Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

О.В. Лелонд, М.А. Тренина

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Электронное
учебное пособие

ISBN 978-5-8259-1406-0

УДК 517.1
ББК 22.176

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика» Поволжского государственного университета сервиса
Т.В. Никитенко;
канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского государственного университета *Н.А. Сосина*.

Лелонд, О.В. Дискретная математика : электронное учебное пособие / О.В. Лелонд, М.А. Тренина. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2018. – 1 оптический диск.

В учебном пособии дается первоначальное представление о множествах и операциях над ними, соответствиях и отношениях; рассматриваются основные комбинаторные схемы, на примерах демонстрируются принципы решения комбинаторных задач. Также значительное внимание в пособии уделено другим вопросам дискретной математики.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», 09.03.03 «Прикладная информатика» всех форм обучения высшего профессионального образования.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Т.М. Воропанова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление, компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева, И.В. Карасев*

Дата подписания к использованию 21.11.2018.
Объем издания 3,5 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-84-17.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

1. МНОЖЕСТВА. СООТВЕТСТВИЯ. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

1.1. Множества и операции над ними

Понятия «множество» и «элемент множества» считаются первичными и поэтому не имеют строгого математического определения. Синонимом слова «множество» является слово «совокупность». В каждом конкретном случае интуитивно должно быть ясно, что собой представляет данное множество и из каких элементов оно состоит. Предполагается, что для данных элемента a и множества A всегда можно определить, принадлежит ли элемент а множеству A (пишется $a \in A$) или не принадлежит (пишется $a \notin A$).

Множества обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита, возможно с индексами (A, B, C, A_1, A_2, A_3, ...), а элементы множества – малыми буквами (a, b, c, a_1, a_2, a_3, ...).

Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B (причём случай $A = B$ не исключается), то A называют *подмножеством* множества B и пишут $A \subseteq B$. Например, целые числа образуют подмножество во множестве всех действительных чисел.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом $\varnothing$. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\varnothing$, называются *собственными* (или *истинными*). Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то говорят, что A является строгим подмножеством множества B, и пишут $A \subset B$.

Пусть A и B – произвольные множества. Их объединением $C = A \cup B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B. Например, объединением множества положительных действительных чисел и множества отрицательных действительных чисел является множество действительных чисел, отличных от нуля.

Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если $\{A_\alpha\}$ – произвольное семейство множеств, то их объединение $\cup_\alpha A_\alpha$ есть совокупность всех элементов, принадлежащих по крайней мере одному из множеств A_α.

Пересечением множеств A и B будем называть множество $C = A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B. Например, пересечением множества всех нечётных целых чисел и множества всех целых чисел, кратных пяти, является множество чисел $\{5(2k + 1) : k \in Z\}$.

Пересечением любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α называется совокупность $\cap_\alpha A_\alpha$ всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α.

Из определения операций объединения и пересечения вытекает их коммутативность и ассоциативность:

$$A \cup B = B \cup A,\ \ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A,\ \ (A \cap B)\ C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, указанные операции взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C)\ \cap (B \cup C).$$

Докажем для примера первое из двух последних равенств. Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$. Это означает, что элемент x принадлежит множеству C и по крайней мере одному из множеств A и B. Но тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$ и $B \cap C$. Следовательно, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in (A \cap C)$ или $x \in (B \cap C)$. Следовательно, либо x принадлежит множествам A и C, либо x принадлежит множествам C и B. Таким образом, x принадлежит множеству С и по крайней мере одному из множеств A и B. А значит, $x \in (A \cup B) \cap C$. Второе равенство доказывается аналогично.

Назовём *разностью* $\mathrm{C} = A \backslash B$ множеств A и B совокупность всех тех элементов из A, которые не содержатся в B. Например, для множеств $A(-\infty, 7)$, $B = [0, 10]$ разность $A \backslash B$ представляет собой луч $(-\infty, 0)$.

Симметрической разностью $A \Delta B$ множеств A и B называется множество $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Несложно проверить справедливость равенства

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash\ (A \cap B).$$

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного (универсального) множества U, например, различные множества точек на числовой прямой. В этом случае разность $U \backslash A$ называют *дополнением* множества A и обозначают CA.

В теории множеств часто используются равенства

$$U \backslash (\cup_\alpha A_\alpha) = \cap_\alpha (U \backslash A_\alpha) \quad \text{и} \quad U \backslash (\cap_\alpha A_\alpha) = \cup_\alpha (U \backslash A_\alpha),$$

называемые теоремами двойственности или правилами де Моргана.

Приведём доказательство первого из этих равенств.

Пусть $x \in U \backslash (\cup_\alpha A_\alpha)$. Это означает, что $x \notin \cup_\alpha A_\alpha$, то есть x не входит ни в одно A_α. Следовательно, x принадлежит каждому из дополнений $U \backslash A_\alpha$, а значит, $x \in \cap_\alpha (U \backslash A_\alpha)$. Обратно, пусть $x \in \cap_\alpha (U \backslash A_\alpha)$. Тогда x принадлежит каждому из дополнений $U \backslash A_\alpha$, а значит, не принадлежит ни одному A_α. Таким образом, $x \notin \cup_\alpha A_\alpha$, а следовательно, $x \in U \backslash (\cup_\alpha A_\alpha)$.

Второе равенство доказывается аналогично.

Говорят, что множества A и B *находятся в общем положении*, если они пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Например, для множеств $A = \{2, 3, 5\}$ и $B = \{2, 4\}$ имеем

$$A \times B = \{(2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}.$$

1.2. Соответствия между множествами. Отображения

Соответствием между множествами A и B называется правило, в силу которого каждому элементу из некоторого подмножества множества A сопоставляется один или более элементов из множества B. Задание соответствия между множествами A и B равносильно заданию некоторого подмножества декартова произведения $A \times B$.

Например, пусть $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{0, -3, 4, 8\}$. Тогда соответствие Γ между множествами A и B, сопоставляющее -1 элементы 0 и -3, 2 – элемент 4, может быть задано с помощью множества $G = \{(-1, 0), (-1, -3), (2, 4)\} \subset A \times B$.

Пусть G – подмножество $A \times B$, задающее соответствие между A и B. Обозначим через $\text{пр}_1 G$ множество всех тех элементов из A, каждому из которых соответствует хотя бы один элемент из B. Аналогично через $пр_2 G$ обозначим множество всех тех элементов из B, каждый из которых соответствует хотя бы одному элементу из A. В рассмотренном выше примере $пр_1 G = \{-1, 2\}$, $пр_2 G = \{-3, 4\}$.

Пусть соответствие между A и B определяется множеством $G \subseteq A \times B$. Данное соответствие называется *всюду определённым*, если $пр_1 G = A$; *функциональным*, если каждому элементу из $пр_1 G$ соответствует единственный элемент из B; *инъективным*, если различным элементам из $пр_1 G$ соответствуют различные элементы множества B; *сюръективным*, если $пр_2 G = B$; взаимно однозначным (или *биективным*), если оно всюду определено, функционально, инъективно и сюръективно.

Отображением из A в B называется всюду определённое функциональное соответствие между A и B. Для обозначения отображения f из A в B будем использовать запись $f : A \to B$. Если $a \in A$, то соответствующий ему элемент $b = f(a)$ из B называется *образом* элемента a (при отображении f). Совокупность всех тех элементов a из A, образом которых является данный элемент b из B, называется *прообразом* (*полным прообразом*) элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть $M \subseteq A$. Множество $\{f(a) : a \in M\}$ называется *образом* множества M и обозначается $f(M)$. Для каждого множества $N \subseteq B$ совокупность всех тех элементов из A, образы которых лежат в N, называется *прообразом* (*полным прообразом*) множества N и обозначается $f^{-1}(N)$.

Возвращаясь к примеру, разобранному в начале этого пункта, замечаем, что исследуемое соответствие не является ни всюду определённым, ни функциональным, ни сюръективным, но является инъективным.

Соответствие между множествами $A = R$ и $B = [-1, 1]$, задаваемое формулой $f(x) = \sin x$, является сюръективным, но не инъективным отображением.

1.3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества

Мощностью конечного множества A будем называть число его элементов.

Понятие мощности можно распространить и на бесконечные множества.

Множество A называется счётным, если между этим множеством и множеством N натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Другими словами, множество A счётно, если его элементы можно записать в виде последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Приведём примеры счётных множеств.

Пример 1. Множество Z целых чисел. Соответствие между множеством Z и множеством N устанавливается по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

Точнее, каждому целому числу $n \geq 0$ сопоставляется нечётное число $2n + 1$, а целому числу $n < 0$ – чётное число $2|n|$. Построенное соответствие является взаимно однозначным.

Пример 2. Множество $A = \{2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$ степеней числа 2. Биективное отображение множества N на множество A задаётся формулой $f(n) = 2^n$.

Пример 3. Множество Q рациональных чисел. Для установления взаимно однозначного соответствия между множествами Q и N расположим сначала положительные рациональные числа в виде следующей бесконечной таблицы:

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	…
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	…
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	…
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	…
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	…
.	.	.	.		

Занумеруем теперь эти числа «по диагоналям», точнее, за первый элемент примем $\frac{1}{1} = 1$, за второй элемент – $\frac{2}{1} = 2$, за третий –

1/2, за четвёртый – 1/3, элемент 2/2 пропустим, так как он совпадает с уже занумерованной единицей, за пятый элемент примем $\frac{3}{1} = 3$, за шестой – $\frac{4}{1} = 4$, за седьмой – 3/2, за восьмой – 2/3, за девятый – 1/4, за десятый – 1/5, элемент 2/4 пропустим, так как он совпадает с ранее занумерованным элементом, по той же причине пропустим элементы 3/3 и 4/2, в качестве одиннадцатого элемента возьмём $\frac{5}{1} = 5$, и так далее. В результате описанной процедуры мы занумеруем все элементы множества Q^+ положительных рациональных чисел натуральными числами, а значит, докажем его счётность. Аналогично можно занумеровать все элементы множества Q^- отрицательных рациональных чисел. Пусть $\{q_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{q_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ – построенные последовательности положительных и отрицательных рациональных чисел соответственно. Рассмотрим последовательность

$$0, q_1^+, q_1^-, q_2^+, q_2^-, \ldots, q_n^+, q_n^-, \ldots$$

Мы расположили все элементы множества Q в виде последовательности, а значит, доказали его счётность.

Бесконечное множество, не являющееся *счётным*, называется несчётным множеством.

Установим некоторые *свойства счётных множеств*.

1. Всякое подмножество счётного множества конечно или счётно.

Доказательство. Пусть A счётное множество, а B – его подмножество.

Занумеруем элементы множества A: a_1, a_2, ..., a_n, ... Пусть a_{n_1}, a_{n_2}, ... – те из них, которые входят в B. Если среди чисел n_1, n_2, ... есть наибольшее, то В конечно, в противном случае В счётно, так как его элементы a_{n_1}, a_{n_2}, ... занумерованы числами 1, 2, 3, ...

2. Объединение конечного или счётного числа счётных множеств есть счётное множество.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ – счётные множества. Мы можем считать, что они попарно не пересекаются, так как иначе мы рассмотрели бы вместо них множества $A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \ldots$ – каждое из которых не более чем счётно, – имеющие то же объединение, что и множества $A_1, A_2, \ldots$ Все элементы множеств $A_1, A_2, \ldots$ можно записать в виде следующей бесконечной таблицы:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \dots, \end{matrix}$$

где в первой строке стоят элементы множества A_1, во второй — элементы множества A_2 и так далее. Занумеруем теперь все эти элементы «по диагоналям», то есть за первый элемент примем a_{11}, за второй — a_{12}, за третий — a_{21} и так далее (см. доказательство счётности множества Q). При этом каждый элемент каждого из множеств A_i получит определённый номер, то есть будет установлено взаимно однозначное соответствие между множествами $\cup_n A_n$ и N. Наше утверждение доказано.

3. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Доказательство. Пусть M — бесконечное множество. Выберем в нём произвольный элемент a_1. Поскольку M бесконечно, в нём найдётся элемент a_2, отличный от a_1, затем найдётся элемент a_3, отличный от a_1 и a_2, и так далее. Продолжая этот процесс (который не может оборваться из-за нехватки элементов, так как M бесконечно), мы получаем счётное подмножество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ множества M.

Множества M и N называются *эквивалентными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Два конечных множества эквивалентны между собой в том и только в том случае, когда число элементов у них одинаково. Ясно, что два множества, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой; в частности, любые два счётных множества эквивалентны между собой.

Приведём примеры эквивалентных множеств.

1. Множества точек любых двух отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ эквивалентны между собой. Биективное отображение $[a, b]$ на $[c, d]$ может быть задано формулой

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}.$$

2. Множество всех чисел интервала (0, 1) эквивалентно множеству всех точек на прямой. Биективное отображение числовой прямой на интервал (0, 1) можно задать формулой

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Теорема. Множество чисел отрезка [0, 1] несчётно.

Доказательство. Предположим, что дано какое-то счётное множество действительных чисел, лежащих на отрезке [0, 1]:

$$\alpha_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1n}\ \ldots,$$
$$\alpha_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2n}\ \ldots,$$
$$\alpha_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \ldots\ a_{3n}\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n = 0,\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ \ldots\ a_{nn}\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Здесь a_{ik}-я десятичная цифра числа a_i.

Построим дробь

$$\beta = 0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n\ \ldots$$

диагональной процедурой Кантора: для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ положим $b_n = 2$, если $a_{nn} = 1$ и $b_n = 1$, если $a_{nn} \neq 1$. Полученная десятичная дробь определяет некоторое число из отрезка [0, 1] и не совпадает ни с одной дробью a_i. Таким образом, никакое счётное множество действительных чисел, лежащих на отрезке [0, 1], не исчерпывает этого отрезка.

Примерами множеств, эквивалентных отрезку [0, 1], являются произвольные отрезки, интервалы, полуинтервалы, вся числовая прямая. Доказательство эквивалентности предоставляется читателю в качестве упражнения.

Одной из основных в теории множеств является

Теорема Кантора – Бернштейна. Пусть A и B – произвольные множества. Если существуют взаимно однозначное отображение f множества A на подмножество B_1 множества B и взаимно однозначное отображение q множества B на подмножество A_1 множества A, то A и B эквивалентны.

Если множества M и N эквивалентны, то говорят, что они имеют одинаковую *мощность*. Таким образом, мощность – это то общее, что присуще всем множествам, эквивалентным данному множеству. Мощность множества M обозначается $[M]$. Мощность счётного множества обозначается символом α. Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел отрезка $[0, 1]$, говорят, что они имеют *мощность континуума*. Эта мощность обозначается символом c.

Пусть A и B – произвольные множества. Тогда логически возможны следующие случаи:

1) A эквивалентно некоторой части множества B, а B эквивалентно некоторой части множества A;
2) A содержит некоторую часть, эквивалентную B, но в B нет части, эквивалентной A;
3) B содержит некоторую часть, эквивалентную A, но в A нет части, эквивалентной B;
4) ни в одном из двух множеств нет части, эквивалентной другому.

В первом случае в силу теоремы Кантора – Бернштейна множества A и B эквивалентны, то есть $|A| = |B|$. Во втором случае считают, что $|A| > |B|$, в третьем, – что $|A| < |B|$. В четвёртом случае нам пришлось бы считать, что мощности множеств A и B не сравнимы между собой. Однако можно доказать, что этот случай невозможен.

1.4. Бинарные отношения

Бинарным отношением между множествами A и B называется любое подмножество φ декартова произведения $A \times B$.

Для обозначения принадлежности упорядоченной пары (x, y) бинарному отношению φ наряду с записью $(x, y) \in \varphi$ используют запись $x\varphi y$. При этом говорят, что x находится в отношении φ с y. Если $A = B$, то говорят, что отношение φ задано на множестве A.

Пример 1. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, \mathrm{f}, q, h\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогда подмножество $\varphi = \{(a, 2), (c, 3), (d, 5)\}$ в $A \times B$ является бинарным отношением между множествами A и B.

Пример 2. На множестве целых чисел Z отношение делимости, состоящее из упорядоченных пар (m, n), в которых m делится на n, является бинарным отношением.

Пример 3. На множестве действительных чисел R отношение $\leq$ является бинарным отношением, состоящим из всех точек плоскости R^2, лежащих не ниже прямой $y = x$.

Пример 4. Для функции $f: X \to Y$ её график $\Gamma(f) = \{(x, y): y = f(x), x \in X\}$ является бинарным отношением между X и Y.

Говорят, что бинарное отношение φ на множестве A обладает свойством:

– *рефлексивности*, если $(x, x) \in \varphi$ для всех $x \in A$;
– *антирефлексивности*, если $(x, x) \notin \varphi$ для всех $x \in A$;
– *симметричности*, если для всех $x, y \in A$ условие $(x, y) \in \varphi$ влечёт за собой $(y, x) \in \varphi$;
– *антисимметричности*, если для всех $x, y \in A$ условия $(x, y) \in \varphi$ и $x \neq y$ влекут за собой $(y, x) \notin \varphi$;
– *транзитивности*, для всех $x, y, z \in A$ условия $(x, y) \in \varphi$, $(y, z) \in \varphi$ влекут за собой $(x, z) \in \varphi$;
– *связности*, если для всех $x, y \in A$ либо $(x, y) \in \varphi$, либо $(y, x) \in \varphi$.

Пример 5. Отношение делимости на множестве целых чисел из примера 2 является рефлексивным (каждое целое число делится само на себя) и транзитивным (если m делится на n, а n делится на k, то m делится на k).

Пример 6. Отношение порядка $\leq$ из примера 3 обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности и связности.

Говорят, что бинарное отношение φ на множестве A является *отношением эквивалентности*, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если φ – отношение эквивалентности, то вместо записи $(x, y) \in \varphi$ используется запись $x \underset{\varphi}{\sim} y$.

Пример 7. Отношение равенства на множестве действительных чисел является отношением эквивалентности.

Если на множестве A задано отношение эквивалентности, то множество A разбивается на непересекающиеся подмножества эквивалентных друг другу элементов. Эти подмножества называются классами эквивалентности.

Контрольные вопросы

1. Какими свойствами обладает операция пересечения множеств?
2. Какими свойствами обладает операция объединения множеств?
3. В одном множестве 5 элементов, а в другом 6. Можно ли утверждать, что в объединении этих множеств 11 элементов? Приведите соответствующий пример.
4. В одном множестве 4 элемента, а в другом 11. Можно ли утверждать, что в пересечении может оказаться 5 элементов?
5. Можно ли утверждать, что $A \times B = B \times A$?
6. Если известно, что $A \times B = B \times A$, что можно сказать о множествах A и B?
7. Какое отображение является инъективным? Приведите пример инъективного отображения.
8. Какое отображение является сюръективным? Приведите пример сюръективного отображения.
9. Является ли сюръективное отображение инъективным?
10. Приведите пример биективного отображения.
11. Пусть A и B конечные, соответственно m и n-элементные множества. Каково должно быть соотношение между числами m и n, чтобы существовало сюръективное отображение A на B (B на A)?
12. Можно ли в любом бесконечном множестве выделить счетное подмножество?
13. Выделим в бесконечном множестве M счетное подмножество $A \subset M$. В каком отношении находятся мощности множеств $M \backslash A$ и M?
14. Мощность какого множества больше: X или Y, если X – исходное конечное множество, Y – множество подмножеств множества X?
15. Почему множество действительных чисел и множество натуральных чисел не являются эквивалентными?
16. Существуют ли среди бесконечных множеств множества наименьшей и наибольшей мощности?
17. В чем состоит свойство рефлексивности бинарного отношения?
18. Может ли отношение не обладать ни свойством рефлексивности, ни свойством антирефлексивности?
19. В чем состоит свойство симметричности бинарного отношения?

20. В чем состоит свойство транзитивности бинарного отношения?
21. Если отношение *A* на множестве *M* рефлексивно, симметрично и транзитивно, можно ли разбить множество *M* на классы?
22. Известно, что отношение ρ на *A* не является симметричным. Означает ли это, что ρ антисимметрично?

2. КОМБИНАТОРИКА

2.1. Введение

Комбинаторика позволяет вычислять количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям.

Первоначально комбинаторика рассматривалась как раздел «досуговой» математики. Впервые теоретическое исследование проблем комбинаторики было проведено в XVII в. Паскалем, Ферма, Лейбницем и в XVIII в. Я. Бернулли, Эйлером. Тогда же сложилась и принятая в комбинаторике терминология (сочетания, размещения, перестановки и т. п.). К началу XX в. комбинаторика считалась в основном завершенным разделом математики, лежащим вне основного русла развития математики и ее приложений. В XX в. комбинаторику стали рассматривать как раздел теории множеств, в котором изучаются различные проблемы, возникающие при исследовании конечных множеств. Такая точка зрения привела к более естественной и последовательной классификации основных понятий и задач комбинаторики.

В связи с развитием компьютерных наук и технологий возросла роль комбинаторики как инструмента решения многих задач. В настоящее время комбинаторика является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Она как область математического знания входит в дискретную математику. На грани дискретной математики и программирования появляются новые дисциплины, в частности, комбинаторные алгоритмы.

2.2. Правила комбинаторики

1. ***Правило суммы***

Пусть A и B конечные непересекающиеся множества. Множество A содержит n элементов, B – m элементов. Тогда $A \cup B$ содержит $n + m$ элементов.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, тогда $A \cup B = \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m\}$. Установим взаимно однозначное соответствие между множеством и натуральным рядом от 1 до $n + m$:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n & b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & n+\mathrm{m} \end{array}$$

Правило суммы можно интерпретировать следующим образом. Если элемент $a \in A$ можно выбрать n способами, а элемент $b \in B$ – m способами, то выбор элемента $x \in A \cup B$ можно осуществить $n + m$ способами.

Следствие. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k$ – конечные непересекающиеся множества, X_1 содержит n_1 элементов, X_2 – n_2 элементов, ..., X_k – n_k элементов, тогда $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ содержит $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ элементов.

2. *Правило произведения*

Пусть A и B конечные множества. Множество A содержит n элементов, B – m элементов. Тогда $A \times B$ содержит $n \times m$ элементов.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, тогда

$$A \times B = \{(a_i, b_j): a_i \in A, b_j \in B, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Рассмотрим множества $M_1 = \{(a_1, b_j): a_1 \in A, b_j \in B, j = 1, 2, \dots, m\}$,

$$M_2 = \{(a_2, b_j): a_2 \in A, b_j \in B, j = 1, 2, \dots, m\}, \dots,$$

$$M_n = \{(a_n, b_j): a_n \in A, b_j \in B, j = 1, 2, \dots, m\}.$$

$$A \times B = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n.$$

Следовательно, по правилу сложения получаем, что множество $A \times B$ содержит $\underbrace{m + m + \dots + m}_{n} = n \cdot m$ элементов.

Правило произведения можно интерпретировать следующим образом. Если элемент $a \in A$ можно выбрать n способами и если после каждого такого выбора элемент $b \in B$ можно выбрать m способами, то выбор пары $(a, b) \in A \times B$ можно осуществить $n \cdot m$ способами. В этом случае говорят, что выбор элементов множества A не зависит от способа выбора элементов множества B.

Следствие. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k$ – конечные множества, X_1 содержит n_1 элементов, X_2 – n_2 элементов, ..., X_k – n_k элементов, тогда

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_k \in X_k\}$$

содержит $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ элементов.

Пример 1. Найти число маршрутов из пункта M в пункт N через пункт K. Из M в K ведут 5 дорог, из K в N – 3 дороги.

Решение. Введем два множества: $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ – дороги из M в K, $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ – дороги из K в N. Теперь дорогу из M в N можно представить парой (s_i, t_j), где $i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3$. Значит, $S \times T$ – это множество дорог из M в N, количество которых равно $3 \cdot 5 = 15$.

2.3. Принцип включения и исключения

Теорема

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Доказательство теоремы может быть проведено методом математической индукции.

Пример. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Решение. Всего чисел, меньших тысячи, 999. Их них 333 делятся на 3, 199 делятся на 5, 142 делятся на 7, 66 делятся на 3 и на 5, 47 делятся на 3 и на 7, 28 делятся на 5 и на 7, 9 делятся на 3, на 5 и на 7.

Имеем: $999 - (333 + 199 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9) = 457$.

2.4. Комбинаторные схемы

1. ***Размещения с повторениями***

Задача формулируется следующим образом. Имеются элементы n различных видов, причём элементов каждого вида – неограниченное количество. Из этих элементов составляют всевозможные упорядоченные наборы длины k, в которых элементы одного вида могут повторяться. Такие наборы называются *размещениями с повторениями* из n по k. На каждое из k мест элемент можно выбрать n способами. По правилу произведения получаем, что общее число размещений с повторениями из n по k, обозначаемое $\widetilde{A_n^k}$, равно n^k.

Пример. Найти количество всех пятизначных чисел.

Решение. Введем пять множеств: $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда все пятизначные числа составят прямое произведение указанных множеств

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$. Согласно правилу произведения количество элементов во множестве $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$ равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$.

2. *Размещения без повторений*

Задача формулируется следующим образом. Имеется n различных элементов: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из них составляют всевозможные упорядоченные наборы длины k. Такие наборы называются *размещениями без повторений* из n по k, а их общее число обозначают A_n^k. При составлении данных наборов на первое место можно поставить любой из имеющихся n предметов. На второе место можно поставить только любой из $n - 1$ оставшихся. И так далее. Наконец, на k-е место можно поставить любой из $n - k + 1$ оставшихся предметов. По правилу произведения получаем, что общее число размещений без повторений из n по k равно $n(n - 1) \ldots (n - k + 1) = n!/(n - k)!$. Напомним, что $n! = n(n - 1) \ldots 1$, $0! = 1$.

Пример. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать? Как изменится ответ, если дополнительно потребовать, чтобы последний экзамен студент сдавал на восьмой день?

Решение. Искомое число способов равно $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$. Если известно, что последний экзамен студент будет сдавать на восьмой день, то существует 4 варианта выбора экзамена на последний день и A_7^3 вариантов распределения оставшихся 3 экзаменов в течение 7 дней, поэтому общее число способов равно $4 \cdot A_7^3 = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$.

3. *Перестановки без повторений*

Пусть имеется n различных элементов. Будем образовывать из них всевозможные упорядоченные наборы длины n. Такие наборы называются перестановками из n элементов, а их общее число обозначается P_n. Число всех перестановок равно $A_n^n = n!$.

Пример. Сколькими способами можно переставить элементы множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n) $n!$ способами; каждому способу размещения четных чисел на местах с четными номерами соответствует

$n!$ способов размещения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому общее число перестановок указанного типа по правилу произведения равно $n! \cdot n! = (n!)^2$.

4. *Сочетания без повторений*

Пусть имеется n различных элементов. Сочетаниями из n по k называются все возможные неупорядоченные наборы объёма k, образованные из этих элементов. Общее число сочетаний обозначают через C_n^k. Определим это число. Составим все сочетания из n по k. Затем для каждого сочетания будем образовывать всевозможные перестановки его элементов. Тогда мы получим все размещения без повторений из n по k. Их число равно $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Учитывая, что каждое сочетание дает $k!$ размещений, по правилу произведения можно записать $C_n^k \times k! = A_n^k$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ или $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Замечание. Для числа всех сочетаний без повторений из n по k используются также обозначения $C(n, k)$ и $\binom{n}{k}$.

Пример 1. Сколькими способами можно составить комиссию в составе трех человек, выбирая их из четырех супружеских пар, если
1) в комиссию могут входить любые три из восьми человек;
2) в комиссию не могут входить члены одной семьи.

Решение.

1. Если в комиссию входят любые 3 из 8 человек, то число всех возможных комиссий равно $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$.

2. Если в комиссию не входят члены одной семьи, то в ней будут представлены 3 из 4 семей. Эти семьи можно выбрать $C_4^3 = 4$ способами. После этого в каждой из них можно двумя способами выбрать представителя – мужа или жену. По правилу произведения число всех возможных комиссий равно $C_4^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

5. *Сочетания с повторениями*

Имеются предметы n различных видов, причём элементов каждого вида неограниченное количество. Будем образовывать из данных элементов всевозможные неупорядоченные наборы объёма k. Такие наборы называют сочетаниями с повторениями из n по k, а количество всех таких наборов обозначают $\widetilde{C_n^k}$. Можно доказать, что $\widetilde{C_n^k} = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$.

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать три из двенадцати букв А, А, А, Т, Т, Т, Г, Г, Г, Ц, Ц, Ц?

Решение. В рассматриваемом случае $n = 4$ (имеем четыре сорта предметов: А, Т, Г, Ц), а $k = 3$. Поэтому $\widetilde{C_4^3} = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = 20$.

Пример 2. Трое ребят собрали в саду 63 яблока. Сколькими способами они могут их разделить между собой?

Решение. Поставим в соответствие каждому способу деления яблок между ребятами сочетание с повторениями следующим образом. Типами элементов будут ребята, а элементами – яблоки. Таким образом, имеем три типа элементов ($n = 3$), из которых предстоит составить различные наборы объёма $k = 63$. Наличие в наборе элемента определённого типа означает принадлежность данного яблока соответствующему мальчику. Общее число способов разделить яблоки между ребятами равно $\widetilde{C_3^{63}} = C_{65}^2 = 2080$.

6. *Перестановки с повторениями*

Задача формулируется следующим образом. Имеется n предметов, среди них n_1 элементов первого вида, n_2 элементов второго вида и т. д., n_k элементов k-го вида, причём $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Упорядоченные наборы длины n, составленные из этих элементов, называются перестановками с повторениями. Их общее количество обозначается $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Можно доказать, что

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$

Пример 1. Сколько существует различных перестановок букв слова «Уссури»?

Решение.
$$P(2, 1, 1, 2) = \frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 180.$$

Пример 2. Подсчитать количество различных перестановок цифр числа 825824, при которых никакие 2 одинаковые цифры не идут друг за другом.

Решение. Общее количество различных перестановок цифр числа 825824 равно $P(2, 2, 1, 1) = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 180$. Если две одинаковые цифры стоят рядом, мы можем считать эту двойную цифру единым символом. Тогда количество перестановок, содержащих этот символ, равно $P(2, 1, 1, 1) = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 60$. Заметим, что количество таких случаев равно $C_2^1 = 2$. Аналогично, количество перестановок, в которых присутствует пара двойных символов, равно $P(1, 1, 1, 1) = 4! = 24$. В итоге, применяя формулу включений и исключений, будем иметь $180 - 2 \cdot 60 + 24 = 84$.

2.5. Полиномиальная формула

Рассмотрим вопрос о том, как раскрывать скобки при вычислении значения выражения вида $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n$.

Теорема. Значение выражения $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n$ равно сумме всех возможных слагаемых вида

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k},$$

где $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, т. е.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \ge 0, \ldots r_k \ge 0 \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}.$$

Пример. Найти коэффициент при x^{34} в разложении выражения $(x^2 - x^8 + 2)^{15}$ по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Решение. Общий член разложения по полиномиальной формуле имеет вид

$$(x^2)^m \cdot (-x^8)^n \cdot 2^k \cdot P(m, n, k),\ m + n + k = 15.$$

Для отыскания всех случаев, в которых возникает x^{34}, решаем в целых неотрицательных числах уравнение $2m + 8n = 34$. Выразим m: $m = 17 - 4n$. Выпишем все подходящие случаи:

$n = 1 \Rightarrow m = 13$,

$n = 2 \Rightarrow m = 9$,

$n = 3 \Rightarrow m = 5$,

$n = 4 \Rightarrow m = 1$.

Для каждой найденной пары значений m и n значение k находим из уравнения $m + n + k = 15$. Получим 4 набора (m, n, k): (13, 1, 1), (9, 2, 4), (5, 3, 7), (1, 4, 10).

Слагаемые, содержащие x^{34}, таковы:

$$(x^2)^{13} \cdot (-x^8)^1 \cdot 2^1 \cdot P(13, 1, 1),\ (x^2)^5 \cdot (-x^8)^3 \cdot 2^7 \cdot P(5, 3, 7),$$

$$(x^2)^9 \cdot (-x^8)^2 \cdot 2^4 \cdot P(9, 2, 4),\ (x^2)^1 \cdot (-x^8)^4 \cdot 2^{10} \cdot P(1, 4, 10).$$

В итоге коэффициент при x^{34} имеет вид:

$$15!\cdot\left(-\frac{2}{13!}+\frac{2^4}{9!\cdot 2!\cdot 4!}-\frac{2^7}{5!\cdot 3!\cdot 7!}+\frac{2^{10}}{4!\cdot 10!}\right).$$

2.6. Биномиальная формула

1. ***Бином Ньютона***

Частный случай полиномиальной формулы при $k = 2$ даёт биномиальную формулу

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

Выражение $(a + b)^n$ называется биномом Ньютона.

Пример. Найти наибольший член разложения бинома $(3{,}2+\sqrt{10})^{20}$.

Решение. Пусть наибольший член разложения есть

$$S_k = C_{20}^k \cdot 3{,}2^{20-k}\cdot(\sqrt{10})^k.$$

Тогда $S_k > S_{k-1}$ и $S_k > S_{k+1}$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} C_{20}^k \cdot 3{,}2^{20-k}\cdot(\sqrt{10})^k > C_{20}^{k-1}\cdot 3{,}2^{20-(k-1)}\cdot(\sqrt{10})^{k-1} \\ C_{20}^k \cdot 3{,}2^{20-k}\cdot(\sqrt{10})^k > C_{20}^{k+1}\cdot 3{,}2^{20-(k+1)}\cdot(\sqrt{10})^{k+1} \end{cases},$$

то есть

$$\begin{cases} \dfrac{20!}{k!(20-k)!}\cdot 3{,}2^{20-k}\cdot(\sqrt{10})^k > \dfrac{20!}{(k-1)!(20-(k-1))!}\cdot 3{,}2^{20-(k-1)}\cdot(\sqrt{10})^{k-1} \\ \dfrac{20!}{k!(20-k)!}\cdot 3{,}2^{20-k}\cdot(\sqrt{10})^k > \dfrac{20!}{(k+1)!(20-(k+1))!}\cdot 3{,}2^{20-(k+1)}\cdot(\sqrt{10})^{k+1} \end{cases}.$$

После упрощений имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{10}}{k} > \dfrac{3{,}2}{21-k} \\ \dfrac{3{,}2}{20-k} > \dfrac{\sqrt{10}}{k+1} \end{cases},$$

а значит,

$$\begin{cases} \sqrt{10}(21-k) > 3{,}2k \\ 3{,}2(k+1) > \sqrt{10}(20-k) \end{cases},$$

откуда получаем

$$\begin{cases} k(3{,}2+\sqrt{10}) < 21\sqrt{10} \\ k(3{,}2+\sqrt{10}) > 20\sqrt{10}-3{,}2 \end{cases}.$$

Отсюда вытекает двойное неравенство для k:

$$\frac{20\sqrt{10}-3,2}{3,2+\sqrt{10}}<k<\frac{21\sqrt{10}}{3,2+\sqrt{10}}\ .$$

Приближенно получаем 9,438 < k < 0,438.

Единственное целое значение k, удовлетворяющее этому двойному неравенству, равно 10. Следовательно, наибольшим членом разложения бинома является

$$S_{10}=C_{20}^{10}\cdot 3,2^{10}\cdot(\sqrt{10})^{10}=\frac{20!}{10!\cdot 10!}\cdot 3,2^{10}\cdot(\sqrt{10})^{10}\,.$$

2. *Биномиальные коэффициенты*

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Отметим некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

a) $C_n^0=C_n^n=1,\ C_n^1=C_n^{n-1}=n$.

Доказательство.

$$C_n^0=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1,\ C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!}=1,$$

$$C_n^1=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n!}{(n-1)!}=n\,,\ C_n^{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!}=\frac{n!}{(n-1)!}=n\,.$$

b) Соотношение симметричности.

$$C_n^k=C_n^{n-k}\,.$$

Доказательство.

$$C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=C_n^k\,.$$

Эта формула имеет комбинаторный смысл, ибо, определяя k предметов, выбранных из n, мы тем самым определяем $n-k$ невыбранных предметов.

c) Свойство сложения.

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}\,.$$

Доказательство.

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{n-k}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(n-k)!(n-1-(n-k))!}=\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!}+$$

$$+\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(n-k)(k-1)!}=\frac{(n-1)!(n-k+k)}{k(k-1)!(n-k-1)!(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k\,.$$

d) $\left.\begin{array}{l} C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \ldots + C_n^n = 2^n \\ C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0 \end{array}\right\}$ – свойства сумм.

Доказательство.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k .$$

$$0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k .$$

3. *Треугольник Паскаля*

Из третьего свойства биномиальных коэффициентов вытекает эффективный способ рекуррентного вычисления значений биномиальных коэффициентов, который можно представить в графической форме, известной как треугольник Паскаля.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

В этом равнобедренном треугольнике каждое число (кроме единиц на боковых сторонах) является суммой двух чисел, стоящих над ними. Число сочетаний C_n^k находится в (n + 1)-м ряду на (k + 1)-м месте.

Контрольные вопросы

1. В каком случае используется формула включения и исключения?
2. Чему равно число подмножеств конечного множества?
3. Чему равно число перестановок без повторений элементов конечного множества?
4. Чему равно число перестановок с повторениями элементов конечного множества?
5. Чему равно число размещений без повторений?
6. Чему равно число размещений с повторениями?
7. Чему равно число сочетаний без повторений?
8. В каком случае используется формула бинома Ньютона, полиномиальная формула?

3. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

3.1. Элементарные булевы функции

Булева функция (или *логическая функция*, или *функция а́лгебры ло́гики*) от n аргументов – это отображение $f: B^n \to B$, где $B = \{0, 1\}$ – *булево множество*. Элементы булева множества $\{1, 0\}$ обычно интерпретируют как логические значения «истинно» и «ложно», хотя в общем случае они рассматриваются как формальные символы, не несущие определённого смысла. Неотрицательное целое число n называют арностью или местностью функции, в случае $n = 0$ булева функция превращается в *булеву константу*. Элементы декартова произведения B^n называют *булевыми векторами*.

Как известно, B^n содержит 2^n элементов (упорядоченных наборов). Само множество B^n можно естественным образом упорядочить, для чего достаточно считать каждый набор двоичным разложением целого числа k $(0 \le k \le 2^n - 1)$, записанного с помощью n знаков. Упорядочение наборов проводится по числу k .

Например, при $n = 3$ множество B^3 может быть упорядочено следующим образом.

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Такое упорядочение еще называют «скользящая единица».

Множество всех булевых функций от любого числа аргументов часто обозначается P_2, а от n аргументов – $P_2(n)$. Переменные, принимающие значения из булева множества, называются *булевыми переменными*. Булевы функции названы по фамилии математика Джорджа Буля.

Булеву функцию можно задать непосредственно таблицей, называемой *таблицей истинности* данной функции.

Две функции от одних и тех же переменных *равны*, если совпадают их таблицы истинности.

Упорядоченность наборов B^n позволяет определять булеву функцию только последним столбцом (который иногда для экономии места записывается в строчку).

Заметим, что все функции n переменных также можно перенумеровать по принципу «скользящей единицы». Теоретически число таких функций – 2^{2n}, но некоторые из них являются по существу функциями меньшего числа переменных, а две – вообще константами.

Наборы u и v значений переменных называются *соседними по i-й переменной*, если они отличаются только i-й координатой, то есть имеют вид

$$u = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ... a_n),\ v = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ... a_n).$$

Переменная x_i называется *фиктивной переменной* булевой функции f, если для любых наборов u и v, соседних по i-й переменной, выполняется равенство $f(u) = f(v)$. Переменная x_i называется существенной переменной булевой функции f, если существует хотя бы одна пара u, v наборов значений переменных, соседних по i-й переменной, такая, что справедливо неравенство $f(u) \neq f(v)$.

Функции f_1 и f_2 называются *равными*, если функцию f_2 можно получить из f_1 путем введения и (или) удаления фиктивных переменных.

Рассмотрим основные функции дискретной математики.

Функции одной переменной $y = f(x)$.

Перенумеруем эти функции (их 4) естественным образом и расположим в виде таблицы:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Видно, что $f_0(x) = 0$, а $f_3(x) = 1$, т. е. эти две функции не зависят от x, $f_1(x) = x$, т. е. она не меняет аргумента. Функция $f_2(x)$ – действительно содержательная функция. Она принимает значения, противоположные значениям аргумента, обозначается $\bar{x}$ и называется отрицанием.

Функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Число этих функций равно $2^4 = 16$. Перенумеруем и расположим их тоже в естественном порядке.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Рассмотрим более подробно эти функции. Две из них – $f_0 = 0$ и $f_{15} = 1$ – являются константами. Функции

$$f_3 = x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, f_{12} = \bar{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, f_5 = y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, f_{10} = \bar{y} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

являются по существу функциями одной переменной.

Наиболее важные функции двух переменных имеют специальные названия и обозначения.

Перечислим 7 важнейших функций.

1. Конъюнкция (функция «и»).

$$f_1 = x \wedge y = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что конъюнкция – это фактически обычное *умножение* (нулей и единиц). Иногда эту функцию обозначают $x\&y$ или xy.

2. Дизъюнкция (функция «или»).

$$f_7 = x \vee y = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

3. Импликация (следование).

$$f_{13} = x \to y = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Иногда импликацию обозначают $x \supset y$ (читается «из x следует y»).

4. Сложение по модулю 2.

$$f_6 = x \oplus y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Эквивалентность или подобие.

$$f_9 = x \sim y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентность обозначают также $x \leftrightarrow y$.

6. Штрих Шеффера.

$$f_{14} = x | y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Иногда эту функцию называют «не и» (так как она равна отрицанию конъюнкции).

7. Стрелка Пирса (иногда эту функцию называют штрих Лукасевича).

$$f_8 = x \downarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта функция является отрицанием дизъюнкции, поэтому иногда ее называют «не или».

Три оставшиеся функции – f_2, f_4 и f_{11} – особого значения в дискретной математике не имеют.

Булевы функции $x \oplus y$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x|y$, $\bar{x}$, $x \downarrow y$, x, 1, 0 называют элементарными булевыми функциями.

3.2. Реализация функций формулами

Используя элементарные булевы функции, можно строить формулы (определим их индуктивно).

Пусть $M \subseteq P_2$, тогда

1) каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in M$ называется формулой над M;
2) если $g(x_1, \ldots, x_m) \in M$, $G_1, \ldots, G_m$ – либо переменные, либо формулы над M, то выражение $g(G_1 \ldots G_m)$ – формула над M.

Для обозначения формулы будем использовать запись вида $N(f_1, ..., f_s)$, имея в виду функции, участвующие в построении формулы, или $N(x_1, ..., x_k)$, имея в виду переменные, входящие в формулу. Формулы G_i, участвующие в построении $g(G_1, ..., G_n)$, называются *подформулами формулы* $g(G_1, ..., G_n)$.

Формулы называются эквивалентными, если реализуемые ими функции равны.

При записи формул для указания порядка выполнения операций используются скобки. Число скобок в записи формул можно уменьшить, если ввести следующие правила:

- приоритет применения связок возрастает в следующем порядке: $\sim, \to, \vee, \&$;
- при отсутствии скобок сначала выполняется операция &, а затем операция $\oplus$;
- в скобки не заключается переменная или формула со стоящим над ней знаком отрицания.

Пример 1. Построить таблицу булевой функции, заданной формулой

$$f(x, y, z) = x \to y \wedge z \vee \bar{x}.$$

Решение. Выпишем в таблицу под символами переменных все наборы значений, которые эти переменные принимают, а под символами булевых операций будем выписывать значения функций, соответствующие этим наборам. Ниже символов булевых функций написаны номера столбцов, над которыми производится действие.

1	2	3	4	5	6	7
x	y	z	$\bar{x}$ (1)	$y \wedge z$ (2 и 3)	$y \wedge z \vee \bar{x}$ (5 и 4)	$x \to y \wedge z \vee \bar{x}$ (1 и 6)
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Пример 2. Написать таблицу функции $h(x, y) = f_2(y, y, f_1(x, y, x))$

$x\,y\,z$	f_1	f_2
000	1	0
001	0	1
010	0	1
011	1	0
100	0	1
101	1	0
110	1	1
111	1	1

Решение.

При $x = 0$, $y = 0$

$$f_1(x, y, x) = f_1(0, 0, 0) = 1,\ f_2(y, y, f_1(x, y, x) = f_2(0, 0, 1) = 1.$$

При $x = 0$, $y = 1$

$$f_1(x, y, x) = f_1(0, 1, 0) = 0,\ f_2(y, y, f_1(x, y, x) = f_2(1, 1, 0) = 1.$$

При $x = 1$, $y = 0$

$$f_1(x, y, x) = f_1(1, 0, 1) = 1,\ f_2(y, y, f_1(x, y, x) = f_2(0, 0, 1) = 1.$$

При $x = 1$, $y = 1$

$$f_1(x, y, x) = f_1(1, 1, 1) = 1,\ f_2(y, y, f_1(x, y, x) = f_2(1, 1, 1) = 1$$

Следовательно, $h = (1111)$.

3.3. Некоторые свойства элементарных функций

1. Идемпотентность & и ∨: $x \,\&\, x = x$, $x \vee x = x$.
2. Коммутативность &, ∨, ⊕, ~, ↓, |:

$$x \,\&\, y = y \,\&\, x,\ x \vee y = y \vee x,\ x \oplus y = y \oplus x,$$
$$x \sim y = y \sim x,\ x \downarrow y = y \downarrow x,\ x | y = y | x.$$

3. Ассоциативность &, ∨, ⊕, ~: $(xy)z = x(yz)$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$,

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,\ \ x \sim (y \sim z) = (x \sim y) \sim z.$$

Ввиду ассоциативности указанных операций в формулах вида xyz можно не ставить никаких скобок.

4. Дистрибутивность

а) & по отношению к ∨: $x \,\&\, (y \vee z) = xy \vee xz$,

б) ∨ по отношению к &: $x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$,

в) & по отношению к ⊕: $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.

5. Инволюция $\overline{\overline{x}} = x$.

6. Правила де Моргана: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$ и $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

7. Законы действия с 0 и 1:

$$x \vee 0 = x,\ x \vee 1 = 1,\ x \vee \bar{x} = 1,\ x \,\&\, 0 = 0,\ x \,\&\, 1 = x,$$

$$x \,\&\, \bar{x} = 0,\ x \oplus 1 = \bar{x},\ x \oplus 0 = x.$$

8. Самодистрибутивность импликации $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

9. $x|y = \overline{xy}$, $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$, $x \to y = \bar{x} \vee y$, $x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$,
$x \sim y = \overline{x \oplus y} = xy \vee \overline{xy}$.

Все перечисленные здесь равенства доказываются с помощью определений соответствующих функций.

Следствия из свойств элементарных функций.

1. Законы склеивания.

$xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x_1 = x$ (дистрибутивность & относительно $\vee$);
$(x \vee y) \,\&\, (x \vee \bar{y}) = x \vee \bar{y}\, y = x \vee 0 = x$ (дистрибутивность $\vee$ относительно &).

2. Законы поглощения.

$x \vee xy = x(1 \vee y) = x \cdot 1 = x$; $x \,\&\, (x \vee y) = x \vee xy = x$.

Свойства элементарных функций позволяют упрощать формулы.

Пример. Преобразовать формулу

$$f(x, y, z) = xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z}$$

в эквивалентную ей, но не содержащую фиктивных переменных.

Решение.

$$xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z} = xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}y\bar{z} =$$

$$= xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz = xy \vee (\bar{y} \vee y)z \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee 1 \cdot z \vee \bar{x}y\bar{z} =$$

$$= xy \vee z \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee (z \vee \bar{x}y)(z \vee \bar{z}) = xy \vee (z \vee \bar{x}y) \cdot 1 =$$

$$= xy \vee z \vee \bar{x}y = y \vee z.$$

3.4. Принцип двойственности

Функция $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ называется двойственной к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Пример 1. Покажем с помощью таблицы истинности, что константа 0 двойственна к 1.

x	f	f^*
0	0	1
1	0	1

Функции $f(x) = x$ и $g(x) = \bar{x}$ двойственны сами к себе.

x	f	f^*	g	g^*
0 1	0 1	0 1	1 0	1 0

Теорема. Пусть функция $h(x_1, ..., x_n)$ реализована формулой

$$h(x_1, ..., x_n) = g(G_1, ..., G_m) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)),$$

где какие-то переменные могут быть фиктивными. Тогда

$$h^*(x_1, ..., x_n) = g^*(f_1^*(x_1, ..., x_n), ..., f_m^*(x_1, ..., x_n)).$$

Другими словами, если функция задана некоторой формулой, то для получения двойственной функции надо в этой формуле все знаки функций заменить на двойственные, 0 на 1, 1 на 0.

3.5. Нормальные формы

Простой (*элементарной*) *конъюнкцией* называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Например, $\bar{x}yz$ является простой конъюнкцией.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция различных простых конъюнкций.

Например, выражение $xy \vee \bar{y}z$ является ДНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и том же порядке.

Например, выражение $x \vee y\bar{z}$ является ДНФ, но не СДНФ. Выражение $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz$ является СДНФ.

Аналогичные определения (с заменой конъюнкции на дизъюнкцию и наоборот) верны для КНФ и СКНФ. Приведем точные формулировки.

Простой (*элементарной*) *дизъюнкцией* называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная входит не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание). Например, выражение $x \vee \bar{y} \vee z$ – простая дизъюнкция.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция различных простых дизъюнкций (например, выражение $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee z)(y \vee \bar{z})$ – КНФ).

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая КНФ, у которой в каждую простую дизъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одинаковом порядке.

Например, выражение $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$ является СКНФ.

Приведем алгоритмы переходов от одной формы к другой. Естественно, что в некоторых конкретных случаях применение алгоритмов бывает более трудоемким, чем применение более простых преобразований, оправданных видом данной формы.

Переход от ДНФ к КНФ.

Ставим над ДНФ два отрицания и с помощью правил де Моргана (не трогая верхнее отрицание) и дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции приводим отрицание ДНФ снова к ДНФ. Отрицание (верхнее) полученной ДНФ (снова по правилу де Моргана) сразу дает нам КНФ.

Пример.

$$xy \vee y\bar{z} = \overline{\overline{xy \vee y\bar{z}}} = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{y\bar{z}}} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z)} = \overline{\bar{y} \vee \bar{x}z} = y \cdot \overline{\bar{x}z} = y \cdot (x \vee \bar{z}).$$

Заметим, что КНФ можно получить и из первоначального выражения, если вынести y за скобки.

Для перехода от ДНФ к КНФ можно также использовать дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Переход от КНФ к ДНФ.

Переход осуществляется простым раскрытием скобок и использованием закона поглощения.

Пример.

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z}) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}) = x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee$$
$$\vee\, x\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}\bar{z} = x\bar{y} \vee \bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} = \bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}.$$

Таким образом, мы получили ДНФ. Тот же результат можно было получить, заметив сразу, что выражение в третьих скобках поглощает выражение в первых скобках, и воспользовавшись дистрибутивностью дизъюнкции относительно конъюнкции.

Переход от ДНФ к СДНФ.

Если в какой-то простой конъюнкции недостает переменной, например z, вставляем в нее выражение $\bar{z} \vee z = 1$, после чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктные слагаемые не пишем). Например,

$$\bar{x}y \vee \bar{y}z = \bar{x}y \cdot 1 \vee 1 \cdot \bar{y}z = \bar{x}y(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}z =$$

$$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Переход от КНФ к СКНФ.

Этот переход осуществляется способом, аналогичным предыдущему: если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например z), то добавляем в нее выражение $\bar{z} \cdot z = 0$ (это не меняет самой дизъюнкции), после чего раскрываем скобки с использованием дистрибутивного закона. Например,

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = (x \vee y \vee z\bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) =$$

$$= (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Таким образом, из КНФ получена СКНФ.

3.6. Разложение булевой функции по переменным

Обозначим

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, \sigma = 0, \\ x, \sigma = 1. \end{cases}$$

Посмотрим, чему равно x^{σ} при разных значениях x и σ.

$x \backslash \sigma$	0	1
0	1	0
1	0	1

Из таблицы следует, что $x^{\sigma} = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$.

Теорема. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$. Тогда для любого $1 \le m \le n$ справедливо представление

$$f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\ldots\&\, x_m^{\sigma_m} \,\&\, f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,x_{m+1},\ldots,x_n),$$

где дизъюнкция берется по всем наборам из 0 и 1. Такое представление называется разложением функции f по переменным $x_1, \ldots, x_m$.

Пример 1. $m = 1$, запишем разложение по переменной x_1.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2,\ldots,x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 2. $m = 2$, запишем разложение по переменным x_1 и x_2.

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2)} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \& f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \cdots, x_n) =$$

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 f(0{,}0, x_3, \cdots, x_n) \vee \overline{x}_1 x_2 f(0{,}1, x_3, \cdots, x_n) \vee x_1\overline{x}_2 f(1{,}0, x_3, \cdots, x_n)$$
$$\vee\, x_1 x_2 f(1{,}1, x_3, \cdots, x_n)$$

Следствие 1. Любую функцию $f(x_1, ..., x_n)$, не равную тождественно нулю, можно представить в виде

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1 \cdots \sigma_n): f(\sigma_1 \cdots \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Другими словами, всякую отличную от нуля функцию можно представить в виде СДНФ с помощью ее таблицы истинности. Для этого нужно взять только те наборы значений переменных $(x_1, x_2, ..., x_{n)}$, для которых $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, и составить простые конъюнкции по следующему правилу: если $x_i = 0$, то включаем в конъюнкцию $\overline{x_\iota}$, если $x_i = 1$, то включаем x_i. Составляя дизъюнкцию этих простых конъюнкций, придем к СДНФ.

По аналогии с представлением любой функции (не равной тождественному нулю) в виде СДНФ можно функцию (не равную тождественной 1) представить в виде СКНФ: простая дизъюнкция составляется для тех наборов значений переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которых $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, причем если $x_i = 1$, то в этой дизъюнкции берем $\overline{x_\iota}$, если же $x_i = 0$, то берем x_i.

Следствие 2. Любую логическую (булеву) функцию можно выразить через три логические функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

3.7. Минимизация СДНФ

Доказано, что любую функцию (кроме тождественного нуля) можно представить в виде СДНФ. На практике часто бывает удобно получить (вместо СДНФ) как можно более «короткую» ДНФ. Словам «короткая ДНФ» можно придать разный смысл.

Элементарная конъюнкция E называется *импликантой* булевой функции f, если $E \to f \equiv 1$.

Импликанта E называется *простой*, если при удалении любой буквы из нее она перестает быть импликантой булевой функции.

Сокращенной ДНФ называется ДНФ, состоящая из всех простых импликант данной булевой функции.

Ядровая импликанта – импликанта, удаление которой из ДНФ некоторой булевой функции f приводит к ДНФ, не равносильной f.

Минимальная ДНФ данной функции f – ДНФ, имеющая наименьшее число символов переменных из всех ДНФ, задающих функцию f.

Тупиковой ДНФ функции f называется такая ее ДНФ, состоящая из простых импликант, что удаление из нее любой конъюнкции нарушает равносильность ДНФ данной функции.

Сложностью ДНФ (КНФ) называется количество символов переменных, использованных в записи формулы.

Сокращенная ДНФ может быть получена из СДНФ последовательным применением, пока это возможно, формулы склеивания. Рассмотрим на примере получение сокращенной ДНФ, а затем минимальной с помощью матрицы Квайна.

Пусть $f(x, y, z, t) = (1101\ 1010\ 1101\ 1100)$.

$x\ y\ z\ t$	$f(x, y, z, t)$
0000	1
0001	1
0010	0
0011	1
0100	1
0101	0
0110	1
0111	0
1000	1
1001	1
1010	0
1011	1
1100	1
1101	1
1110	0
1111	0

Построим сокращенную ДНФ из СДНФ. Для удобства вместо символов переменных будем работать только с показателями степеней переменных. Например, вместо $\bar{x}z$ будем употреблять набор 0–1–. Тогда СДНФ функции будет соответствовать множество всех ее единичных наборов (т. е. тех наборов, на которых функция принимает значение 1). Выпишем единичные наборы данной булевой функции в таблицу, разбив их на группы в соответствии с количеством единичных компонент в наборах.

Тогда для применения формулы склеивания достаточно просмотреть всевозможные пары наборов, входящих в соседние группы.

<table>
<tr><td>0 0 0 0 +</td><td rowspan="2">0 0 0 − +
0 − 0 0 +
− 0 0 0 +</td><td rowspan="2">− 0 0 −
− − 0 0</td></tr>
<tr><td>0 0 0 1 +
0 1 0 0 +
1 0 0 0 +</td></tr>
<tr><td>0 0 1 1 +
0 1 1 0 +
1 0 0 1 +
1 1 0 0 +</td><td rowspan="2">0 0 − 1 +
0 1 − 0
− 0 0 1 +
1 0 0 − +
− 1 0 0 +
1 − 0 0 +</td><td rowspan="3">− 0 – 1
1 − 0 −

III полоса</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1 0 1 1 +
1 1 0 1 +
I полоса</td></tr>
<tr><td>− 0 1 1 +
1 0 − 1 +
1 − 0 1 +
1 1 0 − +
II полоса</td></tr>
</table>

Результаты склеивания наборов из I полосы поместим во II полосе, а наборы, участвующие в склеиваниях, пометим крестиком. Во второй полосе снова применяем, насколько возможно, операцию склеивания, записывая результаты в III полосу, и т. д. После завершения процедуры склеивания все простые импликанты попадут в таблицу и не будут помечены крестиком.

Сокращенная ДНФ данной булевой функции имеет вид:

$$\bar{x}y\bar{t} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{t} \vee \bar{y}t \vee x\bar{z}.$$

Для получения из сокращенной ДНФ минимальной ДНФ изобразим следующую таблицу – матрицу Квайна.

№ простой импликанты	1	2	3	4	5
простые импликанты / единичные наборы	$\bar{x}y\bar{t}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{t}$	$\bar{y}t$	$x\bar{z}$
0 0 0 0		1	1		
0 0 0 1		1		$\boxed{1}$	
0 0 1 1				$\boxed{1}$	
0 1 0 0	$\boxed{1}$		1		
0 1 1 0	$\boxed{1}$				
1 0 0 0		1	1		$\boxed{1}$
1 0 0 1		1		$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
1 0 1 1				$\boxed{1}$	
1 1 0 0			1		$\boxed{1}$
1 1 0 1					$\boxed{1}$

Ядровыми импликантами будут 1, 4 и 5, так как для каждой из них найдется набор, на котором она одна принимает значение 1.

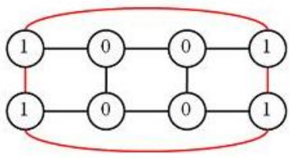
Выбираем наименьшее число столбцов таких, чтобы для каждой строки из данной таблицы и хотя бы одной единицы в этой строке нашелся бы по крайней мере один столбец из множества выбранных столбов, который содержит эту единицу. Тогда дизъюнкция членов, сопоставленных столбцам, является минимальной ДНФ.

Таким образом, однозначно выбираются столбцы 1, 4 и 5 (обведем единицы, стоящие в этих столбцах), и единицей остается обеспечить только строку 1. Для этого можно выбрать либо импликанту 2, либо импликанту 3. В результате получим две ДНФ:

$$\bar{x}y\bar{t} \vee \bar{y}t \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \text{ и } \bar{x}y\bar{t} \vee \bar{y}t \vee x\bar{z} \vee \bar{z}\bar{t}.$$

Каждая из полученных ДНФ является минимальной для данной булевой функции и имеет сложность, равную количеству символов переменных в формуле, т. е. сложность 9.

Карта Карно́ – графический способ минимизации СДНФ и СКНФ, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями. Карты Карно рассматриваются как перестроенная соответствующим образом таблица истинности функции. Карты Карно можно рассматривать как определенную плоскую развертку n-мерного булева куба.



X_2X_3		00	01	11	10
X_1	1	1	0	0	1
	0	1	0	0	1

Рис. 1. Карта Карно для функции 3 переменных

В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, в котором каждое следующее число отличается от предыдущего только одним разрядом.

Задача нахождения минимальной ДНФ с помощью карты Карно сводится к задаче покрытия всех единиц карты Карно прямоугольниками возможно больших размеров, причем разрешается использовать только прямоугольники, площади которых выражаются натуральными степенями двойки или единицей. При построении покрытия нужно помнить о том, что левая и правая, а также верхняя и нижняя границы карты Карно отождествляются.

а

X_1	X_2	X_3	X_4	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

б

X_3X_4		00	01	11	10
X_1X_2	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

в

X_3X_4		00	01	11	10
X_1X_2	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

г

X_3X_4		00	01	11	10
X_1X_2	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

Рис. 2. Карта Карно для функции 4 переменных

Рассмотрим примеры применения карт Карно для минимизации СДНФ для функций трех и четырех переменных.

1. $f(x, y, z) = (0111\ 0011)$. Карта Карно для функции от трех переменных имеет вид:

yz \ x	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1

$x\,y\,z$	$f(x, y, z)$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	0
110	1
111	1

При отыскании минимальной ДНФ единицы карты Карно покрываем прямоугольниками размеров 2×2, 1×2, отвечающими импликантам y и $\bar{x}z$, соответственно, получаем минимальную ДНФ $y \vee \bar{x}z$.

2. $f(x, y, z, t) = (1111\ 1101\ 1010\ 0000)$. Карта Карно для функции от четырех переменных имеет вид:

$x\,y\,z\,t$	$f(x, y, z, t)$
0000	1
0001	1
0010	1
0011	1
0100	1
0101	1
0110	0
0111	1
1000	1
1001	0
1010	1
1011	0
1100	0
1101	0
1110	0
1111	0

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Покрываем единицы прямоугольниками возможно больших размеров, при этом стремимся к тому, чтобы количество прямоугольников было по возможности меньше. Получаем минимальную ДНФ:

$$\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}t \vee \bar{y}\bar{t}.$$

Сложность минимальной ДНФ равна 6.

Для получения минимальных КНФ с помощью карт Карно нужно образовывать покрытия прямоугольниками нулей и выписывать дизъюнкции, соответствующие выбранным прямоугольникам.

3.8. Полные системы. Примеры полных систем

Множество функций алгебры логики A называется *полной системой* (в P_2), если любую функцию алгебры логики можно выразить формулой над A.

Теорема 1. Система $A = \{\vee, \&, \neg\}$ является полной.

Доказательство. Если функция алгебры логики f отлична от тождественного нуля, то f представляется в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы, в которую входят лишь дизъюнкция, конъюнкция и отрицание. Если же $f \equiv 0$, то $f = x \cdot \bar{x}$. Теорема доказана.

Лемма 1. Если A – полная система и любая функция системы A может быть выражена формулой над некоторой другой системой B, то B также является полной системой.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию алгебры логики $f(x_1, ..., x_n)$ и две системы функций: $A = \{g_1, g_2, ...\}$ и $B = \{h_1, h_2, ...\}$. В силу того, что система A полна, функция f может быть записана в виде формулы над ней: $f(x_1, ..., x_n) = F(g_1, g_2, ...)$, где $g_i = \Phi_i(h_1, h_2, ...)$, то есть функция f представляется в виде $f(x_1, ..., x_n) = F(\Phi_1, \Phi_2, ...)$, иначе говоря, f может быть представлена формулой над B. Перебирая таким образом все функции алгебры логики, получим, что система B также полна. Лемма доказана.

Теорема 2. Следующие системы являются полными в P_2:

1. $\{x \vee y, \bar{x}\}$;
2. $\{x \cdot y, \bar{x}\}$;
3. $\{x | y\}$;
4. $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

Доказательство.

1. Известно (теорема 1), что система $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ полна. Покажем, что полна система $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$. Действительно, из закона де Моргана $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ получаем, что $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$, то есть

конъюнкция выражается через дизъюнкцию и отрицание, а значит, все функции системы A выражаются формулами над системой B. Согласно лемме 1 система B полна.

2. По закону де Моргана $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \Leftrightarrow x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$. Из леммы 1 следует истинность доказываемого утверждения.

3. $x|x = \bar{x}, x \cdot y = \overline{x|y} = (x|y)\big|(x|y)$. Согласно лемме 1 система полна.

4. $\bar{x} = x \oplus 1$. Согласно лемме 1 система полна.

Теорема доказана.

3.9. Теорема Жегалкина о представимости функции алгебры логики полиномом

Монотонной конъюнкцией от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется любое выражение вида $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot x_{i_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$, где $s \geq 1$, $1 \leq i_j \leq n$ $\forall j = 1, 2, \ldots, s$, все переменные различны ($i_j \neq i_k$, если $j \neq k$); либо просто 1.

*Полиномом Жегалкин*а над $x_1, \ldots, x_n$ называется выражение вида $K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 \oplus \ldots \oplus K_p$, где $p \geq 1$ и все K_j суть различные монотонные конъюнкции от $x_1, \ldots, x_n$; либо константа 0.

Теорема (Жегалкина). Любую функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно единственным образом представить в виде полинома Жегалкина над $x_1, \ldots, x_n$.

Доказательство.

1. Докажем существование полинома. Система $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$ полна, следовательно, любую функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать формулой над $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

2. Пользуясь дистрибутивностью, раскрываем все скобки в этой реализации и получаем, что $f(x_1, \ldots, x_n) = K_1' \oplus K_2' \oplus \ldots \oplus K_l'$, где любая K_i' – конъюнкция переменных и единиц.

3. Преобразуем все полученные конъюнкции в элементарные, пользуясь при этом коммутативностью и соотношениями $x \cdot x = x$, $1 \cdot 1 = 1$ и $A \cdot 1 = A$. Очевидно, все конъюнкции станут монотонными.

4. Преобразуем полученную сумму в полином Жегалкина, пользуясь при этом соотношениями $A \oplus A = A$ и $A \oplus 0 = A$. В результате получим либо $K_{i_1} \oplus K_{i_2} \oplus \ldots \oplus K_{i_m}$ либо константу 0.

Существование доказано.

2. Докажем единственность представления. Подсчитаем число различных всевозможных монотонных конъюнкций от n переменных. Для этого каждой конъюнкции поставим в соответствие набор из нулей и единиц по следующему правилу: i-й переменной соответствует единица на i-м месте, если переменная присутствует в монотонной конъюнкции, и ноль в противном случае. При этом константе единице поставим в соответствие нулевой набор. Очевидно, что построенное отображение биективно. Следовательно, всего существует 2^n различных монотонных конъюнкций от n переменных. Построим теперь биективное соответствие между множеством всевозможных сумм монотонных конъюнкций и множеством векторов длины 2^n. Занумеруем все монотонные конъюнкции номерами от 1 до 2^n. Если в сумму входит конъюнкция с номером i, в наборе длины 2^n на i-м месте пишем 1, если не входит, пишем 0. При этом константе ноль ставится в соответствие нулевой набор. Очевидно, такое отображение биективно. Всего таких различных сумм будет столько, сколько существует различных булевых векторов длины 2^n, то есть 2^{2^n}. Мы получили, что число различных полиномов Жегалкина совпадает с числом функций алгебры логики. Поскольку отображение из множества полиномов во множество функций сюръективно, то оно и биективно, так как множества полиномов Жегалкина над n переменными и функций алгебры логики от n переменных равномощны. Единственность доказана.

Из доказательства теоремы вытекает метод получения полинома Жегалкина для функции, заданной формулой. Для функции, заданной таблицей истинности, можно воспользоваться одним из следующих способов.

1 способ. Пусть $n = 3$. Справедлива формула

$$f(x, y, z) = \sum_{\substack{(a,b,c) \\ f(a,b,c)=1}} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}).$$

Сумма здесь понимается как сумма по модулю 2. Данная формула получается из СДНФ путем замен $a \vee b = a \oplus b$ (в общем случае $a \vee b = a \oplus b \oplus ab$, но для импликант a и b в СДНФ $ab = 0$) и $\bar{a} = a \oplus 1$. Она обобщается на случай любого числа переменных.

2 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

Пусть $n = 3$. Полином для булевой функции ищется в виде

$$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_4xy \oplus a_5xz \oplus a_6yz \oplus a_7xyz.$$

Неизвестные коэффициенты a_i находятся из системы уравнений, которая получается путём подстановки в данное выражение наборов значений переменных и соответствующих значений функции.

Пример. Для функции $\bar{x}(y\bar{z} \vee \bar{y}z)$ построить полином Жегалкина.

Решение. Для нахождения полинома Жегалкина нужно выразить все встречающиеся в данном выражении булевы функции через сумму Жегалкина (сложение по модулю два) и конъюнкцию, а затем, пользуясь свойствами функций, максимально упростить полученное выражение. Проделаем это для данной булевой функции.

$$\bar{x}(y\bar{z} \vee \bar{y}z) = \bar{x}(y\bar{z} \oplus \bar{y}z \oplus y\bar{z}\bar{y}z) = \bar{x}(y\bar{z} \oplus \bar{y}z \oplus 0) = \bar{x}(y\bar{z} \oplus \bar{y}z) =$$

$$=(x \oplus 1)(y(z \oplus 1) \oplus (y \oplus 1)z) = (x \oplus 1)(yz \oplus y \oplus yz \oplus z)=$$

$$=(x \oplus 1)(y \oplus z) = xy \oplus xz \oplus y \oplus z.$$

3.10. Понятие замкнутого класса. Замкнутость классов T_0, T_1 и L

1. *Понятие замкнутого класса*.

Пусть $A \subseteq P_2$. Тогда *замыканием* A называется множество всех функций алгебры логики, которые можно выразить формулами над A.

Обозначение: $[A]$.

Имеют место следующие свойства:

а) $[A] \supseteq A$;

б) $A \supseteq B \Rightarrow [A] \supseteq [B]$, причём может оказаться, что в левой части импликации строгое вложение, а в правой равенство, то есть $A \supset B \Rightarrow [A] \supseteq [B]$;

в) $[[A]] = [A]$.

Система функций алгебры логики A называется *полной*, если $[A] = P_2$.

Пусть $A \subseteq P_2$. Тогда система A называется ***замкнутым классом***, если замыкание A совпадает с самим A: $[A] = A$.

Утверждение. Пусть A – замкнутый класс, $A \neq P_2$ и $B \subseteq A$. Тогда B – неполная система (подмножество неполной системы будет также неполной системой).

Доказательство. $B \subseteq A \Rightarrow [B] \subseteq [A] = A \neq P_2 \Rightarrow$. $[B] \neq P_2$. Следовательно, B – неполная система. Утверждение доказано.

2. *Примеры замкнутых классов*.

Класс $T_0 = \{f(x_1, ..., x_n): f(0, ..., 0) = 0\}$ функций, сохраняющих нуль.

Классу T_0 принадлежат, например, функции $0, x, xy, x \vee y, x \oplus y$.

Классу T_0 не принадлежат функции $1, \bar{x}, x \to y, x|y, x \downarrow y, x \sim y$.

Подсчитаем число функций в классе T_0. Все функции, принадлежащие указанному классу, принимают на нулевом наборе нулевое значение. Таким образом, всего функций в классе T_0 столько, сколько существует булевых векторов длины $2^n - 1$ (первый разряд вектора длины 2^n необходимо равен нулю), то есть

$$|T_0| = 2^{2^n-1} = \frac{1}{2}2^{2^n}.$$

Теорема. Класс T_0 – замкнутый.

Доказательство. Пусть $\{f(x_1, ..., x_n), g_1(y_{11}, ..., y_{1m_1}), ..., g_n(y_{n1}, ..., y_{nm_n})\} \subseteq T_0$. Рассмотрим функцию $h(y_1, ..., y_r) = f(g_1(y_{11}, ..., y_{1m_1}, ..., g_n(y_{n1}, ..., y_{nm_n}))$. Среди переменных функций g_i могут встречаться и одинаковые, поэтому в качестве переменных функции h возьмём все различные из них. Тогда $h(0, ..., 0) = f(g_1(0, ..., 0), ..., g_n(0, ..., 0)) = f(0, ..., 0) = 0$, следовательно, функции h также сохраняет ноль. Рассмотрен только частный случай (без переменных в качестве аргументов). Однако поскольку тождественная функция ($g(x) = x$) сохраняет ноль, подстановка простых переменных эквивалентна подстановке тождественной функции, теорема доказана.

Класс $T_1 = \{f(x_1, ..., x_n): f(1, 1, ..., 1) = 1\}$ функций, сохраняющих единицу.

Классу T_1 принадлежат функции $1, x, xy, x \vee y, x \to y, x \sim y$.

Классу T_1 не принадлежат функции $0, \bar{x}, x \oplus y, x|y, x \downarrow y$.

Теорема. Класс T_1 замкнут.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Класс L линейных функций.

Функция алгебры логики $f(x_1, ..., x_n)$ называется линейной, если

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$.

Иными словами, в полиноме линейной функции нет слагаемых, содержащих конъюнкцию.

Классу L принадлежат функции 0, 1, $\bar{x} = x \oplus 1$, $x \sim y$, $x \oplus y$.

Классу L не принадлежат функции xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x|y$, $x \downarrow y$.

Теорема. Класс L замкнут.

Доказательство. Поскольку тождественная функция – линейная, достаточно рассмотреть только случай подстановки в формулы функций. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in L$ и $g_i \in L$. Достаточно доказать, что $f(g_1, \ldots, g_n) \in L$. Действительно, если не учитывать слагаемых с коэффициентами $a_i = 0$, то всякую линейную функцию можно представить в виде $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} \oplus a_0$. Если теперь вместо каждого x_{i_j} подставить линейное выражение, то получится снова линейное выражение (или константа единица или нуль).

Пример. Доказать, что булева функция $\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz$ является линейной.

Решение. Для доказательства нужно найти полином Жегалкина данной функции и убедиться в том, что степень этого полинома не выше первой.

$xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = |\text{склеиваем 1 с 3 и 2 с 4}| = xz \vee \bar{x}\bar{z} = xz \oplus \bar{x}\bar{z} \oplus xz\bar{x}\bar{z} = xz \oplus \bar{x}\bar{z} = xz \oplus (x \oplus 1)(z \oplus 1) = xz \oplus xz \oplus x \oplus z \oplus 1 = x \oplus z \oplus 1.$

3.11. Класс самодвойственных функций

Напомним, что функцией, *двойственной* к функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, называется функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется самодвойственной, если $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Класс самодвойственных функций обозначим буквой S.

Иначе говоря, $S = \{f \in P_2 : f = f^*\}$.

Классу S принадлежат функции x, $\bar{x}$, $x \oplus y \oplus z \oplus a$, $xy \vee yz \vee zx$.

Классу S не принадлежат функции 0, $x \vee y$, xy.

Теорема. Класс S замкнут.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $\forall i\ g_i(y_{i1}, \ldots, y_{ik_i}) \in S$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и

$$\Phi = f(g_1(y_{11}, \ldots, y_{1k_1}), \ldots, g_n(y_{n1}, \ldots, y_{nk_n})).$$

Тогда из принципа двойственности следует, что
$\Phi^* = f^*\left(g_1^*(y_{11}, \dots, y_{1k_1}), \dots, g_{\mathrm{n}}^*(y_{n1}, \dots, y_{nk_n})\right) = f(g_1(\dots), \dots, g_n(\dots))$.

Таким образом, мы получили, что $\Phi = \Phi^*$ и $\Phi \in S$. Теорема доказана.

Пример. Докажем, что функция $x \in y$ не является самодвойственной.

$$f^*(x, y) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = x \wedge y \neq x \vee y.$$

3.12. Класс монотонных функций

Говорят, что набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ предшествует набору $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, и пишут $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$, если $\alpha_i \leq \beta_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Замечание. Существуют наборы, для которых не применимо отношение упорядоченности, определённое выше. Например, наборы (0, 0, 1) и (0, 1, 0) не сравнимы.

Функция алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух сравнимых наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ выполняется импликация

$$\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}).$$

Класс всех монотонных функций обозначим буквой M.

Классу M принадлежат функции $0, 1, x, xy, x \vee y, xy \vee yz \vee zx$.

Классу M не принадлежат функции $\bar{x}, x|y, x \downarrow y, x \oplus y, x \sim y, x \to y$.

Теорема. Класс M замкнут.

Доказательство. Поскольку тождественная функция монотонна, достаточно проверить лишь случай суперпозиции функций. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in M$, для любого j $g_j(y_1, \dots, y_m) \in M$ и

$$\Phi(y_1, \dots, y_m) = f(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)).$$

Рассмотрим произвольные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, такие, что $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$. Обозначим $g_i(\tilde{\alpha}) = \gamma_i, g_i(\tilde{\beta}) = \delta_i$. Тогда для любого i имеем $g_i \in M$ и $g_i(\tilde{\alpha}) \leq g_i(\tilde{\beta})$, то есть $\forall i\ \gamma_i \leq \delta_i$. Положим $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Тогда по определению и в силу монотонности функции f $f(\tilde{\gamma}) \leq f(\tilde{\delta})$. Но

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = f(\tilde{\gamma}), \Phi(\tilde{\beta}) = f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = f(\tilde{\delta}),$$

а значит, $f(\tilde{\gamma}) \leq f(\tilde{\delta}) \Leftrightarrow \Phi(\tilde{\alpha}) \leq \Phi(\tilde{\beta})$, следовательно, $\Phi \in M$. Теорема доказана.

Пример. Докажем монотонность функции xy.

$$(0, 0) \prec (0, 1) \prec (1, 1), (0, 0) \prec (1, 0) \prec (1, 1).$$

$$f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = 0,$$

$f(1, 1) = 1$, следовательно,

$$f(0, 0) \le f(0, 1) \le f(1, 1),\ f(0, 0) \le f(1, 0) \le f(1, 1).$$

3.13. Теорема Поста о полноте системы функций алгебры логики

Классы T_0, T_1, S, L, M называются *классами Поста*.

Теорема (Поста). Система функций алгебры логики $A = \{f_1, f_2, ...\}$ является полной в P_2 тогда и только тогда, когда для каждого из классов Поста найдется во множестве A функция, не принадлежащая этому классу.

Пример. Можно ли из функции $f(x, y, z) = (1001\ 0100)$ с помощью суперпозиций получить $q(x, y, z) = (1001\ 0110)$? Верно ли, что $f(x, y, z) \in [q]$?

Решение. Проверим $f(x, y, z)$ на принадлежность классам Поста.

$f(0, 0, 0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$;

$f(1, 1, 1) = 0 \Rightarrow f \notin T_1$;

$(0,0,0) \prec (0,0,1)$ и $f(0, 0, 0) > f(0, 0, 1) \Rightarrow f \notin M$;

$(0,0,1)$ и $(1,1,0)$ – противоположные наборы, $f(0, 0, 1) = f(1, 1, 0) \Rightarrow f \notin S$;

$$f(x, y, z) = (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z =$$
$$= 1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus xyz \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xz =$$
$$= 1 \oplus y \oplus z \oplus x \oplus xy \oplus xyz.$$

Так как в полиноме Жегалкина функции f присутствуют конъюнкции, то $f \notin L$.

Итак, мы видим, что функция $f(x, y, z)$ не принадлежит ни одному из классов Поста, значит, система $\{f\}$ функционально полна и с помощью суперпозиций из f можно получить любую булеву функцию, в частности, $g(x, y, z)$.

Проверяя значения функции $g(x, y, z)$ на всех парах противоположных наборов, видим, что $g(0, 0, 0) = 1 = \overline{g(1,1,1)}$; $g(0, 0, 1) = 0 = \overline{g(1,1,0)}$; $g(0, 1, 0) = 0 = \overline{g(1,0,1)}$; $g(0, 1, 1) = 1 = \overline{g(1,0,0)}$. Значит, $g \in S$. Так как S – функционально замкнутый класс, то $[g] \subseteq S$, но $f \notin S$, значит, $f \notin [g]$.

Контрольные вопросы

1. Дайте словесное описание операций: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\sim$.
2. Чему равносильна конъюнкция контрапозиции и ее конверсии?
3. Существует ли СКНФ у тождественно истинной формулы алгебры высказываний?
4. Существует ли СДНФ у невыполнимой формулы?
5. Сколько слагаемых содержит СДНФ, построенная по функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной так, что на всех наборах значений переменных x_1, x_2, x_3 она принимает значение 1?
6. Сколько сомножителей содержит СКНФ, построенная по функции $f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = 0$?
7. Можно ли для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной так, что на всех наборах значений переменных x_1, x_2, x_3 она принимает значение 0, построить какую-либо совершенную нормальную форму?
8. Могут ли две релейно-контактные схемы, соответствующие одной и той же функции проводимости, иметь различное число реле?
9. Каково максимальное число слагаемых СДНФ для формулы $S(x_1, ..., x_n) \equiv 1$?
10. Каково максимальное число сомножителей СКНФ невыполнимой формулы $S(x_1, ..., x_n) \equiv 0$?
11. Если СДНФ формулы $S(x_1, x_2, x_3)$ содержит 3 слагаемых, сколько сомножителей содержит ее СКНФ?
12. С помощью какой связки можно записать любую формулу алгебры высказываний?
13. Сколько существует различных полиномов Жегалкина от трех переменных?
14. Сколько всего линейных функций от n переменных?
15. Может ли суперпозиция нелинейных функций дать линейную?
16. Как найти таблицу значений двойственной функции, если известна таблица значений исходной функции?
17. Каким свойством обладает таблица значений самодвойственной функции?
18. Сколько существует самодвойственных функций от n переменных?
19. Существуют ли булевы функции, являющиеся одновременно линейными и монотонными? Если да, то приведите пример таких функций и охарактеризуйте все такие функции.

4. ГРАФЫ И СЕТИ

4.1. Понятие графа

Графом G (*в широком смысле*) называется любая пара (V, E), где V – множество элементов произвольной природы, а E – семейство пар элементов из V, причем допускаются пары вида (v_i, v_i) и одинаковые пары (v_i, v_j), где $i \neq j$.

Если множества V и $\boldsymbol{E}$ конечны, то есть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, то граф называется *конечным*. Мы будем рассматривать только конечные графы.

Если пары в V рассматриваются как неупорядоченные, то граф называется *неориентированным*, если как упорядоченные, то граф называется *ориентированным* (*орграфом*).

Элементы множества V называются *вершинами* графа, а пары из E – его *ребрами*; в орграфе они называются *ориентированными ребрами* или *дугами*. Пара вида (v_i, v_i) называется *петлей* в вершине v_i. Если пара (v_i, v_j) встречается в E более одного раза, то говорят, что (v_i, v_j) – *кратное ребро*. Говорят, что ребро $e = (u, v)$ в неориентированном графе соединяет вершины u и v, а в ориентированном графе дуга $e = (u, v)$ идет из вершины u в вершину v.

Граф с петлями называют *псевдографом* (*псевдоорграфом*).

Граф с кратными ребрами, но без петель называют *мультиграфом* (*мультиорграфом*).

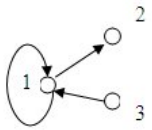
Графом (орграфом) в узком смысле называется граф (орграф) без петель и кратных ребер.

В дальнейшем мы в основном будем рассматривать графы в узком смысле.

Графы (орграфы) можно графически изображать следующим образом. Вершины будем изображать точками, а каждое ребро (дугу) (v_i, v_j) – линией, соединяющей точки v_i и v_j. Если (v_i, v_j) – дуга, то на этой линии будем указывать стрелку от v_i к v_j.

Пример 1

а)



б)

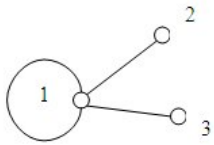
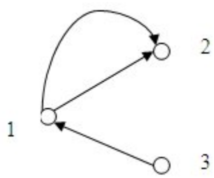


Рис. 3. Псевдографы: *а* – ориентированный псевдограф; *б* – неориентированный псевдограф

Пример 2

а)



б)

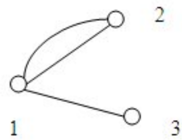
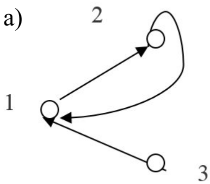


Рис. 4. Мультиграфы: *а* – ориентированный мультиграф; *б* – неориентированный мультиграф

Пример 3

а)



б)

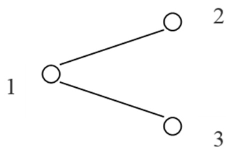


Рис. 5. Графы (в узком смысле, то есть без петель и кратных ребер): *а* – ориентированный граф; *б* – неориентированный граф

Привдём примеры аналитического задания графов.

Ориентированный псевдограф на рис. 3, *а* аналитически задается следующим образом:

$$G = (V, E),$$

где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1)\}$.

Неориентированный псевдограф на рис. 3, *б* аналитически задается следующим образом:

$$G = (V, E),$$

где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 1),(1, 2), (1, 3)\}$ или $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 1),$ $2, 1), (1, 3)\}$, так как в неупорядоченной паре $(2, 1) = (1, 2)$.

Ориентированный мультиграф на рис. 4, *а* аналитически задается следующим образом:

$$G = (V, E),$$

где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 2), (1, 2), (3, 1)\}$.

Граф называется взвешенным, если каждому ребру (дуге) приписан некоторый вес, выражаемый числом.

4.2. Смежность, инцидентность, степени вершин

Две вершины в графе (орграфе) G называются *смежными*, если существует ребро (дуга), которое их соединяет. Пусть v, w – вершины, а $e = (v, w)$ – ребро (дуга), их соединяющее. Тогда вершина v и ребро (дуга) e называются инцидентными, вершина w и ребро (дуга) e также называются *инцидентными*. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются смежными.

На рис. 3, *б* смежными являются вершины 1 и 2, 1 и 3, 1 и 1, ребро (1, 2) инцидентно вершинам 1 и 2, ребро (1, 3) инцидентно вершинам 1 и 3, ребро (1, 1) инцидентно вершине 1, смежными являются рёбра (1, 2) и (1, 1), (1, 3) и (1, 1), (1, 2) и (1, 3).

Степенью вершины v неориентированного графа G называется число $\delta(v)$ ребер, инцидентных v.

Полустепенью исхода вершины v орграфа G называется число $\delta^{-}(v)$ дуг, исходящих из вершины v (т. е. v является началом этих дуг). Полустепенью захода вершины v орграфа G называется число $\delta^{+}(v)$ дуг, входящих в вершину v (т. е. v является концом этих дуг).

Замечание. В случае неориентированного псевдографа вклад каждой петли при расчете степени инцидентной вершины равен 2. В случае ориентированного псевдографа каждая петля даёт вклад 1 при расчёте полустепени исхода и вклад 1 при расчёте полустепени захода.

Вершина графа, не инцидентная ни одному ребру, называется изолированной, а вершина, инцидентная только одному ребру (не петле), называется висячей.

Пример 1. Рассмотрим ориентированный псевдограф, изображенный на рис. 3, *а*. $\delta^-(1) = 2$, $\delta^+(1) = 2$, $\delta^-(2) = 0$, $\delta^+(2) = 1$, $\delta^-(3) = 1$, $\delta^+(3) = 0$.

Пример 2. Рассмотрим неориентированный псевдограф, изображенный на рис. 3, *б*. $\delta(1) = 4$, $\delta(2) = 1$, $\delta(3) = 1$.

Неориентированный граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин одинаковы.

4.3. Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом, соединяющим вершины υ_{n_0} и υ_{n_i} в графе G, называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $\upsilon_{n_0} e_{m_1} \upsilon_{n_1} e_{m_2} \ldots e_{m_i} \upsilon_{n_i}$, в которой любые два соседних элемента инцидентны, причём для орграфа необходимо, чтобы ребро e_{m_k} исходило из вершины $\upsilon_{n_{k-1}}$ и входило в вершину υ_{n_k}. Вершины υ_{n_0} и υ_{n_i} называются начальной и конечной вершинами маршрута, остальные вершины называются внутренними. Число ребер в маршруте называется длиной маршрута. Заметим, что для задания маршрута достаточно указать начальную вершину и последовательность рёбер. В случае графа без кратных рёбер для задания маршрута достаточно указать последовательность вершин.

Если начальная и конечная вершины маршрута совпадают, то маршрут называется *замкнутым* (или *циклическим*), иначе – *открытым*.

Если все ребра в маршруте различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (кроме, быть может, начальной и конечной) в маршруте различны, то маршрут называется *простой цепью*. В цепи начальная и конечная вершины называются *концами цепи*. Говорят, что цепь с концами u и v соединяет вершины u и v. Цепь, соединяющая вершины u и v, обозначается $<u, v>$. Очевидно, что если есть цепь, соединяющая вершины u и v, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины. Замкнутая цепь называется *циклом*; замкнутая простая цепь называется *простым циклом*. Граф без циклов называется *ациклическим*.

Замечание. Для орграфов цепь называется *путем*, а цикл – *контуром*.

Пример. В графе, диаграмма которого приведена на рис. 6,
1) $v1v3v1v4$ – маршрут длины 3, но не цепь;
2) $v1v3v5v2v3v4$ – цепь длины 5, но не простая цепь;
3) $v1v4v3v2v5$ – простая цепь длины 4;
4) $v1v3v5v2v3v4v1$ – цикл длины 6, но не простой цикл;
5) $v1v3v4v1$ – простой цикл длины 3.

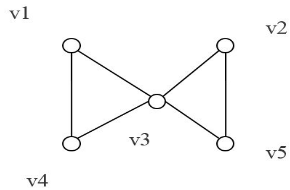


Рис. 6. Примеры маршрутов в графе

4.4. Изоморфизм графов

Говорят, что два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ изоморфны (обозначается $G_1 \sim G_2$), если существует биекция h: $V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность: (a, b) – ребро графа $G_1 \Leftrightarrow (h(a), h(b))$ – ребро графа G_2.

Утверждение 1. Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности.

Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами.

1. Рефлексивность: $G \sim G$. Требуемую биекцию устанавливает тождественная функция.
2. Симметричность: если $G_1 \sim G_2$ (биекция h), то $G_2 \sim G_1$ (биекция h^{-1}).
3. Транзитивность: если $G_1 \sim G_2$ (биекция h) и $G_2 \sim G_3$ (биекция g), то $G_1 \sim G_3$ (биекция $g \circ h$, являющаяся суперпозицией отображений g и h).

Замечание 1. Из определения изоморфизма графов следует, что изоморфные графы отличаются лишь обозначением вершин и их расположением на плоскости.

Замечание 2. Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, то есть рассматриваются классы эквивалентности относительно изоморфизма.

Утверждение 2. У изоморфных графов одинаково число вершин; число ребер; число вершин одинаковой степени (полустепени).

Пример 1. Три внешне различные диаграммы, приведенные на рис. 7, являются диаграммами одного и того же графа. Требуемые соответствия задаются следующим образом: $v_i \leftrightarrow u_i\ \forall i$, $u_i \leftrightarrow w_i\ \forall i$.

а) б) в)

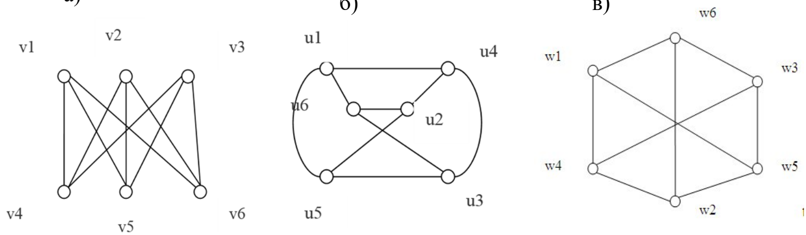


Рис. 7. Различные диаграммы одного графа: *а*, *б*, *в*

Замечание 3. Количество вершин, ребер и количество смежных вершин для каждой вершины не определяют граф. На рис. 8 представлены диаграммы графов, у которых указанные характеристики совпадают, но графы при этом не изоморфны.

а) б)

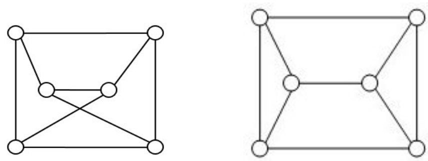


Рис. 8. Неизоморфные графы с равным количеством вершин,
рёбер и смежных вершин для каждой вершины: *а*, *б*

4.5. Способы представления графов

1. Матрица смежности.

Пусть $G = (V, E)$ – граф (орграф) с p вершинами и q ребрами, т. е. $V = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$, $E = \{e_1, e_2, ..., e_q\}$.

Матрицей смежности графа (орграфа) G без кратных рёбер называется квадратная матрица $A(G)$ порядка p, элементы которой равны

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & если\,(v_i, v_j) \in E \\ 0, & если\,(v_i, v_j) \notin E \end{cases}.$$

Пример 1. Граф G и орграф D изображены на рис. 9. Найдём их матрицы смежности.

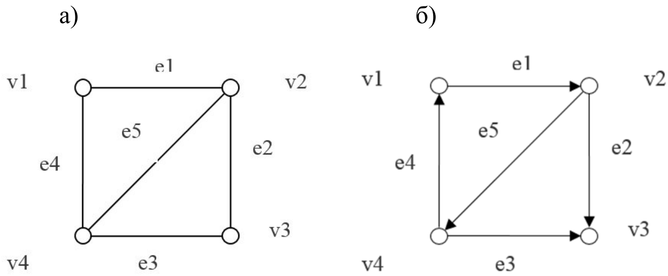


Рис. 9. Граф G и орграф D: *а* – граф G; *б* – орграф D

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Матрица смежности для неориентированного графа является симметричной.

Замечание 2. Матрицу смежности можно ввести для мультиграфов: элемент a_{ij} матрицы A равен числу ребер (дуг), идущих из вершины v_i к вершине v_j.

2. Матрица инцидентности.

Пусть $G = (V, E)$ – граф (орграф) с p вершинами и q ребрами, т. е. $V = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$, $E = \{e_1, e_2, ..., e_q\}$.

Матрицей инцидентности $B(G)$ орграфа G без петель называется матрица порядка $p\times q$, элементы которой вычисляются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & если\, v_i - конец\ дуги\ e_j \\ -1, & если\ v_i - начало\ дуги\ e_j \\ 0, & если\ v_i\ не\ инцидентна\ дуге\ e_j \end{cases}.$$

Матрицей инцидентности $B(G)$ неориентированного графа G без петель называется матрица порядка $p\times q$, элементы которой вычисляются следующим образом:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \textit{если } v_i \textit{ инцидентна ребру } e_j\\ 0, & \textit{если } v_i \textit{ не инцидентна ребру } e_j\end{cases}.$$

Замечание 3. В каждом столбце матрицы инцидентности только два элемента не равны нулю (они равны ±1).

Замечание 4. Матрицу инцидентности можно ввести для псевдографов: например, элемент a_{ij} матрицы A равен +1, если вершина v_i является началом и концом дуги e_j (петли), все остальные элементы в этом столбце равны нулю.

Пример 2. Граф G и орграф D изображены на рис. 9. Найдем их матрицы инцидентности.

$$B(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix},\qquad B(D)=\begin{pmatrix}-1&0&0&1&0\\1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&0\\0&0&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

3. Список смежности.

Построение списков смежности продемонстрируем на примере графа G и орграфа D, изображённых на рис. 9.

Граф G

Исходная вершина	Смежные вершины
v1	v2, v4
v2	v1, v3, v4
v3	v2, v4
v4	v1, v2, v3

Орграф D

Исходная вершина	Вершины, являющиеся концами дуг, выходящих из исходной вершины
v1	v2
v2	v3, v4
v3	–
v4	v1, v3

4.6. Полные и двудольные графы

Граф, состоящий из одной вершины, называется *тривиальным*.

Неориентированный граф без петель и кратных рёбер, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным*. Другими словами, в полном графе каждая вершина соединяется ребрами со всеми другими вершинами. Полный граф с p вершинами обозначается K_p, он имеет максимально возможное число ребер (см. рис. 10).

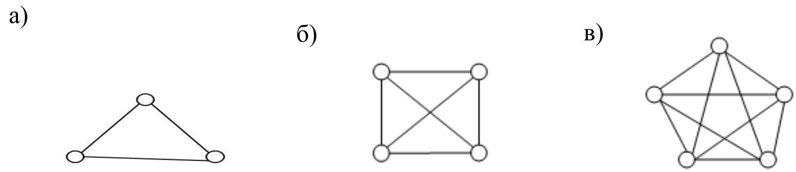


Рис. 10. Полные графы: *а* – K_3; *б* – K_4; в – K_5

Двудольный граф (или *биграф*, или *четный граф*) – это неориентированный граф $G(V, E)$ без кратных рёбер, такой, что множество вершин V разбито на два непересекающихся множества V_1 и V_2, а всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2. Множества V_1 и V_2 называются *долями* двудольного графа. Если в двудольном графе каждая вершина из V_1 соединяется ребрами со всеми вершинами из V_2, то граф называется *полным двудольным графом*. Если $|V_1| = n$, и $|V_2| = m$, то полный двудольный граф обозначается $K_{n,m}$ (рис. 11).

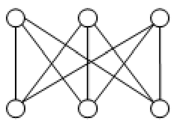


Рис. 11. Полный двудольный граф $K_{3,3}$

4.7. Свойства степеней вершин графа

1. Степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин.

2. В неориентированном графе сумма степеней всех его вершин – число чётное, равное удвоенному числу рёбер графа.

3. В каждом неориентированном графе число вершин нечётной степени чётно.

4. Во всяком неориентированном графе с n вершинами (n не меньше 2), не имеющем кратных рёбер и петель, всегда найдутся по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями.

5. Если в неориентированном графе с n вершинами (n больше 2), не имеющем кратных рёбер и петель, в точности две вершины имеют одинаковые степени, то в этом графе всегда найдётся либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n - 1$.

4.8. Операции над графами

Каждый неориентированный граф можно сделать ориентированным, заменив каждое ребро парой дуг, идущих в противоположных направлениях (см. рис. 12). Поэтому можно рассматривать смешанные графы, которые могут содержать и ребра, и дуги. Очевидно, что графы и орграфы являются частными случаями смешанных графов. В этом пункте под словом «граф» понимается смешанный граф, а под словом «ребро» понимается либо ребро, которое будет обозначаться $[u, v]$, либо дуга, которая будет обозначаться (u, v).

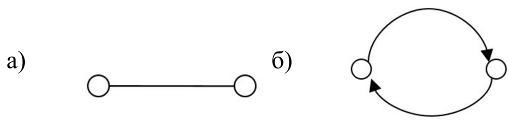


Рис. 12. Замена ребра на две дуги: *а*, *б*

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$. Подграф G_1 называется *собственным подграфом* графа G, если G_1 не совпадает с G.

Пусть даны два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$.

Объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G = (V, E)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$. Обозначение: $G = G_1 \cup G_2$.

Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G = (V, E)$, где $V = V_1 \cap V_2$, $E = E_1 \cap E_2$. Обозначение: $G = G_1 \cap G_2$.

Симметрической разностью (или суммой по модулю *2*) графов G_1

и G_2 называется граф $G = (V, E)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \Delta E_2$ (или, что то же самое, $E = E_1 \oplus E_2$). Обозначение: $G = G_1 \Delta G_2$.

Пусть задан граф $G = (V, E)$ с n вершинами без петель и кратных рёбер. На множестве вершин V построим полный граф $K_n = (V, M)$. *Дополнением* графа $G(V, E)$ называется граф $\overline{G} = (V, M \setminus E)$.

Пример 1. Пусть даны графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, где $V_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $E_1 = \{[a_1, a_2], (a_2, a_3)\}$, $V_2 = \{a_1, a_2, a_4\}$, $E_2 = \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\}$ (см. рис. 13, *а*, *б*).

1. $G = G_1 \cup G_2 = (V, E)$, где $V = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_1, a_2, a_4\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,

$E = \{[a_1, a_2], (a_2, a_3)\} \cup \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\} = \{[a_1, a_2], (a_2, a_3), (a_4, a_1)\}$ (рис. 13, *в*).

2. $G = G_1 \cap G_2 = (V, E)$, где $V = \{a_1, a_2, a_3\} \cap \{a_1, a_2, a_4\} = \{a_1, a_2\}$,

$E = \{[a_1, a_2], (a_2, a_3)\} \cap \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\} = \{(a_1, a_2)\}$ (рис. 13, *г*).

3. $G = G_1 \Delta G_2 = (V, E)$, где $V = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_1, a_2, a_4\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,

$E = \{[a_1, a_2], (a_2, a_3)\} \Delta \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\} = \{(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\}$ (рис. 13, *д*).

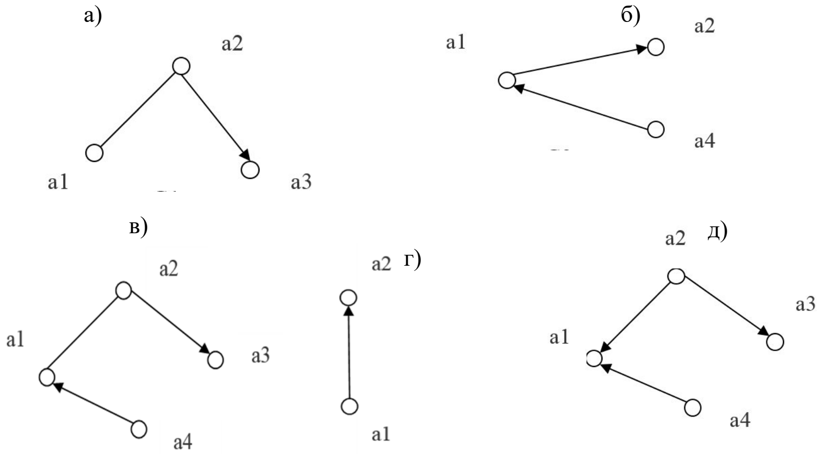


Рис. 13. Графы: *а* – G_1; *б* – G_2; *в* – $G_1 \cup G_2$; *г* – $G_1 \cap G_2$; *д* – $G_1 \Delta G_2$

Пример 2. Дополнением графа G, изображенного на рис. 14, является граф $\overline{G}$, изображённый на рис. 15.

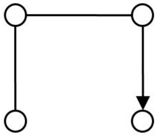


Рис. 14. Граф G

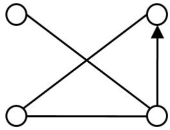


Рис. 15. Граф $\overline{G}$

4.9. Связность

В этом пункте все понятия и рассуждения справедливы для псевдо-, мульти- и просто графов, т. е. для графов в широком смысле.

1. Связность в неориентированных графах.

Говорят, что две вершины u и v в графе G связаны *отношением достижимости*, если существует соединяющая их цепь $<u, v>$. Граф, в котором любые две вершины связаны отношением достижимости, называется *связным*. Тривиальный граф, состоящий из изолированной вершины, по определению считается связным.

Утверждение 1. Отношение достижимости вершин является отношением эквивалентности.

Компонентой связности графа G называется его связный подграф, который не является собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G.

Из утверждения 1 следует, что классы эквивалентности по отношению достижимости являются разбиением множества вершин графа G на подмножества вершин, входящих в одну компоненту связности. Для построения компоненты связности достаточно взять один класс эквивалентности (вершин) и перенести на множество его вершин связи (ребра) из графа G.

Число компонент связности графа G обозначим $c(G)$. Граф G является связным тогда и только тогда, когда $c(G) = 1$. Если $c(G) > 1$, то G – несвязный граф. Граф, состоящий только из изолированных вершин (двух и более), называется вполне несвязным.

Пример 1. Граф, изображённый на рис. 16, имеет две компоненты связности с множествами вершин $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $V_2 = \{5, 6, 7\}$.

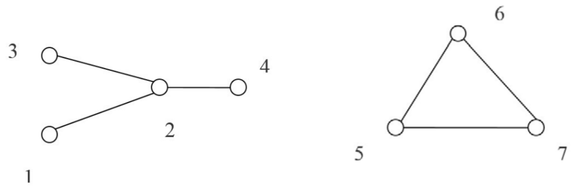


Рис. 16. Граф, состоящий из двух компонент связности

2. Связность в ориентированных графах.

Пусть $G = (V, E)$ – ориентированный граф (орграф).

А. Сильная связность

Говорят, что две вершины u и v в орграфе G связаны *отношением двусторонней достижимости*, если существует путь из u в v, а также путь из v в u. Орграф, в котором любые две вершины связаны отношением двусторонней достижимости, называется *сильно связным*. Тривиальный граф, состоящий из изолированной вершины, по определению считается сильно связным.

Утверждение 2. Отношение двусторонней достижимости вершин является отношением эквивалентности.

Компонентой сильной связности орграфа G называется его сильно связный подграф, который не является собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа орграфа G.

Из утверждения 2 следует, что классы эквивалентности по отношению двусторонней достижимости являются разбиением множества вершин орграфа G на подмножества вершин, входящих в одну компоненту сильной связности. Для построения компоненты сильной связности достаточно взять один класс эквивалентности и перенести на множество его вершин связи (дуги) из орграфа G.

Число компонент сильной связности орграфа G обозначим $k(G)$.

Орграф G является сильно связным тогда и только тогда, когда $k(G) = 1$. Если $k(G) > 1$, то G не является сильно связным орграфом.

Пример 2. Граф G, изображённый на рис. 17, не является сильно связным, так как имеет три компоненты сильной связности с множествами вершин $V_1 = \{1, 2, 3\}$, $V_2 =\{4\}$ и $V_3 = \{5, 6, 7\}$. Сами компоненты сильной связности изображены на рис. 18.

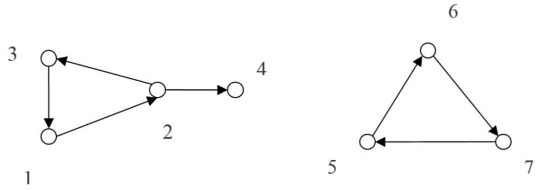


Рис. 17. Граф *G*, имеющий 3 компоненты сильной связности

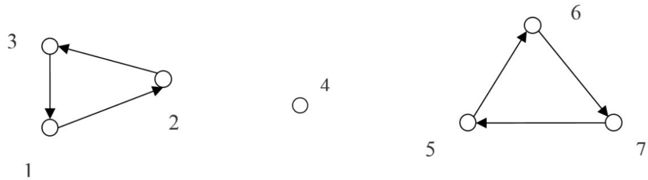


Рис. 18. Три компоненты сильной связности графа G

Б. Односторонняя связность

Орграф *G* называется *односторонне связным*, если для любых вершин *u* и *v* существует путь хотя бы в одну сторону, т. е. либо путь из *u* в *v*, либо путь из *v* в *u*.

Очевидно, что если орграф является сильно связным, то он будет и односторонне связным.

Пример 3. Граф, изображённый на рис. 17, не является односторонне связным, так как, скажем, из вершины 1 нет пути в вершину 5, и наоборот, из вершины 5 нет пути в вершину 1.

Пример 4. Граф на рис. 19 не является сильно связным, но является односторонне связным.

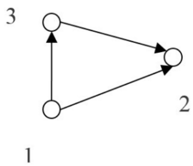


Рис. 19. Односторонне связный граф

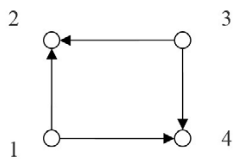


Рис. 20. Граф, не являющийся односторонне связным

Пример 5. Граф на рис. 20 не является односторонне связным, так как нет ни пути из вершины 1 в вершину 3, ни пути из вершины 3 в вершину 1.

В. Слабая связность

Графом, ассоциированным с орграфом $G = (V, E)$, называется граф $G_1 = (V, E_1)$, в котором E_1 получается из E заменой всех дуг (упорядоченных пар) на ребра (неупорядоченные пары).

Орграф $G = (V, E)$ называется слабо связным, если ассоциированный с ним неориентированный граф является связным.

Пример 6. Граф на рис. 20 является слабо связным.

4.10. Диаметр, радиус и центр графа

Пусть G – неориентированный связный граф.

Расстоянием $d(u, v)$ между вершинами u и v называется длина кратчайшей цепи $<u, v>$.

Наибольшее из расстояний между вершинами графа называется *диаметром графа*.

Максимальное удаление в графе G от вершины v – это число $r(v) = \max_{v' \in G} d(v, v')$.

Вершина v – центр графа G, если максимальное удаление от неё принимает минимальное значение $r(G) = \min_{v' \in G} r(v')$.

Максимальное удаление $r(G)$ от центра называется *радиусом графа*. Центр не обязательно единственный. В полном графе радиус равен 1 и любая вершина является центром.

Множество вершин, находящихся на одинаковом расстоянии от вершины v, называется *ярусом вершины* v.

4.11. Деревья

Деревья заслуживают отдельного и подробного рассмотрения по двум причинам.

Деревья являются в некотором смысле простейшим классом графов. Для них выполняются многие свойства, которые не всегда выполняются для графов в общем случае. Применительно к деревьям многие доказательства и рассуждения оказываются намного проще. Выдвигая какие-то гипотезы при решении задач теории графов, целесообразно сначала их проверять на деревьях.

Деревья являются самым распространенным классом графов, применяемых в программировании, причем в самых разных ситуациях.

4.11.1. Свободные деревья

Связный граф без циклов называется *деревом* (*свободным деревом*). Граф, состоящий из нескольких деревьев, называется лесом. Таким образом, компонентами связности леса являются деревья.

Пример. На рис. 21 показаны диаграммы всех различных деревьев с 5 вершинами, а на рис. 22 – диаграммы всех различных деревьев с 6 вершинами.

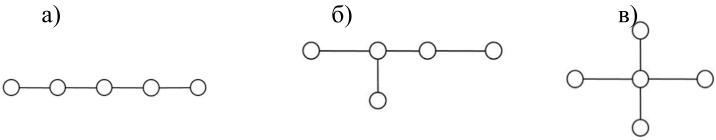


Рис. 21. Различные деревья с 5 вершинами: *а*, *б*, *в*

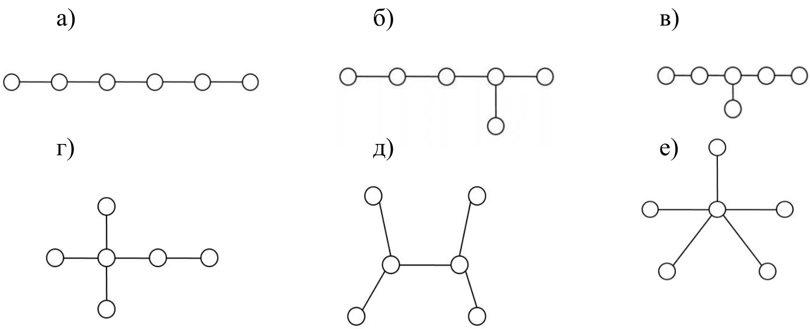


Рис. 22. Различные деревья с 6 вершинами: *а, б, в, г, д, е*

Теорема. Пусть $G(V, E)$ – граф с р вершинами, q ребрами. Следующие утверждения эквивалентны.

1. G – дерево, то есть связный граф без циклов.
2. Любые две вершины соединены в G единственной простой цепью.
3. G – связный граф, и удаление любого ребра делает граф несвязным.
4. G – связный граф и $q = p - 1$.
5. G – связный граф без простых циклов.

Следствие. В любом дереве имеются по крайней мере две висячие вершины.

4.11.2. Ориентированные деревья

Вершины в графе часто называют узлами.

Ориентированным деревом (или ордеревом, или корневым деревом) называется орграф со следующими свойствами:

1) существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0; он называется корнем ордерева;
2) полустепень захода всех остальных узлов равна 1;
3) каждый узел достижим из корня.

Пример. На рис. 23 приведены диаграммы всех различных ориентированных деревьев с 3 узлами, а на рис. 24 показаны диаграммы всех различных ориентированных деревьев с 4 узлами.

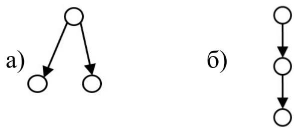


Рис. 23. Различные ориентированные деревья
с 3 узлами: *а, б*

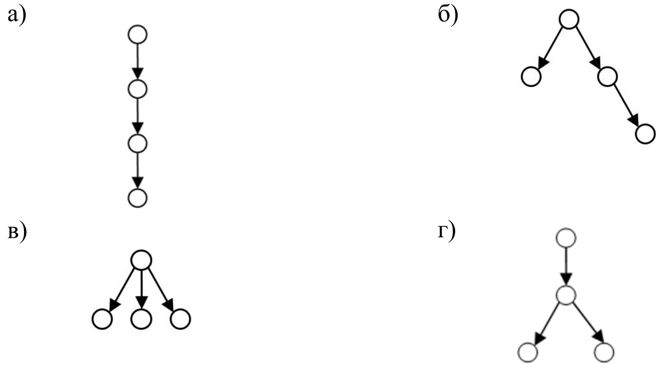


Рис. 24. Различные ориентированные деревья
с 4 узлами: *а, б, в, г*

Теорема. Ордерево $G(V, E)$ с p вершинами и q дугами обладает следующими свойствами:

1) $q = p - 1$;
2) если в $G(V, E)$ отменить ориентацию ребер, то получится свободное дерево;
3) $G(V, E)$ не содержит контуров;
4) для каждого узла существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня;
5) подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла v, является ордеревом с корнем v (это ордерево называется *поддеревом узла v*).

Утверждение. Если в свободном дереве любую вершину назначить корнем, то получится ордерево, при этом дуги будут последовательно ориентированы от корня.

Концевая вершина (полустепень исхода равна 0) ордерева называется *листом*. Путь из корня в лист называется *ветвью*. Длина наибольшей ветви ордерева называется *высотой*. Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла. Сам корень имеет уровень 0. Узлы одного уровня образуют ярус дерева.

Замечание. Наряду с «растительной» применяется еще и «генеалогическая» терминология. Узлы, достижимые из узла u, называются потомками узла u (потомки образуют поддерево). Если в дереве существует дуга (u, v), то узел u называется отцом (или родителем) узла v, а узел v называется сыном узла u. Сыновья одного узла называются братьями.

4.11.3. Бинарные деревья

Бинарное дерево – это конечное множество узлов, которое либо пусто, либо состоит из корня и двух непересекающихся бинарных деревьев – левого и правого.

Из определения следует, что в бинарном дереве каждый узел может иметь максимум две связи, причем связь влево (если она имеется) ведет к младшему сыну, а связь вправо (если она имеется) ведет к ближайшему по старшинству брату.

На рис. 25 приведены две диаграммы деревьев, которые изоморфны как упорядоченные, ориентированные и свободные деревья, но не изоморфны как бинарные деревья.

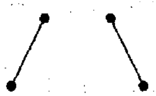


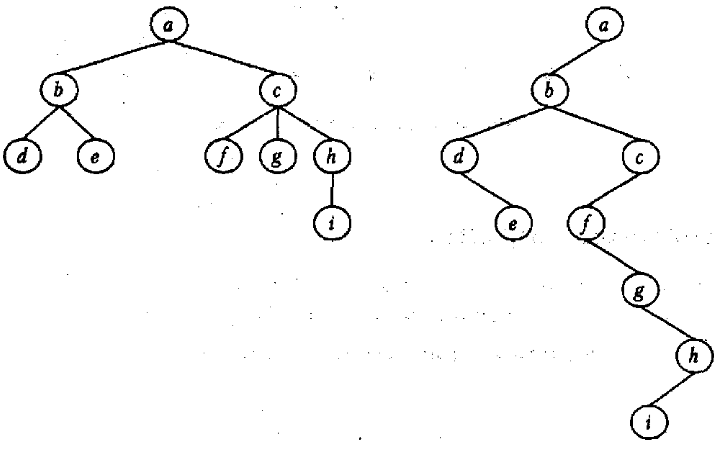
Рис. 25. Различные деревья

Всякий упорядоченный лес (дерево) можно представить бинарным деревом, действуя по следующему правилу:

1) корень самого левого упорядоченного дерева является корнем бинарного дерева, остальные корни – его братья;
2) связи от узлов проводят так: правую связь к ближайшему старшему брату, а левую – к младшему сыну.

Утверждение. Всякому упорядоченному лесу (дереву) взаимно однозначно соответствует некоторое бинарное дерево.

Пример. На рисунке приведены диаграммы упорядоченного и соответствующего ему бинарного деревьев.



4.12. Планарные графы

Неориентированный граф G без петель и кратных рёбер называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, что никакие два ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин. Такое изображение графа на плоскости называется *плоским*. Таким образом, если граф имеет плоское изображение, то он является планарным.

Пример. Граф K_4 (рис. 26, *а*) планарен, поскольку может быть изображен, как показано на рис. 26, *б*.

а) б)

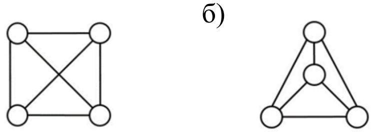


Рис. 26. Различные изображения графа K_4: *а, б*

Не всякий граф является планарным. Справедлива

Теорема. Если граф G планарен, то он не содержит подграфа, изоморфного K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 27).

а) б)

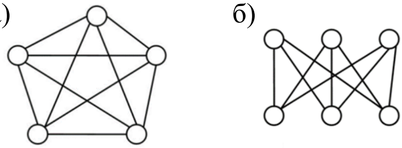


Рис. 27. Граф K_5 – *а*; граф $K_{3,3}$ – *б*

Следствие. Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными.

Замечание. Любой конечный граф может быть изображен в трехмерном пространстве R^3 без пересечения рёбер вне их концов.

Теорема (Эйлера). В связном планарном графе G справедливо равенство $p - q + r = 2$, где p – число вершин графа G, q – число ребер графа G, r – число областей, на которые разбивается плоскость плоским изображением графа G.

Следствие 1. Если G – связный планарный граф, $p > 3$, то $q \le 3p - 6$.

Следствие 2. В любом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.

4.13. Эйлеровы и гамильтоновы графы

В этом пункте будем рассматривать неориентированные графы.

Если граф имеет цикл, содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется *эйлеровым циклом*, а граф – *эйлеровым графом*. Если граф имеет цепь, содержащую все вершины графа по одному разу, то такая цепь называется *эйлеровой цепью*, а граф – *полуэйлеровым графом*.

Теорема. Если граф G связен и нетривиален, то следующие утверждения эквивалентны.

1. G – эйлеров граф.
2. Каждая вершина G имеет четную степень.
3. Множество ребер G можно разбить на простые циклы.

Если граф имеет простой цикл, содержащий все вершины графа, то такой цикл называется *гамильтоновым циклом*, а граф – *гамильтоновым графом*. Гамильтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа. Ясно, что гамильтоновым может быть только связный граф.

Теорема (Дирака). Если в n-вершинном графе $G(V, E)$ степень любой вершины больше $n/2$, то граф G является гамильтоновым.

4.14. Раскраска графов

Здесь мы будем рассматривать неориентированные графы без петель.

Раскраска вершин (ребер) графа k красками называется правильной, если смежные вершины (ребра) окрашены в разные цвета.

Хроматическим числом $h(G)$ (*хроматическим классом* $H(G)$) графа G называется минимальное число красок k, при котором граф G имеет правильную раскраску вершин (ребер). Граф, хроматическое число которого равно k, называется k-хроматическим. Граф G называется бихроматическим, если $h(G) = 2$.

Между понятиями «хроматическое число» и «хроматический класс» существует тесная связь, которая устанавливается следующим образом.

Пусть $G = (V, X)$ – исходный граф. Построим граф $G_1 = (V_1, X_1)$ по правилу: вершины графа G_1 (элементы V_1) взаимно однозначно соответствуют ребрам графа G (элементам X), вершины графа G_1 смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие ребра графа G. Хроматический класс $H = (G)$ графа G совпадает с хроматическим числом $h(G_1)$ графа G_1. Таким образом, задача определения хроматического класса сводится к задаче определения хроматического числа.

Пример 1. Так как в полном графе K_n любые две различные вершины связаны ребром, то $h(K_n) = n$.

Многие практические задачи сводятся к построению раскрасок графов.

Пример 2. Рассмотрим задачу составления расписания.

Предположим, что нужно прочесть несколько лекций за кратчайшее время. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно (например, их читает один и тот же лектор). Построим граф G, вершины которого биективно соответствуют лекциям, причём две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им лекции нельзя читать одновременно. Очевидно, что любая правильная раскраска этого графа определяет допустимое расписание: лекции, соответствующие вершинам одного цвета, могут читаться одновременно. Напротив, любое допустимое расписание определяет правильную раскраску графа G. Оптимальные расписания соответствуют раскраскам с минимальным числом цветов, а минимальное число часов, необходимое для прочтения всех лекций, равно $h(G)$.

Пример 3. Рассмотрим граф G, вершины которого – страны, а ребра соединяют страны, имеющие общую границу. Числу $h(G)$ соответствует наименьшее число красок, необходимых для раскраски карты так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет.

Существуют и практические задачи, связанные с раскраской ребер в мультиграфе.

Пример 4. Проводится монтаж аппаратуры. Чтобы не перепутать проводники, необходимо их окрасить таким образом, чтобы два проводника, идущие к одной плате, имели разные цвета. В этом случае вершинами являются платы, а ребрами – проводники.

Теорема (Кенита). Пусть G – граф без петель и кратных рёбер, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда следующие условия эквивалентны.

1. G – бихроматический граф.
2. G – двудольный граф.
3. G не содержит циклов нечетной длины.

Следствие. Если G – лес, то $h(G) \le 2$.

Теорема. Для любого графа G без петель выполняется неравенство $h(G) \le deg(\mathrm{G}) + 1$, где $deg(G)$ – максимальная степень вершин графа G.

Теорема (о четырех красках). Если граф G планарен, то $h(G) \le 4$.

4.15. Алгоритмы раскраски графов

Пусть G – неориентированный граф без петель. Рассмотрим простой алгоритм получения правильной раскраски вершин, который во многих случаях приводит к раскраскам, близким к минимальным.

Алгоритм последовательной раскраски

1. Произвольная вершина $v(1)$ графа G принимает цвет 1.

2. Если вершины $v(1), ..., v(i)$ раскрашены m цветами $(1, 2, ..., m)$, $m \le i$, то новой произвольно взятой вершине $v(i + 1)$ припишем минимальный цвет, не использованный при раскраске вершин из множества вершин, смежных с $v(i + 1)$. Если такого цвета нет, то используем новый цвет $m + 1$.

Для некоторых классов графов последовательная раскраска является минимальной. В общем случае это не так.

Пусть G – неориентированный связный граф без петель. Приведём алгоритм минимальной раскраски вершин графа G.

Алгоритм минимальной раскраски

1. Множество вершин, смежных с вершиной v, обозначим $T(v)$. Для каждой пары смежных вершин (v, w) вычисляем значение функционала

$$\phi(v,w) = \frac{|T(v) \cap T(w)|}{|T(v)| + |T(w)|},$$

где $|T(v)|$ – мощность множества $T(v)$, и определяем, на какой паре (v, w) этот функционал принимает наибольшее значение (таких пар может быть несколько, тогда выбирать можно любую из них). Вершины, участвующие в выбранной паре, закрашиваем разными цветами. Полагаем $s = 2$.

2. Составляем таблицу по следующему правилу. Каждый столбец таблицы соответствует одному из уже использованных цветов. В заголовке каждого столбца указываем цвет и закрашенные им вершины. Каждая строка таблицы соответствует ещё не закрашенной вершине, смежной хотя бы с одной из вершин, указанных в заголовках столбцов.

3. На пересечении i-й строки и j-го столбца таблицы ставим 1, если вершина из i-й строки смежна хотя бы с одной из вершин, указанных в заголовке j-го столбца, и 0 в противном случае.

4. Выбираем строку таблицы с максимальным числом единиц. Если имеется столбец, дающий на пересечении с этой строкой 0, то вершине, соответствующей данной строке, приписываем цвет, указанный в заголовке упомянутого столбца. В противном случае вершину, соответствующую данной строке, закрашиваем новым цветом и увеличиваем значение s на 1.

5. Если все вершины закрашены, то переходим к пункту 6. В противном случае переходим к пункту 2.

6. Полагаем $h(G) = s$.

Если граф G имеет k компонент связности, то описанную процедуру нужно применить к каждой компоненте, а затем положить

$$h(G) = \max_{1 \le i \le k} h(G_i),$$

где $G_i, i = \overline{1, k}$ – компоненты связности графа.

4.16. Циклы и коциклы

Цикл может входить только в одну компоненту связности графа, поэтому далее без ограничения общности граф считается связным. Цикл (простой) рассматривается как множество ребер.

Разрезом связного графа называется множество ребер, удаление которых делает граф несвязным. *Простым разрезом* называется минимальный разрез, то есть такой, никакое собственное подмножество которого разрезом не является.

Будем рассматривать только простые циклы и разрезы, далее слово «простые» опускается.

Между циклами и разрезами существует определенная двойственность, поэтому разрезы иногда называют коциклами.

Замечание. Чем больше в графе циклов, тем труднее его разрезать. В дереве, напротив, каждое ребро само по себе является разрезом.

4.17. Независимые множества циклов и коциклов

Рассмотрим операцию $\oplus$ сложения по модулю 2 или симметрической разности над множествами ребер:

$$\mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2 = \{\mathrm{e} | (\mathrm{e} \in \mathrm{M}_1 \,\&\, \mathrm{e} \notin \mathrm{M}_2) \vee (\mathrm{e} \notin \mathrm{M}_1 \,\&\, \mathrm{e} \in \mathrm{M}_2)\}.$$

Другими словами, множество $\mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$ состоит только из тех ребер, которые входят только в одно из множеств M_1 или M_2.

Множество М называется *зависимым* или *линейной комбинацией* множеств $\{\mathrm{M}_k, k = 1, 2, ..., n\}$, если М является суммой некоторых M_k, т. е. $\mathrm{M} = \oplus\, \mathrm{M}_k$. Множество циклов $\{Z_k, k = 1, 2, ..., n\}$ называется независимым, если ни один из циклов Z_k не является линейной комбинацией остальных. Множество разрезов $\{S_k, k = 1, 2, ..., n\}$ называется независимым, если ни один из разрезов S_k не является линейной комбинацией остальных.

Максимальное независимое множество циклов (или минимальное множество циклов, от которых зависят все остальные) *называется фундаментальной системой циклов*. Циклы фундаментальной системы называются фундаментальными, а количество циклов в (данной) фундаментальной системе называется циклическим рангом, или *цикломатическим числом*, графа G и обозначается $m(G)$. Максимальное независимое множество коциклов (разрезов) (или минимальное множество коциклов, от которых зависят все остальные) называется *фундаментальной системой коциклов* (*разрезов*). Коциклы (разрезы) фундаментальной системы называются фундаментальными, а количество коциклов в (данной) фундаментальной системе называется коциклическим рангом, или *коцикломатическим числом*, графа G и обозначается $m^*(\boldsymbol{G})$.

Теорема 1. Если G – граф с $p(G)$ вершинами, $q(G)$ ребрами и $c(G)$ компонентами связности, то цикломатическое число графа G вычисляется по формуле

$$m(G) = q(G) - p(G) + c(G).$$

*Следствие***.** Если G – связный граф, то $m(G) = q(G) - p(G) + 1$.

4.18. Фундаментальные циклы

Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, имеющий n вершин, q ребер и одну компоненту связности, T – остов графа G. Тогда T имеет $v{\cdot}\{G\} = n - 1$ ребер $u(1), \ldots, u(n-1)$, которые будем называть ветвями остова T. Оставшиеся $q - n + 1$ ребер $v(1), \ldots, v(q - n + 1)$, не входящие в T, называются *хордами* остова T. Если к дереву T добавить произвольную хорду $v(i)$, то в полученном графе найдется ровно один цикл, который обозначим через $C(i)$. Цикл $C(i)$ состоит из хорды $v(i)$ и ветвей остова T, которые принадлежат единственной простой цепи, соединяющей вершины хорды $v(i)$. Цикл $C(i)$ называется *фундаментальным циклом* графа G относительно хорды $v(i)$ остова T. Множество $\{C(1), \ldots, C(q - n + 1)\}$ всех фундаментальных циклов относительно хорд остова T называется фундаментальным множеством циклов графа G относительно остова T. Отметим, что мощность фундаментального множества циклов равна цикломатическому числу $m(G)$.

Обозначим через $(w(1), w(2), \ldots, w(q))$ последовательность $\{v(1), \ldots, v(q - n + 1), u(1), \ldots, u(n - 1)\}$ всех ребер графа G. Тогда фундаментальному циклу $C(i)$ соответствует вектор $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})$, определенный по следующему правилу:

$$\boldsymbol{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad w(j) \in C(i) \\ 0, & \text{если} \quad w(j) \notin C(i). \end{cases}$$

Теперь фундаментальное множество циклов можно задать с помощью матрицы C фундаментальных циклов, строками которой являются вектора $a_1, a_2, \ldots, a_{m(G)}$.

Так как каждый фундаментальный цикл $C(i)$ содержит ровно одну хорду, а именно $v(i)$, то матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 100\ \ldots\ 0 \mid a_{1,m(G)} \ldots\ldots\ldots\ \ldots a_{1q} \\ 010\ \ldots 0 \mid a_{2,m(G)} \ldots\ldots\ldots\ .a_{2q} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ \ldots\ 01 \mid a_{m(G),m(G)} \ldots a_{m(G),q} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $C = (C_1, C_2)$, где C_1 – единичная матрица порядка $m(G)$.

Пример. Найдем матрицу фундаментальных циклов графа G:

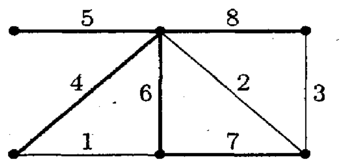


Рис. 28. Граф *G*

Так как $m(G) = 8 - 6 + 1 = 3$, то для получения остова удаляем из графа три ребра. Сопоставим этим ребрам номера 1, 2, 3. Ребрам, входящим в остов, поставим в соответствие номера 4, 5, 6, 7, 8. Легко видеть, что фундаментальный цикл $C(1)$, соответствующий хорде 1, состоит из ребер 1, 4, 6; цикл $C(2)$ – из ребер 2, 6, 7; цикл $C(3)$ – из ребер 3, 6, 7, 8. Поэтому матрица фундаментальных циклов C имеет вид

		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	C(1)	1	0	0	1	0	1	0	0
C=	C(2)	0	1	0	0	0	1	1	0
	C(3)	0	0	1	0	0	1	1	1

Следующие две теоремы дают информацию о связи остовов с разрезами, а также циклов с разрезами.

Теорема 1. В связном графе остовное дерево имеет по крайней мере одно общее ребро с любым из разрезов графа.

Теорема 2. В связном графе любой цикл имеет с любым разрезом четное число общих ребер.

4.19. Фундаментальные разрезы

В условиях предыдущего параграфа рассмотрим неориентированный граф G с остовом Г. Снова пусть $u(1)$, ..., $u(n-1)$ – ветви остова Г. Удаляя из остова Г произвольную ветвь $u(i)$, получаем лес с 2 компонентами связности M_1, M_2 (рис. 29). В графе G могут найтись еще какие-то ребра $v(i_1)$, $v(i_2)$, ..., $v(i_k)$ (являющиеся хордами Г), которые соединяют вершины из M_1 и M_2. Множество $K(i) = \{u(i), v(i_1), v(i_2), ..., v(i_k)\}$ образует простой разрез, который называется фундаментальным разрезом графа G относительно ветви $u(i)$ остова Г. Множество $\{K(1), K(2), ..., K(n-1)\}$ всех фундаментальных разрезов графа G называется фундаментальным множеством коциклов графа G относительно остова Г.

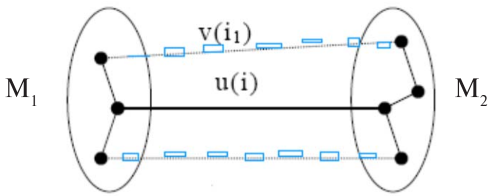


Рис. 29. Граф с двумя компонентами связности

Аналогично фундаментальным циклам фундаментальному разрезу $K(i)$ ставится в соответствие вектор $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{im})$, определенный по следующему правилу:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad w(j) \in K(i) \\ 0, & \text{если} \quad w(j) \notin K(i). \end{cases}$$

Фундаментальное множество коциклов задается матрицей фундаментальных разрезов $\boldsymbol{K}$, строки которой являются векторами b_i.

Пример 1. Найдем матрицу фундаментальных разрезов графа $G = (V, E)$, изображенного на рис. 28. Ребру 4 соответствует коцикл $K(1) = \{1, 4\}$. Аналогично ребру 5 соответствует коцикл $K(2) = \{5\}$, ребру 6 – коцикл $K(3) = \{1, 2, 3, 6\}$, ребру 7 – коцикл $K(4) = \{2, 3, 7\}$, ребру 8 – коцикл $K(5) = \{3, 8\}$. Следовательно, матрица фундаментальных разрезов имеет вид

K=

	1	2	3	4	5	6	7	8
K(1)	**1**	0	0	**1**	0	0	0	0
K(2)	0	0	0	0	**1**	0	0	0
K(3)	**1**	**1**	**1**	0	0	**1**	0	0
K(4)	0	**1**	**1**	0	0	0	**1**	0
K(5)	0	0	**1**	0	0	0	0	**1**

4.20. Сети и потоки

Классическая задача.

Пусть имеется сеть трубопроводов, соединяющих пункт *A* (скажем, нефтепромысел) с пунктом *B* (скажем, с нефтеперерабатывающим заводом). Трубопроводы могут соединяться и разветвляться в промежуточных пунктах. Количество нефти, которое может быть перекачано по каждому отрезку трубопровода в единицу времени, также не безгранично и определяется такими факторами, как диаметр трубы, мощность нагнетающего насоса и т. д. (обычно это называют пропускной способностью или максимальным расходом трубопровода). Сколько нефти можно пропускать через такую сеть в единицу времени?

Изучение подобных задач приводит к теории потоков в сетях. Данная теория разрабатывает решения общей задачи, которая называется *задача об оптимальном потоке*.

В частном случае это з*адача определения максимальной величины потока*.

Сетью называется связный ориентированный граф $G(V, E)$ без петель с выделенными вершинами *I – истоком* и *S – стоком*, причем каждой дуге поставлено в соответствие некоторое натуральное число $c(v_i; v_j)$ – *пропускная способность дуги*.

Поток в сети определяет способ пересылки некоторых объектов из одной вершины графа в другую по направлению дуги. Число объектов (количество вещества) $f(v_i; v_j)$, пересылаемых вдоль дуги $(v_i; v_j)$, не может превышать пропускной способности $c(v_i; v_j)$ этой дуги: $0 \le f(v_i; v_j) \le c(v_i; v_j)$. Будем считать, что если существует дуга из v_i в v_j, то нет дуги из v_j в v_i. Таким образом, рассматривается поток вещества только в одну сторону.

Формулировка задачи о максимальном потоке: на сети с заданными пропускными способностями дуг сформировать максимальный по величине поток $F_{\max}$ между ее истоком и стоком. Этот поток обеспечивается назначением в каждой дуге $(v_i; v_j)$ величины $f(v_i; v_j)$ передаваемого ею потока.

Задача о максимальном потоке в сети должна удовлетворять следующим условиям:

– сумма потоков дуг, выходящих из истока сети, должна быть равна сумме потоков дуг, входящих в сток:

$$\sum_{(I;v_i)\in E} f(I;v_i) = \sum_{(v_j;S)\in E} f(v_j;S);$$

– для вершины v, не являющейся стоком или истоком, т. е. $v \neq I$, $v \neq S$, количество единиц потока, входящего в вершину, должно быть равно количеству единиц потока, выходящего из нее (сохранение потока):

$$\sum_{(v_i;v)\in E} f(v_i;v) = \sum_{(v;v_j)\in E} f(v;v_j);$$

– максимальный поток на пути от истока I к стоку S определяется той дугой $(v_i; v_j)$, которая имеет минимальную пропускную способность из всех дуг, принадлежащих этому пути.

Если пропускная способность $c(v_i; v_j)$ дуги $(v_i; v_j)$ равна идущему через нее потоку $f(v_i; v_j)$, то такая *дуга* называется *насыщенной*, а любой путь, в который она включена, называется *насыщенным путем*.

Поток называется *насыщенным*, если любой путь из I в S содержит дугу $(v_i; v_j)$, для которой $f(v_i; v_j) = c(v_i; v_j)$. Первая часть решения задачи о максимальном потоке как раз и состоит в нахождении насыщенного потока. Но насыщенный поток не всегда является максимальным.

Поток в сети будет *максимальным*, если величина этого потока больше величины любого другого потока в этой сети.

4.21. Разрез на сети

Разрез может быть представлен как множество дуг, исключение которых из сети сделало бы орграф несвязным.

Предположим, что дана некоторая сеть. Разобьем множество вершин V этой сети на два непересекающихся подмножества A и B ($A \cup B = V$; $A \cap B = \varnothing$) так, чтобы исток I попал в подмножество A, а сток S – в подмножество B, т. е. $I \in A$, $S \in B$. В этом случае говорят, что *на сети произведен разрез*, отделяющий исток I от стока S.

Пусть $R(A/B)$ – разрез на сети, представляющий совокупность дуг, которые связывают подмножества вершин A и B. В разрез входят дуги, обозначим их R^+, начальные вершины которых принадлежат подмножеству A, а конечные – подмножеству B, т. е. $R^+ = \{v_i;\ v_j \mid v_i \in A,\ v_j \in B\}$. А также в разрез входят дуги, обозначим их R^-, начальные вершины которых принадлежат подмножеству B, а конечные – подмножеству A, т. е. $R^+ = \{v_i;\ v_j \mid v_i \in B,\ v_j \in A\}$.

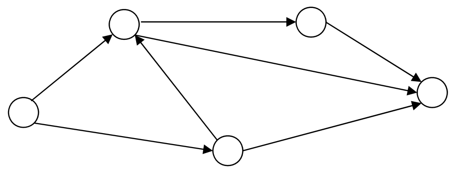
Пропускной способностью или величиной разреза $R(A/B)$ называется величина $C(A/B)$, которая определяется следующей формулой:

$$C\left(A/B\right) = C\left(R^+\right) - C\left(R^-\right) = \sum_{v_i \in A,\, v_j \in B} c(v_i; v_j) - \sum_{v_i \in B,\, v_j \in A} c\left(v_i; v_j\right).$$

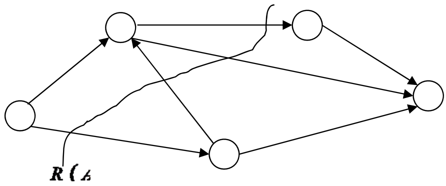
Потоком через разрез $R(A/B)$ называется величина $F(A/B)$, которая определяется следующей формулой:

$$F\left(A/B\right) = F\left(R^+\right) - F\left(R^-\right) = \sum_{v_i \in A,\, v_j \in B} f(v_i; v_j) - \sum_{v_i \in B,\, v_j \in A} f\left(v_i; v_j\right).$$

Пример 1. Рассмотрим сеть с заданными пропускными способностями дуг, которые записаны в круглых скобках.



Построим на сети некоторый поток, величину которого по каждой дуге будем записывать без скобок:
путь $I \to p \to k \to S$: min $\{3; 6; 2\} = 2 \Rightarrow$ поток в 2 единицы;
путь $I \to a \to S$: min$\{4; 3\} = 3 \Rightarrow$ поток в 3 единицы;
путь $I \to a \to p \to S$: min$\{4 - 3; 3; 5\} = 1 \Rightarrow$ поток в 1 единицу.



$R(A/B)$

Проведем на этой сети, например, разрез $R(A/B)$, при котором вершины разбиты на подмножества $A = \{I;\ p\}$ и $B = \{k;\ a;\ S\}$. Тогда сам разрез состоит из дуг $(I;\ a)$, $(a;\ p)$, $(p;\ S)$, $(p;\ k)$, т. е. $R(A/B) = \{(I;\ a), (a;\ p), (p;\ S), (p;\ k)\}$.

Так, например, пропускная способность разреза $R(A/B)$ на рисунке равна

$$C(A/B) = c(I;\ a) + c(p;\ S) + c(p;\ k) - c(a;\ p) = 4 + 5 + 6 - 3 = 12,$$

а поток через этот разрез составляет:

$$F(A/B) = f(I;\ a) + f(p;\ S) + f(p;\ k) - f(a;\ p) = 4 + 1 + 2 - 1 = 6.$$

4.22. Алгоритм нахождения максимального потока на сети

Если на сети сформирован некоторый поток, то для ответа на вопрос, будет ли он максимальным, используют *теорему Форда – Фалкерсона*.

Теорема 1 (Форда – Фалкерсона). Максимальный поток в сети равен минимальной пропускной способности по всем разрезам: $F_{\max} = C_{\min}(A/B)$.

Алгоритм нахождения максимального потока на сети

Этап 1. *Насыщение потока.*

Шаг 1. Сформировать произвольный начальный поток.

Шаг 2. Найти оставшиеся возможные пути из истока I в сток S, имеющие только ненасыщенные дуги. Если такой путь найден, то переходим к шагу 3. Если путь не найден, то переходим к шагу 4.

Шаг 3. Увеличить поток по найденному пути таким образом, чтобы одна из дуг стала насыщенной.

Шаг 4. Получившийся поток насыщен.

Этап 2. *Пометка вершин сети* (*перераспределение потока*).

Шаг 5. Вершину I пометить «$-I$».

Шаг 6. Пусть m – любая из уже помеченных вершин; n – некоторая непомеченная вершина, смежная с вершиной m. Вершину n помечаем $+m$, если данные вершины соединены ненасыщенной дугой $m \to n(+m)$, и помечаем $-m$, если соединены непустой дугой $m \leftarrow n(-m)$.

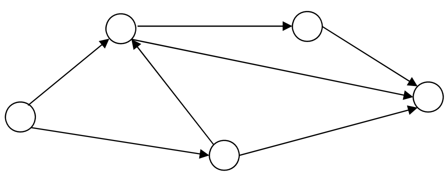
После пометки вершин возможны два случая: вершина S оказалась либо помеченной (шаг 7), либо непомеченной (шаг 8).

Шаг 7. Вершина S оказалась помеченной. Значит, существует последовательность помеченных вершин от I к S. В этой последовательности каждая последующая вершина помечена буквой предыдущей вершины. На дугах последовательности определяем новый поток. Увеличиваем на δ единиц поток на дугах, имеющих направление от I к S и уменьшаем на δ единиц поток на дугах, имеющих обратное направление. Число δ равно наименьшей разнице между пропускной способностью и потоком дуг, входящих в последовательность. Поток можно увеличивать (уменьшать) на прямых (обратных) дугах настолько, пока одна из дуг не станет насыщенной (пустой). Перераспределение увеличивает поток на δ единиц в вершину S. Далее вновь переходим к пометке вершин (шаг 5).

Этап 3. *Определение максимального потока.*

Шаг 8. Вершина S осталась непомеченной. Пусть A – множество всех помеченных вершин, B – множество всех непомеченных вершин. Тогда дуги, связывающие два подмножества вершин A и B, определяют разрез $R(A/B)$. Таким образом, найден поток F и разрез $R(A/B)$, для которого выполняется условие $F_{max} = C_{min}(A/B)$.

Пример 2. На сети из примера 1 сформировать максимальный по величине поток, направленный из истока I в сток S. Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



Решение.

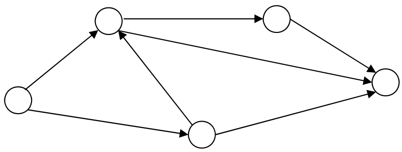
Этап 1.

Шаг 1. Воспользуемся тем, что в примере 1 был уже сформирован некоторый поток на сети.

Шаг 2. Путь $I \to p \to k \to S$ содержит насыщенную дугу (k, S). Больше нельзя добавить потока по этому пути. Пути $I \to a \to S$, $I \to a \to p \to S$ и $I \to a \to p \to k \to S$ содержат насыщенные дуги.

Но путь $I \to p \to S$ имеет две дуги, которые еще ненасыщенные.

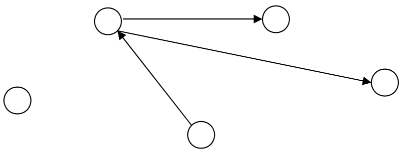
Шаг 3. Увеличиваем поток по найденному пути: min{3–2; 5–1} = 1. Значит, на этом пути поток увеличиваем на 1 единицу, и тем самым дуга (I; p) стала насыщенной.



Шаг 4. Таким образом, получаем насыщенный поток, поскольку каждый рассмотренный путь содержит хотя бы одну насыщенную дугу.

Этап 2.

Выясним, является ли построенный поток максимальным по величине. Строим сеть, на которой отметим все вершины и ненасыщенные дуги. На этой сети разность пропускных способностей дуги и проходящего по ней потока обозначим числом в квадратных скобках.

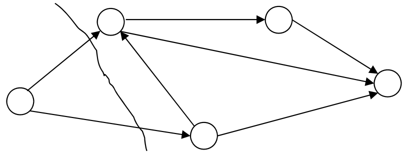


Шаг 5, 6. Вершину I пометить $-I$. На шаге 6 предусматривается пометка вершин, смежных с вершиной I, соединенных ненасыщенными дугами. Но на построенной сети таких вершин нет.

В результате вершина S оказалась непомеченной.

Этап 3.

Шаг 7. Так как вершина S не помеченная, то поток, сформированный на сети, получился максимальным.



$R(A/B)$

Строим разрез на сети. Разбиваем множество вершин на два подмножества: A и B. Так как только одна вершина оказалась помеченной, то множество A состоит из одной вершины I, а остальные образуют множество B:

$$A = \{I\},\ B = \{a;\ p;\ k;\ S\}.$$

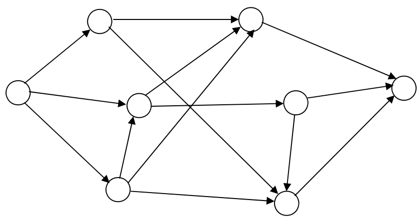
Проводим разрез $R(A/B)$, который состоит из дуг $(I;\ p)$ и $(I;\ a)$:

$$R(A/B) = \{(I;\ p),\ (I;\ a)\}.$$

Определяем величину максимального потока :

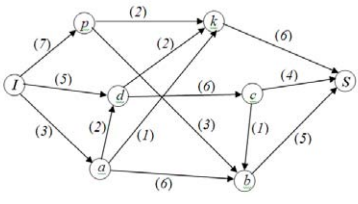
$$F_{\max} = C_{\min}(A/B) = 3 + 4 = 7 \text{ (ед.)}.$$

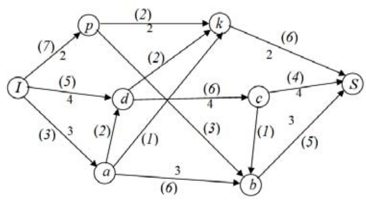
Пример 3. На заданной сети в скобках указаны пропускные способности дуг. Требуется сформировать на сети максимальный поток, направленный из истока I в сток S, и выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



Решение.

Этап 1.





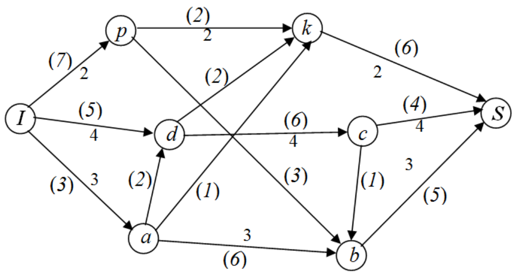
Сформируем на сети какой-либо начальный поток. Рассмотрим путь $I \to p \to k \to S$. Поскольку $\min\{7;\ 2;\ 6\} = 2$, по этому пути пропускаем поток в 2 единицы. На сети значение потока обозначим числами без скобок. По пути $I \to d \to c \to S$ пропускаем поток в 4 единицы, так как $\min\{5; 6; 4\} = 4$. По пути $I \to a \to b \to S$ пропускаем поток в 3 единицы, так как $\min\{3; 6; 5\} = 3$. Таким образом, начальный поток имеет вид:

$$I \xrightarrow{2} p \xrightarrow{2} k \xrightarrow{2} S,$$

$$I \xrightarrow{4} d \xrightarrow{4} c \xrightarrow{4} S,$$

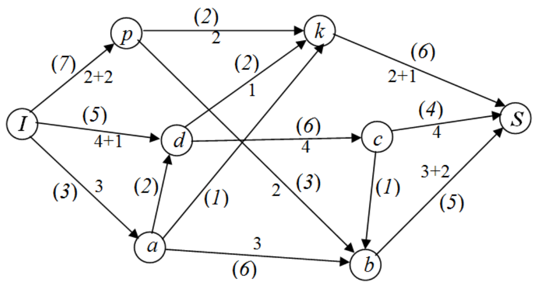
$$I \xrightarrow{3} a \xrightarrow{3} b \xrightarrow{3} S.$$

Объём перевозки $2 + 4 + 3 = 9$ ед.

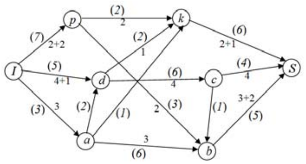


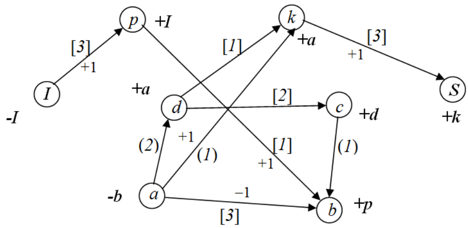
Каждый из рассмотренных путей содержит насыщенную дугу, поэтому эти пути насыщенные. На сети есть еще пути, которые содержат ненасыщенные дуги, а именно: $I \to p \to b \to S$, $I \to d \to k \to S$ и $I \to d \to c \to b \to S$. Для первого пути дополнительно увеличим поток на 2 единицы, так как $\min\{7 - 2; 3; 5 - 3\} = 2$. Второй и третий пути содержат одну и ту же дугу $(I; d)$ с минимальной для них оставшейся разностью $q(I; d) = 1$. Поэтому для увеличения потока на 1 единицу выберем, например, путь $I \to d \to k \to S$.

Теперь каждый из этих путей содержит насыщенную дугу, следовательно, полученный поток – насыщенный (объём 12 ед.).



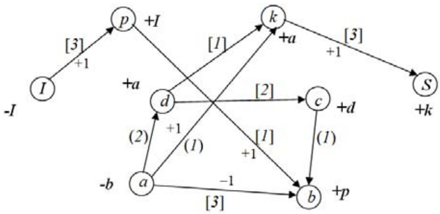
Выясним, является ли построенный поток максимальным. Изобразим сеть, на которой отметим все вершины и ненасыщенные дуги. На этой сети разность пропускной способности дуги и проходящего по ней потока обозначим числом в квадратных скобках. Пропускную способность дуги, по которой поток не проходит, оставим в круглых скобках.



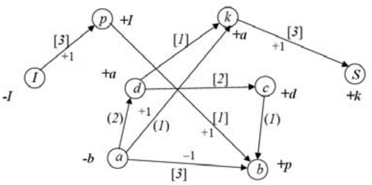


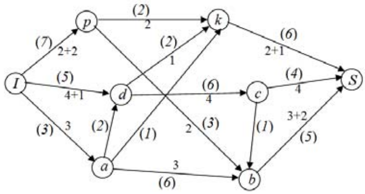
Видим, что на сети исток I и сток S связаны дугами. Значит, можно добавить какое-то количество потока по ненасыщенным дугам, при этом придется перераспределить поток.

Этап 2.



На построенной сети помечаем вершины. Вершину I пометим $-I$. Смежную ей вершину p помечаем $+I$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I \to p$. Вершину b помечаем $+p$, так как вершины p и b соединяет ненасыщенная дуга $p \to b$. Вершину a помечаем $-b$, так как вершины b и a соединяет непустая дуга $b \leftarrow a$. Вершины d и k помечаем $+a$, так как они соединены с вершиной a ненасыщенными дугами $a \to d$ и $a \to k$. Вершина c смежная вершине d, и эти вершины соединены ненасыщенной дугой $d \to c$, поэтому вершину c помечаем $+d$. Вершина S смежная вершине k, и эти вершины соединены ненасыщенной дугой $k \to S$, поэтому вершину S помечаем $+k$.

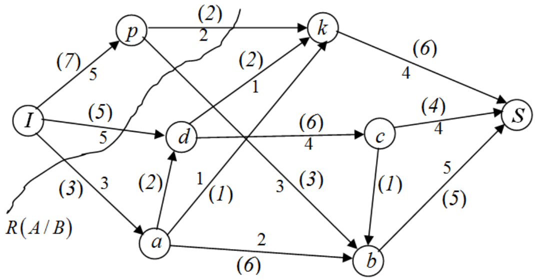




Вершина S оказалась помеченной. Значит, существует последовательность помеченных вершин от I к S: $I \to p \to b \leftarrow a \to k \to S$. В этой последовательности каждая последующая вершина помечена буквой предыдущей вершины. Перераспределим поток на этом пути.

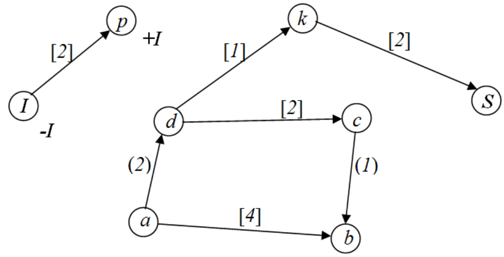
Определим число δ: $\delta = \min\{[3 = 7 - 4], [1 = 3 - 2], 3, 1, [3 = 6 - 3]\} = \min\{3; 1; 3; 1; 3\} = 1$. Увеличиваем на 1 единицу поток на дугах, имеющих направление от I к S: $(I; p)$, $(p; b)$, $(a; k)$, $(k; S)$. Уменьшаем на 1 единицу поток на дугах, имеющих обратное направление: $(a; b)$.

Получаем следующую сеть с новым сформированным потоком, который изображен на рисунке.



Проверим, будет ли построенный поток максимальным. Изобразим сеть, на которой отметим все вершины и ненасыщенные дуги, как сделали выше.

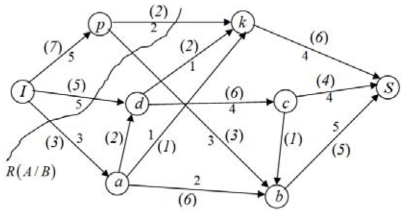
Вновь помечаем вершины. Вершину I пометим $-I$. Смежную ей вершину p помечаем $+I$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I \to p$. Все остальные вершины, в том числе и вершина S, остаются непомеченными. Значит, поток на сети максимальный.



Этап 3.

Как видно на последней сети, исток I и сток S не связаны дугами. Значит, поток, изображенный на предпоследней сети, является максимальным.

Строим разрез на сети. Разбиваем множество вершин на два подмножества: A и B. Помеченные вершины образуют множество $A = \{I; p\}$, непомеченные – множество $B = \{a; d; k; c; b; S\}$.



Проводим разрез $R(A/B)$, который состоит из дуг $(p; k)$, $(I; d)$, $(I; a)$, $(p; b)$:

$$R(A/B) = \{(I; a), (I; d), (p; k), (p; b)\}.$$

Определяем величину максимального потока $F_{\max}$:

$$F_{\max} = C_{\min}(A/B) = 2 + 3 + 5 + 3 = 13 \text{ (ед.)},$$

Контрольные вопросы

1. В чем различие просто графа, псевдографа и мультиграфа?
2. Перечислите все возможные способы задания графов.
3. Что характеризует сумма элементов столбца матрицы смежности неориентированного графа?
4. Что характеризует сумма элементов строки матрицы смежности неориентированного графа?
5. Что характеризует сумма элементов столбца матрицы смежности ориентированного графа?
6. Что характеризует сумма элементов строки матрицы смежности ориентированного графа?
7. Всегда ли матрица смежности симметрична относительно главной диагонали?
8. Как по матрице смежности определить число ребер неориентированного графа?
9. Как по матрице инцидентности, не рисуя граф, определить его матрицу смежности?
10. Может ли вершина, входящая в цикл графа, иметь степень, меньшую двух?
11. Как называется путь, у которого начало первой дуги совпадает с концом последней?
12. Как называется маршрут, у которого первая вершина совпадает с последней?
13. Может ли число компонент связности графа превосходить число его вершин?
14. Сколько ребер имеет связный граф без циклов с n вершинами?
15. Сколько компонент связности может иметь дерево?
16. Можно ли построить дерево, все вершины которого имеют степень больше, чем единица?

Библиографический список

1. Андерсон, Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика = Discrete Mathematics with Combinatorics / Дж. А. Андерсон [и др.]. – М. : Вильямс, 2016. – 957 с.
2. Микони, С.В. Дискретная математика для бакалавра: множества, отношения, функции, графы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С.В. Микони. – СПб. : Лань, 2012. – 187 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
3. Новиков, Ф.А. Дискретная математика: для магистров и бакалавров : учеб. для студ. вузов, обуч. по направлению подготовки «Системный анализ и управление» / Ф.А. Новиков. – СПб. : Питер, 2017.
4. Шевелев, Ю.П. Дискретная математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю.П. Шевелев. – СПб. : Лань, 2016. – 592 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / Р. Хаггарти. – 2-е изд., испр. – М. : Техносфера, 2016. – 399 с. – (Мир программирования).