

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»

(наименование кафедры)

01.04.02 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

(код и наименование направления подготовки)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему Математическая модель динамики численности экономически занятого населения

Студент

Д.А. Калашников

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

Г.А. Тырыгина

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Руководитель программы д.ф.-м.н. доцент, С.В. Талалов

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

(личная подпись)

« _____ »

20 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой к.т.н., доцент, А.В. Очеповский

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

(личная подпись)

« _____ »

20 г.

Тольятти 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1 АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ.....	8
1.1 Математическая модель миграционного процесса.....	8
1.2 Математическая модель численности трудоспособного населения с учетом уровня образования.....	10
1.3 Математическая модель региональной занятости и безработицы...	15
1.4 Математическая двухкомпонентная модель, описывающая динамику численности населения с учетом возрастной зрелости	17
1.5 Математическая модель с половозрастной структурой.....	20
1.6 Математическая модель половозрастной структуры с учетом образования брачных пар	21
1.7 Математическая модель возрастных групп, с учетом репродуктивной способности населения.....	25
1.8 Математическая модель динамики численности занятых с учетом капиталовложения региона в промышленность.....	26
1.8.1 Моделирование динамики капиталовложения региона в промышленность	27
1.8.2 Моделирование динамики численности экономически занятого населения.....	28
1.9 Математическая модель динамики численности экономически активного населения и иностранной рабочей силы	30
1.10 Математическая модель динамики численности возрастных групп, занятых в экономике	35
ГЛАВА 2 МОДЕЛЬ ЛОТКИ-ВОЛТЕРРА И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ	38
2.1 Типы взаимодействия популяций.....	38
2.2 Математическая модель Лотки-Вольтерра.....	39

2.3	Математическая модель «хищник-жертва» Колмогорова.....	43
2.4	Модифицированная математическая трехмерная модель Лотки-Вольтерра.....	45
2.5	Математическая «городская» модель Лотки – Вольтерра.....	46
2.6	Математическая модель «хищник-жертва» для конкурирующих популяций	47
2.7	Математическая модель миграционно-связанных популяций «хищник-жертва».....	50
2.8	Математические модели динамики мигрирующей популяции	52
2.8.1	Модель динамики численности миграционно-связанных популяций с непрерывным временем.....	53
2.8.2	Дискретная модель динамики численности связанных популяций.....	54
2.8.3	Модель «хищник-жертва», описывающая динамику численности популяций с учетом миграции хищников.....	55
2.9	Математическая модель трофических взаимодействий	57
2.10	Математическая модель с учетом влияния численности одной популяции на динамику другой популяции.....	60
2.11	Математическая модель динамики численности взаимодействующих популяций	62
2.12	Математическая модель динамики численности популяции с учетом плотностно-зависимых факторов.....	64
2.13	Математическая модель динамики численности двухвозрастной популяции	66
ГЛАВА 3 ПОСТРОЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИ ЗАНЯТОГО НАСЕЛЕНИЯ		68
3.1	Построение модели динамики численности населения.....	68
3.2	Реализация модели динамики численности населения.....	78
3.3	Результаты вычислений.....	84

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	87
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	90
ПРИЛОЖЕНИЕ А	97

ВВЕДЕНИЕ

Проблема занятости является одной из основных в современном обществе, т.к. она характеризует социально-экономическое развитие того или иного региона.

Экономически занятые — это лица в возрасте от 15 до 70 лет, которые выполняют работы за вознаграждение по найму, работают индивидуально или у работодателей, на собственном или семейном предприятии, а также временно отсутствующие на работе. Занятыми считаются те, которые работали в течение недели не менее 4 часов. Независимо от того, была ли это временная, постоянная, случайная, сезонная или другая работа.

Предпочтения работодателей, престижность работы, наличие вакансий, заработная плата, местоположение рабочего места, график работы, а также множество других факторов могут изменить численности занятых разновозрастных групп. Даже при сохранении стабильной общей численности трудящихся возможна ситуация с высокой безработицей лиц определенного возраста. Поэтому важно понимать, как будут развиваться и каково будет соотношение разновозрастных групп населения. Доминирование одной возрастной группы на ранке труда над другими возрастными группами, вероятнее всего, может негативно отразиться на экономическом развитии региона и качестве жизни населения. Этим и определяется актуальность данной работы.

Научная проблема заключается в том, что в рассматриваемой математической модели динамики численности экономически занятого населения, предложенной в работе [34], следует учитывать рождаемость, т.е. численность детей.

Цель исследования: Разработка и реализация математической модели динамики региональной численности экономически занятого населения.

Объект исследования: математические модели численности населения.

Предмет исследования: математические модели динамики численности экономически занятого населения.

Для достижения цели исследования сформулируем следующие задачи:

1. Осуществить анализ различных математических моделей динамики численности экономически занятого населения.
2. Осуществить анализ модели Лотки-Вольтерра и ее модификаций.
3. Построить и реализовать модель численности экономически занятого населения, на основе модели Лотки-Вольтерра.

Апробация работы была представлена на следующих конференциях:

- III Международная научно-практическая конференция (школе-семинаре) молодых ученых «Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук», Тольятти, 2017 г.
- IV Международная научно-практическая конференция (школе-семинаре) молодых ученых «Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук», Тольятти, 2018 г.

Научная новизна состоит в том, что была дополнена модель динамики численности экономически занятого населения, предложенная в работе [34].

Теоретические основы исследования включают использование трудов отечественных и зарубежных авторов по исследованию математической модели Лотки-Вольтерра и математических моделей численности экономически занятого населения.

Теоретическая значимость состоит в том, что в модель [34] добавлен учет численности детей.

Практическая значимость состоит в том, что рассмотренная модель динамики численности экономически занятого населения может оказаться полезной при анализе уровня занятости региона.

Достоверность обусловлена тем, что полученные результаты вычислений не противоречат статистическим данным.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Дополнение модели [34] уравнение учитывающее численность детей.
2. Дополнение, полученной модели, учетом образования брачных пар.
3. Программная реализация полученного алгоритма модели.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 96 страниц и содержит 13 рисунков, список литературы включает 46 наименований источников отечественных и зарубежных авторов.

В первой главе диссертации проводится анализ различных подходов к моделированию динамики численности экономически занятого населения.

Во второй главе проводится анализ модели Лотки-Вольтерра и ее модификаций.

В третьей главе описывается построение математической модели динамики численности экономически занятого населения и алгоритмы для ее решения. Программный продукт состоит из тела программы и функций, реализующих алгоритмы: математической модели, решения дифференциальных уравнений, а также адаптации коэффициентов модели к изменяющимся данным и вывода результатов расчета. Приводится результат компьютерного моделирования динамики численности экономически занятого населения.

В заключении описаны выводы результатов работы программного продукта.

В приложение находится листинг кода программного продукта.

ГЛАВА 1 АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ

1.1 Математическая модель миграционного процесса

Для любого государства важно рациональное размещение населения по регионам. Так как от этого зависят возможности развития экономики, сглаживание региональных противоречий и условия жизни будущего поколения. Знания закономерностей динамики миграционных процессов и умения управлять ими могут значительно повлиять на выработку стратегий экономической и демографической политики.

На процесс миграции влияет множество факторов, такие как наличие рабочих мест, уровень заработной платы, престижность работы и т.д. Также учитывается и фактор того, что участниками миграции являются люди, которые обладают собственными целями и интересами.

Рассматриваемая модель динамики численности населения позволяет учитывать факторы, описывающие экономические перспективы развития территории. Характеристики системы выражаются тремя переменными: ВВП — X , численность населения — Y и средние цены на первичном рынке недвижимости — Z .

Будем полагать, что выпускаемая продукция промышленности, идет на потребительские нужды населения или экспортируется.

Развитие территории описывается моделью (1.1), представляющей собой систему из трех нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= a_1 - a_2 Y - a_3 X, \\ \frac{dY}{dt} &= c_1 - c_2 X - c_3 Y - c_4 XZ, \\ \frac{dZ}{dt} &= d_1 XY - d_2 Z,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где a_i, c_j, d_k — положительные числа и $i + j + k = 9$; $i = 1,3$; $j = 1,4$; $k = 1,2$.

Коэффициент a_2 характеризует спрос на продукцию, которая производится на рассматриваемой территории. Параметр a_3 — уровень предложения продукции внутри территории. Первое уравнение системы (1.1) показывает, что если спрос превышает предложение, то производство расширяется, и наоборот. Параметр a_1 — скорость установления.

Второе уравнение системы описывает изменение численности населения, рассматриваемой территории. Коэффициент c_2 — спрос на труд со стороны фирм. Параметр c_3 задает отношение численности жителей, экономически занятых или находящихся в поиске работы, к общей численности населения.

Третье уравнение системы (1.1) построено на предположении о том, что изменения цены на недвижимость влияют на объем производимой продукции и численность населения данной территории.

Коэффициенты a_2 и a_3 рассчитываются по формулам ниже:

$$a_2 = \frac{\text{ВВП}}{Y}, a_3 = \frac{\text{конечное потребление домашних хозяйств}}{X}. \quad (1.2)$$

А параметр a_1 определяется из ранее найденных коэффициентов a_2 и a_3 и значения производной $\frac{dX}{dt}$:

$$a_1 = \frac{dX/dt}{a_2 Y - a_3 X}. \quad (1.3)$$

Коэффициенты c_2 и c_3 :

$$c_2 = \frac{\text{Эк. актив. нас.} + \text{Заявл. вакансии}}{X}, c_3 = \frac{\text{Эк. актив. нас.} + \text{Число безработ.}}{N}. \quad (1.4)$$

Значения коэффициентов, не определяющихся однозначно, таких как c_1 и c_4 , d_1 и d_2 , считая, что с течением времени не изменяются, находятся из условия минимизации отклонений между ними.

Разработанная модель миграции населения позволяет применить полученные результаты для эффективного функционирования экономики страны [10].

1.2 Математическая модель численности трудоспособного населения с учетом уровня образования

Долгосрочное прогнозирование баланса рынка труда на разных уровнях (регионального, отраслевого и т.д.) может повысить конкурентоспособность экономики страны и уровня жизни ее населения. Для этого необходимо построить модель, в которую входит прогнозирование трудовых ресурсов и самой экономики.

Построенная информационная система будет решать следующие задачи:

- прогнозирование потребности, в трудоспособном населении, исходя из моделируемых прогнозов экономического развития;
- формирование предложения по улучшению подготовки к профессиональному образованию и переквалификации трудоспособного населения для достижения баланса трудовых ресурсов;
- формирование предложений по уменьшению дисбаланса спроса и предложения на рынке труда за счет изменения инвестиционных потоков;
- оценка экономического развития.

Объектами изучения в данной системе это трудоспособное население, т.е. население, имеющее способности и специальные знания необходимые, чтобы трудиться в сфере услуг или для создания материальных благ. В России границы трудоспособного возраста от 15 до 72 лет. Трудовые ресурсы имеют количественные и качественные характеристики: показатели численности и состава населения (возраст, пол, общественные группы и т.д.), показатели образовательного уровня, профессионально квалификационной структуры и т.п.

Совокупный спрос, который рассмотрен в модели экономики, представляет собой сумму спросов всех макроэкономических агентов (федеральное правительство, макроэкономическое влияние, межрегиональное взаимодействие) на конечные товары и услуги. Выходные данные модели: потребность региона в трудовых ресурсах, реальные денежные доходы

населения, ВВП, индекс потребительских цен, заработная плата, совокупный спрос и предложения на продукцию всех ВЭД.

Схема этапов работы алгоритма представлена на рисунке 1.1:

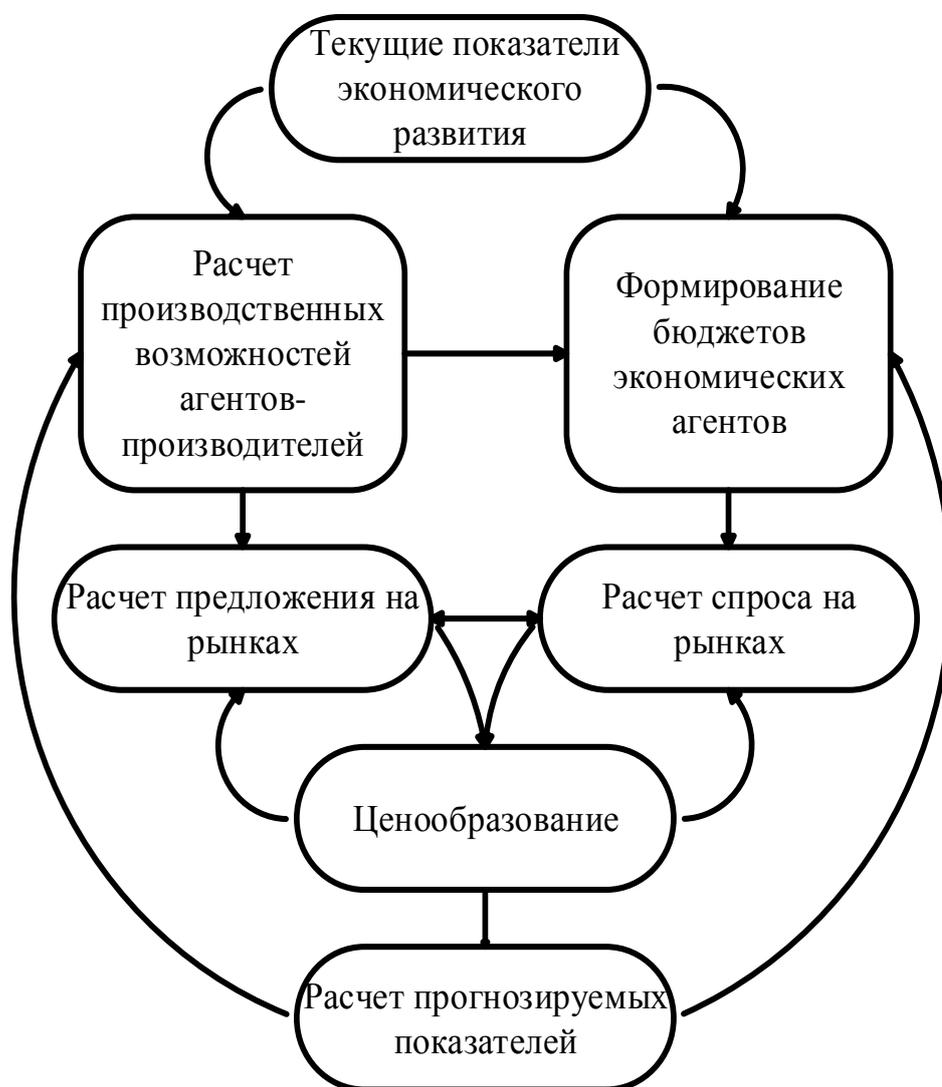


Рисунок 1.1 —Алгоритм работы модели

На каждом шаге расчета модели для каждого агента формируется бюджет в зависимости от его доходов, которые определяются из входящих в него потоков:

$$B_{i,t} = DB_{i,t-1} + Inc_t, \quad (1.5)$$

где $B_{i,t}$ — бюджет i -го экономического агента за шаг t ,

$DB_{i,t-1}$ — остаток от бюджета i -го экономического агента на конец года t ,

Inc_t — доходы, полученные i -м экономическим агентом в год t .

Предложение производителей формируется производственными возможностями конкретного агента и совокупностью спросов на конкретный товар, которое можно задать производственной функцией:

$$Y = F(K, L) = A * K^\alpha * L^\beta, \quad (1.6)$$

где Y — производственная выручка,

K — фонды,

L — средняя численность работников организации,

α, β — коэффициенты при вышеперечисленных факторах формирования предложения,

A — коэффициент технического прогресса.

Значение производственной функции Y показывает производство товаров, и оказание услуг за единицу времени (год). Параметры α, β нужны для корректировки, т.е. минимум квадратов ошибок полученных значений:

$$\min(\sum_{i=1}^k e_i^2) \rightarrow \min, \quad (1.7)$$

где k — количество наблюдений,

e_i — элементы матрицы отклонений вычисляемых значений от фактических.

Производство с одной стороны формирует бюджет организаций, а с другой является продуктом потребления. Расчет предложения товара представлен в виде следующей формулы:

$$S_{y,j,r,t} = Y_{j,r,t} * YDistr_{y,j,r,t}, \quad (1.8)$$

где $S_{y,j,r,t}$ — предложение j -м производителем товара y в регионе r в году t ,

$Y_{j,r,t}$ — выпуск j -м производителем в регионе r в году t ,

$YDistr_{y,j,r,t}$ — доля произведенной продукции.

Спрос на продукцию формируется по статьям расхода бюджета производителя, основанный на статических данных долей потребления. Для расчета спроса на продукцию или услугу рассчитываются доли бюджета. Полученные доли являются статическими параметрами. Формула формирования спроса:

$$DX_{j,r,t} = \frac{B_{j,r,t} * OX_{j,r,t}}{PX}, \quad (1.9)$$

где $DX_{j,r,t}$ — спрос j -го агента на продукцию «X» в регионе r в году t ,

$B_{j,r,t}$ — бюджет агента,

$OX_{j,r,t}$ — доля бюджета для покупки продукции X,

PX — цена на продукцию X.

Формирования цен внутри региона описывается следующим образом:

$$PY_{r,t} = PY_{r,t-1} + \frac{\sum_{j=1}^4 DY_{j,r,t} - \sum_{j=1}^3 SY_{j,r,t}}{C}, \quad (1.10)$$

где $PY_{r,t}$ — цена продукции «Y» в регионе r в году t ,

$DY_{j,r,t}$ — совокупный спрос j -х агентов,

$SY_{j,r,t}$ — совокупное предложение j -х агентов,

C — константа итерации.

При уменьшении константы итерации экономическая система быстрее уравнивается, но увеличивается шанс появления отрицательных цен.

После установления равновесных цен можно вычислять прогнозные значения рынка труда. Рассмотрим кадровую потребность организаций по ВЭД:

1) Следующее значение кадровой потребности вычисляется через предыдущее и индекса ее роста:

$$PT_t = PT_{t-1} * IndPT_t, \quad (1.11)$$

где PT_t — потребность в трудоспособном населении в году t ,

$IndPT_t$ — индекс потребности.

2) Индекс потребности вычисляется из разницы индекса роста выпуска товара, индекса прироста производительности труда и инфляции:

$$IndPT_t = IndY_t * \Delta IndPrTr_t - \Delta \frac{inf_t}{100}, \quad (1.12)$$

где $IndPT_t$ — индекс выпуска товара (отношение текущего и предыдущего показателей выпуска товара),

$\Delta IndPrTr_t$ — индекс производительности труда,

Δinf_t — значение инфляции.

Данный показатель инфляции меняется в пределах 5-7%. Хотя фактические рамки больше используемых, но они имеют свою погрешность. А также небольшие пределы изменений этого показателя может предотвратить сокращение сотрудников организаций, вызванных экономическим кризисом.

3) Индекс производительности труда:

$$IndPrTr_t = IndInv_t * IndInn_t, \quad (1.13)$$

где $IndInv_t$ — индекс инвестиционной привлекательности региона (отношение текущего и предыдущего значения поступивших инвестиций),

$IndInn_t$ — индекс ввода инноваций (отношение текущего и предыдущего объема используемых инноваций).

4) Расчеты построены на основе объема населения в регионах, таких факторах как: рождаемость, смертность, миграция и т.д., а также уровню образования:

$$n_i t = n_i t-1 + \sum_{j=1}^n b_{ij} t + \sum_{j=n+1}^{n+k} r_{ij} t + \sum_{j=1}^n d_{ij} t + \sum_{j=n+1}^{n+k} l_{ij} t, \quad i = 1, n, \quad (1.14)$$

где $n_i t$ — численность населения в состоянии i на конец периода t ,

$b_{ij} t$ — число переходов из состояния i в состояние j за период t ,

$r_{ij} t$ — численность мигрантов, которые перешли из состояния i в состояние j за период t ,

$d_{ij} t$ — число переходов из состояния j в i ,

$l_{ij} t$ — число выбытий из i в j ,

n — количество состояний (уровней образования),

k — число внешних источников пополнения по отношению к n .

Таким образом, созданный комплекс может прогнозировать экономические и социальные явления, помогает выявить причинно-следственные связи безработицы и размер заработной платы, дисбаланс рынка труда [8].

1.3 Математическая модель региональной занятости и безработицы

Одной из важнейших задач устойчивого развития региона является анализ динамики экономически занятых и безработных.

Рассматриваемые подходы к моделированию динамики численности экономически занятого населения (лица, имеющие какую-либо оплачиваемую работу) x , безработного населения (лица, которые не имеют работы, ищущие работу и готовы приступить в течение 2-х недель) y и экономически неактивного населения (учащиеся, лица получающие пенсию (по возрасту, инвалидности и т.д.) и другие) z , основаны на парных взаимодействиях. Эти взаимодействия xu, xz, yz описывают обмен информацией между разными группами населения, которые приводят к изменению численности данных групп.

Данную модель можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1 x + \eta_{12}xy + \eta_{13}xz, \\ \frac{dy}{dt} &= f_2 x + \eta_{21}yx + \eta_{23}yz, \\ \frac{dz}{dt} &= f_3 x + \eta_{31}zx + \eta_{32}zy,\end{aligned}\tag{1.15}$$

где η_{ij} — коэффициенты, которые описывают степень влияния одной группы на другую,

$f_1 x, f_2 x, f_3 x$ — функциональные зависимости, описывающие динамику населения ($i, j = 1, 3, i \neq j$).

Функциональные зависимости должны описывать динамику численности рассматриваемых групп, а взаимодействие групп населения моделироваться нелинейными членами.

Следовательно, функциональные зависимости будут иметь следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = p - Hu\tag{1.16}$$

где u — переменная, которая обозначает определенную группу населения,

t — переменная модельного времени (год),

p — показатель миграции,

H — параметр скорости изменения численности группы.

Для каждой рассматриваемой группы населения параметр H будет иметь свой смысл. Так, он будет больше отражать такие показатели, как рождаемость и смертность, для экономически неактивного населения. И обобщенно описывать баланс перехода населения между рассматриваемыми группами. Для остальных групп (занятые и безработные) он поможет «отслеживать» изменение экономической ситуации. Так, социально-экономическое положение зависит от потребности в трудовых кадрах, уровня заработной платы и т.д.

В итоге можно получить простую систему уравнений для обобщенного описания динамики групп населения:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p_1 - H_1 + \eta_{12}y + \eta_{13}z \quad x, \\ \frac{dy}{dt} &= p_2 - H_2 + \eta_{21}x + \eta_{23}z \quad y, \\ \frac{dz}{dt} &= p_3 - (H_3 + \eta_{31}x + \eta_{32}y)z,\end{aligned}\tag{1.17}$$

где x — численность экономически занятых,

y — численность безработных,

z — численность экономически неактивного населения,

t — переменная модельного времени (год),

p_i — показатель миграции,

H_i — параметр скорости изменения численности группы (при $i = 3$ включается и рождаемость),

η_{ij} — коэффициенты, которые описывают взаимодействие групп ($i, j = 1, 3, i \neq j$).

В рассматриваемом случае, если будет изменение численности происходить хаотично, то это будет следствием неблагоприятной ситуации на рынке труда или миграции (например, из-за стремления получить образование в другом населенном пункте).

Таким образом, полученная модель позволяет оценить социально-экономическую ситуацию региона при помощи социальных взаимодействий таких групп населения, как безработные, экономически неактивные и занятые. Поможет улучшить стратегии по регулированию безработицы из занятости [32].

1.4 Математическая двухкомпонентная модель, описывающая динамику численности населения с учетом возрастной зрелости

В настоящее время существует достаточно большое количество математических моделей для прогноза динамики численности населения.

При построении данных математических моделей, различные авторы используют свои идеи и принципы их построения. Так, например, анализируя динамику народонаселения всей Земли, часто используют принцип замкнутой системы. Данный принцип используется, когда на систему не действуют внешние факторы, а только те, что используются в модели. Принцип замкнутой системы используют не только для описания численности всей Земли, но и для страны, отдельного региона и т.д. Но помимо не включенных факторов, в таких системах не используют показатели миграции. Ведь учет миграционных процессов в модели динамики численности соответствует принципу открытой системы.

Другие используют биологические модели, где динамика численности популяции определяется процессами воспроизводства. В таких моделях факторы, влияющие на демографические процессы (например, уровень жизни населения и т.д.), учитываются введением соответствующих коэффициентов модели, характерных только для биологических популяций (такие как, рождаемость, смертность и т.д.). Иногда в таких моделях динамика численности (рождаемость и смертность) учитывается не коэффициентами, а функциями.

В моделях мировой динамики используют также принцип ограниченности ресурсов. В необходимы для описания последствий роста численности населения, нехватки пищи или ресурсов, загрязнение окружающей среды.

Иногда в моделях рост населения Земли зависит только от внутренних свойств системы, такие системы соответствуют принципу отсутствия внешних факторов.

Часто модели описания динамики численности населения являются комплексными, т.е. несколько принципов одновременно.

Для описания динамики численности населения используют дифференциальные или разностные уравнения, или даже систему таких уравнений. В таких моделях изначально добавляются основные факторы, влияющие на демографические процессы, чтобы отследить, какие факторы влияют на динамику численности населения.

Разделим численность населения на две группы «неполовозрелую» и «половозрелую». Такое разбиение необходимо для учета репродуктивной способности человека, т.е. способность человека к воспроизводству (деторождению). В неполовозрелую группу входят дети, т.е. люди в возрасте 0-15 лет, а в половозрелую — входят взрослые, т.е. люди старше 15 лет. Хотя такое разбиение весьма условно, потому что люди в возрасте младше 18 лет и старше 45 лет приносят не большой вклад в пополнение численности населения.

За один шаг модельного времени (год) часть населения из группы детей переходит в следующую группу (взросление). Динамика численности группы взрослых определяется смертностью взрослых и пополнением численности группы взрослых детьми, т.е. переходом людей из группы детей в группу взрослых. Основными факторами, которые влияют на численность населения являются рождаемость и смертность. Будем считать, что уровень смертности постоянен, а на процесс рождаемости влияет как численности группы взрослых, так и детей. И так, динамика численности может быть описана следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a x_n y_n y_n + dx_n, \\y_{n+1} &= sx_n + vy_n,\end{aligned}\tag{1.18}$$

где x — численность группы детей,

y — численность группы взрослых (экономически занятые),

n — показатель времени (год),

$a(x, y)$ — коэффициент рождаемости,

d — коэффициент, описывающий часть группы детей, которая остается в своей группе,

s — коэффициент перехода группы детей в группу взрослых,

v — коэффициент смертности взрослых.

Сформулируем следующие ограничения для коэффициентов системы:

$$a(x, y) > 0, 0 < d \leq 1, 0 < s \leq 1, 0 < v \leq 1\tag{1.19}$$

Помимо этого, будет считать, что в модели используется принцип замкнутой системы, поэтому справедливо $s + d \leq 1$. Данное предположение приводит к тому, что в модели пренебрегаются процессы миграции.

Функция a выглядит следующим образом:

$$a(x, y) = a \cdot e^{-\alpha \cdot x - \beta \cdot y},\tag{1.20}$$

где a — максимальное значение репродуктивной способности людей,

α — коэффициент, отражающий снижение рождаемости из-за роста численности группы детей.

Увеличение значения x , показывает, что больше людей и в большем количестве из группы взрослых имеют детей. А также снижается репродуктивность людей, т.е. снижается значение функции рождаемости a . Подобное поведение функции a можно описать так, что все большее количество взрослых, имея одного или двух детей, направляет свои силы и внимание на воспитание потомства и отказываются от рождения новых. Величина β описывает ситуацию, когда семейная пара отказывается от рождения ребенка из-за каких либо причин. Она определяется такими факторами как: состояние здоровья, соотношением количества мужчин к количеству женщин и т.д., а также социальными,

экономическими и психологическими факторами (например, нехватка денежных средств).

Данная модель хоть и проста, но вполне может быть использована для описания демографических процессов [9, 14].

1.5 Математическая модель с половозрастной структурой

Формирование половой структуры с сопутствующим процессом определяет показатель выживаемости. А в случае полигамных отношений характер динамики численности связан с параметром образования брачных пар.

Такая постановка задачи позволяет качественно описать изменение динамики численности в зависимости от уровня различий в показателях выживаемости полов.

Динамика численности рассматривается совокупностью трех групп: дети, женщины и мужчины. Модель с данными положениями имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= r \cdot F_n, \\ F_{n+1} &= \delta w_1 P_n + s_1 F_n, \\ M_{n+1} &= (1 - \delta) w_2 P_n + s_2 M_n, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где n — модельное время (год),

P — численность детей,

F, M — численность женщин и мужчин, участвующих в размножении,

r — коэффициент рождаемости,

δ — доля детей женского пола,

w_1, w_2 — коэффициенты выживаемости детей женского и мужского полов, соответственно,

s_1, s_2 — коэффициенты выживаемости женщин и мужчин.

Будем предполагать, что значение коэффициента рождаемости r зависит от соотношения численностей женщин и мужчин, тогда:

$$r = \frac{aM}{hF+M}, \quad (1.22)$$

где a — максимальный возможный коэффициент показатель рождаемости или репродуктивный потенциал, т.е. максимальное количество детей, которое может родить одна женщина,

h — параметр, характеризующий тип брачных отношений.

Предполагается, что показатели выживаемость детей чувствительны к численности:

$$w_1 = 1 - \beta_1 P, w_{1\setminus 2} = 1 - \beta_2 P \quad (1.23)$$

где β_1, β_2 — коэффициенты, описывающие интенсивность конкуренции.

Учитывая, что выживаемость половозрелых людей не зависит от пола ($s_1 = s_2 = s$) и формулы выше, получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{aM}{hF+M} \cdot F_n, \\ F_{n+1} &= \delta(1 - \beta_1 P_n)P_n + sF_n, \\ M_{n+1} &= (1 - \delta)(1 - \beta_2 P_n)P_n + sM_n, \end{aligned} \quad (1.24)$$

Получившиеся модель довольно проста и дает возможность проследить формирование половозрастной структуры, а также учесть разное влияние каждого из пола на численность населения [30].

1.6 Математическая модель половозрастной структуры с учетом образования брачных пар

Демографические процессы влияние на развитие социальной инфраструктуры, образования, здравоохранения и т.д. Динамика численности определяется, прежде всего, показателями рождаемости и смертности, которые зависят от совокупности различных факторов. Например, демографических: половозрастной структуры, состояния в браке; экономических: уровень заработной платы, наличие жилья; социальных: уровень образования, личностные ценности.

При построении модели используется разделение населения на возрастные группы, с целью выделить население способное к репродукции. В связи с этим динамика численности может быть представлена совокупностью

следующих групп: дети, женщины и мужчины репродуктивного (участвовавшие в воспроизводстве населения) и пострепродуктивного (не участвующие в воспроизводстве населения) возрастов. Будем считать, что репродуктивный возраст для человека составляет период с 16 до 49 лет. Основные факторы, влияющие на численность — рождаемость, т.е. увеличение группы детей; выживаемость и переход части людей из одной группы в следующую, в соответствии с полом человека.

Динамика численности населения с учетом вышеописанных групп может быть описана системой разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= r \cdot f_n + s_1 \cdot x_n, \\
 f_{n+1} &= g_1 \cdot b_n + s_2 \cdot f_n, \\
 m_{n+1} &= g_2 \cdot b_n + s_3 \cdot m_n, \\
 F_{n+1} &= g_3 \cdot f_n + s_4 \cdot F_n, \\
 M_{n+1} &= g_4 \cdot m_n + s_5 \cdot M_n,
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

где n — модельное время (год),

b — численность детей,

f, m — численность женщин и мужчин репродуктивного возраста,

F, M — численность женщин и мужчин пострепродуктивного возраста,

r — коэффициент рождаемости,

g_i — часть людей, перешедшая в следующую группу,

s_i — часть людей, оставшаяся в своей группе ($i = 1,4; j = 1,5$).

Для коэффициентов существуют следующие условия: $s_1 + g_1 + g_2 \leq 1, s_2 + g_3 \leq 1, s_3 + g_4 \leq 1, s_j > 0, g_i > 0$. А выражения $d_b = 1 - s_1 + g_1 + g_2, d_f = 1 - s_2 + g_3, d_m = 1 - s_3 + g_4$ — описывают убыль численности соответствующей группы.

В модели (1.25) число родившихся зависело от числа женщин репродуктивного возраста, без учета численности мужчин репродуктивного возраста. Для описания влияния обоих полов на воспроизводство используем модель, в которой рождаемость зависит от образования пар (мужчина и женщина) репродуктивного возраста. Введение функции образования пар

позволить смоделировать рождение детей в зависимости от наличия не только женщин, но и мужчин. Поскольку женщины могут родить только при наличии брачного партнера, тогда вероятность рождения ребенка задается отношением женщин имеющих партнера c (или количество образованных пар) к общему числу женщин репродуктивного возраста f , т.е. $\delta = c/f$.

Если предположить, что брачные пары образуются из всех женщин и мужчин, т.е. рассматривается функция минимума:

$$c_n = \min(f_n, m_n) \quad (1.26)$$

Тогда количество новорожденных:

$$b_n^0 = a \min(f_n, m_n) \quad (1.27)$$

где a — коэффициент рождаемости, при образовании пары, т.е. количество детей приходящихся на одну пару.

Данная функция будет полезна только при гендерной сбалансированности, по крайней мере репродуктивных групп. Количество пар тогда:

$$c_n = 2f_n m_n / (f_n + m_n). \quad (1.28)$$

Но в течение жизни человек может вступить в брак и развестись не один раз, одна женщина может родить детей от разных мужчин так же, как один мужчина может иметь детей от разных женщин. В связи с этим имеет смысл рассматривать функцию среднего гармонического не для моногамной, а для полигамной системы семейных отношений:

$$c_n = 2f_n m_n / \rho f_n + m_n, \quad (1.29)$$

где f и m — число женщин и мужчин репродуктивного возраста,

ρ — коэффициент, учитывающий асимметрию полов (гендерный дисбаланс) и в некоторой степени характеризующий тип брачных отношений.

Если $\rho = 1$, то тип отношений — «моногамия»; при $\rho < 1$ — «многоженство» (женщины численно превосходят мужчин, что создает условия для выбора одной жены из нескольких), при $\rho > 1$ — «многомужество» (в этом случае

мужчин больше, чем женщин, в связи с этим женщина выбирает себе брачного партнера из нескольких мужчин). Тогда, число новорожденных число новорожденных находится следующим образом:

$$b_n^0 = \frac{2a f_n m_n}{(\rho f_n + m_n)}. \quad (1.30)$$

Значение коэффициента a может быть найдено по функции $\min(f_n, m_n)$, s_1 из уравнения линейной регрессии величины $(b_{n+1} - b_n^0)$ как функции от b_n, s_2, s_3, s_4, s_5 из уравнений линейной регрессии количества умерших людей соответствующей группы. Но так как s_2, s_3 отражают не только смертность, но вероятность перехода в следующую группу, то из них нужно вычесть g_3, g_4 , соответственно. Коэффициенты g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) можно получить из уравнений линейной регрессии величины $(x_{n+1} - s_{i-1} x_n)$ как функции от x_n , где x — численность соответствующей половозрастной группы.

Задача оценки коэффициентов модели заключается в том, чтобы подобрать такие значения a и ρ , при которых последовательность b_n^{0*} (вычисляемая численность новорожденных) лучше всего аппроксимирует b_n^0 .

Численность экономически занятых непосредственно оказывает влияние на рождаемость. Поэтому будем учитывать численность занятых при вычислении показателя рождаемости. Тогда функция рождаемости имеет следующий вид:

$$b_n^0 = 2\alpha e^{\beta p_n} \frac{2a f_n m_n}{(\rho f_n + m_n)}. \quad (1.31)$$

где p_n — количество женщин репродуктивного возраста занятых в экономике,

α — минимальное значение рождаемости,

β — доля числа занятых.

Модель прогнозирования динамики численности населения выбранных возрастных групп с учетом численности мужчин репродуктивного возраста:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= 2\alpha e^{\beta P_n} \frac{2a f_n m_n}{(\rho f_n + m_n)} + s_1 \cdot b_n, \\
f_{n+1} &= g_1 \cdot b_n + s_2 \cdot f_n, \\
m_{n+1} &= g_2 \cdot b_n + s_3 \cdot m_n, \\
F_{n+1} &= g_3 \cdot f_n + s_4 \cdot F_n, \\
M_{n+1} &= g_4 \cdot m_n + s_5 \cdot M_n,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Таким образом, разработана модель динамики численности, учитывающую половозрастную структуру населения, влияние занятого населения на показатели рождаемости, а также влияние образования пар (мужчина-женщина) на воспроизводство населения [19].

1.7 Математическая модель возрастных групп, с учетом репродуктивной способности населения

Процесс воспроизводства зависит от долговременных тенденций изменения социально-экономических факторов, поэтому будем считать, что коэффициент рождаемости не изменяется в краткосрочной перспективе.

В качестве искоемых переменных модели рассматриваются три возрастные группы: дети, численность населения репродуктивного и пострепродуктивного возраста. Динамика численности данных возрастных групп описывается следующей моделью, которая представляет собой систему линейных разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
x_1 \ n + 1 &= s_2 x_2 \ n - b_1 x_1 \ n \\
x_2 \ n + 1 &= a_1 x_1 \ n - b_2 x_2 \ n \\
x_3 \ n + 1 &= a_2 x_2 \ n - b_3 x_3 \ n
\end{aligned} \tag{1.33}$$

где x_1 — численность детей,

x_k — численность k -й группы экономически занятого населения ($k = 2,3$),

i — номер группы ($i = 1,3$),

s — коэффициент рождаемости,

a_j — часть населения, которая перешла в следующую группу ($j = 1,2$),

b_i — часть населения, которая остается в своей группе.

Коэффициенты a и b имеют следующие ограничения:

$$a + b \leq 1, a > 0, b > 0 \quad (1.34)$$

Численность населения в данной модели стабилизируется при выполнении следующего равенства:

$$\frac{1-b_1}{a_1} \frac{1-b_2}{s_2} = 1 \quad (1.35)$$

Данная модель дает неплохие результаты, которые помогут в анализе закономерностей демографической динамики [15].

1.8 Математическая модель динамики численности занятых с учетом капиталовложения региона в промышленность

Модель динамики территории (региона) модель может помочь в проведении комплексной оценки социально-экономического состояния территории (региона), анализе региональных проблем, разработки подходов к региональному развитию.

Пусть развитие общества описывается следующими глобальными переменными: P — численность населения, V — капитал региона (капиталовложение в промышленность и сельское хозяйство).

При моделировании региональной системы рассматриваются блоки экономики и блок народонаселение. Каждый блок — это отдельная подсистема, в которых глобальные переменные P и V следует заменить на переменные, которые описывают соответствующий блок. Поэтому необходимо анализировать не переменную численности, а изменение численности социальных, возрастных, профессиональных и других групп. Вместо переменного капитала нужно рассмотреть отраслевую региональную динамику. Сельскохозяйственный капитал необходимо включить в блок экономики, как и другие отрасли. Такая структура модели приведет к необходимости учета различий в конкурентоспособности различных отраслей, качестве жизни и материальном уровне различных групп населения.

1.8.1 Моделирование динамики капиталовложения региона в промышленность

В модели динамики капитала, рассматривается приращение капитала:

$$\Delta V = V_2 - V_1, \quad (1.36)$$

где V_1 и V_2 — разнонаправленные показатели изменения уровня капитала, т.е. одна из них увеличивает, а другая уменьшает величину приращения.

Будем считать, что объем капитала вложений в промышленность региона зависит от численности населения P , занятого в рассматриваемой сфере:

$$V_2 = C_V V_M P, \quad (1.37)$$

где C_V — скорость роста капитала,

V_M — коэффициент, изменения скорости C_V , который зависит от социально-экономических факторов, например, от изменения материального уровня жизни.

Уменьшение капитала вложений в промышленность связана с износом основных фондов:

$$V_1 = E_V V \quad (1.38)$$

Где E_V — скорость износа основных фондов, а среднее «время жизни» капитала $T_V = 1/E_V$ будем считать постоянным.

При рассмотрении данной структуры модели, существуют различия в исследовании мировой и региональной динамик. Во-первых, для рассмотрения региона динамические процессы требуют более детального описания, чем мировые. Так как региональные процессы предполагают решение более детализированных задач. Во-вторых, регион — открытая система, поэтому она может быть описана только с учетом ввозимых и вывозимых ресурсов и капиталов в пределах региона.

Открытость региона, в частности, означает, что отрасли хозяйства взаимодействуют с другими регионами, это позволяет рассматривать каждую отрасль региона отдельно от других.

Тогда вместо одного уравнения описывающего блок капитала, следует, рассматривать ряд уравнений, характеризующих динамику капитала. Динамика капитала отрасли описывается уравнением:

$$dV/dt = C_2 - C_1 P - E_2 - E_1 V. \quad (1.39)$$

Сделаем замену:

$$C_2 - C_1 = C, E_2 - E_1 = Y, \quad (1.40)$$

Годовое изменения уровня капитала -ой отрасли, учитывая формулы (1.36) – (1.38), описываются следующим образом:

$$\Delta V_j = C_{Vj} P_{Vj} P - E_{Vj} V_j, \quad (1.41)$$

где C_{Vj} — скорость изменения капитала в -ой отрасли,

P_{Vj} — численность экономически занятого населения в -ой отрасли,

E_{Vj} — убыль капитала.

При этом: значение C_{Vj} будет определяться помимо процессов регионального воспроизводства капиталов, но и внутриотраслевыми инвестициями; E_{Vj} будет связан помимо износа и с оттоком его из отрасли, а «время жизни» капитала $T_{Vj} = 1/E_{Vj}$, будет зависеть от развития рассматриваемой отрасли; сельское хозяйство войдет в блок экономики как одна или несколько отраслей и т.п.

Предложенные уравнения позволяют исследовать динамику отраслевых фондов.

1.8.2 Моделирование динамики численности экономически занятого населения

Для исследования изменения численности экономически занятого населения воспользуемся следующим уравнением:

$$dP/dt = (b_2 - b_1) - (a_2 - a_1)P, \quad (1.42)$$

где b_2 — скорость увеличения численности работников из-за миграции,
 b_1 — скорость уменьшения численности работников из-за миграции,
 a_2 — скорость уменьшения численности работников из-за смертности,
перехода населения из группы занятых в категорию экономически
неактивного и т.п.,
 a_1 — скорость увеличения численности работников вследствие перетока
части населения из категории экономически неактивного (например,
учащиеся студенты или лица, получающие пенсию по той или иной
причине, начали работать).

При замене:

$$b_2 - b_1 = b, a_2 - a_1 = a, \quad (1.43)$$

получаем следующее уравнение:

$$\Delta P_{vj} = b_{vj} - a_{vj} P_{vj}, \quad (1.44)$$

где b_{vj} — коэффициент потребности работников в -ой отрасли,

a_{vj} — убыль числа занятых из -ой отрасли.

Уравнение (1.44) можно преобразовать следующим образом:

$$\Delta P_{vj} = a_{vj} (P_{vj} - P_{vj}), \quad (1.45)$$

где $P_{vj} = b_{vj} / a_{vj}$ — «равновесная» численность занятых людей в экономике
для -ой отрасли.

Если P_{vj} не зависит от времени и $a_{vj} < 2$, тогда численность занятых людей в
экономике для -ой отрасли приближается к значению P_{vj} . Но число работников
меняется из года в год, поэтому согласно (1.44) требуемая численность
работников будет «отслеживать» P_{vj} с запаздыванием $T = 1/a_{vj}$. Используя
короткий ряд, приходится считать что величина P_{vj} постоянна, но которая
может стать источником существенных погрешностей.

Данная модель динамики численности населения, улавливает основные
тенденции и приводит к приемлемым качественным и количественным
результатам, характеризующим изменения численности экономически занятого
населения по отраслям.

Общая модель динамики факторов производства со слабыми межотраслевыми связями:

$$\begin{aligned}dP/dt &= (b_2 - b_1) - (a_2 - a_1)P, \\dV/dt &= C_2 - C_1 P - E_2 - E_1 V,\end{aligned}\tag{1.46}$$

Для возможности анализа данных моделей, рассмотрим аппроксимацию уравнений динамики капитала (1.39) и динамики численности экономически занятого населения (1.44), получившиеся система уравнений, имеет вид:

$$\begin{aligned}P &= -aP + b, \\V &= CP - EV,\end{aligned}\tag{1.47}$$

где P — численность экономически занятого населения,

V — капитал отрасли,

a, C, E — параметры модели.

Система (1.40) имеет единственное положение равновесия:

$$P = \frac{b}{a}, V = \frac{bC}{aE},\tag{1.48}$$

При такой модели не ставится задача детального описания динамических процессов и их взаимосвязи, однако может служить базой для других исследований. Или использоваться для изучения закономерностей социально-экономических процессов при рассмотрении на коротких временных рядах [31].

1.9 Математическая модель динамики численности экономически активного населения и иностранной рабочей силы

Разработка стратегий социально-экономического развития территории (региона) тесно связана с анализом модели динамик численности экономически неактивного населения и иностранной рабочей силы. Одним из аспектов занятости является изучение влияния рабочих мигрантов на динамику численности экономически занятого населения.

Реализуемый подход к моделированию динамики численности базируется на принципе парных взаимодействий.

В построении модели используются следующие допущения:

- Численность занятых пополняется от самой численности занятых и численности безработных, в последствии их трудоустройства;
- Численность рабочих растет без взаимного влияния численностей местной и иностранной;
- Для экономически занятого населения характерен эффект, когда рост населения опережает производство продуктов питания, и рост потребностей населения в труде опережает спрос на рабочую силу, формирующиеся на рынке труда («мальтузианская ловушка»);
- Каждый год некоторое постоянное количество занятых переходит в категорию безработных.

Система динамики имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= b_1x - a_1xy + c_1z - k_1x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_2y - a_2xy - k_2y^2, \\ \frac{dz}{dt} &= b_3x - c_2z,\end{aligned}\tag{1.49}$$

где x — численность экономически занятого местного населения,

y — численность экономически занятых мигрантов,

z — численность безработных,

t — модельное время (год),

a_1, a_2 — коэффициенты взаимодействий групп,

b_1, b_2 — коэффициенты роста численности мигрантов и местных,

c_1 — коэффициент трудоустройства безработных,

k_1, k_2 — коэффициенты, описывающие эффект, когда рост населения опережает рост производства,

b_3 — коэффициент безработицы,

c_2 — коэффициент сокращения безработицы.

Степень влияния группы экономически занятого населения на рабочих мигрантов, и наоборот, описываются коэффициентами a_1 и a_2 . Если $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$, то тип взаимоотношений групп — конкуренция, например, из-за

создания рабочих мест для рабочих мигрантов, создание рабочих мест для местных жителей тормозится (выделяется меньше), и наоборот. Если $a_1 < 0$ и $a_2 < 0$, то тип взаимоотношений групп — партнерство, например, при создании рабочих мест для рабочих мигрантов, увеличивается занятость. При различных знаках коэффициентов a_1 и a_2 , т.е. если $a_1 a_2 < 0$, то одна из групп (занятых и мигрантов) имеет преимущество в конкурентной борьбе. Например, если $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$, то привлечение рабочих мигрантов стимулирует рост числа местного экономически занятого населения, но из-за этого роста удерживается создание мест для мигрантов. И наоборот, $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$, то рост занятого населения в экономике в лице местных жителей стимулирует рост рабочих мигрантов, но из-за роста мигрантов, мигранты вытесняют местное рабочее население. Отношение a_1/a_2 показывает относительную степень влияния местного экономически занятого населения на привлечение рабочих мигрантов, т.е. работодатели предпочитают нанимать местных жителей, вместо мигрантов или наоборот. Отношение a_1/a_2 показывает не численность занятых, а прирост (вытеснение) одной группы другой (мигрантами местных, или наоборот).

Немаловажным фактором конкуренции является социальная напряженность населения (внутренняя конкуренция), которая оказывает существенное влияние на привлечение рабочих мигрантов и динамику занятости в целом. Внутреннюю конкуренцию можно объяснить тем, что при демографическом росте населения может не хватать на всех людей рабочих мест, рост численности населения может опередить улучшение качества жизни его, что приведет к естественному ограничению числа рождаемости, так называемая «мальтузианская ловушка». Резкий рост занятости без изменения емкости рынка труда (количества необходимых работников) может привести к снижению заработной платы, замедлению роста занятости или ухудшению условий труда. По отношению к рабочим мигрантам коэффициент «самолимитирования» (самоограничения) означает и жесткость квотирования (ограничение на рабочие места), т.е. чем больше мигрантов не смогли получить

работу из-за квот, тем выше степень жесткости квотирования. Внутривидовая конкуренция в данной модели описывается коэффициентами k_1 и k_2 . Данные коэффициенты могут быть отрицательными, т.е. можно говорить, что в k_1x^2 и k_2y^2 численность из-за парного взаимодействия (привлечение новых работников посредством социальных сетей), вместо сокращения числа работников (сокращение числа занятых при конкурентной борьбе). Коэффициенты k_1 и k_2 могут выражать, также и степень привлекательности региона.

Для сравнения коэффициентов k_1 и k_2 , достаточно рассмотреть отношение k_1/k_2 . Чем ближе отношение k_1/k_2 к нулю, тем жестче квотирование из-за усилий власти и бизнеса к ограничению компонентов рынка труда. Если $k_1/k_2 = 1$, то, при близости значений b_1 и b_2 , местные и мигранты имеют равный спрос у работодателей.

Важным показателем развития рынка труда является способность экономики региона обеспечить определенное количество рабочих мест (емкость экономической ниши). Данный показатель для экономически занятого населения можно вычислить как $N = b_1/k_1$, а для работающих мигрантов $M = b_2/k_2$. Чем больше значения N и M , тем больше рабочих мест может быть создано в регионе. Коэффициенты рабочих мест для местного населения и мигрантов не всегда легко определить, поэтому будем рассматривать их отношение N/M , которое показывает приоритетность экономических ниш для мигрантов и местных жителей. Если $N/M > 1$, то на рынке труда возможное количество рабочих мест для местных жителей больше, чем для мигрантов, и наоборот в случае $N/M < 1$. Допустим, что максимальное значение отношения является $N/M = 10$, т.е. экономика региона «готова» дать работу мигрантам, доля которых составляет 10% от численности местного экономически занятого населения. Если $N/M < 10$ рынок труда стремится повысить численность работающих мигрантов, а при $N/M > 10$ означает достаток трудовых ресурсов.

Следует полагать, что конкурентная борьба между местными и мигрантами возникает в условиях дефицита трудовых ресурсов, поэтому важно рассматривать отношение скоростей роста численностей b_1/b_2 . Если $b_1/b_2 > 1$, то объем привлечения мигрантов ниже скорости обновления трудовых ресурсов, и, наоборот, при $b_1/b_2 < 1$. Если $b_1 < 0$, то молодые специалисты не восполняют количество убывшего экономически занятого населения вследствие миграции, смерти или ухода на пенсию. А если $b_2 < 0$, потеря интереса мигрантов к данной территории. И так, данная модель описывает динамику социально-экономической ситуации с учетом демографических тенденций через коэффициенты взаимодействия между местными и мигрантами, действия социальных сетей для привлечения работников, социальной напряженности, скорости обновления трудовых ресурсов и уровня безработицы.

В системе (1.49) существуют четыре особые (покоя) точки:

$$\begin{aligned}
 A \quad & 0; 0; 0, \quad B \quad 0; \frac{b_2}{k_2}; 0, \quad C \quad \frac{b_1 c_2 + b_3 c_1}{c_2 k_1}; 0; \frac{b_3^2 c_2 + b_3 b_1 c_2}{c_2^2 k_1}, \\
 D \quad & \frac{b_1 c_2 k_2 - a_1 b_2 c_2 + b_3 c_1 k_2}{a_1 a_2 c_2 - c_2 k_1 k_2}, \frac{a_2 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - b_2 c_2 k_1}{a_1 a_2 c_2 - c_2 k_1 k_2}, \\
 & \frac{b_3^2 c_1 k_2 - a_1 b_2 b_3 c_2 + b_1 b_3 c_2 k_2}{a_1 a_2 c_2^2 - c_2^2 k_1 k_2}, \quad (1.50)
 \end{aligned}$$

Каждая из точек (1.50) соответствует определенному состоянию развития территории.

Точка A означает отсутствие перспектив освоения территории (отдаленная территория, высокий уровень загрязнения или отсутствием ресурсов), B — превращение региона в сырьевой придаток (ресурсы добывают только мигранты), C — иностранная сила не используется, D — развитие территории происходит благодаря работающим мигрантам. Таким образом, система (56) может описывать ситуации, когда на данной территории, работают только мигранты или только местные, и когда работают как местные, так и мигранты.

Выше сказано, что коэффициенты b_1 и b_2 описывают скорость роста занятости местных и мигрантов в экономике. Соотношение данных коэффициентов дают, следующие ситуации:

а) $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$ — регион является привлекательным как для местных, так и для мигрантов.

б) $b_1 > 0$ и $b_2 < 0$ — в регионе развиваются те отрасли экономики, которые привлекательны только для местных.

в) $b_1 < 0$ и $b_2 < 0$ — регион не привлекателен как для мигрантов, так и для местных.

г) $b_1 < 0$ и $b_2 > 0$ — в регионе развиваются те отрасли экономики, которые привлекательны только для мигрантов.

В рассматриваемой модели отсутствует влияние работающих мигрантов на уровень безработицы, но существуют варианты управления динамикой численности работающих мигрантов и местного экономически занятого населения. Изменение социально-экономической ситуации может качественно повлиять на численность работающих мигрантов, вплоть до их полного вытеснения.

Предложенная модель может помочь в анализе экономической ситуации рынка труда, детализировать или дополнить экспертный анализ [35].

1.10 Математическая модель динамики численности возрастных групп, занятых в экономике

Анализ и прогноз динамики численности экономически занятого населения является весьма актуальным. Дефицит работников существенно усложняет и ограничивает возможности социально-экономического роста. В рамках такой задачи предлагается математическая модель динамики численности экономически занятого населения в разрезе возрастных групп с

учетом их взаимодействий, которые рассматриваются при взаимодействии популяций, такие как: помощь, конкуренция, угнетение, дискриминация и т.п.

Для анализа экономической и демографической динамики необходимо выделить комплексный показатель, которым является уровень занятости L :

$$L_i = x_i/p_i \quad (1.51)$$

где x_i — численность экономически занятого населения,

p_i — общая численность населения,

i — номер возрастной группы.

Чем ближе доля экономически занятой группы населения к единице, тем больше людей определенного возраста занято в экономике и меньше резерв трудовых ресурсов.

Прогноз уровня занятости и его анализ важен для планирования стратегий социально-экономического развития территории. Так как экономические и демографические процессы связаны с социально-экономическими процессами. Так, например, численность работников зависит от потребностей в трудовых ресурсах, а численность населения зависит от качества жизни (здравоохранения, уровня заработной платы и т.д.). Поэтому уровень занятости необходимо вычислять комбинацией моделей динамики численности населения и экономически занятых.

Для описания численности экономически занятого населения используется модель экономически занятых разновозрастных групп с учетом социальных взаимодействий (социально-экономические механизмы, которые способны вызвать изменение численности разновозрастных групп):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= b_1 + (K_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= b_2 + (K_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3)x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= b_3 + (K_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2)x_3 \end{aligned} \quad (1.52)$$

где x_i — численность экономически занятого населения,

t — момент времени (год),

b_i — коэффициенты миграционных движений,

K_i — коэффициенты смертности, перехода в следующую группу и переток численности населения между экономически занятым и экономически неактивным населением,

α_i — коэффициенты влияния одной когорты на другую,

i — номер возрастной группы ($i = 1, 2, 3$).

Современная экономическая ситуация характеризуется неустойчивостью из-за глобальных финансовых кризисов. А также социально-экономических факторов, например, уровень жизни, экономическая стабильность, которые тоже будут влиять на уровень занятости и миграционную активность [36, 37].

В данной главе были проанализированы различные подходы к построению модели динамики численности экономически занятого населения. Рассмотренные модели в данной главе учитывают различные факторы, влияющие на динамику численности экономически занятого населения, такие как уровень образования, коэффициенты взаимодействия занятого населения с безработным населением, иностранными работниками или разных возрастов.

ГЛАВА 2 МОДЕЛЬ ЛОТКИ-ВОЛТЕРРА И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ

Базовой и первой моделью динамических систем, для описания динамики численности, является модель Лотки-Вольтерра «хищник-жертва», которая была первоначально предложена Альфредом Дж. Лоткой в теории автокаталитических химических реакций в 1910 году. В 1920-е годы, итальянский математик Вито Вольтерра предложил модель дифференциальных уравнений, описывающих динамику численности двух взаимодействующих вида, хищник и его жертва. Он надеялся объяснить увеличение хищных рыб (и соответственно, уменьшение рыб жертв) в Адриатическом море во время Первой мировой войны. Независимо от этих исследований, это уравнение изучалось Вольтерром, в Соединенных штатах было получено Альфредом Лотки при описании гипотетической химической реакции, в которой химическая концентрация колебалась. Есть много видов животных в природе, где один вид питается другим. Первый вид называется хищником, а второй жертвой соответственно.

2.1 Типы взаимодействия популяций

Взаимодействия популяций может быть представлено различными видами и последствиями. Рассмотрим на системе двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1 a_1 + a_{12} N_1 N_2 + a_{11} N_1^2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2 a_2 + a_{21} N_1 N_2 + a_{22} N_2^2\end{aligned}\tag{2.1}$$

где N_1 и N_2 — популяции жертвы и хищника, соответственно,

$a_{ij} N_i N_j$ — межвидовые взаимодействия:

если $a_{ij} > 0$ и $a_{ji} > 0$, то симбиоз (партнерство) — взаимно положительное влияние двух видов, т.е. увеличение популяции одного вида влечет за собой увеличение другого вида;

если $a_{ij} > 0$ и $a_{ji} = 0$, то комменсализм (помощь) — положительное влияние одного вида на другой, но последний вид не оказывает никакого влияния на первый (например, один вид так или иначе получает пищу от другого). Другими словами, численность одной популяции увеличивается за счет влияния другой, при этом численность второй популяции не изменяется под влиянием первой;

если $a_{ij} > 0$ и $a_{ji} < 0$, то хищник-жертва (дискриминация) — увеличение численности одной популяции ведет к уменьшению численности другой;

если $a_{ij} < 0$ и $a_{ji} = 0$, то аменсализм (угнетение) — уменьшение численности одной популяции из-за влияния другой, при этом последняя популяция не оказывает влияние на первую;

если $a_{ij} < 0$ и $a_{ji} < 0$, то конкуренция — взаимно отрицательное отношение между видами;

если $a_{ij} = 0$ и $a_{ji} = 0$, то нейтрализм (отсутствие влияния) — отсутствие влияния видов друг на друга, т.е. изменение численности популяции одного вида не изменяет численность другого.

$a_{ii}N_i^2$ — внутривидовая конкуренция,

$a_i N_i$ — соответствует свободному размножению популяций:

если $a_i > 0$, то вид свободно размножается,

если $a_i < 0$, то вид вымирает без влияния хищника и внутривидовой конкуренции [1, 39].

2.2 Математическая модель Лотки-Вольтерра

Теоретически хищник может уничтожить всех жертв, следовательно, жертвы вымрут. Тем не менее, если это произойдет, то хищник тоже исчезнет из-за голода или в результате миграции по причине отсутствия пищи. Может быть, что цикл сверху приводит к тому, что "численность видов жертв будет увеличена хищниками в течение времени". Важной проблемой экологии

является изучение вопросов сосуществования двух видов. С этой целью, естественно искать математическую формулировку этой задачи и использовать ее для предсказания поведения популяций разных видов в разное время.

Положения, которые лежат в основе модели «хищник-жертва» для описания внутривидовых и межвидовых отношений:

- 1) В отсутствии хищника популяция жертвы постоянно растет.
- 2) В отсутствии жертвы популяция хищников вымирает.
- 3) Общее количество жертв, которое будет съедено хищниками, зависит от вероятности встречи видов. Т.е. от численности популяции хищников и жертв.
- 4) Количество пищи для жертвы неограниченно или жестко ограничено.
- 5) Особи каждого из видов погибает постоянное количество.
- 6) Размножение регулируется путем прорабатывания количества поглощенной пищи.
- 7) Другие факторы, влияющие на динамику численности, отсутствуют.

Пусть численность жертв x , а хищников y . Тогда вероятность встречи хищников и жертв равно произведению xy . Если dx — изменение популяции жертв за время dt , а dy — изменение популяции хищников за это же время, то взаимодействие этих двух популяций можно описать классической системой уравнений Лотки-Вольтерра:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy & x(0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy & y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функции $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой популяции жертвы и хищника в момент времени t , соответственно. Коэффициенты $a, b, c, k, d = \text{const} \geq 0$ — отражают взаимодействия видов: a — «рождаемость» жертв, b — «поедание» хищниками жертв, c — «смертность» хищников и d — увеличение численности

популяции хищников за счет жертв. Числа x_0, y_0 представляют начальную численность жертвы и хищника.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy - ex^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy - fy^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Где коэффициенты e и f характеризуют убывание численности популяций жертв и хищников из-за внутривидовой борьбы.

Данная модель системы «хищник-жертва» называется моделью с «логической поправкой» на конкуренцию.

Численность популяции жертв будет увеличиваться тем медленнее, чем больше существует хищников, а численность хищников тем быстрее, чем многочисленнее жертвы. Таким образом, коэффициенты прироста популяций жертв и хищников соответственно равны:

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2, \quad -\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1 \quad (2.4)$$

где N_1 и N_2 — численность популяций жертвы и хищника,

ε_1 — скорость размножения жертвы в отсутствии хищника,

ε_2 — естественная смертность хищника,

γ_1 и γ_2 — коэффициенты, соответствующие потребности в пище для каждого из двух видов.

Сделанные предположения приводят к системе дифференциальных уравнений для описания численности видов:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1 (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2 (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1 (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) + \times \frac{\varepsilon_1}{N_1} \rightarrow \frac{dN_1}{dt} \frac{1}{N_1} \varepsilon_2 + \frac{dN_2}{dt} \frac{1}{N_2} \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \gamma_1 N_2 + \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2 (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) + \times \frac{\varepsilon_2}{N_2} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 \gamma_2 N_1 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1 \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 + \gamma_2 N_1 \rightarrow \frac{dN_1}{dt} \gamma_2 + \frac{dN_2}{dt} \gamma_1 = -\varepsilon_2 \gamma_1 N_2 + \varepsilon_1 \gamma_2 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2 (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) + \gamma_1 N_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, $\frac{dN_1}{dt} \frac{1}{N_1} \varepsilon_2 + \frac{dN_2}{dt} \frac{1}{N_2} \varepsilon_1 = \frac{dN_1}{dt} \gamma_2 + \frac{dN_2}{dt} \gamma_1$. И интегрируя, получим:

$$N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} = C N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}, C = const \quad (2.8)$$

Формула (2.8) — первый интеграл системы. Для того чтобы исследовать вид интегральных уравнений, перепишем его в виде:

$$Y = CX, \text{ где } Y = N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1}, X = N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}. \quad (2.9)$$

Система (2.5) имеет 2 стационарных состояния $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$:

1) $N_1 = N_2 = 0$ — характеризует полное истребление жертв и вымирание хищников;

2) $N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ — стационарный режим сосуществования хищников и жертв с некоторыми ненулевыми численностями.

Линеаризуем систему (1): Пусть $N_1 = \bar{N}_1 + \xi, N_2 = \bar{N}_2 + \eta$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi \varepsilon_1 - \gamma_1 \bar{N}_2 - \eta \bar{N}_1 \gamma_1 \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi \bar{N}_2 \gamma_2 - \eta (\varepsilon_2 - \gamma_2 \bar{N}_1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Запишем линеаризованную систему в окрестности каждого из стационарных состояний:

а) $N_1 = N_2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi \varepsilon_1 \rightarrow \begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Характеристическое уравнение:} \\ \varepsilon_1 - \lambda & -\varepsilon_2 - \lambda = 0 \end{matrix} \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\eta \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Собственные значения:
 $\lambda_1 = \varepsilon_1, \lambda_2 = -\varepsilon_2$

Так как собственные значения действительные и имеют разные знаки, значит точка $(0, 0)$ — седло.

б) $N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$

$$\begin{array}{l}
 \frac{d\xi}{dt} = -\eta \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \gamma_1 \rightarrow 0 \quad -\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \gamma_1 \rightarrow \\
 \frac{d\eta}{dt} = \xi \frac{\lambda}{\gamma_1} \gamma_2 \rightarrow \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \gamma_2 \quad 0 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Характеристическое уравнение:} \\
 \lambda^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0 \\
 \text{Собственные значения:} \\
 \lambda_1 = i \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \lambda_2 = -i \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}
 \end{array}
 \quad (2.12)$$

Так как собственные значения мнимые, значит эта точка — центр. Т.е. по крайней мере, в окрестности этой точки существует замкнутые траектории [1, 2, 6, 21, 22, 28].

2.3 Математическая модель «хищник-жертва» Колмогорова

В своей работе Колмогоров впервые предложил изучать модели взаимодействия видов, не конкретизируя детально вид правых частей уравнений динамики и ограничиться лишь некоторыми качественными соображениями, описывая входящие в модель функции лишь такими их качественными особенностями, как положительность, монотонность, отношения типа больше-меньше и т.п.

Предлагается исследовать следующую систему:

$$\begin{array}{l}
 \frac{dN_1}{dt} = K_1 N_1 - L(N_1)N_2 \\
 \frac{dN_2}{dt} = K_2 N_1 - N_2
 \end{array}
 \quad (2.13)$$

где N_1 — численность популяции жертв,

N_2 — численность популяции хищников,

K_1 — коэффициент роста численности популяции жертв,

K_2 — коэффициент роста численности популяции хищников,

L — количество жертв, истребленных одним хищником.

Качественные предположения о характере функций $K_1 N_1$, $K_2 N_1$, $L(N_1)$:

- 1) хищники не «взаимодействуют» друг с другом;
- 2) прирост числа жертв за малые промежутки времени при наличии хищников равен приросту в отсутствие хищников минус число жертв, истребленных хищниками;

3) функции $K_1 N_1$, $K_2 N_1$, $L(N_1)$ — непрерывны (изменения аргумента приводят к малым изменениям значения функции) и непрерывно дифференцируемы (первая производная непрерывна);

4) $\frac{dK_1}{dN_1} < 0$, $K_1(0) > 0 > K_1(\infty) > -\infty$ — коэффициент размножения жертв в отсутствие хищников монотонно убывает с возрастанием численности жертв (ограниченность пищевых ресурсов);

5) $\frac{dK_2}{dN_1} > 0$, $K_2(0) < 0 < K_2(\infty)$ — с ростом численности жертв коэффициент размножения хищников возрастает;

6) $L(N_1) > 0$, при $N_1 > 0$, $L(0) = 0$.

Стационарные состояния системы (2.13):

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= K_1 N_1 N_1 - L(N_1) N_2 = 0 \\ \frac{dN_2}{dt} &= K_2 N_1 N_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, имеем три особых точки:

- 1) $P_1(0,0)$;
- 2) $P_2(A,0)$, где A определяется из уравнения $K_1 A = 0$;
- 3) $P_3(B,C)$, где B и C определяются из уравнений $K_2 B = 0$ и $K_1 B - L(B)C = 0$;

Линеаризуем систему (2.14). Пусть $N_1 = \bar{N}_1 + \xi$, $N_2 = \bar{N}_2 + \eta$, тогда:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi [K_1' \bar{N}_1 \bar{N}_1 + K_1 \bar{N}_1 - L'(\bar{N}_1) \bar{N}_1] - \eta L(\bar{N}_1) \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi K_2' \bar{N}_1 \bar{N}_2 + \eta K_2 \bar{N}_1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Запишем линеаризованную систему в окрестности каждого из стационарных состояний:

1) $P_1(0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi K_1(0) - \eta L(0) & \rightarrow & \begin{matrix} K_1(0) & -L(0) \\ 0 & K_2(0) \end{matrix} & \rightarrow & \begin{matrix} \text{Характеристическое уравнение:} \\ K_1(0) - \lambda & K_2(0) - \lambda = 0 \end{matrix} \\ \frac{d\eta}{dt} &= \eta K_2(0) & & & & \begin{matrix} \text{Собственные значения:} \\ \lambda_1 = K_1(0) > 0, \lambda_2 = K_2(0) < 0 \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как собственные значения действительные и имеют разные знаки, значит точка $(0, 0)$ – седло.

2) $P_2(A, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi K'_1 A - \eta L(A) \\ \frac{d\eta}{dt} &= \eta K_2 A \end{aligned} \rightarrow$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K'_1 A & -L(A) \\ 0 & K_2(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} K'_1 A - \lambda & 0 \\ 0 & K_2(A) - \lambda \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Собственные значения:
 $\lambda_1 = K'_1 A, \lambda_2 = K_2(A)$

Если $\lambda_2 < 0$, то точка $(A, 0)$ – устойчивый узел.

Если $\lambda_2 > 0$, то точка $(A, 0)$ – седло.

3) $P_3(B, C)$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi (K'_1 B + K_1 V - L' B C) - \eta L(B) \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi K'_2 B C \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} -a & L(B) \\ K'_2 B C & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

где $a = K'_1 B + K_1 V - L' B C$ и пусть $b = CK'_2 B L B > 0$, тогда характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Так как $b > 0$, то точка (B, C) является либо фокусом (в случае комплексных корней характеристического уравнения), либо узлом (в случае действительных корней характеристического уравнения).

Устойчивость зависит от знака a : если, $a > 0$, то точка устойчива, если $a < 0$, то неустойчива [40].

2.4 Модифицированная математическая трехмерная модель Лотки-Вольтерра

Модифицированная трехмерная модель Лотки-Вольтерра — система дифференциальных уравнений моделирования динамики популяции хищника Y , падальщика Z , и жертвы X :

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= X A - BX - CY - DZ \\
\frac{dY}{dt} &= Y -E + FX \\
\frac{dZ}{dt} &= Z -G - HZ + IX + JY ,
\end{aligned}
\tag{2.19}$$

где:

- A темп роста X
- B относится к возможностям X
- C скорость изменения X из-за наличия Y
- D скорость изменения X из-за наличия Z
- E естественная смертность Y
- F скорость изменения Y из-за наличия X
- G естественная смертность Z
- H относится к возможностям Z
- I скорость изменения Z из-за наличия X
- J скорость изменения Z из-за наличия Y .

Модель хищник-жертва Лотки-Вольтерра с падальщиком демонстрирует возможные тенденции популяции, когда взаимодействуют популяции хищника, жертвы и падальщика. Хищник и жертва могут сосуществовать в отсутствие падальщика, и падальщик и жертва сосуществовать в отсутствие хищника. Тем не менее, падальщик и хищник не могут существовать без добычи. Биологически это разумно, потому что без жертвы хищник не будет иметь пищи и вымрет. Падальщик будет терять все источники пищи и тоже вымрет. А три популяции могут сосуществовать двумя способами: они будут колебаться между стабильными популяциями в течение долгого времени, или популяции будут колебаться, пока они не насытятся и не останутся неизменными в течении долгого времени [29, 50, 51].

2.5 Математическая «городская» модель Лотки – Вольтерра

Это модель динамики развития популяции отношения городского населения к населению страны и отношения их среднего дохода.

D-J.F. Kamann и P. Nijkamp доказали, что многие города Америки показывают стабильное поведение, используя двух ключевых переменных: относительная популяция и доход на душу населения. Два дифференциальных уравнения, выраженных через отношение городского населения и среднего дохода к доходу региона.

Модель выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i (-a_i + a_i y_i) \\ \dot{y}_i &= y_i (\beta_i - \beta_i x_i) \end{aligned} \quad (2.20)$$

где i — рассматриваемый город,

x — численность населения,

y — объем среднего дохода в регионе,

a и β — динамические параметры.

D-J.F. Kamann и P. Nijkamp обнаружили интересные результаты при исследовании городов США, которые подтверждают применимость модели Лотки – Вольтерра «хищник-жертва» для моделирования динамики городского населения. Главным достоинством модели является ее гибкость, выраженная в возможности использования широкого спектра поведения городов. Основным недостатком модели является неточность экономических и статистических тестов [41, 43].

2.6 Математическая модель «хищник-жертва» для конкурирующих популяций

Простая конкуренция за существование подчиняется вполне определенным количественным законам. Использование математических моделей при изучении динамики популяций имеет неоспоримое преимущество в сравнении со многими другими методами. Оно заключается в возможности постановки компьютерных экспериментов, т.е. в многократном

"проигрывании" различных ситуаций при различных значениях входных параметров.

Для исследования динамики численности двух видов (народов, групп) запишем систему, описывающая модель «хищник-жертва»:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy - ex^2 & x > 0 \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy & y > 0\end{aligned}\quad (2.21)$$

где x — численность первого вида,

y — численность второго вида,

ax — скорости роста первого вида,

a — коэффициент «рождаемости»,

bxy — снижение скорости роста первого вида из-за взаимодействия со вторым видом,

b — коэффициент скорости, с которой численность первого вида уменьшается из-за второго,

ex^2 — снижение скорости роста численности первого вида, связанное с «конкуренцией» за ресурсы, т.е. внутривидовая конкуренция,

e — коэффициент доступности ресурсов,

cy — снижение скорости роста второго вида, не связанное с первым видом, dxy — прирост численности второго вида из-за первого вида,

$x(0)$ — начальная численность первого вида,

$y(0)$ — начальная численность второго вида,

t — текущее время (год).

Для экономической модели уравнения (2.21) означают, что возможные социально-экономические, политические, личностные и технологические факторы, влияющие на состояние дел, объединяются в два параметра: коэффициент «рождаемости» a и коэффициент «смертности» c .

Схема моделирования экономической системы по уравнениям (2.21) аналогична схеме моделирования системы «хищник–жертва». Можно отметить,

что использование данной модели позволяет описывать циклы, вызванные различными причинами.

В основу математической модели динамики конкуренции можно положить, по аналогии с моделями численности популяций в биологии, соображения баланса суммарной численности популяции.

Если в системе конкурируют несколько «популяций», то система дифференциальных уравнений, с коэффициентами обозначающих влияние друг на друга, например, из трех конкурирующих видов, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 - a_{13} x_1 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2 x_2 + a_{22} x_2^2 + a_{21} x_2 x_1 - a_{23} x_2 x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_3 x_3 + a_{33} x_3^2 + a_{31} x_3 x_1 - a_{32} x_3 x_2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где x_i — численность i -го вида,

a_i — коэффициент «рождаемости»,

$a_i x_i$ — увеличение скорости роста численности i -го вида, зависящее от источника доходов,

a_{ii} — коэффициент доступности ресурсов,

$a_{ii} x_i^2$ — снижение скорости роста численности, связанное с «конкуренцией» за ресурсы,

a_{ij} — степень подавления i -го вида j -м в конкурентной борьбе,

$a_{ij} x_i x_j$, ($i \neq j$) — снижение скорости роста численности вида из-за влияния конкурирующих видов ($i, j = 1, 2, 3$).

Безусловно, участников конкурентной борьбы может быть больше, но при этом увеличивается порядок системы, а значит, и сложность ее анализа.

Особое место здесь занимает расположение стационарных (неподвижных) точек системы в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3) . Система (2.22) имеет две стационарные точки, одна из которых — неустойчивая с координатами $(0, 0, 0)$. Координаты второй, устойчивой точки, вычисляются с помощью решения системы следующих линейных алгебраических уравнений, полученных из уравнений (2.22) при $dx_i / dt = 0$:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= a_3 ,
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

Эта точка – точка пересечения трех плоскостей в фазовом пространстве. Ее положение определяет возможность устойчивого сосуществования этих трех конкурентов, при котором они все "выживают" в рамках своих возможностей.

Если какая-либо из координат стационарной точки отрицательна, значит этот «вид» (участник конкурентной борьбы) обречен на вымирание. Случай, когда все три координаты неподвижной точки отрицательны, т.е. когда все участники процесса «вымирают», означает незримое и неучтенное присутствие на рынке более мощного конкурента или конкурентов.

Если по динамике реальных данных — временных рядов экономических показателей удастся рассчитать коэффициенты уравнений системы (2.21), то можно считать, что параметры модели установлены. В таком случае задача предсказания экономической ситуации сводится к компьютерному решению систем (2.22), (2.23) и анализу результатов прогноза [44-46].

2.7 Математическая модель миграционно-связанных популяций «хищник-жертва»

Изучение поведения нелинейных динамических систем, которые способны демонстрировать сложные режимы динамики, является довольно актуальным. В основном для исследования динамики используются различные модификации модели Лотки-Вольтерра. В такой модели связь между сообществами (популяции хищников и жертвы) в большинстве случаев, выражается в миграционном обмене особами.

Для изучения такой системы рассмотрим модель двух миграционно-связанных сообществ на основе модели «хищник-жертва», имеющая разные скорости роста численности жертв.

Введем в рассматриваемую систему коэффициент миграции хищников и обозначим x_1, y_1 и x_2, y_2 как общая численность популяции жертв и хищников в первом и во втором месте обитания. Пусть оба вида находятся в схожих условиях, которые различаются скоростями размножения жертв, а межвидовая конкуренция одинакова. Данный случай отражает ситуацию, когда на схожих территориях обитают два разных вида жертв, но имеющих одинаковую пищевую ценность для сообщества хищников.

Хищники могут мигрировать между сообществами и количество особей, которое может мигрировать пропорционально численности хищников, находящихся в этом сообществе. Коэффициенты миграций одинаковы для сообществ. Возможная гибель особей в процессе миграции учитывается в показателях смертности. А также отсутствуют внешние факторы, влияющие на динамику сообществ.

И так система уравнений динамики численности имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_1 x_1 \frac{K-x_1}{K} - \frac{b x_1 y_1}{1+A x_1} \\
 \dot{y}_1 &= -c y_1 + \frac{d x_1 y_1}{1+A x_1} + m y_2 - m y_1 \\
 \dot{x}_2 &= a_2 x_2 \frac{K-x_2}{K} - \frac{b x_2 y_2}{1+A x_2} \\
 \dot{y}_2 &= -c y_2 + \frac{d x_2 y_2}{1+A x_2} + m y_1 - m y_2,
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

где a_1 и a_2 — скорости размножения жертвы в обоих местах обитания в отсутствии хищника,

K — устойчивая равновесная численность жертв в отсутствии хищника для обоих мест обитаний,

b — скорость потребления хищниками жертв,

c — коэффициент смертности хищника,

d/b — коэффициент переработки хищниками биомассы жертв,

A — коэффициент насыщения хищника,

m — коэффициент миграции хищника.

Заменим некоторые переменные для сокращения числа параметров:

$x_i t = \frac{u_i \tau c}{d}, y_i t = \frac{v_i \tau a_i}{b}, t_i = \frac{\tau}{a_i}, i = 1, 2$, получаем:

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbf{u}_1 - \frac{u_1 v_1}{1 + \alpha u_1} - \varepsilon u_1^2 \\ v_1 &= -\gamma_1 v_1 + \frac{\gamma_1 u_1 v_1}{1 + \alpha u_1} + \beta \gamma_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} v_2 - v_1 \\ u_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{u_2 v_2}{1 + \alpha u_2} - \varepsilon u_2^2 \\ v_2 &= -\gamma_2 v_2 + \frac{\gamma_2 u_2 v_2}{1 + \alpha u_2} + \beta \gamma_2 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} v_1 - v_2 \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\alpha = \frac{Ac}{d}$ — коэффициент насыщения хищника,

$\varepsilon = \frac{c}{kd}$ — коэффициент самолимитирования жертвы,

$\gamma_{1,2} = \frac{c}{a_{1,2}}$ — скорость сокращения численность хищников,

$\mu_{1,2} = \beta \gamma_{1,2} = \frac{m}{a_{1,2}} \quad \beta = \frac{m}{c}$ — доля миграции хищников.

Если у рассматриваемых жертв наблюдается значительная разница в показателях рождаемости, то увеличение коэффициента миграции хищников приведет к уничтожению жертв с низкой рождаемостью. Т.е. если на соседних территориях у одного из сообществ будет быстро расти численность популяции, то популяция второго сообщества будет под угрозой, если у нее будет не достаток пищи [11].

2.8 Математические модели динамики мигрирующей популяции

Большое количество видов животных, особи которых распределены неравномерно по ареалу. В основном это связано с тем, что на данном ареале, имеется несколько мест обитания одного и того же вида животных, между которыми происходит миграционное взаимодействие. Метапопуляцией называется система локальных популяций, связанная миграцией. Моделирование поведения метапопуляции является сложнее, моделирования отдельной изолированной популяции, и по большей части определяются миграционными взаимодействиями и географической структурой ареала.

Для изучения количественных показателей динамики миграционно-связанных популяций обычно используются системы дифференциальных уравнений или системы связанных логистических отображений. В этих подходах динамика популяции, которая является частью более крупной метапопуляции, описывается одиночными уравнениями, в которых рост численности с механизмом плотностно-зависимой регуляции. Связь между отдельными популяциями определяется миграцией между локальными участками. Для этого изучения необходимо построить математическую модель пространственно-временной динамики популяций.

2.8.1 Модель динамики численности миграционно-связанных популяций с непрерывным временем

Пусть на некоторой территории существует два изолированных местообитания, в каждом из которых обитает популяция животных, связанные миграционными взаимоотношениями. Тогда численность первой популяции x , второй y . Коэффициент m_1 — доля особей, мигрирующих из второй в первую субпопуляцию (часть популяции, которая находится на одной из двух рассматриваемых территориях), а m_2 — из первой во вторую. Интенсивность таких перемещений определяется численностью, мигрирующей субпопуляции.

В случае полной изолированности мест обитания, когда $m_1 = m_2 = 0$, тогда динамику численности можно описать уравнениями следующего вида:

$$\dot{x} = r_1 x - s_1 x^2 \text{ и } \dot{y} = r_2 y - s_2 y^2 \quad (2.26)$$

где r — максимальная скорость роста численности популяции,

s — коэффициент интенсивности плотностного регулирования роста популяции, который с коэффициентом r определяет экологическую нишу местообитания (r/s).

Сделаем ограничения в полной идентичности субпопуляций, т.е.

$$r_1 = r_2 = r, s_1 = s_2 = s \text{ и } m_1 = m_2 = m$$

(2.27)

Если процесс воспроизводства непрерывен, то миграция может происходить постоянно и непрерывно с процессом размножения. А если еще перемещающиеся особи неотличимы от особей территории, куда они мигрируют, то такую динамику можно описать следующей системой:

$$\begin{aligned}x &= rx - sx^2 - tx + ty \\y &= ry - sy^2 - ty + tx.\end{aligned}\tag{2.28}$$

2.8.2 Дискретная модель динамики численности связанных популяций

Рассмотрим популяцию, динамика которой может быть описана с дискретным временем. Пусть популяция из двух групп, связанных миграцией. Предположим, развитие популяции зависит от процессов размножения и гибели, тогда можно сказать, что миграция возможно до или после периода размножения. При этом миграция может протекать двумя способами.

Первый состоит в том, что процесс миграции происходит в промежутках между сезонами размножения. Особи, которые мигрировали, не отличаются от местных особей и начинают участвовать в процессе размножения, вне зависимости как происходило расселение (до или после периода размножения).

Второй способ состоит в том, что миграция особей происходит в обход процессу размножения и гибели. В этом случае эмигранты начинают участвовать в процессе размножения лишь через сезон. Например, когда размножается оседлая часть особей, а молодые особи переселяются на другую территорию и участвуют в размножении в следующем сезоне. В этом случае миграция популяции может происходить до или после процесса размножения.

Два этих способа миграции схожи с описанием модели миграционно-связанных популяций с непрерывным временем.

Пусть численность первой популяции в сезоне размножения t равна x , второй y . А процессы размножения и гибели описываются следующим образом:

$$x = ax(1 - kx) \text{ и } y = ay(1 - ky), \quad (2.29)$$

где a — репродуктивный потенциал,

k — коэффициент интенсивности плотностного регулирования роста популяции,

$1/k$ — емкость экологической ниши.

Также ограничимся идентичностью субпопуляций и равенством миграционных параметров. И будем рассматривать модель с безразмерной численностью:

$$kx \rightarrow x \text{ и } ky \rightarrow y, \quad (2.30)$$

Если миграция происходит после процесса размножения, тогда система уравнений численности имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= ax(1 - x) + amy(1 - y) \\ y &= ay(1 - y) + amx(1 - x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Если миграция происходит до процесса размножения, то:

$$\begin{aligned} x &= a(x(1 - m + my)(1 - x(1 - m - my))) \\ y &= a(y(1 - m + mx)(1 - y(1 - m - mx))). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Данная система эквивалентна системе (2.31) при замене переменных:

$$x(1 - m + my) \rightarrow x \text{ и } y(1 - m + mx) \rightarrow y, \quad (2.33)$$

Если популяции связаны вторым способом миграции, тогда модель можно описать еще следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= ax(1 - m)(1 - x(1 - m) + my) \\ y &= ay(1 - m)(1 - y(1 - m) + mx), \end{aligned} \quad (2.34)$$

которая при следующей замене:

$$x(1 - m)^2 \rightarrow x \text{ и } y(1 - m)^2 \rightarrow y, \quad (2.35)$$

значительно упрощается и имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= ax(1 - m) - amx + my \\ y &= ay(1 - m) - amy + mx, \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.8.3 Модель «хищник-жертва», описывающая динамику численности популяций с учетом миграции хищников

Рассмотрим два сообщества «хищник-жертва», части популяций, которых находится на разных (соседних) территориях. Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 — численности популяции жертвы и хищника в первом и во втором местообитания в момент времени t . Предположим, что эти заселенные каждым из сообществ местообитания полностью идентичны, а также идентичны демографические процессы и параметры взаимодействия на разных территориях. Пусть количество мигрантов из одной территории в другую постоянная доля численности хищника на данной территории, а также отсутствует смертность в процессе миграции. Тогда модель динамики численности имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= rx_1 - \gamma x_1 y_1 \\ \dot{y}_1 &= -\mu y_1 + p x_1 y_1 + m y_2 - m y_1 \\ \dot{x}_2 &= rx_2 - \gamma x_2 y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\mu y_2 + p x_2 y_2 + m y_1 - m y_2, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где r — скорость размножения жертв при отсутствии хищника,

γ — скорость потребления хищниками жертв,

μ — смертность хищника,

p/γ — коэффициент переработки биомассы жертвы в биомассу хищника,

m — коэффициент миграции хищника.

Произведем в системе (2.37) следующую замену:

$$x_i(t) = \frac{r}{p} u_i(\tau), y_i(t) = \frac{r}{\gamma} v_i(\tau), t = \frac{\tau}{r}, i = 1, 2 \quad (2.38)$$

Получившаяся система:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1 - u_1 v_1 \\ \dot{v}_1 &= -\frac{\mu}{r} v_1 + u_1 v_1 + \frac{m}{r} v_2 - \frac{m}{r} v_1 \\ \dot{u}_2 &= u_2 - u_2 v_2 \\ \dot{v}_2 &= -\frac{\mu}{r} v_2 + u_2 v_2 + \frac{m}{r} v_1 - \frac{m}{r} v_2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

Введя обозначения $a = \frac{\mu}{r}$, $b = \frac{m}{r}$, получаем систему, у которой только два параметра:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1 - u_1 v_1 \\
v_1 &= -a v_1 + u_1 v_1 + b v_2 - b v_1 \\
u_2 &= u_2 - u_2 v_2 \\
v_2 &= -a v_2 + u_2 v_2 + b v_1 - b v_2,
\end{aligned}
\tag{2.40}$$

где a — скорость роста численности хищника, равная отношения смертности хищника и скорости размножения жертвы,
 b — доля миграции хищника, равная доли миграции хищника и скорости размножения жертвы.

Таким образом, рассмотрены два подхода к описанию пространственной динамики популяций, которые состоят из двух миграционно-связанных групп особей. Для описания поведения популяция с непрерывным процессом воспроизводства и миграции, удобно пользоваться системами дифференциальных уравнений.

Для описания подобных популяций, особи которых имеют ярко выраженный сезонный характер миграции и воспроизводства, удобней воспользоваться системами связанных логических отображений. Миграционное взаимодействие может осуществляться двумя способами. Первый — когда миграция происходит в обход процессам размножения, а второй способ — когда миграция происходит в промежутках между сезонами воспроизводства [9, 12].

2.9 Математическая модель трофических взаимодействий

Численность видов популяций меняется ежегодно. Например, численность млекопитающих. Для них характерны высокие показатели воспроизводства и большая плотность популяции. Под трофическими взаимодействиями понимается связь популяция, проявляющаяся в поедании одним видом (хищником) другого (жертвы).

В основе флуктуации (любое случайное отклонение какой-либо величины) численности видов млекопитающих лежит изменчивость

интенсивности смертности и размножения их. Они зависят от условий обитания популяции, т.е. обеспеченность пищей, количества хищников, условий погоды и т.д.

Особое влияние оказывают хищники на численность животных. Так, например, для животных с высокой плодовитостью, данный фактор не является важным. А для популяций с маленьким коэффициентом воспроизводства, имеет большое значение.

Анализ взаимоотношений хищника и жертвы с такими условиями осуществляется на основе дискретной модифицированной модели Вольтерра, которая учитывает самоограничение роста численности популяций и не учитывает внешние факторы воздействия на популяции.

Взаимодействие биологических видов, описывает следующей системой:

$$\begin{aligned}x &= A x e^{-\alpha x - \beta y} \\y &= B y e^{\gamma x - \delta y},\end{aligned}\tag{2.41}$$

где x — численность жертв,

y — численность хищников.

Параметры A и B ($A > 1, B > 0$) — показатели репродуктивности жертв и хищников соответственно. Влияние хищника на жертвы проявляется, когда два этих показателя приблизительно равны. Иначе действие хищника приобретают постоянный характер, который не зависит от плотности.

Параметры β и γ ($\beta > 0, \gamma > 0$) — коэффициенты взаимодействия видов популяций. Различия в знаках β и γ является отличительной чертой модели типа «хищник-жертва». При конкуренции видов коэффициенты β и γ отрицательны ($\beta < 0, \gamma < 0$), при отношении типа симбиоз, то ($\beta > 0, \gamma > 0$). Если при рассмотрении такой модели один из видов жертва, а второй хищник, то коэффициенты β и γ имеют разный знак.

Параметры α и δ ($\alpha > 0, \delta > 0$) — показатели интенсивности внутривидовой конкуренции и равны значениям обратных численностей x и y . При данных величинах $x_{n+1}(x_n)$ и $y_{n+1}(y_n)$ (n — номер года) — численность

популяций в следующем году, достигают максимально возможных значений M_x и M_y , которые определяются так:

$$M_x = \frac{A}{\alpha} e^{-1-\frac{\beta}{\delta}}, \quad M_y = \frac{B}{\delta} e^{-1+\frac{\gamma}{\alpha}} \quad (2.42)$$

Параметры, учитывающие внутривидовую конкуренцию, ограничивают численность популяций, чтобы они не росли до бесконечности из-за местообитания, ограниченности пищи и т.д. Верхняя граница значений численности популяций ограничивается показателями M_x и M_y , т.е. максимальными показателями численности популяций.

Значения численностей, при которых популяции устойчиво сосуществуют, определяются по следующим формулам:

$$x = \frac{\delta \ln A - \beta \ln B}{\alpha \delta + \beta \gamma}, \quad y = \frac{\alpha \ln B - \gamma \ln A}{\alpha \delta + \beta \gamma} \quad (2.43)$$

Одна особь популяции хищников не оказывает существенного влияния на популяцию жертв. В основном, если добыча пищи требует больших затрат или при истощении одного вида жертв, хищники начинают охотиться на другие виды жертв. Кроме этого, на один вид жертв может охотиться сразу несколько видов хищников.

Динамики численности популяций определяется совокупностью факторов местообитания. Т.е. помимо хищников, на численность жертв оказывает влияние погодные условия, взаимодействия с другими популяциям, кормовая база и т.д.

Количественный характер взаимодействия между популяциями проявляется в колебании общей численности около равновесного уровня. Скорее всего, такое равновесия происходит из-за факторов, препятствующих полному истреблению жертв, таких как способность жертвы, убежать или замаскироваться от хищника, наличие укрытий и другое [16].

2.10 Математическая модель с учетом влияния численности одной популяции на динамику другой популяции

Рассмотрим динамику популяции хищника, представленную двумя группами: неполовозрелые и половозрелые особи, где n — номер сезона воспроизводства.

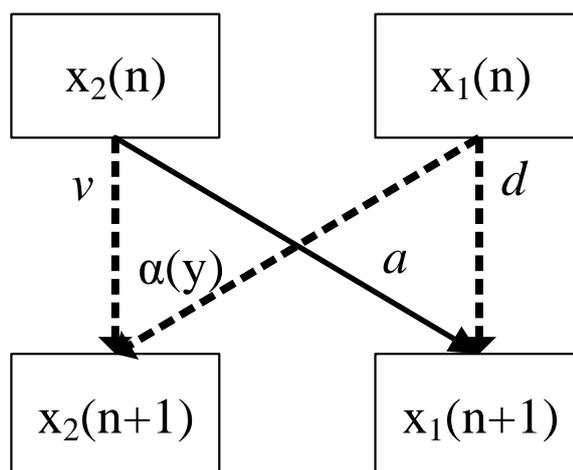


Рисунок 2.1 — Схема системы динамики численности хищников

Тогда система динамики выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_2 + dx_1 \\ x_2 &= \alpha y x_1 + vx_2, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где x_1 — численность группы неполовозрелых особей,

x_2 — численность группы половозрелых особей,

a — коэффициент рождаемости,

v — коэффициент выживаемости группы половозрелых особей,

d — доля группы неполовозрелых особей, которая осталась в своей группе с учетом выживаемости данной группы,

αy — доля группы неполовозрелых особей, которая перешла в следующую группу, стала половозрелой особью,

y — численность жертв.

Коэффициент αy может быть представлен как:

$$\alpha y = \frac{\alpha_0 y}{1 + n_1 y} \quad (2.45)$$

Формула (2.45) позволяет описать взаимодействие видов с учетом «насыщения». Выбор такой функции обусловлен тем, что у данной популяции хищника практически отсутствуют естественные враги (возможен неограниченный рост численности популяции) и практически отсутствует внутривидовая конкуренция за пищу.

При анализе функции (2.45) можно сказать, что α_0/c — максимально возможная доля неполовозрелых особей, которая переходит в группу половозрелых с учетом выживаемости, $1/c$ — плотность популяции жертв, при которой только половина от максимальной возможной доли сможет перейти в следующую группу, а α_0 — коэффициент, который имеет размерность величины обратной плотности популяции жертв. Можно видеть, что при $y < 1/c$ коэффициент $\alpha(y)$ пропорционален y , а при $y > 1/c$ коэффициент $\alpha(y)$ стремится к α_0/c .

Пусть численность жертв постоянна, т.е. не изменяется из года в год, тогда система (2.44) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_2 + dx_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\alpha y}{1+ny} x_1 + vx_2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

Система (2.46) при замене $k y = \alpha y / (1 + ny)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_2 + dx_1 \\ \dot{x}_2 &= k y x_1 + vx_2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Где, исходя из биологического смысла задачи, коэффициенты системы (2.47) имеют ограничения: $a > 0$, $0 < d \leq 1$, $0 < v \leq 1$, $0 < k y \leq 1$, $d + k y \leq 1$.

Пусть жертвы испытывают двухгодичные колебания (изменяют свою численность). Такие изменения можно записать в виде:

$$y_n = z + (-1)^n p \quad (2.48)$$

где y_n — численность жертв в n году,

z — среднемноголетняя численность жертв,

p — полуамплитуда колебаний ($z \geq p$).

Тогда модель (2.44) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_2 + dx_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\alpha(z+(-1)^n p)}{1+n(z+(-1)^n p)} x_1 + vx_2, \end{aligned} \quad (2.49)$$

Таким образом, были предложена модель, которая учитывает особенность жизненного цикла популяции хищников и их взаимодействие с жертвами [7].

2.11 Математическая модель динамики численности взаимодействующих популяций

Рассмотрим систему с одним хищником и двумя жертвами. Будем полагать, что при отсутствии хищника численность популяции жертвы регулируется внутривидовой и межвидовой конкуренциями из-за ограниченности ресурсов.

Пусть H — численность популяции хищников, P_1 и P_2 — численности популяций жертв. Влияние хищника на прирост двух видов жертв описывает $g_1(r, H)$ и $g_2(q, H)$ (где $g_1(r, 0) = 1$ и $g_2(q, 0) = 1$). Параметры r и q скорость потребления первого и второго видов жертв. Рост популяций с учетом внутривидовой и межвидовой конкуренциями описывается $f_1(P_1, P_2)$ и $f_2(P_1, P_2)$. Предполагается, что плотность популяции жертв зависит от плотности популяции хищников и выражается $w_i(H)$ ($i = 1, 2$), а также от роста численностей популяций жертв $h_1(P_1)$ и $h_2(P_2)$. Рассматриваемая модель может быть представлена следующей системой:

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= a_1 P_1 f_1(P_1, P_2) g_1(r, H) \\ \dot{P}_2 &= a_2 P_2 f_2(P_1, P_2) g_2(q, H) \\ \dot{H} &= w_1(H) h_1(P_1) P_1 + w_2(H) h_2(P_2) P_2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где a_1 и a_2 — коэффициенты роста первого и второго вида популяций жертв.

Функции, описывающие внутривидовую и межвидовую конкуренции, определяются следующим образом: $f_1(P_1, P_2) = 1/[(1 + \alpha_1 P_1)(1 + \beta_1 P_2)]$, $f_2(P_1, P_2) = 1/[(1 + \alpha_2 P_1)(1 + \beta_2 P_2)]$, где α_i и β_i — коэффициенты, характеризующие интенсивность снижения численности жертв в результате конкуренции.

Будем полагать, что численности первого и второго видов жертв после поедания хищниками будет уменьшаться на значение: $g_1 r, H = \exp(-rH)$ и $g_2 q, H = \exp(-qH)$.

Функции $h_1(P_1)$ и $h_2(P_2)$, описывающие рост численности хищников от потребления биомассы жертв, будет различен для случаев, когда происходит потребление в начале или в конце сезона. Если потребление биомассы жертв происходит до их активного роста, то $h_i P_i = P_i$. Если воспроизводство жертв происходит до их съедения хищниками, тогда $h_i P_i = a_i P_i f_i P_1, P_2, i = 1, 2$. Будем рассматривать первый случай.

Функции $w_i(H)$ описывают доли от $h_i P_i$, которую потребляют хищники, т.е. $w_1 H = 1 - \exp(-rH)$ и $w_2 H = 1 - \exp(-qH)$.

С учетом рассмотренных предположений система (2.46) имеет вид:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{a_1 P_1 \exp(-qH)}{(1 + \alpha_1 P_1)(1 + \beta_1 P_2)} \\ P_2 &= \frac{a_2 P_2 \exp(-rH)}{(1 + \alpha_2 P_1)(1 + \beta_2 P_2)} \\ H &= P_1 (1 - \exp(-rH)) + P_2 (1 - \exp(-qH)), \end{aligned} \quad (2.51)$$

Система (2.51) имеет семь стационарных точек, в соответствии с которыми возможны семь вариантов сосуществования видов:

1) $(0; 0; 0)$ — вымирания всех видов, т.е. хищник полностью истребляет два вида жертв, в результате чего сам погибает, оставшись без пищи.

2) $(P_1; 0; 0)$ — существование только первого вида жертв. В данном случае: во-первых, первый вид вытеснил второй вид жертв, а во-вторых, хищник не способен прокормиться за счет этого вида жертв, вследствие, чего вымирает.

3) $(0; P_2; 0)$ — существование только второго вида жертв, в отсутствие первого вида жертв и хищников.

4) $(P_1; P_2; 0)$ — сосуществование двух видов жертв в отсутствие хищника, т.е. их биомассы не хватает, чтобы прокормить популяцию хищников, вследствие, чего он погибает.

5) $(P_1; 0; H)$ — сосуществование первого вида жертв и хищника, т.е. первый вид, вытеснил второй вид, причем его биомассы хватает для существования хищника.

6) $(0; P_2; H)$ — сосуществование второго вида жертв и хищника, в отсутствии первого вида.

7) $(P_1; P_2; H)$ — сосуществование двух видов жертв и хищника.

В данной системе типа «хищник-2 жертвы» существует семь сценариев сосуществования популяций, которые возникают при различных значениях параметров системы. Например, ситуация, когда существуют все популяции, возможны, когда скорости роста двух видов жертв сопоставимы, а интенсивности конкурентного вытеснения различны. А если хищник потребляет только один вид жертв, то сосуществование всех видов, возможно при условии, что скорость роста численности высокая той жертвы, которая интересна хищнику [17].

2.12 Математическая модель динамики численности популяции с учетом плотностно-зависимых факторов

Регуляция численности популяции зависит от факторов различной природы воздействия (эндогенные и экзогенные), т.е. плотности популяции, погодных условий, кормовой базы и т.д. Изучению причин, вызывающих колебания численности популяции, посвящено большое количество исследований. Условно их можно разделить на две группы, в которых исследуется влияние одного или множества факторов различной природы. Многофакторные модели сложны для исследования и выявления основного фактора, влияющего на динамику численности популяции. Также между факторами эндогенной и экзогенной природы может быть связь. Например, благоприятные погодные условия ведут к обилию кормовых ресурсов, и наоборот. Что оказывает влияние на внутривидовую конкуренцию. Т.е. при

обилии пищи растет численность популяции, что приводит к саморегуляции (внутривидовой конкуренции), что в свою очередь снижает численность.

Разделим популяцию на четыре возрастные группы:

1. Новорожденные (неполовозрелые).
2. Сеголетки (неполовозрелые).
3. Особи, участвующие в первом сезоне размножения (половозрелые).
4. Особи, участвующие во втором сезоне размножения (способные к репродукции).

Для описания демографических процессов, введем следующие обозначения:

i — номер интервала между процессами размножения,

n — номер года размножения,

n — номер года размножения,

p — новорожденные,

x — сеголетки,

y — особи, участвующие в первом сезоне размножения,

z — особи, участвующие во втором сезоне размножения,

a_1 — коэффициент рождаемости для группы особей, участвующих в первом сезоне размножения,

a_2 — коэффициент рождаемости для группы особей, участвующих во втором сезоне размножения,

k — коэффициент выживаемости новорожденных,

s — коэффициент выживаемости сеголеток,

v — коэффициент выживаемости взрослых.

С учетом описанных условий, получившаяся двухкомпонентная модель, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p &= a_1 y + a_2 z \\ x &= kp \\ y &= vy + sx \\ y &= vz + vy, \end{aligned} \tag{2.52}$$

Таким образом, получена модель, описывающая структуру популяции на начало репродуктивного периода [13].

2.13 Математическая модель динамики численности двухвозрастной популяции

Рассмотрим популяцию, динамика численности которой может быть представлена в виде совокупности двух возрастных групп: младшая группа (неполовозрелые особи) и старшая группа (половозрелые особи). Предположим, что времени, которое протекает между процессами размножения, достаточно для развития младшей группы до взрослой, а новорожденным особям дорасти до младшей группы.

Предполагается, что на динамику популяции влияют плотностно-зависимые факторы (факторы, которые изменяют численность популяции и изменяющиеся при этом воздействии сами, например, паразитизм, конкуренция и т.д.), а наиболее чувствительные к плотности популяции является выживаемость неполовозрелых особей. Например, «качество потомства» (определяет выживаемость) падает из-за дефицита ресурсов. Крайним случаем является каннибализм.

Модель динамики численности двухвозрастной популяции имеет вид:

$$\begin{aligned} X &= aY \\ Y &= s(X, Y)X + vY, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где X ($X > 0$) — численность младшей группы (неполовозрелых особей),

Y ($Y > 0$) — численность старшей группы (половозрелых особей),

a ($a > 0$) — коэффициент рождаемости,

v ($0 < v \leq 1$) — коэффициент выживаемости.

Для описания плотностно-зависимой регуляции выживаемости неполовозрелых особей возьмем дискретный аналог уравнения Ферхюльста (логическое отображение). Данная формула позволяет учитывать процессы самолимитирования и конкуренцию особей:

$$s_{X,Y} = 1 - \alpha X - \beta Y, \quad (2.54)$$

где α ($\alpha \geq 0$) и β ($\beta \geq 0$) — коэффициенты, характеризующие влияние конкуренции младшей и старшей групп на выживаемость неполовозрелых особей.

Уравнение Ферхюльста и его модификации применяются для описания коэффициентов, влияющих на численность популяции (рождаемость, выживаемость), а также динамики численности популяции в целом.

Исследование системы (2.53) становится проще, если произвести следующую замену $p = \beta/\alpha$, $\alpha X \rightarrow x$, $\alpha Y \rightarrow y$. Тогда система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= ay \\ y &= (1 - x - py)x + uy, \end{aligned} \quad (2.55)$$

При исследовании данной модели выживаемость может оказаться отрицательной, появиться отрицательные значения (Например, при высоких значениях численности одной из групп). Поэтому необходимо ввести ограничения на параметры системы и начальные условия. На каждом шаге интегрирования n должно выполняться следующее условие:

$$0 \leq s_{x_n, y_n} = 1 - x_n - py_n \leq 1, \quad (2.56)$$

где x_n, y_n — решение системы (2.53).

Таким образом, динамика численности популяции усложняется, если считать, что особи разных возрастов по-разному влияют на процесс выживаемости неполовозрелых особей [18].

В данной главе были проанализированы модель Лотки-Вольтерра и ее модификаций. Модель Лотки-Вольтерра состоит из двух взаимодействующих популяций (хищник и жертва). Рассмотренные модификации дополняют модель Лотки-Вольтерра, например учетом третьей популяции или миграцией. Данные дополнения рассматривают случаи того, как изменяется динамика численности популяции при взаимодействии нескольких разных популяций или в процессе миграции.

ГЛАВА 3 ПОСТРОЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИ ЗАНЯТОГО НАСЕЛЕНИЯ

Прогноз численности населения стала одной из самых важных проблем в мире. Численность и рост населения в стране напрямую влияют на ситуацию в экономике, политике, культуре, образовании и окружающей среде и т.д. этой страны и определяют изучение и стоимость природных источников. Никто не хочет ждать, пока эти ресурсы будут исчерпаны из-за демографического взрыва. Поэтому изучение прогнозирования численности населения было начато ранее, до того, как это случится.

В 1798 году англичанин Томас Р. Мальтус предложил математическую модель роста населения. Его модель, хотя и проста, стала основой для будущего моделирования биологических популяций. Он успешно рассказал о своих предположениях математического моделирования в своей статье «Очерк о принципе народонаселения». Кроме того, он рассказал об опасности перенаселения и описал, что опасность перенаселения в конечном итоге приведет к нехватке продовольствия в глобальном масштабе, нищете, голоду и болезням. Он считал, что человеческая популяция будет расти в геометрической прогрессии, тогда как поставки продовольствия могут расти только арифметически, поскольку она ограничена доступными землей и технологиями. Геологический рост населения опережает арифметическое увеличение поставок продовольствия. Он заявил, что «законы природы» диктуют, что население никогда не может расти за пределами продовольственных запасов, необходимых для его поддержки.

3.1 Построение модели динамики численности населения

Анализ и прогноз уровня занятости важен для разработки подходов социально-экономического развития территории. Он может быть проведен при наличии соответствующих временных рядов численности экономически занятого населения возрастной группы и общей численности этой группы, которая включает в себя помимо занятых, безработных и экономически неактивное население. В основе данной модели лежит идея естественного перехода доли населения из одной группы в другую (старение). Взаимодействия специалистов разных возрастов происходит по аналогии с взаимодействиями популяций: конкуренция, партнерство (симбиоз), помощь (комменсализм), дискриминация (хищник-жертва), угнетение (аменсализм), отсутствие влияния (нейтрализм).

Доля работников определенного возраста к общей численности соответствующей группы не является постоянной, также, как и ее усреднение. Данная сложность состоит в разнородности динамики демографических и экономических процессов. Но данные процессы связаны с уровнем социально-экономического развития. Численность работников формируется исходя из потребностей производства в трудовых ресурсах. А движение населения зависит качества жизни: уровень доходов, здравоохранение и т.д. Поэтому анализ и прогнозирование численности экономически занятого населения могут быть сведены к комбинации моделей динамики численности всего населения и взаимодействия групп экономически занятых.

Сформулируем допущения, которые будем использовать для построения модели конкуренции экономически занятых разновозрастных групп населения:

- миграционный поток населения внутри групп учитывается введением свободных членов;
- смертность, переток из экономически активного населения в неактивное и обратно, а также переход в другую возрастную группу описываются линейными членами;

– взаимодействия специалистов разных возрастных групп, учитываются нелинейными членами второго порядка.

В базовой модели конкуренции разновозрастных людей, занятых в экономике, и учетом социальных взаимодействий рассматриваются три основные возрастные группы: молодые специалисты (15–29 лет), работники со стажем (30–49 лет) и занятые предпенсионного и пенсионного возраста (50 лет и старше). С учетом предположений схема модели имеет вид (рисунок 3.1):

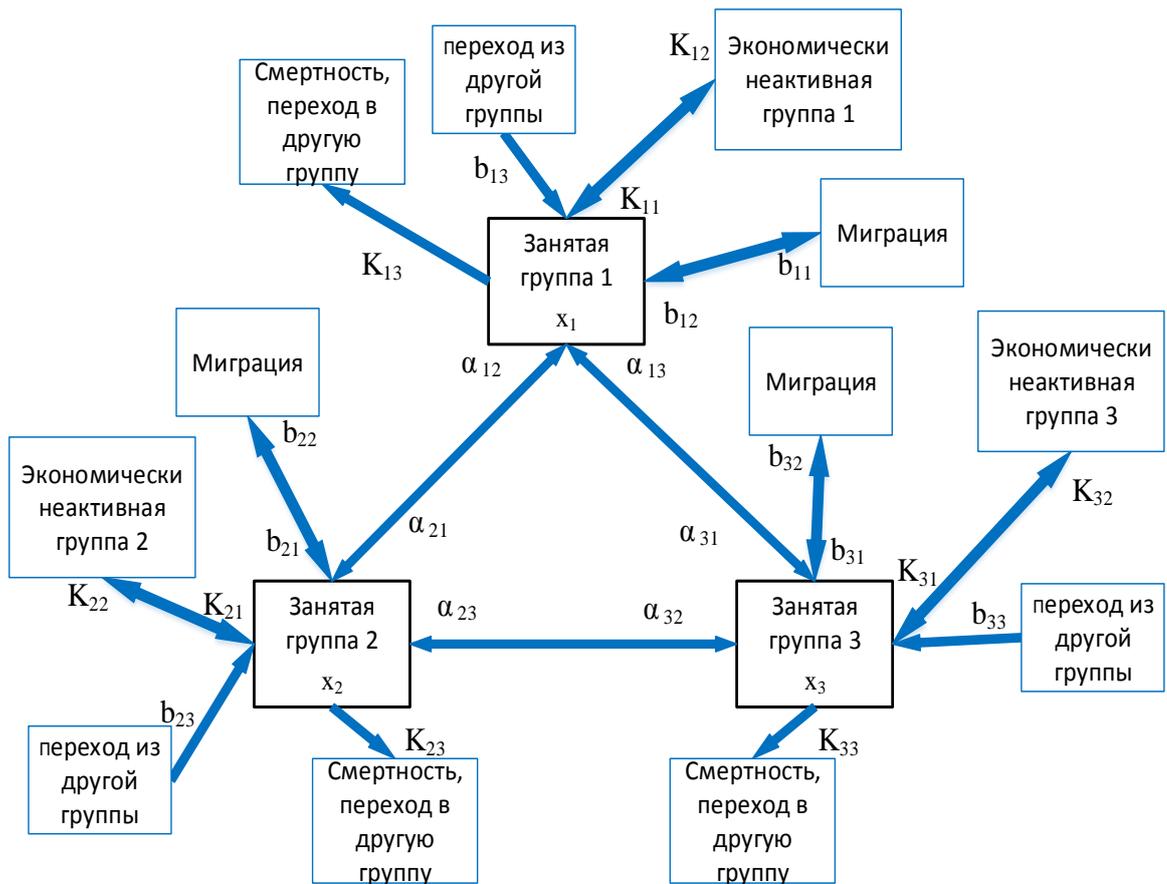


Рисунок 3.1 — Схема модели динамики разновозрастных специалистов в экономике региона

В результате математическую модель можно представить в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= b_{11} - b_{12} + b_{13} + (K_{11} - K_{12} - K_{13} + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)x_1 \\
\frac{dx_2}{dt} &= b_{21} - b_{22} + b_{23} + (K_{21} - K_{22} - K_{23} + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3)x_2 \\
\frac{dx_3}{dt} &= b_{31} - b_{32} + b_{33} + (K_{31} - K_{32} - K_{33} + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2)x_3
\end{aligned} \quad (3.1)$$

где x_i — численность экономически занятых специалистов -й группы,

t — момент времени,

b_{ij} — коэффициенты миграционных движений -й группы,

K_{ij} — коэффициенты смертности, перехода в следующую группу и переток численности населения между экономически занятыми и экономически неактивными группами,

α_{ij} — влияние когорты i на когорту j ($i, j = 1, 2, 3$).

При следующей замене:

$$\begin{aligned}
b_1 &= b_{11} - b_{12} + b_{13}, b_2 = b_{21} - b_{22} + b_{23}, b_3 = b_{31} - b_{32} + b_{33}, \\
K_1 &= K_{11} - K_{12} - K_{13}, K_2 = K_{21} - K_{22} - K_{23}, K_3 = K_{31} - K_{32} - K_{33}
\end{aligned} \quad (3.2)$$

Получается следующая система:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= b_1 + (K_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)x_1 \\
\frac{dx_2}{dt} &= b_2 + (K_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3)x_2 \\
\frac{dx_3}{dt} &= b_3 + (K_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2)x_3
\end{aligned} \quad (3.3)$$

Полученная система может описывать следующие типы взаимодействия разновозрастных групп:

если $a_{ij} > 0$ и $a_{ji} > 0$, то партнерство — взаимно положительное влияние двух групп;

если $a_{ij} > 0$ и $a_{ji} = 0$, то помощь — положительное влияние одной группы на другую, но группа, которой оказывают помощь, сама не оказывает никакого влияния на помогающую ей группу;

если $a_{ij} > 0$ и $a_{ji} < 0$, то дискриминация — увеличение численности одной группы ведет к уменьшению численности другой;

если $a_{ij} < 0$ и $a_{ji} = 0$, то угнетение — численность одной группы уменьшается из-за влияния другой, при этом последняя группа не оказывает влияние на первую;

если $a_{ij} < 0$ и $a_{ji} < 0$, то конкуренция — взаимно отрицательное отношение между группами;

если $a_{ij} = 0$ и $a_{ji} = 0$, то отсутствие влияния — отсутствие влияния групп друг на друга.

Важным показателем развития рынка труда является уровень занятости определенной возрастной группы по отношению к общей численности населения. Для оценки демографических тенденций и выяснения прогнозного уровня занятости можно использовать модель динамики численности населения, занятого в экономике. Добавим в систему учет группы детей, рассмотренной в работе [15], т.е. численность населения в возрасте 0-17, которые будут пополнять численность экономически занятых, а именно группы молодых специалистов:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= m_0 - d_0 p_0 - g_0 p_0 + r_1 p_1 + r_2 p_2 \\ \frac{dp_1}{dt} &= m_1 - d_1 p_1 + g_0 p_0 - g_1 p_1 + (K_1 + \alpha_{12} p_2 + \alpha_{13} p_3) p_1 \\ \frac{dp_2}{dt} &= m_2 - d_2 p_2 + g_1 p_1 - g_2 p_2 + (K_2 + \alpha_{21} p_1 + \alpha_{23} p_3) p_2 \\ \frac{dp_3}{dt} &= m_3 - d_3 p_3 + g_2 p_2 + (K_3 + \alpha_{31} p_1 + \alpha_{32} p_2) p_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где p_0 — численность группы 0–15 лет,

p_1 — численность занятых в экономике группы 16–29 лет,

p_2 — численность занятых в экономике группы 30–49 лет,

p_3 — численность занятых в экономике группы 50 лет и старше,

m_j — миграционный прирост,

d_j — коэффициенты смертности,

g_j — коэффициенты перехода j -й когорты в следующую группу,

r_j — среднее число детей, рожденных от соответствующей репродуктивной группы (p_1 и p_2) ($j = 1, 2, 3, 4$),

K_i — коэффициент перетока между экономически не активным населением и занятым ($i = 1, 2, 3$),

a_{il} — коэффициент взаимодействия i -й когорты с l -й когортой ($l = 1, 2, 3$).

А также добавим учет брачных пар, предложенный в работе [19]. Так как численность группы детей зависит не от численности всех экономически занятых репродуктивных групп, а от численности всех людей репродуктивного возраста, а точнее от образованных брачных пар (мужчина-женщина). Для разобьем систему на две. Первая система, вычисляющая численность группы детей:

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} &= m_b - d_b b - g_F b - g_M b + \frac{2sFM}{(vF+M)} \\ \frac{dF}{dt} &= m_F - d_F F + g_F b - g_1 F \\ \frac{dM}{dt} &= m_M - d_M M + g_M b - g_2 M \end{aligned} \quad (3.5)$$

где F и M — число женщин и мужчин репродуктивного возраста, соответствующей возрастной группы ($i = 1, 2$),

s — коэффициент брачной рождаемости, т.е. сколько новорожденных приходится на одну брачную пару,

v — коэффициент, учитывающий асимметрию полов (гендерный дисбаланс) и в некоторой степени характеризующий тип брачных отношений,

m — миграционный прирост,

d — коэффициенты смертности,

g_F и g_M — коэффициенты перехода из группы детей в группы женщин и мужчин, соответственно,

g_1 и g_2 — коэффициенты перехода из групп женщин и мужчин в пострепродуктивные группы, соответственно.

Вторая система вычисляет на основе вычисленной численности детей, численность экономически занятого населения:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= m_1 - d_1 p_1 + g_0 b - g_1 p_1 + (K_1 + \alpha_{12} p_2 + \alpha_{13} p_3) p_1 \\
\frac{dp_2}{dt} &= m_2 - d_2 p_2 + g_1 p_1 - g_2 p_2 + (K_2 + \alpha_{21} p_1 + \alpha_{23} p_3) p_2 \\
\frac{dp_3}{dt} &= m_3 - d_3 p_3 + g_2 p_2 + (K_3 + \alpha_{31} p_1 + \alpha_{32} p_2) p_3
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

где b — численность группы детей [32-38].

Численность населения постоянно меняется и зависит от многих факторов, которые не все возможно учесть. Поэтому коэффициенты системы необходимо адаптировать к изменяющимся фактическим данным, чтобы сделать более точный прогноз. Для этого используем метод стохастической аппроксимации. Данный метод подкорректирует коэффициенты системы для вычисления значений прогноза столь точно к фактическим данным, насколько длиннее период, за который известна информация о динамике численности населения. Ведь успех прогноза зависит больше не от того насколько хорошо описана модель, а от того насколько верно определены коэффициенты системы. Так как от них зависит направление и скорость изменения прогнозируемых значений.

Адаптация заключается в изменении коэффициентов системы, пока вычисляемые значения Y не приблизятся к оптимальным (заданным статистическим данным) U на некоторую точность η .

Для получения ожидаемого результата адаптации, следует учитывать, что показатель формируются при помощи трех составляющих:

- детерминированной Y ;
- случайной ε ;
- неопределенной μ .

Формула для вычисления искомого показателя, с учетом введенных обозначений:

$$Y_t = Y_t + \varepsilon_t + \mu_t \tag{3.7}$$

Но выделить все три составляющие невозможно, поэтому приходится использовать два слагаемых: регулярная составляющая (модель) и ошибки

аппроксимации, которая характеризует неизвестные факторы, влияющие на модель:

$$Y_t = Y_t + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

Точность вычислений определяет ошибка аппроксимации ε . В свою очередь ошибка не должна превышать некоторое допустимое значения (точность адаптации) η :

$$\varepsilon_t > \eta \quad (3.9)$$

Таким образом, адаптация нужна для изменения коэффициентов модели, чтобы вычисляемые значения не расходились с реальными значениями больше, чем на заданную точность, которые могут возникнуть из-за не учтенных факторов.

Для адаптации модели существует несколько алгоритмов, но наилучшим вариантом для нашей модели будет использование алгоритма адаптации с постоянным шагом, в силу своей простоты и приемлемым результатом вычисленных значений:

$$y_{it} = k_i \frac{\varepsilon_t - \eta}{\varepsilon_t} \quad (3.10)$$

где k_i — весовой коэффициент, отражающий степень адаптации вычисляемого коэффициента в сравнении с другими коэффициентами,

t — модельное время (год) ($i = 1, m$),

m — количество вычисляемых коэффициентов в уравнении.

Ограничение весового коэффициента является следующее выражение:

$$k_i = 1 \quad (3.11)$$

Адаптация коэффициентов модели должна осуществляться в равной степени. Поэтому весовой коэффициент k_i должен быть одинаковым для всех коэффициентов, тогда значение параметра демпфирования колебаний рассчитывается следующим образом:

$$y_{it} = y_t = \frac{1}{m} \frac{\varepsilon_t - \eta}{\varepsilon_t} \quad (3.12)$$

Вычисленное таким образом значение параметров демпфирования колебаний являются оптимальными, так как адаптация происходит не за много итераций, а за один шаг.

Адаптация происходит при помощи алгоритма стохастической аппроксимации Роббинса-Монро:

$$a_{it} n = a_{it} n - 1 + y[n](a_{it} - a_{it}[n - 1]) \quad (3.13)$$

где a — значение коэффициента,

n — последний шаг адаптации.

Выразим коэффициенты модели с помощью фактического значения уравнения системы Y_t и вычисляемого значения x_t , получим:

$$a_{0t} = Y_t - a_{1t}x_t \quad (3.14)$$

$$a_{1t} = \frac{Y_t - a_{0t}}{x_t} \quad (3.15)$$

где a_{0t} — значение свободного коэффициента,

a_{1t} — значение коэффициента, стоящего рядом с вычисляемым значением.

Подставим формулы вычисления коэффициентов в алгоритм Роббинса-Монро:

$$a_{0t} n = a_{0t} n - 1 + y_t (Y_t - a_{1t-1}x_t - a_{0t} n - 1) \quad (3.16)$$

$$a_{1t} n = a_{1t} n - 1 + y_t \left(\frac{Y_t - a_{0t-1}}{x_t} - a_{1t} n - 1 \right) \quad (3.17)$$

В данном случае используем коэффициенты a_{0t-1} и a_{1t-1} как коэффициенты на начальном шаге адаптации $a_{0t} 0 = a_{0t-1}$ и $a_{1t} 0 = a_{1t-1}$. Прделав данную замену, получаем следующее:

$$a_{0t} n = a_{0t} n - 1 + y_t (Y_t - a_{1t-1}x_t - a_{0t-1}) \quad (3.18)$$

$$a_{1t} n = a_{1t} n - 1 + y_t \left(\frac{Y_t - a_{0t-1} - a_{1t-1}x_t}{x_t} \right) \quad (3.19)$$

Выражение, получившееся в скобках, представляет собой текущую ошибку аппроксимации ε_t . Поскольку адаптация модели происходит за один шаг, получаем следующую простую формулу:

$$a_{0t} = a_{0t-1} + y_t \varepsilon_t \quad (3.20)$$

$$a_{1t} = a_{1t-1} + y_t \left(\frac{\varepsilon_t}{x_t} \right) \quad (3.21)$$

Полученные формулы являются конечными формулами адаптации коэффициентов системы к фактическим данным на расстояние допустимой погрешности η [4, 20, 47-49].

Для вычислений значений системы используем алгоритм Рунге-Кутты 4 порядка (погрешность порядка h^4 , h — шаг (точность)):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} k_0 + 2k_1 + 2k_3 + k_3, \quad (3.22)$$

где

$$k_0 = hF(x_i, y_i) \quad (3.23)$$

$$k_1 = hF(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}) \quad (3.24)$$

$$k_2 = hF(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \quad (3.25)$$

$$k_3 = hF(x_i + h, y_i + k_2) \quad (3.26)$$

Метод Рунге-Кутта называется *одношаговым методом*, так как использует значение функции на одном предыдущем шаге. Точность решений можно увеличить, если использовать для нахождения решений информацию о значениях функции, полученных в нескольких k предыдущих точках интегрирования $(x_{i-1}, x_{i-2} \dots x_{i-k})$.

Для повышения точности вычислений воспользуемся многошаговым методом, который использует k значений, вычисленных в k предыдущих точках. Таким методом является *явный многошаговый метод Адамса (метод Адамса-Башифорта)*:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\lambda=0}^k u_{-\lambda} F(x_{n-\lambda}, y_{n-\lambda}) \quad (3.27)$$

Данный метод требует предварительного вычисления k предыдущих точек. Для этого на первом шаге используется метод Рунге-Кутты 4 порядка [3, 5, 42].

И так, была дополнена модель [34] учетом рождаемости и образованием брачных пар.

3.2 Реализация модели динамики численности населения

Метод прогнозирования экономически активного населения реализован на языке программирования Java.

Для решения системы (3.4), представленной на рисунке 3.2:

```
public static double Eq0(double p0, double p1, double p2){
    return (Coef.get("m0")-Coef.get("d0")*p0-Coef.get("g0")*p0+
    Coef.get("r1")*p1+Coef.get("r2")*p2);
}
public static double Eq1(double p0, double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m1")-Coef.get("d1")*p1+Coef.get("g0")*p0-
    Coef.get("g1")*p1+(Coef.get("K1")+Coef.get("a12")*p2+Coef.get("a13")*p3)*p1);
}
public static double Eq2(double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m2")-Coef.get("d2")*p2+Coef.get("g1")*p1-
    Coef.get("g2")*p2+(Coef.get("K2")+Coef.get("a21")*p1+Coef.get("a23")*p3)*p2);
}
public static double Eq3(double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m3")-Coef.get("d3")*p3+Coef.get("g2")*p2+
    (Coef.get("K3")+Coef.get("a31")*p1+Coef.get("a32")*p2)*p3);
}
```

Рисунок 3.2 — Математическая модель численности экономически занятого населения

Алгоритм модели (3.5), вычисляющий численность детей, учитывающий образование брачных пар представлен на рисунке 3.3:

```
public static double EqB(double b, double f, double m){
    double r1 = (double) (2*Coef.get("a")*f*m);
    double r2 = (double) (Coef.get("v")*f+m);
    double r3 = (double) (r1/r2);
    return (Coef.get("m0")-Coef.get("d0")*b-Coef.get("q1")*b-
    Coef.get("q2")*b+r3);
}
public static double EqF(double b, double f){
    return (Coef.get("m1")-Coef.get("d1")*f+Coef.get("q1")*b-
    Coef.get("q3")*f);
}
public static double EqM(double b, double m){
    return (Coef.get("m2")-Coef.get("d2")*m+Coef.get("q2")*b-
    Coef.get("q4")*m);
}
```

Рисунок 3.3 — Математическая модель численности детей и женщин и мужчин репродуктивного возраста

Алгоритм модели (3.6), вычисляющий численность экономически занятого населения, используя данные модели (3.5) представлен на рисунке 3.4:

```
public static double Eq1(double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m1")-Coef.get("d1")*p1+Coef.get("g0")*
    PB.get(index)-Coef.get("g1")*p1+(Coef.get("K1")+
    Coef.get("a12")*p2+Coef.get("a13")*p3)*p1);
}
public static double Eq2(double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m2")-Coef.get("d2")*p2+Coef.get("g1")*
    p1-Coef.get("g2")*p2+(Coef.get("K2")+Coef.get("a21")*p1+
    Coef.get("a23")*p3)*p2);
}
public static double Eq3(double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m3")-Coef.get("d3")*p3+Coef.get("g2")*
    p2+(Coef.get("K3")+Coef.get("a31")*p1+Coef.get("a32")*
    p2)*p3);
}
```

Рисунок 3.4 — Математическая модель численности экономически занятого населения, с учетом вычисленных детей

Для корректировки коэффициентов системы к изменяющимся (новым) данным и сделать вычисления более точными (приблизить вычисляемые значения к фактическим данным), используем стохастическую аппроксимацию. Данный алгоритм адаптирует коэффициенты модели, используя фактические (статистические) данные. И чем больше период, за который известны данные, тем лучше скорректируются коэффициенты. На рисунке 3.5 изображены коэффициенты, которые будут адаптироваться и условие выполнения аппроксимации. А именно достигла ли ошибка аппроксимации заданной точности (значение, насколько близко к фактическим данным нужно адаптировать коэффициенты).

```

public static void ApproxCoef(int i){
    double Eq0 = r(Eq0(FactP0.get(i-1), FactP1.get(i-1), FactP2.get(i-1)), 4);
    double Z0 = FactP0.get(i);
    double Eq1 = r(Eq1(FactP0.get(i-1), FactP1.get(i-1)), 4);
    double Z1 = FactP1.get(i);
    double Eq2 = r(Eq2(FactP1.get(i-1), FactP2.get(i-1)), 4);
    double Z2 = FactP2.get(i);
    double Eq3 = r(Eq3(FactP2.get(i-1), FactP3.get(i-1)), 4);
    double Z3 = FactP3.get(i);
    while(Math.abs(Error(Eq0, Z0)) > ha && Math.abs(Error(Eq1, Z1)) > ha &&
    Math.abs(Error(Eq2, Z2)) > ha && Math.abs(Error(Eq3, Z3)) > ha){
        Coef.put("m0", Approx(Eq0, Z0, (double)1, 5, Coef.get("m0")));
        Coef.put("m1", Approx(Eq1, Z1, (double)1, 4, Coef.get("m1")));
        Coef.put("m2", Approx(Eq2, Z2, (double)1, 4, Coef.get("m2")));
        Coef.put("m3", Approx(Eq3, Z3, (double)1, 3, Coef.get("m3")));
        Coef.put("d0", Approx(Eq0, Z0, P0.get(i-1), 5, Coef.get("d0")));
        Coef.put("d1", Approx(Eq1, Z1, P1.get(i-1), 4, Coef.get("d1")));
        Coef.put("d2", Approx(Eq2, Z2, P2.get(i-1), 4, Coef.get("d2")));
        Coef.put("d3", Approx(Eq3, Z3, P3.get(i-1), 3, Coef.get("d3")));
        Coef.put("g0", Approx(Eq0, Z0, P0.get(i-1), 5, Coef.get("g0")));
        Coef.put("g1", Approx(Eq1, Z1, P1.get(i-1), 4, Coef.get("g1")));
        Coef.put("g2", Approx(Eq2, Z2, P2.get(i-1), 4, Coef.get("g2")));
        Coef.put("r1", Approx(Eq0, Z0, P1.get(i-1), 5, Coef.get("r1")));
        Coef.put("r2", Approx(Eq0, Z0, P2.get(i-1), 5, Coef.get("r2")));
        Coef.put("g0", Approx(Eq1, Z1, P0.get(i-1), 4, Coef.get("g0")));
        Coef.put("g1", Approx(Eq2, Z2, P1.get(i-1), 4, Coef.get("g1")));
        Coef.put("g2", Approx(Eq3, Z3, P2.get(i-1), 3, Coef.get("g2")));
        Eq0 = r(Eq0(P0.get(i-1), P1.get(i-1), P2.get(i-1)), 4);
        Z0 = FactP0.get(i);
        Eq1 = r(Eq1(P0.get(i-1), P1.get(i-1)), 4);
        Z1 = FactP1.get(i);
        Eq2 = r(Eq2(P1.get(i-1), P2.get(i-1)), 4);
        Z2 = FactP2.get(i);
        Eq3 = r(Eq3(P2.get(i-1), P3.get(i-1)), 4);
        Z3 = FactP3.get(i);
    }
}

```

Рисунок 3.5 — Условие и вызов функции аппроксимации

На рисунке 3.6 представлена аппроксимация, т.е. как изменяется (адаптируется) коэффициент.

```

public static double Approx(double Eq, double Z, double denom, int m, double u){
    double chisl = (double)Error(Eq, Z)/denom;
    u = u + chisl * Dempf(Error(Eq, Z), m);
    return r(u, 4);
}

```

Рисунок 3.6 — Функции аппроксимации

На рисунке 3.7 изображена функция демпфирования, которая вычисляет направление изменения значения (уменьшить или увеличить).

```

public static double Dempf(double Er, int m){
    double l = (double)1/m;
    double q = (double)Math.abs(Er)-ha;
    double w = (double)q/Er;
    w = Math.abs(w);
    double PF = (double)l*w;
    return PF;
}

```

Рисунок 3.7 — Функция демпфирования

Функция, которая вычисляет, насколько вычисленные значения с текущими значениями коэффициентов близки к фактическим данным. Это ошибка аппроксимации, которая представлена на рисунке 3.8.

```

public static double Error(double Eq, double Z){
    return r((double)Z-Eq, 4);
}

```

Рисунок 3.8 — Ошибка аппроксимации

Используем для первого шага вычислений метод Рунге-Кутта 4 порядка:

```

m1 = Eq0(P0.get(i-1), P1.get(i-1), P2.get(i-1));
k1 = Eq1(P0.get(i-1), P1.get(i-1));
q1 = Eq2(P1.get(i-1), P2.get(i-1));
l1 = Eq3(P2.get(i-1), P3.get(i-1));

m2 = Eq0(P0.get(i-1) + h/2.0, P1.get(i-1) + m1*h/2.0, P2.get(i-1) + m1*h/2.0);
k2 = Eq1(P0.get(i-1) + h/2.0, P1.get(i-1) + k1*h/2.0);
q2 = Eq2(P1.get(i-1) + h/2.0, P2.get(i-1) + q1*h/2.0);
l2 = Eq3(P2.get(i-1) + h/2.0, P3.get(i-1) + l1*h/2.0);

m3 = Eq0(P0.get(i-1) + h/2.0, P1.get(i-1) + m2*h/2.0, P2.get(i-1) + m2*h/2.0);
k3 = Eq1(P0.get(i-1) + h/2.0, P1.get(i-1) + k2*h/2.0);
q3 = Eq2(P1.get(i-1) + h/2.0, P2.get(i-1) + q2*h/2.0);
l3 = Eq3(P2.get(i-1) + h/2.0, P3.get(i-1) + l2*h/2.0);

m4 = Eq0(P0.get(i-1) + h, P1.get(i-1) + m3*h, P2.get(i-1) + m3*h);
k4 = Eq1(P0.get(i-1) + h, P1.get(i-1) + k3*h);
q4 = Eq2(P1.get(i-1) + h, P2.get(i-1) + q3*h);
l4 = Eq3(P2.get(i-1) + h, P3.get(i-1) + l3*h);

P0.add(P0.get(i-1) + h * (m1 + 2.0*m2 + 2.0*m3 + m4)/6.0);
P1.add(P1.get(i-1) + h * (k1 + 2.0*k2 + 2.0*k3 + k4)/6.0);
P2.add(P2.get(i-1) + h * (q1 + 2.0*q2 + 2.0*q3 + q4)/6.0);
P3.add(P3.get(i-1) + h * (l1 + 2.0*l2 + 2.0*l3 + l4)/6.0);

```

Рисунок 3.9 — Метод Рунге-Кутта 4 порядка

А для всех остальных вычислений используется многошаговый явный метод Адамса-Башфорта. На рисунке 3.10 представлен код, решающий систему с учетом двух предыдущих точек вычислений:

```
P0.add(P0.get(i-1) + h * (excoef1*Eq0(P0.get(i-1), P1.get(i-1),
P2.get(i-1))-excoef2*Eq0(P0.get(i-2), P1.get(i-2), P2.get(i-2))));

P1.add(P1.get(i-1) + h * (excoef1*Eq1(P0.get(i-1), P1.get(i-1))
-excoef2*Eq1(P0.get(i-2), P1.get(i-2))));

P2.add(P2.get(i-1) + h * (excoef1*Eq2(P1.get(i-1), P2.get(i-1))
-excoef2*Eq2(P1.get(i-2), P2.get(i-2))));

P3.add(P3.get(i-1) + h * (excoef1*Eq3(P2.get(i-1), P3.get(i-1))
-excoef2*Eq3(P2.get(i-2), P3.get(i-2))));
```

Рисунок 3.10 — Метод Адамса-Башфорта, использующий две предыдущие точки

На рисунке 3.10 представлен код, решающий систему с учетом трех предыдущих точек вычислений. И так далее, данный метод используется для вычисления до 5 вычисленных значений.

```
P0.add(P0.get(i-1) + h * (excoef3*Eq0(P0.get(i-1), P1.get(i-1),
P2.get(i-1))-excoef4*Eq0(P0.get(i-2), P1.get(i-2), P2.get(i-2))
+excoef5*Eq0(P0.get(i-3), P1.get(i-3), P2.get(i-3))));
P1.add(P1.get(i-1) + h * (excoef3*Eq1(P0.get(i-1), P1.get(i-1))
-excoef4*Eq1(P0.get(i-2), P1.get(i-2))+excoef5*Eq1(P0.get(i-3),
P1.get(i-3))));
P2.add(P2.get(i-1) + h * (excoef3*Eq2(P1.get(i-1), P2.get(i-1))
-excoef4*Eq2(P1.get(i-2), P2.get(i-2))+excoef5*Eq2(P1.get(i-3),
P2.get(i-3))));
P3.add(P3.get(i-1) + h * (excoef3*Eq3(P2.get(i-1), P3.get(i-1))
-excoef4*Eq3(P2.get(i-2), P3.get(i-2))+excoef5*Eq3(P2.get(i-3),
P3.get(i-3))));
```

Рисунок 3.11 — Метод Адамса-Башфорта, использующий три предыдущие точки

Исходя из произведенных вычислений, была построена схема алгоритма прогнозирования данных, представленная на рисунке 3.12.

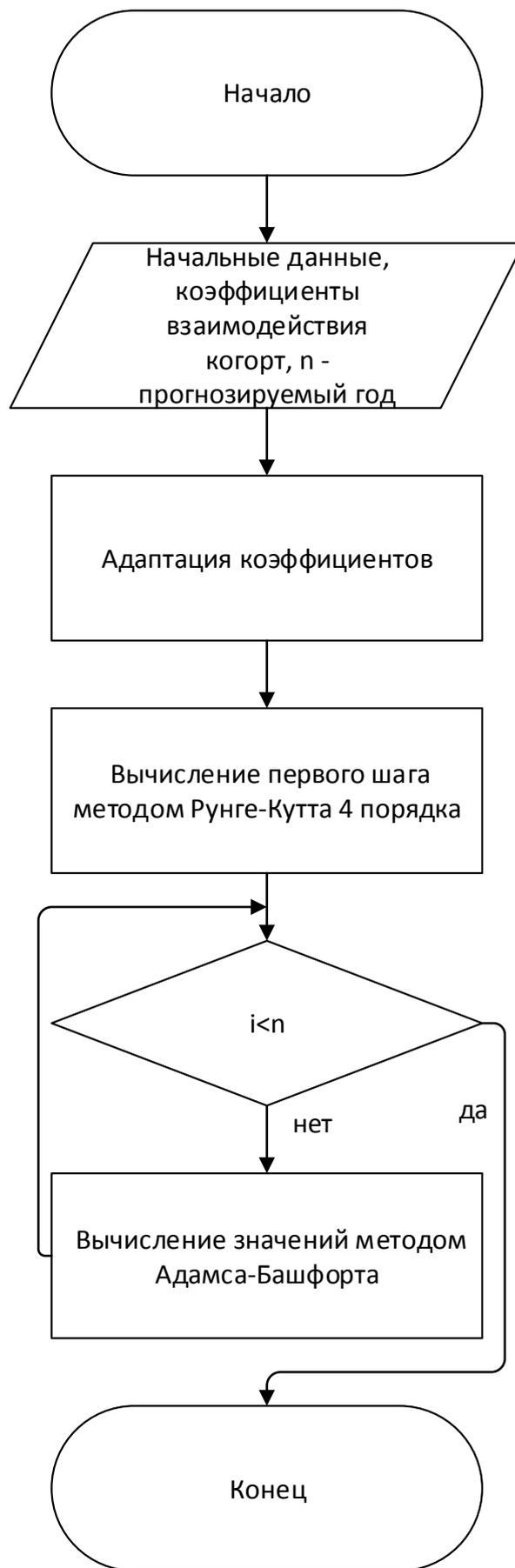


Рисунок 3.12 — Схема алгоритма прогнозирования данных

В данной схеме первым шагом является ввод начальных данных. А именно значения когорт, численность экономически занятых людей (в тысячах) для каждой выбранной возрастной группы: группа в возрасте 15–29 лет, 30–49 лет и 50 лет и старше). Численность людей в возрасте 0-14, т.е. группа детей, которая будет пополнять группу молодых специалистов (15–29 лет). Коэффициенты взаимодействия групп: рождаемость, смертность, доли численности групп, которые перейдут за один шаг (год) в следующую группу. Миграционный прирост, т.е. численность населения пришедших в соответствующую группу. И статистические данные (фактические значения численности групп), по которым будут адаптироваться коэффициенты модели, чтобы скорректировать их для более точных вычислений. Далее для вычисления первого прогнозного шага используем метод Рунге-Кутты 4 порядка. А для последующих вычислений применяется многошаговый метод Адамса-Башфорта, который использует от 2 до 5 ранее вычисленных значений.

И так была рассмотрена реализация дополненной модели [34] с учетом рождаемости и алгоритм работы программы.

3.3 Результаты вычислений

Результат работы программы, использующий модель (3.4) представлен на рисунке 3.13, где приводятся фактические данные [23-27], представленные непрерывными линиями и прогнозные, представленные пунктирными линиями:

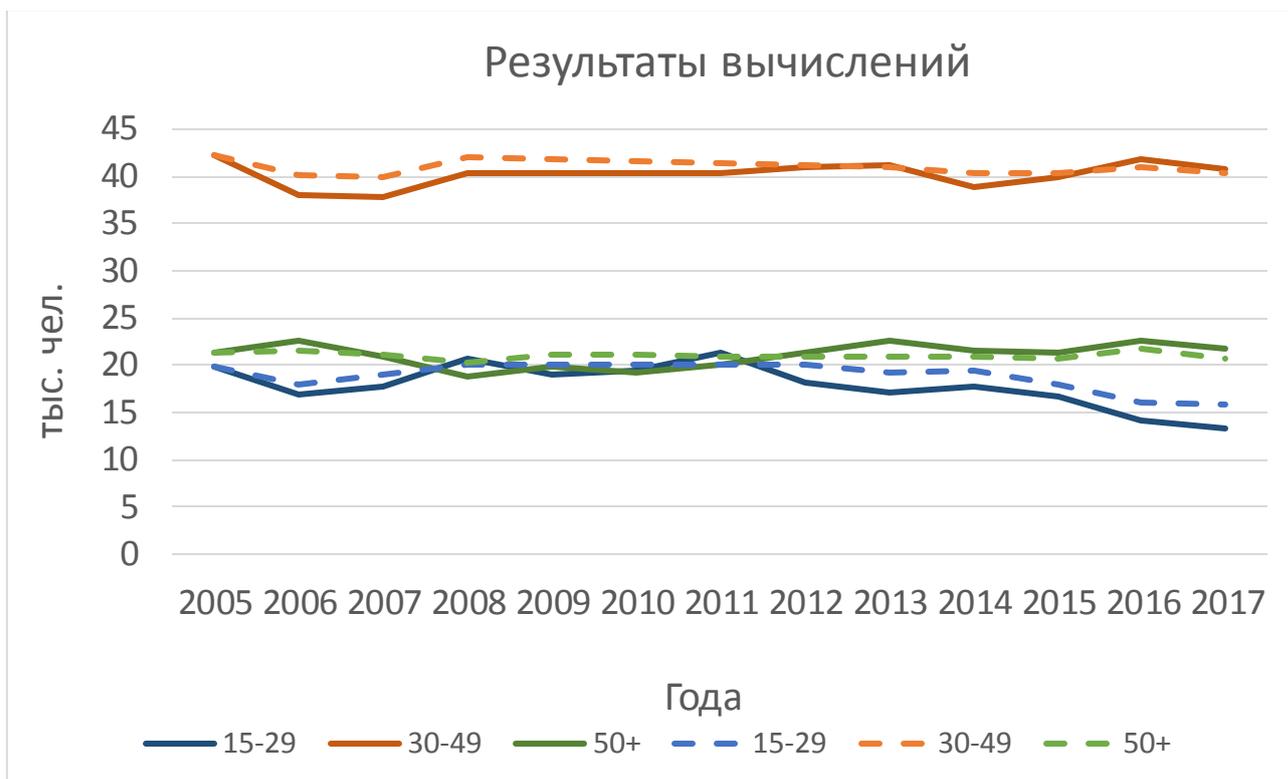


Рисунок 3.13 — Результат сравнения фактических и вычисленных значений по модели (3.4)

Результат работы программы, использующий модели (3.5) и (3.6). А именно модель вычисляющая численность детей с учетом брачных пар и модель вычисляющая численность экономически занятого населения, используя значения вычисленной численности детей, представлен на рисунке 3.14:

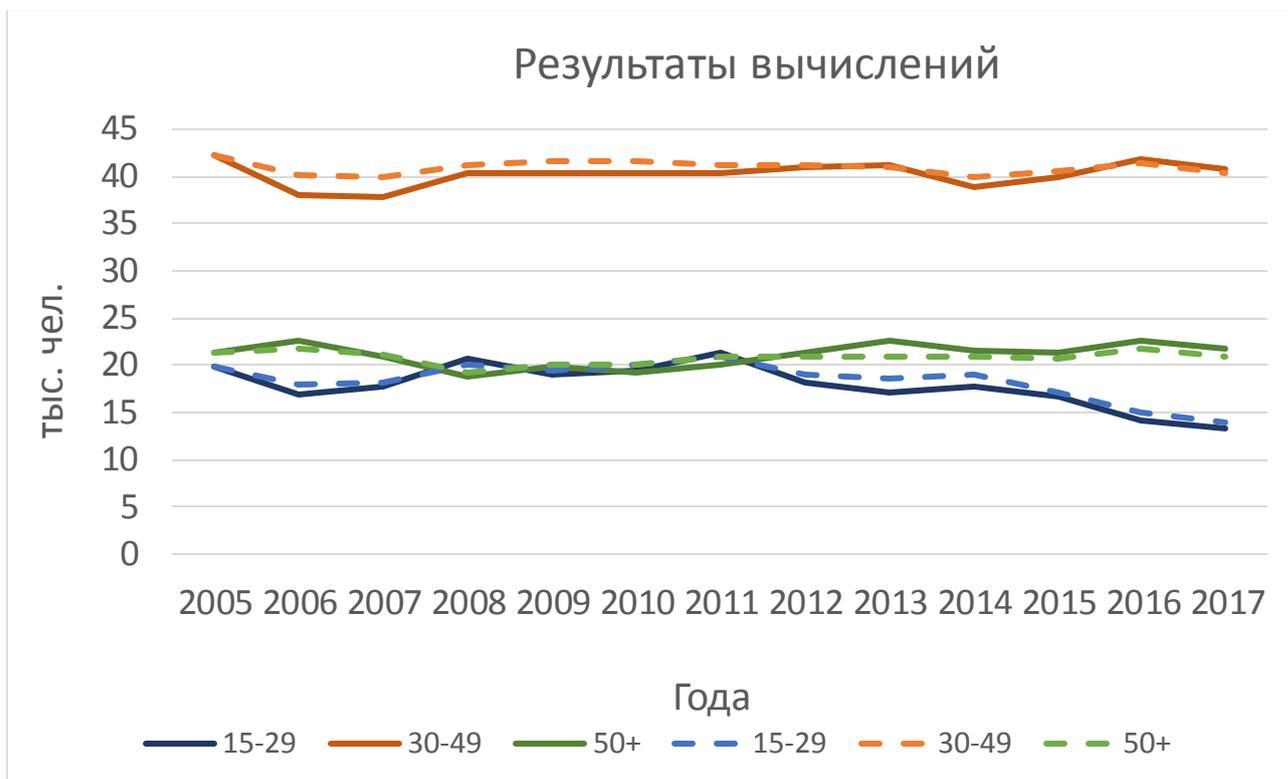


Рисунок 3.14 — Результат сравнения фактических и вычисленных значений по моделям (3.5) и (3.6)

Данные были рассчитаны на 13 лет, рисунки 3.13 и 3.14 показывают, что данные полученные моделями (3.5) и (3.6) находятся ближе к фактическим данным, чем данные вычисленные с помощью модели (3.4).

Из выше приведенных графиков, можно сделать выводы о том, что вычисленные значения экономически занятого населения с учетом брачных пар более точны, а точнее находятся ближе к фактическим значениям.

В данной главе была рассмотрена модель динамики численности экономически занятого населения разновозрастных групп с учетом рождаемости и образованием брачных пар. А также программная реализация данной модели и результаты работы программы, т.е. графики полученных значений с фактическими данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема занятости является одной из основных в современном обществе, т.к. она характеризует социально-экономическое развитие того или иного региона. Данная проблема является актуальной, поэтому она и рассматривается в данной магистерской диссертации.

В первой главе данной работы был проведен обзор различных моделей динамики региональной численности экономически занятого населения, предложенных различными авторами, в частности:

- Математическая модель региональной занятости и безработицы, где рассматривается взаимодействие групп занятого, безработного и экономически неактивного населения.
- Математическая модель с учетом возрастной зрелости, где рассматриваются группы детей и взрослых.
- Математическая модель с половозрастной структурой, в которой группа взрослых делится на группу женщин и группу мужчин.
- Математическая модель с учетом репродуктивной способности населения, т.е. рассматриваются группы, которые способны к репродукции, пострепродуктивные (люди не способные к воспроизводству нового поколения) и группу детей.
- Математическая модель половозрастной структуры, где коэффициент рождаемости заменен на функцию образования брачных пар, т.е., где рождение нового поколения зависит не только от репродуктивной способности населения, но и соотношения численностей мужчин и женщин.

В последние годы для исследования этого вопроса как базовая модель используется модель Лотки-Вольтерра. В главе второй рассмотрены модели Лотки-Вольтерра и ее модификаций. Модель Лотки-Вольтерра состоит из двух взаимодействующих популяций (хищник и жертва). Модификации модели учитывают третью популяцию, которая может быть, как популяцией хищников,

так и жертв. Миграция может учитываться по-разному, например, две популяции (хищник и жертва), каждая из которых разделена на две территории, между которыми популяции могут переселяться. Мигрировать могут как обе популяции, т.е. и хищники, и жертвы, так и по-отдельности, например, только хищники.

В данной работе предложена модификация одной из рассмотренных моделей динамики численности экономически занятого населения. В модели динамики численности экономически занятого населения [34], не учитывается численность детей, т.е. часть населения, которая находится в не трудоспособном возрасте. Для учета этого фактора в работе на основе модели [15], описывающей численность населения с учетом репродуктивной способности, предложена ее модификация. Она состоит в том, что в модель [34] включается уравнение описывающее численность детей.

Так как численность детей зависит не только от численности экономически занятого населения, но и от остальных (не работающих, по той или иной причине) людей репродуктивного возраста. Поэтому предложено в полученную модель изменить учет рождаемости, добавив в уравнение, описывающее численность детей, функцию образования брачных пар, предложенную в работе [19]. В данной работе используется не возрастные группы в репродуктивном возрасте, а половозрастные, т.е. численности всех мужчин и женщин репродуктивного возраста. В данные группы входят как занятые в экономике, так и не работающие люди. Для этого дополненная модель была разделена на две системы, так как в полученной модели, вычисляются только занятые, а для учета брачных пар нужна общая численность людей, т.е. не только занятых, но и не работающих. Первая система вычисляет численность детей, образованных брачной парой (мужчина-женщина). И соответственно, также численности мужчин и женщин репродуктивного возраста. Вторая система вычисляет численность экономически занятого населения с учетом вычисленных численностей детей.

Модель [34] была выбрана за основу, так как доминирование одной возрастной группы на рынке труда над другими, может негативно отразиться на экономическом развитии региона. Поэтому описанная модель динамики численности экономически занятого населения вычисляет численности населения по трем когортам (в возрасте 18–29, 30–49, 50 и старше лет), с корректировкой коэффициентов системы методом стохастической аппроксимации. Коэффициенты модели корректируются так, чтобы вычисленные значения были близки к фактическим данным. Точность адаптации коэффициентов, зависит от длины периода, за который известны статистические значения численности населения.

Подводя итоги, было сделано следующее:

1. Модель [34] дополнена уравнением, которое учитывает численность детей.
2. Полученная модель, путем учета рождаемости, дополнена учетом образования брачных пар.
3. Реализована программа, вычисляющая численность экономически занятого населения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Научная и методическая литература

1. Александров А.Ю. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ: учеб. пособие / А.Ю. Александров, А.В. Платонов, В.Н. Старков, Н.А. Степенко. — СПб.: Издательство «Лань», 2016. — 272 с.
2. Жабко А.П. Дифференциальные уравнения и устойчивость: учебник / А.П. Жабко, Е.Д. Котина, О.Н. Чижова. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 320 с.
3. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики: учеб. пособие / А.В. Прасолов. — СПб: Издательство «Лань», 2015. — 352 с.
4. Светульников С.Г. Методы социально-экономического прогнозирования: учебник / С.Г. Светульников, И.С. Светульников. — СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2014. — 103с.

Электронные ресурсы

5. Аль-Рефан В.А. Разработка математической модели конкурентных процессов / В.А. Аль-Рефан, И.А. Наумейко, 2014. [Электронный ресурс]: <http://cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-matematicheskoy-modeli-konkurentnyh-protssessov>
6. Братусь А.С. Динамические системы и модели биологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов, 2013. [Электронный ресурс]: http://avmaksimov.ucoz.ru/_ld/1/109_-Bratus_A-Novoz.pdf
7. Вшивкова О.А. Влияние численности мелких млекопитающих на режимы динамики популяции таежных клещей: математическое моделирование и численные эксперименты / О.А. Вшивкова, 2016. [Электронный ресурс]: <http://rp.icarp-febras.ru/index.php/RP/article/view/50/50>
8. Косоруков О.А. Комплексный подход моделирования рынка труда / О.А. Косоруков, С.Н. Мусихин, А.Н. Макарова, К.А. Мысина, 2015.

[Электронный ресурс]:
http://mon.profprognoz.ru/information/public/docs/integrated_model_is_suitable_lution_of_the_labor_market.pdf

9. Курбат В.В. Моделирование миграционных процессов в Республике Беларусь / В.В. Курбат, А.В. Полторабатько, 2015. [Электронный ресурс]:
http://ics.khstu.ru/media/2010/N26_03.pdf

10. Кулаков М.П. Подходы к описанию пространственной динамики миграционно-связанных популяций: анализ синхронизации циклов / М.П. Кулаков, Т.И. Аксенович, Е.Я. Фрисман, 2014. [Электронный ресурс]:
<http://docplayer.ru/33684333-I-matematicheskoe-modelirovanie.html>

11. Курилова Е.В. Последствия синхронизации колебаний численностей в двух взаимодействующих сообществах типа «хищник – жертва» при насыщении хищника и лимитировании численности жертвы / Е.В. Курилова, М.П. Кулаков, Е.Я. Фрисман, 2015. [Электронный ресурс]:
http://ics.khstu.ru/media/2015/N45_03.pdf

12. Курилова Е.В. Условия синхронизации численности двух взаимосвязанных сообществ / Е.В. Курилова, М.П. Кулаков, Е.Я. Фрисман, 2014. [Электронный ресурс]:
<http://rp.icarp-febras.ru/index.php/RP/article/view/100/99>

13. Неверова Г.П. Моделирование динамики весенней численности популяции рыжей полевки / Г.П. Неверова, О.А. Жигальский, Е.Я. Фрисман, 2016. [Электронный ресурс]:
<http://rp.icarp-febras.ru/index.php/RP/article/view/142/139>

14. Неверова Г.П. Применение двухкомпонентной модели к описанию демографической динамики / Г.П. Неверова, 2015. [Электронный ресурс]:
<https://moluch.ru/archive/81/14730/>

15. Неверова Г.П. Применение модели Лефковича к описанию демографической динамики / Г.П. Неверова, 2014. [Электронный ресурс]:
http://икарп.рф/reg_problems/rp-10-

2008/%D0%9D%D0%B5%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0.pdf

16. Ревуцкая О.Л. Оценка трофических взаимодействий между охотничье-промысловыми животными среднего Приамурья. / О.Л. Ревуцкая, 2014. [Электронный ресурс]: http://икарп.рф/reg_problems/gr-10-2008/%D0%A0%D0%B5%D0%B2%D1%83%D1%86%D0%BA%D0%B0%D1%8F.pdf

17. Ревуцкая О.Л. Моделирование динамики взаимодействующих популяций: растительноядные животные и растительность / О.Л. Ревуцкая, М.П. Кулаков, А.Н. Колобов, 2017. [Электронный ресурс]: <http://rp.icarp-febras.ru/index.php/RP/article/view/415/352>

18. Ревуцкая О.Л. Модель динамики численности двухвозрастной популяции: устойчивость, мультистабильность и хаос / О.Л. Ревуцкая, Г.П. Неверова, М.П. Кулаков, Е.Я. Фросман, 2016. [Электронный ресурс]: <http://www.mathnet.ru/links/f181809af8a05bbd8f0ffd8f141404db/nd540.pdf>

19. Ревуцкая О.Л. Региональный прогноз. Математическое моделирование / О.Л. Ревуцкая, Г.П. Неверова, 2015. [Электронный ресурс]: http://икарп.рф/reg_problems/gr-18-4-2015/5-12.pdf

20. Светуньков И.С. Самообучающаяся модель краткосрочного прогнозирования социально-экономической динамики / И.С. Светуньков, 2014. [Электронный ресурс]: https://www.hse.ru/data/2011/02/28/1211522815/2010_mk_article.pdf

21. Соколов Ю.Н. Компьютерные технологии в задачах природы и общества. Часть 1. Уравнения Лотки-Вольтерра. Компьютерное моделирование взаимодействия видов в природе / Ю.Н. Соколов, А.Ю. Соколов, В.М. Илюшко, 2013. [Электронный ресурс]: <https://www.khai.edu/csp/nauchportal/Arhiv/REKS/2010/REKS210/Sokolov1.pdf>

22. Соколов Ю.Н. Компьютерные технологии в задачах природы и общества. Часть 2. Модель Лотки-Вольтерра «хищник-жертва» в задачах экономики / Ю.Н. Соколов, А.Ю. Соколов, В.М. Илюшко, 2013. [Электронный

ресурс]: www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=recs_2010_3_6

23. Статистический ежегодник Еврейской автономной области: стат. сб. / Биробиджан, 2012. 293 с.

24. Статистический ежегодник Еврейской автономной области: стат. сб. / Биробиджан, 2013. 289 с.

25. Статистический ежегодник Еврейской автономной области: стат. сб. / Биробиджан, 2014. 279 с.

26. Статистический ежегодник Еврейской автономной области: стат. сб. / Биробиджан, 2015. 273 с.

27. Статистический ежегодник Еврейской автономной области: стат. сб. / Биробиджан, 2016. 275 с.

28. Титов В.А. Анализ существующих динамических моделей на базе системы уравнений Лотки-Вольтерра «хищник-жертва». / В.А. Титов, Р.Р. Вейнберг, 2016. [Электронный ресурс]: <https://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=40681>

29. Трубецков Д.И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней / Д.И. Трубецков, 2015. [Электронный ресурс]: <http://cyberleninka.ru/article/n/fenomen-matematicheskoy-modeli-lotki-volterry-i-shodnyh-s-ney>

30. Фрисман Е.Я. Моделирование динамики лимитированной популяции с возрастной и половой структурой / Е.Я. Фрисман, О.Л. Ревуцкая, Г.П. Неверова, 2015. [Электронный ресурс]: <http://www.mathnet.ru/links/96e6fe9fecf4193ddf9ef4fb2fed2cf3/mm3041.pdf>

31. Фрисман Е.Я. Системная динамика регионального развития: подходы к моделированию блока экономики / Е.Я. Фрисман, М.Ю. Хавинсон, С.В. Аносова, Б.Е. Фишман, Г.И. Петров, 2013. [Электронный ресурс]: <https://cyberleninka.ru/article/v/sistemnaya-dinamika-regionalnogo-razvitiya->

podhody-k-modelirovaniyu-bloka-ekonomiki-na-primere-evreyskoy-avtonomnoy-oblasti

32. Хавинсон М.Ю. Моделирование динамики численности занятых, безработных и экономически неактивного населения в регионе с учетом социальных связей / М.Ю. Хавинсон, 2016. [Электронный ресурс]: <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/econ/2016/04/2016-04-26.pdf>

33. Хавинсон М.Ю. Математическое моделирование динамики численности возрастных групп занятых на примере южных регионов Дальнего Востока России / М.Ю. Хавинсон, М.П. Кулаков, Е.Я. Фрисман, 2016. [Электронный ресурс]: http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/crm_2016_5/2016.08.06.pdf

34. Хавинсон М.Ю. Математическое моделирование динамики численности разновозрастных групп, занятых в экономике региона / М.Ю. Хавинсон, М.П. Кулаков, 2014. [Электронный ресурс]: http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/crm_2014_3/14309.pdf

35. Хавинсон М.Ю. Математическая модель динамики численности экономически активного населения и иностранной рабочей силы в регионе / М.Ю. Хавинсон, М.П. Кулаков, С.Н. Мищук, 2014. [Электронный ресурс]: http://ics.khstu.ru/media/2012/N31_11.pdf

36. Хавинсон М.Ю. Моделирование нелинейной динамики уровня занятости в регионе / М.Ю. Хавинсон, 2017. [Электронный ресурс]: <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0ahUKewirytfO2YXbAhVCEpoKHZ3JBKgQFggvMAI&url=http%3A%2F%2Feconomics.psu.ru%2Findex.php%2Fecon%2Farticle%2Fdownload%2F49%2F37%2F&usg=AOvVaw2jrUeIR1qiOCDlktGVcn7L>

37. Хавинсон М.Ю. Модельный анализ динамики численности занятых в разрезе возрастных групп / М.Ю. Хавинсон, М.П. Кулаков, 2015. [Электронный ресурс]: <http://rp.icarp-febras.ru/index.php/RP/article/view/48/48>

38. Хавинсон М.Ю. Прогнозирование динамики внешней трудовой миграции на региональном уровне / М.Ю. Хавинсон, М.П. Кулаков, С.Н.

Мищук, 2013. [Электронный ресурс]:
<https://cyberleninka.ru/article/v/prognozirovanie-dinamiki-vneshney-trudovoy-migratsii-na-regionalnom-urovne>

Литература на иностранном языке

39. Baigent S. Lotka-Volterra Dynamics - An introduction / S. Baigent, 2017. [Электронный ресурс]: [http://www.ltcc.ac.uk/media/london-taught-course-centre/documents/Bio-Mathematics-\(APPLIED\).pdf](http://www.ltcc.ac.uk/media/london-taught-course-centre/documents/Bio-Mathematics-(APPLIED).pdf)

40. Baigent S. Global stability of interior and boundary fixed points for Lotka-Volterra systems / S. Baigent, H. Zhanyuan, 2014. [Электронный ресурс]: http://www.ucl.ac.uk/~ucess29/resources/preprints/JDEDSGlobal_Stab_Rev.pdf

41. Champagnat N. Convergence to equilibrium in competitive Lotka-Volterra and chemostat systems. / N. Champagnat, J. Pierre-Emmanuel, R. Gael, 2014. [Электронный ресурс]: <http://www-math.unice.fr/~jabin/note7.pdf>

42. Hofbauer J. Qualitative permanence of Lotka–Volterra equations. / J. Hofbauer, R. Kon, Y. Saito, 2016. [Электронный ресурс]: <http://homepage.univie.ac.at/josef.hofbauer/08jmb.pdf>

43. Hritonenko N. Mathematical Modeling in Economics, Ecology and the Environment. / N. Hritonenko, Y. Yatsenko, 2014. [Электронный ресурс]: <http://www.twirpx.com/file/1357668/>

44. Ibanez A. Optimal control and turnpike properties of the Lotka Volterra model / A. Ibanez, 2014. [Электронный ресурс]: http://www.bcamaath.org/documentos_public/archivos/personal/conferencias/LotkaVolterra.pdf

45. Ibanez A. Optimal control of the Lotka-Volterra system: turnpike property and numerical simulations / A. Ibanez, 2015. [Электронный ресурс]: http://www.bcamaath.org/documentos_public/archivos/publicaciones/IbanezTurnpike.pdf

46. Ibanez A. Optimal control of the Lotka-Volterra system: turnpike property and numerical simulations / A. Ibanez, 2016. [Электронный ресурс]:

<http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/17513758.2016.1226435?needAccess=true>

47. Nyman K. Critical Transitions in Generalised Lotka-Volterra Systems with Random Interaction Strengths and Positive Self-Growth / K. Nyman, 2015. [Электронный ресурс]: <http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/221160/221160.pdf>

48. Pescitelli M. Lotka Volterra Predator-Prey Model with a Predating Scavenger / M. Pescitelli, 2017. [Электронный ресурс]: <https://www.gcsu.edu/sites/files/page-assets/node-808/attachments/pescitelli.pdf>

49. Rahmani Doust, M.H. Analysis of the Modied Lotka-Volterra Predator-Prey Model. / M.H. Rahmani Doust, S. Gholizade, 2014. [Электронный ресурс]: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/GMN/yahoo_site_admin/assets/docs/1_GMN-5232-V25N2.42232344.pdf

50. Salisbury A. Mathematical Models in Population Dynamics / A. Salisbury, 2016. [Электронный ресурс]: <http://ncf.sobek.ufl.edu/content/NC/FE/00/44/43/00001/Salisbury,%20A.pdf>

51. Von Arb R. Predator Prey Models in Competitive Corporations / R. Von Arb, 2014. [Электронный ресурс]: http://digitalcommons.olivet.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1044&context=honr_project

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг программного кода:

```
//Работа с файлом
import java.io.*;
import java.awt.Desktop;

//Массив
import java.util.ArrayList;
import java.util.Arrays;
import java.util.HashMap;
import java.util.Map;
import java.util.Scanner;
//Строка
import java.lang.String;

public class Main {

    //Путь до файла, в который будет записываться и считываться данные
    public static String Path = "D:\\Загрузки\\Книги для диссертации\\Для
практической части\\rez.txt";

    //Списки со значениями соответствующего уравнения
    public static ArrayList<Double> P0 = new ArrayList<Double>(); //P0
    public static ArrayList<Double> P1 = new ArrayList<Double>(); //P1
    public static ArrayList<Double> P2 = new ArrayList<Double>(); //P2
    public static ArrayList<Double> P3 = new ArrayList<Double>(); //P3

    //Списки с фактическими данными соответствующего уравнения
    public static ArrayList<Double> FactP0 = new
ArrayList<Double>(Arrays.asList(41.2, 30.8, 30.0, 30.0, 30.5, 30.7, 30.8, 31.2, 31.7,
32.0, 32.3, 32.6, 32.7)); //FactP0
    public static ArrayList<Double> FactP1 = new
ArrayList<Double>(Arrays.asList(19.9, 17.0, 17.7, 20.6, 19.1, 19.5, 21.4, 18.2, 17.2,
17.8, 16.7, 14.2, 13.3)); //FactP1
    public static ArrayList<Double> FactP2 = new
ArrayList<Double>(Arrays.asList(42.3, 38.1, 37.8, 40.3, 40.4, 40.4, 40.3, 40.9, 41.2,
38.9, 39.9, 41.7, 40.8)); //FactP2
```

```

        public static ArrayList<Double> FactP3 = new
ArrayList<Double>(Arrays.asList(21.4, 22.6, 21.0, 18.8, 19.9, 19.3, 20.0, 21.3, 22.6,
21.5, 21.3, 22.7, 21.7)); //FactP3

//Списки с фактическими данными соответствующего уравнения численности
всех людей

public static ArrayList<Double> PB = new ArrayList<Double>(); //P1
public static ArrayList<Double> PF = new ArrayList<Double>(); //P2
public static ArrayList<Double> PM = new ArrayList<Double>(); //P3
public static ArrayList<Double> FactB = new
ArrayList<Double>(Arrays.asList(41.2, 30.8, 30.0, 30.0, 30.5, 30.7, 30.8, 31.2, 31.7,
32.0, 32.3, 32.6, 32.7)); //FactB
public static ArrayList<Double> FactF = new
ArrayList<Double>(Arrays.asList(49.0, 48.7, 47.6, 46.8, 45.9, 45.2, 44.5, 43.1, 42.0,
40.7, 39.8, 38.6, 37.9)); //FactF
public static ArrayList<Double> FactM = new
ArrayList<Double>(Arrays.asList(53.3, 52.9, 51.9, 51.3, 50.5, 49.8, 48.9, 47.5, 46.3,
44.9, 43.9, 42.8, 42.0)); //FactM

public static int index = 0;

//Количество итераций
public static int n = 13;//10;

/*Статические переменные, где
*m - миграция
*d - смертность
*g - переход в следующую когорту
*r - коэффициент рождаемости женщин данной когорты
*/
@SuppressWarnings("serial")
public static Map<String, Double> Coef = new HashMap<String, Double>() {{
    put("m0", 0.59);
    put("m1", 6.055);
    put("m2", 0.00257);
    put("m3", 7.585);
    put("d0", 0.06);
    put("d1", 0.006);
    put("d2", 0.014);
    put("d3", 0.089);
    put("g0", 0.016);

```

```

        put("g1", 0.007);
        put("g2", 0.021);
        put("r1", 0.01);
        put("r2", 0.006);
        /*хавинсон*/
        put("b1", 6.055);
        put("b2", 0.00257);
        put("b3", 7.585);
        put("K1", -2.331);
        put("K2", 0.491);
        put("K3", -0.012);
        put("a12", 0.042);
        put("a13", 0.013);
        put("a21", -0.021);
        put("a23", -0.0039);
        put("a31", 0.0047);
        put("a32", -0.0103);
        /*для функции образования брачных пар*/
        put("a", 0.012);
        put("v", 1.074);
        put("q1", 0.021);
        put("q2", 0.026);
        put("q3", 0.031);
        put("q4", 0.035);
    });

    //Точность результата
    public static int k = 3;

    //Выбор записывать в файл или нет
    public static boolean rec = true;

    //Точность вычислений
    public static double h = 0.1;

    //Точность аппроксимации
    public static double ha = 0.6;

    //Коэффициенты для метода Рунге-Кутта 4 порядка
    public static double k1, k2, k3, k4;
    public static double q1, q2, q3, q4;

```

```

public static double l1, l2, l3, l4;
public static double b1, b2, b3, b4;

//Коэффициенты для метода Адамса-Башфорта (5 порядок)
public static double excoef1 = 3/2,
                                excoef2 = 1/2,
                                excoef3 = 23/12,
                                excoef4 = 4/3,
                                excoef5 = 5/12,
                                excoef6 = 55/24,
                                excoef7 = 59/24,
                                excoef8 = 37/24,
                                excoef9 = 3/8,
                                excoef10 = 1901/720,
                                excoef11 = 1387/360,
                                excoef12 = 109/30,
                                excoef13 = 637/360,
                                excoef14 = 251/720;

//Тело программы
public static void main(String[] args) {
    /*
    *Начальные условия
    */
    P0.add(FactP0.get(0));
    P1.add(FactP1.get(0));
    P2.add(FactP2.get(0));
    P3.add(FactP3.get(0));

    PB.add(FactB.get(0));
    PF.add(FactF.get(0));
    PM.add(FactM.get(0));

    //Выбор записывать ли значения в файл
    if(rec) {
        //Для открытия файла после завершения работы программы
        Desktop desktop = null;
        if (Desktop.isDesktopSupported()) {
            desktop = Desktop.getDesktop();
        }

        //Запись в файл

```

```

try(FileWriter writer = new FileWriter(Path, false)){

    //Вычисление прогноза
    ComputeForecast();

    //Округление до точности k
    RoundList(P1, k);
    RoundList(P2, k);
    RoundList(P3, k);

    // Запись в файл
    RecordData(writer, "P1", P1);
    RecordData(writer, "P2", P2);
    RecordData(writer, "P3", P3);

}

catch(IOException ex){
    System.out.println(ex.getMessage());
}

//Открытие файла с записанными данными
try {
    desktop.open(new File(Path));
} catch (IOException ioe) {
    ioe.printStackTrace();
}

}

else {
    //Вычисление прогноза
    ComputeForecast();
}

}

/**
 * Функция вычисления прогноза
 */
public static void ComputeForecast4() {
    for(int i = 1; i < n; i++){

```

//Метод Рунге-Кутты 4 порядка (для вычисления первого шага интегрирования)

```
if(i==1) {
    k1 = EqB(PB.get(i-1), PF.get(i-1), PM.get(i-1));
    q1 = EqF(PB.get(i-1), PF.get(i-1));
    l1 = EqM(PB.get(i-1), PM.get(i-1));

    k2 = EqB(PB.get(i-1) + h/2.0, PF.get(i-1) + k1*h/2.0,
    PM.get(i-1) + k1*h/2.0);

    q2 = EqF(PB.get(i-1) + h/2.0, PF.get(i-1) + q1*h/2.0);
    l2 = EqM(PB.get(i-1) + h/2.0, PM.get(i-1) + l1*h/2.0);

    k3 = EqB(PB.get(i-1) + h/2.0, PF.get(i-1) + k2*h/2.0,
    PM.get(i-1) + k2*h/2.0);

    q3 = EqF(PB.get(i-1) + h/2.0, PF.get(i-1) + q2*h/2.0);
    l3 = EqM(PB.get(i-1) + h/2.0, PM.get(i-1) + l2*h/2.0);

    k4 = EqB(PB.get(i-1) + h, PF.get(i-1) + k3*h, PM.get(i-
    1) + k3*h);

    q4 = EqF(PB.get(i-1) + h, PF.get(i-1) + q3*h);
    l4 = EqM(PB.get(i-1) + h, PM.get(i-1) + l3*h);

    PB.add(PB.get(i-1) + h * (k1 + 2.0*k2 + 2.0*k3 +
    k4)/6.0);

    PF.add(PF.get(i-1) + h * (q1 + 2.0*q2 + 2.0*q3 +
    q4)/6.0);

    PM.add(PM.get(i-1) + h * (l1 + 2.0*l2 + 2.0*l3 +
    l4)/6.0);

    k1 = Eq1(P1.get(i-1));
    q1 = Eq2(P1.get(i-1), P2.get(i-1));
    l1 = Eq3(P2.get(i-1), P3.get(i-1));

    k2 = Eq1(P1.get(i-1) + k1*h/2.0);
    q2 = Eq2(P1.get(i-1) + h/2.0, P2.get(i-1) + q1*h/2.0);
    l2 = Eq3(P2.get(i-1) + h/2.0, P3.get(i-1) + l1*h/2.0);

    k3 = Eq1(P1.get(i-1) + k2*h/2.0);
    q3 = Eq2(P1.get(i-1) + h/2.0, P2.get(i-1) + q2*h/2.0);
    l3 = Eq3(P2.get(i-1) + h/2.0, P3.get(i-1) + l2*h/2.0);
```

```

k4 = Eq1(P1.get(i-1) + k3*h);
q4 = Eq2(P1.get(i-1) + h, P2.get(i-1) + q3*h);
l4 = Eq3(P2.get(i-1) + h, P3.get(i-1) + l3*h);

P1.add(P1.get(i-1) + h * (k1 + 2.0*k2 + 2.0*k3 +
k4)/6.0);

P2.add(P2.get(i-1) + h * (q1 + 2.0*q2 + 2.0*q3 +
q4)/6.0);

P3.add(P3.get(i-1) + h * (l1 + 2.0*l2 + 2.0*l3 +
l4)/6.0);
}

//Метод Адамса-Башфорта (явный многошаговый метод)
//Вычисление второго шага интегрирования по двум предыдущим
значениям
if(i==2){
    PB.add(PB.get(i-1) + h * (excoef1*EqB(PB.get(i-1),
PF.get(i-1), PM.get(i-1))-excoef2*EqB(PB.get(i-2), PF.get(i-2), PM.get(i-2))));
    PF.add(PF.get(i-1) + h * (excoef1*EqF(PB.get(i-1),
PF.get(i-1))-excoef2*EqF(PB.get(i-2), PF.get(i-2))));
    PM.add(PM.get(i-1) + h * (excoef1*EqM(PB.get(i-1),
PM.get(i-1))-excoef2*EqM(PB.get(i-2), PM.get(i-2))));

    P1.add(P1.get(i-1) + h * (excoef1*Eq1(P1.get(i-1))-
excoef2*Eq1(P1.get(i-2))));
    P2.add(P2.get(i-1) + h * (excoef1*Eq2(P1.get(i-1),
P2.get(i-1))-excoef2*Eq2(P1.get(i-2), P2.get(i-2))));
    P3.add(P3.get(i-1) + h * (excoef1*Eq3(P2.get(i-1),
P3.get(i-1))-excoef2*Eq3(P2.get(i-2), P3.get(i-2))));
}
//Вычисление третьего шага интегрирования по трем предыдущим
значениям
if(i==3){
    PB.add(PB.get(i-1) + h * (excoef3*EqB(PB.get(i-1),
PF.get(i-1), PM.get(i-1))-excoef4*EqB(PB.get(i-2), PF.get(i-2), PM.get(i-
2))+excoef5*EqB(PB.get(i-3), PF.get(i-3), PM.get(i-3))));
    PF.add(PF.get(i-1) + h * (excoef3*EqF(PB.get(i-1),
PF.get(i-1))-excoef4*EqF(PB.get(i-2), PF.get(i-2))+excoef5*EqF(PB.get(i-3), PF.get(i-
3))));
}

```

```

        PM.add(PM.get(i-1) + h * (excoef3*EqM(PB.get(i-1),
PM.get(i-1))-excoef4*EqM(PB.get(i-2), PM.get(i-2))+excoef5*EqM(PB.get(i-3), PM.get(i-
3))));

        P1.add(P1.get(i-1) + h * (excoef3*Eq1(P1.get(i-1))-
excoef4*Eq1(P1.get(i-2))+excoef5*Eq1(P1.get(i-3))));
        P2.add(P2.get(i-1) + h * (excoef3*Eq2(P1.get(i-1),
P2.get(i-1))-excoef4*Eq2(P1.get(i-2), P2.get(i-2))+excoef5*Eq2(P1.get(i-3), P2.get(i-
3))));
        P3.add(P3.get(i-1) + h * (excoef3*Eq3(P2.get(i-1),
P3.get(i-1))-excoef4*Eq3(P2.get(i-2), P3.get(i-2))+excoef5*Eq3(P2.get(i-3), P3.get(i-
3))));
    }
    //Вычисление четвертого шага интегрирования по четырем
предыдущим значениям
    if(i==4){
        PB.add(PB.get(i-1) + h * (excoef6*EqB(PB.get(i-1),
PF.get(i-1), PM.get(i-1))-excoef7*EqB(PB.get(i-2), PF.get(i-2), PM.get(i-
2))+excoef8*EqB(PB.get(i-3), PF.get(i-3), PM.get(i-3))-excoef9*EqB(PB.get(i-4),
PF.get(i-4), PM.get(i-4))));

        PF.add(PF.get(i-1) + h * (excoef6*EqF(PB.get(i-1),
PF.get(i-1))-excoef7*EqF(PB.get(i-2), PF.get(i-2))+excoef8*EqF(PB.get(i-3), PF.get(i-
3))-excoef9*EqF(PB.get(i-4), PF.get(i-4))));

        PM.add(PM.get(i-1) + h * (excoef6*EqM(PB.get(i-1),
PM.get(i-1))-excoef7*EqM(PB.get(i-2), PM.get(i-2))+excoef8*EqM(PB.get(i-3), PM.get(i-
3))-excoef9*EqM(PB.get(i-4), PM.get(i-4))));

        P1.add(P1.get(i-1) + h * (excoef6*Eq1(P1.get(i-1))-
excoef7*Eq1(P1.get(i-2))+excoef8*Eq1(P1.get(i-3))-excoef9*Eq1(P1.get(i-4))));

        P2.add(P2.get(i-1) + h * (excoef6*Eq2(P1.get(i-1),
P2.get(i-1))-excoef7*Eq2(P1.get(i-2), P2.get(i-2))+excoef8*Eq2(P1.get(i-3), P2.get(i-
3))-excoef9*Eq2(P1.get(i-4), P2.get(i-4))));

        P3.add(P3.get(i-1) + h * (excoef6*Eq3(P2.get(i-1),
P3.get(i-1))-excoef7*Eq3(P2.get(i-2), P3.get(i-2))+excoef8*Eq3(P2.get(i-3), P3.get(i-
3))-excoef9*Eq3(P2.get(i-4), P3.get(i-4))));
    }

```

```

//Вычисление остальных шагов интегрирования по пятью
предыдущим значениям
    if(i>4) {
        PB.add(PB.get(i-1) + h * (excoef10*EqB(PB.get(i-1),
PF.get(i-1), PM.get(i-1))-excoef11*EqB(PB.get(i-2), PF.get(i-2), PM.get(i-
2))+excoef12*EqB(PB.get(i-3), PF.get(i-3), PM.get(i-3))-excoef13*EqB(PB.get(i-4),
PF.get(i-4), PM.get(i-4))+excoef14*EqB(PB.get(i-5), PF.get(i-5), PM.get(i-5))));

        PF.add(PF.get(i-1) + h * (excoef10*EqF(PB.get(i-1),
PF.get(i-1))-excoef11*EqF(PB.get(i-2), PF.get(i-2))+excoef12*EqF(PB.get(i-3), PF.get(i-
3))-excoef13*EqF(PB.get(i-4), PF.get(i-4))+excoef14*EqF(PB.get(i-5), PF.get(i-5))));

        PM.add(PM.get(i-1) + h * (excoef10*EqM(PB.get(i-1),
PM.get(i-1))-excoef11*EqM(PB.get(i-2), PM.get(i-2))+excoef12*EqM(PB.get(i-3), PM.get(i-
3))-excoef13*EqM(PB.get(i-4), PM.get(i-4))+excoef14*EqM(PB.get(i-5), PM.get(i-5))));

        P1.add(P1.get(i-1) + h * (excoef10*Eq1(P1.get(i-1))-
excoef11*Eq1(P1.get(i-2))+excoef12*Eq1(P1.get(i-3))-excoef13*Eq1(P1.get(i-
4))+excoef14*Eq1(P1.get(i-5))));

        P2.add(P2.get(i-1) + h * (excoef10*Eq2(P1.get(i-1),
P2.get(i-1))-excoef11*Eq2(P1.get(i-2), P2.get(i-2))+excoef12*Eq2(P1.get(i-3), P2.get(i-
3))-excoef13*Eq2(P1.get(i-4), P2.get(i-4))+excoef14*Eq2(P1.get(i-5), P2.get(i-5))));

        P3.add(P3.get(i-1) + h * (excoef10*Eq3(P2.get(i-1),
P3.get(i-1))-excoef11*Eq3(P2.get(i-2), P3.get(i-2))+excoef12*Eq3(P2.get(i-3), P3.get(i-
3))-excoef13*Eq3(P2.get(i-4), P3.get(i-4))+excoef14*Eq3(P2.get(i-5), P3.get(i-5))));
    }
}
}
*/
/**
 * Функция записи в файл данных "list" с названием
 */
public static void RecordData(FileWriter writer, String Title,
ArrayList<Double> List){
    try {
        writer.write(Title);
        writer.write(System.getProperty("line.separator"));

```

```

        for(Double el : List) {
            writer.write(el.toString());
            writer.write(System.getProperty("line.separator"));
        }
        writer.write(System.getProperty("line.separator"));
    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
    }
}

/**
 * Функция записи в файл данных "list"
 */
public static void RecordData(FileWriter writer, ArrayList<Double> List){
    try {
        for(Double el : List) {
            writer.write(el.toString());
            writer.write(System.getProperty("line.separator"));
        }
        writer.write(System.getProperty("line.separator"));
    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
    }
}

/**
 * Функция записи в файл строки
 */
public static void RecordData(FileWriter writer, String Title){
    try {
        writer.write(Title);
        writer.write(System.getProperty("line.separator"));
    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
    }
}

/**
 * Функция округления списка
 * List - "ArrayList" с типом "Double", необходимое округлить

```

```

* k - точность, до которого необходимо округлить число
*/
public static ArrayList<Double> RoundList(ArrayList<Double> List, int k){
    for(int i = 0; i < List.size(); i++) {
        List.set(i, r(List.get(i),k));
    }
    return List;
}

/**
* Функция округления числа
* value - число, необходимое округлить
* k - точность, до которого необходимо округлить число
*/
public static double r(double value, int k){
    return (double)Math.round((Math.pow(10, k)*value))/Math.pow(10, k);
}

/**
* Функции, которые получаются из системы дифференциальных уравнений для
прогнозирования данных
*/

/*1 модификация - учет рождаемости
public static double Eq0(double p0, double p1, double p2){
    return (Coef.get("m0")-Coef.get("d0")*p0-
Coef.get("g0")*p0+Coef.get("r1")*p1+Coef.get("r2")*p2);
}
public static double Eq1(double p0, double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m1")-Coef.get("d1")*p1+Coef.get("g0")*p0-
Coef.get("g1")*p1+(Coef.get("K1")+Coef.get("a12")*p2+Coef.get("a13")*p3)*p1);
}
public static double Eq2(double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m2")-Coef.get("d2")*p2+Coef.get("g1")*p1-
Coef.get("g2")*p2+(Coef.get("K2")+Coef.get("a21")*p1+Coef.get("a23")*p3)*p2);
}
public static double Eq3(double p1, double p2, double p3){
    return (Coef.get("m3")-
Coef.get("d3")*p3+Coef.get("g2")*p2+(Coef.get("K3")+Coef.get("a31")*p1+Coef.get("a32")*
p2)*p3);
}

```

```

*/

    2 модификация - образования пар
    public static double EqB(double b, double f, double m){
        double r1 = (double)(2*Coef.get("a")*f*m);
        double r2 = (double)(Coef.get("v")*f+m);
        double r3 = (double)(r1/r2);
        return (Coef.get("m0")-Coef.get("d0")*b-Coef.get("q1")*b-
Coef.get("q2")*b+r3);
    }
    public static double EqF(double b, double f){
        return (Coef.get("m1")-Coef.get("d1")*f+Coef.get("q1")*b-
Coef.get("q3")*f);
    }
    public static double EqM(double b, double m){
        return (Coef.get("m2")-Coef.get("d2")*m+Coef.get("q2")*b-
Coef.get("q4")*m);
    }

    public static double Eq1(double p1, double p2, double p3){
        return (Coef.get("m1")-
Coef.get("d1")*p1+Coef.get("g0")*PB.get(index) -
Coef.get("g1")*p1+(Coef.get("K1")+Coef.get("a12")*p2+Coef.get("a13")*p3)*p1);
    }
    public static double Eq2(double p1, double p2, double p3){
        return (Coef.get("m2")-Coef.get("d2")*p2+Coef.get("g1")*p1-
Coef.get("g2")*p2+(Coef.get("K2")+Coef.get("a21")*p1+Coef.get("a23")*p3)*p2);
    }
    public static double Eq3(double p1, double p2, double p3){
        return (Coef.get("m3")-
Coef.get("d3")*p3+Coef.get("g2")*p2+(Coef.get("K3")+Coef.get("a31")*p1+Coef.get("a32")*
p2)*p3);
    }
/**
 * Функция вычисление ошибки аппроксимации
 * Eq - значение уравнения
 * Z - правая часть уравнения (значение искомого числа (фактическое
значение))
 * denom - знаменатель (значение вычисляемого параметра, умножаемое на
аппроксимируемый коэффициент, если его нет, то знаменатель = 1)
*/

```

```

public static double Error(double Eq, double Z){
    return r((double)Z-Eq, 4);
}

/**
 * Функция вычисление коэффициента демпфирования
 * Er - значение ошибки аппроксимации
 * m - количество вычисляемых коэффициентов в уравнении
 */
public static double Dempf(double Er, int m){
    double l = (double)1/m;
    double q = (double)Math.abs(Er)-ha;
    double w = (double)q/Er;
    w = Math.abs(w);
    double PF = (double)l*w;
    return PF;
}

/**
 * Функция аппроксимации
 * Eq - значение уравнения
 * Z - правая часть уравнения (значение искомого числа (фактическое
значение))
 * denom - знаменатель (значение вычисляемого параметра, умножаемое на
аппроксимируемый коэффициент, если его нет, то знаменатель = 1)
 * m - количество вычисляемых коэффициентов в уравнении
 * u - значение коэффициента для аппроксимации
 */
public static double Approx(double Eq, double Z, double denom, int m,
double u){
    double chisl = (double)Error(Eq, Z);
    u = u + chisl * Dempf(Error(Eq, Z), m);
    return r(u, 4);
}

/**
 * Функция аппроксимации всех коэффициентов
 */
public static void ApproxCoef(int i){
    double Eq0 = r(Eq0(FactP0.get(i-1), FactP1.get(i-1), FactP2.get(i-
1)), 4);

```

```

double Z0 = FactP0.get(i);
double Eq1 = r(Eq1(FactP0.get(i-1), FactP1.get(i-1)), 4);
double Z1 = FactP1.get(i);
double Eq2 = r(Eq2(FactP1.get(i-1), FactP2.get(i-1)), 4);
double Z2 = FactP2.get(i);
double Eq3 = r(Eq3(FactP2.get(i-1), FactP3.get(i-1)), 4);
double Z3 = FactP3.get(i);
while(Math.abs(Error(Eq0, Z0)) > ha && Math.abs(Error(Eq1, Z1)) > ha
&& Math.abs(Error(Eq2, Z2)) > ha && Math.abs(Error(Eq3, Z3)) > ha){
    Coef.put("m0",    Approx(Eq0,    Z0,    (double)1,    5,
Coef.get("m0")));
    Coef.put("m1",    Approx(Eq1,    Z1,    (double)1,    4,
Coef.get("m1")));
    Coef.put("m2",    Approx(Eq2,    Z2,    (double)1,    4,
Coef.get("m2")));
    Coef.put("m3",    Approx(Eq3,    Z3,    (double)1,    3,
Coef.get("m3")));
    Coef.put("d0",    Approx(Eq0,    Z0,    FactP0.get(i-1), 5,
Coef.get("d0")));
    Coef.put("d1",    Approx(Eq1,    Z1,    FactP1.get(i-1), 4,
Coef.get("d1")));
    Coef.put("d2",    Approx(Eq2,    Z2,    FactP2.get(i-1), 4,
Coef.get("d2")));
    Coef.put("d3",    Approx(Eq3,    Z3,    FactP3.get(i-1), 3,
Coef.get("d3")));
    Coef.put("g0",    Approx(Eq0,    Z0,    FactP0.get(i-1), 5,
Coef.get("g0")));
    Coef.put("g1",    Approx(Eq1,    Z1,    FactP1.get(i-1), 4,
Coef.get("g1")));
    Coef.put("g2",    Approx(Eq2,    Z2,    FactP2.get(i-1), 4,
Coef.get("g2")));
    Coef.put("r1",    Approx(Eq0,    Z0,    FactP1.get(i-1), 5,
Coef.get("r1")));
    Coef.put("r2",    Approx(Eq0,    Z0,    FactP2.get(i-1), 5,
Coef.get("r2")));
    Coef.put("g0",    Approx(Eq1,    Z1,    FactP0.get(i-1), 4,
Coef.get("g0")));
    Coef.put("g1",    Approx(Eq2,    Z2,    FactP1.get(i-1), 4,
Coef.get("g1")));
    Coef.put("g2",    Approx(Eq3,    Z3,    FactP2.get(i-1), 3,
Coef.get("g2")));

```

```

Eq0 = r(Eq0(FactP0.get(i-1), FactP1.get(i-1), FactP2.get(i-
1)), 4);

Eq1 = r(Eq1(FactP0.get(i-1), FactP1.get(i-1)), 4);
Z0 = FactP0.get(i);
Eq2 = r(Eq2(FactP1.get(i-1), FactP2.get(i-1)), 4);
Z1 = FactP1.get(i);
Eq3 = r(Eq3(FactP2.get(i-1), FactP3.get(i-1)), 4);
Z2 = FactP2.get(i);
Z3 = FactP3.get(i);
}
}
}

```