МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.06.01 «Образование и педагогические науки»
(код и наименование направления подготовки)
«Теория и методика обучения и воспитания математике»
(направленность (профиль))

НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Задачи по математике как средство выявления качеств знаний обучающихся общеобразовательной школы»

Аспирант О.Ю. Иванова______ ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)
Руководитель _Р.А. Утеева_________ ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к представлению научного доклада

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«_____»__________201__ г.

Тольятти 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В Концепции развития математического образования отмечается, что «повышение уровня математической образованности сделает более полноценной жизнь россиян в современном обществе, обеспечит потребности в квалифицированных специалистах для наукоемкого и технологичного производства» [79]. В законе «Об образовании» указано на необходимость «…сформировать общенациональную систему оценки качества образования, получаемых гражданином, и реализуемых образовательных программ» [148]. Федеральные государственные образовательные стандарты основного общего и среднего общего образования [112; 113; 146; 147] ориентированы на становление личностных характеристик выпускника умеющего учиться, осознающего важность образования и самообразования для жизни и деятельности, способного применять полученные знания на практике. Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 предполагает создание условий для поддержки детской одаренности, развития способностей детей в сфере образования [135].

Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе. Без высокого уровня математического образования невозможны выполнение поставленной задачи по созданию инновационной экономики, реализация долгосрочных целей и задач социально-экономического развития Российской Федерации. Развитые страны и страны, совершающие в настоящее время технологический рывок, вкладывают существенные ресурсы в развитие математики и математического образования. На международной конференции по результатам исследований качества образования, прошедшей в Москве 1 февраля 2017 года, министр просвещения Российской федерации О.Ю. Васильева обратила внимание на необходимость расширения системы независимой объективной оценки качества подготовки учащихся.

В федеральных государственных образовательных стандартах основного общего образования [146] и среднего (полного) общего образования сказано [147], что Стандарт ориентирован на становление личностных характеристик выпускника. В деятельностном контексте *качества знаний* обучающихся становятся атрибутами знаний. В связи с этим, особую значимость приобретает задача обеспечения соответствующих качеств математических знаний учащихся общеобразовательной школы. В качестве личностных характеристик обучающихся в нашем исследовании будем рассматривать следующие качества знаний: *осознанность, глубина, гибкость*.

На протяжении нескольких десятилетий многих исследователей волновала проблема формирования и выявления качеств знаний обучающихся. Впервые эта проблема была рассмотрена в середине 60-х годов XX века. Теоретическими основами исследования послужили исследования в области системы качеств знаний учащихся И.Я. Лернера, М.Н. Скаткина, В.В. Краевского [70; 86]; работы по формированию отдельных качеств знаний В.А. Далингера [33], Л.Я. Зориной [54], А.А. Смирновой [130], Н.Г. Шило[160]. Анализ литературы по теме исследования, нормативных документов, отчетов о проведении международных исследований позволяет сделать вывод об актуальности формирования у обучающихся *качеств знаний* по математике.

Согласно ФГОС основным объектом оценки предметных результатов является способность к решению *учебно-познавательных и учебно-практических задач*, основанных на изучаемом учебном материале, использующие способы действий, релевантные содержанию учебных предметов, в том числе метапредметных (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

В теории и методике обучения математике *задачи* традиционно рассматривались как *средство* контроля и оценки *качества знаний* учащихся. В 70-90-е годы в методических исследованиях большое внимание уделялось проблеме формирования тех или иных качеств знаний, например *системности* знаний (Л.Я. Зорина, В.А. Далингер, Н.Г. Шило).

Г.В. Дорофеев, М.И. Зайкин, Ю.М. Колягин, Г.И. Саранцев, П.М. Эрдниев и др. [76; 77; 83; 123; 163] отмечают, что правильно сконструированная система задач обеспечивает *полнот*у представлений школьников об изучаемом объекте, облегчает математическое *обобщение*, способствует *гибкости*, *глубине* и *осознанности* знаний.

Степень разработанности темы исследования. Несмотря на тот факт, что проблема формирования качеств знаний не нова, к ней постоянно обращаются исследователи. Актуальность её решения проявляется в связи с внедрением новых образовательных стандартов, итоговой аттестации обучающихся в формате ОГЭ и ЕГЭ и тем, что по результатам международных исследований TIMMS наша страна теряет свои лидирующие позиции [84; 109; 140].

Отметим ранее выполненные диссертационные работы, посвященные тем или иным *качествам знаний*.

Системность знаний рассматривалась в работах Н.Г. Шило (1997 г.), И.М. Хаджаровой, (2015 г.).

Е.В. Солонин исследовал возможности тестирования как средства процесса формирования *системы качеств* знаний по математике (2004 г.).

Некоторые авторы исследовали пары качеств знаний: в диссертационном исследовании Н.А. Ждан рассмотрены *системность* и *осознанность* с точки зрения реализации содержательно-деятельностных связей (1998 г.) (на примере химии); Е.И. Санина определила методические основы *обобщения* и *систематизации* знаний учащихся в процессе обучения математике в средней школе (2002 г.).

Так же *обобщению* знаний учащихся посвящена работа Е.А. Дьяковой (2002 г) (на примере физики).

Ряд работ посвящен повышению *осознанности* знаний, в которых рассматриваются: условия актуализации смысла познания (Е.Ю. Васюкова,

2010) (на примере химии); использование электронных образовательных ресурсов (Б.Б. Молоткова, 2014)

Качеству знаний *прочность* посвящена работа И.А. Адровой (2008 г), в которой автор предлагает создание и использование повторительных математических диктантов для повышения прочности усвоения базовых знаний.

В работе В.И. Снегуровой «Методическая система дистанционного обучения математике учащихся общеобразовательных школ» [133] рассмотрены качества *полнота* и *глубина* (2010г.)

Гибкости мышления была посвящена работа О.М. Абрамовой (2013 г.). Как средство развития данного качества предложен метод обращения задач.

Наибольшее количество работ посвящено повышению *качества знаний*, рассмотренных в аспекте: варьирования текстовых задач (А.А. Смирнова, 2007 г.); теории и методики оценки качества (Е.М. Юртанова (2007 г.), организационно-педагогических условий при профильном обучении (И.Н. Скрипкин, 2008 г.); корректирующего обучения (А.В. Григорьев, 2009 г.); организации природоохранной деятельности учащихся (на примере биологии) (Н.Б. Фирсова, 2009 г.); индивидуализации обучения (на примере химии) (И.Г. Демиденко, 2010 г.).

Можно констатировать, что не все качества знаний были достаточно исследованы в теории и методике обучения математике. Наиболее «изученными» оказались интегративные качества знаний - *осознанность* и *системность*.

Однако, методическая система задач, направленная на формирование системы качеств знаний обучающихся по математике как основы уровней сформированности системы качеств знаний не являлась предметом специальных исследований.

Таким образом, вышесказанное позволяют констатировать актуальность исследования и сформулировать сложившиеся **противоречия** между:

- необходимостью выявления осознанности, глубины и гибкости знаний как основы уровней сформированности системы качеств знаний обучающихся по математике и отсутствием соответствующей методики;

- необходимостью формирования осознанности, глубины и гибкости обучающихся общеобразовательной школы средствами школьных математических задач и недостаточной разработанностью критериев отбора таких задач.

Выявленные противоречия обусловили постановку **проблемы исследования**: каким требованиям должна удовлетворять система школьных математических задач, ориентированная на выявление *осознанности, глубины и гибкости* знаний как основы уровней сформированности системы качеств знаний обучающихся по математике?

Объект исследования: процесс обучения математике учащихся общеобразовательной школы.

Предмет исследования: проектирование системы математических задач, ориентированной на выявление *осознанности, глубины и гибкости* знаний как основы уровней сформированности системы качеств знаний обучающихся общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в теоретическом обосновании необходимости проектирования системы школьных математических задач, ориентированной на выявление *осознанности, глубины и гибкости* знаний обучающихся общеобразовательной школы и в определении требований к ней.

Гипотеза исследования: если систему школьных математических задач, спроектировать на основе типологии учебных затруднений М.Н. Скаткина и В.В. Краевского и типологии задач Ю.М. Колягина, то это позволит выявить *осознанность, глубину и гибкость* знаний обучающихся общеобразовательной школы по математике, а также уровни сформированности системы качеств знаний.

Для достижения цели исследования на основе сформулированной гипотезы, были определены следующие **задачи:**

1. Исследовать состояние проблемы выявления качеств знаний обучающихся в методической науке и практике обучения математике.

2. Выявить теоретические основы различных подходов к созданию системы качеств знаний.

3. Определить принципы построения системы задач на выявление осознанности, глубины и гибкости знаний обучающихся общеобразовательной школы по математике как основы уровней сформированности системы качеств знаний.

4. Разработать систему задач, ориентированную на выявление осознанности, глубины, и гибкости знаний обучающихся общеобразовательной школы на основе определенных принципов.

5. Экспериментально проверить эффективность применения разработанной системы задач.

Методологическую основу исследования составили основные положения *деятельностного подхода* к обучению математике (В.И. Крупич, Г.И. Саранцев, Т.А. Иванова и др.) и *культурологического подхода* к формированию содержания образования (М. Н. Скаткин, И. Я. Лернер, В. В. Краевский).

Теоретическими предпосылками исследования явились: концепции обучения решению задач (Ю.М. Колягин, Г.И.Саранцев и др.); результаты современных исследований в теории и методике обучения математике (В.А. Далингер, Т.А. Иванова, М.А. Родионов, Е.И. Санина, В.И. Снегурова, Р.А. Утеева, Н.Г. Шило и др.);

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы; анкетирование; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования; статистическая обработка результатов эксперимента.

Базой исследования явились обучающиеся 2-11 классов математической школы, организованной НИЛ «Школа математического развития и образования 5$^+$» при ТГУ, а так же обучающиеся по программе государственного среднего (полного) общего образования учебных групп СППИ17, СПД17 факультета среднего профессионального образования ФГБОУ «Поволжский государственный университет сервиса».

Основные этапы исследования.

На первом этапе (2014 – 2015 гг.) проводилось изучение состояния проблемы в теории и практике, были обоснованы актуальность и практическая значимость проблемы исследования, сформулирован аппарат исследования и проведен констатирующий эксперимент.

На втором этапе (2015-2017 гг.) разрабатывались теоретические основы исследования, был проведен поисковый эксперимент.

На третьем этапе (2017-2018 гг.) проводился обучающий и контролирующий педагогический эксперимент, осуществлялась обработка и обобщение полученных результатов исследования, оформление диссертации.

Научная новизна исследования состоит в том, что в нём впервые проблема выявления качеств знаний обучающихся общеобразовательной школы по математике рассматривается во взаимосвязи с уровнями их сформированности на основе деятельностного подхода к построению системы задач (Г.И. Саранцев, Т.А. Иванова), типологии учебных затруднений М.Н. Скаткина и В.В. Краевского и типологии школьных задач Ю.М. Колягина. Она решена на основе идеи выявления *осознанности, глубины и гибкости знаний*, сформированность которых и определяет тот или иной уровень системы качеств знаний обучающихся общеобразовательной школы по математике. Такой подход позволил выявить определенные требования к проектированию системы задач, ориентированной на выявление качеств математических знаний обучающихся общеобразовательной школы. Новыми научными результатами исследования являются теоретическое обоснование необходимости проектирования системы школьных математических задач, ориентированной на выявление *осознанности, глубины и гибкости* знаний обучающихся общеобразовательной школы и выявление требований к ней.

Теоретическая значимость результатов исследования, вносящих определенный вклад в теорию и методику обучения решению школьных математических задач, заключается в том, что в диссертации: проанализированы существующие подходы к проблеме выявления качеств знаний; раскрыта роль осознанности, глубины и гибкости математических знаний, как основы сформированности уровней системы качеств знаний; обоснованы и выделены совокупность принципов отбора задач для выявления и формирования осознанности, глубины и гибкости математических знаний обучающихся общеобразовательной школы на основе типологии учебных затруднений М.Н. Скаткина и В.В. Краевского и типологии задач Ю.М. Колягина.

Практическую значимость результатов исследования составляют примеры задач, ориентированные на выявление осознанности, глубины и гибкости математических знаний обучающихся, которые могут быть использованы в практике работы учителей при реализации основного или дополнительного математического образования в общеобразовательной школе. Требования к проектированию системы задач, ориентированной на формирование системы математических знаний могут быть учтены авторами школьных учебников по математике, а также учителями математики при составлении программ дополнительного математического образования.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Определение принципов проектирования системы задач, ориентированной на выявление качеств знаний обучающихся по математике требует рассмотрения отдельных качеств знаний, являющихся основой сформированности тех или иных уровней системы качеств знаний. Основополагающими качествами знаний в диссертации определены осознанность, глубина и гибкость математических знаний, выявление

которых позволяет определить *уровни* сформированности системы качеств знаний по математике.

2. Основными принципами проектирования системы задач, ориентированной на выявление качеств знаний обучающихся по математике являются типологии учебных затруднений М.Н. Скаткина и В.В. Краевского и типологии задач Ю.М. Колягина.

3. Разработанная система задач по математике для обучающихся основной школы.

Достоверность полученных результатов **и обоснованность** выводов и рекомендаций, сформулированных в работе, обеспечиваются: их опорой на результаты современных исследователей по теории и методике обучения математике; адекватностью используемого в исследовании методологического и методического инструментария его целям, предмету и задачам; положительными результатами педагогического эксперимента; разнообразием методов исследования.

Апробация и внедрение результатов исследования осуществлялись в период педагогической и научно-исследовательской практик; на *Международных* научных конференциях: «Запад – Россия – Восток» (г. Тольятти, 2014г.); «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева, Тольятти, 27-29 ноября 2014 г.); «Математика. Образование. Культура» (г. Тольятти, 27-29 апреля 2015 г.); «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса), (26-29 апреля 2017 г., Россия, г. Тольятти); научно-методическом семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры «Алгебра и геометрия» (ныне –«Высшая математика и математическое образование») Тольяттинского государственного университета .

Основные положения диссертации изложены в 7 научных публикациях автора, в том числе в 2 статьях в журналах, рекомендуемых ВАК при Министерстве науки и высшего образования России.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы (169 наименований). Общий объем диссертации составляет 120 страниц, работа содержит 10 таблиц, 7 схем.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ОСОЗНАННОСТИ, ГЛУБИНЫ И ГИБКОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§1 . Определение понятий «качество знаний», «система качеств знаний»

Традиционно в педагогической и методической литературе рассматриваются знания, умения и навыки.

Понятие «*знание*» очень многозначно и существуют различные подходы к его толкованию. В педагогической литературе оно употребляется в трёх наиболее важных значениях: как наука; как содержание обучения; как результат усвоения содержания обучения.

Знание – это:

– «постижение действительности сознанием; наука;...Совокупность сведений, познаний в какой-нибудь области» [108, с.201];

– воспринятая, осознанная и зафиксированная в памяти информация;

– «процесс деятельности, определяемый решением задач, сменой приемов исследования» (И. Лакатос);

– результат духовной и практической деятельности людей, выраженный в системе фактов, представлений, понятий, теорий (Т.И. Шамова [159]);

– результат учебно-познавательной деятельности, адекватное отражение в сознании учащегося учебного материала (информации) в виде представлений, понятий, суждений, теорий (Н.Г. Шило [162]);

– «образы вещей, свойств, процессов, отношений объективной действительности, возникающие благодаря закреплению и обобщению объективного содержания психических образований и сохраняющиеся в памяти в виде представлений, понятий и суждений (А. Коссаковски).

Три группы знаний выделяет М.И. Махмутов:1) обобщенные знания-понятия, законы, правила; 2) знания о приемах и способах распознавания сущности предметов и явлений действительности при добывании знаний, о способах решения проблем; 3) факты, термины, даты, названия, количественные данные, и т. д. [89, с.278]

В. С. Цетлин разделяет знания на: понятия о мире (теоретические и практические) и знания о способах деятельности.

Среди видов знаний, которые отличаются своими функциями выделяют: основные понятия и термины, факты, законы науки, теории, идеи, знания о способах деятельности, методологические знания, оценочные знания. С позиции деятельностного подхода знания усваиваются и реализуются в деятельности.

Существуют различные подходы к определению понятия *«качество знаний»*:

– целостная и устойчивая различимость результатов усвоения, выраженную совокупностью признаков, определяющих сущность усваиваемого содержания обучения и деятельности по его усвоению;

– свойства самой формирующейся личности школьника (Т.Л. Коган, Э.А.Красновский [51]);

– «целостная совокупность относительно устойчивых свойств знаний, характеризующих результат учебной деятельности школьников» (Т.И. Шамова [161]);

– совокупность оптимально сочетающихся параметров знаний, обуславливающих их способность удовлетворять требованиям стандарта среднего образования (Г.И. Саранцев, Е.М. Юртанова [122, 164]);

– интегральный показатель усвоения содержания обучения (В.В. Давыдов, В.П. Беспалько, В.И. Травинский, Б.С. Гершунский [103]);

– в работах Л.Я. Зориной *качество знаний* нашло объяснение в одном свойстве результатов учебной деятельности учащихся – системности [54];

– освоенность знаний, свободное владение ими и осознанность применения (аргументации) (И.А. Рудакова [118, с.126]).

Одним из направлений анализа педагогической деятельности является системное рассмотрение *качеств знаний* обучаемых и путей его совершенствования (Лернер И.Я., Скаткин М.Н., Краевский В.В.). Как отмечают сторонники этого направления, от качества знаний, усвоенных учащимися в общеобразовательной школе, зависит, насколько успешно ее выпускники смогут в дальнейшем овладеть специальными знаниями и умениями, а выпускники – специалисты вуза — ориентироваться в сложных вопросах профессиональной и общественной жизни.

В исследовании В.И. Снегуровой [133] предложены четыре уровня *качества знаний*: высокий, средний, низкий и очень низкий. Характеристику этих уровней представим в таблице 1.

Таблица 1

Характеристика уровней качеств знаний (Снегуровой В.И.)

Уровень	Характеристика уровня
Очень низкий	правильных ответов < 50%; много вопросов по выполнению домашнего задания; домашнее задание выполняется с большим количеством ошибок и/или вопросов
Низкий	50-70% правильных ответов; домашнее задание выполняется с ошибками
Средний	70-90% правильных ответов; домашнее задание выполняется
Высокий	90-100% правильных ответов; домашнее задание выполняется; количество вопросов, свидетельствующих о непонимании материала, незначительно

Качество математических знаний учащихся Е.М. Юртанова определила как «совокупность оптимально сочетающихся показателей знаний, раскрывающихся через осознанность усвоения элементов математического содержания, и действий, адекватных их изучению, отвечающих требованиям стандарта математического образования» [164, с. 8].

Параметрами качеств знаний учащихся, по мнению автора являются:

– уровень овладения учебным материалом (обязательный и продвинутый);

– осознанность овладения учебным материалом;

– уровень усвоения деятельности;

– степень освоения (автоматизации) действия.

В дальнейшем, под качествами знаний обучающихся по математике будем понимать свойство результатов учебно-познавательной деятельности.

§2. Анализ состояния проблемы создания системы качеств знаний

Анализом качеств, характеризующих отдельные стороны целостного знания обучающихся занимались дидакты М. И. Зарецкий, М. Н. Скаткин, Т. И. Огородников, С. Г. Шаповаленко, И. Я. Лернер, Т. В. Кудрявцев и др. В их исследованиях рассмотрены *полнота, объем, обобщенность и конкретность, правильность и точность, системность и систематичность, осмысленность, осознанность, глубина, действенность, прочность* и другие качества.

Существуют различные подходы к созданию системы качеств знаний и выявлению связей между теми или иными качествами.

С позиции целостного подхода целей обучения И.Я. Лернер, В.В. Краевский, М.Н. Скаткин выявили совокупность качеств «полноценных знаний» учащихся, разбив их попарно на шесть групп.

В выделенной И.Я. Лернером совокупности качеств есть интегральные качества.

Так например, Т. И. Шамова предлагает систему качеств знаний состоящую из двенадцати качеств [158], одиннадцать из которых совпадают с качествами, предложенными И.Я. Лернером, В.В. Краевскийм, М.Н. Скаткиным. В системе качеств Т.И. Шамовой отсутствует гибкость знаний, но присутствует действенность знаний.

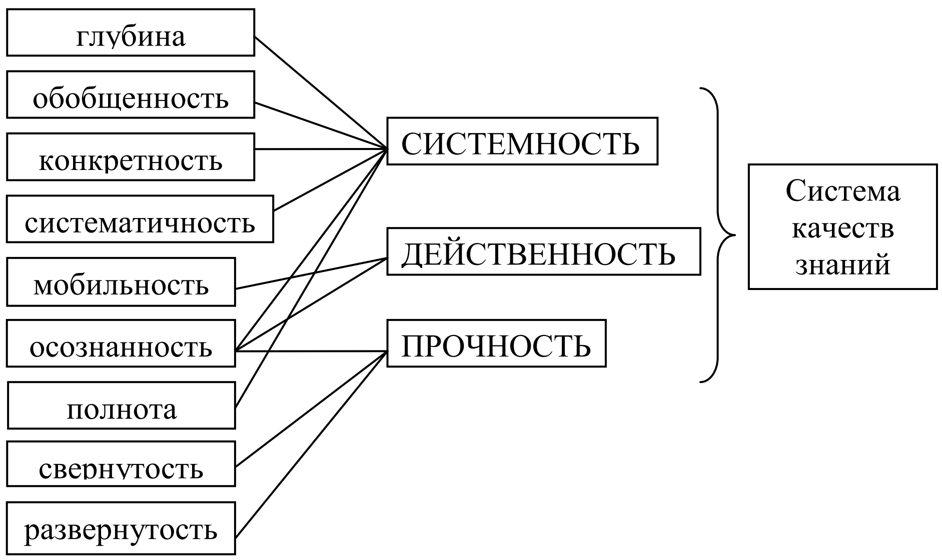
Действенность, прочность, системность по мнению автора, несут в себе интегративные функции. То есть эти качества являются результатом интеграции свойств, входящих в них компонентов, а не их механического слияния.

Кроме этого, предложенная система качеств знаний отражает функции знаний: «знания служат основой действительности (поскольку все в мире системно, то и знания должны быть *системными);* знания выполняют роль ориентира при определении человеком направления своей деятельности (знания должны быть *действенными)*; знания служат базой формирования отношения к объектам действительности (знания должны быть *прочными*)» [161]. Автор отмечает, что система качеств знаний является динамичной системой, так как и её компоненты и она сама изменяется в течении обучения учащихся.

Выявленные качества имеют тесную связь между собой (схема 1).

Схема1

Система качеств знаний Т.И. Шамовой, Т.М. Давыденко



По мнению авторов, знания характеризующиеся *действенностью*, отличаются их *осознанностью*. Осознанность проявляется в понимании обучающимися усвоенных знаний. *Действенность* интегрирует с такими качествами как *полнота*. Уровень действенности знаний определяет степень полноты знаний, усвоенных учащимися.

Прочность представляет собой целостную совокупность *осознанности, развернутости* и *свернутости.*

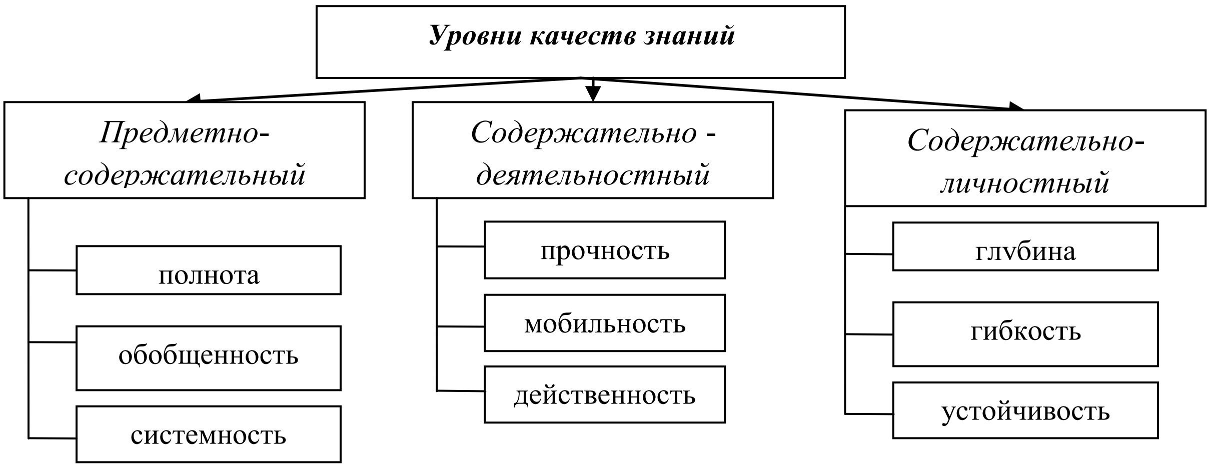
Системность знаний представляет собой интеграцию *осознанности, полноты, систематичности, глубины, конкретности и обобщенности*.

В статье [59, с. 18] нами было отмечено, что *осознанность* является единственным качеством, которое способствует формированию всех трех *интегративных качеств* знаний. Именно этим обуславливается её особая роль среди остальных выделенных качеств знаний.

Авторский коллектив [51] (Коган Т.Л., Красновский Э.А) предлагает выделить три уровня качеств знаний представленные нами на схеме 2.

Схема 2

Система качеств знаний Когана Т.Л, Э.А Красновского



Соблюдая принцип уровневого, целостного членения, для каждого уровня авторы выделили соотносимые с ними качества знаний.

Качества *предметно-содержательного* уровня отражают существенные особенности знаний обучающихся. Для этого уровня характерно воспроизведение:

- отдельных сторон усваиваемого предметного материала;

- связей внутри его;

- связей между различными объектами содержания.

Качества принадлежащие уровню: *полнота, обобщенность и системность*.

Содержательно-деятельностному уровню принадлежат качества, которые описывают результаты обучающихся в процессе усвоения учебного материала: *прочность, мобильность, действенность*. Эти качества обеспечивают:

-закрепление и актуализацию знаний;

- перестройку и реконструкцию знаний;

- применение знаний.

Другими словами на данном уровне качества характеризуют результаты последующей переработки и преобразования знаний обучающимися.

К *содержательно-личностному* уровню относятся *глубина, гибкость, устойчивость.*

Характерной особенностью этих качеств является то, что они формируются под влиянием обучения.

Выделенные качества являются свойствами личности, приобретенные под влиянием воспитания (воспитывающего обучения). Качества этого уровня описывают результаты применения знаний обучающимися в самостоятельной деятельности.

Психологи выделяют на *содержательно – личностном* уровне *активность, самостоятельность, продуктивность, гибкость, критичность, осознанность, устойчивость, глубину мыслительной деятельности.*

Так как именно эти качества отражают единство знаний и мыслительной деятельности. Осуществляется перенос знаний «на себя» и переход в свойства личности обучающегося. Среди названных свойств ума отобраны такие, которые легко соотносятся с качествами предметно-содержательной и содержательно-личностной группы. При соблюдении этого условия качествами содержательно-личностной группы можно описывать результаты дальнейшего преобразования знаний в условиях состоятельной учебной и внеучебной творческой деятельности учащихся, в ситуациях самостоятельно выбранного нового учебного материала. На этом уровне предлагается рассматривать *устойчивость, гибкость и глубину* мыслительной деятельности, как показатели познавательной самостоятельности обучающихся.

В статье [15] М.П. Барболин предложил условно разбить перечисленные качества на группы в соответствии с двумя сторонами фонда действенных знаний.

К *первой группе* содержательной стороны знаний принадлежат пары качеств: *полнота* и *глубина, осознанность* и *прочность, систематичность* и *системность.*

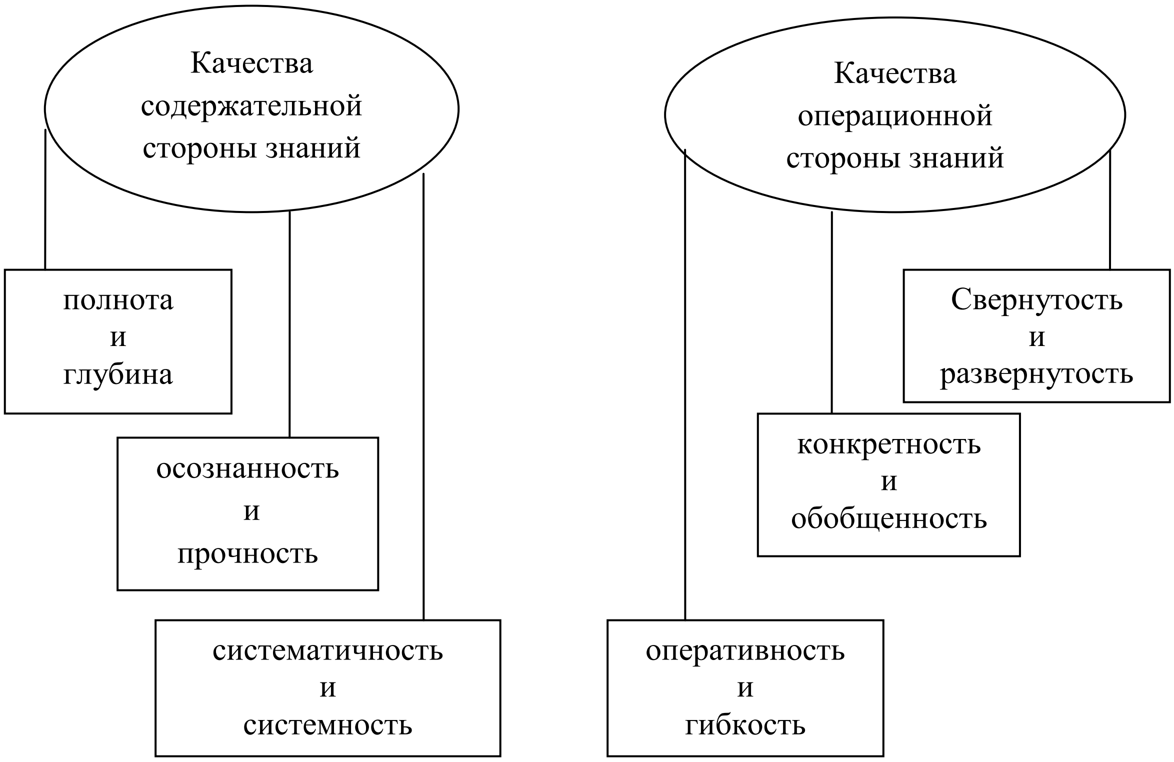
Вторая группа характеризует операционную сторону знаний: *оперативность* и *гибкость*, *конкретность* и *обобщенность*, *свёрнутость* и *развёрнутость* (схема 3).

Автор отмечает, что качества входящие в обе группы отличаются по характеру, следовательно пути их формирования должны иметь свои особенности. Причем необходимым условием формирования качеств знаний второй группы является наличие качеств знаний первой группы.

Анализ рассмотренных подходов к определению системы качеств знаний показал, что большинство авторов включили в неё такие качества как: *полнота, прочность, системность, мобильность (операционность), глубина*. Системы качеств знаний, предложенные Т.И. Шамовой и И.Я. Лернером состоят из 12 качеств, 11 из которых совпадают. В системе качеств знаний Т.И. Шамовой отсутствует *гибкость* знаний, И.Я. Лернер в своей системе не рассматривает *действенность* знаний, а в схеме, предложенной Д.Ф. Каревой [68] не учитываются *осознанность* и *прочность*.

Схема 3

Группы качеств действенных знаний



Как отмечает А.А. Смирнова, «процесс обучения должен способствовать формированию *осознанных и прочных* знаний, которые в свою очередь являются условием *предметной и интеллектуальной компетентности*» [130].

Как показано в статье Л.С. Рязановой *полнота, прочность и осознанность знаний* используются для мониторинга качества математического образования [122]. Автором выделены критерии: *сформированность знаний, сформированность умений, действенность умений.*

Сформированность знаний оценивается по показателям: *полнота* содержания системы знаний, объём системы знаний, *прочность знаний*.

Показателями критерия с*формированности умений* выступают: полнота сформированности умений, прочность умений, осознанность умений.

Инструментами проверки для перечисленных критериев, показателей выступали: результаты текущих и зачётных мероприятий, проверка результатов самостоятельной работы учащихся, методы наблюдения, беседы, метод экспертной оценки.

Проведенный анализ определений качеств знаний в педагогической литературе показал различие формулировок некоторых качеств. Охарактеризуем их.

2.1. *Полнота знаний*

Под *полнотой* знаний большинство авторов понимают количество программных знаний об изучаемом объекте (И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин, В.В. Краевский). И.С. Булатова [21, с.172] характеризует *полноту* как качество знаний, отражающее их состав, количество. Авторы [106, с.168] определяют *полноту* как соответствие знаний определенному количеству или объему. Н.Г. Демиденко полноту характеризует как выделение признаков и взаимосвязи понятий [37, с.11].

И.С. Булатова отмечает, что *полнота знаний* обеспечивается не только сообщением информации, но и в результате творческого применения знаний. Поскольку в результате творческого применения знаний возможно появление новых для обучающегося знаний и новые способы их получения.

В диссертационном исследовании Т.В. Гриневой [30] *полнота* рассматривается как один из показателей *качества понимания* учащимися изученного материала.

Д.А. Рукосуева, считает, что «*полнота понимания* объекта при его восприятии характеризуется количеством возможных и воображаемых в образе свойств и связей между ними» [119, с.441].

При оценке *полноты* знаний часто используют *коэффициент полноты* $К_{пз}$, разработанный А.А. Кыверялгом:

$$К_{пз} = \frac{\sum Э_н}{Э_о \cdot П}, \text{ где}$$

$Э_о$ - количество ожидаемых элементов знаний (понятий) в модели идеального (правильного полного) ответа на вопрос в объеме школьной программы;

$Э_н$ - сумма наличных элементов знаний, содержащихся во всех ответах на тот же вопрос;

П - количество всех присутствующих во время проведения проверки знаний.

Сравнительную характеристику уровней полноты знаний, выделенных Т.В. Гриневой, Д.А. Рукосуевой, В.И. Снегуровой [30, 120, 134] представим в таблице 2.

Таблица 2

Сравнительная характеристика уровней полноты знаний

	Уровень полноты		
	Низкий	Средний	Высокий
Гринева Т.В.	Распознавание понятия осуществляется		
	«не во всех интерпретациях и формах представления, даже из числа тех, которые рассмотрены ранее или приведены в учебнике» [30]	«только в тех интерпретациях и формах представления, которые аналогичны ранее рассмотренным или приведенным в учебнике» [30]	« в различных интерпретациях и формах представления даже в случаях, когда примеры построены не в том соответствие со структурой рассмотренных ранее» [30]
Рукосуева Д.А.	«слабое представление свойств и признаков воспринимаемого объекта, отсутствие связей и отношений между ними; слабое знание возможных форм и видов представления воспринимаемого объекта; отсутствие представления структуры сложного объекта» [119]	«знание и выделение неполного объема признаков и свойств воспринимаемого объекта (не менее 60% к эталону), частичная установка связей между ними; знание только части форм и видов представления воспринимаемого объекта; слабое представление структуры сложного объекта» [119]	«знание и выделение признаков и свойств воспринимаемого объекта по эталону, установка связей и отношений между ними; знание форм и видов представления воспринимаемого объекта по эталону; умение привести целый класс конкретных примеров подобных объектов; умение сложный объект разбить на более простые объекты» [119]

Продолжение таблицы 2

<table>
<tr><td rowspan="4">Снегурова В.И.</td><td colspan="3">Воспроизведение необходимых математических фактов</td></tr>
<tr><td>Не все</td><td>все</td><td>все</td></tr>
<tr><td colspan="3">Наличие затруднений при решении стандартных задач</td></tr>
<tr><td>Большое количество, ряд заданий решить не может</td><td>Имеются, решает задачу с подсказкой и/или помощью учителя</td><td>Не имеется, решает задачи самостоятельно</td></tr>
</table>

2.3. *Конкретность знаний*

Конкретность по мнению М.Н. Скаткина, В.В. Краевского «проявляется в раскрытии конкретных проявлений обобщенного знания и способности подводить конкретные знания под обобщенные» [70, с.24]. Обеспечивается фактами и образными представлениями;

Вместе с этим, И.С. Булатова отмечает, что конкретность связана с процессом познания и хранения знаний. Все знания имеют конкретную основу. Конкретное не всегда осознается человеком и функционирует интуитивно. Большое значение имеет процесс формирования конкретности знаний обучающихся, в ходе которого используются индуктивный или дедуктивный методы их обучения [21].

2.4 *Свернутость знаний*

И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин, В.В. Краевский свернутость понимают как способность личности выражать знания компактно, но в то же время чтобы оно представляло видимый результат уплотнения некоторой совокупности знания. Так же свернутость подразумевает раскрытие системы шагов, которая ведёт к сжатию, свертыванию знаний [70].

Этой же точки зрения придерживается И.С. Булатова, отмечая, что *свернутость* знаний является важным инструментом познания и приобретается в процессе многократного применения знаний и проявляется в уплотненном их выражении [21].

2.5 *Развернутость знаний*

Данное качество обнаруживается в ходе раскрытия системы шагов, которые ведут к сжатию знаний.

Так, в случае когда обучающийся испытывает затруднения при развертывании уплотненно выраженной мысли или конкретизации общей идеи, то она будет бессодержательной.

При недостаточной степени готовности к осознанному развертыванию не может возникнуть и свернутая мысль. *Развернутость знаний* - одно из условий осознания элементов объекта усвоения. [86].

Проявляется как готовность представить сжатую мысль как цепь или цепи взаимосвязанных суждений, обосновывающих свернутую мысль. Для формирования развернутости знаний материал подается в развернутом виде.

Наиболее изученным на сегодняшний день является *системность* знаний.

2.6 *Системность знаний*

1) качество знаний, которое характеризует наличие в сознании ученика структурных связей или связей строения знаний внутри научной теории (Л.Я. Зорина [54]);

2) качество предполагающее инвариантность роли того или иного знания. Оно предусматривает осознание личностью знаний по их месту в структуре научной теории. Предполагает в сознании ученика объемных связей между элементами знаний (понятиями и суждениями), обеспечивающих целостность знаний, адекватных научной теории (И.Я. Лернер [86, с.22]);

3) «совокупность знаний в сознании, структура которой соответствует структуре научной теории» (М.Н. Скаткин, В.В. Краевский [70, с.25]);

4) качество знаний, предполагающее наличие в сознании ученика объемных связей (в нашей трактовке) между элементами знаний (понятиями и суждениями), обеспечивающих целостность знаний, адекватных научной теории (Н.Г.Шило, [161];

5) узловое качество, формирование которого влияет на формирование других качеств (Д.А. Баннов, Т.А. Иванова [14, с.167]).

Системность позволяет самостоятельно иерархизировать новые знания. Задача формирования системности связана с обогащением содержания образования *методологическими знаниями.*

Для формирования системности знаний И.Я. Лернер отмечает действенность следующей схемы, в которой указана последовательность изложения теории и закона (схема 3).

Т.А. Иванова, Д.А. Баннов в статье [14] определили, что *системность математических знаний* определяется усвоением системы гуманитарно - ориентированного математического содержания.

Для формирования системности знаний в целом авторы выделяют подсистемы:

- совокупность элементов, образующих систему;
- структуру системы: совокупность связей между её элементами;
- функцию каждого элемента в системе.

Схема 4

Последовательность изложения теории/закона по И.Я. Лернеру

При изложении теории:	*При изложении закона:*
1. объект изучения теории;	1. формулировка закона;
2. предмет изучения теории	2. запись закона на соответствующем ему языке;
3. основание теории	3. пути получения закона;
4. инструментарии теории	4. границы применимости закона;
5. следствия теории и их проверка	5. сфера применения закона
6. границы применимости теории	

Формирование *системности* знаний, по мнению Д.А. Баннова [13], происходит в шесть этапов:

1) описание содержания и структуры системы;

2) формулирование целей изучения;

3) актуализация системы;

4) изучение нового;

5) систематизация знаний;

6) межпредметная систематизация знаний.

Предложенный метод делает понятной работу учителя по целенаправленному формированию *системных* математических знаний от этапа анализа содержания до конкретной работы в классе.

2.7 *Систематичность знаний*

1) осознание состава определенной совокупности знаний, иерархии их и последовательности, т.е. осознание одних знаний как базовых для других [70, с.25; 86, с.18];

2) «определение иерархии понятий в их последовательности и взаимосвязи» (Н.Г. Демиденко, [37, с.11])

Систематичность знаний тем больше, чем больший круг знаний учащиеся могут выстроить в последовательные ряды фактов и связей между ними.

Систематичность проявляется в:

1) изложении учебного материала в последовательности, сходной с той которую дает учитель или учебник, но при объяснении связей между отдельными знаниями;

2) изложении, требующем перестройки учебного материала в иной последовательности, при мотивировке или очевидной обоснованности этой перестройки;

3) выполнении действий в необходимой последовательности, приводящей к достижению целей;

4) самостоятельном установлении новых связей, во-первых между усвоенными знаниями, во-вторых, между ранее усвоенными и новыми знаниями (И.Я. Лернер, [70, с.19].

2.8 *Прочность знаний*

1) длительность сохранения в памяти образов усвоенной деятельности от окончания обучения до момента их воспроизведения с показателями качества (В.П. Беспалько);

2) «определяется независимостью использования усвоенных знаний и выработанных умений от времени, различия ситуаций и условий их применения» (И.А. Зимняя [53, с.239])

3) состоит в «устойчивой фиксации в памяти учащихся системы существенных знаний и способов их применения» (И.Я.Лернер [86, с.38], М.Н. Скаткин [70, с. 81];

4) «сохранение, удержание в памяти изученного материала» [32];

5) длительное сохранение в памяти, воспроизводимость в необходимых случаях [76];

6) представляет собой целостную совокупность *осознанности, развернутости* и *свернутости* (Т. И. Шамова. Н.Г. Шило);

7) длительная сохраняемость знаний (И.С.Булатова [21, с.172]);

8) устойчивая фиксация изучаемого материала и способности практического применения полученных знаний или способность обоснованно вывести необходимые знания, опираясь на уже имеющиеся сведения (Д.П. Клейносов, [71]).

Достижение прочности знаний реализуется формированием *систематичности, оперативности, системности и осознанности* знаний.

И.А. Зимняя так же отмечает, что прочность существенно зависит от системности [53, с.239].

Одним из условий *прочности* знаний является *осознанность* их приобретения (Д.П. Клейносов, [71, с.111]).

С.Л. Рубинштейн, отмечает, что «прочность усвоения знаний зависит не только от последующей специальной работы по их закреплению, но и от первичного восприятия материала, а осмысленное его восприятие – не только от первичного с ним ознакомления, но и от всей последующей работы» [53, с.236].

2.9 *Действенность знаний*

Действенность знаний характеризует результаты применения знаний в новой для учащихся учебной ситуации. З.И. Калмыкова [69] отмечает, чтобы знания приобрели *действенную* силу, то есть могли быть переданы другим, использованы для широкого круга задач, они должны быть *осознаны*.

Качество и эффективность обучения математике можно определить не только глубиной и прочностью овладения учащимися знаниями, умениями и навыками, но и уровнем их математического развития, подготовленностью к самостоятельному овладению знаниями.

Математические знания и умения сами по себе еще не определяют уровень умственного развития человека, если он не умеет пользоваться ими в новых нестандартных ситуациях, без готовности к самостоятельному решению новых учебных проблем, не обязательно из области математики.

§3. «Глубина», «осознанность» и «гибкость» как основа уровней сформированности системы качеств знаний

Не случайно в ранее проведенных исследованиях, большинство авторов акцентировали свое внимание на отдельных качествах знаний. Это можно объяснить тем, что объективно трудно рассматривать все двенадцать качеств знаний одновременно.

В статье Ю.Ф. Гущина акцентируется внимание на вопросе И.Я. Лернера: «неужели при том обилии знаний, который приходится усваивать ученику, все они могут и должны характеризоваться всеми указанными качествами?» [32].

Отмечается, что *качество знаний*, следует привязывать к уровню подготовки обучающегося [47, с.126].

Рассматривая вопрос о применении знаний, И.Я. Лернер М.Н. Скаткин, В.В. Краевский определили уровни требований к усвоению знаний обучающимися [70, с. 112-113].

I уровень – воспроизведение текста, сообщение об объекте или способе действия с ним:

- воспроизведение текста по образцу;

- воспроизведение текста или с переконструированием или конструированием текста по нескольким источникам.

II уровень – распознавание объектов разного уровня сложности. Другими словами уровень применения:

- распознавание по образцу;

- распознавание в незнакомой ситуации.

На этом уровне обучающиеся должны владеть логическими операциями: сравнение, классификация и распознавание.

III уровень – уровень применения знаний для решения трехкомпонентных задач:

Первый уровень способен обеспечить *полноту, глубину, конкретность* и в определенной степени – *обобщенность, системность*.

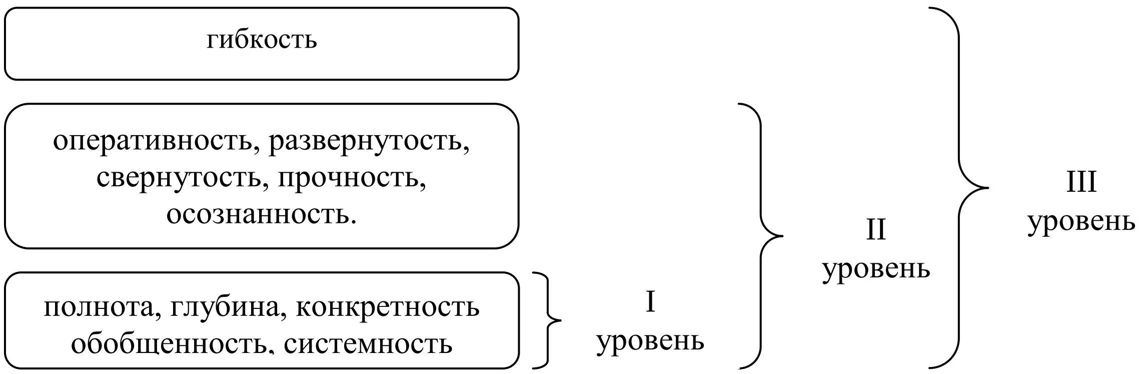
Второй уровень, совершенствуя перечисленные качества, формирует *оперативность, развернутость, свернутость, прочность*, и – в определенной мере *осознанность*.

Третий уровень знаний характеризуется совершенствованием всех качеств второго уровня и *гибкостью* знаний. [86, с.41]. Сказанное проиллюстрируем на схеме 5.

Схема 5

Взаимосвязь уровней усвоения и качеств знаний

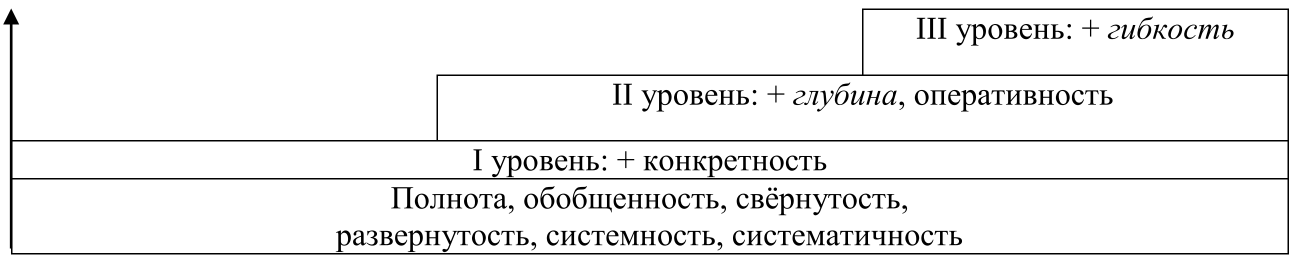
(по И.Я. Лернеру, М.Н. Скаткину, В.В. Краевскому)



Связь уровней усвоения и качеств знаний, предложенная И.С. Булатовой представлена нами на схеме 6. Следует отметить, что автор не включила в данную систему *осознанность* знаний.

Схема 6

Взаимосвязь уровней усвоения и качеств знаний (по И.С. Булатовой)



Набор шести качеств: *полнота, обобщенность, свёрнутость, развернутость, системность* и *систематичность* определен как базис для уровней усвоения.

И.С. Булатова [21, с.173] обращает внимание на то, что *первый уровень усвоения* определяется любым набором качеств из базиса с обязательной *конкретностью*.

На *втором уровне усвоения* к качественным характеристикам первого уровня добавляются *глубина* и *оперативность*.

По мнению автора одни и те же качества знаний могут быть на разных уровнях. «Так, например, на *первом уровне усвоения* знания могут быть усвоены с *конкретностью* и *свернутостью*, если элементы или шаги, способствующие свертыванию, даются тоже на *первом уровне усвоения*. Если усвоен способ свертывания знаний на первом уровне усвоения и по заданным элементам осуществляется свертывание (в таблицу, график, схему...) некоторой совокупности знаний, то можно говорить об их усвоении на *втором уровне усвоения* с *конкретностью и свернутостью*. Если ставится задача, выделить элементы, приводящие к свертыванию знаний, и провести на этой основе предъявление знаний в свернутом виде, то можно говорить о *третьем уровне усвоения* со *свернутостью* знаний» [21].

Обобщая вышесказанное отметим, что *знания* соотносят с *уровнями их усвоения* [21; 47; 55; 60; 70;91]:

1) простое воспроизведение;
2) воспроизведение по образцу в сходных ситуациях;
3) творческое воспроизведение.

Т.к. глубина знаний является базой для осознанности, а осознанность обуславливает гибкость знаний, то взаимосвязь этих качеств можно представить в виде схемы 7.

Схема 7

Взаимосвязь гибкости, осознанности, глубины знаний

гибкость → осознанность → глубина

В диссертации мы исходим из того, что необходимо определить такие качества знаний, которые могут быть положены в основу выявления уровней сформированности всей системы качеств знаний.

Итак, мы выделяем три качества знаний, которые, по нашему мнению, определяют три уровня усвоения математических знаний.

3.1. «Глубина» знаний

В современной научно-педагогической литературе встречаются понятия «глубина ума», «глубина мышления», «глубина знаний». В психологии *глубину ума* определяют как одно из качеств ума, которое трактуется как обобщенность мыслительной деятельности [69].

В.А. Гусев предлагает следующее толкование *глубины ума*: «степень существенности тех признаков и закономерностей, которые может выделить в задаче познающий человек; вычленение ведущих закономерных отношений явлений» [31, с. 195].

Под *глубиной мышления* Ю.М. Колягин понимает качество, характеризующееся «способностью глубокого понимания каждого из изучаемых математических фактов, в их взаимосвязи с другими фактами» [83, с. 159].

А.Р. Рахимова пишет «…в структуре понимания представление *о глубине* служит обозначением высокого уровня рефлексии и увеличения знания о чем – либо… *Глубина* символизирует основу понимания, суть вопроса, проблемы и др» [116].

Анализ научно-методической литературы позволил выделить несколько подходов к трактовке понятия «глубина знаний», рассматриваемого как:

– «совокупность осознанных учащимися существенных связей между соотносимыми знаниями» (И.Я. Лернер [86, с. 16]); характеризуется наличием в сознании учащегося внутрикурсовых, внутрипредметных и межпредметных связей;

– число осознанных существенных связей данного знания с другими, с ним соотносящимися (М.Н. Скаткин и В.В. Краевский) [70, с.20];

– характеристика *качества понимания* учащимися изучаемого материала (Т.В. Гринева [30]);

– число существенных признаков понятия в их взаимосвязи (Н.Г. Демиденко [37]).

Таким образом, большинство авторов под *глубиной математических знаний* понимают количество существенных связей между элементами знаний.

Глубина совместно с *полнотой* знаний являются определяющими факторами при принятии решения о соответствии уровня подготовки по математике обучающихся с требованиями, предъявляемыми ФГОС [148]. Поэтому проблема *выявления глубины* математических знаний обучающихся является одной из важных проблем современной теории и методики обучения.

В рамках дидактической инженерии Н.К. Нуриев, С.Д. Старыгина предложили метод оценки *глубины* усвоенных знаний студента:

GBL=POL*CHL, где

POL-*полнота* владения знаниями;

CHL-*целостность* владения знаниями.

«Значения параметров POL, CHL находятся в интервале от 0 до 1.

Для оценки качества *полноты* усвоенных знаний, служат вопросы рода: «я знаю что …». Эти вопросы предназначены для проверки знаний типа: данных, фактов, определений, свойств объекта и т.д. в рамках предметной области.

Вопросы для оценки качества целостности (CHL) усвоенных знаний – «я знаю как…», т.е. этими вопросами проверяются умения использовать знания в деятельности» [106].

По мнению М.П. Барболина [15] *глубина* знаний совместно с *полнотой* характеризует *содержательную сторону* знаний.

Для формирования данного качества автор выделяет три типа задач:

- на распознавание (наличие и характера) связей;
- на доказательство (обоснование существования и вида связей);
- на построение моделей (теоретико- множественных и графовых).

Г.И. Саранцев [124] проблему формирования *глубины математических знаний* связывает с упражнениями на выявление существенных свойств понятия. Система задач включает в себя следующие упражнения на: применение ранее изученных понятий и теорем; практического характера; распознавание объектов, принадлежащих понятию; построение объектов, удовлетворяющих указанным свойствам; составление «родословной» понятия; применение понятия в различных ситуациях; систематизацию понятий.

Проведя сравнительный анализ результатов исследований TIMSS и PISA авторы [141] выявили связь уровня сформированности предметного знания со способностью перенести и применить его в ситуации, приближенной к реальной. Чем лучше учащийся владеет предметным материалом по математике, тем с большей вероятностью он сможет применить это знание для решения проблемы в неакадемическом контексте. Тем самым проявляется *глубина математических знаний* обучающихся.

Ссылаясь на опыт японских ученых, И.С. Сафуанов, Л.С. Атанасян [126] приводят три типа задач с открытыми концами, которые на наш взгляд, способствуют формированию глубины математических знаний:

– *поиск закономерностей* (правил, соотношений, отношений, свойств): например, найти все закономерности в таблице умножения;

– *классификация*: обучающимся предлагается классифицировать объекты по различным характеристикам, что может привести к формулировке некоторых математических понятий;

– *измерение*: обучающимся предлагается приписать меру определённым явлениям (такие задачи требуют использования имеющихся математических знаний и умений).

Для диагностики качества *глубина знаний* применяют так называемый уровневый подход.

Авторами [30; 119; 133] определены уровни *глубины*: *высокий, средний, низкий*.

Сравнительную характеристику которых покажем в таблице 3.

Примером проявления глубины, по мнению Ю.М. Колягина, может быть ответ на вопрос: «Известно, что сложению соответствует одно обратное действие – вычитание, умножению тоже одно. Почему же действие возведение в степень имеет два себе обратных: извлечение корня и логарифмирование?» [83, с.159]

Приведем примеры задач выявляющих *глубину* знаний.

Пример 1. Является ли прогрессией последовательность вида: 3,3,3,…,3,…? Если является, то какой?

Ответ будет зависеть от того, оговорена ли в определении возможность равенства нулю разности (или единице - знаменателя) прогрессии.

Пример 2. Запишите логарифм по следующим условиям и вычислите его: а) «я логарифм по основанию 2»; б) «я нечетное число»; в) «мое подлогарифмическое выражение равно 32».

Решение. 1. Условие а) выглядит так: $\log_2(\_\_)$;

2. Выполнение условия б): $log_2(\_\_) = k$ где $\mathrm{k} = 2\mathrm{n}+1, \mathrm{n} \in \mathrm{N}$;

3. Условие в): $log_2 32 = \mathrm{k} \Rightarrow log_2 32 = 5$

Таблица 3

Сравнительная характеристика уровней глубины

Автор	Уровень глубины		
	Низкий	Средний	Высокий
Гринева Т.В	«Учащийся усваивает изучаемый материал поверхностно, лишь на уровне узнавания; не может указать существенные связи в предмете изучения; решает репродуктивные задачи» [30]	«Учащийся способен определить существенные связи в объекте изучения, но они не систематизируются им; учащийся справляется со всеми основными типами задач на применение изучаемого понятия» [30]	«Учащийся усваивает изучаемый материал целостно, умеет устанавливать в нем связи и отношения, определять их значимость, способен выявить субъективно новые существенные связи изучаемого объекта; учащийся справляется с нестандартными задачами на применение изучаемого понятия» [30]
Рукосуева Д.А.	«Выделение несущественных признаков и свойств объекта. Отсутствие представления иерархии классов и подклассов, в которые входит воспринимаемый объект. Слабый уровень оперирования абстрактными понятиями. Слабое представление области их применения» [119]	«Выделение только части существенных признаков и свойств воспринимаемого объекта (не менее 60% к эталону), в результате чего сформирована разорванная иерархия классов и подклассов, в которые входит воспринимаемый объект. Понимание только прямой зависимости одного объекта от другого. Переход от конкретного воспринимаемого объекта к абстрактному. Частичное представление области применения воспринимаемого объекта» [119]	«Выделение существенных признаков и свойств воспринимаемого объекта разных уровней, включение его в классы образов по общим свойствам и признакам. Представление иерархии классов и подклассов, в которые входит воспринимаемый объект. Понимание сложной зависимости одного объекта от другого. Переход от конкретного воспринимаемого объекта к абстрактному. Знание области применения воспринимаемого объекта» [119]

Продолжение таблицы 3

Снегурова В.И.	«Воспроизводит не все математические факты. Испытывает значительное число затруднений: при решении стандартных задач, при конструировании математических моделей, в обосновании выполняемых действий. Даже с подсказкой учителя не может правильно выбрать математический объект для решения задачи» [133]	«Воспроизводит все математические факты. Испытывает затруднения: при решении стандартных задач, при конструировании математических моделей. При выборе математического объекта Но после подсказок и/или помощи учителя успешно справляется с заданием. Правильно обосновывает выполняемые действия» [133]	«Воспроизводит все необходимые математические факты. Решает стандартные задачи без подсказок и помощи учителя. Конструирует математическую модель без подсказок и помощи учителя. Безошибочно осуществляет выбор математического объекта, адекватного ситуации. Правильно обосновывает все выполняемые действия» [133]

Пример 3. Запишите в виде логарифма с основанием 2 числа: а) 1; б)2; в) 3; г) 0; д) -1; е) -2; ж)0,5; з) $\frac{1}{3}$*; и) -0,5.*

Пример 4. 1)В одной и той же системе координат изобразите схематически графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$: а) при $a > b > 1$; б) при $0 < b < a < 1$.

2)В той же системе постройте графики обратных им функций $y = log_a x$ и $y = log_b x$.

3)Используя графики решите неравенство $log_a x < log_b x$.

4) Сформулируйте правило сравнения логарифмов одного и того же числа.

Пример 5. Запишите соотношение $a^c = b$ между числами a, b, и c с помощью логарифма по основанию a.

Пример 6. Почему число 1 не рассматривается в качестве основания логарифма?

Пример 7. В чем отличие свойств логарифмических функций с основаниями большими и меньшими единицы?

Пример 8. Какие случаи надо рассматривать при решении неравенства $log_x(5-x)>0$? Решите это неравенство.

Пример 9. Что происходит с ОДЗ при замене $log_a(x(x-2))$ на $log_a x+log_a(x-2)$? Что происходит с ОДЗ при обратной замене? Что при этом может произойти с корнями уравнения $log_2 x+log_2 \;\; x-2 \;\; =2$?

*Пример 10***.** В каком случае при замене $log_a(x-2)^c$ на $c\,log_a(x-2)$ может произойти изменение ОДЗ? Могут ли при этом преобразовании появиться посторонние корни?

3.2. «Осознанность» знаний

Подробное описание характеристики осознанности знаний обучающихся было рассмотрено и опубликовано нами в статье [59, с. 17-20].

Так, П.Я. Гальперин понимает *осознанность как* характеристику учебных действий [31].

Осознанность знаний личностью, с точки зрения М.Н. Скаткина и В.В. Краевского, проявляется в «понимании их связей и путей их получения, в умении их доказывать, в понимании принципа действия связей и механизма их становления» [70, с 27].

И.С. Булатовой относит *осознанность* как к определенным видам знаний, так и к элементам содержания образования [21, с.172].

Как главную характеристику качеств знаний обучающихся рассматривает *осознанность* Е.Ю. Васюкова, отмечается связь осознанности с актуализацией смыслов познания и рефлексией. Таким образом, это качество обладает смысловой обусловленностью [23].

Нами установлено, что «наиболее очевидной формой выражения *осознанности* знаний является умение ученика излагать знания своими словами, менять порядок изложения при сохранении связей между отдельными его фрагментами, перестраивать изложение в зависимости от его цели, извлекать необходимые части целостного знания для ответа на изолированные вопросы.

Другой формой выражения *осознанности* знаний является группировка и систематизация знаний в зависимости от вопроса, ответ на который прямо не излагается учителем или в учебнике, но данные для такого ответа были в той или иной форме представлены; самостоятельно применять всю совокупность знаний в вариативных ситуациях – по образцу и в нестандартных ситуациях, требующих творческой деятельности» [59].

Н.Г. Демиденко видит *осознанность* в проявлении умения обучающегося перегруппировывать и преобразовывать материал, творчески применять знания [37, с.11].

Показателем *осознанности* математических знаний обучающихся является знание и правильное использование связей между различными представлениями математических объектов.

В диссертационном исследовании Б.Б. Молотковой [94] определены три уровня осознанности: первый, второй третий.

Первый уровень характеризуется знанием связей между определениями понятий математических объектов, их свойствами и различными представлениями (аналитическими, графическими).

Второй уровень определяется умением преобразовывать учебную информацию с помощью знаний связи между различными представлениями математических объектов для конструирования нового математического объекта.

На третьем уровне обучающиеся должны уметь применять знания в новой ситуации, а так же уметь создавать новые связи, которые могут иметь форму вывода, следствия, гипотезы.

В.И. Снегурова [133] уровни сформированности осознанности знаний рассматривает в иерархическом порядке: *низкий, средний, высокий*.

Можно говорить, что у обучающегося *низкий уровень осознанности*, если он не может:

- выбрать правильный способ решения или доказательства даже с использованием подсказок и помощи учителя;

- правильно составить последовательность шагов – плана решения задачи/ доказательства;

- решать нестандартные задачи и находить новые способы решения задач даже с подсказками и помощью учителя;

- испытывает значительные затруднения в обосновании выполняемых действий.

Обучающийся находится на *среднем уровне осознанности* знаний, если:

- затрудняется в выборе правильного способа действия, способа решения с первого раза, вынужден пользоваться подсказками и/или помощью учителя;

- допускает ошибки при составлении плана решения задачи/доказательства, но может их исправить после подсказки учителя;

- может решить задачу не являющуюся стандартной, только с подсказкой и/или помощью учителя;

- затрудняется в поиске новых способов решения, но после наводящих вопросов может его осознать;

- может правильно обосновать почти все выполняемые действия.

Обучающийся достиг *высокого уровня осознанности* знаний, если:

- правильно выбирает нужный способ решения задачи, способ доказательства;

- может составить план решения задачи, план доказательства;

- успешно решает нестандартные задачи,

- находит новый способ решения в измененной ситуации;

- правильно обосновывает все выполняемые действия [133].

Е.Ю. Васюковой [23, с.8] выделены шесть показателей «*осознанности* знаний учащихся:

–развернутые аргументированные ответы учащихся,

–решение творческих задач,

–способность объяснять свои действия,

–использование знаний для объяснения фактов и явлений,

–планирование эксперимента и интерпретация его результатов,

– использование знаний в новых (незнакомых) ситуациях» [59].

Кроме того, *«осознанность* знаний характеризуется:

а) пониманием характера (рядоположенности и соподчиненности) связей между знаниями;

б) различением существенных и несущественных связей;

в) уяснением механизма становления и проявления этих связей; г) осмыслением оснований усвоенных знаний (их доказательность);

д) пониманием способов получения знаний;

е) усвоенностью областей и способов применения знаний;

ж) пониманием принципов, лежащих в основе этих способов применения» [86, с.34].

Отметим, что только *осознанность* как одно из качеств знаний участвующих в процессе формирования таких трех интегративных качеств знаний, как *системность действенность, прочность*.

Для формирования *осознанности* необходимы *глубина* и *систематичность*, т.к. они касаются связей между знаниями.

Формой проявления *осознанности* служат такие пары качеств как *обобщенность* и *конкретность*, *свернутость* и *развернутость*.

М.П. Барболин [15] рассматривает «*осознанность*» как качество содержательной стороны. Для её формирования предлагается решать задачи на доказательство, где необходимо показать, что объекты некоторого множества обладают характеристическими свойствами другого заданного множества.

А.А. Смирнова [131] определила факторы способствующие повышению *осознанности* знаний:

«1) установление связей между знаниями;

2) образование системы знаний;

3) развитие системы знаний, часто до уровня творческих заданий;

4) овладение мыслительными операциями сравнения, обобщения, анализа и синтеза, индукции и дедукции, преобразования и т.д.;

5) использование кодирования и перекодирования информации в результате преобразования информации» [59].

Для формирования *осознанности* знаний обучающихся на уроках математики Н.С. Подходова [90] и А.А. Смирнова [130] предлагают использовать метод варьирования задач, который заключается в конструировании обучающимися из базовой задачи цепочки взаимосвязанных задач. Авторы обращают внимание, что для формирования *осознанных и прочных* знаний школьников необходимо производить отбор задач, которые допускают развитие своего содержания.

В.А. Далингер [35] рекомендует применять рефлексивные задачи как средство углубления понимания математического материала, так как *осознанность* знаний взаимосвязана с такой категорией, как понимание. В ходе решения этих задач обучающиеся учатся самостоятельно анализировать процесс их решения, осуществлять различные способы собственных действий.

В приведенных классификациях задач для формирования осознанности знаний применяются чаще всего задачи на «нахождение ошибок в решении», задачи с избыточными и недостающими данными, и задачи содержащие элементы исследования.

Е.В. Васюкова и П.А. Оржековский подчеркивают, что «в заданиях на выявление *осознанности* знаний должна присутствовать доля неопределенности, в которой учащиеся должны самостоятельно установить связи между элементами содержания. При этом обучающиеся должны не только владеть теоретическим материалом, но и уметь применять полученные ими знания в незнакомых ситуациях. Отмечается так же важность того, чтобы при выполнении заданий обучающийся использовал теоретические знания для аргументации прогнозов, объяснения результатов эксперимента, явлений окружающей действительности. Авторами выявлены требования к задачам на выявление *осознанности* знаний:

1) соответствовать реальным проблемам, решаемым человеком в жизни;

2) включать стереотипные представления учащихся;

3) иметь несколько решений;

4) способствовать выявлению причинно-следственных связей, пониманию областей и границ применения знания» [24].

В качестве примеров на выявление осознанности математических знаний обучающихся рассмотрим следующие задачи.

Пример 1. Разность двух чисел равна 5, а сумма их квадратов равна 97. Найдите эти числа.

Предполагается, что обучающиеся при решении данной задачи проявят *осознанность* обобщенного приема решения текстовых задач с помощью уравнений и их систем.

Пример 2. Предприятие «Легенда» производит x единиц некоторой однородной продукции в месяц. Зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой $F(x) = -0,02x^3 + 600x - 1000$. Исследуйте финансовые накопления данного предприятия.

Решение. Исследуем функцию $F(x)$ на возрастание и убывание. Из экономического смысла независимой переменной следует, что она неотрицательна. Итак, $D_F = [0,\infty)$.

$F'(x) = -0,06x^2 + 600$. $F' = 0$ при $x = -100$ и $x = 100$ ($x = -100 \notin D_F$). На промежутке $(0;100)$ производная положительна, на $(100;\infty)$ - отрицательна. В точке $x = 100$ функция достигает максимума: $F_{max} = F(100) = 39000$.

Финансовые накопления предприятия растут с увеличением объема производства до 100 единиц, при $x=100$ они достигают максимума, равного 39000*ден.ед.*, дальнейший рост производства приводит к сокращению финансовых накоплений.

Данная задача соответствует реальным проблемам, которые могут встретиться в жизни, требует интерпретации условия на «математический язык» и обратно. Осознанность проявляется в том, что для вывода в задаче требуется умение обучающегося устанавливать причинно-следственные связи.

Пример 3. Решите уравнение $\boldsymbol{x^4+5x^2-6=0}$.

Проверяется уровень овладения приемом подведения под понятие, тем самым проверяются установление связей между знаниями. Эту задачу можно решить двумя способами: заменой переменной и с применением теории делимости.

Решение. Делителями свободного члена являются: $\pm\boldsymbol{1};\pm\boldsymbol{2};\pm\boldsymbol{3};\pm\boldsymbol{6}$,

$\boldsymbol{f(1)=1+5-6=0}$; то есть $\boldsymbol{(x^4+5x^2-6)\vdots\ x-1}$. Разделим уголком.

$$
\begin{array}{l|l}
-\ x^4+5x^2-6 & x-1 \\
\quad x^4-x^3 & x^3+x^2+6x+6 \\
\quad -\ x^3+5x^2 & \\
\qquad x^3-x^2 & \\
\qquad -\ 6x^2-6 & \\
\qquad\quad \underline{6x^2-6x} & \\
\qquad\qquad -\ 6x-6 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x-6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$(x^4+5x^2-6)=\ x-1\ (x^3+x^2+6x+6)$. Пусть $g(x)=x^3+x^2+6x+6$; $g(-1)=-1+1-6x+6$, т.е. $\boldsymbol{g(x)\vdots\ x+1}$. Поделив уголком получим $x^3+x^2+6x+6=(x+1)\cdot\ x^2+6\ .\ x^2+6=0, x\in\varnothing$

Пример 4. Из шести спичек сложите четыре равносторонних треугольника, со стороной, равной длине спички.

Решение. На плоскости это сделать невозможно. Но в пространстве существует фигура – треугольная пирамида (правильный тетраэдр), Рис. 1 у которой все ребра равны. (Останется только собрать каркас из спичек (Рис.1).

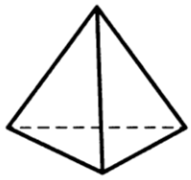


Рис. 1 Рисунок к примеру 4

Пример 5. Предложите практический способ непосредственного (без вычислений) измерения диагонали кирпича. Кирпич ломать не разрешается!

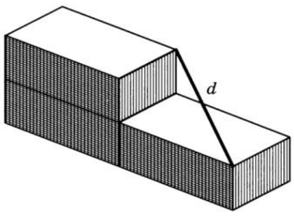


Рис. 2 Рисунок к примеру 5

Решение. Как известно, кирпичи чаще всего встречаются на стройках. Чтобы измерить диагональ, нам потребуется три (одинаковых) кирпича (Рис.2)

Пример 6. Точки *A, B, C, D* не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые *AB и CD* скрещиваются.

Решение. Предположим, что прямые *AB и CD* не являются скрещиваются, тогда они либо параллельны, либо пересекаются и в обоих случаях точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости, что противоречит условию.

Пример 7. Задайте формулой функцию, соответствующую следующей ситуации. Найдите область определения функции, в соответствии с данной ситуацией, и постройте график. По графику найдите область значений функции.

1) Диана в течении 40 минут совершала пробежку, пробегая 1км за каждые 10 минут.

2) Печать одной фотографии стоит 25 рублей. Стоимость печати n фотографий.

3) Свеча, высотой 20 см горела 6 часов, уменьшаясь каждые 2 часа на 5 см.

4) Количество подков для n лошадей.

5) Цена одного литра бензина 42 рубля. Объём бака автомобиля 40 литров.

Пример 8. Исследование. Цена ***1*** литра бензина 40 рублей. Автомобиль Фёдора расходует ***0,08*** литра бензина на каждый километр.

а) Если Фёдор проедет ***50*** км, то, как вы сможете посчитать какую сумму он потратит? Сколько действий необходимо для этих вычислений?

б) Зависимость между объёмом бензина и пройденным путём задайте функцией $\boldsymbol{V\ \ d}$;

в) Зависимость между суммой за бензин и объёмом бензина задайте функцией $\boldsymbol{M\ \ V}$;

г) Запишите функцию $\boldsymbol{M\ \ d}$, связывающую путь, который проделал Фёдор и сумму, потраченную на бензин, объединив функции пункта б) и в). Какие переменные, в данном случае, формируют аргумент?

При решении данной задачи проверяются умения обучающихся: применять полученные ими знания в незнакомых ситуациях, использовать теоретические знания для аргументации прогнозов, объяснять явления окружающей действительности.

Пример 9. Верно ли равенство $p^{\log_a c} = c^{\log_a p}$ *при* $\begin{cases} a > 0; \\ a \neq 1; \\ p > 0; \\ c > 0. \end{cases}$ *?*

Решение. Для доказательства этого равенства рассмотрим логарифмы по основанию ***a*** правой и левой частей:

$$L = p^{log_a c}; R = c^{log_a p}$$

$$\left.\begin{aligned} log_a L = log_a p^{log_a c} = log_a p \cdot log_a c \\ log_a R = log_a c^{log_a p} = log_a p \cdot log_a c \end{aligned}\right\} \Rightarrow log_a L = log_a R \Rightarrow L = R$$

Что и требовалось доказать.

Обучающийся должен применить свойства логарифмов, степеней, понимать сущность понятия «тождество», он должен быть уверен в правильности осуществленных действий, что возможно при осознанном их выполнении, основанном на знании теоретического материала.

Пример 10. Доказать, что функция $f\ \ x\ = \sqrt[5]{x}$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

Решение. Функция $f\ \ x\ = \sqrt[5]{x}$ определена в любой окрестности точки $x = 0$.

Производная функции $y'\ 0\ = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{0 + \Delta x} - \sqrt[5]{0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[5]{\ \Delta x\ ^4}} = \infty$, т.е. функция не является дифференцируемой в точке $x = 0$.

Пример 11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 4x$, параллельной прямой $y = 8x + 1$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k = 8$.

Поэтому точка x_0 кривой $y = x^3 - 4x$, в которой касательная параллельна данной прямой, находится из уравнения $y' = 8$. Тогда $3x_0^{\,2} - 4 = 8$, откуда $x_0 = \pm 2$.

Определяются значения функции в найденных точках: $y\ -2\ = -0$, $y\ \ 2\ = 0$.

Уравнение касательной к кривой в точке $(-2;0)$ имеет вид $y-(-0)=8(x-(-2))$, $y=8x+16$. Уравнение касательной к кривой в точке $(2;0)$ имеет вид: $y-0=8(x-2)$, $y=8x-16$.

Для решения задачи обучающиеся должны владеть пониманием взаимосвязи между понятиями «функция – касательная к функции – уравнение касательной к функции». В процессе решения выявляются внутрипредметные связи начал математического анализа и геометрии, устанавливаются связи между изучаемыми понятиями и фактами.

Формирование *осознанных* знаний требует особых условий, главным образом определяемых личностной обусловленностью осознанности. Лишь то, что вначале *осмысленно*, затем может быть *осознанно* [63, с.20].

3.3. «Гибкость» знаний

Гибкость знаний относится к *содержательно-личностному* уровню качеств знаний, и характеризует *операционную сторону* знаний [15;51]

По мнению И.Я. Лернера *гибкость* знаний «проявляется в готовности обучающегося самостоятельно находить способ применения знаний при изменении ситуации или разные способы решения одной и той же ситуации» [86, с.27].

В психологии *гибкость* рассматривают как:

- «способность индивида сохранять высокую скорость переключения мыслительных процессов между задачами или явлениями без потери эффективности между ними» (И.С.Якиманская) [31];
- «проявляется в целесообразном варьировании способов действия, в легкости перестройки уже имеющихся знаний и перехода от данного действия к другому» (Н.А. Менчинская) [31].

Проявлениями *гибкости* является:

– готовность учащегося к самостоятельному нахождению способа применения знаний при изменении ситуации или различных способов в одной и той же ситуации;

– умение найти нужные в данный момент знания о способе деятельности, преобразовать его для предъявленного случая и умение создать новый способ, комбинировать ряд известных в новый;

– вариативное решение одной и той же задачи, и нестереотипный подходе к решению сходных задач [21; 51];

– «быстрота ориентировки в новых условиях;

– умение видеть новое в известном;

– выделять существенное, находящееся в скрытой форме» [76, с.17].

Рассмотрим, как определяют *гибкость знаний* в современной педагогической литературе:

1) выражается в свободе мысли от сковывающего влияния закрепленных в прошлом опыте способов решения задач, в умении быстро менять свои действия при изменении обстановки, в способности переключения от одной умственной операции к другой (В.А. Крутеций);

2) качество математического стиля мышления, характеризующееся: «способностью к целенаправленному варьированию способов действия; легкостью перестройки системы знаний, умений, навыков при изменении условий действия; легкостью перехода от одного способа действия к другому, умением выходить за границы привычного способа действия» [76, с. 17] (Ю.М. Колягин);

3) «феномен математических способностей, который проявляется и развивается в процессе решения задач и выражается в умении перестраивать сложившиеся схемы рассуждения или действия в соответствии с изменившимися условиями, преодолевать сковывающее влияние шаблонных способов решения и выходить за рамки известного» (О.М. Абрамова [2, с.8]);

4) свойство творческого мышления, позволяющее варьировать способы решения задач, перестраивать их в зависимости от ситуации; заключается в рассмотрении объекта или явления с разных сторон, выделения скрытых, неочевидных свойств и функций предмета (И.И. Целищева, Е.С. Ермакова, И.И. Бодрова [157, с.164]);

5) «качество, реализуемое только при творческом уровне усвоения, проявляющееся в быстром нахождении вариантов способа применения знаний в меняющейся ситуации» (Булатова И.С. [21, с.173]);

6) способность самостоятельно применить несколько способов решения одной задачи и разработать нестандартный подход к решению сходных задач (Н.Г. Демиденко, [37, с.11])

Во ФГОС ООО находим косвенное описание качества *«гибкости»*: умение самостоятельно планировать пути достижения целей, *в том числе альтернативные*, осознанно *выбирать* наиболее *эффективные способы решения учебных и познавательных задач*.

Авторами статьи [111] рассмотрены характеристики *гибкости мышления*:

1) целесообразное варьирование способов действий; умение применять разные способы решения к одной и той же задачи;

2) легкость перестройки знаний, навыков и их систем в соответствии с измененными условиями (переключение с прямого хода решения на обратный);

3) способность к быстрому и точному переключению с одного известного способа действий на другой (так же хорошо усвоенный).

О.М. Абрамовой выделены три *уровня гибкости*: низкий, средний, высокий. Характеристика уровней гибкости представлена в таблице 4.

Таблица 4

Уровни гибкости знаний (по О.М. Абрамовой)

Уровни гибкости		
Низкий	*Средний*	*Высокий*
«варьирование способов действия осуществляется только с помощью подсказок; не могут актуализировать знания согласно изменившимся условиям; с трудом переключаться с прямого хода мысли на обратный; сложно осуществляют обращение простейших математических задач» [2]	«испытывают трудности при необходимости образовывать прямые и обратные связи, испытывают трудности при изменении способов деятельности в соответствии с изменившимися условиями; способны самостоятельно осуществлять обращение задач, но допускают ошибки» [2]	«целесообразно варьируют способы действий; перестраивают систему знаний и навыков в соответствие с новыми условиями; быстро переключаются с одного известного способа действия на другой; легко образуют прямые и обратные связи, переход от одних к другим не затруднен, безошибочно самостоятельно обращают задачи» [2]

Как отмечает И.Я. Лернер, *гибкость* всегда предполагает наличие *оперативности* знаний и приводит к оперативности. Однако, *оперативность* не всегда отображает *гибкость*. Кроме того *гибкость* обусловлена *осознанностью* знаний.

Гибкость знаний проявляется при решении нестандартных или олимпиадных задач. При этом задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения обучающимися различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Такие задания должны включать в себя элементы (научного) творчества.

Задачи, ориентированные на выявление и формирование гибкости математических знаний обучающихся представлены в таблице 5.

И.В. Насикан отмечает, что варьирование базиса и способа решения приводит к решению одной задачи разными способами. Тем самым метод варьирования задачи способствует развитию *гибкости знаний*.

Таблица 5

Задачи, выявляющие гибкость знаний

Автор	Задачи, выявляющие гибкость
О.М. Абрамова	деформированные упражнения; задачи с пропусками в условии (но с ответом), обращенные задачи, прямые и обратные задачи
О.В. Богословская	задачи открытого типа (отсутствует одно правильное решение)
И.И. Ваганова	сюжетные задачи
И.Я. Лернер	задачи, имеющие несколько решений; творческие задачи
Е.Е. Останина, А.Д. Клавсуть	стандартные и *нестандартные* задачи (предполагают использование различных приемов); *открытые* задачи (имеют множество решений)
Н.В. Никольская, Е.В. Никольский	задачи повышенной трудности (олимпиадный уровень), требующие от учеников нетрадиционных подходов к их решению; задачи на комбинирование, планирование, анализ, применение групповых форм работы с целью получения «нового продукта»

Автором статьи [2] выделены *приёмы* варьирования задач:

1) изменение условия и (или) числовых значений величин, используемых в задаче;

2) изменение математических зависимостей между величинами, заданными в условии задачи;

3) изменение (добавление) требований при том же требовании задачи;

4) составление обратной задачи;

5) составление задачи с недостающими (избыточными данными).

Таким образом, формирование *гибких знаний* обусловлено творческим поиском.

В качестве примера задачи на проявления *гибкости* Ю.М. Колягин приводит следующую: « У двух зрячих один брат слепой, но у слепого нет зрячих братьев. Как это может быть?» [83, с. 155].

Приведем примеры задач, выявляющие и формирующие *гибкость* математических знаний.

Пример 1. Два человека подошли одновременно к реке. У берега реки стояла лодка (только для одного человека). Однако, оба сумели переправиться через реку в этой лодке. Каким образом?

Пример 2. Девочка начертила четыре отрезка. Каждый следующий она делала длиннее предыдущего на 3 см. Найдите длину первого отрезка, если четвертый отрезок получился 10 см.

Пример 3. Разность корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ четное число. Чему может равняться ордината вершины параболы у= $ax^2 + bx + c$?

Варианты ответов: а) -2; б) -3; в) -4; г) -5; д) -6 .

Многие текстовые задачи так же могут быть решены несколькими способами. Например, известная старинная задача *«о фазанах и кроликах»,* может быть решена (в зависимости от класса) следующими способами: перебор вариантов, метод предположения по избытку (по недостатку), арифметическим, с помощью уравнений, с помощью системы уравнений.

Большим потенциалом в выявлении и формировании *гибкости* знаний обладают геометрические задачи.

Пример 4. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке.

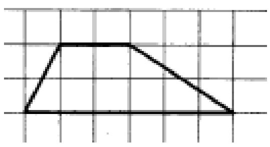


Рис. 3 Рисунок к примеру 4

При обсуждении этой несложной задачи (Задача №12, ОГЭ 2018г.) о площади фигуры, изображенной на клетчатой бумаге (рис.3), учащиеся предложили следующие способы решения: по клеткам, по формуле площади фигуры ($\boldsymbol{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}$), сложение/вычитание площадей фигур, по формуле Пика.

Пример 5. Роман укладывает книги в прямоугольную коробку. Все книги одинакового размера (Рис. 4).

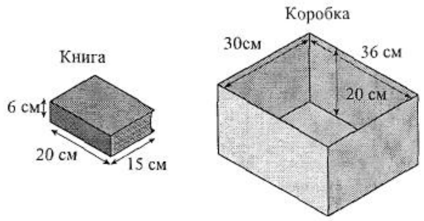


Рис.4. Рисунок к примеру 5

Какое наибольшее число книг полностью заполнят коробку?

Пример 6. В трапеции диагонали длиной 6 см и 8 см взаимно перпендикулярны. Найти длину средней линии трапеции.

Данную задачу можно решить как минимум пятью способами: традиционный (с использованием соотношений в трапеции, свойств подобия и д.р.), с помощью дополнительных построений, векторным, алгебраическим, тригонометрическим.

Пример 7. Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне её основания, длина которой ***a***. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противоположному ребру (рис 5).

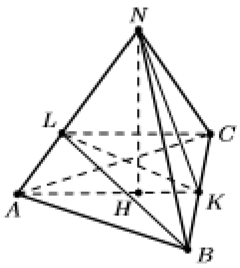


Рис. 5 Рисунок к примеру 7

Часто существуют различные пути решения одной и той же стереометрической задачи:

1) Аналитический метод, имеющий две разновидности: метод поэтапного решения, который заключается в том, что последовательно вычисляются элементы ряда треугольников, а иногда и более сложных фигур, и метод составления уравнений.

2) Геометрический метод, к которому относят и метод геометрических преобразований.

3) Векторный метод.

4) Метод координат.

Для формирования *гибкости знаний* учащихся необходимо целенаправленное обучение всем основным методам.

И.И. Вагановой [22, с.254] выделены действия по развитию *гибкости мышления* школьников:

– разрушение стереотипов мышления;

– развитие способности менять свои действия при изменении ситуации;

– ознакомление с разными способами решения математических задач.

Для решения нестандартных задач авторы [111] предлагают учащимся освоить эвристические приёмы: чертёж к задаче, введение вспомогательного «элемента», переформулировка задачи, разделение задачи на части, способ подбора, решение задачи «с конца».

Пример 8. **(**ЕГЭ 2016, профильный уровень**).** За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

Решение. Пусть *k,l,m,n,*- число месяцев, которое вклад находился под действием каждой из перечисленных процентных ставок соответственно.

Используя формулу сложных процентов имеем уравнение:

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^{k}\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right)^{l}\cdot\left(1+\frac{11\frac{1}{9}}{100}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{12{,}5}{100}\right)^{n}=\left(1+\frac{104\frac{1}{6}}{100}\right).$$

После преобразований получим $\left(\frac{21}{20}\right)^{k}\cdot\left(\frac{28}{25}\right)^{l}\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^{m}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{n}=\frac{49}{24}$

$\Leftrightarrow 2^{2l+m+3}\cdot 3^{k+2n+1}\cdot 5^{m}\cdot 7^{k+l}=2^{2k+3n}\cdot 3^{2m}\cdot 5^{k+2k}\cdot 7^{2}$.

Используя основную теорему арифметики о единственности разложения любого натурального числа на простые сомножители получим систему уравнений:

$$\begin{cases}2l+m+3=2k+3n\\ k+2n+1=2m\\ m=k+2l\\ k+l=2\end{cases}$$

Т.к. $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{l}$ –натуральные числа, то из уравнения $k+l=2\Rightarrow k=l=1$.

Далее, выражая оставшиеся переменные получим $\boldsymbol{m=3, n=2}$.

Следовательно, общее число месяцев, что вклад лежал в банке, есть $\boldsymbol{k+l+m+n=1+1+3+2=7}$

Ответ: 7 месяцев.

Задача является сюжетной, требует комбинирования знаний и методов решения из разных разделов математики. Формулировка требования задачи отличается от тех, что встречаются в учебниках. Тем самым учащиеся самостоятельно ищут способ применения знаний (в данном примере «о процентах») в изменённой ситуации.

Гибкость формируются тогда, когда знания применяются совместно с ранее сформированными умениями и навыками в выполнении других действий. Именно таким образом вновь формируемые навыки включаются в систему знаний человека. К тому же решение задач, требующих применения и ранее полученных навыков, существенно помогает подкреплению очень важного умения применять полученные знания, умения и навыки в различных ситуациях. При изучении производных полезно включить их вычисление в систему других действий.

Пример 9. Решите уравнение $(f'(x))^2 = 2$ если $f(x) = x^2 - 3x + 15$.

Для решения данной задачи необходимо *переключение* с прямого хода решения на обратный.

Пример 10. Число 48 представьте в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы два из них были равны между собой, а произведение всех слагаемых было наибольшим.

Выводы по I главе

1. Несмотря на разнообразие трактовок понятия «*качество знаний*», большинство авторов определяют его как *совокупность* признаков (свойств, параметров), обуславливающих способность учащихся формировать знания, отвечающие требованиям стандарта математического образования.

2. Теоретический анализ научной литературы, проведенный в исследовании, позволил установить, что выявление и формирование у обучающихся таких качеств знаний как *осознанность, глубина и гибкость* является важной и актуальной педагогической проблемой. Ее решение затрагивает насущные вопросы формирования самостоятельной, успешной, уверенной в себе, творческой личности, необходимой современному обществу.

3. Качества знаний *осознанность, глубина и гибкость* позволяют обучающимся общеобразовательной школы последовательно пройти все три уровня усвоения знаний по математике и осуществлять самостоятельное применение знаний на практике.

ГЛАВА 2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ, НАПРАВЛЕННОЙ НА ФОРМИРОВАНИЕ ГЛУБИНЫ , ОСОЗНАННОСТИ И ГИБКОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§ 4. Проектирование системы задач, ориентированной на формирование осознанности, глубины и гибкости знаний

Формирование качеств знаний – процесс длительный и многоступенчатый. Поэтому, он не может быть сформирован одной темой или одним годом.

В.В. Козлов, А.М. Кондаков, отмечают, что «математическое образование есть испытанное столетиями средство интеллектуального развития в условиях массового обучения». Такое развитие осуществляется за счет систематического дедуктивного изложения теории в сочетании с решением хорошо подобранных задач [152, с.36].

Придерживаясь точки зрения Ю.М. Колягина, Г.И. Саранцева, Л.М. Фридмана, под задачей будем понимать определенную ситуацию субъектно – объектной категории, которую нужно разрешить с учетом условий, указанных в ней [83, 123].

Тогда под математической задачей следует понимать некоторую цель математической деятельности субъектно-объектного значения, поставленную перед учащимися в виде задания определенного характера.

Каждая задача как сложный объект (система) имеет свое внешнее и внутреннее строение (устройство). С точки зрения информационной структуры, Ю.М. Колягин рассматривает задачу как замкнутую систему $S = \{A, B, R, C\}$, в том смысле, что все компоненты этой системы могут быть определены в системе «человек- задача» [76, 83].

Ю.М. Колягин так описывает смысл каждого компонента задачи:

«Начальное состояние (A)− характеристика проблемности системы P. Для математических задач это - условия (условие) задачи, т.е. данные элементы и отношения между ними;

Конечное состояние (B) − характеристика стационарности системы P. Для математических задач это –заключение или цель задачи (неизвестные элементы и связи между ними).

Решение задачи (R) – преобразование системы P_xв систему P, т.е. один из возможных способов перехода от начального состояния ситуации к конечному. Для математических задач способ преобразования условия задачи для нахождения требуемого заключением искомого.

Базис решения задачи (C) – множество факторов определяющих решение R_i, т.е. теоретическая или практическая основа для преобразования P_x в P посредством данного решения. Для математических задач базис решения выступает в форме обоснования решения» [76, с. 52].

В информационной структуре задачи все ее компоненты взаимосвязаны и дополняют друг друга. В зависимости от числа неизвестных компонентов в этой структуре, можно построить качественную типологию задач школьного курса математики.

С целью построения указанной типологии задач, Ю.М. Колягин вводит неизвестные: X, Y, Z, U и определяет типологию задач в зависимости от числа неизвестных компонентов, придающих ситуации проблемный характер [76, с.60].

Если все компоненты информационной структуры задачи ACRB являются известными, то соответствующие ей задачи носят характер тренировочных упражнений. Например, воспроизвести наизусть таблицу умножения или сформулировать определения какого- либо понятия и др.

I тип − неизвестен один компонент: 1) XCRB; 2) AXRB; 3) ACXB; 4) ACRX.

II тип −неизвестны два компонента: 1)AXYB; 2) XCRY; 3) XYRB; 4) ACXY; 5) AXRY; 6) XCYB.

III тип − неизвестны три компонента: 1) XYZB; 2) AXYZ; 3) XCYZ; 4) XYRZ;

IV тип − неизвестны четыре компонента: 1) XYZU.

Задачи *первого типа* называют *обучающими* задачами. Они составляют основное содержание практического материала в школьных учебниках по математике.

Задачи *второго типа* называют *поисковыми*, их чаще встречают на математических олимпиадах.

Задачи *третьего типа* называют *проблемными*. Редко встречаются в процессе обучения математике, но часто встречаются в процессе производственной деятельности и быту. Часто задачи такого рода содержат только цель, а комплекс необходимых условий, путей и средств достижения этой цели учащемуся необходимо установить самостоятельно. Например, введя определение ромба как особого параллелограмма, учащимся предлагают задачу «изучить свойства ромба».

Четвертый тип задач имеет место в творческой деятельности ученого и в школьном курсе математики отсутствует.

Ведущая роль в эффективности формирования тех или иных мыслительных умений принадлежит проблемным задачам (третьего типа), а затем поисковым задачам (второго типа).

Для выявления *качеств знаний* М.Н. Скаткин и В.В. Краевский предлагают использовать метод учебных затруднений. Анализ данного подхода к *выявлению качеств знаний* был рассмотрен нами и подробно описан в статьях [59, с.17-20] и [62, с. 242-245]. Сущность этого метода состоит в том, что для проверки наличия либо отсутствия у обучающихся тех или иных качеств знаний используют задачи, моделирующие различные типы *учебных затруднений*. Под *затруднением* понимается препятствие, которое возникает в процессе деятельности в результате недостатка знаний, несоответствия знаний, средств или способов их применения, противоречия в знаниях и ряда других причин. По характеру *затруднения* разделяют на *проблемного* и *не проблемного характера*. Преодоление затруднений является для обучающихся стимулом в учебной деятельности.

Авторы выделяют восемь типов *учебных затруднений*. Охарактеризуем их. Для этого сопоставим каждый тип затруднения с определенными заданиями и качествами знаний (таблица 6).

Следует отметить, что факт возникновения у обучающихся затруднений является сигналом о недостаточной сформированности определенных *качеств знаний*. Поэтому, после выявления учебного затруднения, определения типа и причин возникновения, появляется возможность организации конкретной работы по преодолению отставания в усвоении знаний.

Таким образом, метод учебных затруднений позволяет диагностировать *глубину, осознанность и гибкость* знаний обучающихся общеобразовательной школы. Наблюдая за «продвижением» ученика по изучаемой теме, анализируя испытываемые им учебные затруднения при выполнении того или иного вида учебной деятельности, можно *во-первых*, определить сформированы те или иные качества знания; *во-вторых*, включая в учебную деятельность задания необходимого типа, целенаправленно формировать и развивать определенные качества знаний.

Как видим одни и те же задачи могут применяться при формировании нескольких качеств. Наибольшее число типов задач необходимо применять при формировании *глубины* и *осознанности* знаний. Наибольшее число качеств формируют и выявляют задачи, соответствующие пятому типу затруднений.

Проанализировав таблицу 6, можно увидеть, что *третий, четвертый и пятый типы задач*, формируют наибольшее число качеств знаний одновременно. А именно – *глубину, гибкость и осознанность.* Таким образом, система задач, содержащая данные типы задач способна формировать качества знаний до третьего уровня включительно, согласно схеме 4 (с.32).

Отмечают, что учащиеся проявляют сформированность таких качеств знаний, как *гибкость, осознанность*, если могут самостоятельно:

а) выделять существенные признаки понятий и устанавливать связи между ними;

б) раскрывать процессы решения и конструирования различных видов уравнений, неравенств и их систем;

в) раскрывать процессы доказательства тождеств, неравенств, исследования свойств функций с помощью различных научных теорий;

г) выполнять решение и конструирование классов прикладных задач с помощью различных научных теорий.

В таблице 7 представлено соответствие задач по типам затруднений И.Я. Лернера, М.Н. Скаткина и типов задач согласно структуре, рассмотренных Ю.М. Колягиным.

Таблица 6

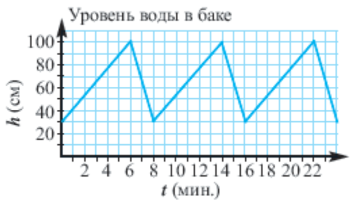
Таблица соответствия типов учебных затруднений выявляемым качествам знаний

Тип затруднений	Качества знаний, проверяемые заданиями, соответствующих затруднений		
	глубина	гибкость	осознанность
I тип возникает, когда учащиеся должны выбрать из совокупности учебных действий какое-то одно в качестве ведущего		+	+
II тип связан с необходимостью воспроизведения и стереотипного применения ранее усвоенных знаний. Затруднения возникают в процессе проверки знаний учащихся	+		
III тип возникает в процессе решения задач, связанных с необходимостью планирования предстоящей деятельности, выбором предполагаемых средств и способов ее выполнения	+	+	+
IV тип связан с предвидением возможных результатов действия. Возникают когда обучающимся предлагается определить или предсказать результат предстоящего действия, определить или описать предполагаемые признаки или свойства этого результата	+	+	+
V тип характеризуется необходимостью творческого применения имеющихся знаний и умений в новой для учащихся ситуации	+	+	+
VI тип связан с необходимостью выбора объекта действия, с оценкой его свойств и качеств в процессе взаимодействия с ним	+		
VII тип связан с оценкой и доказательством правильности выполнения действия, его промежуточных и конечных результатов, с выявлением и исправлением допущенных ошибок и неточностей			
VIII тип связан с процессами рациональной и эмоциональной оценки выполненного действия, с определением значимости полученных результатов	+		+

Таблица7

Примеры задач, соответствующие типам затруднений И.Я. Лернера, М.Н. Скаткина и классификации задач согласно структуре Ю.М. Колягина

Тип затруднения	*Пример задания, соответствующего затруднению в смысле И.Я. Лернера*	*Классификация по Ю.М. Колягину*
I тип возникает в том случае, когда учащиеся должны выбрать из совокупности учебных действий какое-то одно в качестве ведущего	***1***.Для заданной функции, найдите верное утверждение $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$. 1) *функция возрастает на* $0;3$; 2) *функция является нечётной*; 3) *наибольшее значение функции на* $-3;2$ *равно* 8; ***2***. 4) *наименьшее значение функции на* $-2;-1$ *равно* $\frac{1}{2}$. Расположите в порядке убывания числа $6^{\sqrt{8}}; 6^{70}; \left(\frac{1}{6}\right)^{-85}; 1.$	тренировочные
II тип связан с необходимостью воспроизведения и стереотипного применения ранее усвоенных знаний. Чаще всего подобные затруднения возникают в процессе проверки знаний учащихся	***1.*** Решите уравнение $9^{5x+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{6-4x}$. $1)-\frac{4}{3};\ 2)-\frac{4}{7};\ 3)\frac{2}{7};\ 4)\frac{2}{9}.$ ***2.*** Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ge 120.$ $1)\ \forall x\in\ -3;+\infty\ ;\quad 2)$ ***решений нет;*** $3)\ \forall x\in\ -\infty;-3\ ;\quad 4)\ \forall x\in R.$	тренировочные

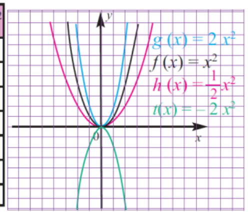
III тип возникает в процессе выполнения заданий, связанных с необходимостью планирования предстоящей деятельности, выбором предполагаемых средств и способов ее выполнения	***1.*** Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{1}{25} < 5^{3-x} \le 125.$ $1)-4;\ 2)\,2;\ 3)-5;\,4)\,0.$ ***2.*** Решите уравнение $64^x = 12 + 8^x$.	обучающие (I тип)
IV тип связан с предвидением возможных результатов действия. Они возникают в тех случаях, когда учащимся предлагается определить или предсказать результат предстоящего действия, определить или описать предполагаемые признаки или свойства этого результата	***1***. Какую из указанных зависимостей можно назвать функцией? а) зависимость между заработной платой Романа за неделю и прибылью от продажи, если он получает постоянную зарплату в размере $150\$$ за неделю и дополнительно 2% от продажи. б) зависимость между временем и расстоянием, пройденным Андрей со скоростью 5 км/ч. в) зависимость между очками, набранными в компьютерной игре и возрастом ребёнка. ***2.*** Дана функция $y = 2x + 3$. Узнайте, лежат ли точки $M\ \ 2;6\ \ ;A\ \ 0;3$ на графике данной функции.	поисковые (IIтип)
V тип характеризуется необходимостью творческого применения имеющихся знаний и умений в новой для учащихся ситуации	Вода может вытекать из бака за определённое время, затем бак наполняется до прежнего уровня, и вода снова начинает вытекать и т.д.  1) Сколько времени понадобится, чтобы заполнить и опустошить бак за 1 раз? 2) Запишите область значений функции. 3) Чему равна глубина воды в баке на 60 минуте? 4) Когда в следующий раз уровень воды в баке составит $1\ м$?	поисковые (IIтип)

<table>
<tr>
<td>VI тип связан с необходимостью выбора объекта действия, с оценкой его свойств и качеств в процессе взаимодействия с ним</td>
<td>

1. Вместо звёздочки в приведённых равенствах впишите такое число, чтобы графики полученных функций:
1. *были параллельны;*
2. пересекались;
3. совпадали (если это возможно).
$1)\ y_1 = * \cdot x; \quad y_2 = * \cdot x + 5;$
$2)\ y_1 = * \cdot x + 0{,}1; \quad y_2 = - * \cdot x + 0{,}1;$

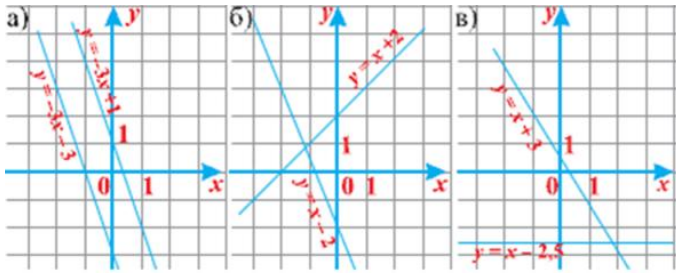
2. Исследуйте таблицу значений для функции
$y = x^2;\ y = 2x^2;\ y =$

<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x) = x^2$</th><th>$g(x) = 2x^2$</th><th>$h(x) = \frac{1}{2}x^2$</th><th>$t(x) = -2x^2$</th></tr>
<tr><td>–3</td><td>9</td><td>18</td><td>4,5</td><td>–18</td></tr>
<tr><td>–2</td><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>–8</td></tr>
<tr><td>–1</td><td>1</td><td>2</td><td>0,5</td><td>–2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0,5</td><td>–2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>–8</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td><td>18</td><td>4,5</td><td>–18</td></tr>
</table>



Определите, к какой функции относится каждый график на рисунке.</td>
<td>поисковые

(IIтип)</td>
</tr>
<tr>
<td>VII тип связан с оценкой и доказательством правильности выполнения действия, его промежуточных и конечных результатов, с выявлением и исправлением допущенных ошибок и неточностей</td>
<td>Есть ли ошибка в построении заданных графиков? Как, по – вашему мнению, должны быть расположены эти графики? Ответ обоснуйте, построив правильные графики функций.


</td>
<td>обучающие

(I тип)</td>
</tr>
<tr>
<td>VIII тип связан с процессами рациональной и эмоциональной оценки выполненного действия, с определением значимости полученных результатов</td>
<td>**1.** Введя определение показательной функции, поставить перед обучающимися задачу: «изучить свойства показательной функции».</td>
<td>проблемные

(IIIтип)</td>
</tr>
</table>

Прежде чем перейти к конструированию системы задач, обратимся к понятию *уровень усвоения знаний*. Существует несколько подходов к определению этого понятия, но большинство авторов сходятся в характеристике трех уровнях усвоения знаний (таблица 8).

Таблица 8

Сравнительный анализ авторских подходов к уровням усвоения знаний

Автор	***Уровни усвоения знаний***			
	1	2	3	4
А.А. Столяр	*Воспроизведение*: учащийся выполняет задания, аналогичные тренировочным, для выполнения достаточно знать определенное правило, алгоритм, определение	*Понимание*: ученик способен выполнять задания, в которых проверяемые знания не могут быть применены непосредственно. Для их использования нужно привести задания к стандартному виду	*Перенос*: ученик может использовать проверяемые знания в нестандартной ситуации, причем преобразование её к стандартному виду требует необычного комбинирования полученных ранее знаний.	
М.Н. Скаткин, В.В.Краевский	Уровень осознанно воспринятого и зафиксированного в памяти знания;	Уровень готовности применения его в сходных условиях по образцу;	Уровень готовности к творческому применению знаний в новых, неожиданных ситуациях	
Г.И. Саранцев и др.	Осознанное восприятие, понимание и запоминание знаний в знакомой ситуации и осуществление способов деятельности по образцу или в сходной ситуации.	Применение знаний и способов деятельности в изменённой ситуации.	Осуществление знаний и способов деятельности в творческой ситуации.	

Продолжение таблицы 8

В.П. Беспалько	Уровень узнавания	Уровень воспроизведения	Уровень применения знаний в привычных условиях	Творчес--кое приме-нение

В диссертации при проектировании системы задач на формирование и диагностику *осознанности, глубины и гибкости* математических знаний обучающихся будем опираться на типологию учебных затруднений М.Н. Скаткина, В.В. Краевского и классификацию задач Ю.М. Колягина, а так же принципы построения системы задач Г.И. Саранцева.

Тогда требования к системе задач на выявление осознанности, глубины и гибкости знаний обучающихся можно представить в виде таблицы 9.

Таблица 9

Требования к системе задач на выявление глубины, осознанности и гибкости знаний обучающихся общеобразовательной школы

<table>
<tr><td>Качество знаний</td><td colspan="3">Требования к задачам</td></tr>
<tr><td>Глубина</td><td rowspan="3">1) задачи, предполагающие планирование предстоящей деятельности, выбора предполагаемых средств и способов её выполнения, соответствующие тренировочному, обучающему и поисковому типам задач по Ю.М. Колягину.
2) задачи, в которых учащимся предлагается определить или предсказать результат предстоящего действия, определить или описать предполагаемые признаки или свойства этого результата, соответствующие тренировочному, обучающему и поисковому типам задач по Ю.М. Колягину
3) задачи, творческого применения знаний и умений в новой для учащихся ситуации, обучающего, поискового и проблемного типов.</td><td rowspan="2">4)рефлексивные задачи, требующие рациональной и эмоциональной оценки выполненного действия, определения значимости полученного результата обучающего, поискового и проблемного типов</td><td>6) стереотипного воспроизведения ранее усвоенных знаний, соответствующие тренировочному и обучающему типам;
7)требующие от учащихся выбора объекта действия, оценки его свойств и качеств, тренировочного, обучающего и поискового типов.</td></tr>
<tr><td>Осознанность</td><td></td></tr>
<tr><td>Гибкость</td><td>5)задачи, требующие от учащихся выбора из совокупности учебных действий одного в качестве ведущего, тренировочного типа</td><td></td></tr>
</table>

§ 5. Пример системы задач, ориентированной на формирование осознанности, глубины и гибкости знаний

5.1 Задачи, выявляющие глубину математических знаний

Первый тип задач - задачи «на отыскание ошибок». Задачи этого типа, связанны с усвоением определений, правил, или теорем. В.И. Рыжик пишет: «ошибки стоит показывать, не дожидаясь, пока ученики их сделают» [120, с. 182]. Там же: «На ошибках учатся…чтобы их не повторять». При решении таких задач обучающиеся анализируют условия и осознанно находят ошибки в предлагаемых рассуждениях.

На этапе введения понятия в некоторых учебниках встречаются задачи вида «существует ли логарифм $log_2 -4$, $log_{-3} 9$?». Если понятие или теорема усвоены обучающимися поверхностно, то позже условия благополучно забываются и обучающиеся допускают ошибки при решении задач, требующих верного применения понятия/теоремы. Поэтому считаем, подобные задания надо чаще включать в системы упражнений на уроках и домашние задания.

Задание1 . Выберите верные утверждения

1. Производная произведения функции равна произведению производных данных функций.

2. Верно ли, что любая точка экстремума является критической точкой функции?

3. Числа $log_4 10, log_{0,5} 3, log_3 13,7$ являются положительными.

Задание 2. Верно ли выполнено вычисление? Если нет, укажите ошибку.

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{1-2\sqrt{2}+2} = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = 1-\sqrt{2}.$$

(Не учтено свойство $\sqrt{a^2} = |a|$ для любого а, либо поверхностно усвоено понятие модуля. Т.к. $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$, поскольку$1-\sqrt{2} < 0$)

Задание 3. При каких условиях верно выражение $log_a \; b \cdot c \; = log_a b + log_a c$?

Задание 4. Проверьте, верны ли равенства? Если нет, укажите ошибку.

а) $log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$;

б) $log_3 \dfrac{1}{9} = -2$;

в) $log_{1,9} 1 = 0$;

г) $log_{\sqrt{5}} 0{,}2 = -2$;

д) $log_{-2} \; -32 \; = 5$;

е) ;$log_4 \; -4 \; = -1$;

ж) $log_6 0 = 0$.

Задание 5. «Докажем», что -1=1: запишем $-1 = -\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{-1} = \; -1^{\frac{1}{3}} = \; -1^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\; -1^{\;2}} = \sqrt[6]{1} = 1$.

Решение. Ошибка при переходах $-1^{\frac{1}{3}} = \; -1^{\frac{2}{6}}$ и $-1^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\; -1^{\;2}}$,т.к. они обоснованы только для неотрицательных чисел.

Задание 6. Утверждение *«*функция $y = x^4 + 3x^2$ является четной на отрезке $\; -1;2 \;$» верно.

Решение. Утверждение не верно, т.к. не учтен существенный признак понятия четной функции: «область определения функции должна быть симметрична относительно нуля»

Задание 7. Решите уравнение $\sqrt[x]{3} \cdot \sqrt[x]{5} = 225$.

Решение. $\sqrt[x]{3\cdot 5}=225 \Leftrightarrow\ 15^{\frac{1}{x}}=15^2$, имеем $\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

В предложенном решении не учтено условие, что $x \in N, x>1$. Полученное решение этим условиям не удовлетворяет, а значит уравнение не имеет корней.

Задание 8. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}>\sqrt{8}$.

Запишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}>2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$.

В предложенном решении не учтено, что функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ убывающая, а следовательно ошибка допущена на последнем этапе.

Должны были получить: $x<-\frac{3}{2}, x\in\ -\infty;-1{,}5\ $.

Задание 9. Решите неравенство $tgx<1$.

Решение. $tgx<1 \Leftrightarrow x<\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

В решении не учтена периодичность тангенса.

Второй тип задач, ориентированный на выявление *глубины* знаний – «задачи на сопоставление». Они могут быть различны по форме.

Например, можно предложить выбор элементов, принадлежащих данному множеству, обладающим некоторым свойством; сопоставить элементы двух множеств; определить наличие/отсутствие у предложенных элементов заданных характеристик или свойств; предложить самостоятельную классификацию элементов.

Задание 10. Установите соответствие между неравенствами и их решениями. Ответ запишите как пару вида (А;1).

А	Б	В	Г
$log_2 x > 1$	$log_2 x < -1$	$log_2 x > -1$	$log_2 x < 1$

1	2	3	4
$\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$	$\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$	$0;2$	$2;\infty$

Ответ запишите как пару вида (X;n).

Задание 10. Из приведённого ниже ряда чисел выберите числа, входящие в данное множество (таблица 10):

$$0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6};\pi;\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{4};\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{4};\frac{11\pi}{6};2\pi;\frac{13\pi}{6};\frac{7\pi}{3};\frac{9\pi}{4};$$
$$-\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{3};7\pi;\frac{9\pi}{2};12\pi.$$

Таблица 10

Таблица множеств к задаче 9

1) $\alpha = \pi m; m \in Z$	2) $\boldsymbol{\alpha = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi m; m \in Z}$
3) $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi m; m \in Z}$	4) $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z}$
5) $\boldsymbol{\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m; m \in Z}$	6) $\boldsymbol{\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m; m \in Z}$
7) $\boldsymbol{\alpha = \ -1\ ^{n} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z}$	8) $\boldsymbol{\alpha = \ -1\ ^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in Z}$
9) $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z}$	10) $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in Z}$

Задание 11. Выражения *a,b,c,d* имеют сходства и различия. Одно из них чем-то отличается от трех других. Определите его. Назовите критерий, по которому определяются сходство и отличие. Возможно несколько ответов, но по разным критериям отбора. Можете ли найти более одного возможного решения?

1)

a) $-4x^2z$	b) $3x^2yz^3$
c) $5x^2$	d) $3xy^3$

Выражение с – имеет только одну переменную, в то время как выражения *a,b,d* – имеют, по крайней мере, две переменные. Выражение *b* – содержит три переменные. Выражение d – не содержит x^2. В выражении *a* – коэффициент отрицательный.

2)

a) $log_2 x > 1$	b) $log_{0,5} x < -1$
c) $2^x > 4$	d) $2^{1-x} > 4$

Выражение *b* – единственное со знаком меньше; выражение *b*-единственное с основанием меньше единицы и при решении данного неравенства при переходе к равносильному будет меняться знак неравенства на противоположный; выражения *a,b,*с – имеют одно и то же множество решений $x \in 2;\infty$

3) При изучении темы «Функция и её свойства» можно предложить такую задачу. Какие сходства и различия имеют следующие функции? По каким критериям их можно объединить в группы?

a) $y = x^2$	b) $y = \sqrt{\lvert x \rvert} + 1$
c) $y = cos\, x$	d) $y = 2^x$

Функции *a, b, c* – являются четными; функции *a, b, d* – являются ограниченными снизу ($E(f)= 0;\infty$);функции *a,b, d* не периодичные*;* график*и* функций *a,c,d* проходят через точку (0;1).

При решении подобных задач обучающиеся должны выбрать основание для классификации, разбить множество рассматриваемых объектов по выбранному основанию на группы.

Третий тип задач - *задачи прикладного характера*.

Задание 11. Точка движется прямолинейно с ускорением $a=-6t+18$. В момент времени $t=0$ (начало отсчёта) начальная скорость $V_0=24$ м/с, расстояние от начала отсчёта $S_0=15$ м. Найдите: 1) скорость и закон движения точки; 2) значения ускорения *a*, скорости *V* и пути *S* в момент времени $t=2$ с ; 3) максимальную скорость $V_{\max}$ и соответствующее время $t_{\max}$, когда скорость является наибольшей.

Решение. Шаг 1. Из курса физики известно, что производная скорости в каждый момент времени равна ускорению точки, то есть $V^{/}=a$. Значит, функция скорости V является первообразной функции ускорения a. Поэтому, для функции $a=-6t+18$ первообразной служит $V=-3t^2+18t+C_1$. Используя начальное условие $t=0$, $V_0=24$, найдём значение постоянной C_1: $24=-3\bullet 0^2+18\bullet 0+C_1 \Rightarrow C_1=24$. Следовательно, *функция скорости примет вид* $V=-3t^2+18t+24$.

Известно, что производная закона движения в каждый момент времени равна скорости точки, то есть $S^{/}=V$. Значит, функция закона движения S является первообразной функции скорости V. Поэтому, для функции $V=-3t^2+18t+24$ первообразной служит $S=-t^3+9t^2+24t+C_2$. Подставив начальные условия $t=0$, $S_0=15$, определим значение произвольной постоянной C_2: $15=-0^3+9\bullet 0^2+24\bullet 0+C_2 \Rightarrow C_2=15$. Следовательно, *закон движения* запишется в виде $S=-t^3+9t^2+24t+15$.

Шаг 2. Найдём значения a, V и S при $t=2$ с :

$a(2) = -6 \bullet 2 + 18 = 6$ (м/с^2) ;

$V(2) = -3 \bullet 2^2 + 18 \bullet 2 + 24 = 48$ (м/с) ;

$S(2) = -2^3 + 9 \bullet 2^2 + 24 \bullet 2 + 15 = 91$ (м) .

Шаг 3. Для нахождения максимальной скорости производную скорости приравняем нулю $V' = a = 0$ и решим полученное уравнение: $a = 0 \Rightarrow -6t + 18 = 0 \Rightarrow t = 3$ (стационарная точка).

На отрезке $[0;3]$ функция возрастает, а на промежутке $[3;+\infty)$ – убывает .

Следовательно, точка $t_{\max} = 3$ является точкой максимума.

Подставив значение $t_{\max} = 3$с в выражение скорости, найдём значение максимальной скорости точки $V_{\max} = V(3) = -3 \bullet 3^2 + 18 \bullet 3 + 24 = 51$ (м/с) .

Задание 12. Под действием силы 80 Н пружина растягивается на 0,02 м. Первоначальная длина пружины (в спокойном состоянии) равна 0,15 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её до 0,2 м ?

Решение. Используя закон Гука ($F = kx$), получим: $80 = k \bullet 0{,}02$. Отсюда имеем $k = 4000$ Н/м.

Подставив найденное значение k в закон Гука, найдём $F(x) = 4000x$.

Найдём пределы интегрирования: так как вначале пружина не была растянута, то её первоначальное удлинение равно нулю, то есть $a = 0$; после растяжения до 0,2 м удлинение пружины будет равно $b = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$ м.

Тогда по формуле (17) для вычисления работы переменной силы получим

$$A = \int_a^b F(x)\,dx = 4000\int_0^{0{,}05} x\,dx = 4000 \bullet \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}05} = 2000 \bullet 0{,}05^2 = 5\,(\text{Дж}).$$

Задание 13. Пирамида Хеопса представляет собой правильную четырехугольную пирамиду высоты 147 м, в основании которой квадрат со стороной 232м. Пирамида построена из камня, плотность которого $\rho = 2500$ кг/м^3. Найдите работу силы тяжести, затраченную при постройке.

5.2 Задачи на выявление осознанности знаний

С целью устранения формализма в знаниях обучающихся, а так же для расширения кругозора и применению полученных знаний на практике Н.В. Аммосова, Б.Б. Коваленко рассматривают задачи с неоднозначно понимаемым условием, недостающими (неопределенные), избыточными (переопределенные), противоречивыми данными [10, с.183]. Выделенные задачи, по мнению авторов, способствуют развитию мыслительных операций, логики рассуждений, критичности мышления, нестандартного подхода к решению проблем. Прогнозирование предполагает построение гипотез о вариантах решения и поиск средств решения задачи. С этой целью рекомендуется целенаправленно комбинировать знакомое и незнакомое в материале, полноту и достаточность условия задачи.

Приведем примеры задач, содержащие лишнее или противоречивое условие.

Задание 1. В параллелограмме стороны 3 см и 5 см, а высота 4 см. Найти площадь параллелограмма.

Возникает вопрос: к какой именно стороне проведена высота?

В зависимости от этого получатся два разных ответа 12 $см^2$ и 20 $см^2$.

А возможны ли оба эти случая?

Высота длиной 4 см может быть опущена лишь на сторону параллелограмма длиной 3 см, так как в противном случае перпендикуляр к прямой оказывается длиннее наклонной, проведенной к этой же прямой из той же точки. То есть, во втором случае условие задачи становится противоречивым. Т.о. ответом будет являться только: 12 $см^2$.

Задание 2. Найдите площадь треугольника со сторонами 4 см, 10 см, 15 см.

На первый взгляд перед нами стандартная задача, которая легко решается с использованием формулы Герона. Но, применив данную формулу обучающиеся получают под знаком корня отрицательное число.

В данном случае следует оценить корректность условия, проверив возможность существования такого треугольника: одна из сторон треугольника больше разности двух других его сторон.

В данной задаче имеем $4 < 15 - 10$, т.е. условие противоречиво и треугольника с заданными сторонами не существует. И задача решения не имеет.

Задания, выявляющие *осознанность* на приведение контрпримеров.

Задание 3. Докажите справедливость высказывания или приведите контрпример, доказывающий его ошибочность:

1) квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны;
2) прямоугольником называется четырехугольник, у которого диагонали равны;
3) высоты треугольника пересекаются в одной точке;
4) средняя линия трапеции равна сумме её оснований;
5) в параллелограмме есть три острых угла;
6) в любой прямоугольной трапеции есть два равных угла
7) в прямоугольном треугольнике гипотенуза равняя сумме катетов
8) площадь параллелограмма равна половине произведения длин его диагоналей
9) существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны;
10) если в ромбе один из углов равен 90°, то этот ромб является квадратом
11) тангенс любого острого угла меньше единицы.

12) функция $y = x^4 + x^2$, заданная на отрезке [-3;2] является четной;

13) решением уравнения $\sqrt{x^2 + 8x} = -3$ являются числа $x = 1, x = -9$;

Следующий тип задач на выявление осознанности знаний – это задачи с элементами исследования. К ним можно отнести: задачи с параметрами, уравнения и неравенства с модулями.

Задание 4. Можно найти такие пары чисел, разность которых равна их произведению?

Задание 5. Выясните, может ли функция быть периодической, если она обладает указанным свойством; если может, то приведите пример, если не может, объясните почему:

а) функция убывает на всей области своего определения;

б) функция имеет бесконечно много промежутков своего убывания ;

в) функция имеет наименьшее значение, но не имеет наибольшего;

г) функция убывает на интервале (3;11)

Задание 6. а) При каких различных значениях параметра k имеет два различных действительных корня уравнение $kx^2 + 2(k+1)x + k + 3 = 0$?

б) При каких различных значениях параметра k уравнение $kx^2 + 2(k-1)x + k + 3 = 0$ имеет два различных действительных корня?

в) При каких различных значениях параметра k уравнение $kx^2 + 2(k-1)x + k + 3 = 0$ имеет два одинаковых действительных корня?

г) При каких различных значениях параметра k имеет два различных комплексных корня уравнение $kx^2 + 2(k+1)x + k + 3 = 0$?

Задание 7 . (№161, [97,с.81]) Найдите все значения *a*, при которых уравнение $4^x - a2^x + a - 1 = 0$: 1) имеет два корня; 2) не имеет корней; 3) имеет единственный корень?

*Задание 8. 1)*В чем отличие свойств логарифмических функций с основанием большим и меньшим единицы?

2)В чем отличие свойств показательных функций с основанием большим и меньшим единицы?

3) Какие случаи нужно рассмотреть при решении неравенства $log_x \; 4-x \; >2$?

При решении нижеприведенных задач использовали свойства функции.

Задание 9. Решите уравнение:

$$4\cos^4\frac{x}{4}=\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{4}\cdot\cos 2x.$$

Представим данное уравнение в виде: $4\cos^4\frac{x}{4}=\cos^2\frac{x}{4}-1+2\cos^2\frac{x}{4}\cdot\cos 2x$,

$4\cos^4\frac{x}{4}-2\cos^2\frac{x}{4}\; 1+\cos 2x \; +1=0$.

Уравнение удобно рассматривать как квадратное относительно $\cos^2\frac{x}{2}$, для которого будет равен $\frac{1}{4}D= \; 1+\cos 2x \; ^2-4$.

Поскольку $1+\cos 2x \; ^2\le 4$, то уравнение будет иметь решение, если $\cos 2x=1$.

Поэтому исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos 2x=1,\\ 4\cos^4\frac{x}{4}-4\cos^2\frac{x}{4}+1=0,\end{cases} \begin{cases}\cos 2x=1,\\ 2\cos^2\frac{x}{4}=1,\end{cases} \begin{cases}\cos 2x=1,\\ \cos\frac{x}{2}=0,\end{cases} \Rightarrow x=\pi+2\pi n, n\in Z.$$

*Задание 10.*Решите уравнение $5^x-3^x=16$.

Решение. Можно заметить, что корнем данного уравнения является $x=2$.

Используя свойства функции, покажем что корень единственный.

Разделим обе части уравнения на $3^x \;\; 3^x\neq 0$, получим $\left(\frac{5}{3}\right)^x-1=\frac{16}{3^x}$.

Левая часть этого уравнения задает возрастающую функцию, а правая – убывающую. Соответственно уравнение имеет не более одного корня.

Ответ: $x = 2$.

Задание 11. Решите уравнение $4 \cdot 3^{3x+1} + 4 = 5 \cdot 2^{9x}$.

Решение. Перейдем к равносильному уравнению $12 \cdot 3^{3x} + 4 = 5 \cdot 3^{3x}, 12 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{3x} + 4\left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 5.$

Очевидно, что $x = \frac{1}{3}$ корень уравнения. Так как левая часть последнего уравнения убывающая функция, а правая – константа, то корень единственный.

Ответ: $x = \frac{1}{3}$

Задание 12 .Решите уравнение $\sqrt{3}^{\,x} - 2^{x-1} = 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{3}^{\,x} - 2^{x-1} - 1$. Тогда её производная $f'(x) = \sqrt{3}^{\,x} \cdot \ln\sqrt{3} - 2^{x-1} \cdot \ln 2$.

Найдем критические точки функции. $f'(x) = 0,\ \sqrt{3}^{\,x} \cdot \ln\sqrt{3} = 2^{x-1} \cdot \ln 2$,

$x = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \log_3 2$.

Можно показать, что функция $f(x) = \sqrt{3}^{\,x} - 2^{x-1} - 1$ возрастает на интервале $(-\infty; x_0]$ и убывает на $[x_0; \infty]$, где $x_0 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \log_3 2$.

Значит, исходное уравнение может иметь не более двух корней. Нетрудно установить, что ими будут $x = 2,\ x = 4$.

Ответ: $x = 2,\ x = 4$.

Задание 13. Решите уравнение:

$$\log_2 \ 5+3\cos 4x \ = \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Решение. Поскольку $5+3\cos 4x \ \geq 2$, то $\log_2 \ 5+3\cos 4x \ \geq 1$.

Правая часть данного уравнения не превосходит одного. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} l\text{og}_2 \ 5+3\cos 4x \ =1, \\ \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 4x=-1, \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \end{cases} \quad n,k\in Z\,.$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$

Примеры задач прикладного характера на темы «Показательная и логарифмическая функция», «Дифференцирование функций», «Интегрирование функций».

Задача 1. (№207, [8,с.77]) На некотором лесном участке можно заготовить $4\cdot 10^5 м^3$ древесины. Ежегодный прирост деревьев равен 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет?

Задача 2. (№256, [8,с.88]) За первый год работы предприятие имело *a* рублей прибыли. В дальнейшем каждый год прибыль увеличивалась на *p%*. Какой станет прибыль предприятия за *n-й* год работы?

Задача 3. (№162, [97, с.81]) Процент инфляции показывает, на сколько процентов (в среднем) выросли цены.

1) Выразите процент инфляции за х месяцев, если ежемесячная инфляция 3%.
2) Вычислите с помощью калькулятора годовой процент инфляции.

Задача 4. (№315, [97, с.99]) Число жителей города-новостройки увеличивается ежегодно на 8%. Через сколько лет число жителей удвоится?

Задача 5. (№398, [97, с.116]) Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному и тому же основанию образуют арифметическую прогрессию.

Задача 6. ([124, с.75])Лифт после включения движется по закону $s(t)=1{,}5t^2+2t+12$ (м), где t (с) – время движения лифта. Найдите формулу скорости движения лифта и скорость лифта в конце второй секунды.

Задача 7. ([100, с.48]) В равнобедренный треугольник, основание которого на 7 см больше высоты, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на боковых сторонах треугольника, а две другие - на его основании. Выразите площадь треугольника как функцию от длины стороны квадрата. Найдите площадь треугольника, если известно, что длина стороны вписанного квадрата равна 12 см.

Задача 8. (№188, [97, с.87]) Сумма двух положительных чисел равна 10. Найдите эти числа, если сумма квадрата первого из них с кубом второго принимает наименьшее из всех возможных значений.

Задача 9. (№194, [97, с.88]) При каких размерах прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием и площадью полной поверхности S имеет наибольший объем?

Задача 10. (№283, [98, с.116]) Скорость поезда, идущего под уклон, изменялась по закону $v(t)=15+0{,}2t\ м/с$. Вычислите длину уклона, зная что поезд прошел его за 20с.

Можно предложить обучающимся задачи на формулирование плана решения: уравнения, неравенства, нахождение наибольшего/наименьшего значения функции на заданном отрезке, исследования функции и т.д.

Если такой план был сформулирован совместно с обучающимися заранее, то при проверке учитывается сколько пунктов и в верной ли последовательности указал ученик.

5.3. Задачи на выявление гибкости

Логические задачи

Логические задачи стоят особняком среди математических задач: в них как правило отсутствуют вычисления. Целью решения задач этого раздела является формирование культуры мышления. Для того что бы обучающиеся не путали причину со следствием, тщательно проводили перебор вариантов, правильно строили цепочку рассуждений. Как правило у логических задач существует единственный ответ.

Рассматриваются задачи «о лжецах», на упорядочение множества, на схему действий (переливания, переправа), о выяснении итогов проводимого турнира.

Задание 1. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, причем сам профессор в разговоре не участвует. Может ли такое быть? [144, с.91]

Задание 2. В семье четверо детей. Им 5,8, 13 и 15 лет. Детей зовут Галя, Коля, Валя и Таня. Сколько лет каждому ребенку, если известно, что одна девочка ходит в детский сад, Галя старше коли и сумма лет Гали и Вали делится на три?

Задание 3. Три подруги пришли в белом, синем, зеленом платьях и туфлях таких же цветов. Известно, что у Ани цвет платья и туфель совпадает. Наташа была в зеленых туфлях. Ни платье ни туфли у Оли не были белыми. Определите цвет платья и туфель каждой подруги.

Задание 4.Четыре юных филателиста: Дима, Коля, Вася и Саша – купили почтовые марки. Каждый из них покупал марки только одной страны, причем двое из них купили российские марки, один – французские и один – английские. Известно, что Дима и Коля купили марки двух разных стран. Марки разных стран купили Митя с Сашей, Вася с Сашей, Вася с Митей и Коля с Сашей. Кроме того, известно, что Дима купил не французские марки. Кто купил английские марки?

Задание 5. 1) Число x принадлежит множеству действительных чисел. Какое и нижеприведенных утверждений справедливо для следующего равенства: $(x+4)^2 = x^2+8x+16$:

a) для всех значений x;

b) только для двух значений x;

c) только для одного значения x ;

d) ни для одного значения x?

2) Ответьте на те же вопросы для равенства $(x+3)^2 = x^2+4x+6$

Нестандартные задачи.

Приведем рекомендации по решению нестандартных задач:

1) внимательно прочитайте условие задачи;

2) проверьте условие задачи на правдоподобность;

3) рассмотрите все возможные варианты постановки задачи;

4) прочитайте полностью записанное условие задачи, запись условия задачи в сокращенном виде может привести к ошибке;

5) проверьте правдоподобность полученных при решении результатов.

Несмотря на доступность формулировок и простоту задач о квадратных трехчленах нередко такие задачи допускают несколько принципиально различных способов решения.

Необходимым шагом решения задач этой темы является исследование дискриминанта квадратного трехчлена, применение теоремы Виета, использование свойств графика квадратичной функции. В тоже время решение может потребовать привлечение идей из других разделов математики, например геометрии или теории чисел.

Задание 6. Разность корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ четное число. Чему может равняться ордината вершины параболы y= ax^2+bx+c?

Варианты ответов: а) -2 ; б) -3; в) -4; г) -5; д) -6 .

Решение. Заметим, что при параллельных переносах этой параболы вдоль оси абсцисс расстояние между её корнями не меняется, поэтому мы можем считать, что она расположена симметрично относительно оси ординат, но при этом значение коэффициента b равно 0, то есть уравнение имеет вид $x^2 + c = 0$, следовательно, ордината вершины равна числу с, причем с <0.

Т.о. расстояние между корнями равно $2\sqrt{-c}$ и по условию задачи это четное число. Значит, $\sqrt{-c}$ – целое число, т.е. $-c = n^2$, где n- натуральное число или 0. Из предложенных вариантов этому условию удовлетворяет только число -4.

Задание 7. Найти все значения параметра а, при которых один корень уравнения x^2- 3a+2 x +2a -1=0 больше 1, а другой меньше 1.

Решение. Согласно утверждению 1, решаем неравенство f(1)<0: $1 - (3a + 2) + 2a - 1 < 0, -a < 2, a > -2.$

Ответ: (-2;+∞)

Задание 8. Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ (а, b, с целые числа, с – нечетное число) имеет целые корни. Может ли P(2011) быть нечетным числом?

Задание 9. Найдите сумму корней всех квадратных трехчленов вида у= $x^2 + px - 2011$, где p принимает все целые значения от -100 до 100.

Задание 10. В параболу $y = x^2$ вписан прямоугольный треугольник (все вершины треугольника лежат на параболе), гипотенуза которого параллельна оси Ох. Докажите, что высота треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 1.

Задание 11. Найти все значения параметра а, при которых оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3.

Задание 12. Число 48 представьте в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы два из них были равны между собой, а произведение всех слагаемых было наибольшим.

Задание 13. Разложите число 100 на два таких положительных множителя, чтобы их сумма была наименьшей.

Задание 14. Из имеющегося материала можно изготовить наличник для окошка периметром 160 см. Найдите размер такого окошка, площадь которого при этом будет наибольшей.

Нижеприведенные задачи можно отнести как к III так и к IV и V типам затруднений.

Во –первых , учащимся необходимо применить свои знания в новой, нестандартной ситуации.

Во –вторых , учащиеся должны будут спланировать свою деятельность по выполнению предложенных заданий.

В –третьих, учащимся предстоит предсказать результат деятельности.

*Задание 15.*Доказать тождество $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$ [27, IX. 189].

Решение. Рассмотрим функцию y=*f(x),* где *f(x)*= $arctgx + arcctgx$, и найдем её производную: $f'(x)$=$(arctgx + arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$.

Итак, $f'(x) = 0$ в любой точке *x*, значит, функция постоянна на всей числовой прямой: *f(x)=C.*

Чтобы найти значение константы С, вычислим *f(x)*в какой-нибудь точке *x*. Например, *f*(0)= $arctg0 + arcctg0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Итак, $f(x) = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать: $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$.

Задание 16. Докажем неравенство ln(1+*x*)<*x* при *x>0* .

Рассмотрим два варианта доказательства.

Способ 1.

Решение. Обозначим $f(x) =$ ln(1+*x*), $g(x)$= *x* и рассмотрим эти функции на промежутке [0;+∞).

При x=0 значения функций равны: ln(1+*0*)=ln1=0.

Вычислим производные функций: $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, $(x)' = 1$.

При *x*>0 выполняется неравенство $\frac{1}{1+x} < 1$, и таким образом, из утверждения следует неравенство ln(1+*x*)<*x* при *x>0*.

Способ 2.

Решение. Для доказательства будем использовать теорему Лагранжа.

(Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и дифференцируема на интервале (*a; b*), то в этом интервале найдется хотя бы одна точка *c* такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$).

Докажем неравенство ln(1+*x*)<*x* при *x>0.*

Применяя теорему Лагранжа к функции *f*(t)= ln(1+t) на отрезке [0; *x*], где *x*>0 получаем $\ln(1+x) = \frac{1}{1+c} \cdot x$ откуда следует ln(1+*x*)<*x* т.к. 0<c<*x*.

Задание 17. Докажем неравенство $e^x > 1 + x$. При $x \in R, x \neq 0$ [29, С.107].

Способ 1. Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = e^t - 1$. Функция $f(t)$ удовлетворяет условию теоремы Лагранжа на отрезке [0; *x*] при *x*>0 или соответственно на отрезке [*x*;0] при x<0.

Имеем f(0)=0, $f(x) = e^x - 1$ и $f'(t)$=e^t.

Следовательно, при *x*>0 найдется точка c∈ (0;x) такая, что $e^x - 1 = e^c \cdot x$.

Так как c>0, то $e^c > 1$.

Тогда при *x*>0 выполняется неравенство $e^c \cdot x > x$.

Следовательно, $e^x > 1 + x$.

Аналогично, при x<0 найдётся точка c∈(x;0) такая, что $1 - e^x = e^c \cdot (-x)$.

Так как c<0, то $e^c < 1$. Тогда при *x*<0 имеем −*x*>0 и выполняется неравенство $e^c \cdot (-x) < -x$.

Следовательно, $1-e^x<-x, e^x>1+x$.

Способ 2. ОДЗ неравенства $e^x>1+x$ есть промежуток I=$(-\infty;+\infty)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=e^x-1-x$.

Эта функция на промежутке I имеет производную $f'(x)=e^x-1$. Легко видеть, что $f'(x)>0$ для любых *x* из промежутка 0<*x*<+∞.

Так как на промежутке $0\leq x\leq+\infty$ функция $f(x)$ непрерывна, то это означает что на промежутке $0\leq x\leq+\infty$ функция $f(x)$ возрастает.

Поскольку f(0)=0, то $f(x)>0$ для любого $x\in(0;+\infty)$.

Поэтому любое $x\in(0;+\infty)$ является решением неравенства $e^x>1+x$.

Так как $f'(x)<0$ для любого $x\in(-\infty;0)$ и $f(x)$ непрерывна на промежутке $-\infty<x\leq 0$, то функция $f(x)$ убывает на промежутке $-\infty<x\leq 0$.

Поскольку f(0)=0, то $f(x)>0$ для любого $x\in(-\infty;0)$.

Следовательно, любое $x\in(-\infty;0)$ является решением неравенства $e^x>1+x$.

Так как f(0)=0, то $x=0$ не есть решение исходного неравенства.

Таким образом, все решения неравенства $e^x>1+x$ составляют два промежутка $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

Задание 18. Сравнить e^{π} и π^e [29, С.119]

Решение. Так как $\pi^e=e^{e\cdot ln\pi}$ и функция y=e^x является возрастающей, то достаточно сравнить числа π и $e\cdot ln\pi$.

Для этого рассмотрим функцию $f(x)=x-elnx$, определенную, непрерывную и дифференцируемую при x>0.

Так как $f'(x)=1-\frac{e}{x}$, то $f'(x)=0$ при $x=e$.

Если 0<*x*<*e*, то $f'(x)<0$, если x>e, то $f'(x)>0$.

Следовательно, $x = e$ – точка минимума функции $f(x)$.

Тогда при всех $x>0$, $x \neq e$, выполняется неравенство $f(x) > f(e)$.

Так как $f(e) = 0$, то $f(\pi) > 0$ и $\pi - e\ln\pi > 0$, т.е. $\pi > e\ln\pi$ и $e^{\pi} > \pi^{e}$.

*Задание 19***.** Что больше $\log_4 5$ или $\log_5 6$? [6,7]

Решение. Запишем неравенство $\log_4 5 < \log_5 6$ и представим его в виде $f(4) < f(5)$, где $f(x) = \log_x (x+1)$ $(x \in (1;+\infty))$.

Исследовать функцию в таком виде мы не можем, поэтому перейдем к натуральным логарифмам:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}.$$

Тогда $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1}{x}}{\ln^2 x} > 0 \Leftrightarrow x\ln x > (x+1)\ln(x+1)$;

но при $x > 1$ $0 < x < x+1, 0 < \ln x < \ln(x+1)$,

так что $x\ln x < (x+1)\ln(x+1)$, и поэтому при любом $x > 0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$.

Это означает, что функция $f(x)$ убывает, а рассматриваемое неравенство неверно, т.е. $\log_4 5 > \log_5 6$.

Задача 20. Фигура на рисунке 6 составлена из 5 равных квадратов. Её площадь 245 см^2.

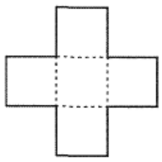


Рис. 6 Рисунок к задаче 20

A. Найдите площадь одного квадрата. (см^2)

B. Найдите длину стороны квадрата. (см)

C. Найдите периметр фигуры, изображенной на рисунке. (см)

Задание 21. Проволоку длиной 20 см согнули так, что получился прямоугольник. Если ширина этого прямоугольника 4 см, то чему равна его длина?

Варианты ответа: a) 5 см, b) 6 см, c) 12 см, d) 16 см.

За верное выполнение любого из заданий с выбором ответа выставляется 1 балл. Верное выполнение задания со свободно-конструируемым ответом оценивается либо 1 баллом, либо 1-2 баллами (в зависимости от полноты приведенного объяснения).

Рыжик В.И. отмечает важность «ухода от однозначности» и стимулирования творческой деятельности обучающихся. Как пример приводит задачи.

1. Что больше: x^2 или x ?
2. Какой прогрессией является последовательность из одних только единиц?
3. Что стоит за равенством $x + y = 0$?
4. Функция, равная константе, является возрастающей или убывающей? [120].

В заключении отметим, что алгебраические и геометрические задачи итоговой аттестации могут выявить *осознанность, глубину и гибкость* знаний при условии предъявления учащимися решений задач с полным развернутым ответом. Формирование указанных качеств знаний достигается не за счет натаскивания к тестам, а в результате систематического и целенаправленного сочетания устных и письменных форм опроса и подробного, аргументированного разъяснения решения задач и доказательства теорем. Все это свидетельствует о необходимости введения устных форм итоговой аттестации по геометрии для учащихся математического профиля, наряду с письменными контрольными работами.

§6. Организация и проведение педагогического эксперимента

На первом этапе (2014 – 2015 гг.) проводилось изучение состояния проблемы в теории и практике, определение исходных теоретических позиций, формирование рабочей гипотезы, были обоснованы актуальность и практическая значимость проблемы исследования, разработаны цель, объект, предмет, гипотеза, задачи и аппарат исследования.

На втором этапе(2015-2017 гг.) разрабатывались теоретические основы исследования, был проведен констатирующий эксперимент по выявлению осознанности, глубины и гибкости знаний обучающихся факультета СПО с использованием системы задач.

На третьем этапе (2017-2018 гг.) проводился педагогический эксперимент по внедрению разработанной модели выявления осознанности, глубины и гибкости знаний обучающихся с использованием системы задач, осуществлялась обработка и обобщение полученных результатов исследования, их внедрение в практику и оформление полученных итогов исследования.

Проведено анкетирование учителей. Почти у всех опрошенных отсутствует относительно объективная информация об уровне усвоения знаний обучающихся и наличии тех или иных качеств знаний. При этом большинство учителей не видят необходимости в использовании специально сконструированной системы задач, ориентированной на выявление осознанности, глубины и гибкости знаний. Порядка 75% учителей не достаточно знакомы с методической литературой по данной проблеме.

Таким образом, можно говорить о том, что в современной школе не уделяют должного внимания проблеме выявления осознанности, глубины и гибкости знаний.

Целью формирующего эксперимента была проверка эффективности и доступности методики выявления *осознанности, гибкости и глубины* математических знаний обучающихся с помощью системы задач спроектированной на основе типологии учебных затруднений М.Н. Скаткина и В.В. Краевского и типологии задач Ю.М. Колягина.

Осознанность

1. Может ли сумма нечетных чисел $1+3+5+...+(2n+1)$ при каком-нибудь нечетном n оканчиваться на 2018?

2. Докажите, что уравнение $\sin x = ax$ не может иметь 2018 решений.

3. На рисунке 8 изображён график дифференцируемой функции $y = f\;x$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1,\ x_2,\ x_3, ...,\ x_9$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f\;x$ отрицательна

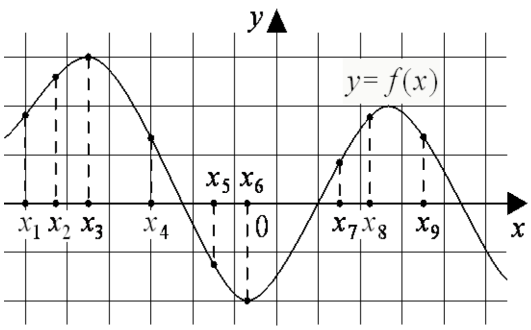


Рис. 8 Рисунок к задаче 3

4. Составьте план решения задачи: найдите какую-нибудь первообразную функции $f(x)=2x^3+x^2+3$, которая принимает положительные значения при $x=-1$.

5. Является ли функция $F(x) = -\left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)^2$ первообразной для функции $f(x) = -x^3+3x^2-2x$?

6. Вычислите интеграл $\int y \sin y\, dy$

Глубина

1. Решите квадратное уравнение $x^2 - 2018x + 2017 = 0$.

2. Разделите числа на две группы на основе признака: «рациональное число», «иррациональное число».

а) $log_4 \mathbf{64}$; б) $log_2 \mathbf{5}$; в) $\sqrt[5]{\mathbf{32}}$; г) $\sqrt{\mathbf{3}}$; д) $sin\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$; е) $cos\mathbf{1}$

3. Постройте «объект», удовлетворяющий указанным свойствам. «Я»: 1) тригонометрическая функция; 2) четная функция; 3) мои область значений $E = \ \mathbf{-2;2}$; 4) мой период $T = 4\pi$.

4. Приведите пример функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

a) Область определения совпадает со всем множеством действительных чисел.

b) Возрастающая на множестве $(0;\infty)$.

c) Не дифференцируема в точках $x_1 = -1, x_2 = 1$.

d) $f'(-2) = 1$.

5. Найдите ошибку.

«Докажем», что 2>3: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > lg\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 2lg\frac{1}{2} > 3lg\frac{1}{2}$, значит 2>3.

6. Заполните пропуски в решении:

$$\int 2x^2 + x^3 \ dx = ?\cdot\frac{x^3}{?} + \frac{?}{4} + ? = \frac{2}{3}? + ?x^4 + C$$

Гибкость

1. Вычислите $\sqrt{48 - 24\sqrt{3}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$

2. Докажите различными способами, что уравнение $x^2 + 4x + 6 = 0$ не имеет действительных корней.

(Первый способ состоит в определении знака дискриминанта. Второй способ: преобразуем левую часть $x^2+4x+6=(x+2)^2+2$. При любом x полученное выражение положительно, а значит действительных корней уравнение не имеет).

3. Используя цифры 3, 4, 8, напишите выражения, содержащие логарифмы и степени, численное значение которых равно 2. (Примеры ответов: $\frac{3}{log_4 8}$, $\frac{4}{\sqrt[3]{8}}$, $4-\sqrt[3]{8}$, $3\cdot log_8 4$, $log_{\sqrt[3]{8}} 4$, $log_8 4^3$).

4. Расстояние между двумя пунктами А и В равно $540км$. Из них одновременно вышли два поезда – из пункта А вышел пассажирский поезд идущий, со скоростью $80км/ч$, а из пункта В – электричка, идущая со скоростью $60км/ч$. Через сколько времени поезда встретятся? (В задаче присутствует неопределенность: в условии не указаны направления движения поездов. В результате анализа условия обучающиеся должны рассмотреть четыре возможных случая. Задача имеет два решения.)

5. Решите уравнение $sin x + cox = 0$. Найдите как можно больше способов решения. (Существуют по крайней мере семь способов решения этого уравнения)

6. Определите, под каким углом видно из начала координат множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2+y^2 \le 12x-27$?

Эксперимент проводился на базе школы математического развития и образования «5^+» при ТГУ, а так же учебной группы СПД17, обучающихся по программе государственного среднего (полного) общего образования.

Была выдвинута гипотеза: если систему школьных математических задач, спроектировать на основе типологии учебных затруднений М.Н. Скаткина и В.В. Краевского и типологии задач Ю.М. Колягина, то это позволит выявить *осознанность, глубину и гибкость* знаний обучающихся общеобразовательной школы по математике, а также уровни сформированности системы качеств знаний.

Диагностика текущего состояния уровня знаний обучающихся осуществлялась в ходе посещения уроков, анализа результатов вводных и срезовых работ, анкетирования обучающихся.

Выводы по II главе

1.В данной главе определены критерии отбора задач по математике для формирования *осознанности, глубины, и гибкости* знаний обучающихся общеобразовательной школы. Критерии сформулированы на основе классификации типов задач учебных достижений, предложенные И.Я. Лернером, М.Н. Скаткиным, В.В. Краевским и типологии задач в зависимости от числа неизвестных компонентов, разработанной Ю.М. Колягиным. Задачи, ориентированные на выявление глубины, осознанности и гибкости знаний:

– требующие от учащихся выбора из совокупности учебных действий одного в качестве ведущего, тренировочного типа;

– предполагающие планирование предстоящей деятельности, выбора предполагаемых средств и способов её выполнения тренировочного, обучающего и поискового типов задач.

– в которых учащимся предлагается определить или предсказать результат предстоящего действия, определить или описать предполагаемые признаки или свойства этого результата, тренировочного, обучающего и поискового типов задач;

– творческого применения знаний и умений в новой для учащихся ситуации, обучающего, поискового и проблемного типов.

2. Спроектирована система задач на выявление осознанности, глубины, и гибкости.

3. В ходе экспериментальной работы была подтверждена гипотеза исследования и обосновано, что спроектированная система задач на основе классификации типов учебных достижений, предложенные И.Я. Лернером, М.Н. Скаткиным, В.В. Краевским и типологии задач в зависимости от числа неизвестных компонентов, разработанной Ю.М. Колягиным, позволяют выявить качества математических знаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На основе анализа научно-педагогической и методической литературы по теме исследования, практического опыта был сделан вывод о недостаточной степени разработанности проблемы с теоретической точки зрения, а так же об отсутствии практического опыта формирования осознанности, глубины и гибкости математических знаний обучающихся с использованием специальным образом сконструированных задач.

2. Наряду с остальными качествами, особое место в системе качеств отводится осознанности, глубине и гибкости знаний. Выделенные качества можно считать основой уровней сформированности системы качеств знаний. В диссертации выделены критерии к системе задач, ориентированные на формирование этих трех качеств знаний обучающихся общеобразовательных учреждений.

3. Гибкость позволит проявить эти знания в различных ситуациях, а глубина знаний - расширить круг вопросов и задач, в которых эти знания можно реализовать. Так как осознанность и гибкость являются составляющими системности, которая, в свою очередь, определяет предметную математическую компетенцию, то можно сделать вывод, что рассматриваемые в исследовании качества (гибкость, глубина, осознанность) оказывают большое влияние на компетенцию. А она, в свою очередь, влияет на качество математического образования в целом.

4. В качестве средств формирования и выявления качеств знаний учащихся определены математические задачи. На основе типологии учебных затруднений И.Я. Лернера, М.Н. Скаткина и типологии задач Ю.М. Колягина выявлены критерии отбора задач, ориентированных на формирование гибкости, глубины, осознанности знаний и компетенций учащихся общеобразовательной школы.

Перспективы дальнейшего исследования проблемы могут заключаться в выявлении критериев отбора задач на формирование других качеств знаний и их влиянии на формирование УУД.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аванесов В.С. Знания как предмет педагогического измерения/В.С. Аванесов// «Педагогические измерения, №3, 2005г.: URL: http://testolog.narod.ru/EdMeasmt5.html (дата обращения 28.05.2018)

2. Абрамова О.М. Обращение задач как средство развития гибкости мышления учащихся 5-6 классов в процессе обучения математике: автореф. дис…. канд. пед. наук. – Саранск, 2013. – 22 с.

3. Адрова И.А. Методика создания и использования системы повторительных математических диктантов как средства повышения прочности усвоения базовых знаний учащихся: автореф. дис…. канд. пед. наук. – Москва, 2008. – 17 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. — М.: Просвещение, 2009. — 415 с.

5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений(профильный уровень)/ Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин.- 8-е изд., стер. – М:Мнемозина, 2009. – 366с.

6. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни/ [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин].- 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009.- 464 с.: ил. – (МГУ - школе).

7. Алгебра: профильный уровень: 10-11 классы: тематические и итоговые контрольные работы: дидактические материалы/ [Н.Н. Гусева, Е.С. Ионова, Л.В. Федотова и др.]. – М: Вентана- Граф, 2011. – 320 с.

8. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Базовый и углубленный уровень [Текст]: учебник / Ш. А. Алимов [и др.]. - М.: Просвещение, 2016. - 463 с.

9. Аллагулова И.Н. Формирование математической компетентности старшеклассника в образовательном процессе: дис. ... канд. пед. наук: Оренбург, 2007. - 225 с.

10. Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б. Решение задач по математике с избыточными или противоречивыми данными в общеобразовательной школе // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 5. – С. 183-185; URL: http://natural-sciences.ru/ru/article/view?id=35125 (дата обращения: 07.08.2018).

11. Антонова Л. В. О формировании компетенций учащихся профильных математических классов/Л.В. Антонова// Вестник московского государственного областного университета. Серия: педагогика.-2010. -№ 4.- С. 56-61.

12. Артёмова Л.К. Профильное обучение: опыт, проблемы, пути решения/ Л.К. Артёмова // Школьные технологии. - 2003. - №4. – С. 22-31.

13. Баннов Д.А. Систематизация знаний учащихся 5-6 классов по теме «Уравнение»/ Д.А. Баннов// Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. –2009. -№ 3. – С.474-478.

14. Баннов Д.А., Иванова, Т.А. Выделение систем знаний в содержании школьного математического образования как условие повышения его качества/ Д.А. Баннов, Т.А. Иванова// Вестник вятского государственного гуманитарного университета: Издательство: Вятский государственный гуманитарный университет (Киров) . – 2009. – С.167-171.

15. Барболин М.П. Задачи как средство повышения качества теоретических знаний учащихся // Задачи как цель и средства обучения математике учащихся средней школы: Межвузовский сборник научных трудов. - 1981. – С. 60 – 69.

16. Башмаков М.И. Математика в кармане «Кенгуру». Международные олимпиады школьников/ М.И. Башмаков. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2011. – 297 , [7]с.: ил. – (Олимпиады школьников).

17. Башмаков М.И. Математика : учебник / М.И. Башмаков. — М.: КНОРУС, 2017. —394 с. — (Начальное и среднее профессиональное образование).

18. Богословская О.В. Деятельностный подход к обучению в вузе и проблемы профессиональной деятельности преподавателя: Учебно-методическое пособие. – М.: Изд-во РУДН, 2006. – 72с.

19. Болотов В. А., Вальдман И. А. Условия эффективного использования результатов оценки образовательных достижений школьников// Педагогика.- 2012. № 6.- С. 39–45.

20. Боченков С.А., Вальдман, И.А. Интерпретация и представление результатов ЕГЭ: проблемы и возможные решения/ С.А. Боченков, И.А. Вальдман// Вопросы образования. – 2013.- №3.- С. 5-24.

21. Булатова И.С. качества знаний как сохраняемые модели содержания образования при обучении в ВУЗе/ И.С. Булатова// URL : http://teoria-practica.ru/-3-2011/pedagogika/bulatova.pdf

22. Ваганова И.И. О развитии гибкости мышления школьников в условиях гуманитаризации математического образования/ И.И. Ваганова// Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика: Материалы Всероссийской научной конференции. Саранск, 18-20 сентября 2002 г. Часть 2/ Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2002. – С. 254-255.

23. Васюкова Е.Ю. Повышение осознанности теоретических знаний учащихся по органической химии в условиях актуализации смыслов познания: автореф. дис…. канд. пед. наук. – Москва, 2010. – 14 с.

24. Васюкова Е.Ю., Оржековский, П.А. Выявление осознанности теоретических знаний (на примере органической химии)// Вестник МПГУ. – 2011.- №7.- С.70-74.

25. Галанина Е.А. Методика разработки учебного материала по математике для обучения на профильном уровне в 10-11 классах

общеобразовательных учреждений: автореф. дис…. канд. пед. наук. – Орел, 2009. – 20 с.

26. Глизбург В.И. Алгебра и начала анализа. Контрольные работы для 10 класса общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ В.И. Глизбург, под ред А.Г. Мордковича .- М Мнемозина, 2007.- 62с.

27. Глизбург В. И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Контрольные работы[Текст]: для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый уровень) / В. И. Глизбургпод ред. А. Г. Мордковича. - 2-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2013. - 32 с.

28. Горшкова Н.К. Модульно-рейтинговый мониторинг как средство управления качеством школьного образования: автореф. дис. ... канд. пед. наук : - Саранск: 2009. – 18с .

29. Григорьев А.В. Повышение качества математической подготовки студентов технического вуза с помощью корректирующего обучения : автореф. дис. … канд. пед. наук.: -Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2009. – 22 с.

30. Гринева Т.В. Повышение качества понимания учащимися учебного материала школьного курса алгебры и начал анализа: автореф. дис. ... канд. пед. наук : - Екатеринбург: 2010. - 23с. URL: http://nauka-pedagogika.com/pedagogika-13-00-02/dissertaciya-povyshenie-kachestva-ponimaniya-uchaschimisya-uchebnogo-materiala-shkolnogo-kursa-algebry-i-nachal-analiza

31. Гусев В.А. Психолого – педагогический основы обучения математике.- М.: ООО «Издательство «Вербум - М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003. -432с.

32. Гущин Ю.Ф. Анализ исследований проблемы качества образования URL: http://psyhoinfo.ru/analiz-issledovaniy-svyazannyh-s-izucheniem-problemy-kachestva-obrazovaniya-0

33. Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 80 с.

34. Далингер В.А. Компетентностный подход и качество образования в школе/ В.А. Далингер // Современные наукоемкие технологии. Омск: № 7, 2008. – С.54-58.

35. Далингер В.А. Рефлексивные задачи как средство, обеспечивающее понимание учащимися учебного материала по математике//Сборник им. Герцена.-2012.-№.-С.181– 185.

36. Далингер В.А. Федеральный государственный образовательный стандарт нового поколения и системно – деятельностный подход в обучении математике // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 6-1. – С. 19-22; URL: http://fundamental-research.ru/ru/article/view?id=29887 (дата обращения: 27.06.2018).

37. Демиденко И.Г. Индивидуализация обучения химии как условие повышения качества знаний учащихся: автореф. дис. ... канд. пед. наук: - М.: 2010. – 17 с.

38. Демидова М.Ю. Методическая система оценки учебных достижений учащихся по физике в условиях введения ФГОС: автореф. дис. ... док. пед. наук: - М.: 2014. – 46 с.

39. Демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ 2016 года по математике/ подготовлен ФГБНУ «ФИПИ». – М.: Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации, 2016. – 18 с

40. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2017 года по математике/ подготовлен ФГБНУ «ФИПИ». – М.: Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации, 2017. – 18 с.

41. Демонстрационный КИМ ЕГЭ 2018 года по математике/ подготовлен ФГБНУ «ФИПИ». – М.: Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации, 2018. – 18 с.

42. Денищева Л.О. Проверка компетентности выпускников средней школы при оценке образовательных достижений по математике/ Л.О.

Денищева, Ю.А. Глазков, К.А. Краснянская// Математика в школе.- № 6. – 2008. – С. 21 – 30.

43. Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу с ответами и решениями для 10—11 классов. Учебное пособие для профильной школы / В. И. Рыжик, Т. Х. Черкасова. — СПб: СМИО Пресс, 2008. — 428 с.

44. Дорошенко Ю. И. Контроль качества образования в вузе : системность и противоречия / Ю. И. Дорошенко// Университетское управление : практика и анализ. - 2008. - №1. - С. 38-41.

45. Дьякова Е.А. Обобщение знаний учащихся по физике в старших классах средней (полной) школы : дис. ... док. пед. наук: - М.: 2002. – 445 с.

46. Дюмина Т.Ю. Обучение школьников поиску идеи решения геометрической задачи различными способами /Т.Ю. Дюмина, А.А. Махонина// Электронный научно-образовательный журнал ВГСПУ «Грани познания».- №1(21). -2012. – С. 64-71.

47. Епишева О.Б., Крупич, В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учеб. деятельности: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.

48. Ершова А. П. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10-11 классов[Текст] : учеб. пособие для общеобразоват. учеб. учреждений / А. П. Ершова, В. В. Голобородько. - 5-е изд., испр. - М.: Илекса, 2013. - 224 с.

49. Жаворонкова Т. Сколько решений нужно найти?/ Т. Жаворонкова// Математика.- 2013. - №5.- С. 32-33.

50. Ждан Н.А. Реализация содержательно-деятельностных связей в обучении химии как средство повышения системности и осознанности знаний учащихся: автореф. дис. ... канд. пед. наук: - Омск: 1998. – 18 с.

51. Задачи как цель и средства обучения математике учащихся средней школы: Межвузовский сборник научных трудов.–Л.: Изд-во Ленинградского пединститута, 1981. – 202 с.

52. Зеер Э.Ф. Психолого-дидактические конструкты качества профессионального образования//Образование и наука. 2002. № 2(14)

53. Зимняя И.А. Педагогическая психология. Учебник для вузов. Изд. второе, доп., испр. и перераб. – М.: Логос, 2000. – 384 с.

54. Зорина, Л.Я. Системность- качество знаний. М., 1976.

55. Зуева, М.Л. Формирование ключевых образовательных компетенций при обучении математике в средней (полной) школе: автореф. дис. …канд. пед. наук. – Ярославль: Типография ЯГПУ им.К.Д. Ушинского, 2008. – 22 с.

56. Зуева М.Л. Формирование некоторых ключевых компетенций на уроке математики по теме «Преобразование графиков» [Текст]// Ярославский педагогический вестник. – 2005. – № 3 (44). – С. 96-103.

57. Иванова О.Ю., Утеева, Р.А. Задачи как средство оценки качества знаний по математике/ О.Ю. Иванова, Р.А. Утеева//Тезисы докладов 3-й международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посв. 85-летию Л.Д. Кудрявцева. – М.: МФТИ, 2008. – С.454-455.

58. Иванова О. Ю. О различных подходах к определению системы качеств знаний учащихся и пути их формирования // Математическое образование: концепции, методики, технологии: сборник трудов IV Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», 21-24 апреля 2009 г., Россия, г. Тольятти/ под общ. ред. Р.А. Утеевой. В 3-х ч. Ч.2.- Тольятти: ТГУ, 2009.- С. 139 -143.

59. Иванова О.Ю. К вопросу осознанности математических знаний учащихся /О.Ю. Иванова // Вестник магистратуры. 2014.- № 7(34).- С. 17-20.

60. Иванова О.Ю. Качества знаний по математике как основа формирования компетенций учащихся // Сборник статей VIII международной научно – практической конференции «Запад – Россия – Восток» - Тольятти: Изд-во ПВГУС, 2014.- №8.- С.317-321.

61. Иванова О.Ю. Качества знаний и компетенции, выявляемые геометрическими задачами итоговой аттестации/ О.Ю. Иванова// Геометрия и геометрическое образование: сборник трудов III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 27-29 ноября 2014 года/ под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014. - С. 266-270.

62. Иванова О. Ю. Математические задачи как средство формирования гибкости, глубины и осознанности знаний учащихся общеобразовательной школы/ О.Ю. Иванова// Математика и математическое образование: сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 27-29 апреля 2015 г.)/ под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2015. - С. 242-245.

63. Иванова О.Ю. Интеграция математической и экономической компетентности учащихся в процессе обучения математике/ О.Ю.Иванова// Вестник Поволжского государственного университета сервиса. Серия «Экономика». – 2016. - №2 (44). – С. 204 – 207.

64. Иванова О.Ю. О гибкости математических знаний учащихся общеобразовательной школы// Математика и математическое образование : сборник трудов VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса), 26-29 апреля 2017 г., Россия, г. Тольятти/ под общ. ред. Р.А. Утеевой.- Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017.- С. 357 -363.

65. Иванова О.Ю. К вопросу о глубине математических знаний обучающихся // Письма в Эмиссия.Оффлайн (The Emissia.Offline Letters): электронный научный журнал. 2018. № 4 (апрель). ART 2609. Объем 0.5 п.л. URL: http://www.emissia.org/offline/2018/2609.htm .

66. Иванова О.Е. Теория обучения в информационном обществе/Е.О. Иванова, И.М. Осмоловская.- М.: Просвещение, 2011.- 190 с. – (Работаем по новым стандартам).

67. Иванова Т.А. Роль методологических знаний в формировании системности математических знаний школьников/ Т.А. Иванова// Гуманитарные науки и образование. Педагогика .- 2012, №1.-С. 10-13.

68. Карева Д.Ф. Качества знаний при обучении/ Д.Ф. Карева. Хабаровск: Изд-во ХПГУ, 1996. 26 с.

69. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости. М: Педагогика, 1981. -200с.

70. Качество знаний учащихся и пути его совершенствования /под. ред. М.Н. Скаткина и В.В.Краевского. - М.: Знание, 1978.

71. Клейносов Д.П. Реализация диалектического принципа осознанности знаний на примере изучения темы «Предельные углеводороды (алканы)»/ Д.П. Клейносов// Вестник МГОУ. Серия «Педагогика». 2012. - №3. – С.111-114.

72. Клименко О.Г. Педагогические условия повышения качества профессионального образования при изучении начертательной геометрии в вузе/ О.Г. Клименко// Педагогика. - №3. – 2011. – С.

73. Ковалева, Г. Результаты международного исследования TIMSS-2011/ Г. Ковалева // Математика. – апрель. – 2013. – С 19-23.

74. Коджаспирова Г.М. Словарь по педагогике. – Ростов н/Д: Март, 2005. – 120 с.

75. Компетентностный подход в педагогическом образовании: Коллективная монография/ Под ред. проф. В.А. Козырева, проф. Н.Ф. Радовой, проф. А.П. Тряпицыной. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2005. – 391с

76. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч. I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. –М.: Просвещение , 1977. – 113 с.

77. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч. II. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. –М.: Просвещение , 1977.

78. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень)/ Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд. стер. – М.: Мнемозина, 2010 . – 264 с.: с ил.

79. Концепция развития математического образования в Российской Федерации Утверждена распоряжением Правительства Российской федерации от 24 декабря 2013 г. №2506-р.

80. Краевский В.В. Основы обучения. Дидактика и методика: учеб, пособие для студ. высш. учеб. заведений/В.В. Краевский, А.В. Хуторской. - М.: Издательский центр «Академия», 2007.- 352 с.

81. Ксенева В.Н. О подготовке учащихся к систематическому курсу алгебры/В.Н.Ксенева//Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика: Материалы Всероссийской научной конференции. Саранск, 18-20 сентября 2002 г. Часть 2/ Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2002. – С.218-223.

82. Кулюткин Ю.Н., Сухобская Г.С. Индивидуальные различия мыслительной деятельности взрослых учащихся. — М.: Педагогика, 1971. - 111 с.

83. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

84. Министерство образования и науки Российской Федерации. URL : http://минобрнауки.рф/m/пресс-центр/9482.

85. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Ё.И. Лященко.- М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

86. Лернер И.Я. Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? - М.: Знание,1978.

87. Липатникова, И.Г. Современные средства оценивания результатов обучения[Текст]: учеб. пособие/И.Г. Липатникова. –Екатеринбург:АМБ: УрГПУ, 2010. – 254 с.

88. Математика: Международная олимпиада молодежи, 2015. – М.: ВИТА-ПРЕСС, 2015. – 72 с.

89. Махмутов М.И. Проблемное обучение: Основные вопросы теории. – М.: Педагогика, 1975. – 238 с.

90. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов/ под научн. Ред. Н.Л. Стефновой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

91. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов/ Г.И. Саранцев. –М: Просвещение, 2002. -224 с.

92. Миганова Е.Ю. Методика конструирования систем учебных математических задач (на примере курса геометрии педвуза): Учеб. Пособие для студ. мат. спец. пед. вузов. – Арзамас: АГПИ, 2001. – 96 с.

93. Молоткова Б.Б. Методика использования электронных образовательных ресурсов при изучении тригонометрии как средство повышения уровня осознанности знаний: автореф. дис. … канд. пед. наук /Б.Б. Молоткова. – С.Пб.: Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена ,2014.– 22с.

94. Молоткова Б.Б. Интерактивный учебный модуль как средство формирования осознанных математических знаний учащихся старших классов//Известия РГПУ.-2012.-№150.– С.220-231

95. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа .10 класс. В 2ч. Ч .1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.- 6 изд. Стер.- М.: Мнемозина. – 2007, 424с.

96. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа .10 класс. В 2ч. Ч .2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный

уровень)/ А.Г. Мордковичи др. под ред. А.Г. Мордковича.- 6-е изд. Стер. - М.: Мнемозина. – 2009, 343 с.

97. Муравин Г.К. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Г.К. Муравин .- 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 287, [1] с.

98. Муравин Г.К. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Г.К. Муравин .- 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 253, [3] с.: ил.

99. Муравин Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник/ Г.К. Муравин, О.В. Муравина.- 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. –318, [2]с.

100. Муравин Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 кл.: учебник/ Г.К. Муравин, О.В. Муравина.– М.: Дрофа, 2014. –318, [2]с.: ил.

101. Насикан И.В. Метод варьирования в системе задач на развитие функциональных умений учащихся основной школы // Мир науки, культуры, образования. - №6.- 2013.- С.65-67.

102. Никольская Н.В., Никольский Е.В. К вопросу о развитии гибкости мышления школьников на основе исследовательской математической деятельности// Ученые записки Орловского государственного университета. - №2.- 2014. – С. 324-329.

103. Новиков А.М. Педагогика: словарь системы основных понятий. – М.: ФГНУ ИТИП РАО, Издательский Центр ИЭТ, 2013. – 268 с.

104. Новикова, О.А. Развитие исследовательских компетенций учащихся в процессе изучения курса алгебры и начал анализа/ О.А. Новикова// Омский научный вестник. -2011. -№5 (101). – С. 233-236.

105. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Ахметшин Д.А. Алгоритм оценки качества владения компетенцией на основе показателя глубины усвоенных

знаний / Н.К.Нуриев, С.Д. Старыгина, Д.А. Ахметшин// Alma mater (Вестник высшей школы).- 2015. № 11. С. 64-66.

106. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Гибадуллина Э.А. Дидактическая инженерия: проектирование систем обучения нового поколения /Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Гибадуллина Э.А //Интеграция образования. 2016 -. Т. 20. -№3 (84).- С. 393-406. URL:http://lib.knigi-x.ru/23raznoe/438945-1-center-scientific-cooperation-interactive-plus-starigina-svetlana-dmitrievna-nuriev.php.

107. Ожегов С.И. Словарь русского языка: 70 000 слов / С.И. Ожегов; Под. ред. Н.Ю. Шведовой. – 21-е изд., перераб. и доп. – М.: Рус. яз., 1989. – 924 с.

108. Основные результаты международного исследования PISA – 2012/ Центр оценки качества образования .- 2012. – 20 с. Электронный доступ http:// www.oecd.org/edu/pisa

109. Основные результаты международного исследования качества математического и естественнонаучного образования TIMSS-2011. Аналитический отчет / М.Ю. Демидова и др. Под науч. ред. Г. С. Ковалевой. М.: МАКС Пресс, 2013. – 154 с.

110. Останина Е.Е., Клавсуть А.Д. Возможности развития гибкости мышления в процессе обучения младших школьников решению нестандартных математических задач// Герценовские чтения. Начальное образование. Т.4. Вып. 2, 2013. – С.128-133.

111. Поддубская Г.Е., Нефёдова, С.Ю., Грекова, С.В. Системность знаний учащихся как основа их предметной математической компетентности/ Г.Е. Поддубская, С.Ю. Нефёдова, С.В. Грекова// Вестник ОГПУ.- 2006.- №1.- С.166-169.

112. Приказ Министерства образования и науки РФ от 17 декабря 2010 г. №1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования».

113. Приказ Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» (с изменениями и дополнениями).

114. Программы общеобразовательных учреждений. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы./ Составитель: Т. А. Бурмистрова. – М.: «Просвещение», 2009. - 160 с.

115. Рахимова А.Р. Параметр «глубина» в научном психологическом дискурсе// Сибирский филологический журнал. -2015.- №4. -С. 170-181.

116. Рослова Л. Готовиться к экзамену помогают диагностики/ Л. Рослова// Математика. – ноябрь. – 2012. – С.8-12.

117. Рослова Л. Экспресс – анализ результатов TIMSS/ Л. Рослова// Математика. – апрель. – 2013. –С 24-25.

118. Рудакова, И.А. Дидактика. Серия «Среднее профессиональное образование». – Ростов – на – Дону: Феникс, 2005. – 256 с.

119. Рукосуева Д.А. Методика оценки уровня понимания учебно-вербальной информации естественно-математических дисциплин [Электронный ресурс] / Д.А. Рукосуева // Международный электронный журнал «Образовательные технологии и общество (Educational Technology & Society)». – 2011. – Vol. 14, №2.–P. 435–451.– Режим доступа: http://ifets.ieee.org/russian/depository/v14_i2/pdf/12r.pdf

120. Рыжик В.И. Задача для учителя математики. 7-11 классы. – М.:ВАКО, 2017. -400 с. – (Мастерская учителя математики).

121. Рязанова Л.С Повышение качества математического образования как педагогическая проблема // Сибирский педагогический журнал.- №7.- 2009. - С.51-56.

122. Санина Е.И. Методические основы обобщения и систематизации знаний учащихся в процессе обучения математике в средней школе.: автореф. дис. .докт. пед.наук. М., 2002. - 32 с.

123. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике/Г.И. Саранцев. -2-е изд., дораб. –М.: Просвещение, 2005. – 255 с.: ил. –

(библиотека учителя).

124. Саранцев, Г.И. Эстетическая мотивация в обучении математике. – ПО РАО, Мордов. пед. ин-т. Саранск, 2003. – 136с.

125. Сафуанов И.С., Атанасян С.Л. Математическое образование в Сингапуре: традиции и инновации/ И.С. Сафуанов, С.Л. Атанасян// Наука и школа.- №3.-2016.- С.38-44.

126. Севрюков П.Ф. Школа решения олимпиадных задач по математике/ П.Ф. Севрюков. – М.: Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2013. – 176 с.

127. Селевко Г.К. Компетентности и их классификация / Компетенция и компетентность: сколько их у российского школьника // Народное образование. – 2004. – № 4. – С. 136-144.

128. Скрипкин И.Н. Организационно-педагогические условия повышения качества знаний учащихся при профильном обучении: автореф. дис. …канд. пед. наук /И.Н. Скрипкин.-Тамбов: Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, 2008. – с.18

129. Смирнова А.А. Метод варьирования текстовых задач по математике как средство повышения осознанных знаний учащихся// Известия РГПУ.- 2006.- №22. – С . 203-208.

130. Смирнова А.А . Метод варьирования текстовых задач по математике как средство повышения качества знаний учащихся.: автореф. дис. … канд. пед. наук / А.А. Смирнова. – С.Пб.: Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, 2007.

131. Современные средства оценивания результатов обучения: Учебное пособие/ Е.Н. Перевощикова, А.В. Поршнев, А.В. Юхова, Е.Ю. Клюева: Под ред. Проф. Е.Н. Перевощиковой. – Н. Новгород: НГПУ, 2007. – 175с.

132. Солонин Е.В. Тестирование как средство управления процессом формирования у учащихся системы качеств знаний по математике: автореф.

дис … канд. пед. наук/ Е.В. Солонин.- Омск: Омский государственный педагогический университет, 2004. – 18с.

133. Снегурова В.И. Методическая система дистанционного обучения математике учащихся общеобразовательных школ: дис … докт. пед. наук / В.И. Снегурова. - С.Пб.: Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, 2010. – 370 с.

134. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2014 году единого государственного экзамена по математике. Подготовлена ФБГНУ «ФИПИ». - М.: Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации, 2014. – 12 с.

135. «Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года» утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 мая 2015 г. №996-р

136. Талызина Н.Ф. Педагогическая психология: Учеб. для студ. сред. пед. учеб. заведений. 3-е изд., стереотип. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 288 с.

137. Темняткина О.В. Формирование ключевых компетенций у школьников в образовательном процессе.(на примере преподавания геометрии в 7-9 классах средней школы):автореф. дис… канд. пед. наук. – Екатеринбург: Изд-во УГУ им. А.М. Горького. – 2006. -22 с

138. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов/ Под.ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп.- Н.Новгород: НГПУ, 2009. -355с.

139. Токарева Л.И. К вопросу о выполнении методического анализа школьных математических задач [Текст] /Л.И. Токарева//Математика в школе. – 1991. – № 3.– С. 39-42.

140. Тюменева Ю.А., Вальдман А.И., Карной М. Что дают предметные знания для умения применять их в новом контексте. первые результаты сравнительного анализа TIMSS-2011 и PISA-2012/ Ю.А.

Тюменева, А.И. Вельдман, М. Карной //Вопросы образования. - №1.- 2014.- С. 8-24.

141. Требования к знаниям и умениям школьников: Дидактико-методический анализ/Под ред. А.А. Кузнецова.- М.: Педагогика,1987. – 176 с.

142. Утеева Р.А.Оценка качества математического образования российских школьников в аспекте международных исследований / Р.А. Утеева, Е.А. Курьянова //Научное отражение. 2017. № 5-6 (9-10). С. 171-173.

143. Учебно-методическое пособие сборник дидактических материалов по дисциплине «Математика» [Электронный ресурс] : для студентов всех специальностей СПО / Поволж. гос. ун-т сервиса (ФГБОУ ВПО «ПВГУС»), Каф. «Высш. Математика»; сост. Г. А. Киричек. - Документ AdobeAcrobat. - Тольятти: ПВГУС, 2014. - Режим доступа: http://elib.tolgas.ru.

144. Фарков А. В. Математические олимпиады в школе. 5-11 класс. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 176 с.: ил. – (Школьные олимпиады).

145. Фарков А. В. Диагностика обученности и обучаемости учащихся математике: монография/ А.В. Фарков; Поморский гос. ун-т. им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: Поморский университет, 2005. – 316 с.

146. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с.- (Стандарты второго поколения).

147. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. – М.: Просвещение, 2013. – 63 с.

148. Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. №273 – ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

149. Фефелова Е.Ф Обобщение и систематизация знаний и умений учащихся при решении сюжетных задач в девятилетней школе: автореф. дис. …канд. пед. наук/ Е.Ф. Фефелова. – С.-Пб.: 1993.

150. Фирсова Н.Б. Повышение качества обучения биологии на основе организации природоохранной деятельности учащихся: автореф. дис. …канд.

пед. наук/ Н.Б. Фирсова. – М.: Московский государственный областной университет. – 2009. – 16 с.

151. Формирование универсальных учебных действий в Ф79 основной школе : от действия к мысли. Система заданий : пособие для учителя / [А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская и др.] ; под ред. А. Г. Асмолова. — М. : Просвещение, 2010. — 159 с.

152. Фундаментальное ядро содержания общего образования / Рос. акад. наук, Рос. акад. образования; под ред.В. В. Козлова, А. М. Кондакова. — 4-е изд., дораб. —М.: Просвещение, 2011. — 79 с. — (Стандарты второго поколения). — ISBN 978-5-09-018580-6

153. Хаджарова И.М. Комплексный подход к обучению математике в основной школе как фактор формирования системности знаний учащихся дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 Махачкала, 2015. -155 с.

154. Харитонова О.В. Развитие учебно-познавательной компетентности старшеклассников на уроках геометрии : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 СПб., 2006.- 167 с. РГБ ОД, 61:07-13/961

155. Хуторской А.В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования [Текст]/А.В. Хуторской //Народное образование.- 2003.-№ 2.- С.58-64.

156. Целищева И.И. Технология обучения элементам комбинаторики как средство развития гибкости мышления детей/ И.И. Целищева, Е.С. Ермакова, И.Б. Бодрова// Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика: Материалы Всероссийской научной конференции. Саранск, 18-20 сентября 2002 г. Часть 2/ Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2002. – С.164-167.

157. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса/ М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 424 с.

158. Шамова Т.И. Современные средства оценивания результатов обучения в школе: учебное пособие/Т.И. Шамова, С.Н. Белова, И.В. Ильина,

Г.Н. Подчалимова, А.Н. Худин. – М.: Педагогическое общество России, 2008.- 192с.

159. Шамова Т.Н., Давыденко Т.М., Шибанова Г.Н. Управление образовательными системами: Учебное пособие для студ. высш. пед. учеб, заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2002.- 430 с

160. Шило Н.Г. Формирование системности знаний учащихся на заключительном этапе решения геометрических задач: автореф. дис… канд. пед. наук. – Москва, 1997. – 17 с.

161. Шило Н.Г. Формирование системности знаний в процессе обучения: Учебное пособие для учителей и студентов педагогических специальностей.- Новосибирск: Изд-во ГЦРО, 2002.- 56 с.

162. Шило Н.Г. Концептуально – методологические основы системности в деятельности учителя математики: монография/ Н.Г. Шило. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2009. – 320 с.

163. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Обучение математике в школе/Укрупнение дидактических единиц. Книга для учителя-2 изд. испр. и доп.-М.: АО «Столетие», 1996.- 320 с.

164. Юртанова Е.М. Теория и методика оценки качества математических знаний учащихся средних общеобразовательных учреждений:): автореф. дис…. канд. пед. наук. – Саранск, 2007. – 17 с.

165. Юртанова Е.М. Характеристика параметров качества знаний/ Е.М. Юртанова// Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: состояние, перспективы(методическая подготовка учителя математики в педвузе в условиях фундаментализации образования): материалы Всероссийской научной конференции. г. Саранск, 4-6 сентября 2005 г./ Под.ред. Г.И. Саранцева/ Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2005. - С.104-107.

166. Calculus, Ron Larson, 2010

167. Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Goh S., Cotter K. TIMSS 2015 encyclopedia: Education policy and curriculum in mathematics and science. 2016. URL : http://timssand-pirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia.

168. Mullis, I.V.S., Martin M.O. TIMSS 2019. Assessment Frameworks. 2017. URL : http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/.

169. The International Association for the Evaluation of Educational Achievement. URL: www.iea.nl.