

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

С.В. Талалов

ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Электронное учебное пособие

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2019

ISBN 978-5-8259-1421-3

(x, k) .

(x)

$2m$

x

dk'

$r(k')$

$k' - k = i0$

УДК 512.62/.642
ББК 22.193

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и геометрии Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева *А.Н. Панов*;
д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского государственного университета *А.И. Сафронов*.

Талалов, С.В. Обратные и некорректные задачи : электронное учебное пособие / С.В. Талалов. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2019. – 1 оптический диск.

Учебное пособие представляет собой краткий конспект лекций по дисциплине «Обратные и некорректные задачи», предусмотренной учебными планами направления «Прикладная математика и информатика». В конце каждой лекции имеются упражнения разной степени сложности, выполняемые как аналитически, так и с использованием компьютера. В конце пособия приведен список литературы, где можно найти подробности и доказательства тех утверждений, для которых в конспекте приводятся только формулировки.

Предназначено для студентов направления подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» очной формы обучения.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; ПИИ 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2019

Редактор *Е.В. Пилясова*

Техническое редактирование: *С.В. Талалов*

Компьютерная верстка: *С.В. Талалов*

Художественное оформление,

компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева, И.В. Карасев*

Дата подписания к использованию **05.02.2019.**

Объем издания 5 Мб.

Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.

Заказ № 1-53-18.

Издательство Тольяттинского государственного университета

445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,

тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Оглавление

| | |
|--|----|
| Лекция 1. | |
| Введение. Корректные и некорректные задачи | 6 |
| Лекция 2. | |
| Метрические и нормированные пространства | 10 |
| Лекция 3. | |
| Евклидовы пространства и ряды Фурье | 16 |
| Лекция 4. | |
| Линейные операторы в евклидовых пространствах | 21 |
| Лекция 5. | |
| Линейные задачи в конечномерных пространствах | 25 |
| Лекция 6. | |
| Компактные операторы и связанные с ними некорректные задачи | 28 |
| Лекция 7. | |
| Методы решения некорректных задач, связанных с интегральными уравнениями | 33 |
| Лекция 8. | |
| Прямая и обратная задача Штурма – Лиувилля | 38 |
| Лекция 9. | |
| Методы решения спектральной задачи Штурма – Лиувилля | 43 |
| Лекция 10. | |
| Метод подбора в решении некорректных задач | 48 |

| | |
|--|-----------|
| Лекция 11. | |
| Теория возмущений | 53 |
| Лекция 12. | |
| Обратная задача Штурма – Лиувилля на интервале | 56 |
| Литература | 61 |

Лекция 1

Введение. Корректные и некорректные задачи

Понятие о корректных и некорректных задачах математической физики (МФ). Корректность по Адамару. Пример некорректной задачи: решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Прямые и обратные задачи МФ. Обратная задача Штурма – Лиувилля. Пример практических приложений задачи Штурма – Лиувилля: проектирование планарных волноводов с заданными модами.

В данном курсе мы будем рассматривать специальный класс задач математической физики, называемых обратными задачами. Вначале определим некоторые исходные понятия.

Математическая физика (согласно определению академика В.С. Владимирова) – это теория математических моделей физических явлений. Поэтому данный курс входит в набор дисциплин, относящихся к теме *Математическое моделирование*. Предмет изучения математической физики – краевые задачи дифференциальных уравнений в частных производных (ЧДУ), а также избранные вопросы спектральной теории дифференциальных и интегральных операторов. Важнейшее свойство, которым должна обладать поставленная задача, – это *корректность*. Именно для корректных задач возможно найти точное или приближенное решение, подходящее для последующего практического применения.

Определение 1.1. *Краевая задача называется корректной по Адамару, если решение этой задачи: 1) существует; 2) единственно; 3) устойчиво.*

Под устойчивостью в самом общем смысле понимается следующее: ”малым” изменениям начальных данных задачи отвечает ”малое” изменение решения. Понятие ”малое” строго будет определено позже, когда будут рассмотрены метрические пространства.

Кажется естественным, что практический интерес представляют только

такие (корректные) задачи: ведь начальные данные, как правило, определяются опытным путем и точно никогда не известны. Поэтому, если задача не является корректной (например, не обладает свойством устойчивости), мы сталкиваемся с таким явлением: различные измерения (одних и тех же!) начальных данных, отличающихся на малую измерительную погрешность прибора, могут приводить к решениям, отличающимся друг от друга сколь угодно сильно.

Парадокс заключается в том, что значительная часть задач, представляющих практический интерес, являются некорректными. Простейший пример – нахождение производной от функции, заданной приближенно. Действительно, пусть нам надо найти производную функции $\phi(x)$, которая задана на отрезке $[a, b]$ с некоторой погрешностью $\delta\phi(x)$, такой, что $|\delta\phi(x)| \leq \epsilon$. Например, возможен вариант, когда $\delta\phi(x) = \epsilon \sin \omega x$. При этом, очевидно, погрешность производной $\delta\phi'(x)$ составит $\delta\phi'(x) = \epsilon \omega \cos \omega x$. Мы видим, что, каково бы ни было малое число ϵ (что соответствует повышению точности "измерения" функции $\phi(x)$), погрешность в определении производной может быть сколь угодно велика при соответствующем выборе параметра ω . Более сложный пример некорректной задачи – интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int_a^b K(x, y)\phi(y)dy = f(x), \quad x, y \in [a, b], \quad (1.1)$$

где $\phi(y)$ – неизвестная функция, а известные функции $f(x)$ и $K(x, y)$ – непрерывные и ограниченные в своей области определения. Будем оценивать погрешности $\delta\phi$ и δf величин ϕ и f в равномерной метрике:

$$\rho_C(f_1, f_2) = \max |f_1(x) - f_2(x)|, \quad x \in [a, b]. \quad (1.2)$$

Пусть, например, погрешность $\delta\phi$ неизвестной функции $\phi(x)$ задается выражением $\delta\phi(x) = A \sin(\omega x)$; тогда, в силу (1.1), погрешность известной (например, из измерений) функции $f(x)$ определяется выражением

$$\delta f(x) = A \int_a^b K(x, y) \sin(\omega y) dy.$$

Из теории интегралов Фурье известно, что при всяком x интеграл в правой части данного выражения стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. При сделанных предположениях об ограниченности функции $K(x, y)$ стремление к нулю равномерное, так что, сколь бы ни было велико число A , всегда можно выбрать

число ω так, что $\max |\delta f(x)| < \epsilon$, где ϵ – любое сколь угодно малое число. Однако при этом имеем $\max \delta \phi(x) = A$. Это означает, что в данном примере увеличение точности измерений (т. е. уменьшение числа ϵ) не приводит к повышению точности определения неизвестной функции.

Прямые и обратные задачи. Строго говоря, универсального определения того, какая задача является ”прямой”, а какая – ”обратной”, нет. Это зависит от конкретной проблемы. Рассмотрим в качестве примера спектральную задачу Штурма – Лиувилля на всей оси. К ней мы будем неоднократно возвращаться в ходе данного курса. Итак, пусть нам дан оператор Штурма – Лиувилля

$$\widehat{\mathcal{L}} = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x), \quad u(x) \in \mathcal{S},$$

как оператор пространства $L_2(\mathbb{R})$ (\mathcal{S} – пространство Шварца). Прямая задача в данном случае формулируется так: дан оператор (т. е. фактически коэффициентная функция $u(x)$), найти спектр данного оператора. Под спектром понимается полный набор данных рассеяния оператора – некоторая совокупность $(r(k); \lambda_1, b_1, \dots, \lambda_N, b_N)$. Здесь числа λ_i , ($i = 1 \dots N$) – собственные числа оператора $\widehat{\mathcal{L}}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, определения остальных величин будут даны позже. Обратная задача формулируется так: даны данные рассеяния, найти функцию $u(x)$. Заметим, что именно обратная задача представляет практический интерес: данные рассеяния, как правило, являются теми величинами, которые измеримы экспериментально. С другой стороны, данные рассеяния могут быть заданы как некоторые технические требования к устройству, описываемому данной задачей. В этом случае необходимо выяснить, какая функция $u(x)$ к таким данным рассеяния приводит.

Рассмотрим конкретный пример, представляющий практический интерес: распространение излучения в планарном световоде. Такой световод представляет собой трехслойную структуру, центральный (средний) слой которой имеет (достаточно малую) толщину $2l$ и переменный, вообще говоря, показатель преломления $n_2(x)$. Координата x выбрана вдоль нормали к плоскостям, являющимся границей между слоями; будем считать, что плоскости пересекают данную координатную ось в точках $x = \pm l$. Крайние слои, окаймляющие данный слой, имеют толщину $d \gg l$ и постоянный показатель преломления n_1 , причем $n_1 \leq \min n_2(x)$. Распространение излучения частоты ω , как известно, может быть описано при помощи уравнения Гельмгольца (см. курс ”Уравнения математической физики”). Применяя метод разделения перемен-

ных, можно показать, что решение уравнения Гельмгольца в данном случае сводится к решению уравнения Штурма – Лиувилля $\widehat{\mathcal{L}}\psi = \lambda\psi$, в котором

$$u(x) = -\frac{\omega}{c}(n_2(x) - n_1), \quad |x| \leq l, \quad u(x) \equiv 0, \quad |x| > l.$$

Собственные числа задачи Штурма – Лиувилля здесь имеют ясный физический смысл: это длины волн тех волноводных мод (т. е. частных решений уравнения Гельмгольца), которые могут распространяться по данной планарной волноводной структуре. Как правило, в том или ином устройстве с использованием подобных волноводов требуются вполне определенные наборы таких длин волн. Поэтому обратная задача, в физической постановке, здесь звучит так: какую зависимость $n_2(x)$ показателя преломления центрального слоя надо сформировать, чтобы данный волновод приводил к *заданному* набору волноводных мод? Другой пример – применение спектральной задачи Штурма – Лиувилля в квантовой механике. Оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ в этом случае играет роль гамильтониана (оператора энергии) квантовомеханической частицы, движущейся в поле потенциала $u(x)$. Обратная задача здесь – это нахождение потенциала $u(x)$ по данным рассеяния $(r(k); \lambda_1, b_1, \dots, \lambda_N, b_N)$, которые и являются определяемыми на опыте величинами.

Упражнения

1. Дать определение равномерной сходимости функциональной последовательности $f_n(x)$. Доказать равномерную сходимость к нулю последовательности $f_n(x) = \int_a^b K(x, y) \sin(ny) dy$ на отрезке $[a, b]$, где ядро K удовлетворяет условию $|K(x, y)| \leq M, \forall x, y \in [a, b]$.
2. Записать уравнение Гельмгольца и решить его методом разделения переменных в указанном в лекции случае (когда коэффициент зависит только от одной координаты x).
3. Записать общее решение уравнения $\widehat{\mathcal{L}}\psi = \lambda\psi$ при $u(x) \equiv 0$ и изучить асимптотику различных частных решений при различных положениях числа λ на комплексной плоскости. Рассмотреть случаи:

$$\operatorname{Re}\lambda = 0, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0; \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0, \quad \operatorname{Im}\lambda = 0; \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

Литература: [1, 2].

Лекция 2

Метрические и нормированные пространства

Метрические пространства. Примеры различных метрик. Сходимость. Последовательности Коши. Полнота. Простейшие примеры полных и неполных пространств. Нормированные пространства. Примеры. Соотношение между различными нормами в одном пространстве. Эквивалентность норм в \mathbb{R}^n . О важности правильного выбора нормы функции в вычислительной математике.

В этой лекции мы рассмотрим ряд математических понятий, которые будут необходимы нам в дальнейшем при построении алгоритмов решения тех или иных некорректных задач. При этом, как правило, будем ограничиваться лишь определениями, а утверждения будем приводить без доказательств – апеллируя к тому факту, что многие из них уже изучались в иных курсах. Решая численно задачу о построении приближенного решения, мы всегда подразумеваем, что понимаем, какое решение является ”близким” к искомому, а какое – нет. Строгое определение ”близости” одной точки, вектора или функции к другому такому же объекту требует введения такого понятия, как *метрика*.

Определение 2.1. Пусть X – множество элементов x, y, z, \dots произвольной природы. Предположим, что на множестве X определена вещественная функция $\rho(x, y)$, $x, y \in X$, обладающая следующими свойствами $\forall x, y, z \in X$:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Если такая функция определена, то она называется метрикой, а множество X – метрическим пространством.

Пример 2.1. Рассмотрим декартово пространство \mathbf{R}_3 , точки которого $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ заданы упорядоченными тройками чисел x, y, z . Определим функцию

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Несложно проверить, что данная функция удовлетворяет всем перечисленным выше аксиомам метрики.

Очевидно, что в данном случае метрика совпадает с "бытовым" понятием расстояния между точками трехмерного пространства, в котором существуем мы и все окружающие нас предметы. Последнее неравенство в определении метрики в данном случае совпадает с известным утверждением о том, что сторона треугольника не может быть больше суммы двух других его сторон, поэтому и в общем случае указанное неравенство называется неравенством треугольника.

Пример 2.2. Рассмотрим пространство $C[a, b]$ вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Метрика здесь может быть определена следующим образом:

$$\rho_c(f_1, f_2) = \max_{x \in [a, b]} |f_1(x) - f_2(x)|, \quad f_1(x), f_2(x) \in C[a, b].$$

Тот факт, что данное определение удовлетворяет аксиомам метрики, проверяется непосредственно.

В метрических пространствах определено понятие *сходимости*. Пусть X – метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$, а $x_i \in X, i = 1, 2, \dots$ – некоторая последовательность (бесконечное счетное подмножество) элементов этого множества. Данная последовательность сходится к некоторому элементу $a \in X$, если $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ такое, что $\rho(x_n, a) < \epsilon$, как только выполняется $n > N$.

Каждая сходящаяся последовательность является *последовательностью Коши*. Последовательность $x_i \in X, i = 1, 2, \dots$ метрического пространства X с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$ называется последовательностью Коши, если $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$, такое, что $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ для любых $n, m > N$.

Следует подчеркнуть, что в произвольном метрическом пространстве обратное утверждение неверно: произвольно взятая последовательность Коши сходится, вообще говоря, не обязана. Пространства, в которых все последовательности Коши сходятся, называются *полными*.

Для вычислительной математики важность таких, казалось бы, достаточно абстрактных понятий, как последовательность Коши, метрическое пространство, обусловлена следующими обстоятельствами. На практике последовательность $x_i \in X$ – это некоторая последовательность вычисляемых элементов (решений дифференциального уравнения, например), которая получается при реализации некоторого алгоритма. Номер элемента можно связать с точностью алгоритма. Например, это может быть количество итераций и т. д. Элемент a – это искомый элемент (точное решение уравнения). Однако элемент a нам неизвестен. Отсюда, если пространство X (пространство решений) не является полным, можно сделать неутешительный для вычислителя вывод: мы не знаем, будет ли сходиться наша последовательность x_i при увеличении i (т. е. при повышении точности вычисления) к точному решению a . Ведь точное решение нам неизвестно и применить определение сходимости мы не можем. Однако, не зная точного решения, всегда можно проверить, является ли получаемая в результате вычислений последовательность приближенных решений x_i последовательностью Коши. Если это так и пространство X полное, то последовательность x_i сходится к некоторому элементу a , который можно считать искомым решением задачи.

Пример 2.3. *Вещественная ось \mathbb{R} . На вещественной оси любая последовательность Коши сходится (критерий Коши), так что \mathbb{R} – полное метрическое пространство.*

Пример 2.4. *Множество рациональных чисел \mathbb{Q} . Данное пространство не является полным, так как последовательность Коши*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

элементов данного пространства (рациональных чисел) сходится к иррациональному числу – основанию натуральных логарифмов e .

Более узким по отношению к классу метрических пространств является класс нормированных пространств. Пусть далее V – линейное векторное пространство над полем \mathbb{C} , x, y, \dots – его элементы (векторы) и число $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определение 2.2. *Предположим, что на множестве V определена вещественная функция $\|\cdot\|$, обладающая следующими свойствами:*

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

В этом случае функция $\|\cdot\|$ называется *нормой*, а пространство V – нормированным линейным векторным пространством. Определение нормированного линейного пространства над полем \mathbb{R} аналогично.

Пример 2.5. *Линейное векторное пространство \mathbb{R}_n . Норма векторов $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_n$, имеющих координаты $x_i, i = 1, \dots, n$, определяется как*

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Пример 2.6. *Пространство $C[a, b]$ вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Норма может быть определена так:*

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad f(x) \in C[a, b].$$

Любое нормированное пространство является метрическим. Действительно, несложно проверить, что если в некотором пространстве V задана норма $\|\cdot\|$, то функция

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V$$

удовлетворяет всем аксиомам метрики. Как правило, далее мы будем иметь дело лишь с нормированными пространствами.

Рассматривая какое-либо конкретное нормированное пространство V , важно заметить, что норма и, следовательно, метрика определяются не единственным образом. Так, например, в пространстве \mathbb{R}_n норму можно определить так:

$$\|\mathbf{r}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

В случае $n = 2$ (плоскость) метрику, порожденную данной нормой, называют "метрикой городских кварталов". Такое название интуитивно понятно. В городе (т. е. на плоскости, отдельные прямоугольные области которой – дома – недоступны для перемещения) расстояние между точками А и В целесообразно измерять вдоль улиц и проездов, образующих некоторую прямоугольную сетку, а не по прямой.

В случае конечномерных векторных пространств все нормы являются эквивалентными. Это означает следующее: для любых двух норм $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|$, заданных в пространстве V , существуют (не зависящие от x) константы $c > 0, C > 0$, такие, что

$$c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in V.$$

Так, для введенных выше норм $\|x\|_1$ и $\|x\|$ пространства \mathbb{R}_n имеем $c = 1/n, C = 1$ (проверить!).

Эквивалентность норм в конечномерных пространствах означает, в частности, следующее: любая последовательность, сходящаяся в одной норме, будет сходитьса и в другой. Это не так в бесконечномерных пространствах: различные нормы там, вообще говоря, неэквивалентны. Поэтому (функциональная, например) последовательность, сходящаяся в одной норме, в другой норме в этом же пространстве может расходиться. Это подчеркивает важность рассмотренных понятий с точки зрения вычислительной математики – выбор ”правильной”, т. е. отвечающей постановке задачи, нормы представляется важным условием для построения сходящегося алгоритма. Нормы, в которых сходятся меньше последовательностей, называют более сильными, а нормы, в которых последовательностей сходитса больше, – более слабыми.

Пример 2.7. Рассмотрим пространство $C([a, b])$. Определим в данном пространстве нормы $\|f\|_1$ и $\|f\|_0$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx, \quad \|f\|_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Рассмотрим последовательность $f_n(x) \in C([a, b])$, элементы которой определены так (будем считать, что $a < -1, b > 1$):

$$f_n(x) = \pm nx + 1, x \in [\mp \frac{1}{n}, 0], \quad f_n(x) \equiv 0, x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].$$

Очевидно, $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В другой норме имеем: $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ $\|f_n - f_m\|_0 \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что последовательность $f_n(x)$ по норме $\|f\|_0$ не является последовательностью Коши, а значит, не является сходящейся.

Заметим, что правильный, отвечающий поставленной задаче выбор нормы является залогом ее оптимального (в том числе по затраченному машинному времени) решения. Например, пусть $C^1([a, b])$ – пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Пусть необходимо найти

приближение (как по значениям самой функции, так и по значениям производных) к некоторой функции $f(x) \in C^1([a, b])$ с заданной точностью ϵ . Тогда, если мы выберем норму $\|f\|_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$, то "правильного" решения мы, очевидно, не получим: найденное приближение может отличаться по значениям производных сколь угодно сильно. Для решения данной задачи можно выбрать, например, норму $\|f\|_0^1 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Упражнения

1. Доказать, что любое нормированное пространство является метрическим.
2. Проверить, что определение $\|f\|_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$, $f(x) \in C[a, b]$ задает в пространстве $C[a, b]$ норму.
3. Доказать утверждения, сделанные в последнем примере.
4. Доказать, что выражение $\|f\|_0^1 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ задает в пространстве $C^1([a, b])$ норму.

Литература: [3, 4].

Лекция 3

Евклидовы пространства и ряды Фурье

Евклидовы пространства. Скалярное произведение и ортогональность. Примеры. Норма в евклидовом пространстве. Неравенство Шварца. Гильбертовы пространства. Примеры. Ортонормированные системы векторов. Сепарабельные гильбертовы пространства. Подпространство, его ортогональное дополнение. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму подпространств. Ряды Фурье. Примеры. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Процедура ортогонализации. Задача о наилучшем приближении заданного вектора рядом Фурье.

В этой лекции мы рассмотрим специальный класс линейных векторных пространств – евклидовы пространства. Итак, пусть E – линейное векторное пространство над полем комплексных чисел \mathbb{C} , векторы x, y, z, \dots – его элементы.

Определение 3.1. Пусть на пространстве E определена полуторалинейная функция $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $\forall x, y \in E$.
3. $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)$, $\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Такая функция называется скалярным произведением векторов пространства E , а само пространство E – евклидовым пространством.

Определение евклидова пространства над полем вещественных чисел \mathbb{R} аналогично – необходимо в пункте 2 определения скалярного произведения исключить черту, означающую комплексное сопряжение. В евклидовом пространстве (и только в нем!) можно ввести понятие ортогональных векторов.

Определение 3.2. Векторы $x, y \in E$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Любое евклидово пространство является нормированным (и, следовательно, метрическим), если норму в нем определить выражением $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. В дальнейшем, если это не оговорено особо, под нормой вектора в каком-либо евклидовом пространстве мы будем понимать именно данную норму.

Пример 3.1. Пространство R_n с произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$, где x_i, y_i – декартовы координаты векторов $x, y \in R_n$, является евклидовым и обозначается E_n .

Пример 3.2. Пространство комплекснозначных функций $f(x)$, где $x \in R$, удовлетворяющих условию $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$ является евклидовым и обозначается $L_2(R)$.

Для произвольных векторов x, y заданного евклидова пространства E выполняется неравенство Коши – Буняковского – Шварца:

$$(x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Полные евклидовы пространства называют гильбертовыми пространствами.

Пример 3.3. Евклидовы пространства из предыдущих примеров являются гильбертовыми.

Пример 3.4. Пространство l_2 последовательностей комплексных чисел x_i , удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, является гильбертовым со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$.

Определение 3.3. Система векторов $x_a \in E$, $a \in A$, где E – евклидово пространство, A – некоторое множество, называется ортогональной, если $(x_a, x_b) = 0$ при $a \neq b$.

Если данная система в (линейном) пространстве E является также базисом (полной системой векторов), такую систему называют ортогональным базисом. Если множество счетное, то можно считать выполненными равенства $(x_a, x_a) = 1 \forall a = 1, 2, 3, \dots$. Такие базисы называются ортонормированными.

Гильбертовы пространства, в которых существуют счетные ортонормированные базисы, называют *сепарабельными*. В дальнейшем мы будем иметь дело только с такими пространствами.

Рассмотрим некоторое (замкнутое) подпространство E_1 евклидова пространства E . Множество векторов $x \in E$, таких, что $x \perp y, \forall y \in E_1$, называется *ортogonalным дополнением* пространства E_1 и обозначается E_1^\perp . Очевидно, $E = E_1 \cup E_1^\perp$. Несложно доказать, что множество E_1^\perp также является подпространством пространства E . В итоге имеем разложение $E = E_1 \oplus E_1^\perp$; соответствующая операция \oplus , учитывающая как объединение \cup , так и ортогональность пространств E_1 и E_1^\perp , называется *прямой суммой*. Данное равенство обобщается на любое количество пространств:

$$E = \bigoplus_{i=1}^N E_i. \quad (3.1)$$

При этом должны быть выполнены условия: 1) попарной ортогональности пространств: $E_i \perp E_j$ при $i \neq j$; 2) каждый элемент $y \in E$ представим в виде $y = \sum_{i=1}^N x_i$, где $x_i \in E_i$. В случае бесконечномерных пространств возможно $N = \infty$, в этом случае каждый элемент $y \in E$ представим, в соответствии с (3.1), сходящимся рядом элементов $x_i \in E_i$.

Рассмотрим в бесконечномерном евклидовом пространстве E некоторый ортонормированный базис $x_i \in E$. Тогда $\forall x \in E$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \quad (3.2)$$

Разложение элемента x в сумму (3.2) называется *рядом Фурье* элемента x по базису x_i , а коэффициенты a_i – *коэффициентами Фурье*.

Пример 3.5. Пусть $L_2[0, 2\pi]$ – евклидово пространство непрерывных вещественных 2π -периодических функций со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. В таком пространстве, как правило, используется тригонометрический базис:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots \right).$$

Ряд Фурье в этом случае традиционно записывается в форме

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Пример 3.6. Рассмотрим евклидово пространство $L_2[-1, 1]$ непрерывных вещественных функций со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Ортогональный базис образуют полиномы Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (P_n, P_m) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Соответственно, любая функция $f(x) \in L_2[-1, 1]$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2}.$$

Пусть E – некоторое бесконечномерное евклидово пространство и $f \in E$. Коэффициенты Фурье $c_k = (f, x_k)$ данного элемента для произвольной полной ортонормированной системы векторов $x_k \in E$ удовлетворяют следующим соотношениям:

- *неравенство Бесселя:* $\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \|f\|^2$. Заметим, что для произвольных евклидовых пространств неравенство, вообще говоря, сохраняется при $N \rightarrow \infty$. Однако для сепарабельных пространств и полной ортонормированной системы векторов x_k при $N \rightarrow \infty$ имеет место
- *равенство Парсеваля:* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2$.

Пусть E – некоторое бесконечномерное евклидово пространство и $y_n \in E$ – некоторая полная система линейно независимых векторов. Из данной системы можно построить полный ортонормированный базис x_k посредством (рекуррентной) процедуры ортогонализации Грама – Шмидта. Данная процедура является последовательной реализацией следующих шагов:

1) $x_1 = y_1 / \|y_1\|$;

2) $x_2 = z_2 / \|z_2\|$, где $z_2 = y_2 - (y_2, x_1)x_1$;

... ..

n) $x_n = z_n / \|z_n\|$, где $z_n = y_n - \sum_{i=1}^{n-1} (y_n, x_i)x_i$;

... ..

Пример 3.7. Полиномы Лежандра (отнормированные на единицу) получают после применения процедуры ортогонализации к линейно независимой системе векторов

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \dots, \quad x^k, \dots$$

Рассмотрим теперь задачу о наилучшем приближении заданного вектора рядом Фурье. Пусть E – некоторое бесконечномерное нормированное пространство и $V \subset E$ – его конечномерное подпространство. Пусть $z \in E$ – фиксированный элемент пространства E , который мы будем называть искомым элементом (например, функция, которую требуется найти как решение некоторой задачи). Любой алгоритм, вычислительная процедура, реализуемые за конечный промежуток времени, всегда имеют дело с некоторым конечным (возможно, очень большим) числом элементов. Поэтому приближенные к z всегда принадлежат какому-либо конечномерному пространству V . формализуя сказанное, мы ставим задачу приблизить наилучшим в некотором смысле образом элемент $z \in E$ элементами $y \in V$:

$$f(y) = \|z - y\|, \quad \exists y_0 \in V \mid f(y_0) = \min_{y \in V} f(y)$$

Известно, что в произвольном нормированном пространстве такой элемент существует. Если E – евклидово пространство, то такой элемент – единственный. А именно пусть $x_i \in V, i = 1, 2, \dots, n, n = \dim V$, – некоторый ортонормированный базис пространства V . Тогда $y_0 = \sum_{i=1}^n (z, x_i)x_i$.

Упражнения

1. Доказать, что тригонометрический базис является ортонормированным в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Написать явные выражения для коэффициентов ряда Фурье в этом случае.
2. Вывести выражения для первых 4-5 полиномов Лежандра, используя процедуру ортогонализации для системы линейно независимых функций $x^n, n = 0, 1, 2, \dots$
3. Записать наилучшее приближение функции $e^x \in L_2[-1, 1]$ элементами подпространства $V_n \subset L_2[-1, 1]$, где V_n – множество полиномов степени не выше n . Сравнить данное приближение с приближением, которое получается ограничением степенного ряда для функции e^x степенями не выше n .

Литература: [3, 4].

Лекция 4

Линейные операторы в евклидовых пространствах

Линейные операторы, действующие из одного пространства в другое. Важнейшие случаи: линейные функционалы, линейные операторы, действующие в данном пространстве. Примеры. Сопряженное пространство. Лемма Рисса. Собственные векторы и собственные числа оператора. Обратный оператор. Сопряженный оператор. Симметрические (эрмитовы) и самосопряженные операторы. Унитарные операторы. Ограниченные операторы. Норма оператора. Примеры.

В формализованном виде задачи, которые мы рассматриваем, в большинстве случаев могут быть записаны так: $\hat{A}x = z$, где z – известный элемент некоторого функционального пространства H_1 , x – неизвестный элемент некоторого пространства H_2 . Символом \hat{A} здесь обозначена функция, отображающая некоторую область $D_A \subset H_1$ в пространство H_2 . Такую функцию в общем случае называют *оператором*. Обозначения $\hat{A}x$ и $\hat{A}(x)$ мы будем считать эквивалентными. Множество D_A называют *областью определения* оператора, а множество $Ran(A) \subset H_2$, определенное как $Ran(A) = \hat{A}(D_A)$, – *областью его значений*. Множество $Ker(A) \subset D_A$, такое, что $Ax = 0 \forall x \in Ker(A)$, называют *ядром* оператора $\hat{A}x$. Если пространства H_1 и H_2 – линейные векторные пространства над полем комплексных (\mathbb{C}) либо вещественных (\mathbb{R}) чисел, то можно говорить о *линейных операторах*. Оператор \hat{A} называется линейным, если выполняется условие:

$$\hat{A}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1\hat{A}\psi_1 + \lambda_2\hat{A}\psi_2, \quad \forall \psi_{1,2} \in D_A, \quad \forall \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}).$$

Как правило, мы будем рассматривать линейные операторы. Заметим, что в случае линейных операторов множество $Ker(A)$ само является подпространством. В том случае если $H_2 = \mathbb{C}(\mathbb{R})$, то соответствующие операторы называют комплексными (вещественными) функционалами. Так же, как операторы, функционалы могут быть линейными или нелинейными. Пусть H – некото-

рое линейное векторное (не обязательно гильбертово) пространство. Обозначим H' множество линейных функционалов, определенных на векторах пространства H . Можно показать, что множество H' само является линейным векторным пространством. Такое пространство называется *сопряженным* к пространству H .

Важным для нашего дальнейшего рассмотрения случаем является случай $H_1 = H_2 = H$, причем пространство H является гильбертовым пространством. В этом случае $H = H'$. Данное утверждение носит название *Леммы Рисса*.

Пример 4.1. Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$. Тогда каждая функция $\phi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ определяет линейный функционал

$$l_\phi(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \overline{\phi(x)} dx, \quad \forall \psi(x) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Лемма Рисса говорит о том, что других (непрерывных) линейных функционалов на пространстве $L_2(\mathbb{R})$ нет.

Пример 4.2. Рассмотрим оператор $\hat{\mathcal{L}} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$. Этот оператор можно рассматривать как оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ при условии, что он определен на области $D_A \subset L_2(\mathbb{R})$, которая состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций $\psi(x)$, таких, что $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 |\psi(x)|^2 dx < \infty$.

Если для некоторого оператора \hat{A} два различных элемента $x_1, x_2 \in D_A$ отображаются в два различных элемента $y_1, y_2 \in \text{Ran}(A)$, то определен обратный оператор, обозначаемый как \hat{A}^{-1} . В случае линейного оператора необходимым и достаточным условием существования обратного оператора является условие $\text{Ker}(A) = 0$.

Пример 4.3. Рассмотрим конечномерное пространство E_n ; каждая квадратная матрица A размерности $n \times n$ задает линейный оператор. Известно, что СЛАУ $Ax = 0$, где $x \in E_n$ имеет нетривиальное решение (т.е. соответствующий оператор имеет ненулевое ядро) тогда и только тогда, когда $\det A = 0$. Условие $\det A \neq 0$, в свою очередь, является необходимым и достаточным для существования обратной матрицы A^{-1} .

Важнейшими для нашего дальнейшего рассмотрения являются такие объекты, как собственные векторы (СВ) и собственные числа (СЧ) оператора.

Определение 4.1. Пусть задан некоторый оператор \hat{A} , определенный в области $D_A \subset E$, где E – евклидово пространство. Решение $\psi \in D_A$ уравнения $\hat{A}\psi = \lambda\psi$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, называется собственным вектором оператора \hat{A} . Число λ , при котором такое решение существует, называется собственным числом.

Одному СЧ могут соответствовать несколько (возможно, бесконечное число) СВ. Такие СЧ называются *вырожденными*. Часто вместо терминов СВ и СЧ употребляют эквивалентные: собственные функции (СФ), собственные значения (СЗ). Термин СФ употребляется, если рассматриваются операторы, действующие в функциональных пространствах.

Рассмотрим теперь понятие *сопряженного оператора*. Пусть E – некоторое евклидово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , и пусть \hat{A} – некоторый действующий в нем линейный оператор. Предположим, что $D_A = E$. Заметим, что $E = \text{Ran}(A) \oplus \text{Ker}(A)$. Пусть $\text{Ker}(A) = 0$. В этом случае оператор \hat{A}^+ , сопряженный оператору \hat{A} , определяется наиболее просто – равенством $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y)$, $x, y \in E$. Такая ситуация реализуется, например, когда E – конечномерное пространство и оператор задан квадратной невырожденной матрицей. В общем случае бесконечномерных евклидовых пространств, когда $D_A \subset E$, определение сопряженного оператора более сложное. Равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y)$ выполняется лишь для векторов $x \in D_A$ и $y \in D_{A^+}$, где D_{A^+} – область определения сопряженного оператора. Если $D_A \subset D_{A^+}$ и при этом $\hat{A}x = \hat{A}^+x$, $\forall x \in D_A$, то такой оператор называют *симметрическим (эрмитовым)*. Если при этом $D_A = D_{A^+}$, то такой оператор называют *самосопряженным*. Определенный на всем пространстве E оператор \hat{U} , такой, что $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$, называют *унитарным*. Преобразование пространства E унитарным оператором сохраняет скалярное произведение двух любых векторов, поскольку выполняется $(\hat{U}x, \hat{U}y) = (x, y)$.

Рассмотрим теперь понятие *ограниченного оператора*.

Определение 4.2. Оператор \hat{A} , определенный в некоторой области $D_A \subset E$, где E – евклидово пространство, называется *ограниченным*, если

$$\exists C > 0, \quad \left| \quad \forall x \in D_A \quad \|\hat{A}x\| \leq C\|x\|. \right.$$

Наименьшее из чисел C , фигурирующих в данном определении, называется *нормой* оператора и обозначается $\|\hat{A}\|$. Это можно записать так:

$$\|\hat{A}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\hat{A}x\|. \quad (4.1)$$

Пример 4.4. Пусть E – n -мерное евклидово пространство, оператор \hat{A} задается матрицей с элементами A_{ij} размерности $n \times n$. Тогда $\|\hat{A}\| = \max_{i,j} |A_{ij}|$.

Рассмотрим теперь более сложный

Пример 4.5. Пусть $E = L_2([a, b])$, а интегральный оператор \hat{K} , заданный на всем пространстве $L_2([a, b])$, определяется формулой

$$\hat{K}f = \int_a^b K(x, y)f(y)dy; \quad f(x) \in L_2(\mathbb{R}), \quad |K(x, y)| \leq M, \forall x, y \in [a, b].$$

В этом случае

$$\|\hat{K}f\|^2 = (\hat{K}f, \hat{K}f) = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y)f(y)dy \right)^2 dx.$$

Считая, что ядро $K(x, y)$ при всяком $x \in [a, b]$ задает некоторую функцию $K(\cdot, y) \in L_2([a, b])$, и используя неравенство Коши – Буняковского – Шварца, имеем

$$\left(\int_a^b K(x, y)f(y)dy \right)^2 \leq \int_a^b K^2(x, y)dy \int_a^b f^2(y)dy = \int_a^b K^2(x, y)dy \cdot \|f\|^2.$$

Отсюда в пространстве $L_2([a, b])$ $\|\hat{K}\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, y)dxdy}$.

Упражнения

1. Рассмотреть пространство $L_2(\mathbb{R})$ и действующий в нем оператор $\hat{A} = \frac{d}{dx}$. Найти: область определения D_A , сопряженный оператор \hat{A}^+ .
2. Оценить норму интегрального оператора \hat{K} (см. пример 4.5) в пространстве $C([a, b])$.
3. Доказать, что оператор $\hat{x} = x$ (оператор умножения на x) не является ограниченным в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.
4. Доказать, что оператор $\exp(i\hat{A})$, где \hat{A} – самосопряженный оператор, является унитарным.

Литература: [3, 4].

Лекция 5

Линейные задачи в конечномерных пространствах

Особенности решения линейных задач в конечномерных евклидовых пространствах. Нормы матриц. Число обусловленности матрицы $\text{Cond}(A)$, его смысл. Решение СЛАУ при плохо обусловленных матрицах коэффициентов как пример некорректной задачи.

Рассмотрим приложения введенных выше понятий при решении проблем, возникающих при нахождении решений СЛАУ $Ax = z$ высокого порядка. Здесь $A = A_{ij}$ – матрица размерности $n \times n$ (число n мы считаем достаточно большим – требующим численного решения рассматриваемой СЛАУ), x – искомый вектор n -мерного евклидова пространства E_n , z – некоторый заданный вектор данного пространства. На практике правая часть нам всегда известна с некоторой погрешностью $\delta z = (\delta z_1, \dots, \delta z_n)$, где z_i – компоненты вектора z . В качестве относительной погрешности обычно принимают величину $\epsilon_z = \|\delta z\|/\|z\|$. Элементы матрицы A так же, как правило, заданы с некоторой (относительной) погрешностью $\epsilon_A = (\max_{i,j} |\delta A_{ij}|)/\|A\|$. При этом естественной (и практически востребованной) выглядит постановка задачи нахождения искомого вектора x с погрешностью $\epsilon_x \simeq \max(\epsilon_z, \epsilon_A)$. Для невырожденных матриц имеем: $x = A^{-1}z$. В чем же проблема? Она заключается в том, что на практике при больших n часто приходится иметь дело с ”почти” вырожденными матрицами, т. е. такими матрицами A , для которых $\det A \simeq 0$. Однако тот факт, что определитель матрицы решаемой СЛАУ ”почти” нулевой, не всегда означает, что погрешность ϵ_x будет значительно больше, чем величина $\max(\epsilon_z, \epsilon_A)$.

Мерой, определяющей отклонение величины ϵ_x от величин ϵ_z и ϵ_A , является *число обусловленности* $\text{Cond}(A)$ матрицы A , которое определяется как

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Пусть, например, $\delta A_{ij} = 0$. Из определения нормы имеем неравенства

$$\|z\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta z\|.$$

В итоге находим $\epsilon_x \leq \text{Cond}(A) \cdot \epsilon_z$. Пусть теперь $\delta z = 0$, $\delta A_{ij} \neq 0$. Имеем $z = Ax$, $z = (A + \delta A)(x + \delta x)$, откуда находим $\delta x = -A^{-1}\delta A(x + \delta x)$. Отсюда получаем, что

$$\epsilon_x \simeq \frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \text{Cond}(A) \cdot \epsilon_A.$$

Матрицы, для которых $\text{Cond}(A) \gg 1$, называют *плохо обусловленными*.

Таким образом, мы видим, что плохо обусловленные матрицы коэффициентов приводят при решении СЛАУ к потере устойчивости. Это означает, что мы имеем здесь пример некорректной задачи. Решение таких задач есть всегда некоторый компромисс между устойчивостью (в данном случае) и точностью. Покажем это на примере решения СЛАУ, если (плохо обусловленная) невырожденная $n \times n$ матрица A является эрмитовой, т. е. такой, для элементов которой выполнено соотношение $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Известно, что СЧ λ_i , $i = 1, \dots, n$ такой матрицы вещественны, а собственные векторы w_i , $i = 1, \dots, n$ взаимно ортогональны. В этом случае $\text{Cond}(A) = |\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$ (см. упражнение). Без ограничения общности можно считать, что $\|w_i\| = 1$, так что система собственных векторов w_i образует в пространстве E ортонормированный базис. Поэтому $\forall x \in E$ имеем $x = \sum_{i=1}^n c_i w_i$, где $c_i = (x, w_i)$. Подставляя данное разложение для векторов x и z в рассматриваемую СЛАУ $Ax = z$, имеем

$$\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^n b_i w_i, \quad c_i = (x, w_i), \quad b_i = (z, w_i).$$

Используя свойства базиса w_i , находим: $c_i = b_i/\lambda_i$. Здесь мы наглядно видим, чем вызвана потеря устойчивости: наличием в спектре матрицы A малых СЧ. В этом случае малые погрешности в определении таких СЧ (напомним: матрица A может быть задана приближенно) приводят к большим погрешностям соответствующих коэффициентов c_i в разложении искомого вектора x . Один из способов решения данной проблемы состоит в следующем. Рассмотрим вместо системы $Ax = z$ систему $(\varepsilon I + A)x = z$, где I – единичная матрица и ε – некоторое вещественное число. Интуитивно понятно, что при достаточно малых ε новая система мало отличается от исходной. Действительно, для коэффициентов $c_i = (x, w_i)$ теперь имеем $c_i = b_i/(\varepsilon + \lambda_i)$. Таким образом,

малый параметр ε оказывает влияние именно на малые (т. е. "плохие") СЧ, частично исправляя ситуацию. Выбор конкретного значения числа ε зависит от задачи и определяет тот самый компромисс, о котором говорилось выше.

Упражнения

1. Доказать, что для эрмитовой положительно определенной матрицы справедливо $\text{Cond}(A) = |\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$.
2. Привести пример хорошо обусловленной матрицы с малым определителем.
3. Пусть $Ax = z$ – СЛАУ с плохо обусловленной эрмитовой матрицей A . Пусть δ_λ – точность, с которой можно определить СЧ матрицы A (считаем их известными), а δ_x – точность, с которой надо найти искомый вектор x . Каким необходимо выбрать число ε в методе, изложенном в конце лекции?

Литература: [5].

Лекция 6

Компактные операторы и связанные с ними некорректные задачи

Компактные (вполне непрерывные) операторы. Примеры. Спектр компактного оператора в гильбертовом пространстве. Общее представление компактного оператора в виде $K = K_1 + K_2$, где K_1 – конечномерный оператор, а K_2 – оператор со сколь угодно малой нормой. Основные положения теории интегральных уравнений Фредгольма. Свойства собственных значений интегрального оператора задачи как причина некорректности при решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

В конце предыдущей лекции мы рассмотрели появление некорректности, возникающее при решении СЛАУ с плохо обусловленной матрицей коэффициентов. При анализе данной задачи мы использовали свойства матриц – линейных операторов в конечномерном евклидовом пространстве. В бесконечномерных пространствах ситуация существенно усложняется. В данной лекции мы познакомимся с классом операторов в бесконечномерных пространствах, по свойствам наиболее близких к операторам в конечномерных пространствах. Это *компактные*, или *вполне непрерывные*, операторы.

Определение 6.1. *Множество $M \subset H$ метрического пространства H называется компактным, если любая последовательность $x_n \in M$, $n = 1, 2, \dots$ содержит сходящуюся подпоследовательность.*

В конечномерных пространствах компактность следует из ограниченности множества (теорема Больцано – Вейерштрасса). В бесконечномерных пространствах это не так. Например, пусть $x_n \in H$ – некоторый ортонормированный базис бесконечномерного гильбертова пространства H . Поскольку $\|x_n\| = 1$, $\forall n = 1, 2, \dots$, то данное множество ограничено. Поскольку $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$ при $n \neq m$, то никакой сходящейся подпоследовательности

из последовательности x_n выделить нельзя.

Определение 6.2. *Оператор \hat{K} , действующий в некотором гильбертовом пространстве H , называется компактным (вполне непрерывным), если для любого ограниченного множества $D \subset H$ множество $M = \hat{K}(D)$ является компактным.*

Свойством компактности обладают далеко не все, даже самые простые, операторы. Так, единичный оператор \hat{I} в бесконечномерном пространстве H таковым не является. Важнейшим для нас примером служит интегральный оператор $\hat{K}f = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$, рассмотренный в примере 4.5. Это компактный оператор; к данному факту мы вернемся позже, а сейчас обсудим его спектр. Интегральный оператор \hat{K} с ядром $K(x, y)$ является самосопряженным, если ядро удовлетворяет свойству $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ (см. упражнение). Как правило, мы будем рассматривать далее только такие операторы. Свойства спектра самосопряженных компактных операторов определяет следующая

Теорема 6.1. *Пусть \hat{K} – самосопряженный компактный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Тогда в пространстве H существует полный ортонормированный базис x_n , $n = 1, 2, \dots$, такой, что $\hat{K}x_n = \lambda_n x_n$, причем $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Любое СЧ $\lambda_n \neq 0$ имеет конечную кратность.*

Важным для дальнейшего частным случаем являются самосопряженные интегральные операторы с вырожденным ядром.

Определение 6.3. *Пусть H – некоторое (функциональное) гильбертово пространство. Интегральный оператор \hat{K} , действующий в H , называется оператором с вырожденным ядром, если его ядро $K(x, y)$ представимо в виде*

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x)\overline{f_i(y)}, \quad f_i(x) \in H, \quad i = 1, \dots, N.$$

Без ограничения общности функции $f_i(x) \in H$ можно считать линейно независимыми (см. упражнение). Легко убедиться, что для вырожденного ядра спектральное множество $\{\lambda_n\}$, о котором говорится в теореме 6.1, содержит только конечное число точек $\lambda_n \neq 0$. Множество $\text{Ran } \hat{K}$ в данном случае – это конечномерное подпространство $V \subset H$, образованное набором $f_i(x)$. Сам оператор \hat{K} при конечном N представим в виде $\hat{K} = \hat{A}\hat{P}_V$, где \hat{P}_V –

проекционный оператор на подпространство $V \subset H$, а оператор \hat{A} – некоторый конечномерный оператор (т. е. матрица), действующий в пространстве V . Несложно доказать, что ядро $K(x, y)$ в вырожденном случае представимо в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}, \quad (6.1)$$

где $\varphi_i(x)$ – ортонормированная система собственных функций и λ_i – отвечающие данным функциям собственные значения. Важным является факт, что формула (6.1) справедлива в общем случае для произвольного самосопряженного компактного оператора, когда $N = \infty$ и $V = H$. С помощью данного разложения может быть доказана следующая

Теорема 6.2. Пусть \hat{K} – некоторый компактный оператор в гильбертовом пространстве H . Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$, такое, что

$$\hat{K} = \hat{K}_N + \hat{K}_\epsilon,$$

где \hat{K}_N – конечномерный оператор, действующий в N -мерном пространстве $V_N \subset H$ и $\|\hat{K}_\epsilon\| \leq \epsilon$.

Эта теорема позволяет, в частности, сводить решение интегральных уравнений к решению СЛАУ. Действительно, решение на практике всегда надо найти с какой-либо заранее заданной точностью. Это позволяет выбрать число N (или ϵ) так, что последним слагаемым в формуле теоремы можно пренебречь. Конечно, в каждом конкретном случае такая процедура нуждается в дополнительных исследованиях и обоснованиях.

Эти и другие свойства компактных операторов играют важную роль при решении интегральных уравнений Фредгольма: уравнений первого рода $\hat{K}y = f$ и уравнений второго рода $y = \mu \hat{K}y + f$, где $f = f(x)$ – известная функция, а $y = y(x)$ – искомая. Параметр μ , при котором уравнение $y = \mu \hat{K}y$ имеет нетривиальные решения, называют *характеристическим числом* оператора \hat{K} . Очевидно, что при $\lambda_n \neq 0$ выполняется $\mu = 1/\lambda$. Использование характеристических чисел (вместо собственных) является традиционным в теории интегральных уравнений. Тот факт, что решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода приводит к некорректной задаче, мы рассматривали в первой лекции.

Важнейшим результатом в теории интегральных уравнений является

Теорема 6.3 (альтернатива Фредгольма). Для уравнения $y = \mu \hat{K}y + f$ имеются две взаимоисключающие возможности:

- 1) либо число μ не является характеристическим числом оператора \hat{K} , и тогда данное уравнение имеет одно и только одно решение при любой правой части $f = f(x)$;
- 2) либо число μ является характеристическим числом оператора \hat{K} , и тогда уравнение $y = \mu \hat{K}y + f$ разрешимо тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ортогональна всем решениям сопряженного уравнения $z = \bar{\mu} \hat{K}^+ z$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\hat{K}y = f,$$

где известная $f = f(x)$ и неизвестная $y = y(x)$ функции есть элементы некоторого функционального пространства H . Пусть w_n – образующие в пространстве H базис собственные функции оператора \hat{K} , а λ_n – собственные числа. Напомним, свойства СФ и СЧ самосопряженных компактных операторов определены теоремой 6.1. Запишем разложения функций f и y по базису w_n :

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n w_n, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k w_k.$$

Подставив данные разложения в интегральное уравнение, имеем для неизвестной функции

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i} w_i. \quad (6.2)$$

Но согласно теореме 6.1, для СЧ имеем $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. А это означает, что при больших номерах n даже малые отклонения $\delta\beta_n$ коэффициентов разложения β_n правой части f приводят к сколь угодно большим (при $n \rightarrow \infty$) отклонениям в коэффициентах разложения β_n/λ_n искомой функции y . Таким образом, причина некорректности здесь – это спектральные свойства оператора \hat{K} . Естественная гипотеза, возникающая при анализе формулы (6.2), – это предположение о том, что возможно, например, ограничиться конечным числом слагаемых в правой части (6.2). К чему это приводит, а также другие способы борьбы с некорректностью в случае задач с компактными операторами мы рассмотрим в следующей лекции.

Упражнения

1. Показать, что в определении 6.3 функции $f_i(x) \in H$ можно считать линейно независимыми.
2. Решить в общем виде интегральное уравнение Фредгольма первого рода с вырожденным ядром.
3. Доказать, что прямая задача для интегрального уравнения $\hat{K}y = f$ (функция $y = y(x)$ является известной) корректна.

Литература: [4, 6].

Лекция 7

Методы решения некорректных задач, связанных с интегральными уравнениями

Некорректность при решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода в теории восстановления временного сигнала (изображения). Понятие о вытянутых сфероидальных функциях. Способы решения. Передаточная функция. Формальное сведение интегрального уравнения теории восстановления изображения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и применение метода итераций. Алгоритм Ландвебера.

В конце предыдущей лекции мы рассмотрели интегральное уравнение Фредгольма первого рода $\hat{K}y = f$, где $f = f(x)$ известная и $y = y(x)$ неизвестная функции, в общем виде. Мы установили также, что причиной некорректности такой задачи являются общие свойства спектра компактных операторов. В данной лекции мы рассмотрим конкретную и имеющую практическую ценность задачу, приводящую к такого рода проблемам.

Пусть $y = y(t)$ – некоторый временной сигнал (т. е. функция, зависящая от времени), который подается на вход устройства, осуществляющего частотную фильтрацию данного сигнала. На выходе мы имеем сигнал $f = f(t)$, который мы можем измерить с некоторой погрешностью $\delta f = \delta f(t)$. Задача: получить как можно более подробную информацию (т. е. определить с наиболее возможной точностью) исходный сигнал $y(t)$. Заметим, что на практике любое устройство, через которое проходит зависящий от времени сигнал, осуществляет частотную фильтрацию. Характеристикой такой фильтрации служит функция $\rho(\omega) = F(\omega)/Y(\omega)$, где $F(\omega)$ и $Y(\omega)$ – амплитуды спектральных составляющих с частотой ω функций $f(t)$ и $y(t)$ соответственно. Имеем:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Рассмотрим идеализированный случай частотной фильтрации, когда $\rho(\omega) = \theta(\omega_0 - |\omega|)$, где $\theta(\omega)$ – функция Хевисайда. Это означает, что все частоты интервала $[-\omega_0, \omega_0]$ пропускаются полностью, другие частоты полностью подавляются (так как мы используем комплексное преобразование Фурье, то мы рассматриваем как положительные, так и отрицательные значения частот). Таким образом, выполняется соотношение

$$F(\omega) = \theta(\omega_0 - |\omega|)Y(\omega). \quad (7.1)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем интегральное уравнение

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0(t - t')}{t - t'} y(t') dt'.$$

Поскольку измерения всегда происходят в течение конечного промежутка времени $2T$, заменим в интеграле пределы интегрирования на конечные ($\pm T$). Такое ограничение области интегрирования означает также замену равенства (7.1) на более сложное. На следствиях, вытекающих из такой замены (в том числе на вопросах, связанных с единственностью), мы в данном курсе останавливаться не будем.

Далее, делая замену переменных $t \rightarrow \tau$, $t = T\tau$ и вводя обозначение $T\omega_0 = \varkappa$, находим

$$\hat{K}_\varkappa y = f, \quad (\hat{K}_\varkappa y)(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin \varkappa(\tau - \tau')}{\tau - \tau'} y(\tau') d\tau'. \quad (7.2)$$

Заметим, что уравнение, аналогичное рассматриваемому, получается в теории восстановления изображения, искаженного за счет прохождения светового сигнала через отверстие конечного диаметра. Исследуем уравнение (7.2) более подробно. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\hat{K}_\varkappa w_n = \lambda_n w_n.$$

Можно показать, что для данного интегрального оператора $\lambda_n > 0$ (это следует из того, что Фурье-образ ядра оператора \hat{K}_\varkappa положительно определен). Мы будем рассматривать СФ w_n , нормированные специальным образом:

$$\int_{-1}^1 w_n(x) w_m(x) dx = \lambda_n \delta_{nm}. \quad (7.3)$$

Такие функции хорошо известны; они называются *вытянутыми сфероидальными функциями*. Они обладают свойством двойной ортогональности: кроме

свойства (7.3), выполняется свойство ортогональности на всей оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_n(x)w_m(x)dx = \delta_{nm}. \quad (7.4)$$

Данные функции и отвечающие им собственные числа хорошо табулированы. Таким образом, формально решение исследуемого уравнения $f = \hat{K}_x y$ записывается в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i} w_n(x), \quad c_i = \int_{-1}^1 w_n(x)f(x)dx. \quad (7.5)$$

Как мы знаем из прошлой лекции, $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для компактных операторов в общем случае. Здесь такая ситуация предстает в наиболее "неудобном" виде: вплоть до значений $n \simeq \varkappa$ имеет место $\lambda_n \simeq 1$, далее наблюдается резкое уменьшение значений СЧ, так, что $\lambda_n \simeq 0$ (поведение типа единичной ступеньки).

Рассмотрим далее методы борьбы с данным (весьма сильным!) проявлением некорректности. Методы, рассмотренные ниже, справедливы для любых интегральных уравнений Фредгольма первого рода $f = \hat{K}y$ с самосопряженным оператором \hat{K} , поэтому их изложение мы будем вести в общем виде. Естественное обобщение точного решения (7.5) – это записать его в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i c_i w_n(x), \quad c_i = \int_{-1}^1 w_n(x)f(x)dx, \quad (7.6)$$

отличающемся от (7.5) тем, что вместо множителя $1/\lambda_i$ введена некоторая "передаточная функция" Ω_i . Требования к данной функции противоречивы: с одной стороны, она должна мало отличаться от множителя $1/\lambda_i$ при $i < N$ для некоторого N (чтобы обеспечить заданную точность решения) и, с другой стороны, значительно отличаться от данного множителя при $i > N$ (чтобы обеспечить устойчивость). Противоречие состоит в том, что для точности решения N должно быть как можно больше, а для устойчивости - как можно меньше. В этой связи большую роль играет выбор Ω_i при $i > N$. Рассмотрим различные варианты.

1. Простейший вариант решения данной задачи – положить $\Omega_i = 1/\lambda_i$ при $i \leq N$ и $\Omega_i = 0$ при $i > N$. Для рассмотренной выше задачи о преобразовании временного сигнала естественно выбрать $N \simeq \varkappa$. Однако данный метод слишком прост и никак не учитывает составляющие решения, отвечающие

слагаемым в (7.5) с большими значениями i . Проблема устойчивости здесь решена, проблема точности – нет.

2. Рассмотрим метод построения передаточной функции Ω_i при помощи алгоритма Ландвебера. Данный метод основан на формальном сведении уравнения $f = \hat{K}y$ к интегральному уравнению второго рода. Сформулируем шаги данного алгоритма.

1. Прибавим к левой и правой частям уравнения $f = \hat{K}y$ (искомое) решение y . В итоге получим уравнение $y = f + (\hat{I} - \hat{K})y$. Решением данного (эквивалентного исходному) уравнения является формальный ряд

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} (\hat{I} - \hat{K})^i f. \quad (7.7)$$

Данный ряд может быть получен при помощи итерационной процедуры

$$y^{(n+1)} = f + (\hat{I} - \hat{K})y^{(n)}, \quad y^{(0)} = f.$$

Можно показать, что ряд сходится, если исходное уравнение разрешимо.

2. Обрываем ряд (7.7) на конечном числе слагаемых:

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^n (\hat{I} - \hat{K})^i f. \quad (7.8)$$

3. Подставим в правую часть (7.8) разложение $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i$, где w_i – СФ оператора \hat{K} и $c_i = (f, w_i)$. В итоге находим

$$y^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \sum_{i=0}^n (1 - \lambda_k)^i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left[1 - (1 - \lambda_k)^{(n+1)} \right] c_k w_k. \quad (7.9)$$

Таким образом, мы получили приближенное решение $y^{(n+1)} \simeq y$, которое фактически означает использование передаточной функции

$$\Omega_k^{(n)} = \frac{1}{\lambda_k} \left[1 - (1 - \lambda_k)^{(n+1)} \right].$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $|\lambda_k| < 1$. Поэтому мы видим, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется $\Omega_k \rightarrow 1/\lambda_k$, так что решение стремится к точному. Еще раз подчеркнем, что выбор числа n в данной формуле – это всегда компромисс между точностью и устойчивостью.

Упражнения

1. Пусть $\lambda_k = 1/k^3$. Построить графики зависимости от k рассмотренных в данной лекции вариантов передаточной функции Ω_k . Для передаточной функции $\Omega_k^{(n)}$ алгоритма Ландвебера рассмотреть несколько значений n .
2. Пусть \hat{K} – интегральный оператор, заданный в пространстве $L_2([-1, 1])$ по формуле (6.1), где $\lambda_n = (3n - 2)/n^3$, $n = 1, 2, \dots$, а функции $\varphi_i(x)$ – полиномы Лежандра порядка i (см. пример 3.6). Рассмотреть интегральное уравнение $\hat{K}y = f$, где правая часть $f = f(x)$ задана с точностью $\delta f = \delta f(x)$. Оценить точность решения при различных выборах передаточной функции.

Литература: [6, 7].

Лекция 8

Прямая и обратная задача Штурма – Лиувилля

Спектральные свойства оператора Штурма – Лиувилля. Решения Йоста. Матрица перехода. Аналитические свойства решений Йоста и коэффициентов матрицы перехода. Дискретный и непрерывный спектры. Данные рассеяния. Прямая и обратная задача Штурма – Лиувилля (формулировка). Однозначность восстановления потенциала по данным рассеяния (без доказательства). Безотражательные потенциалы.

В этой лекции мы обсудим спектральную задачу (прямую и обратную) Штурма – Лиувилля. Данная задача имеет разнообразные приложения, как практические, так и теоретические: некоторые из них мы обсуждали во вводной лекции. Начатые там обсуждения мы продолжим позже, в данной лекции мы рассмотрим основные теоретические понятия, связанные с задачей Штурма – Лиувилля на вещественной оси \mathbf{R} . Напомним, что мы рассматриваем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + u(x)\psi(x) = \lambda\psi(x). \quad (8.1)$$

Предполагается, что вещественная, кусочно-непрерывная и определенная на всей вещественной оси \mathbf{R} функция $u(x)$ убывает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени x . *Прямая задача* формулируется здесь следующим образом: дана функция $u(x)$, определить *данные рассеяния*. К определению последних мы сейчас и переходим. Определим вначале *решения Йоста* уравнения (8.1). При определении данных решений мы полагаем в (8.1) $\lambda = k^2$.

Определение 8.1. *Базисы $(\psi_1(x, k), \psi_2(x, k))$ и $(\varphi_1(x, k), \varphi_2(x, k))$, определенные асимптотиками*

$$\begin{aligned} \psi_m(x, k) &\rightarrow \exp((-1)^m ikx), & x &\rightarrow +\infty, & m &= 1, 2, \\ \varphi_m(x, k) &\rightarrow \exp((-1)^m ikx), & x &\rightarrow -\infty, & m &= 1, 2, \end{aligned}$$

называются решениями Йоста уравнения (8.1).

Заметим, что из данного определения следуют равенства

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2(x, -k), \quad \psi_1(x, k) = \psi_2(x, -k).$$

Поскольку любые два базиса линейного ОДУ связаны линейным преобразованием, мы можем записать:

$$\varphi_m(x, k) = \sum_{n=1}^2 T_{mn}(k) \psi_n(x, k), \quad m = 1, 2.$$

Матрица $T(k)$ называется *матрицей перехода*. Из факта вещественности функции $u(x)$ следуют равенства (здесь k – вещественное число):

$$\varphi_1(x, k) = \overline{\varphi_2(x, k)}, \quad \psi_1(x, k) = \overline{\psi_2(x, k)},$$

поэтому матрица перехода $T(k)$ представима в виде

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем обозначать $\varphi(x, k) \equiv \varphi_1(x, k)$, $\psi(x, k) \equiv \psi_1(x, k)$ и вместо функций φ_2 и ψ_2 использовать функции $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ соответственно. Как промежуточный итог можем записать соотношение

$$\varphi(x, k) = a(k)\psi(x, k) + b(k)\overline{\psi}(x, k).$$

Поскольку для вронскиана $W[\cdot, \cdot]$ в каждом базисе выполняются равенства $W[\varphi, \overline{\varphi}] = W[\psi, \overline{\psi}] = 2ik$, справедливо соотношение

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1. \quad (8.2)$$

Вместо величин $a(k)$ и $b(k)$ обычно используют величины $t(k) = a^{-1}(k)$ и $r(k) = b(k)/a(k)$, называемые соответственно *коэффициентом прохождения* и *коэффициентом отражения*. Данная терминология происходит из квантовой теории рассеяния, в которой уравнение (8.1) имеет смысл уравнения Шредингера и описывает, в частности, рассеяние квантовомеханической частицы, т. е. некоторой волны, на потенциале $u(x)$. Для величин $t(k)$ и $r(k)$ равенство (8.2) переписется, очевидно, в виде

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1. \quad (8.3)$$

Оказывается, что функция $a(k)$ имеет аналитическое продолжение в верхнюю комплексную полуплоскость \mathbb{C}^+ переменной k всюду, за исключением конечного числа точек на мнимой оси $k = i\kappa_n$, $\kappa_n > 0$, $n = 1, 2, \dots, N$, в которых функция $a(k)$ имеет простые полюсы. Можно доказать, что соответствующие данным значениям числа $\lambda_n = -\kappa_n^2$ являются точками *дискретного спектра* спектральной задачи (8.1), которые мы обсудим ниже. Функция $b(k)$ не имеет аналитического продолжения с вещественной оси. Зная точки дискретного спектра λ_n и коэффициент отражения $r(k)$, элементы $a(k)$ и $b(k)$ матрицы перехода можно полностью восстановить. На доказательстве данного факта мы останавливаться не будем.

Обсудим теперь дискретный спектр задачи (8.1). Собственное число $\lambda = \lambda_n$ является точкой дискретного спектра, если соответствующее данному числу решение $\psi_n(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Ввиду сказанного выше все числа λ_n являются отрицательными. В силу сделанного нами предположения об асимптотиках функции $u(x)$ функции $\psi_n(x)$ имеют асимптотики

$$\psi_n(x) \rightarrow c_n^\pm \exp(\mp \kappa_n x), \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $c_n^- = 1$, $n = 1, 2, \dots, N$, и обозначить далее $b_n = c_n^+$. Пусть числа λ_n занумерованы так, что $\lambda_n < \lambda_{n+1}$. В этом случае справедлива формула

$$b_n = (-1)^{n-1} |b_n|.$$

Определение 8.2. Множество $\mathcal{R} = (r(k); \lambda_1, |b_1|, \dots, \lambda_N, |b_N|)$ называется *данными рассеяния спектральной задачи (8.1)*.

Построение множества \mathcal{R} по заданной функции $u(x)$ составляет содержание *прямой задачи рассеяния* для спектральной задачи (8.1).

Обратной задачей рассеяния для уравнения (8.1) называют восстановление функции $u(x)$ по заданному множеству \mathcal{R} . Именно эта задача является некорректной. Решение обратной задачи может быть выполнено разными способами. Один из наиболее известных – это сведение данной задачи к интегральному уравнению типа Вольтерра – уравнению Гельфанда – Левитана – Марченко. Мы приведем (без доказательства) другой способ, основанный на изучении аналитических свойств в комплексной плоскости переменной k функций, введенных выше. Далее, используя интегральную формулу Коши, оказывается возможным записать замкнутую систему интегральных уравнений, решение которой и означает решение обратной задачи. Для того чтобы

записать данную систему, определим функции

$$\chi_-(x, k) = \psi(x, k) \exp(-ikx), \quad \chi_+(x, k) = \varphi(x, k) \exp(ikx).$$

Можно показать, что функция $\chi_+(x, k)$ аналитически продолжается в верхнюю (\mathbb{C}^+) комплексную полуплоскость переменной k , а функция $\chi_-(x, k)$ – в нижнюю (\mathbb{C}^-). Определим функцию

$$\Phi(x, k) = \begin{cases} \chi_+(x, k)/a(k), & \text{если } \operatorname{Im} k > 0, \\ \chi_-(x, k), & \text{если } \operatorname{Im} k < 0, \end{cases} \quad (8.4)$$

Введем обозначение

$$\Gamma_n(x) = \operatorname{Res}_{k=i\alpha_n} \Phi(x, k).$$

В итоге имеем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) = & \frac{b_n e^{-2\alpha_n x}}{a'(i\alpha_n)} \left\{ 1 + i \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m(x)}{\alpha_n + \alpha_m} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k') \bar{\chi}_-(x, k') e^{2ik'x}}{k' + i\alpha_n} dk' \right\}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\chi_-(x, k) = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m(x)}{k - \alpha_m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k') \bar{\chi}_-(x, k') e^{2ik'x}}{k' - k + i0} dk' \quad (8.6)$$

Данная система однозначно разрешима. Можно показать, что функция $u(x)$ восстанавливается по найденным из данной системы функциям $\Gamma_n(x)$, $\chi_-(x, k)$ по формуле

$$u(x) = -\frac{d}{dx} \left(2i \sum_{m=1}^N \Gamma_m(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) \bar{\chi}_-(x, k) e^{2ikx} dk \right). \quad (8.7)$$

”Потенциалы” – функции $u(x)$ – для которых $r(k) \equiv 0$, называют *безотражательными*. Очевидно, решение обратной задачи для таких потенциалов сводится к решению СЛАУ, к которому в случае $r(k) \equiv 0$ сводится интегральное уравнение (8.5).

Если на функцию $u(x)$ в уравнении (8.1) наложены иные условия, то спектр оператора Штурма – Лиувилля может быть устроен иначе. Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 8.1. Оператор $\hat{\mathcal{L}} = -d^2/dx^2$ в пространстве $L_2[\mathbf{R}]$ не имеет дискретного спектра. Собственные функции $\psi_{\pm}(x, k) = \exp(\pm ikx)$ непрерывного спектра отвечают собственным числам $\lambda = k^2$. Очевидно, в данном случае коэффициент отражения $r(k) \equiv 0$.

Пример 8.2. Оператор $\hat{\mathcal{L}} = -d^2/dx^2 + x^2$ в пространстве $L_2[\mathbf{R}]$ имеет только дискретный спектр. Действительно, сделав в уравнении (8.1) замену $\psi(x) = \exp(-x^2/2)\phi(x)$, получим уравнение

$$\phi'' - 2x\phi' + 2n\phi = 0, \quad 2n = \lambda - 1.$$

Данное уравнение имеет решения (с ростом на бесконечности не выше полиномиального) только при целых числах n . Такие соответствующие целым n решения, нормированные определенным образом, называются полиномами Эрмита и обозначаются $H_n(x)$. В итоге имеем для собственных функций и собственных чисел рассматриваемой задачи ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\psi_n(x) = \exp(-x^2/2)H_n(x), \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad \lambda_n = 2n+1.$$

Пример 8.2 демонстрирует ситуацию, в которой исследуемое уравнение имеет точное решение и спектр находится явно. Как правило, для нахождения дискретного спектра приходится использовать те или иные численные методы. В следующей лекции мы рассмотрим некоторые из них.

Упражнение

Найти и построить графически безотражательный потенциал для различных вариантов заданного набора $\mathcal{R} = (\lambda_1, |b_1|, \dots, \lambda_N, |b_N|)$. Для каждого варианта спектра найти число обусловленности матрицы СЛАУ, которая возникает при решении данной задачи.

Литература: [8, 9, 10].

Лекция 9

Методы решения спектральной задачи Штурма – Лиувилля

Примеры нахождения спектра оператора $-d^2/dx^2 + U(x)$ в случаях: а) $U(x)$ – симметричная прямоугольная "потенциальная яма" конечной глубины; б) $U(x)$ – симметричная "потенциальная яма" произвольной формы (конечной глубины). Метод "стрельбы", алгоритм компьютерной программы для нахождения дискретного спектра.

В этой лекции мы рассмотрим конкретные алгоритмы численного нахождения дискретного спектра оператора Штурма – Лиувилля $\hat{\mathcal{L}} = -d^2/dx^2 + u(x)$ в гильбертовом пространстве $L_2[\mathbf{R}]$. Коэффициентная функция $u(x)$ здесь – это кусочно-непрерывная функция с компактным носителем. На непрерывном спектре оператора $\hat{\mathcal{L}}$ (если он имеется) мы подробно останавливаться не будем. Заметим лишь, что собственные функции, отвечающие точкам данного спектра, являются обобщенными собственными функциями, принадлежащими к некоторому расширению исходного пространства $L_2[\mathbf{R}]$, называемому оснащением данного пространства. Данные вопросы выходят далеко за рамки нашего курса. Рассмотрение начнем с простого примера.

Пример 9.1. Пусть функция $u(x)$ имеет вид:

$$u(x) \equiv 0, \quad |x| > a, \quad u(x) = -U_0, \quad |x| \leq a, \quad a > 0, U_0 > 0.$$

Такая коэффициентная функция в рассматриваемой задаче называется "симметричной потенциальной ямой" (название происходит из квантовой механики). Поскольку функция $u(x)$ является четной ("симметричной"), то решения уравнения (8.1) – искомые СФ – являются либо четными, либо нечетными. Рассмотрим оба случая. Собственные числа данной спектральной задачи лежат в интервале $-U_0 < \lambda < 0$ (см. упражнение), так что мы введем далее обозначение $\lambda = -\kappa^2$.

1. Нечетные СФ. На отрезке $|x| \leq a$ с точностью до множителя, очевидно, имеем $\psi(x) = \sin(\sqrt{U_0 - \kappa^2}x)$. При $x > a$ имеем $\psi(x) = A \exp(-\kappa x)$ (напомним, $\psi(x) \in L_2[\mathbf{R}]$). Требование непрерывной дифференцируемости функции $\psi(x)$ в точке $x = a$ дает равенства

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{U_0 - \kappa^2}a) &= A \exp(-\kappa a), \\ (\sqrt{U_0 - \kappa^2}) \cos(\sqrt{U_0 - \kappa^2}a) &= -A\kappa \exp(-\kappa a). \end{aligned}$$

Данные равенства совместны, если число κ является решением трансцендентного уравнения:

$$\cot(\sqrt{U_0 - \kappa^2}a) = -\kappa/\sqrt{U_0 - \kappa^2}. \quad (9.1)$$

2. Для четных СФ аналогично находим

$$\tan(\sqrt{U_0 - \kappa^2}a) = \kappa/\sqrt{U_0 - \kappa^2}. \quad (9.2)$$

Решения трансцендентных алгебраических уравнений (9.1) и (9.2) дает все значения $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ дискретного спектра рассматриваемой задачи. Здесь очевидно $|b_n| = 1$.

В последней части лекции мы приведем алгоритм нахождения спектра задачи Штурма – Лиувилля с произвольной (с точностью до сделанных ниже ограничений) кусочно-непрерывной функцией $u(x)$, удовлетворяющей условиям

$$u(x) \equiv 0, \quad x \notin [a, b], \quad u(x) < 0, \quad x \in [a, b], \quad \max |u(x)| = U_0 < \infty.$$

Данный алгоритм известен под названием "метода стрельбы". Ниже приводятся шаги, необходимые для реализации данного алгоритма. Для простоты мы предположим также, что $\max |u(x)| = U_0$ достигается в некоторой точке $\zeta \in [a, b]$, а внутри интервалов (a, ζ) и (ζ, b) функция $u(x)$ не имеет локальных экстремумов.

1. Разбиваем вещественную ось \mathbf{R} на три подмножества:

$$1) \quad I : x < a; \quad 2) \quad II : x \in [a, b]; \quad 3) \quad III : x > b.$$

2. Выбираем некоторое натуральное число M и разбиваем множество II (интервал $[a, b]$) на M равных интервалов:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b,$$

вводим обозначение II_j для полуинтервалов $[x_{j-1}, x_j]$.

3. Заменяем функцию $u(x)$ на подмножестве II на кусочно-постоянную функцию $\tilde{u}(x)$:

$$u(x) \rightarrow \tilde{u}(x); \quad \tilde{u}(x) \equiv u(\xi_k) = -U_k \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k).$$

Параметры ξ_k выбираются из условия $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$, в остальном произвольны. Например, можно положить $\xi_k = (x_{k-1} + x_k)/2$.

4. Выбираем произвольное значение спектрального параметра \varkappa , удовлетворяющее условиям:

$$0 < \varkappa^2 < U_0, \quad U_k \neq \varkappa^2, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

5. Записываем (с точностью до нормировочного множителя) решение уравнения (8.1) на интервале I , которое обеспечивает принадлежность искомого решения к пространству $L_2(\mathbb{R})$:

$$\psi(x) \equiv \psi_I(x) = e^{\varkappa x}.$$

6. Переходим далее на подмножество II .

7. Полагаем значение счетчика $j = 1$.

8. Вводим обозначение $\Lambda_j = U_j - \varkappa^2$. Определяем знак Λ_j .

9. Записываем решение на интервале II_j :

$$9_+. \quad \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \cos(\sqrt{\Lambda_j} x) + B_j \sin(\sqrt{\Lambda_j} x), \quad \text{при } \Lambda_j > 0$$

или

$$9_-. \quad \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \cosh(\sqrt{-\Lambda_j} x) + B_j \sinh(\sqrt{-\Lambda_j} x), \quad \text{при } \Lambda_j < 0.$$

10. "Сшиваем" решение на множестве I и на интервале II_j . Термин "сшиваем" здесь и далее означает то, что мы требуем от решения непрерывной дифференцируемости в соответствующей точке. Уравнения сшивки записываются так:

- 10₊. При $\Lambda_j > 0$:

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\sqrt{\Lambda_1} a) + B_1 \sin(\sqrt{\Lambda_1} a) &= e^{\varkappa a}, \\ -A_1 \sqrt{\Lambda_1} \sin(\sqrt{\Lambda_1} a) + B_1 \sqrt{\Lambda_1} \cos(\sqrt{\Lambda_1} a) &= \varkappa e^{\varkappa a}. \end{aligned}$$

10₋. При $\Lambda_j < 0$:

$$\begin{aligned} A_1 \cosh(\sqrt{-\Lambda_1} a) + B_1 \sinh(\sqrt{-\Lambda_1} a) &= e^{\varkappa a}, \\ A_1 \sqrt{-\Lambda_1} \sinh(-\sqrt{\Lambda_1} a) + B_1 \sqrt{-\Lambda_1} \cosh(\sqrt{-\Lambda_1} a) &= \varkappa e^{\varkappa a}. \end{aligned}$$

Решая данную СЛАУ (для того или иного знака Λ_1), находим константы A_1 и B_1 (напомним, параметр \varkappa задан).

11. Изменяем значение счетчика $j \rightarrow j + 1$, определяем знак Λ_j .

12. Переходим на интервал II_j : $x \in [x_{j-1}, x_j]$ и записываем решение на данном интервале:

$$12_{+}. \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \cos(\sqrt{\Lambda_j} x) + B_j \sin(\sqrt{\Lambda_j} x), \text{ при } \Lambda_j > 0$$

или

$$12_{-}. \psi(x) \equiv \psi_{II_j}(x) = A_j \cosh(\sqrt{-\Lambda_j} x) + B_j \sinh(\sqrt{-\Lambda_j} x), \text{ при } \Lambda_j < 0.$$

13. "Сшиваем" решение на интервале II_{j-1} и на интервале II_j . Здесь возможны четыре варианта СЛАУ с неизвестными A_j и B_j , в зависимости от сочетания знаков констант Λ_{j-1} и Λ_j :

13₊₊. При $\Lambda_{j-1} > 0$ и $\Lambda_j > 0$:

$$\begin{aligned} A_{j-1} \cos(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) + B_{j-1} \sin(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) &= \\ = A_j \cos(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}) + B_j \sin(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}), \\ -A_{j-1} \sqrt{\Lambda_{j-1}} \sin(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) + B_{j-1} \sqrt{\Lambda_{j-1}} \cos(\sqrt{\Lambda_{j-1}} x_{j-1}) &= \\ = -A_j \sqrt{\Lambda_j} \sin(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}) + B_j \sqrt{\Lambda_j} \cos(\sqrt{\Lambda_j} x_{j-1}). \end{aligned}$$

13₊₋. При $\Lambda_{j-1} > 0$ и $\Lambda_j < 0$: ...

13₋₊. При $\Lambda_{j-1} < 0$ и $\Lambda_j > 0$: ...

13₋₋. При $\Lambda_{j-1} < 0$ и $\Lambda_j < 0$: ...

Решаем данную СЛАУ, находим константы A_j и B_j .

14. Проверяем значение счетчика j . Если $j < M$, то переходим к шагу 11, если $j = M$, то переходим к шагу 15.

15. Переходим на интервал III и записываем общее решение уравнения (8.1) на данном интервале:

$$\psi(x) \equiv \psi_{III}(x) = \mathbf{a}e^{\varkappa x} + \mathbf{b}e^{-\varkappa x}.$$

16. "Сшиваем" решение на интервале II_M и на интервале III :

16₊. При $\Lambda_M > 0$:

$$\begin{aligned} A_M \cos(\sqrt{\Lambda_M} b) + B_M \sin(\sqrt{\Lambda_M} b) &= \mathbf{a} e^{\varkappa b} + \mathbf{b} e^{-\varkappa b}, \\ -A_M \sqrt{\Lambda_M} \sin(\sqrt{\Lambda_M} b) + B_M \sqrt{\Lambda_M} \cos(\sqrt{\Lambda_M} b) &= \mathbf{a} \varkappa e^{\varkappa b} - \mathbf{b} \varkappa e^{-\varkappa b}. \end{aligned}$$

16₋. При $\Lambda_M < 0$:

$$\begin{aligned} A_M \cosh(\sqrt{-\Lambda_M} b) + B_M \sinh(\sqrt{-\Lambda_M} b) &= \mathbf{a} e^{\varkappa b} + \mathbf{b} e^{-\varkappa b}, \\ A_M \sqrt{-\Lambda_M} \sinh(\sqrt{-\Lambda_M} b) + B_M \sqrt{-\Lambda_M} \cosh(\sqrt{-\Lambda_M} b) &= \mathbf{a} \varkappa e^{\varkappa b} - \mathbf{b} \varkappa e^{-\varkappa b}. \end{aligned}$$

17. Находим из данной СЛАУ константы \mathbf{a} и \mathbf{b} .

18. Возвращаемся к шагу 4 с иным значением параметра \varkappa .

19. Делаем достаточное количество (определяется заданной точностью вычислений) циклов с задаваемой заново константой \varkappa и строим график функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\varkappa)$. Нули этой функции \varkappa_i и являются точками дискретного спектра задачи (8.1). Дополнительные константы дискретного спектра определяются как $b_i = \mathbf{b}(\varkappa_i)$.

Упражнения

1. В примере 9.1 показать, что все СЧ лежат в интервале $-U_0 < \lambda < 0$, исследовать графически решения уравнений (9.1) и (9.2). Каково взаимное расположение решений \varkappa_n данных уравнений?
2. Вывести трансцендентное уравнение для нахождения дискретного спектра задачи Штурма – Лиувилля, если коэффициентная функция имеет вид ("несимметричная потенциальная яма")

$$u(x) \equiv 0, \quad x \notin [a, b], \quad u(x) = -U_0, \quad x \in [a, b], \quad U_0 > 0.$$
3. Обобщить алгоритм метода стрельбы на случай, когда функция $u(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ несколько локальных экстремумов.
4. Используя алгоритм метода стрельбы, написать компьютерную программу для нахождения спектра задачи Штурма – Лиувилля для произвольной ограниченной кусочно-непрерывной коэффициентной функции $u(x)$ с компактным носителем. Предложить способы повышения точности вычислений.
5. Предположим, что функция $u(x)$ задана с точностью δ (по некоторой норме). Как это влияет на выбор числа точек разбиения M ? Исследовать в различных нормах.

Литература: [2, 11].

Лекция 10

Метод подбора в решении некорректных задач

Решение некорректных задач методом подбора. Ограничение на компакт. Корректность по Тихонову. Невязка, ее минимизация. Общие вопросы поиска экстремума функции многих переменных. Проблемы при численном исследовании необходимых условий экстремума. Градиент, его определение и свойства. Градиентные методы поиска экстремума. Метод наискорейшего спуска.

В этой лекции мы рассмотрим некоторые общие вопросы решений уравнений вида

$$\hat{A}u = f, \quad u \in U, f \in F. \quad (10.1)$$

Здесь \hat{A} – некоторый непрерывный оператор (не обязательно линейный), отображающий нормированное пространство U в нормированное пространство F . Таким оператором, например, может быть отображение $u(x) \rightarrow \mathcal{R}$, где \mathcal{R} – данные рассеяния задачи Штурма – Лиувилля с ”потенциалом” $u(x)$. При этом обратный оператор \hat{A}^{-1} непрерывным, вообще говоря, не является. Дадим вначале следующее

Определение 10.1. Пусть $u \in U$ и $f \in F$ – некоторые элементы, не связанные, вообще говоря, соотношением (10.1). Невязкой уравнения (10.1) называется величина $\Delta(u) = \|Au - f\|_F$.

Как уже говорилось, обратная задача – это нахождение элемента u по заданному элементу f . Метод подбора решения такой обратной задачи заключается в следующем: мы решаем прямую задачу (т. е. вычисляем $\hat{A}u$) для некоторого набора элементов $u_i \in U, i = 0, 1, 2, \dots$ и затем ищем на данном множестве минимум функционала $\Delta(u)$. Пусть u^* – точное решение уравнения (10.1) и $u_i \in U, i = 0, 1, 2, \dots$ – некоторая последовательность элементов, сходящаяся к u^* по норме пространства U . Тогда, в силу непрерывности оператора

\hat{A} , очевидно: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(u_n) = 0$. Проблемы, которые возникают при решении обратной задачи (10.1) методом подбора, сводятся к следующим моментам.

1. Последовательность u_i строится из требования сходимости числовой последовательности $\Delta(u_n)$ тем или иным методом. Однако из того факта, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(u_n) = 0$ для некоторой последовательности u_i , не следует, что последовательность u_i куда-то сходится вообще.
2. Правая часть f и сам оператор \hat{A} могут быть заданы не точно, а с какой-то погрешностью.

Для того чтобы обеспечить сходимость последовательности u_i , необходимо использовать некоторую дополнительную априорную информацию о решении u^* . Информация (для каждой задачи – своя) должна быть такой, чтобы было возможным сделать ограничение $u^* \in M \subset U$, где M – компактное множество. При этом элементы последовательности u_i выбираются так, что $u_i \in M$, $i = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае сходимость гарантирует следующая

Лемма (А.Н. Тихонов). Пусть отображение $M \rightarrow F_M \subset F$ компакта M на подмножество F_M пространства F взаимно однозначно и непрерывно. Тогда обратное отображение $F_M \rightarrow M$ также непрерывно.

Некорректные задачи, которые допускают решение указанным способом (ограничением на компакт), называют *корректными по Тихонову*. Как отмечалось, функция f и сам оператор \hat{A} могут быть заданы не точно, поэтому решение u^* , даже при наличии сходимости, также определяется приближенно. Пусть, например, величина ε определяет точность задания функции f : $\|\delta f\|_F \leq \varepsilon$. В этом случае в качестве приближенного решения можно взять элемент $u^a \in M$, такой, что $\Delta(u^a) \simeq \varepsilon$.

На практике при численном решении задачи множество M всегда бывает конечномерным (и ограниченным). Поэтому минимизация функционала $\Delta(u)$ на данном компактном множестве сводится к нахождению экстремума функции многих переменных. Напомним, что необходимыми условиями экстремума функции $\Phi = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ являются условия

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.2)$$

Обратим внимание, что равенства (10.2) представляют собой в совокупности систему n нелинейных, вообще говоря, уравнений с n неизвестными. Решение такой системы даже в линейном случае при значениях n порядка $10^3 - 10^4$ приводит к значительным трудностям. Поэтому на практике обычно для поиска экстремума функций большого числа переменных используют другие способы. С одним из них – градиентным методом поиска экстремумов – мы познакомимся в рамках данной лекции.

Пусть функция $\Phi = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ определена на некотором подмножестве вещественного евклидова пространства E_n : $\mathbf{x} \in D \subset E_n$. Тогда напомним, что функция $\Phi(\mathbf{x})$ называется дифференцируемой в точке \mathbf{x} , если ее приращение представимо в окрестности данной точки в виде

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{g}, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|). \quad (10.3)$$

Вектор $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \text{grad } \Phi$, если он существует, называется градиентом функции Φ в данной точке. Геометрический смысл градиента следует из его определения: данный вектор показывает направление наибыстрейшего роста функции. Соответственно, противоположное направление изменения вектора $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ показывает направление наискорейшего спуска – направление, по которому данная функция Φ быстрее всего убывает. Действительно, записав неравенство Коши – Буняковского – Шварца сначала для векторов \mathbf{g} и \mathbf{h} , а затем для векторов \mathbf{g} и $-\mathbf{h}$, получаем

$$-\|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{h}\| \leq (\mathbf{g}, \mathbf{h}) \leq \|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{h}\|.$$

Отсюда мы видим, что величина (\mathbf{g}, \mathbf{h}) достигает максимума, если $\mathbf{h} = \epsilon \mathbf{g}$, и минимума, если $\mathbf{h} = -\epsilon \mathbf{g}$.

Итак, алгоритм решения некорректной задачи (10.1) может быть следующим.

1. Используя априорную информацию, фиксируем компактное множество $M \subset U$. На практике это означает, что мы задаем некоторую (конечномерную) параметризацию элемента u так, что параметры меняются в ограниченных пределах:

$$u = u(\mathbf{x}) \equiv u(x_1, \dots, x_n), \quad \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq M_0.$$

2. Определяем функцию

$$\Phi = \Phi(\mathbf{x}) \equiv \Phi(x_1, \dots, x_n) = \|\hat{A}u(x_1, \dots, x_n) - f\|_F.$$

3. Выбираем начальную точку $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Следует заметить, что общих критериев для выбора начальной точки не существует.
4. Строим итерационную процедуру

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \epsilon_k \mathbf{g}^k, \quad \Phi(\mathbf{x}^{k+1}) = \Phi(\mathbf{x}^k - \epsilon_k \mathbf{g}^k), \quad \mathbf{g}^k = \text{grad } \Phi \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k}.$$

При этом также выполняются итерации

$$u_{k+1} \simeq u_k - \epsilon_k G^k, \quad G^k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} g_i^k \quad G^k \in U.$$

Возможен наиболее простой вариант, когда $\epsilon_k = \epsilon$ (итерация с постоянным шагом). В этом случае проблема заключается в выборе ϵ : при малых значениях данного параметра решение задачи потребует большого количества шагов (а значит, машинных ресурсов), а при большом значении страдает точность и, более того, итерационный процесс может вообще расходиться. Наиболее эффективными являются способы, когда параметр ϵ_k выбирается на каждом шаге исходя из некоторых критериев. Один из таких методов мы обсудим ниже.

5. Останавливаем итерационную процедуру, как только $\Phi(\mathbf{x}^N) = \Delta(u) \simeq \varepsilon$. Напомним, что, как правило, величина ε определяется точностью задания "правой части" f : $\|\delta f\|_F \leq \varepsilon$.
6. Искомое решение – элемент $u = u(\mathbf{x}^N)$.

Пример 10.1. Пусть оператор \hat{A} в (10.1) – линейный оператор, а пространство F – евклидово. Рассмотрим алгоритм выбора параметра ϵ_k , который получил название метода наискорейшего спуска. Рассмотрим после выполнения шага итерации n функционал

$$\mathcal{F} \equiv \Delta^2(u_{n+1}) = a_n \epsilon_n^2 - 2b_n \epsilon_n + c_n,$$

в котором в силу определения невязки $\Delta(u)$ коэффициенты a_n, b_n, c_n суть величины

$$c_n = \|\hat{A}u_n - f\|_F^2, \quad b_n = (\hat{A}u_n - f, \hat{A}G^n), \quad a_n = \|\hat{A}G^n\|^2.$$

Величина ϵ_n выбирается так, что функционал \mathcal{F} минимален на каждом шаге. Очевидно, для этого надо положить $\epsilon_n = b_n/a_n$.

Упражнение

Реализовать алгоритм наискорейшего спуска для решения уравнения (7.2). Точность, с которой задана правая часть f , и точность, с которой необходимо найти решение y , считать известными величинами (δf и δy соответственно).

Литература: [1, 12].

Лекция 11

Теория возмущений

Принципы теории возмущений для линейных операторов. Нахождение поправок первого порядка к собственным значениям и собственным функциям.

В этой лекции мы рассмотрим метод нахождения поправок к известным СЗ и СФ некоторого линейного оператора $\widehat{\mathcal{L}}$, которые обусловлены некоторым "возмущением" $\delta\widehat{\mathcal{L}}$ данного оператора. Результаты мы используем при решении обратной задачи Штурма – Лиувилля на интервале методом подбора, с использованием градиентных методов, рассмотренных в предыдущей лекции. Итак, постановка задачи заключается в следующем. Пусть спектральная задача в гильбертовом пространстве H

$$\widehat{\mathcal{L}}\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in H$$

имеет только дискретный спектр, причем нам известны все собственные числа $\lambda = \lambda_i^{(0)}$ и собственные функции $\psi = \psi_i^{(0)}$, пронумерованные индексом $i = 1, 2, \dots$. Собственные числа мы будем считать для простоты невырожденными, собственные функции – ортонормированными. Нам необходимо решить спектральную задачу

$$\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon\psi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\psi(\varepsilon), \quad \widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon = \widehat{\mathcal{L}} + \varepsilon\widehat{V}, \quad (11.1)$$

где ε – некоторый малый параметр. Символом \widehat{V} обозначен оператор умножения на некоторую заданную функцию $v(x)$ того же класса, что и функция $u(x)$ (мы будем считать их вещественными кусочно-непрерывными функциями с компактным носителем). Как правило, "возмущенная" задача (т. е. задача с $\varepsilon \neq 0$) не имеет явного решения. Поэтому мы будем искать собственные

числа и собственные функции такой задачи в виде ряда по параметру ε :

$$\lambda_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_i^{(k)}, \quad \psi_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_i^{(k)}. \quad (11.2)$$

Там, где нумерующий собственные числа и отвечающие им собственные функции нижний индекс i не играет роли, мы его не выписываем. Наша ближайшая задача – найти поправки первого порядка $\lambda^{(1)}$ и $\psi^{(1)}$ к невозмущенным (известным нам) величинам $\lambda^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$. Подставив разложения (11.2) в (11.1), находим:

$$\begin{aligned} & (\widehat{\mathcal{L}} + \varepsilon \widehat{V})(\psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \varepsilon^2 \psi^{(2)} + \dots) = \\ & = (\lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots)(\psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \varepsilon^2 \psi^{(2)} + \dots). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Раскрывая скобки, приравняем коэффициенты при степенях параметра ε :

1. ε^0 : здесь, очевидно, получаем невозмущенное уравнение $\widehat{\mathcal{L}}\psi^{(0)} = \lambda^{(0)}\psi^{(0)}$.
2. ε^1 : равенство коэффициентов при первой степени ε приводит к уравнению

$$\widehat{\mathcal{L}}\psi^{(1)} + \widehat{V}\psi^{(0)} = \lambda^{(0)}\psi^{(1)} + \lambda^{(1)}\psi^{(0)}. \quad (11.4)$$

Домножим скалярно слева данное равенство на вектор $\psi^{(0)} \in H$. Пользуясь тем, что оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ – симметрический в пространстве H , и тем, что система собственных функций $\psi_i^{(0)}$ ортонормирована, находим выражение для первой поправки к собственным числам дискретного спектра невозмущенной задачи:

$$\lambda_i^{(1)} = (\psi_i^{(0)}, \widehat{V}\psi_i^{(0)}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (11.5)$$

Для того чтобы найти поправку $\psi_i^{(1)}$ к функции $\psi_i^{(0)}$, запишем разложение

$$\psi_i^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} \psi_k^{(0)}, \quad a_{kk} = 0. \quad (11.6)$$

Подставляя (11.6) в (11.4), получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} \psi_k^{(0)} \lambda_k^{(0)} + \widehat{V}\psi_i^{(0)} = \lambda_i^{(0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} \psi_k^{(0)} + \lambda_i^{(1)} \psi_i^{(0)}.$$

Домножая слева скалярно на функцию $\psi_m^{(0)}$, где $m \neq i$, находим:

$$a_{im} = \frac{(\psi_m^{(0)}, \widehat{V}\psi_i^{(0)})}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_m^{(0)}}. \quad (11.7)$$

3. ε^2 : здесь получаем следующее уравнение:

$$\widehat{\mathcal{L}}\psi^{(2)} + \widehat{V}\psi^{(1)} = \lambda^{(0)}\psi^{(2)} + \lambda^{(1)}\psi^{(1)} + \lambda^{(2)}\psi^{(0)}.$$

Отсюда, с учетом предыдущих шагов, можно найти поправки второго порядка.

4. ...

Конечно, вопрос о сходимости рядов (11.2) требует отдельного исследования. Мы не будем подробно здесь на этом останавливаться. Найденные формулы для поправок первого порядка мы используем в дальнейшем при решении обратной задачи Штурма – Лиувилля методом подбора, с использованием градиентного способа поиска экстремума невязки.

Упражнения

1. Вывести формулы для поправок второго порядка к СЗ и СФ оператора $\widehat{\mathcal{L}}$.
2. Пусть функция $u(x)$ имеет вид симметричной потенциальной ямы (см. пример 9.1), а функция $v(x)$ – вид

$$v(x) \equiv 0, \quad |x| > b, \quad v(x) = \sin\left(\frac{\pi(x-b)}{2b}\right), \quad |x| \leq b, \quad a > b > 0.$$

Задавая конкретные значения параметров a, b, U_0 , вычислить поправки первого и второго порядка к дискретному спектру из примера 9.1.

Литература: [7, 11].

Лекция 12

Обратная задача Штурма – Лиувилля на интервале

Задача Штурма – Лиувилля на интервале. Невязка для дискретного спектра в евклидовой метрике как функция N переменных. Вывод явных формул для градиента. Алгоритм реализации решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на интервале методом подбора.

В этой лекции мы рассмотрим *классическую задачу Штурма – Лиувилля*. Под таковой понимают спектральную задачу

$$\widehat{\mathcal{L}}\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in L_2[0, \pi], \quad (12.1)$$

где функция $\psi = \psi(x; \lambda)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\psi'(0; \lambda) + Q_0\psi(0; \lambda) = 0, \quad (12.2)$$

$$\psi'(\pi; \lambda) + Q_\pi\psi(\pi; \lambda) = 0. \quad (12.3)$$

Здесь Q_0 и Q_π – конечные действительные числа. Как всякое ОДУ второго порядка, уравнение (12.1) имеет два линейно независимых решения. Поэтому мы всегда можем выбрать решение $\psi(x; \lambda)$ такое, что $\psi(0; \lambda) = 1$ и $\psi'(0; \lambda) = -Q_0$. Будем рассматривать далее именно такие решения уравнения (12.1). Таким образом, условию (12.2) всегда можно удовлетворить при любом значении λ . Следовательно, собственные числа задачи (12.1) – это корни уравнения (12.3). Для того чтобы получить полный спектр, к собственным числам λ_n необходимо добавить нормировочные коэффициенты

$$\alpha_n = \int_0^\pi \psi^2(x; \lambda_n) dx. \quad (12.4)$$

Спектр данной задачи дискретный; этим она проще, чем спектральная задача Штурма – Лиувилля на всей оси, которую мы рассматривали ранее.

Таким образом, прямая задача рассеяния в рассматриваемом случае – это построение отображения \hat{A}

$$\hat{A}: u(x) \longrightarrow \mathcal{R},$$

где ”данные рассеяния” \mathcal{R} – это множество $(\lambda_1, \alpha_1; \lambda_2, \alpha_2; \dots)$.

Для нашего дальнейшего рассмотрения важным являются следующие асимптотические разложения величин λ_n и α_n :

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{n^{2k+1}}, \quad (12.5)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^{2k+2}}. \quad (12.6)$$

Спектр данной задачи при произвольной функции $u(x)$ может быть найден с использованием метода стрельбы, который обсуждался в предыдущих лекциях. Необходимую здесь модификацию данного метода (напомним, ранее метод стрельбы применялся нами для нахождения спектра задачи Штурма – Лиувилля на всей оси) предлагается сделать самостоятельно – см. упражнение в конце лекции. Единственное принципиальное отличие здесь состоит в том, что число точек дискретного спектра в рассматриваемой задаче бесконечно. Поэтому возникает вопрос: когда следует прервать цикл, вычисляющий пары (λ_n, α_n) ? Ответ заключается в следующем. На практике все величины вычисляются с некоторой точностью, которая должна быть заранее задана. Необходимая точность вычислений может определяться, например, точностью экспериментального определения исследуемых величин. Пусть в нашей задаче необходимо вычислить спектр так, чтобы величины λ_n имели погрешность $\Delta\lambda \ll \min |\lambda_k|$. Тогда из разложения (12.5) следует, что цикл, вычисляющий пары (λ_n, α_n) , целесообразно прервать при $n = N$, где число N удовлетворяет условию

$$\sqrt{\Delta\lambda} \simeq |l_0|/N. \quad (12.7)$$

Начиная со значения $n = N + 1$, можно считать $\lambda_n = n^2$. Величину l_0 можно определить, используя разложение (12.5) и имея в своем распоряжении вычисленный массив $\lambda_n, n = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть нам даны N пар чисел

$$\xi_1, \beta_1; \dots; \xi_N, \beta_N; \quad \forall i \beta_i > 0, \quad \xi_i > 0 \forall i = N_1, N_1 + 1, \dots, N \quad (N_1 \leq N).$$

Для данных чисел мы считаем выполненными асимптотические разложения (12.5) и (12.6) при переобозначении $\lambda \rightarrow \xi$ и $\alpha \rightarrow \beta$. Нам необходимо найти функцию $u^*(x)$ такую, чтобы соответствующая задача (12.1) приводила к собственным числам ξ_i (первые N собственных чисел) с нормировочными коэффициентами β_i . Мы приведем ниже алгоритм решения данной задачи методом подбора с использованием градиентных методов. Точность вычисления собственных чисел определяется числом N и числом l_0 в соответствии с условием (12.7).

1. В соответствии со сказанным в прошлых лекциях, первый шаг, который необходимо сделать, – это определить компактное множество K такое, что $u(x) \in K \subset L_2[0, \pi]$. Для этого мы должны использовать некоторую априорную информацию. Примем за основу тот факт, что функция $u(x)$ в реальности часто моделирует распределение некоторых физических величин. Это означает, что, во-первых, она ограничена по абсолютной величине неким верхним пределом U_0 и, во-вторых, существует некоторый интервал $\delta x \ll \pi$, в пределах которого функцию $u(x)$ можно считать постоянной. Последнее означает существование предела точности измерений для любой величины. В этой связи разобьем отрезок $[0, \pi]$ на $M = \pi/\delta x$ равных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $x_0 = 0$ и $x_M = \pi$. Вместо функции $u(x)$ мы будем искать функцию $\tilde{u}(x)$ такую, что

$$\tilde{u}(x) = \sum_{m=1}^M u_m \chi_m(x), \quad |u_m| \leq U_0 \quad \forall m = 1, \dots, M.$$

Здесь $\chi_m(x) \equiv \theta(x_m - x) - \theta(x_{m-1} - x)$ – характеристическая функция отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Числа M и U_0 определяют компактное множество K такое, что $u(x) \in K \subset L_2[0, \pi]$.

2. Для того чтобы выполнить процедуру минимизации невязки градиентным методом, необходимо выбрать *начальную точку*, т. е. некоторую функцию $\tilde{v}_0(x) \in K$. Какого-то определенного способа выбора начальной точки здесь не существует. Можно использовать некоторую априорную информацию. Далее считаем, что нам задана некая функция $v_0(x) \in L_2[0, \pi]$, по которой построена начальная точка $\tilde{v}_0(x) \in K$ указанным в первом пункте методом дискретизации.
3. Пусть набор $(\lambda_1, \alpha_1; \dots, \lambda_M, \alpha_M)$ – спектр задачи (12.1) с некоторой

функцией $u(x)$. Считая, что спектр принадлежит пространству E_{2M} , запишем невязку:

$$\Delta(u) = \sqrt{\sum_{k=1}^M (\lambda_k - \xi_k)^2 + \sum_{m=1}^M (\alpha_m - \beta_m)^2}. \quad (12.8)$$

4. В соответствии с градиентным методом мы должны определить градиент, для чего нам необходимо выделить линейную часть приращения $\Delta(u + \delta u) - \Delta(u)$. Согласно сделанным предположениям, приращение аргумента δu записывается в виде

$$\delta u(x) = \sum_{m=1}^M \delta u_m \chi_m(x). \quad (12.9)$$

5. Находим приращения $\delta \lambda_k$ и $\delta \alpha_k$, соответствующие приращению δu . Для этого воспользуемся формулами теории возмущений, полученными в предыдущей лекции. Поскольку мы интересуемся только линейной частью приращения, достаточно ограничиться первыми поправками. Имеем

$$\delta \lambda_k = (\psi_k, \delta u \psi_k),$$

где ψ_k – собственная функция, отвечающая (невозмущенному) собственному значению λ_k . Что касается приращения $\delta \alpha_k$, то оно не содержит членов, линейных по δu (т. е. по константам δu_m – см. упражнение). Это означает, что в невязке (12.8) вторую сумму можно не учитывать.

6. Находим линейную часть приращения невязки:

$$\begin{aligned} \Delta(u + \delta u) - \Delta(u) &= \sqrt{\sum_{k=1}^M (\lambda_k + \delta \lambda_k - \xi_k)^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^M (\lambda_k - \xi_k)^2} \simeq \\ &\simeq -\frac{\sum_{k=1}^M (\lambda_k - \xi_k) \delta \lambda_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^M (\lambda_k - \xi_k)^2}} = -\frac{\sum_{k=1}^M (\lambda_k - \xi_k) (\psi_k, \delta u \psi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^M (\lambda_k - \xi_k)^2}}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

7. Используя представление (12.9), находим в общем виде компоненты g_m вектора $\mathbf{g} = \text{grad } \Delta(u)$ – градиента невязки:

$$g_m = -\frac{\sum_{k=1}^M (\lambda_k - \xi_k) (\psi_k, \chi_m \psi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^M (\lambda_k - \xi_k)^2}}. \quad (12.11)$$

8. Вычисляем градиент невязки $g_m^{(0)}$ в точке $\tilde{v}_0(x)$.

9. Переходим от выбранной начальной точки $\tilde{v}_0(x)$ к точке $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_0 + \delta v_0$, где

$$\delta v_0 = -\varepsilon \sum_{m=1}^M g_m^{(0)} \chi_m(x).$$

10. Вычисляем градиент невязки $g_m^{(1)}$ в точке $\tilde{v}_1(x)$.

11. Процесс продолжаем некоторое количество шагов s – до тех пор, пока невязка не достигнет величины $\Delta\lambda$ (заданной точности определения собственных чисел).

12. Полагаем $u^*(x) \simeq \tilde{u}^*(x) = \tilde{v}_s(x)$.

Упражнения

1. Выполнить модификацию алгоритма метода стрельбы для задачи Штурма – Лиувилля на интервале.
2. Составить алгоритм нахождения величины l_0 по вычисленному массиву собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ спектральной задачи (12.1), (12.2), (12.3).
3. Показать, что приращение $\delta\alpha_k$ не содержит членов, линейных по константам δu_m . Воспользоваться определением нормировочных констант (12.4), а также формулами (11.6) и (11.7).

Литература: [1, 8, 12].

Литература

- [1] Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 285 с.
- [2] Карчевский, М.М. Лекции по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М.М. Карчевский. – Электрон. дан. – СПб. : Лань, 2016. – 164 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72982>.
- [3] Рид, М. Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. – М. : Мир, 1977. – 354 с.
- [4] Филимонова, Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу [Электронный ресурс] / Н.В. Филимонова. – Электрон. дан. – СПб. : Лань, 2015. – 176 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/64343>.
- [5] Стренг, Г. Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. – М. : Мир, 1980. – 454 с.
- [6] Рашфорт, К. Реконструкция изображений / К. Рашфорт, Д. Юла, К. Хенсон [и др.] ; под ред. Г. Старка. – М. : Мир, 1992. – 636 с.
- [7] Сизиков, В.С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab: учебное пособие + CD [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.С. Сизиков. – Электрон. дан. – СПб. : Лань, 2017. – 412 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/99358>.
- [8] Левитан, Б.М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля / Б.М. Левитан. – М. : Наука, 1984. – 240 с.
- [9] Захаров, В.Е. Теория солитонов: метод обратной задачи. Гл. I / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков [и др.] ; под ред. С.П. Новикова. – М. : Наука, 1980. – 319 с.
- [10] Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : учебник / И.И. Привалов. – Электрон. дан. – СПб. : Лань, 2009. – 432 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/322>.
- [11] Фаддеев, Л.Д. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков / Л.Д. Фаддеев, О.А. Якубовский. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1980. – 200 с.
- [12] Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М. : Наука, 1988. – 286 с.