ – для второго ряда.

Равенство пределов обоих рядов показывает, что их радиусы сходимости одинаковые. То есть ряды правильно сходятся в любом интервале, целиком принадлежащем интервалу сходимости.

Учитывая доказанные леммы, сформулируем следующие **свойства**.

1. Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда. Отметим также, что на концах интервала, где степенной ряд сходится, его сумма $S(x)$ остается непрерывной.

2. Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости.

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + \ldots + \int_0^x a_n x^n dx + \ldots =$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

при $(-R < x < R)$.

3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости.

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \text{ при } (-R < x < R).$$

Более того, степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз. То есть

$$S''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots$$

$$S'''(x) = 3\cdot 2a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \ldots \ .$$

5.3. Ряды по степеням разности $(x - x_0)$

Степенным рядом также является и функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad (5.9)$$

разложенный по степени двучлена $(x - x_0)$, где постоянные $a_0, a_1, a_2, \ \ldots \ , a_n, \ \ldots$ – коэффициенты ряда.

Когда $x_0 = 0$, то получается известный степенной ряд, разложенный по степеням *x*.

Произведем постановку вида

$$x - x_0 = X \ . \qquad (5.10)$$

Перейдем к ряду

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n, \qquad (5.11)$$

для которого справедливы все определения, теоремы и свойства, доказанные в предыдущих параграфах.

Если интервал сходимости ряда (5.11) есть $-R < X < R$, то исходный ряд (5.9) сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $-R < x - x_0 < R$, откуда следует $x_0 - R < x < R + x_0$.

Учитывая, что ряд (5.11) при $|x| > R$ расходится вне интервала $x_0 + R < x < x_0 - R$. Таким образом, интервал сходимости такого ряда есть промежуток $(x_0 - R, x_0 + R)$ с центром в точке x_0.

Пример. Определить область сходимости ряда

$$1 + (x-5) + (x-5)^2 + (x-5)^3 + \ldots + (x-5)^n + \ldots .$$

Если положить $x - 5 = X$, то получим новый ряд $1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + \ldots$, который сходится при всех X, удовлетворяющих неравенству $-1 < X < +1$ или $-1 < x - 5 < +1$.

Отсюда $4 < x < 6$. То есть ряд сходится при всех x, заключенных в промежутке на числовой оси между 4 и 6.

5.4. Ряды Тейлора и Маклорена. Сходимость рядов

Из предыдущих разделов известно, что сумма степенного ряда в интервале его сходимости является непрерывной и бесконечное число раз дифференцируемой функцией. Установим, при каких условиях заданная функция $f(x)$ представляет сумму некоторого степенного ряда в определенном интервале.

Разложение функции в степенной ряд дает возможность заменить функцию приближенно суммой нескольких первых членов степенного ряда, что существенно упрощает процесс вычисления ее значений и оценки степени их точности.

Замена функции выражением в виде многочлена удобна в решении различных вопросов анализа, например при вычислении интегралов, решении дифференциальных уравнений.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, бесконечное число раз дифференцируемую в окрестности точки x_0 и представимую суммой степенного ряда, сходящегося в некотором интервале, содержащем точку x_0, то есть

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots , \qquad (5.12)$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n,\ \ldots$ – некоторые числовые коэффициенты.

Определим их значения по известным величинам $f(x_0)$, $f'(x_0)$ и $f^{(n)}(x_0)$.

Действительно, при $x = x_0$ $f(x_0) = a_0$.

Продифференцировав степенной ряд, будем иметь

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots .$$

Положив $x = x_0$, получим

$$f'(x_0) = a$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 2!a_2$$

$$f''(x_0) = 6a_3 = 3!a_3$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

$$\ldots$$

Из полученных зависимостей определяются все коэффициенты разложения $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ..,\ a_n,\ \ldots$

$$a_0 = f(x_0);\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!};\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!};\ \ldots;\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!};\ \ldots . \qquad (5.13)$$

Подставив (5.13) в разложение (5.11), запишем ряд, который называется рядом Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \qquad (5.14)$$

Определение. Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд (5.14) относительно разности $(x - x_0)$, коэффициенты которого выражаются через значение функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0 по формулам:

$$a_0 = f(x_0);\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!};\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!};\ \ldots;\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!};\ \ldots .$$

Эти коэффициенты называют коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Когда в ряде Тейлора полагают $x_0 = 0$, то получают частный случай ряда, который называют рядом Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots\ . \qquad (5.15)$$

Таким образом, если функция $f(x)$ разложима в степенной ряд, то этим разложением является ее ряд Тейлора.

Как следует из соотношений (5.14) и (5.15), для разложимости в степенной ряд Тейлора или Маклорена функция $f(x)$ должна иметь производные всех порядков в точке $x=x_0$ или $x=0$, то есть быть бесконечное число раз дифференцируемой в этих точках.

Это требование представляет необходимое условие для разложимости функции в указанный степенной ряд. Но это условие не является достаточным. Примером бесконечно дифференцируемой функции, не разложимой в ряд Тейлора, есть $e^{-\frac{1}{x^2}}$, так как сумма формально написанного для нее степенного ряда не равна $f(x)$. В данном случае все коэффициенты ряда Тейлора при $x=0$ обращаются в нуль и вся функция тождественно равна нулю.

Выведем достаточное условие разложимости функции $f(x)$ в степенной ряд.

Для дальнейших рассуждений введем обозначение частичной суммы ряда (5.14):

$$S(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ .$$

Согласно определению, чтобы $f(x)$ была суммой ряда, необходимо и достаточно выполнение предельного равенства

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

или же

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0\ . \qquad (5.16)$$

Выражение $f(x)-S_n(x)=R_n(x)$ является остаточным членом формулы Тейлора, и его предел $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ при $n\to\infty$ стремится к нулю. Следовательно, для разложимости $f(x)$ в степенной ряд Тейлора – Маклорена необходимо и достаточно, чтобы предел остаточного члена формулы Тейлора обращался в нуль. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)\neq 0$, то ряд не представляет заданной функции, он может сходиться и иметь суммой другую функцию.

Остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора в общем виде записывается

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)] \qquad 0 < \theta < 1 .$$

Таким образом, если для любой функции записан формально ряд Тейлора, то для доказательства того, что он представляет заданную функцию, необходимо убедиться, что остаточный член стремится к нулю или ряд своей суммой имеет исходную функцию.

Пример. Записать функцию $f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

Так как

$$f(1) = -1; \; f'(1) = \left|(-2x + 6x^2)\right|_{x=1} = 5;$$

$$f''(1) = (-2 + 12x) \;\Big|_{x=1} = 10 \,; \; f'''(1) = 12,$$

то $f(x) = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3$.

Раскрыв скобки, легко убедиться в справедливости тождества.

5.5. Разложение в степенной ряд функций e^x, $\sin x$, $\cos x$

Остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора для функции e^x имеет вид $R_n = \dfrac{e^{x_1} x^{n+1}}{(n+1)!}$, где x_1 есть величина, заключенная в промежутке $0 < x_1 < x$.

Выражение e^{x_1} при $x = x_1$ есть определенное число, а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ при любом x, так как степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ абсолютно сходится при всех значениях x.

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{x_1} x^{n+1}}{(n+1)!} = e^{x_1} 0 = 0$ при любом числовом значении аргумента x, следовательно, функция на основании необходимого и достаточного условия разложима в ряд Маклорена как частный случай ряда Тейлора. Коэффициенты разложения по (5.13) будут

$$f(0) = 1; \; \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!}; \; \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}; \; \dots ; \; \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} .$$

Отсюда искомое разложение имеет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ , \qquad (5.17)$$

где x изменяется в интервале $-\infty < x < +\infty$ и $0! = 1$.

Аналогично остаточный член для функции $f(x) = \sin x$ есть $R_n(x) = \dfrac{\sin[x_1 + \frac{\pi}{2}(n+1)]x^{n+1}}{(n+1)!}$. Здесь $x_1 < x$. Так как $\sin[x_1 + \frac{\pi}{2}(n+1)]$, то справедливо неравенство $\left|R_n(x)\right| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ независимо от величины x. Следовательно, функция $\sin x$ разложима в степенной ряд при всех действительных значениях аргумента x. Коэффициенты разложения по (5.13) записываются:

$$f(0) = 1;\ \ \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!};\ \ \frac{f''(0)}{2!} = 0;$$

$$\frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{3!};\ \ \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0;\ \ \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{5!};\ \ \ldots\ .$$

Окончательный вид разложения есть

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (5.18)$$

$$-\infty < x < +\infty\ .$$

Для получения разложения в ряд $f(x) = \cos x$ используем возможность дифференцирования степенных рядов, то есть продифференцируем (5.18) и найдем требуемое разложение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)\frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (5.19)$$

$$-\infty < x < +\infty\ .$$

Пример

Вычислить $\sin\dfrac{\pi}{18}$ с помощью ряда.

Так как $\dfrac{\pi}{18} \approx 0{,}174533$, то

$$\sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 .$$

Ограничившись двумя членами разложения $\frac{\pi}{18}$ и $-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$, допустим ошибку δ, которая по абсолютной величине меньше первого отброшенного члена, то есть $\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0{,}2)^5 < 4\cdot 10^{-6}$. Следовательно, $\sin\frac{\pi}{18} = 0{,}173647$, вычислено с точностью до 10^{-5}.

5.6. Разложение в степенной ряд интегрированием (на примере $\ln(1+x)$)

Разложим сначала в ряд производную $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, рассматривая соотношение $\frac{1}{1+x}$ как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем $(-x)$.

Тогда $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$.

Данное разложение, как известно, справедливо, когда $|x| < 1$. Проинтегрировав разложение $\frac{1}{1+x}$ в пределах от 0 до *x*, где неравенство $|x| < 1$ выполняется, получают

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = \int_0^x [1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots]dx =$$

$$= \left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots\right]_0^x =$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}.$$

Окончательно

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}\,, \tag{5.20}$$

где $(-1 < x < 1)$.

Если в формуле (5.20) положить вместо x $-x$, то запишется новый ряд:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \, . \qquad (5.21)$$

Он также сходится в интервале (-1, 1).

С помощью полученных соотношений (5.20) и (5.21) можно вычислить логарифмы, заключенные между нулем и двумя, хотя ряды сходятся очень медленно. Учитывая свойство сходящихся рядов о возможности почленного вычитания, представим разность

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right] . \qquad (5.22)$$

Здесь непрерывная функция $\dfrac{1+x}{1-x}$ пробегает все значения от 0 до $+\infty$, когда x изменяется в интервале сходимости ряда от -1 до $+1$. Полагая $x = \dfrac{1}{2N+1}$, где N – целое положительное число, приходят к формуле

$$\ln\frac{N+1}{N} = \ln(N+1) - \ln N = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3} + \dots\right],$$

служащей для вычисления логарифмов целых чисел.

5.7. Биномиальный ряд

Для разложения в ряд Маклорена функции $f(x) = (1+x)^m$, где m – произвольное постоянное число, найдем значение производных:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}; \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}; \quad \dots ;$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n} \dots \, .$$

Отсюда $f'(0) = m; \quad f''(0) = m(m-1); \ \dots \ f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1)$.

Используя найденные величины, запишем формально ряд

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots , \qquad (5.23)$$

который называют биномиальным.

Определим область его сходимости по принципу Даламбера, установив величину отношения последующего члена к предыдущему.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1} : \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^{n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |x|.$$

Из полученного результата следует, что ряд сходится, если $|x|<1$, и расходится, когда $|x|>1$.

Оценим остаточный член для случая $0<x<1$. В данном интервале для всех $n>m-1$ верно неравенство

$$(1+x)^{m-n-1} = \frac{1}{(1+x)^{n-(m-1)}} < 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Таким образом, биномиальный ряд представляет функцию $(1+x)^m$ в интервале (-1,1).

Когда m – целое положительное число, тогда ряд содержит $(m+1)$ слагаемых и превращается в формулу бинома Ньютона.

5.8. Вопросы для самоконтроля

1. Определение степенного ряда.
2. Теорема Абеля.
3. Определение радиуса сходимости степенного ряда.
4. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда.
5. Лемма об интервале правильной сходимости степенного ряда.
6. Свойства степенных рядов.
7. Определение степенного ряда по степеням $(x-x_0)$, интервал сходимости.
8. Определение ряда Тейлора, коэффициенты ряда Тейлора.
9. Определение ряда Маклорена.
10. Определение остаточного члена формулы Тейлора.
11. Разложение функции $f(x)=e^x$ в степенной ряд.
12. Разложение функции $f(x)=\sin x$ в степенной ряд.
13. Разложение функции $f(x)=\cos x$ в степенной ряд.
14. Разложение функции $f(x)=\ln(1+x)$ в степенной ряд.
15. Определение биномиального ряда.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

6.1. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций

Рассмотрим задачу, в которой требуется вычислить значение функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Предполагаем, что x_0 принадлежит окрестности точки a, для которой известно разложение этой функции в ряд Тейлора. Тогда $f(x_0) \approx S_n(x_0)$ и абсолютная погрешность $\Delta = \left| f(x_0) - S_n(x_0) \right| = \left| R_n(x_0) \right|$.

Пример. Найти $\sqrt[3]{130}$.

Представим данное выражение, используя функцию $y = \sqrt[3]{1+x} = \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{25}}$.

Запишем разложение указанной функции в ряд Маклорена, то есть

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3\cdot 1!}x + \frac{-1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3 + \ldots\ .$$

Подставим в данный ряд значение $x = \dfrac{1}{25}$:

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1 + \frac{1}{3\cdot 1}\cdot\frac{1}{25} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{25^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{25^3} = 1 + \frac{1}{375} + 4\cdot 10^{-6}.$$

Значение $\sqrt[3]{130} = 5{,}065794$,

$$\Delta = \left|5{,}065794 - 5{,}066666\right| \approx 8{,}726\cdot 10^{-4}.$$

Нетрудно видеть, что абсолютная погрешность не превышает величины первого отброшенного члена.

6.2. Приближенное вычисление определенных интегралов

В практических задачах встречаются интегралы с переменным верхним пределом, не выражающиеся в конечном виде через элементарные функции. Например:

$\int_0^x \frac{\sin t}{dt} dt = Si(x)$ – интегральный синус x;

$\int_0^x \frac{\cos t}{t} dt = Ci(x)$ – интегральный косинус x;

$\int \frac{dx}{\ln x} = li(x)$ – интегральный логарифм x;

$\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = Ei(x)$ – интегральная показательная функция x, где $t < 0$;

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – интеграл вероятностей x;

интегралы типа $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$ и другие.

В тех случаях, когда требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, в котором первообразную $F(x)$ нельзя выразить в конечном виде через элементарные функции или же найденные соотношения очень громоздкие, прибегают к разложению подынтегральной функции в ряд. Порядок решения такой задачи следующий:

1) подынтегральную функцию $f(x)$ раскладывают в ряд Тейлора или Маклорена в окрестности точки, принадлежащей интервалу интегрирования, в которой построенный ряд сходится к подынтегральной функции;
2) представленный ряд почленно интегрируется по переменной x;
3) находится сумма S ряда, полученного после интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[S(x)\right]_a^b = S(b) - S(a) \approx S_n^*.$$

Здесь разность двух числовых рядов $S(b)$ и $S(a)$ заменяется приближенным значением n-й частичной суммы. Абсолютная погрешность суммы, найденной после интегрирования ряда $S(x)=f(a)(x-a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot\frac{(x-a)^2}{2}+\frac{f''(a)}{2!}\cdot\frac{(x-a)^3}{3}+\ldots$, есть $\Delta=\left|S(b)-S(a)-S_n^*\right|$. Ее величина по теореме Лейбница как для знакопеременного ряда не должна превышать первого отброшенного члена.

Пример. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

1. Представим подынтегральную функцию в виде ряда Маклорена $y=e^{-x^2}$ по формуле $c^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots$. Следовательно, $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}$.

Записанные ряды сходятся всюду, а значит, и на отрезке интегрирования $[0;1]$.

2. $\int_0^1 e^{-x^2}dx=\left[x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ldots\right]_0^1=1-\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\ldots$.

3. $\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=\frac{30-10+3}{30}=\frac{23}{30}\approx 0{,}77$.

4. Абсолютная ошибка $\Delta=\left|-\frac{1}{3!\cdot 7}\right|=238\cdot 10^{-4}\approx 0{,}024$.

В тех задачах, где ставится условие вычисления с заданной степенью точности, находят то количество членов ряда, которое обеспечивает поставленное условие.

Пример. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,01.

В этом случае $\Delta<0{,}01\cdot\frac{1}{2}=0{,}005$, тогда

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!\cdot 5}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\ldots+\int\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!\cdot 5}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}+\ldots,$$

где $\frac{1}{n!(2n+1)}<0{,}005$.

Решить в общем виде данное неравенство трудно, поэтому представим вычисление:

$$n = 3 \qquad \frac{1}{6 \cdot 7} = 0{,}024 > 0{,}005\,;$$

$$n = 4 \qquad \frac{1}{4! \cdot 9} \approx 0{,}005 \approx 0{,}005\,;$$

$$n = 5 \qquad \frac{1}{5! \cdot 1} \approx 0{,}0008 \approx 0{,}001 < 0{,}005\,.$$

Следует взять $n = 5$, так как величина $0{,}001 < 0{,}005$, то есть погрешность из-за отбрасывания не превышает заданного условия, сумма ряда при этом будет взята с избытком.

Окончательно:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} - 0{,}024 + 0{,}005 = 0{,}074766\,.$$

Когда интеграл $\int_0^x f(x)dx$ не выражается в элементарных функциях, то функцию $F(x)$ выражают бесконечным рядом элементарных функций. В некоторых случаях подобный подход позволяет немного упростить получение конечного результата.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$.

Он не берется в элементарных функциях.

Разлагая в подынтегральной функции $\sin x$ в ряд, запишем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\,.$$

Полностью подынтегральная функция принимает вид

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\,.$$

Данный ряд сходится при любых значениях x, интегрируя его почленно, найдем

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots\,.$$

Полученный ряд не сходится ни к какой элементарной функции, а представляет новую функцию, заданную аналитическим выражением.

Если $x = 2$, то

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx = 2 - \frac{8}{3 \cdot 3!} + \frac{32}{5 \cdot 5!} - \frac{128}{7 \cdot 7!} = 2 - \frac{8}{18} + \frac{32}{100 \cdot 6} - 0{,}0086 =$$

$$2 - 0{,}4441 + 0{,}0053 - 0{,}0036 \approx 1{,}61.$$

Формула Эйлера

Если рассматривать показательную функцию e^{iy} с мнимым показателем, то, разлагая ее по аналогии с функцией e^x в ряд Маклорена, будем иметь

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots \; . \qquad (6.1)$$

Учитывая, что $i^2 = -1;\; i^3 = -i;\; i^4 = 1;\; i^5 = i;\; i^6 = -1$, представим ряд (6.1) в виде

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots \; .$$

Сгруппировав действительные и мнимые элементы ряда, найдем

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) \; .$$

В скобках стоят степенные ряды, сумма которых равна соответственно $\cos y$ и $\sin y$, как это было показано ранее.

Следовательно,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \; . \qquad (6.2)$$

Записанное соотношение есть формула Эйлера.

6.3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Предположим, что заданно уравнение второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ требуется решить с начальными условиями $x = x_0$; $y\big|_{x=x_0} = y_0$; $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$.

Представим функцию $y = y(x)$ в окрестности точки $x = x_0$; в виде ряда Тейлора.

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

и будем считать решением исходного дифференциального уравнения.

Так как $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$, то $F(x_0, y_0, y_0', y_0'') \equiv 0$ и отсюда находится $y''(x_0)$.

Продифференцируем по x исходное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial y''} y''' = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y_x' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial y''} y''' = 0.$$

Учитывая, что x_0, y_0, y_0', y_0'' известны, то из последнего равенства находится $y_0'''(x_0)$.

Продолжая процесс подобным образом дальше, устанавливают величины $y^{(n)}(x_0)$, $y_{x_0}^{(n+1)}$, ...

Затем записывают решение дифференциального уравнения в виде ряда.

Пример. Решить уравнение $y'' = 2xy' + 4y$ при условии $y(x = 0) = 0$, $y'(x = 0) = 1$.

1. Запишем решение уравнения в виде ряда в окрестности точки $x = 0$, то есть

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \ldots .$$

2. Учитывая, что $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$, найдем $y''(0)$ из основного уравнения $y''(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0$.

3. Продифференцируем само уравнение по x по правилам дифференцирования не явной функции $y''' = 2y' + 2xy'' + 4y' = 6y' + 2xy'$.

Найдем $y''(0) = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 6 = 3!$.

4. Определим следующую производную и ее значение при $x = 0$:

$$y_0^{IV} = 6y'' + 2y'' + 2xy''' = 8y'' + 2xy''' = 8\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 3! = 0,$$

$$y_0^{V} = 8y''' + 2y''' + 2xy^{IV} = 10y''' + 2xy^{IV} = 60 = \frac{1}{2}5!,$$

$$y_0^{VI} = 10y^{IV} + 2y^{IV} + 2xy^{V} = 12y^{IV} + 2xy^{V} = 0,$$

$$y_0^{VII} = 12y^{V} + 2y^{V} + 2xy^{IV} = 14y^{V} + 2xy^{IV} = 14\cdot 50 = 840 = \frac{7!}{6}.$$

5. Запишем окончательные значения:

$$y'(0) = 1;\ y''(0) = 0;\ y'''(0) = 3!;\ y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^{V}(0) = \frac{1}{2}5!;\ y^{VI}(0) = 0;\ y^{VII}(0) = \frac{7!}{6}.$$

6. Решение уравнения с учетом найденных величин есть

$$y(x) = \frac{x}{1!} + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5!}{5!}x^5 + \frac{1}{6}\cdot\frac{7!}{7!}x^7 + \ldots = x\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) = xe^{x^2}.$$

Таким образом, $y = xe^{x^2}$.

7. Проверка:

$$y' = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = e^{x^2}(1 + 2x^2),$$

$$y'' = 2xe^{x^2}(1 + 2x^2) + 4xe^{x^2} = e^{x^2}(4x^3 + 6x),$$

$$e^{x^2}(4x^3 + 6x) = 2xe^{x^2}(1 + 2x^2) + 4xe^{x^2} = e^{x^2}(4x^3 + 6x).$$

Для решения дифференциальных уравнений с помощью рядов используют и другой метод – метод неопределенных коэффициентов. Его суть в следующем.

1. Искомую функцию записывают в виде ряда

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots\ .$$

2. Используя свойство степенного ряда быть дифференцируемым бесконечное число раз, составляют выражение

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + \ldots$$

$$y''(x) = 2!a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + 6\cdot 5a_6x^4 + 7\cdot 6a_6x^5 + \ldots$$

$$y'''(x) = 3!a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + 5\cdot 4\cdot 3a_5x^2 + 6\cdot 5\cdot 4a_6x^3 + 7\cdot 6\cdot 5a_6x^4 + \ldots$$

…………………

Значения $y(x)$; $y'(x)$; $y''(x)$; $\ldots$ в виде степенных рядов подставляют в исходное уравнение и сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x правой и левой частей тождества. В результате приходят к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...

Решение данной системы дает значение всех коэффициентов степенного ряда.

Пример. Решить уравнение $2xy' + 4y = y''$ при $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$.

1. Запишем решение в виде ряда

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \text{ при } x = 0,\ y(0) = 0;$$

из начального условия получаем $a_0 = 0$.

2. Найдем y' и y''.

$$y'(0) = a_1 = 1.$$

3. По найденным производным искомой функции запишем системы равенств для коэффициентов при $x = 0$:

$$2a_2 = 4a_0 \qquad a_2 = 0$$

$$2\cdot 3a_3 = 2a_1 + 4a_1 \qquad a_3 = 1$$

$$3\cdot 4a_4 = 4a_2 + 4a_2 \qquad a_4 = 0$$

$$5\cdot 4a_5 = 6a_3 + 4a_3 \qquad a_5 = \frac{10}{5\cdot 4} = \frac{1}{2}$$

$$6\cdot 5a_6 = 8a_4 + 4a_4 \qquad a_6 = 0$$

$$7\cdot 6a_7 = 10a_5 + 4a_5 \qquad a_7 = \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{7\cdot 6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}.$$

Очевидно, что $a_{2n+1} = \dfrac{1}{n!}$.

Решение уравнения: $y(x) = x\left(1 + \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \ldots\right) = xe^{x^2}$.

6.4. Вопросы для самоконтроля

1. Как используются ряды для вычисления приближенных значений функций?
2. Алгоритм вычисления значений функций с помощью степенных рядов.
3. В каком случае используются степенные ряды для приближенных вычислений интегралов?
4. Алгоритм приближенного вычисления определенных интегралов с помощью степенных рядов.
5. Формула разложения частного решения дифференциального уравнения в степенной ряд.
6. Алгоритм нахождения решения дифференциального уравнения с помощью степенных рядов.

7. РЯДЫ ФУРЬЕ

Понятие ряда Фурье. Тригонометрический ряд. Ряды по ортогональным функциям. Ряд Фурье для периодических, четных и нечетных функций. Теорема Дирихле. Основы теории рядов Фурье. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на полупериоде. Среднее значение периодической функции. Интегральное свойство коэффициентов Фурье. Характер сходимости ряда Фурье. Интеграл и преобразование Фурье.

7.1. Тригонометрический ряд

В технических задачах часто встречаются периодические явления, которые воспроизводятся через определенный промежуток времени T, называемый периодом. Например, движение маятника в часах, переменный электрический ток в цепи, движение поршня в двигателе внутреннего сгорания и так далее.

Различные величины, связанные с рассматриваемым периодическим явлением, по истечении периода T возвращаются к своим прежним значениям. Они описываются периодическими функциями, характеризующимися равенством

$$\varphi(x+T)=\varphi(x).$$

Простейшей из периодических функций является гармоническое колебание

$$y = A\sin(\omega t+\varphi_0), \tag{7.1}$$

где y – отклонение колеблющейся точки от положения равновесия;

t – время; A – амплитуда; ω – круговая частота; φ_0 – начальная фаза.

Функция указанного вида (7.1) называется простой гармоникой. При наложении нескольких простых гармонических колебаний получают сложное гармоническое колебание типа

$$y = A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)+\ldots+A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n). \tag{7.2}$$

Когда величины A_R, ω_R и φ_R (где $R = 1, 2, 3,\ldots, n$) различны, то записанное соотношение приводит к самым разнообразным периодическим функциям, графики которых не похожи не простое гармоническое колебание. Исходя из прямой задачи решают и обратную – о подборе простых гармонических колебаний, таких, при сложении которых получалось заранее заданное периодическое движение. Последнее оказалось важным для построения тригонометрического ряда, то есть функциональных рядов вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1(0)\cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (7.3)$$

Определение. Тригонометрическим рядом называют функциональный ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, членами которого являются синусы и косинусы от целых кратных значений аргумента x.

Постоянные a_0 , a_1, a_2 , ... , a_n ; b_1, b_2 , ... , b_n называют коэффициентами тригонометрического ряда.

Если записанный тригонометрический ряд (7.3) сходится, то его сумма будет периодической функцией с периодом 2π , так как $\sin nx$ и $\cos nx$ –периодические функции с указанным периодом.

7.2. Ряды по ортогональным функциям

Определение. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называют ортогональными на этом отрезке $[a,b]$, если выполняется условие

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0 . \qquad (7.4)$$

Определение. Систему функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... , $\varphi_n(x)$ называют ортогональной на отрезке $[a, b]$, если каждая из этих функций ортогональна любой другой функции данной системы, то есть имеет место неравенство

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) = \begin{cases} 0, если i \neq j \\ \neq 0, если i = j \end{cases}. \qquad (7.5)$$

Рассмотрим систему тригонометрических функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx \qquad (7.6)$$

и покажем, что они удовлетворяют свойству ортогональности на любом отрезке $[-\pi;\pi]$ длины 2π .

Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin nx dx = -\frac{1}{n}[\cos nx]_{-\pi}^{\pi} = 0, \text{ так как } \cos n\pi = \cos(-n\pi);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cos nxdx = \frac{1}{n}[\sin nx]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$ так как $\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0$;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin pxdx = 0 \text{ для любых } k \text{ и } p. \tag{7.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos pxdx = \begin{cases} 0, при\ k \neq p \\ \pi, при\ k = p \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\ kx \cdot \sin\ pxdx = \begin{cases} 0, при\ \ k \neq\ p \\ \pi, приk\ =\ p \neq 0. \end{cases}$$

Последние соотношения получаются по известным тригонометрическим зависимостям:

$$\cos kx \cdot \sin px = \frac{1}{2}[\sin(k+p)x + \sin(p-k)x],$$

$$\cos kx \cdot \cos px = \frac{1}{2}[\cos(k+p)x + \cos(k-p)x], \tag{7.8}$$

$$\sin kx \cdot \sin px = \frac{1}{2}[\cos(k-p)x - \cos(k+p)x].$$

В случаях, когда $p = k \neq 0$, интегралы примут вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Возьмем систему ограниченных функций на отрезке $[a, b]$

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

и составим функциональный ряд вида

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots\ . \tag{7.9}$$

Его называют рядом по ортогональным функциям. Когда такой ряд на отрезке $[a, b]$ сходится к некоторой функции $y = f(x)$, то есть

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots \,, \qquad (7.10)$$

то говорят, что функция $f(x)$ разложима в ряд по ортогональным функциям.

Если разложить некоторую функцию в ряд по системе ортогональных функций, выясняют:

1) можно ли заданную на отрезке $[a, b]$ любую функцию $f(x)$ разложить в ряд по заданным ортогональным функциям, если это возможно, то заданную систему называют полной;

2) как найти коэффициенты a_n разложения в (7.10);

3) при каких условиях ряд по ортогональным функциям сходится к $f(x)$.

Предположим, что разложение (7.10) имеет место. Умножим обе части этого разложения на любую из функций $\varphi_n(x)$ системы ортогональных функций. Полученное равенство проинтегрируем на отрезке $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = \begin{cases} 0, \textit{ при } n \neq k \\ \int_a^b a_n{\varphi_n}^2(x)dx, \;\; \textit{при } n = k. \end{cases}$$

Отсюда можно найти коэффициенты разложения a_n, то есть

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n(x)dx}. \qquad (7.11)$$

Рассмотрим в качестве примера системы ортогональных функций полиномы Лежандра. Для этого на отрезке [-1, 1] зададим систему степенных функций $1, x, x^2, x^3, \ldots, x_n, \ldots$.

Пусть $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$.

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 выбираются таким образом, чтобы $P_2(x)$ и $P_0(x)$, $P_2(x)$ и $P_1(x)$ были ортогональными, то есть

$$\int_{-1}^{1}(a_0 + a_1x + a_2x^2)dx = 0 \text{ и } \int_{-1}^{1}x(a_0 + a_1x + a_2x^2)dx = 0\,, \;\; P_i(1) = 1\,.$$

Решив систему алгебраических уравнений $2a_0 + \frac{2}{3}a_2 = 0$, $\frac{2}{3}a_2 = 0$, $a_0 + a_2 = 1$, найдем, что $P_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2$.

Многочлен $P_3(x)$ строится аналогично $P_3(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, при этом $P_3(1) = 1$.

$$\int_{-1}^{1}(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)dx = 0 \text{ и } \int_{-1}^{1}x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1}(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)dx = 0.$$

Окончательно $P_3(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}x^3$.

В результате можно построить систему многочленов $P_0(x) = 1$;

$P_1(x) = x$; $P_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2$; $P_3(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}x^3$; $P_4(x) = \ldots$; $P_n(x) = \ldots$, которые называют многочленами Лежандра. Они ортогональны на отрезке [-1, 1].

7.3. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье

Рассмотрим некоторую периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, которую можно представить тригонометрическим рядом, сходящимся к ней в интервале $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (7.12)$$

Так как по предположению ряд сходится, то его можно почленно интегрировать в указанном промежутке $(-\pi, \pi)$.

Взяв интеграл от обеих частей равенства (7.6) и учитывая (7.4), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx = \pi a_0, \text{ так как } \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx\right] = 0.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-o}^{\pi} f(x)dx \text{, что соответствует } n = 0 . \qquad (7.13)$$

Для нахождения коэффициентов a_n и b_n, где n – любое целое положительное число, обе части равенства (7.12) умножают на $\cos kx$ и интегрируют в пределах от $-\pi$ до π, то есть

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos kxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos kxdx\right].$$

Нетрудно видеть, что все интегралы в данном соотношении обращаются в нуль за исключением случая, когда $k = n$, отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \pi a_n .$$

Решив относительно a_n, найдем

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx . \qquad (7.14)$$

Умножив обе части (7.12) на $\sin kx$ и проинтегрировав в пределах от $-\pi$ до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin kxdx\right].$$

Как и в предыдущем случае, все интегралы справа обращаются в нуль за исключением одного, при $k = n$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx = \pi b_n ,$$

откуда

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx . \qquad (7.15)$$

Определение. Коэффициентами Фурье функции $f(x)$ называются числа a_n и b_n, определяемые как

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx ;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx .$$

Тригонометрический ряд с указанными коэффициентами $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ называется рядом Фурье функций $f(x)$.

7.4. Теорема Дирихле

Установим, при каких условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, построенный заранее ряд Фурье сходится и его сумма принимает значение заданной функции в выбранных точках. На этот вопрос отвечает **теорема Дирихле**.

Пусть на отрезке $[-\pi,\pi]$ задана ограниченная функция $f(x)$, удовлетворяющая на этом отрезке следующим двум условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывна, то есть имеет на этом отрезке лишь конечное число точек разрыва первого рода (в частности, функция $f(x)$ может быть непрерывна на всем отрезке $[-\pi,\pi]$);

2) $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть этот отрезок можно разбить на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ монотонно возрастает или убывает, либо остается постоянной (в частности, функция $f(x)$ может быть монотонной на всем отрезке $[-\pi,\pi]$).

Тогда функция $f(x)$ разлагается в соответствующий ей тригонометрический ряд (7.12), который сходится на этом отрезке.

При этом

1) в каждой точке $x=x_0$ непрерывности $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в этой точке

$$S(x_0)=f(x_0);$$

2) в каждой точке $x=x_1$ разрыва $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому левого и правого пределов $f(x)$ в этой точке

$$S(x_1)=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2};$$

3) в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ (на границах отрезка) сумма ряда равна среднему арифметическому правого предела $f(x)$ в точке $x=-\pi$ и левого предела $f(x)$ в точке $x=\pi$

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2};$$

4) на всем конечном отрезке, свободном от точек разрыва $f(\pi)$, ряд равномерно сходится к $f(x)$.

Теорема Дирихле дает достаточное условие разложимости функции в тригонометрический ряд. Условие 1 и 2 называют условием Дирихле. Из изложенного следует, что условия, накладываемые на функцию при ее разложении в ряд Фурье, не столь строгие, чем при разложении функций в степенной ряд. Это в основном и обусловливает широкое применение рядов Фурье в прикладных задачах.

7.5. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

По определению функция $\psi(x)$ считается четной, если

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)dx \,. \tag{7.16}$$

Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(x)dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx = \int_{0}^{\pi} \psi(-x)dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx = \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)dx,$$

так как $\psi(x) = \psi(-x)$.

Аналогично для нечетных функций

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(-x)dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx = -\int_{0}^{\pi} \psi(x)dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx = 0 \,.$$

Следовательно, когда в ряд Фурье разлагается нечетная функция $f(x)$, то произведение $f(x)\cos nx$ – также нечетная, а $f(x)\sin nx$ – четная функции, тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \text{ при } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \,. \tag{7.17}$$

То есть ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы. Если в ряд разлагается четная функция, то произведение $f(x)\sin nx$

будет нечетной функцией, а $f(x)\cos nx$ – четной, поэтому $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$; при n = a, 1, 2, 3, ... ;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0. \qquad (7.18)$$

Ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы. Найденные зависимости (7.16) и (7.17) позволяют упростить и сократить количество вычислений при нахождении коэффициентов разложения периодических функций, которые могут быть либо четными, либо нечетными.

Пример. Разложить в ряд Фурье четную функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ равенством $y = |x|$.

Так как функция четная, то $b_n = 0$ при любом *n*,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & при\, n\, четном \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & при\, n\, нечетном. \end{cases}$$

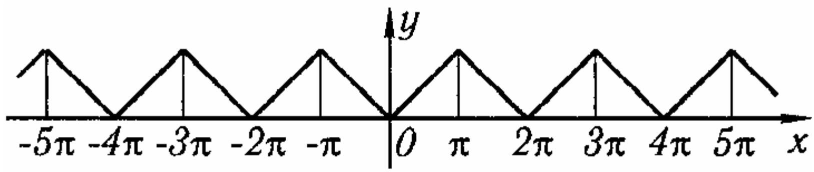


Рис. 2. График функции $y = |x|$

7.6. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом $2l$

Предположим, что на отрезке от $-l$ до $+l$ задана функция $f(x)$, обладающая свойством $f(x+2l)=f(x)$, тогда для нее имеет место разложение вида:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right], \tag{7.19}$$

если эта функция удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-l,l]$. Здесь коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n получаются из соотношений (7.11), в которых поочередно полагают: $\varphi_k(x)=1$, $\varphi_k(x)=\cos\frac{k\pi x}{l}$ и $\varphi_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}$, и интегрирование осуществляется в пределах от $-l$ до $+l$, то есть

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\\ a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Когда функция $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$ четная, то разложение (7.19) принимает вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot \tag{7.21}$$

При этом коэффициенты ряда записывают как

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\\ a_n&=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то ее разложение будет

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{7.23}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{7.24}$$

Пример. Разложить в ряд функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ } если -l < x < 0 \\ x, \text{ } если \text{ } 0 \le x \le l \end{cases} \text{ и } f(x+2l) = f(x).$$

Ее график в системе декартовых координат можно изобразить следующим образом:

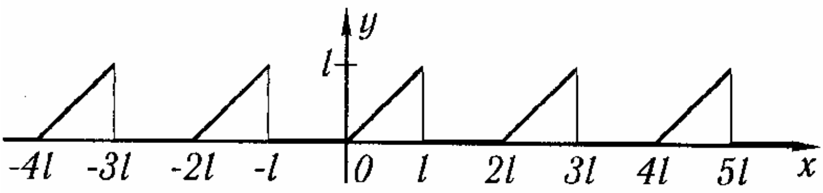


Рис. 3. График функции $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ } если -l < x < 0 \\ x, \text{ } если \text{ } 0 \le x \le l \end{cases}$

Данная функция не обладает свойствами четности и нечетности и отвечает условиям теоремы Дирихле. Следовательно, ее разложение записывается по (7.19).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right],$$

при этом $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0} 0dx + \int_0^l xdx\right] = \frac{1}{l}\cdot\frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}.$

Соответственно,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{0}^{l} x\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right]=\frac{1}{l}\left[0+\int_{0}^{l} x\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right]=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{l}dx & v=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{l}\left[\frac{xl}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l-\frac{l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]=$$

$$=+\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=+\frac{l}{n^2\pi^2}[\cos n\pi-1]=-\frac{l}{(n\pi)^2}[1-(-1)^n]=$$

$$=\begin{cases} 0, \quad \textit{если} \quad n=2k \\ -\frac{2l}{(n\pi)^2}, \quad \textit{если} \quad n=2k-1. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты b_n , то есть

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{l}dx & v=-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{l}\left[-x\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l+\frac{l}{n\pi}\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right]=\frac{1}{l}\left[-\frac{l^2}{n\pi}(-1)^n+\frac{l^2}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l\right]=$$

$$=-\frac{l}{n\pi}(-1)^n=(-1)^{n+1}\frac{l}{n\pi}.$$

Таким образом,

$$a_0=\frac{l}{2}; \quad a_n=\begin{cases} 0, & \textit{если} \quad n=2k \\ -\frac{2l}{(n\pi)^2}, & n=2k-1; \end{cases} \quad b_n=(-1)^{n+1}\frac{l}{n\pi}.$$

Запишем окончательный вид разложения функции:

$$f(x)=\frac{l}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{-2l}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}+\frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]=$$

$$=\frac{l}{4}+\left(-\frac{2l}{\pi^2}\right)\left[\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l}+\ldots\right]+$$

$$+\frac{l}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{l}+\ldots\right].$$

7.7. Ряды Фурье для функций, заданных на полупериоде

Рассмотрим функцию, определенную в интервале $(0,\pi)$, которую требуется разложить в тригонометрический ряд. Для этого нужно продолжить эту функцию на интервал $(-\pi,0)$ так, чтобы образовавшаяся в этом интервале функция $F(x)$ совпадала с $f(x)$ в интервале $(0,\pi)$ и удовлетворяла условиям основной теоремы. Продолжить функцию $f(x)$ на интервал $(-\pi,0)$ можно бесчисленным множеством способов, наиболее простые продолжения – четные и нечетные. То есть, доопределив функцию как $f(x)=f(-x)$ на интервале $(-\pi,0)$, получим четную функцию $F(x)$, которая разлагается в ряд Фурье по косинусам.

Здесь $F(x)=f(x)$ при $0<x<\pi$; $F(-x)=f(-x)=f(x)$ при $-\pi<x<0$; $F(x+2\pi)=F(x)$.

Тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx. \end{aligned} \tag{7.25}$$

В силу того что на интервале $(0,\pi)$ $F(x)=f(x)$, разложение (7.25) имеет место и для функции $f(x)$, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx . \tag{7.26}$$

Аналогично функцию $f(x)$ можно продолжить на весь промежуток нечетным образом, то есть построить функцию $F(x)$, удовлетворяющую условиям:

$F(x)=f(x)$ при $0<x<\pi$;

$F(-x)=f(-x)=-f(x)$ при $-\pi<x<0$;

$F(x+2\pi)=F(x)$.

Ряд Фурье для нечетной функции представляется по синусу, то есть

$$\begin{aligned} &F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ при } -\pi<x<\pi, \\ &\text{и } f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} bn \sin nx \end{aligned} \tag{7.27}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx .$$

Отметим, что записанные ряды (7.25) и (7.27) в интервале $(-\pi,0)$ представляют функцию, не связанную с данной функцией $f(x)$.

Следовательно, заданную на полупериоде $(0,\pi)$ функцию можно разложить в ряд Фурье как по синусам, так и по косинусам, а также в производный ряд Фурье, если указанная функция продолжается на весь период произвольным образом.

Для функции, заданной на полупериоде, существенно при разложении в ряд Фурье исследовать поведение ряда на концах интервала. Например, для функции $f(x)$, разложенной в ряд только по косинусам (7.26), сумма ряда при $x=0$ должна равняться $f(0)$, т. е. $S(0)=f(0)$ и $S(\pi)=f(\pi)$ в силу четности продолжения функции.

Если указанная функция разложена в ряд по синусам, то $S(0)=S(\pi)=0$, хотя $f(0)$ и $f(\pi)$ не обязательно обращаются в данных точках в ноль. Тогда при требовании сходимости ряда на концах интервала $(0,\pi)$ выдвигается условие $f(0)=f(\pi)=0$.

Нетрудно видеть, что все изложенное имеет место для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $f(x+2l)=f(x)$, заданной на интервале $(0,l)$. Она также разлагается в ряд Фурье либо по косинусам, либо по синусам, то есть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \text{ где } a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \text{ при } 0<x<l$$

или $$f(x) = \sum_{n=1}^{n} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \text{ где } b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \text{ при } 0<x<l.$$

Из изложенного следует, что функцию $f(x)$, разлагающуюся в тригонометрический ряд в любом интервале $(0,l)$, можно представить бесчисленным множеством разложений. То есть сколько угодно тригонометрических рядов в интервале $(0,l)$ сходятся к одной функции, а в интервале $(-l,0)$ – к самым разнообразным функциям.

Пример. Разложить в ряд функцию $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{l}, 0<x\le\frac{l}{2} \\ 0, \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2}\left[\cos(n+1)\frac{\pi}{l}x + \cos(n-1)\frac{\pi}{l}x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{l}\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(n+1)}\sin(n+1)\frac{\pi}{l}x + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{l}x\right]_0^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad n - \textit{нечетная}, \quad n \neq 1 \\ \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n-1}\right] & n - \textit{четная}; \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \cos\frac{\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\cdot\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi};$$

$$a_1 = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \cos^2\frac{\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, искомый ряд имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{l\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{4n^2-1}\cos^2\frac{n\pi x}{l}.$$

7.8. Комплексная форма ряда Фурье

Используя формулы Эйлера для функций $\cos nx$ и $\sin nx$ в виде

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \text{ и } \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \tag{7.28}$$

запишем ряд Фурье функции $f(x)$ с периодом 2π и в интервале $(-\pi, \pi)$ в комплексной форме. Подставив (7.28) в ряд $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right] =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{inx}\frac{(a_n - ib_n)}{2} + e^{-inx}\frac{(a_n + ib_n)}{2}\right]. \qquad (7.29)$$

Для комплексных чисел введем обозначения

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = c_{+n}; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}; \quad \frac{a_0}{2} = c_0. \qquad (7.30)$$

Тогда ряд (7.29) записывается как

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \qquad (7.31)$$

Соотношение (7.31) представляет комплексную форму ряда Фурье. Выразим соответствующим образом коэффициенты c_n и c_{-n} из (7.30) и (7.31)

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Окончательно

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \qquad (7.32)$$

Аналогично

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\,. \qquad (7.33)$$

Объединив (7.32) и (7.33) и c_0 в одну формулу, получают комплексные коэффициенты формы для функции $f(x)$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)c^{-inx}dx\,,\ \text{где}\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\,.$$

Для периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ ряд Фурье в комплексной форме будет иметь вид:

$$f(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}\,. \qquad (7.34)$$

А коэффициенты c_n ряда выражаются соответственно

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}dx\,. \qquad (7.35)$$

Выражение $e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ в разложениях называют гармониками, а числа $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, где $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, называют волновыми числами функции (7.35), совокупность волновых чисел называют спектром, а коэффициенты c_n – комплексной амплитудой.

7.9. Среднее значение квадрата периодической функции

Средним значением функции на отрезке $[a,b]$ является величина

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

Установим, чему равно среднее значение квадрата $f^2(x)$ периодической функции, представленной на отрезке $[-\pi,\pi]$ рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,.$$

Возведем в квадрат обе части равенства и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π, то есть

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]^2 dx .$$

При возведении в квадрат выражения в скобках будут получаться квадраты слагаемых и соответствующие удвоенные произведения. Их почленное интегрирование приведет к выражению вида:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n^2 \cos^2 nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n^2 \sin^2 nxdx\right].$$

Все члены от произведений обращаются в ноль в силу ортогональности функций синуса и косинуса на отрезке $[-\pi, \pi]$. Нетрудно видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx = \frac{a_0^2}{2}\pi ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} a_n^2 \cos^2 nxdx = \frac{a_n^2}{2} 2\pi = a_n^2 \pi$$

и $\int_{-\pi}^{\pi} b_n^2 \sin^2 nxdx = b_n^2 \pi$.

Тогда $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2}\pi + \pi \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

Поделив данное соотношение на π, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) . \qquad (7.36)$$

Равенство (7.36) называют формулой Парсеваля, оно позволяет найти среднее значение квадрата периодической функции за один период. Покажем, что для кусочно-непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = 0 . \qquad (7.37)$$

Доказательство

Так как функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то и $f^2(x)$ также непрерывна на указанном отрезке. Поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ существует и конечен, тогда из (7.36) следует, что ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ сходится. Из сходимости ряда следует, что его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$.

Из данного соотношения вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=0$, или

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0. \qquad (7.38)$$

В общем случае можно доказать, что соотношение (7.38) имеет место для любой кусочно-непрерывной функции, ограниченной на отрезке $[a,b]$ и представлено в виде

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)\cos nxdx=0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)\sin nxdx=0.$$

7.10. Интегральное свойство коэффициентов Фурье. Приближение в среднем заданной функции с помощью тригонометрического многочлена

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяющую условию $f(x+2\pi)=f(x)$.

Предположим, что эту функцию $f(x)$ можно заменить некоторым конечным многочленом $P_n(x)$, то есть $f(x)\approx P_n(x)$, где

$$P_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}A_k\cos kx+B_k\sin kx,\ k=1,2,\ \ldots\ ,\ n.$$

Установим, при каком наборе коэффициентов A_0, A_1, B_1, ... , A_k, B_k это приближение будет наилучшим, то есть

1) $\Delta=\left|f(x)-P_n(x)\right|=\left|r(x)\right|=\min \quad x\in[-\pi,\pi];$ (7.39)

2) или среднее квадратичное отклонение

$$\delta=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r^2(x)dx}=\min. \qquad (7.40)$$

Данное обстоятельство используют при эмпирическом подборе формул, где по заданным значениям функции находят многочлен, наиболее точно отражающий поведение указанной функции. То есть погрешности при указанной аппроксимации минимальны (рис. 4).

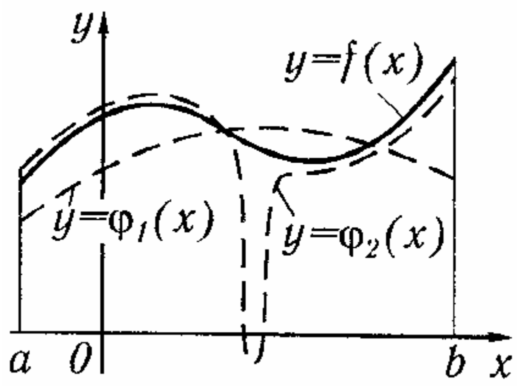


Рис. 4

В практических задачах оценивают величину

$$\delta_1 = \int_{-\pi}^{\pi} r^2(x)dx = \min, \tag{7.41}$$

так как $\delta = \sqrt{\dfrac{\delta_1}{2\pi}}$.

Исследуем зависимость (7.41), записанную в развернутом виде:

$$\delta_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - P_n(x)\right]^2 dx\,. \tag{7.42}$$

На отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$ представим тригонометрическим рядом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]. \tag{7.43}$$

Тогда

$$\delta_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0 - A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k - A_k)\cos kx + (b_k - B_k)\sin kx + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]^2 dx\,.$$

Возведем подынтегральное выражение почленно в квадрат, получим

$$\delta_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\begin{array}{l} \dfrac{(a_0 - A_0)^2}{4} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - A_k)^2 \cos^2 kx + (b_k - B_k)^2 \sin^2 kx + \\ + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k{}^2 \cos^2 kx + b_k{}^2 \sin^2 kx \end{array} \right]^2 dx\ .$$

Почленное интегрирование с учетом ортогональности свойств $\sin kx$ и $\cos kx$ дает

$$\delta_1 = \frac{(a_0 - A_0)^2 \pi}{2} + \pi \left[\sum_{k=1}^{n} \Big((a_k - A_k)^2 + (b_k - B_k)^2 \Big) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Из представленного выражения следует, что $\delta_1 = \min$, если $a_0 = A_0$, $a_k = A_k$ и $b_k = B_k$ для всех $k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$.

Таким образом, наилучшим приближением функции на отрезке $[-\pi, \pi]$ является тригонометрический многочлен $P_n(x)$, когда этот многочлен есть n-я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Минимальное уклонение функции $f(x)$ от многочлена $P_n(x)$ обеспечивается выбором коэффициентов этого многочлена в виде ее коэффициентов Фурье.

Представленные рассуждения являются доказательством теоремы.

Теорема. *Среди всех тригонометрических многочленов порядка n наименьшее среднее квадратичное отклонение от функции $f(x)$ имеет тот, коэффициенты которого представляют коэффициенты Фурье указанной функции.*

7.11. Достаточные признаки сходимости ряда Фурье

В общем случае существуют различные достаточные признаки равномерной сходимости ряда Фурье. Возьмем один из них.

Теорема. ***Характер сходимости ряда Фурье*.**

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет ограниченное изменение, то ее ряд Фурье на этом отрезке сходится равномерно.

Отметим: если функция непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и ее первая производная ограничена, и может быть разрывной на этом интервале (разрыв первого рода), то такую функцию называют функцией с ограниченным изменением. Самым простым случаем таких функций являются ограниченные функции.

Покажем, что для функции, непрерывной на интервале $[-\pi, \pi]$ и имеющей здесь ограниченную неразрывную производную, коэффициенты ряда Фурье убывают со скоростью $\dfrac{1}{n^2}$.

Если же функция $f(x)$ ограничена, но разрывна на $[-\pi, \pi]$, то ее коэффициенты Фурье убывают со скоростью $\dfrac{1}{n}$.

Предположим, что указанные особенности у функции в точках x_1 и x_2, тогда коэффициент a_n равен

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x_1} f(x)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{x_2}^{\pi} f(x)\cos nxdx;$$

интегрирование данного выражения по частям дает

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \left| \begin{matrix} f(x) = u & du = f'(x)dx \\ \cos nxdx = dv & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nxdx .$$

Полученное выражение лишь множителем $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ отличается от коэффициента Фурье b'_n для функции $f'(x)$, и так как $f(x)$ ограничена и разрывна, то ее коэффициенты Фурье a'_n и b'_n убывают со скоростью $\dfrac{1}{n}$. Следовательно, коэффициенты a_n убывают со скоростью $\dfrac{1}{n^2}$. Аналогично можно показать, что b_n убывает также со скоростью $\dfrac{1}{n^2}$. Составим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, который сходится. Абсолютная величина

$$|a_n \cos nx| \le |a_n| < \frac{1}{n^2}.$$

Такое же соотношение верно и для коэффициентов b_n, то есть

$$|b_n \sin nx| \le |b_n| < \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда по признаку Вейерштрасса ряд Фурье сходится равномерно, так как сходится его мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Если сама функция непрерывна, ее производные также непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$ до порядка S включительно и удовлетворяют неравенству $\left|f^{(S)}(x)\right|<M_S$, тогда коэффициенты Фурье функции *f(x)* удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \le \frac{2M_S}{n^S} \text{ и } |b_n| \le \frac{2M_S}{n^S}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots$$

и изложенные выше рассуждения имеют место.

Когда функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеет точку разрыва и ограничена, то ее ряд Фурье сходится на этом интервале, но неравномерно.

7.12. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Предположим, что функция $f(x)$ определена всюду на $(-\infty,\infty)$ и абсолютно интегрируема на нем, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=Q.$$

Она также разлагается в любом интервале $(-l,l)$ в ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{7.44}$$

Подставив выражение коэффициентов Фурье a_n и b_n в (7.44), получим

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt\right]\cos\frac{n\pi}{l}x+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)[\cos\frac{n\pi}{l}t\cos\frac{n\pi}{l}x+\sin\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x]dt.$$

Окончательно

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)dt. \tag{7.45}$$

Найдем предельное выражение (7.45), когда $l \to \infty$, используя выражение $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, равное $\frac{\pi}{l}$, $\frac{2\pi}{l}$, $\frac{3\pi}{l}$, ... – дискретные значения некоторой переменной ω с областью определения от 0 до ∞. Шаг изменения этой величины $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l}$.

Действительно,

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(t-x)dt\right]\Delta\omega_n . \qquad (7.46)$$

При $l \to \infty$ новый член данного выражения стремится к нулю, так как

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\right| \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(x)|dx < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \frac{Q}{2l} \to 0 .$$

Второй член соотношения (7.46) можно рассматривать как интегральную сумму для функции

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt$$

на интервале $(0,+\infty)$, поэтому если $l \to \infty$, то

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt . \qquad (7.47)$$

Правую часть данного выражения называют интегралом Фурье, а все выражение называют формулой Фурье для функции $f(x)$.

Записанное соотношение имеет место для всех точек непрерывности функции $f(x)$, в точках ее разрыва справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x_0)dt\right]d\omega = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} .$$

Используя свойство четности функции косинуса, формулу Фурье записывают в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt .$$

Сформулируем теорему о представлении функции интегралом Фурье.

Теорема. Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на каждом отрезке промежутка $(-\infty,\infty)$ и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty,\infty)$, то интеграл Фурье для этой функции в каждой точке непрерывности *x* сходится к ней самой, то есть $S(x)=f(x)$, и в каждой точке разрыва $x=x_0$

$$S(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

7.13. Различные формы интеграла Фурье

1. Разложим $\cos\omega(t-x)=\cos\omega t\cdot\cos\omega x+\sin\omega t\cdot\sin\omega x$ и перепишем (7.47) как

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega t dt+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\sin\omega x dx\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\omega t dt\,.$$

Обозначим здесь

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega t dt;$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\omega t dt.$$

Тогда последнее выражение переписывается

$$f(x)=\int_0^\infty\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega\,. \qquad (7.48)$$

Записанный интеграл Фурье внешне напоминает ряд Фурье для этой же функции, а выражения $A(\omega)$ и $B(\omega)$ также называют коэффициентами интеграла Фурье.

В формуле (7.48) представлено разложение функции $f(x)$ в бесконечном интервале $(-\infty,\infty)$ на гармонические колебания, частоты которых изменяются непрерывно от 0 до ∞.

Как было показано ранее для периодической функции, разложенной в ряд Фурье, ее амплитудный спектр состоял из отдельных гармоник $\frac{n\pi}{l}$, то есть был дискретным. Нетрудно видеть из результатов данного параграфа, что периодическая функция имеет непрерывный спектр, а частота образующих ее гармоник изменяется непрерывно. При этом функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ дают закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты ω.

2. Пусть $f(x)$ четная функция, тогда $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$ и $B(\omega)=0$.

Поэтому для четных функций

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\cos\omega x d\omega\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt. \qquad (7.49)$$

3. Если $f(x)$ нечетная, то $A(\omega)=0$ и $B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$ и

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\sin\omega x d\omega\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt. \qquad (7.50)$$

4. Комплексная форма интеграла Фурье.

Заменим в интеграле Фурье (7.48) $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$ по формулам Эйлера и получим

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}\left[A(\omega)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+B(\omega)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2}\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\left\{[A(\omega)-iB(\omega)]e^{i\omega x}+[A(\omega)+iB(\omega)]e^{-i\omega x}\right\}d\omega.$$

Нетрудно видеть, что

$$A(\omega)-iB(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

$$A(\omega)+iB(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[e^{i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt+e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt\right]d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega(t-x)}dt\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt\right]d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt\right]d\omega\ .$$

Отсюда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt\right]d\omega\ . \qquad (7.51)$$

Первую часть выражения (7.51) называют интегралом Фурье в комплексной форме для функции $f(x)$.

Переписав заданную формулу как

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right]e^{i\omega x}d\omega \qquad (7.52)$$

и, обозначив

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=C(\omega)\,, \qquad (7.53)$$

приходят к зависимости

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega\,. \qquad (7.54)$$

Соотношение (7.54) аналогично выражению (7.34), причем $\omega=\dfrac{\pi}{l}$ также называют волновым числом, а функцию $C(\omega)$ называют спектральной плотностью или спектральной функцией.

7.14. Преобразование Фурье

Выражение (7.52) можно рассмотреть как результат наложения (или суперпозицию) двух функций

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{+i\omega x} d\omega \tag{7.55}$$

и

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \, . \tag{7.56}$$

Здесь функцию $F(\omega)$, сопоставляемую с $f(x)$ по (7.56), называют преобразованием Фурье функции $f(x)$. А саму функцию $f(x)$, задаваемую равенством (7.55), – обратным преобразованием Фурье для функции $F(\omega) = \tilde{f}(\omega)$, где $\tilde{f}(\omega)$ – оператор Фурье и f – обратный оператор.

Нетрудно видеть, что формулы (7.49) и (7.50) можно представить как суперпозицию типа

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega \ , \tag{7.57}$$

где

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \, , \tag{7.58}$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega \ , \tag{7.59}$$

где

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \, . \tag{7.60}$$

При этом функция $F_c(\omega)$ называется косинус-преобразованием Фурье, а $F_s(\omega)$ соответственно синус-преобразованием Фурье. При известной четной функции $f(x)$ (то есть при известном оригинале) косинус-преобразование $F_c(\omega)$ (изображение оригинала) получают по формуле (7.59), аналогичное справедливо и для синус-преобразования, получаемого по (7.60).

Восстановление самой функции $f(x)$ -оригинала по ее известному косинус-преобразованию осуществляют по (7.57). Таким образом, по зависимостям (7.57)–(7.60) возможно как прямое, так и обратное косинус- и синус-преобразование Фурье.

В общем случае можно показать, что если $f(x)$ – четная функция, то $F(\omega)=iF_c(\omega)$, когда $f(x)$ – нечетная, то ее преобразование $F(\omega)=iF_s(\omega)$.

А так как любую функцию нетрудно представить в виде суммы четных и нечетных функций $f(x)=g(x)+h(x)$,

где четная функция $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ и нечетная функция $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, то в преобразовании Фурье $F(\omega)$ для любой функции

$$F(\omega)=G_c(\omega)+iH_s(\omega). \tag{7.61}$$

7.15. Свойства преобразования Фурье

1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty,\infty)$, то преобразование Фурье $F(\omega)$ есть тоже непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $\omega\to\pm\infty$.

2. Оператор Фурье $\tilde{f}$ есть линейный оператор, то есть для заданных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и их образов $\tilde{f}_1(\omega)$ и $\tilde{f}_2(\omega)$ справедливы равенства $f_1+f_2=\tilde{f}_1+\tilde{f}_2$ и $af_1=a\cdot\tilde{f}_1$, когда $a=const$.

3. Если $f(x)$ имеет своим образом $\tilde{f}(\omega)$, то $f'(x)$ имеет своим образом $(+i\omega)\tilde{f}(\omega)$.

Доказательство

Запишем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-i\omega t}f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt\right]=$$

$$=\frac{+i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=+i\omega\tilde{f}(\omega).$$

Здесь интегрирование осуществимо по частям, а первый член обращается в ноль в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ в интервале $(-\infty, \infty)$.

4. Если функция $f(x)$ имеет своим образом $\widetilde{f}(\omega)$, то функция $f(ax)$ имеет своим образом $\frac{1}{|a|}\widetilde{f}(\frac{\omega}{a})$.

5. Если $f(x)$ имеет своим образом $\widetilde{f}(\omega)$, то $f(x-b)$ имеет образ $e^{-ib\omega}\widetilde{f}(\omega)$.

7.16. Вопросы для самоконтроля

1. Определение гармонического колебания, сложного гармонического колебания.
2. Определение тригонометрического ряда.
3. Определение ортогональных функций.
4. Определение тригонометрического ряда по ортогональным функциям.
5. Условие разложения функции в ряд по ортогональным функциям.
6. Определение ряда Фурье.
7. Вычисление коэффициентов ряда Фурье.
8. Теорема Дирихле.
9. Свойства функции суммы тригонометрического ряда в области сходимости.
10. Свойства интегралов для четных и нечетных функций.
11. Определение ряда Фурье для четной функции.
12. Определение ряда Фурье для нечетной функции.
13. Определение ряда Фурье для функции с произвольным периодом.
14. Коэффициенты ряда Фурье для функции с произвольным периодом.
15. Нахождение ряда Фурье для функций, заданных на полупериоде.
16. Формулы Эйлера.
17. Формула ряда Фурье в комплексной форме.
18. Коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме.
19. Формула Парсеваля.
20. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье.
21. Определение интеграла Фурье.
22. Определение интеграла Фурье для четной функции.
23. Определение интеграла Фурье для нечетной функции.
24. Комплексная форма интеграла Фурье.

8. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Функции комплексной переменной. Определение, предел и непрерывность функции комплексной переменной, ее производная и дифференциал. Условие Коши–Римана. Ряды с комплексными членами.

8.1. Определение, предел и непрерывность функции комплексного переменного

Рассмотрим плоскость комплексного переменного z. Она представляет множество C комплексных чисел вида $z = a + ib$ (рис. 5). Сформулируем определение.

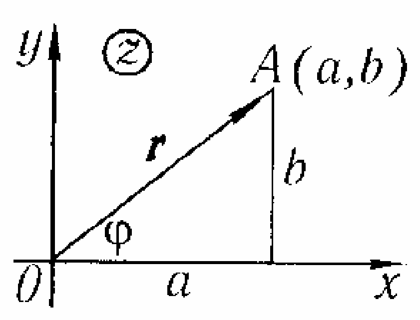


Рис. 5

Определение. Если каждому значению переменного z из множества E соответствует определенное значение комплексной переменной $W = u + iv$, то W называют функцией независимой комплексной переменной z и обозначают

$$W = f(z). \tag{8.1}$$

Здесь u и v действительные функции двух действительных переменных x и y, то есть $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Таким образом, задание функции ϖ как функции комплексного переменного z сводится к заданию функций u и v переменных x и y.

Изображая каждое значение функции ϖ точкой плоскости ω, получим множество точек $E' \subset \varpi$. Тогда задание функции $\varpi(z)$ геометрически сводится к установлению соответствия между точками множеств E и E^1, по которому каждой точке из множества E^1 соответствует единственная определенная точка из E^1 (рис. 6).

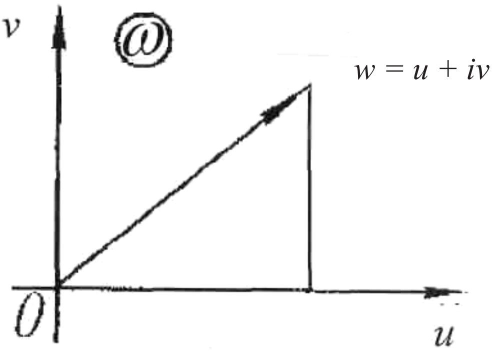


Рис. 6

Любой круг с центром в точке z_0 называется окрестностью этой точки. (рис. 7).

Пусть функция $\varpi = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0.

Определение. Постоянное число $A = a + ib$ называют пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для всякого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что имеет место неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$, для всех $z(z \neq z_0)$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, и обозначают

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \qquad (8.2)$$

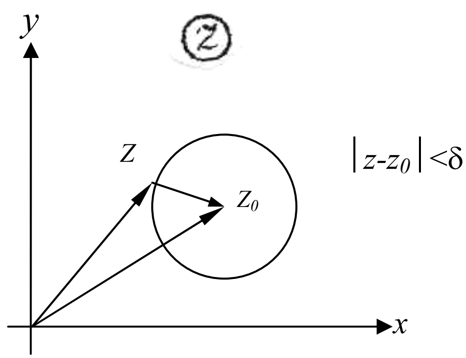


Рис. 7

В частности, если $A = f(z_0)$, то $f(z)$ называют непрерывной в точке z_0.

Геометрически из определения следует, что для всех внутренних точек круга $|z - z_0| < \delta$ с центром в точке z_0 и радиуса δ соответствующие значения – точки функции $\varpi = f(z)$ будут лежать внутри круга $|\varpi - \varpi_0| < \varepsilon$ с центром в точке $\varpi_0 = f(z_0)$ радиуса ε.

8.2. Производная и дифференциал функции комплексного переменного

Определение. Предел отношения приращения функции $\Delta\varpi$ к приращению аргумента Δz, когда Δz любым образом стремится к нулю, называют производной функции $\varpi = f(z)$ в точке z и записывают

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\varpi}{\Delta z} = \lim \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z). \qquad (8.3)$$

Саму функцию называют дифференцируемой или моногенной в точке z.

Определение. Функцию $\varpi = f(z)$, моногенную в каждой точке области G, называют аналитической в области G.

Например, целая рациональная функция аналитическая во всех точках плоскости.

Из определения следует $\frac{\Delta\varpi}{\Delta z} = f'(z) + \eta$, где $\eta \to 0$, когда $\Delta z \to 0$. Тогда последнее равенство можно записать

$$\Delta\varpi = f'(z)\Delta z + \eta\Delta z. \qquad (8.4)$$

Здесь первый член $f'(z)\Delta z$ приращения $\Delta\varpi$ обозначается $d\varpi = f'(z)\Delta z$ и называется дифференциалом функции ϖ. Второй член $\eta\Delta z$ – величина бесконечно малая, более высокого порядка малости, чем Δz. Нетрудно видеть, что при $\varpi = z$ $dz = 1 \cdot \Delta z$. В общем случае дифференциал функции комплексного переменного записывают

$$d\varpi = f'(z)dz. \qquad (8.5)$$

Таким образом, дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной. Из определения производной и свойств предела функции комплексного переменного вытекает, что правила дифференцирования функций комплексного переменного такие же, как для функции действительного переменного.

8.3. Условие Коши–Римана

Пусть задана функция комплексного переменного $\varpi = f(z) = u + iv$, где $z = x + iy$ и u, и v известные функции переменных x и y. Если функции u и v взять независимыми друг от друга, то функция $f(z)$, вообще говоря, не будет дифференцируемой, хотя функции u и v имеют производные по x и по y. Отсюда следует, что у дифференцируемой функции $f(z)$ функции u и v должны удовлетворять некоторым условиям.

Пусть существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\varpi}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z). \tag{8.6}$$

Так как $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$ произвольным образом, то, в частности, можно считать, что $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$.

Практически это означает, что от точки $(z + \Delta z)$ к точке z можно двигаться по прямой, параллельной оси Ox. В силу этого можно записать (8.6) в виде:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z). \tag{8.7}$$

Принимая также $\Delta x = 0$ и $\Delta y \to 0$, из (8.6) получим

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(-i\Delta u)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = f'(z). \tag{8.8}$$

Нетрудно видеть, что в соотношениях (8.7) и (8.8) правые части одинаковые, тогда равны и левые части, то есть имеет место равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8.9}$$

Из (8.9) следует, что два комплексных числа равны, когда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{ – условия Коши–Римана.} \tag{8.10}$$

Условия (8.10) являются необходимыми для моногенности функции $\varpi = f(z)$ в точке z.

Можно доказать и достаточность условий (8.10), если функции u и v дифференцируемы в точке z.

Дифференцируя первое соотношение Коши – Римана по x, а второе по y и складывая, получают

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ – уравнение Лапласа.} \tag{8.11}$$

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической. Аналогично и функция v гармоническая, так как тоже удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

При этом выражение $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$ – оператор Лапласа.

Чтобы функция $f(z) = u + iv$ была аналитической в области G, поступают так: в качестве функции $v(u)$ выбирают произвольную гармоническую функцию, а $u(v)$ определяют из уравнений (8.10). Умножив первое из них на dx, а второе на dy и, сложив, получают

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dx - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dy$$

полный дифференциал, то есть

$$du = \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy .$$

Интегрируя записанное уравнение, получают

$$u = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy . \tag{8.12}$$

Таким образом, функция, определяемая уравнением (8.12), называется сопряженной с гармонической функцией v.

8.4. Ряды с комплексными членами

1. Числовые ряды.

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots \ , \tag{8.13}$$

в котором $z_n = x_n + iy_n$ и x_n и y_n – фиксированные значения.

Определение. Ряд $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$ называют сходящимся, если его частичная сумма $S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$ имеет конечный предел при $n \to \infty$, и расходящимся в противном случае.

Пусть $S_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ имеет конечный предел $S = a + ib$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim\left[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\right] = a + ib.$$

Сравнивая здесь действительные и мнимые части, получают, что при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = a \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k = b.$$

Отсюда следует, что ряд (8.13) сходится, если сходятся оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, и расходится, если расходится хотя бы один из рассматриваемых рядов.

2. Необходимый признак сходимости.

Если ряд (8.13) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(2+i)^n}{2^n}$ – расходится, так как его общий член $z_n = \dfrac{n(2+i)^n}{2^n}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Действительно, его модуль

$$|z_n| = \left| n(1 + \frac{1}{2}i)^n \right| = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}}\right)^n = n\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \to \infty \ \text{при} \ n \to \infty.$$

3. Абсолютная сходимость.

Определение. Ряд $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его членов, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ с действительными членами, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ с комплексными членами.

В самом деле, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ и того, что $|x_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ и $|y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, следует абсолютная сходимость рядов, а значит, и сходимость ряда (8.13) по определению сходимости. Полученный результат дает удобный метод исследования рядов с комплексными членами.

8.5. Степенные ряды в комплексной области

Рассмотрим степенной ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n , \qquad (8.14)$$

где $z = x + iy$ и коэффициенты c_0, c_1, ..., c_n – комплексные числа.

Сформулируем для рядов (8.14) теорему Абеля.

Теорема. *Если ряд* $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ *сходится при некоторых значениях* $z = z_0 \ne 0$, *то он сходится абсолютно при всех значениях* z, *для которых* $|z| < |z_0|$, *то есть сходится внутри круга с центром в начале координат в точке* $z = 0$ *и радиуса* $|z_0|$.

Данный круг называют кругом сходимости.

Доказательство данной теоремы аналогично, как и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

На границе круга сходимости, то есть на окружности $z = |z_0|$, сходимость ряда исследуется дополнительно.

Следствия

1. Если ряд (8.14) расходится при $z = z_0 \ne 0$, то он расходится при всех z, у которых $|z| > |z_0|$.
2. Если радиус сходимости $R = \infty$, то ряд (8.14) сходится во всей плоскости.

8.6. Вопросы для самоконтроля

1. Определение функции независимой комплексной переменной.
2. Определение предела функции комплексной переменной.
3. Определение производной и дифференциала функции комплексной переменной. Определение моногенной функции.
4. Необходимое условие моногенности функции.
5. Уравнение Лапласа.
6. Определение гармонической функции.
7. Оператор Лапласа.
8. Определение ряда с комплексными числами.
9. Определение сходящегося ряда с комплексными числами.
10. Необходимый признак сходимости ряда с комплексными числами.
11. Определение абсолютно сходящегося ряда в комплексной области.
12. Определение степенного ряда в комплексной плоскости.
13. Теорема Абеля об абсолютной сходимости степенного ряда в комплексной плоскости.

9. ПРАКТИКУМ

Необходимые сведения

9.1. Числовые ряды

Глоссарий основных понятий

№ п/п	Понятия	Содержание
1	Числовой ряд	$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots ,$$ где a_n ($n = 1, 2, \ldots$) – действительные числа
2	Частичная сумма ряда	$Sn = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) – сумма первых n членов ряда
3	Сходящийся ряд	Числовой ряд, для которого существует конечный предел S последовательности его частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$
4	Расходящийся ряд	Числовой ряд, для которого последовательность частичных сумм не имеет предела
5	Сумма числового ряда	Предел S последовательности частичных сумм сходящегося ряда
6	n-й остаток числового ряда	Выражение $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$, которое получается из ряда, если в нем отбросить первые n членов

9.2. Исследование числовых рядов на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, a_n \geq 0$$

Необходимый признак сходимости

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Достаточный признак расходимости

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Достаточные признаки сходимости

I. Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

II. Радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d$$

1) при $d < 1$ ряд сходится
2) при $d > 1$ ряд расходится
3) при $d = 1$ вопрос о сходимости не решен

III. Признак сравнения

$\sum a_n$ (1) $\quad \sum b_n$ (2)

$a_n \leq b_n$

а) если (2) сходится, то (1) сходится

б) если (1) расходится, то (2) расходится

IV. Предельный признак сравнения

$\sum a_n$ (1) $\quad \sum b_n$ (2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \ 0 < k < \infty$$

ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно

V. Интегральный признак Коши

если $a_n = f(n)$, то $\int_1^{\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+5)}{\sqrt{5^n}\,n}$.

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Найти предел общего члена ряда. Если предел отличен от нуля, ряд расходится	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+5)}{\sqrt{5^n}\,n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(2+5)}{n}}{\sqrt{5^n}}=0$
2	Выбрать достаточный признак сходимости ряда	По признаку Даламбера исследуем ряд на сходимость: $a_n=\frac{2n+5}{\sqrt{5^n}\,n}$; $a_{n+1}=\frac{2(n+1)+5}{\sqrt{5^{n+1}}\left(n+1\right)}=\frac{2n+7}{\sqrt{5\cdot 5^n}\left(n+1\right)}$; $d=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+7\cdot\sqrt{5n}}{\sqrt{5n}\cdot\left(n+1\right)\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.
3	Сделать вывод о сходимости ряда	Так как $d=\frac{2}{\sqrt{5}}<1$, то ряд сходится

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n$.

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Найти предел общего члена ряда. Если предел отличен от нуля, ряд расходится	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0$

2	Выбрать достаточный признак сходимости ряда	По признаку Коши исследуем ряд на сходимость: $d=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]=\frac{1}{2}$
3	Сделать вывод о сходимости ряда	Так как $d=\frac{1}{2}<1$, то ряд сходится

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Найти предел общего члена ряда. Если предел отличен от нуля, то ряд расходится	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}=0$
2	Выбрать достаточный признак сходимости ряда	Исследовать с помощью интегрального признака Коши. Составить функцию $f(x)$, заменив в формуле общего члена переменную n непрерывной переменной x: $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ монотонно убывает при $1\le x<\infty$
3	Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$	$\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=$ $=-2\lim e^{-\sqrt{x}}\Big\vert_1^A=-2\lim\limits_{A\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{A}}-e^{-1}\right)=\frac{2}{e}$

4	Сделать вывод о сходимости ряда	$\int_1^{\infty} f(x)dx = \frac{2}{e} < \infty$ сходится, значит, ряд также сходится и его сумма не превышает $\frac{2}{e}$

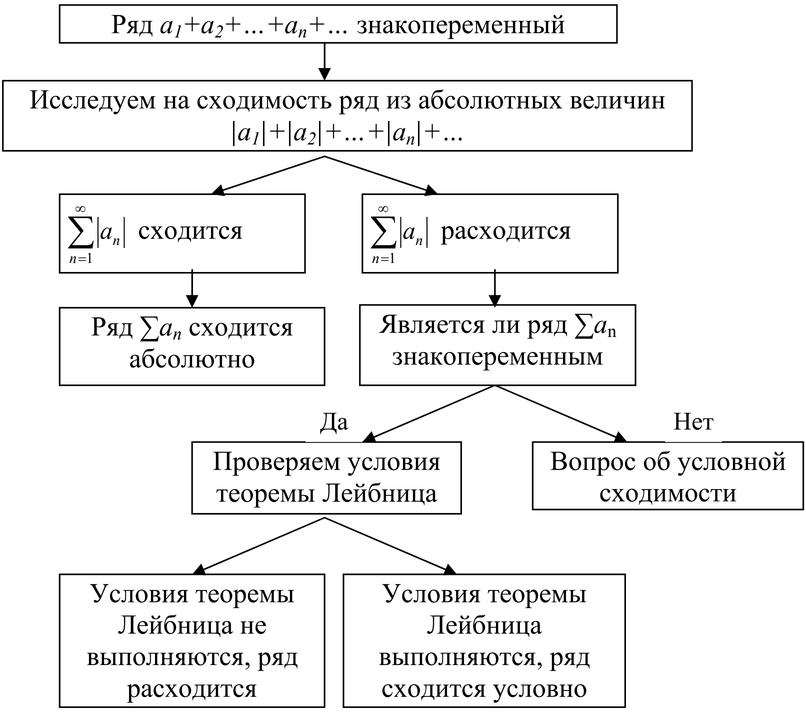
9.3. Знакочередующиеся ряды

Глоссарий основных понятий

№ п/п	Понятие	Содержание
1	Знакопеременный ряд	Числовой ряд, члены которого имеют произвольные знаки
2	Знакочередующийся ряд	Числовой ряд вида: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$
3	Абсолютно сходящийся знакопеременный ряд	Ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ с членами произвольных знаков, который сходится вместе с рядом $\lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert + \ldots + \lvert a_n\rvert + \ldots$, составленным из абсолютных величин его членов
4	Условно (не абсолютно) сходящийся числовой ряд	Сходящийся знакопеременный ряд, для которого ряд из абсолютных величин членов его ряда является расходящимся
5	Признак Лейбница для знакочередующихся рядов	Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ убывают по абсолютной величине: $\lvert a_n\rvert > \lvert a_{n+1}\rvert$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то знакочередующийся ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена
6	Оценка остатка знакочередующегося ряда	Если члены знакочередующегося ряда удовлетворяют теореме Лейбница, то для остатка ряда справедлива оценка: $\lvert r_n\rvert \le a_{n+1}$

7	Признак абсолютной сходимости числового ряда	Если сходится ряд $\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\ldots+\lvert a_n\rvert+\ldots$, то знакопеременный ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ является абсолютно сходящимся
8	Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов	Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму

9.4. Исследование на сходимость знакопеременных рядов



Пример 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n^3-n+3)}.$$

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Составить ряд из абсолютных величин	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{(n^3-n+3)}$
2	Исследовать на сходимость полученный ряд с помощью необходимого и достаточных признаков сходимости знакоположительных рядов	С помощью предельного признака сравнения сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-n+3}$ со сходящимся рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n^3-n+3}:\frac{1}{n^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^2}{n^3-n+3}=1$
3	Сделать вывод об абсолютной сходимости. Если ряд абсолютно сходиться не будет, продолжить исследование на условную сходимость	Ряд из абсолютных величин членов исходного ряда сходится, значит, сам ряд также сходится абсолютно

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+2}\sin\frac{\pi n}{3n+1}.$$

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Составить ряд из абсолютных величин	$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sin\frac{\pi}{3n+1}\right\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$
2	Исследовать на сходимость полученный ряд с помощью необходимого и достаточных признаков сходимости знакоположительных рядов	Используя признак сравнения, сравним данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Так как $a_n=\frac{1}{3n+1}<b_n=\frac{1}{n}$, ряд из абсолютных величин расходится

3	Сделать вывод об абсолютной сходимости. Если ряд абсолютно сходиться не будет, продолжить исследование на условную сходимость	Ряд из абсолютных величин членов исходного ряда расходится, значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся
4	Исследовать на условную сходимость, проверяя выполнимость теоремы Лейбница	Члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине, предел общего члена равен нулю
5	Сделать вывод об условной сходимости, используя правило: если условия теоремы Лейбница выполнимы, то ряд сходится условно, в противном случае ряд расходится	Условия теоремы Лейбница выполняются, значит, ряд сходится условно

9.5. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды

Глоссарий основных понятий

№ п/п	Понятия	Содержание
1	Функциональный ряд	Ряд вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, члены которого являются функциями от переменной x
2	Область сходимости функционального ряда	Совокупность значений переменной x, при которых функциональный ряд сходится
3	Теорема Вейерштрасса	Если члены функционального ряда удовлетворяют в области D неравенствам $\lvert u_n(x)\rvert \le a_n$, ($n = 1, 2, \ldots$), где a_n члены некоторого знакоположительного сходящегося ряда, то функциональный ряд сходится равномерно в области D.

4	Степенной ряд	Функциональный ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$, где a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) – постоянные коэффициенты
5	Радиус сходимости степенного ряда	Если у степенного ряда есть точки сходимости и расходимости, то существует такое число R, что ряд сходится в интервале $(x_0\text{-}R, x_0+R)$; число R называется радиусом сходимости степенного ряда.
6	Интервал сходимости степенного ряда	Если R – радиус сходимости степенного ряда, то интервал $(x_0\text{-}R, x_0+R)$ – интервал сходимости степенного ряда
7	Теорема о непрерывности суммы степенного ряда	Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости
8	Теорема об интегрировании степенного ряда	Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости: $\int\limits_{x_0}^{x}(a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots)dx =$ $= \int\limits_{x_0}^{x} a_0 dx + \int\limits_{x_0}^{x} a_1(x - x_0)dx + \int\limits_{x_0}^{x} a_2(x - x_0)^2 dx + \ldots$ $+ \int\limits_{x_0}^{x} a_n(x - x_0)^n dx + \ldots = a_0(x - x_0) +$ $+ \frac{a_1(x - x_0)^2}{2} + \frac{a_2(x - x_0)^3}{3} + \ldots + \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + \ldots,$ $(x_0 - R < x < x_0 + R)$
9	Теорема о дифференцировании степенного ряда	Степенной ряд можно почленно дифференцировать в области сходимости: $(a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots)' =$ $= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots$ $(x_0 - R < x < x_0 + R)$

9.6. Определение области сходимости степенного ряда

Данный степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Присутствуют все натуральные степени $(x-x_0)$ $n = 1, 2, \ldots$

Определяем радиус сходимости степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

Записываем интервал сходимости (x_0-R, x_0+R)

Присутствуют не все натуральные степени $(x-x_0)$ $n = 1, 2, \ldots$

Определяем выражение

$$p(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|;$$

$$p(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$$

Решаем неравенство $p(x)<1$ и находим интервал сходимости

Исследуем поведение функциональных рядов на концах интервала сходимости как числовые знакоположительные либо как числовые знакопеременные ряды

Записываем область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Пример 5. Найти интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение на границах интервала сходимости $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3n^2+5}$.

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Определяем радиус сходимости степенного ряда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\|$	$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(n+1)^2+5}{3n^2+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+6n+8}{3n^2+5}=1$ $\|x-1\|<1;$ $-1<x-1<1;0<x<2$
2	Записываем интервал сходимости ряда *$(x_0$-$R,x_0+R)$*	$x_0=1$, $R=1$, значит, интервал сходимости $(0,2)$
3	Исследуем поведение степенного ряда на границах интервала сходимости	1.При $x=2$ получаем знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3n^2+5}$. Сравним полученный ряд со сходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ $a_n=\dfrac{1}{3n^2+5}<b_n=\dfrac{1}{n^2}$, значит, ряд сходится. 2. При $x=0$ получаем знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n^2+5}$. Так как ряд из абсолютных величин сходится, то сходится абсолютно и данный знакочередующийся ряд
4	Подведем итог исследования	Данный ряд сходится на отрезке $x\in[0,2]$

9.7. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена

Глоссарий основных понятий

№ п/п	Понятия	Содержание
1	Формула Тейлора	Если функция $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности точки x_0, то $$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)}{2!}+\ldots+$$ $$+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!}+R_n(x),$$ где $R_n(x)$ – дополнительный (остаточный) член; при этом $$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$
2	Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа	Дополнительный член формулы Тейлора в виде $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$ где точка ξ расположена между x и x_0
3	Ряд Тейлора функции $f(x)$	$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+$$ $$+\frac{f''(x_0)(x-x_0)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!}+\ldots$$
4	Ряд Маклорена функции $f(x)$	$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+$$ $$+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\ldots$$
5	Разложение в ряд Маклорена функции $y=ex$	$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots(-\infty<x<+\infty)$$

6	Разложение в ряд Маклорена функции $y = sin\, x$	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$
7	Разложение в ряд Маклорена функции $y = cos\, x$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$
8	Разложение в ряд Маклорена функции $arctg\, x$	$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)} + \ldots$ $(-1 \le x \le 1)$
9	Разложение в ряд Маклорена функции $arcsin\, x$	$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$ $(-1 < x < 1)$
10	Биномиальный ряд	$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \ldots +$ $+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}$, где m – любое число, $(-1 < x < 1)$
11	Логарифмический ряд	$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ldots$ $(-1 < x \le 1)$

9.8. Разложение функции *f(x)* в степенной ряд Тейлора

Убедиться, что *f(x)* бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0

↓

Вычислить коэффициенты ряда

$$a_0 = f(x_0) \ldots a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

↓

Записать ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

↓

Определить область сходимости степенного ряда

↓

Доказать сходимость полученного ряда к $f(x)$ с помощью неравенства $|f^{(n)}(x)| < M$

↓

Записать разложение *f(x)* в ряд Тейлора с указанием области сходимости

Пример 6. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Найти производные функции n-го порядка включительно	$f'(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3};\ f'(0)=2=2!$ $f''(x)=\dfrac{6}{(1-x)^4};\ f''(0)=6=3!$ $f'''(x)=\dfrac{24}{(1-x)^5};\ f'''(0)=24=4!$ $f^{IV}(x)=\dfrac{120}{(1-x)^6};\ f^{IV}(0)=120=5!\ \ldots$ $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^n};\ f^{(n)}(0)=(n+1)!$
2	Найти коэффициенты ряда Тейлора	$a_0=f(0)=1;$ $a_1=\dfrac{f'(0)}{1!}=2;\ a_2=\dfrac{f''(0)}{2!}=3;$ $a_3=\dfrac{f'''(0)}{3!}=4;\ a_4=\dfrac{f^{IV}(0)}{4!}=5;\ \cdots$ $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=(n+1)$
3	Записать ряд Тейлора	$\dfrac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots+(n+1)x^n+\ldots=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

4	Найти область сходимости ряда	По признаку Даламбера $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1.$ Область сходимости ряда: $-1<x<1$. Исследуем сходимость на концах интервала. 1. При $x=1$ получим знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)$, который расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$ 2. При x = –1 получим знакопеременный ряд, который расходится, так как не выполняются условия теоремы Лейбница. Область сходимости степенного ряда: $\|x\|<1$
5	Доказать сходимость полученного ряда к функции *f(x)*	$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ f^{(n+1)}(c)=\frac{(n+2)!}{(1-c)^{n+3}}$ $Rn=\frac{x^{n+1}(n+2)}{(1-c)^{n+3}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}Rn=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}(n+2)}{(1-c)^{n+3}}=0,\|x\|<1$
6	Записать разложение функции в ряд Тейлора	$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots+(n+1)x^n+\ldots=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

9.9. Приложения рядов к приближенным вычислениям

Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов

Пример 7. Вычислить значение $e^{0,2}$ с точностью до $0{,}0001$.

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Разложить функцию в степенной ряд, применяя таблицу простейших разложений	Используем ряд Маклорена для функции e^x $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$.
2	Подставить в ряд вместо x заданное значение, получив числовой ряд	$e^{0,2}=1+0{,}2+\frac{0{,}2^2}{2!}+\frac{0{,}2^3}{3!}+\frac{0{,}2^4}{4!}+\ldots$
3	Найти оценку остаточного члена по правилам: а) если ряд знакочередующийся, то ошибка не превосходит по абсолютной величине модуля первого из отброшенных членов; б) для знакоположительных рядов остаточный член оценивается сравнением его с геометрической прогрессией, сумма которой находится по формуле: $\frac{a}{1-q}$	Принимая за приближенное значение сумму первых четырех слагаемых, мы сделаем ошибку, равную величине отброшенного остаточного члена $R_4=\frac{0{,}2^4}{4!}+\frac{0{,}2^5}{5!}+\frac{0{,}2^6}{6!}+\ldots=$ $=\frac{0{,}2^4}{4!}\left(1+\frac{0{,}2}{5}+\frac{0{,}2^2}{5\cdot 6}+\ldots\right)<$ $<\frac{0{,}2^4}{4!}\left(1+\frac{0{,}2}{5}+\left(\frac{0{,}2}{5}\right)^2+\ldots\right)=$ $=\frac{0{,}0016}{24(1-\frac{0{,}2}{5})}=0{,}0000694<0{,}0001$

4	В качестве приближенного значения взять сумму первых n членов (в зависимости от требуемой точности)	В результате вычислений получаем $e^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^3}{3!} \approx$ $\approx 1 + 0,2 + 0,02 + 0,00133 \approx 1,2213$

Приближенное вычисление определенных интегралов

Пример 8. Вычислить приближенно определенный интеграл с помощью рядов $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos x^2 dx$ с точностью $0,001$.

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Разложить функцию в степенной ряд, применяя таблицу простейших разложений	Используем ряд Маклорена для функции *cos x* $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} + \ldots$, $(-\infty < x < \infty)$, откуда, заменяя x на x^2, получим $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots + \frac{(-1)x^{4n}}{(2n)!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$
2	Почленно проинтегрировать полученное разложение и получить числовой ряд	$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos x^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^4 dx + \frac{1}{24}\int_0^{\frac{1}{2}} x^8 dx - \frac{1}{720}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{12} dx =$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2^5 + \frac{1}{24} \cdot 9 \cdot 2^9 - \frac{1}{720} \cdot 13 \cdot 2^{13} + \ldots$

3	Найти оценку остаточного члена по правилам: а) если ряд знакочередующийся, то ошибка не превосходит по абсолютной величине модуля первого из отброшенных членов; б) для знакоположительных рядов остаточный член оценивается сравнением его с геометрической убывающей прогрессией, сумма которой находится по формуле $\dfrac{a}{1-q}$	Принимая за приближенное значение сумму первых двух слагаемых, мы сделаем ошибку, равную величине отброшенного остаточного члена $R_3 = \dfrac{1}{24}\cdot 9\cdot 2^9 - \dfrac{1}{720}\cdot 13\cdot 2^{13} + \ldots$ $\lvert R_3\rvert \le \dfrac{1}{24}\cdot 9\cdot 2^9 \approx 0{,}00000904 < 0{,}001$
4	В качестве приближенного значения взять сумму первых n членов (в зависимости от требуемой точности)	$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \cos x^2 dx \approx \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{320} = 0{,}5 - 0{,}0031 \approx 0{,}497$

Решение дифференциальных уравнений

Пример 9. Найти первые пять членов разложения в ряд дифференциального уравнения $y'' = (y')^2 + xy$; начальные условия: $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$.

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Найти производные функции $y = f(x)$ до n-го порядка включительно, удовлетворяющие начальным условиям, продифференцировав уравнение n-2 раз	$y'(1) = 0; y''(1) = 0^2 + 1\cdot 1 = 1$ $y''' = 2y'y'' + y + xy'; y'''(1) = 2\cdot 0\cdot 1 + 1 + 1\cdot 0 = 1$ $y^{IV} = 2(y'')^2 + 2y'y'' + 2y' + xy''$ $y^{IV}(1) = 2\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1 = 3$

2	Записать первые *n* члены ряда Тейлора, подставив начальные условия	$y=1+\frac{0(x-1)}{1!}+\frac{1(x-1)^2}{2!}+\frac{1(x-1)^3}{3!}+\frac{3(x-1)^4}{4!}+\ldots=$ $=1+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{3(x-1)^4}{4!}+\ldots$

9.10. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье

Глоссарий основных понятий

№ п/п	Понятия	Содержание
1	Ряд Фурье периодической функции *f(x)*	Ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где a_n, b_n – коэффициенты Фурье периодической функции
2	Коэффициенты Фурье периодической функции *f(x)*	Последовательность чисел $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$; $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$ (n = 0, 1, 2, ...)
3	Ряд Фурье четной периодической функции *f(x)*	Ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, где $a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx$ (n = 0, 1, 2, ...)
4	Ряд Фурье нечетной периодической функции *f(x)*	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nxdx$, где $b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx$ (n = 1, 2, 3, ...)

5	Ряд Фурье для функции с периодом $2l$	Ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$, где $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$; $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
6	Признак Дирихле сходимости ряда Фурье	Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является кусочно монотонной и ограниченной на промежутке $[-\pi, \pi]$, то: 1) ее ряд Фурье сходится к функции во всех точках, где эта функция непрерывна; 2) в точках x_0, где функция неразрывна, ряд Фурье сходится к значению $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$; 3) в точках $-\pi$ и π ряд Фурье сходится к значению $\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$

9.11. Разложение в ряд Фурье периодических функций

Построить график функции $f(x)$ на основном периоде и периодически продолжить на всю действительную ось

Проверить выполнимость условий Дирихле для $f(x)$: ограниченность, периодичность, кусочную монотонность и конечное число разрывов первого рода на периоде

Исследовать функцию $f(x)$ на четность, нечетность

$f(x)$ общего вида	$f(x)$ четная $f(-x) = f(x)$	$f(x)$ нечетная $f(-x) = -f(x)$

Найти коэффициенты Фурье тригонометрического ряда

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$	$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$	$a_0 = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$	$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx$	$a_n = 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$	$b_n = 0$	$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx$

Записать разложение функции в тригонометрический ряд Фурье

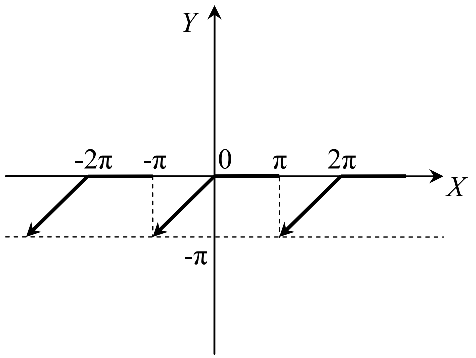
$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

Определить область сходимости и вычислить сумму ряда в точках разрыва

Пример 11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & при\ -\pi \le x \le 0 \\ 0, & при\quad 0 < x \le \pi \end{cases}; \quad T=2\pi$$

Алгоритм решения

№ п/п	Алгоритм	Решение
1	Сделать чертеж, если при этом функция задана лишь на периоде, продолжить ее периодически на всю числовую прямую	
2	Проверить условие теоремы Дирихле для данной функции: 1) ограничена 2) кусочно-монотонна	1) $\|f(x)\|\le\pi$ 2) на $(0, \pi)$ – постоянна, на $(-\pi,0)$ – возрастает
3	Выяснить четность и нечетность функции	Функция общего вида
4	Вычислить коэффициенты Фурье	$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}xdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}0dx=-\frac{\pi}{2};$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}x\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}0\cos nxdx=\frac{[1-(-1)^n]}{\pi n^2};$ $b_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}x\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}0\sin nxdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

5	Составить ряд Фурье функции *f(x)*, при этом в случае четной функции он должен содержать лишь косинусы, для нечетной функции – лишь синусы	$-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sin nx}$
6	Сделать вывод о сходимости полученного ряда Фурье, используя правило: сумма ряда равна 1) *f(x)* в тех внутренних точках интервала (-π, π), в которых функция непрерывна; 2) $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ во всех точках разрыва функции; 3) $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$ на концах интервала	Ряд сходится к *f(x)* при $-\pi < x < \pi$, в точках $+\pi$ сходится к $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]=\frac{1}{2}(0+(-\pi))=-\frac{\pi}{2}$

10. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № 1

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(2n-1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2n+3}{n+1}\right]^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{8n^3+1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)^3}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=x^2e^{3x}$; б) $f(x)=x^3\cos\dfrac{x}{3}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sin 9^0$, до 0,0001; б) $\int\limits_0^{0,1}e^{2x^2}dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y'=\ln x+y^2$, при $x=1$, $y=0$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=x^2$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Вариант № 2

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^2\dfrac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^4}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{10n+5}\right]^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^3-1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2n+1}\right]^{n}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5x^n}{2^n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=x\sin x^2$; б) $f(x)=x\cdot e^{-x}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) ln4 до 0,001; б) $\int\limits_0^{0,1}\sin(3x)^2\,dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y'=x^2+yx$, при $x=1, y=1$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=x^2-2$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Вариант № 3

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3n^2}{(n^3+1)}\right]^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3-1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n+1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{(2n-1)!}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n10^{n+1}}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x) = arctg\dfrac{x}{3}$; б) $f(x) = e^{-x^2}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) ln6 до 0,001, б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\cos 2x}{x} dx$ *до* 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = 5x - 0{,}2y^2$, при $x = 0$, $y = 2$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = -4x$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 4

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \dfrac{2}{4n^2+9}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2n}{3n+5}\right]^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n(2n)!}$.

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x) = \sin(-x)$; б) $f(x) = e^{3x}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sin 18^0$ до 0,001; б) $\int\limits_0^1 \sin 3x^2 dx$, с точностью до 0,01.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y^2$, при $x = 0$, $y = 0{,}1$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = x^3$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 5

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{7n}{3n-1}\right]^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^2}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n^2}{n^4-n^2+1}$.

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+3}$.

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x) = cos\ 2x$; б) $f(x) = (1+2x)\alpha$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\cos 15^0$ до 0,001; б) $\int_0^{\frac{1}{4}}\ln(1+x^2)\ dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = x^2 + 0{,}2y^2$, при $x = 0$, $y = 0{,}1$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = x^2+1$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 6

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n}(n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n^3+2)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n-5}{2n-1}\right]^{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4}{7n^4-1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n!(n+1)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{(n-1)^4}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=(1+2x)^n$; б) $f(x)=\cos 2x^2$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\cos 9^0$, до 0,0001; б) $\int_0^{0,1} e^{-3x^2}dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y'=2x^4+y^2$, при $x=1$, $y=0$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=x^2-1$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Вариант № 7

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{5n+2}\right]^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!2^n}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{10}}{e^n}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^nx^n}{n^2-n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=\ln(1-x^2)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\cos 18^0$ до 0,001; б) $\int\limits_0^{0,1} \cos(2x)^2\,dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = \sin x^2 + yx$, при $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=1-2x$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Вариант № 8

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(2n-2)2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^5-1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n+1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)\ln^2(2n-1)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)\sqrt{2n}}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2}$; б) $f(x)=x^2e^{-3x}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\cos x^2}{x}dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y` = 10x - 0{,}8y^2$, при $x = 1,\ y = 0$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = -2x$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 9

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+1)!}{(n+1)^n}$; б) $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{2n-5}{7n^4+9n^2-3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4n}{4n+1}\right]^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{8n-1}}{n^6+1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(5n-2)(n)!}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!x^{n-1}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x) = \ln(5+2x)$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sin 8^0$ до 0,001; б) $\int_0^1 x\cos x^2 dx$, с точностью до 0,01.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = 10x^2 + y^2$, при $x = 0{,}1,\ y = 0{,}1$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = 1 - x^3$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 10

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3n}{3n-1}\right]^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)^3}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2\sqrt{2n-1}}{n^3-n^2+1}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3-5}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $f(x)=\sin^2 x$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sin 15°$ до 0,001; б) $\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1+x^2)dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = 0{,}2x^2 + y^2$, при $x = 0{,}1$, $y = 0{,}1$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = x^2 - 2$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 11

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-2}{\sqrt{n}(n^2+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n^3+1)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n-5}{2n-1}\right]^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n^n}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n^2-1)}{n!(n^2+1)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^3\sqrt{n}}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$; б) $f(x)=x^2\cos x^2$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\cos 10^0$, до 0,0001; б) $\int\limits_0^{0,1} xe^{x^2}dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y'=3x^4+4y^2$ при $x=1$, $y=0$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=x^2+1$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Вариант № 12

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{n+1}{5n+2}\right]^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!2^n}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{10}}{e^n}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{n^2-n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=\ln(1+3x^2)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt[4]{82}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^{0,1} \frac{\cos^2 x}{x} dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = \cos x^2 + yx$, при $x = \pi$, $y = 0$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = 1 + 2x^2$ на интервале $(-\pi, \pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 13

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2\sqrt{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n^3-1)2^n}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$\sum\limits_{n+1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n5^n}$.

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x) = \ln(\frac{x}{2} + 1)$; б) $f(x) = x^2 \sin 3x$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt{28}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^{0,1} \frac{\sin x^2}{x} dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = 5x^3 y - y^2$, при $x = 1$, $y = 1$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
f(x) = 3 – 2*x* на интервале $(-\pi,\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 14

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{3^n(n+1)!}$; б) $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{5n^2+4}{(n-n^2+1)\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n-1}{2n+1}\right]^{n^2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln^2(3n+1)}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{(n-1)!}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{n-1}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=\ln(1+2x^2)$; б) $f(x)=\frac{1}{1+2x}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sin 15^0$ до 0,001; б) $\int_0^1 x^2\cos^2 x dx$, с точностью до 0,01.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y' = 2x^3 + xy^3$, при $x = 0{,}1$, $y = 0{,}1$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = x^3$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 15

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^3+n)}{n^2\sqrt{n^3}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5n+1}{5n-1}\right]^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^4}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\sqrt[3]{n^4}}{n^3-5}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=\frac{1}{3+2x}$; б) $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt[3]{28}$ до 0,001; б) $\int_0^{0,1}\ln(1+4x^2)dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$y'=\ln x^2+y^2$, при $x=1$, $y=0$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2+3$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Вариант № 16

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+5}{n!}\right]\frac{2}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{2n+5}\right]^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3+1}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n(\ln\ln n)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{e^n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x)=\dfrac{\left(1+e^{-x}\right)}{x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{3}{4-x}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt[3]{10}$ до 0,0001; б) $\int\limits_0^{0.5}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y'=\cos x+y^2;\ y(0)=1.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=\dfrac{\pi-x}{4}$ на интервале (0,2), $T=2\pi$.

Вариант № 17

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n!5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{1}{n}\right]^n\dfrac{1}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{3n^2}{3n^2+1}\right]^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)\ln^3(n-1)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n n^2}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$f(x)=\frac{\sin(-3x)}{x}.$$

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt{1{,}003}$ до 0,0001; б) $\int_0^{0.1}\frac{1-e^{-2x}}{x^2}dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y'=e^x+y^2; y(0)=0.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=x^2+1$ на интервале (-2,2), $T=4\pi$.

Вариант № 18

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^3}{(3n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n-2}{2n+1}\right]^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n+1}\right]^{n}(\frac{2}{3})^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+4)\sqrt{\ln(n+4)}}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

$f(x)=x^2\ln(1+2x)$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt{26}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x^2 dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = y + y^2;\ y(0) = 3.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = x^2 - 1$ на интервале $(-1,1)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 19

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n-2}{n+3}\right]^{n^3}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{n^8+1}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{3n+1}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\ln^2 2n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$f(x) = x\arcsin\frac{x^2}{2}.$$

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt{40}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\frac{x}{5})}{x}dx$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = 2e^{y} - xy;\ y(0) = 0.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = e^{2x}$ на интервале (-2,2), $T = 4\pi$.

Вариант № 20

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n-1}e^{-n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n^2-1}{2n^2-5}\right]^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-23}{\sqrt[3]{n^6+3}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\ln(n+1)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\ln^2 n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$f(x) = x\cos x^2.$$

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt{129}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^{0.4}\frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$, до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = \sin x + y^2;\ y(0) = 1.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = 2x$ на интервале (-2,2), $T = 4\pi$.

Вариант № 21

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{n^3-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n^2}}{(n+3)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2n^2}{2n^2+3}\right]^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+4}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{\ln^3 n}}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

а) $f(x) = \dfrac{\left(1+e^{2x}\right)}{x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^2}$.

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt[3]{65}$ до 0,0001; б) $\int\limits_0^{0.5} e^{-\frac{x^2}{3}} dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = e^x + y;\ y(0) = 4.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = 2 - 3x^2$ на интервале $(-\pi;\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 22

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!4^n}{(2n)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2n+1}{2n-1}\right]^n \dfrac{1}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{n^2-n+3}{n^2+1}\right]^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt[5]{n^7-1}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n\,\frac{2^n}{n(n+1)}.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$f(x)=\frac{\arcsin(-3x^2)}{x^2}.$$

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt{18}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^{0.1}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y'=x^2+y^2;\ y(0)=2.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=3x+5$ на интервале (-3,3), $T=6\pi$.

Вариант № 23

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n^2}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n-2}{n+1}\right]^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n+1}\right]^n\sin^n\frac{1}{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{(n-4)\sqrt[3]{n^2}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)\sqrt{\ln(2n+3)}}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}x^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$f(x)=\sqrt[5]{1+x}.$$

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt{37}$ до 0,001; б) $\int_0^1 x\sin 3x^2dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y'=\sin x+0{,}5y^2;\ y(0)=1.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=x^2+2$ на интервале (-2,2), $T=4\pi$.

Вариант № 24

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(2n+1)}{(2n+1)^4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4n^2-2}{4n^2+3}\right]^{n^3}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{\sqrt[3]{n^9+1}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(n+1)^n}x^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$f(x) = x\cos\frac{x^2}{2}.$$

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt{42}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\frac{x}{3})}{x^2}dx$ до 0,001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = 2e^y + xy;\ y(0) = 0.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = x - \pi$ на интервале $(-\pi;\pi)$, $T = 2\pi$.

Вариант № 25

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n!}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{n-1}e^{-2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2+1}{n^2+3}\right]^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^7-1}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\ln^2(n+1)}.$$

3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}x^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$f(x) = x^3\cos x.$$

5. Вычислить приближенно значение с указанной точностью

а) $\sqrt[4]{630}$ до 0,001; б) $\int\limits_0^{0.1}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ до 0,0001.

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = e^x + y^2; y(0) = 0.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = 2x + \pi$ на интервале $(-\pi;\pi)$, $T = 2\pi$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баврин, И.И. Общий курс высшей математики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. вузов / И.И. Баврин. – М. : Просвещение, 1995. – 464 с.
2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 432 с.
3. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1985. – 448 с.
4. Бугров, Я.С. Высшая математика : задачник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1982. – 238 с.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. – 10-е изд. – М. : Наука, 1978. – 480 с.
6. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1973. – 576 с.
7. Мышкис, А.Д. Математика для втузов : специальные курсы / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1971. – 632 с.
8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для втузов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2001. – Т. 2. – 544 с.
9. Ряды : метод. указания к занятиям по теории и практике с рейтинговой оценкой знаний / сост. Ю.К. Чернова. – Тольятти : ТолПИ, 1993. – 67 с.
10. Сборник задач по математике для втузов : специальные курсы / под ред. А.В. Ефимова. – М. : Наука, 1984. – 211 с.
11. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике : учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 1998. – 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Петр Федорович ЗИБРОВ
Ольга Александровна КУЗНЕЦОВА

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Т.Д. Савенкова*
Технический редактор *З.М. Малявина*
Компьютерная верстка: *И.И. Шишкина*
Дизайн обложки: *И.И. Шишкина*

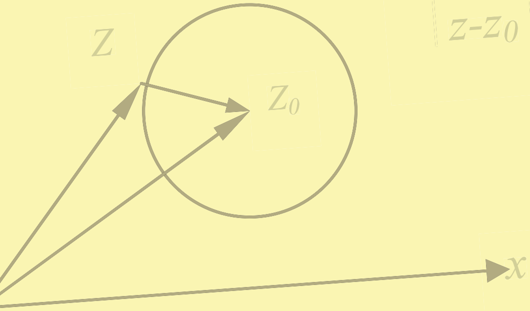
Подписано в печать 14.07.2009. Формат 60×84/16.
Печать оперативная. Усл. п. л. 8,37. Уч.-изд. л. 9,37.
Тираж 60 экз. Заказ № 1-06-09.

Тольяттинский государственный университет
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + \dots$$
$$y''(x) = 2!a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + 6\cdot 5a_6x^4 + 7\cdot 6a_6x^5$$
$$y'''(x) = 3!a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + 5\cdot 4\cdot 3a_5x^2 + 6\cdot 5\cdot 4a_6x^3 + 7\cdot 6\cdot 5a_6x^4$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[e^{i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt + e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \right] d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt \right] d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(t-x)}dt \right] d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt \right] d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt \right] d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega(t-x)}dt \right] d\omega .$$



$$\left| z - z_0 \right| < \delta$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx =$$
$$= \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\left[\cos\right.$$
$$= \frac{1}{l}\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(n+1)}\sin(n+1)\frac{\pi}{l}x + \frac{1}{}\right.$$