

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение  
высшего образования

«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»

(наименование кафедры)

01.04.02 Прикладная математика и информатика

(код и наименование направления подготовки, специальности)

Математическое моделирование

(направленность (профиль)/специализация)

## МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему: «Метод депроекции изображений оптически тонких  
осесимметричных объектов»

Студент

В.К. Байдицкая

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный

А.А. Панфёров

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

руководитель

Руководитель программы д.ф.-м.н., доцент, С.В. Талалов

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_\_ г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой к.т.н., доцент, А.В. Очеповский

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_\_ г.

Тольятти 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ГЛАВА 1 МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ 3D ОБЪЕКТОВ .....	8
1.1 Математическая постановка задачи восстановления трехмерной функции .....	8
1.2 Определение преобразования Радона и его интерпретации .....	13
1.3 Свойства преобразования Радона .....	20
1.4 Преобразование Радона осесимметричных функций .....	25
1.5 Преобразование Радона осесимметричных функций как преобразование Абеля .....	32
1.6 Обращение осесимметричного преобразования Радона.....	37
ГЛАВА 2 МЕТОД ГЕОМТРИЧЕСКОЙ ДЕПРОЕКЦИИ.....	46
2.1 Применимость модели onion-skin к геометрической депроекции .....	46
2.2 Модель onion-skin геометрической депроекции .....	49
2.3 Расчет максимальной вероятности геометрической депроекции .....	52
ГЛАВА 3 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕПРОЕКЦИИ .....	57
3.1 Применение метода депроекции к идеализированным изображениям.....	57
3.2 Применение метода депроекции к зашумленным изображениям .....	62
3.3 Зависимость от угла наклона .....	72
ГЛАВА 4 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕПРОЕКЦИИ К РЕАЛЬНЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК.....	79
4.1 Применение к реальным изображениям .....	79
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	84
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	86
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	91

## ВВЕДЕНИЕ

Депроецировать изображение объекта – это значит исключить из наблюдаемого потока любой данной оболочки потоки других оболочек.

Изображение оптически прозрачных объектов в принципе может быть депроецировано в "трехмерное" изображение[14][34]. Существует несколько работ на эту тему.

Бремер в своей основополагающей статье приводит результаты депроекции своего метода[14]. С тех пор во многих работах по астрофизике, появлявшихся в теоретических и прикладных журналах, отмечалась ее необходимость и растущая важность. Области применения методов восстановления изображений достаточно широки.

С древних времён человек стремился облегчить свой труд, изобретая и применяя в работе вспомогательные орудия. С течением времени орудия становились всё более совершенными, позволяя эффективно решать те задачи, с которыми ранее люди справиться не могли.

Сегодня, в эпоху всеобщей автоматизации, основным объектом деятельности человека становится информация, а инструментом — компьютер. Значительная часть информации, с которой приходится иметь дело современному человеку, имеет графическое представление. Действительно, изображение является объектом исследования или его результатом в таких областях человеческой деятельности, как космонавтика, астрономия, медицина, физика, биология, криминалистика, геология, дефектоскопия и других.

Исследователям астрофизикам приходится производить много наблюдений, потому что в большинстве случаев ученые не имеют возможности воздействовать на изучаемый объект. О природе исследуемых объектов и их свойствах астрофизики должны судить на основе анализа косвенной информации, которая заключена в поступающих из космоса различных видах излучениях: электромагнитном (гамма кванты, радиоволны

и др.), корпускулярном (космические лучи), гравитационно-волновом (регистрация которого планируется в недалеком будущем). Характеристики этих излучений являются следствиями тех процессов, о природе которых должен судить астроном. В большинстве же случаев астрофизики вынуждены по следствиям некоторых процессов, протекающих на небесных телах, судить о причинах, их породивших. На практике же ученые сталкиваются с множеством трудностей. Проверка методов является сложной задачей и требует многочисленных исследований.

**Актуальность** данного исследования методов восстановления изображений обусловлена исследованиями структуры астрономических объектов. Один из типов объектов, геометрия, или морфология, которых в принципе может быть восстановлена - это струи: они оптически тонкие.

В активных галактических ядрах релятивистские струи энергии и массы активно влияют на близлежащие галактики и окружающую межзвездную и внутрикластерную среду. Генерация этих потоков привязана к процессу аккреции на вращающихся черных дырах. Хотя эти струи имеют доминирующее направление движения (т. е. наружу от черной дыры) они часто имеют изгибы, а также особенности внутри них, которые либо перпендикулярны, либо выровнены относительно струи под некоторым углом. Расшифровка истинной природы этих признаков, их геометрии и их связи с динамическим смыслом в потоке является трудной проблемой, так как любые астрономические образы, которые берутся, являются двумерным видами трехмерного объекта. Проблема восстановления трехмерной информации из двумерных изображений является общей во многих областях, но это особенно важно для астрономии. В большинстве других случаев, например, в медицинской визуализации, можно взять изображения источника из нескольких точек чтобы помочь реконструкции. Однако это не возможно в астрономии, поэтому необходимо полагаться на другие методы. Например, методы с использованием симметрии, присущие, соответственно,

планетарным туманностям и галактикам, а также двумерные изображения, чтобы вывести и реконструировать трехмерные визуализации этих объектов.

**Целью выпускной квалификационной работы** является исследование прямого метода восстановления "onion-skin" 3D структуры протяженных осесимметричных объектов.

**Предметом исследования** является математическая модель восстановления 3D изображений.

**Объектами исследования** являются изображения струй.

**Гипотеза исследования:** разработанная модель обеспечит повышение эффективности решения задач восстановления и обработки изображений.

Для достижения поставленной цели и проверки сформулированной гипотезы потребуется решить следующие задачи:

1. Показать, что применение модели к объекту с осью симметрии, лежащей в небесной плоскости, восстанавливает 3D структуру объекта полностью идентичную оригинальной структуре, в отличие от аналитических методов моделирования структуры;
2. Получить зависимость невязки между реальным и восстановленным распределениями от уровня шума;
3. Получить зависимость невязки между реальным и восстановленным распределениями от угла наклона.

**Теоретической основой** исследований послужили научные труды отечественных и зарубежных исследователей в области астрофизики и томографии.

**Методы исследования.** Решение указанных задач планируется проводить на основе системного анализа и математического моделирования. Для программной реализации алгоритмов планируется использовать аппарат численного математического моделирования и пакеты прикладных программ компьютерной математики.

**Новизна исследования** заключается в следующем: метод модели onion-skin геометрической депроекции применён в изображениях осесимметричных объектов, охарактеризовано ограничение метода в зависимости от зашумления изображения и от угла наклона его оси симметрии к картинной плоскости.

**Научно-практическая ценность работы.** Применение метода модели onion-skin геометрической депроекции к изображениям осесимметричных протяжённых объектов позволит исследовать структуру подобных астрономических объектов, таких как струи, молекулярные потоки, звёздные ветры.

Основные этапы исследования: исследование велось с 2016 по 2018 гг. в три этапа:

На 1-ом, этапе исследования (2016 г.), подтверждена актуальность темы исследования, определены объект и предмет исследования, даны обзор и анализ источников научной и методической литературы, сформулированы гипотеза, цели и задачи исследования, определены его проблематика и метод.

В ходе 2-го, этапа (2016-2017 гг.), разработана модель и алгоритм обработки изображений, выполнена теоретическая апробация исследования в процессе выступлений на научно-практических конференциях.

3-й этап (2017-2018 гг.) – этап экспериментальной апробации, в ходе которого выполнена проверка адекватности разработанной модели, подтверждена достоверность установленной гипотезы, сформулировано заключение по проведенному исследованию.

Апробация работы была произведена на следующих научно-практических конференциях:

1. XLIV Студенческая международная научно-практическая конференция «Научное сообщество студентов: МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ» (май 2018г, Новосибирск);

2. IV Международная научно-практической конференция (школа-семинар) молодых ученых «Прикладная математика и информатика:

современные исследования в области естественных и технических наук» (23-25 апреля 2018г., Тольятти).

На защиту выносятся:

1. Показано, что применение данного метода к объекту с осью симметрии, лежащей в небесной плоскости, восстанавливает 3D структуру объекта полностью идентичную оригинальной структуре, в отличие от аналитических;

2. Получена зависимость невязки между реальным и восстановленным распределениями от уровня шума;

3. Получена зависимость невязки между реальным и восстановленным распределениями от угла наклона.

**Структура работы.** Диссертация изложена на 90 страницах, состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованных источников (35 наименований) и содержит 48 рисунков.

# ГЛАВА 1 МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ 3D ОБЪЕКТОВ

Проблема восстановления трехмерной информации из двумерных изображений является общей во многих областях, но это особенно важно для астрономии. В медицинской визуализации, можно взять изображения источника из нескольких точек чтобы помочь реконструкции. В первой главе рассмотрены методы преобразования Радона используемые в медицинской томографии.

## 1.1 Математическая постановка задачи восстановления трехмерной функции

Имея большое количество проекционных снимков с различных направлений, можно с достаточной степенью точности восстановить внутреннюю структуру объекта, а точнее функцию плотности поглощения излучения.

Задача состоит в восстановлении трехмерной функции  $\mu(x, y, z)$  плотности поглощения излучения. В такой постановке задача весьма сложна и трехмерный объект представляют в виде набора тонких срезов. Внутри каждого среза плотность  $\mu$  считают функцией только двух переменных. При исследовании систему источники-приемники устраивают таким образом, чтобы регистрировать только данные на лучах, лежащих в плоскости среза[4]. Схема сканирования одного слоя представлена на рисунке 1.1.

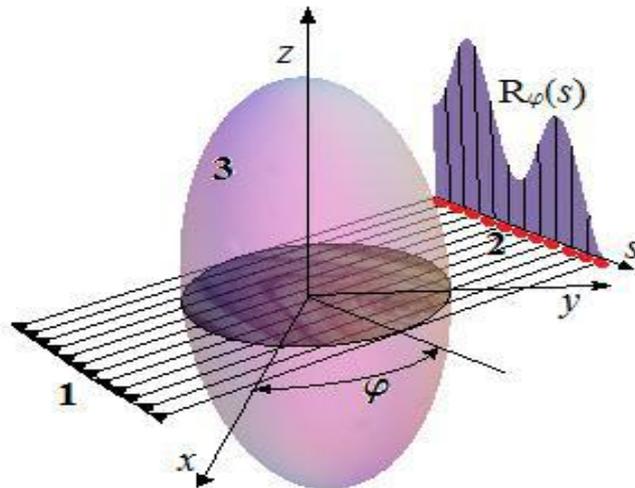


Рисунок 1.1 – Зондирование трехмерного объекта (1 – источники; 2 – детекторы; 3 – объект)

Детекторы регистрируют данные и, полученная по ним функция  $R$ , зависит от одной переменной  $s$  (при фиксированном направлении зондирования, определяемом углом  $\varphi$ ). Восстановить по одной проекции  $R_\varphi(s)$  функцию двух переменных  $\mu(x, y)$  невозможно. Для того, чтобы получить набор данных, достаточный для восстановления, применяют зондирование объекта с различных направлений, варьируя угол  $\varphi$  [17]. Поворачивая систему «источники – детекторы», получают множество проекций  $R(s, \varphi)$  слоя (параметр  $\varphi$  обозначает угол зондирования), по которым можно восстановить двумерную функцию  $\mu(x, y)$ . Схема сканирования слоя с различных направлений показана на рисунке 1.2.

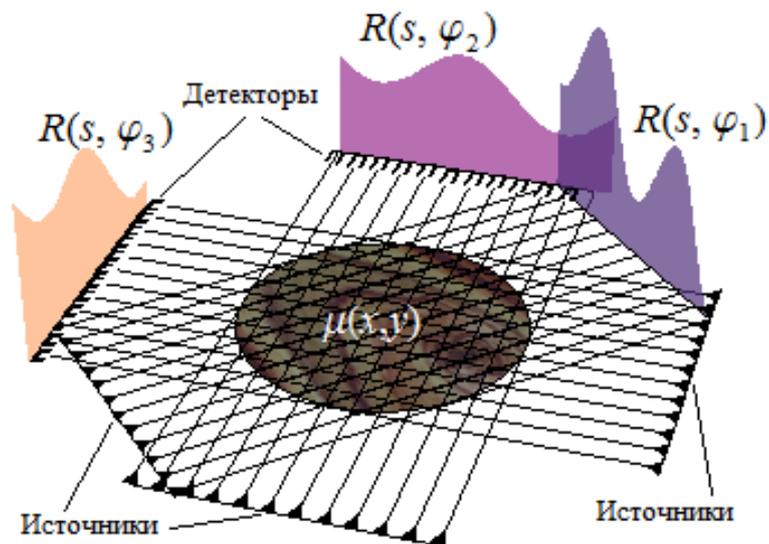


Рисунок 1.2 – Схема получения проекций одного слоя

Определив функцию  $\mu(x, y)$  для одного слоя, систему «источники - детекторы» сдвигают в направлении оси  $z$  для получения информации о следующем близком слое и т.д. Затем, по двумерным функциям  $\mu_{z_i}(x, y)$  в сечениях  $z_i$ , где  $z$  – координата перпендикулярная сечению, получают трехмерную функцию плотности поглощения  $\mu(x, y, z)$ . При этом основные трудности возникают при исследовании отдельного слоя, т.е. при восстановлении функции  $\mu_z(x, y)$ .

Подобный способ сбора данных составляет основу реконструктивной томографии[4]. На исследуемое тело воздействует излучение, проникающее внутрь объекта. Оно взаимодействует с веществом, составляющим объект, и на выходе регистрируется излучение, прошедшее через тело. При обработке полученных данных используются следующие предположения: траектория луча считается прямолинейной и выполняется линейный закон поглощения излучения в веществе.

Пусть тонкий пучок излучения падает на слой вещества. Можно считать, что поглощение в конкретной точке не зависит от направления излучения. Физический закон поглощения состоит в том, что приращение интенсивности излучения (поглощение)  $\Delta I$  пропорционально интенсивности самого излучения  $I$  и длине отрезка  $\Delta t$ , пройденного излучением, т.е.  $\Delta I$

$= -\mu \cdot I \cdot \Delta t$ , где  $\mu$  – коэффициент поглощения, который зависит от точки (от вещества в окрестности точки). Также поставлен знак минус, поскольку интенсивность излучения уменьшается, т.е. приращение интенсивности  $\Delta I$  должно быть отрицательно. Деля на  $\Delta t$  и переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем закон поглощения в дифференциальной форме

$$\frac{dI}{dt} = -\mu \cdot I \quad (1.1)$$

Параметр  $\mu$  называется коэффициентом поглощения или линейным коэффициентом ослабления. Он зависит от точки среды и не зависит от направления луча; его размерность  $\mu = \text{м}^{-1}$ . Рассмотрим прямую  $L$ , нормаль к которой образует угол  $\varphi$  с положительным направлением оси  $X$ , и находящуюся на расстоянии  $s$  от начала координат на рисунке 1.3.

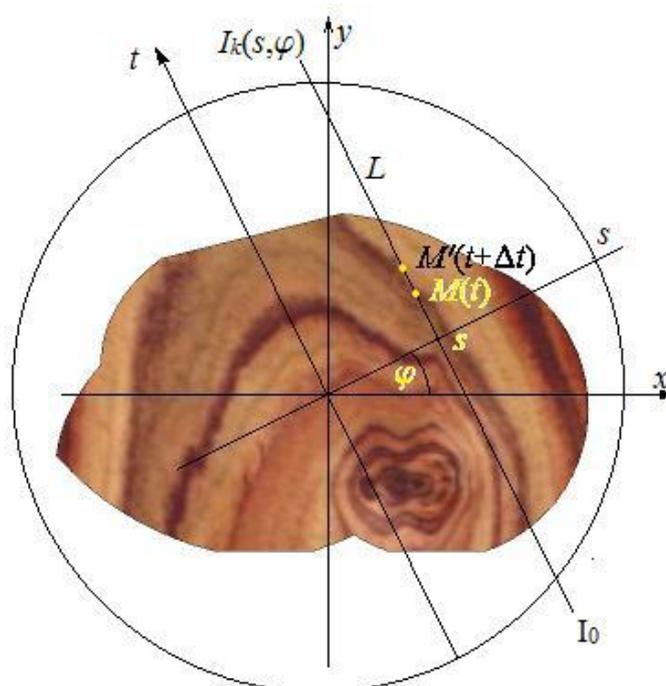


Рисунок 1.3 – К выводу закона поглощения излучения

Запишем закон поглощения уравнения (1.1) в точке  $M$  прямой  $L$ . Обозначим через  $I_0$  значение интенсивности излучения на входе в точке  $t_0$  прямой, а через  $I_k$  – значение интенсивности на выходе в точке  $t_k$ . Тогда из уравнения (1.1) получаем

$$\frac{dI}{I} = -\mu dt, \quad \int_{I_0}^{I_k} \frac{dI}{I} = - \int_{t_0}^{t_k} \mu dt, \quad \ln I \Big|_{I_0}^{I_k} = - \int_{t_0}^{t_k} \mu dt - \ln \frac{I_k}{I_0} = \int_{t_0}^{t_k} \mu dt \quad (1.2)$$

Считая известной величину излучения на входе  $I_0$  и выходе  $I_k$ , и учитывая, что результирующее значение  $I_k = I_k(s, \varphi)$  определяется прямой  $L$ , т.е. зависит от ее расстояния  $s$  и ориентации (угла  $\varphi$ ), слева в уравнении (1.2) имеем известную величину  $-\ln \frac{I_k}{I_0} = \ln \frac{I_0}{I_k} = R(s, \varphi)$ , которую обозначим через  $R(s, \varphi)$ . Параметры  $t_0$  и  $t_k$  относятся к удаленным точкам прямой и их можно считать равными  $-\infty$  и  $+\infty$ . Учитывая, что коэффициент поглощения  $\mu$  зависит от точки, т.е. является функцией  $x$  и  $y$ , из (1.2) получаем

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, y) dt \quad (1.3)$$

Введем систему координат  $(s, t)$  на рисунке 1.3. Связь между исходной системой координат  $(x, y)$  и повернутой на угол  $\varphi$  системой координат  $(s, t)$  определяется соотношениями

$$x = s \cos \varphi - t \sin \varphi, \quad y = s \sin \varphi + t \cos \varphi \quad (1.4)$$

Подставляя уравнение (1.4) в уравнение (1.3), окончательно получаем

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt. \quad (1.5)$$

Функция  $R(s, \varphi)$  считается заданной для направлений  $0 \leq \varphi < \pi$ , поскольку при изменении угла на  $\pi$  «просвечивание» ведется в обратном направлении. Интегрирование выполняется в области, где функция  $\mu(x, y)$  отлична от нуля. На практике это означает, что величина  $s$  ограничивается физическими размерами объекта. Задача состоит в восстановлении функции  $\mu(x, y)$ .

Правая часть уравнения (1.5) называется преобразованием Радона (ПР) функции  $\mu(x, y)$ . Преобразование Радона определено для любой функции

двух действительных переменных, которая достаточно быстро убывает на бесконечности так, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились. В приложениях, как правило, используются финитные функции, которые равны нулю вне некоторой ограниченной области; так, что предположение о сходимости несобственных интегралов выполняется.

Основное достижение И. Радона состоит в том, что он доказал возможность восстановления функции  $\mu(x, y)$  по ее интегралам по всем прямым  $R(s, \varphi)$  и вывел формулу обращения.

## 1.2 Определение преобразования Радона и его интерпретации

Пусть функция двух действительных переменных  $f(x, y)$  определена на всей плоскости и достаточно быстро убывает на бесконечности так, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились [4]. Преобразованием Радона функции  $f(x, y)$  называется функция

$$R[s, \varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi + t \cos \varphi) dt, \quad (1.6)$$

Преобразование Радона (ПР) представляет собой пример оператора; когда такой оператор действует на какую-то функцию, то он создает другую

функцию. Для обозначения оператора Радона используем прописную букву  $R$ .

Оператор  $R$  действует на функцию  $f(\dots)$  – это будем обозначать через  $R[f]$  или  $R[f(x, y)]$ . Функция, которая получается в результате, будет функцией двух переменных и ее значение для прямой, определяемой параметрами  $(s, \varphi)$ , будем обозначать через  $R[f](s, \varphi)$ . Эту функцию называют радоновским образом функции  $f$ . В тех случаях, когда это не вызывает недоразумений вместо записи  $R[f](s, \varphi)$  будем использовать обозначение  $R(s, \varphi)$ .

Геометрический смысл преобразования Радона  $R(s, \varphi)$  состоит в том, что это интегралы от функции  $f(x, y)$  вдоль прямых  $L$ , перпендикулярных

вектору  $n = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ , проходящих на расстоянии  $s$  (измеренном вдоль вектора  $n$  с соответствующим знаком) от начала координат. На рисунке 1.4 пояснены используемые обозначения.

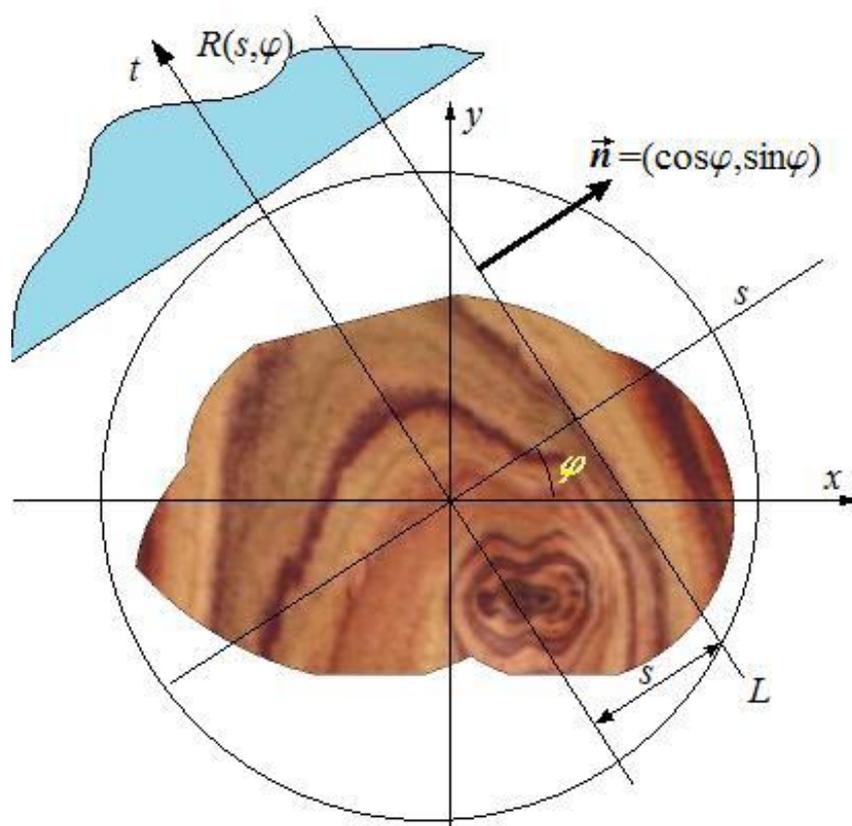


Рисунок 1.4 – К преобразованию Радона функции двух переменных

Прямая  $L$  при фиксированных  $s$  и  $\varphi$  имеет уравнение

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0, \quad (1.7)$$

Для краткости параметры  $(s, \varphi)$  иногда будем называть радоновскими координатами прямой. Связь между исходной системой координат  $(x, y)$  и повернутой на угол  $\varphi$  системой координат  $(s, t)$  определяется соотношениями

$$x = s \cos \varphi - t \sin \varphi, \quad (1.8)$$

$$s = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

или

$$x = s \sin \varphi + t \cos \varphi, \quad (1.9)$$

$$t = -x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

и уравнение прямой  $L$  в системе координат  $(s, t)$  имеет вид  $s = Const.$

Поскольку при изменении угла  $\varphi$  на  $\pi$  сканирование выполняется в обратном направлении, то для преобразования Радона выполняется равенство

$$R s, \varphi = R(-s, \varphi + \pi). \quad (1.10)$$

Это можно увидеть из уравнения (1.6). Действительно

$$\begin{aligned} R f -s, \varphi + \pi &= \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f((-s) \cos \varphi + \pi - t \sin \varphi + \pi, -s \sin \varphi + \pi \\ & \quad + t \cos(\varphi + \pi)) dt = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi + t \sin \varphi, s \sin \varphi - t \cos \varphi) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - \tau \sin \varphi, s \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\tau = R f s, \varphi . \end{aligned} \quad (1.11)$$

По-другому. Замена угла  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$  соответствует замене вектора нормали на противоположный  $n \rightarrow -n$ . Но вектор  $n$  определяет направление оси  $s$ . Поэтому координаты  $s$  и  $t$  представляют одну и ту же прямую. Очевидно, что преобразования Радона по параметру  $\varphi$  имеет период  $2\pi$ . Действительно:

$$R s, \varphi = R -s, \varphi + \pi = R - -s, \varphi + \pi + \pi = R s, \varphi + 2\pi . \quad (1.12)$$

Последнее следует также из уравнения (1.6), поскольку тригонометрические функции, используемые в уравнении (1.6), имеют период  $2\pi$ . Каждое значение радоновского образа  $R s, \varphi$  есть интеграл от тех значений функции  $f(x, y)$ , которые она принимает вдоль прямой  $L$ , определяемой параметрами  $s$  и  $\varphi$ .

Пусть дана функция  $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ . Вычислим ее преобразование Радона. Имеем:

$$\begin{aligned}
 R_{s, \varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(s \cos \varphi - t \sin \varphi)^2 - (s \sin \varphi + t \cos \varphi)^2) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2 - t^2) dt = e^{-s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = e^{-s^2} \bar{\pi},
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

т.е.

$$R \exp(-x^2 - y^2) = \bar{\pi} e^{-s^2}. \tag{1.14}$$

Получаем, что преобразование Радона функции  $-x^2 - y^2$  зависит только от параметра  $s$ .

Преобразование Радона осесимметричной функции  $f(x, y) = f(\overline{x^2 + y^2})$  не зависит от угла  $\varphi$ , т.е.  $R f(\overline{x^2 + y^2})_{s, \varphi} = R(s)$ .

Действительно

$$\begin{aligned}
 R f(\overline{x^2 + y^2}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\overline{(s \cos \varphi - t \sin \varphi)^2, (s \sin \varphi + t \cos \varphi)^2}) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\overline{s^2 + t^2}) dt = R s,
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

поскольку параметр не входит в выражение для вычисления интеграла.

Учитывая и то, что для осесимметричной функции преобразование Радона не зависит от параметра, имеем  $R s = R -s$ , т.е. Преобразование Радона осесимметричной функции четно.

Вычислим преобразование Радона полусферы, т.е. функции

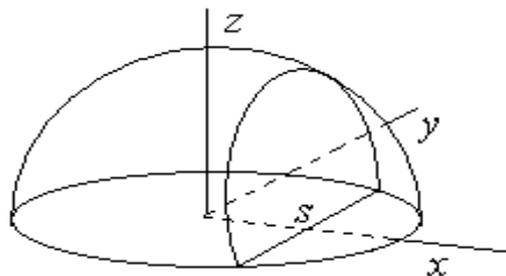


Рисунок 1.5 – Макет полусферы для преобразования Радона

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \quad (1.16)$$

Поскольку функция осесимметричная, то достаточно вычислить интеграл по любой прямой, находящейся на расстоянии  $s$  от начала координат, например, по прямой  $x = s$ , параллельной оси  $OY$ . При  $s < 1$  имеем

$$\begin{aligned} R_s &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1-y^2-s^2} dy = 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1-s^2-y^2} dy \\ &= \left[ y \sqrt{1-s^2-y^2} + 1-s^2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{1-s^2}} \right]_0^{\sqrt{1-s^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} (1-s^2), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\int \frac{x}{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \frac{1}{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (1.18)$$

В результате

$$R f(x, y) s = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (1-s^2), & s < 1 \\ 0, & s \geq 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

Рассмотрим трехмерное тело, ограниченное сверху поверхностью  $z = f(x, y) \geq 0$  и снизу – плоскостью  $z = 0$ . Тогда интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dt$ , представляет площадь сечения этого тела вертикальной плоскостью (параллельной оси  $z$ ), проходящей через прямую  $L$  на рисунке 1.6.

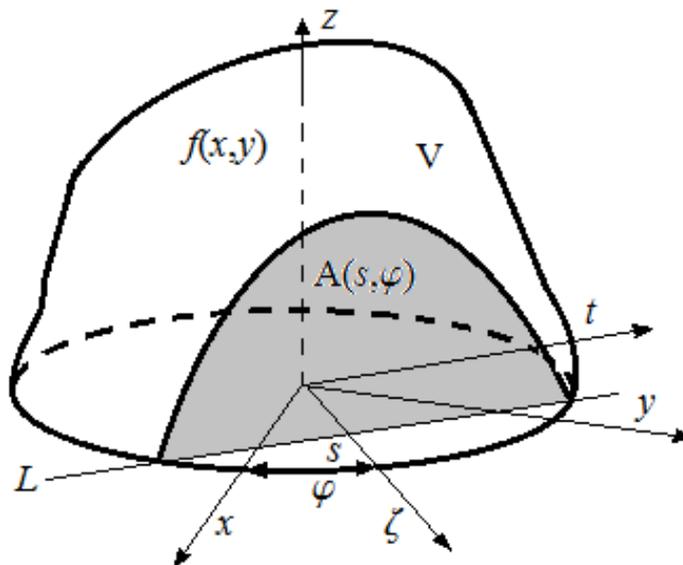


Рисунок 1.6 – Геометрический смысл преобразования Радона

Если определить площадь сечения  $A$ , как функцию расстояния  $s$  прямой до начала координат и угла вектора ее нормали  $\varphi$ , определим преобразование Радона функции  $f(x, y)$ , т.е.  $R(s, \varphi) \equiv A(s, \varphi)$ .

Итак, значение радоновского образа  $R(s, \varphi)$  есть площадь сечения поверхности  $z = f(x, y)$  вертикальной плоскостью, проходящей через прямую  $L$ , определяемую параметрами  $s$  и  $\varphi$ .

Рассмотрим трехмерное тело  $V$ , представленное на рисунке 1.6, и станем рассекать его плоскостями перпендикулярными к оси  $\zeta$  (ось  $\zeta$  образует угол  $\nu$  с положительным направлением оси  $X$ ). Допустим, что все сечения квадратуемы и пусть площадь сечения  $A(\zeta, \varphi)$ , отвечающего расстоянию  $\zeta$  прямой  $L$  до начала координат, будет непрерывной функцией  $\zeta$ . Тогда объем части тела  $V$ , отсекаемой плоскостью  $\zeta = s$ , может быть вычислен по формуле

$$V(s, \varphi) = \int_{-\infty}^s A(\zeta, \varphi) d\zeta. \quad (1.20)$$

Дифференцируя последнее равенство по  $s$ , получаем

$$\frac{\partial V(s, \varphi)}{\partial s} = A(s, \varphi). \quad (1.21)$$

Но  $A_{s, \varphi} = R(s, \varphi)$  поэтому

$$R_{s, \varphi} = \frac{\partial V(s, \varphi)}{\partial s}. \quad (1.22)$$

Итак, если функция  $f(x, y)$  ограничивает сверху трехмерное тело  $V$ , то ее преобразование Радона  $R_{s, \varphi}$  может быть вычислено по формуле (1.7), где  $V_{s, \varphi}$  является объемом части тела  $V$ , отсекаемой плоскостью  $\zeta = s$  перпендикулярной к прямой  $\zeta$ , образующей угол  $\varphi$  с положительным направлением оси  $X$ .

Пусть  $f(x, y)$  – плотность распределения массы на плоскости. Обозначим через  $M_{s, \varphi}$  массу полуплоскости  $x \cos \varphi + y \sin \varphi < s$ , причем  $x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0$  является уравнением прямой  $L$ . Введем повернутую на угол  $\varphi$  систему координат  $(\zeta, t)$ , связанную с системой координат  $(x, y)$  соотношениями

$$x = \zeta \cos \varphi - t \sin \varphi, y = \zeta \sin \varphi + t \cos \varphi, \quad (1.23)$$

тогда

$$\begin{aligned} M_{s, \varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta \cos \varphi - t \sin \varphi, \zeta \sin \varphi + t \cos \varphi) dt d\zeta \end{aligned} \quad (1.24)$$

Дифференцируя по параметру  $s$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(s, \varphi)}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta \cos \varphi - t \sin \varphi, \zeta \sin \varphi + t \cos \varphi) dt d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt = R f(x, y)(s, \varphi). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Итак, если функция  $f(x, y)$  задает плотность распределения конечной массы на плоскости, то ее преобразование Радона  $R(s, \varphi)$  может быть вычислено по формуле:

$$R(x, \varphi) = \frac{\partial M(s, \varphi)}{\partial s}. \quad (1.26)$$

Заметим, что величины  $M(s, \varphi)$  и  $V(s, \varphi)$  вычисляются по одной и той же формуле:

$$f(x, y) dx dy. \quad (1.27)$$

По полуплоскости

### 1.3 Свойства преобразования Радона

Преобразование Радона линейно. Это значит, что если есть две функции  $f_1$  и  $f_2$  и константы  $a_1$  и  $a_2$ , то

$$R(a_1 f_1 + a_2 f_2)(s, \varphi) = a_1 R f_1(s, \varphi) + a_2 R f_2(s, \varphi). \quad (1.28)$$

Это следует из линейности операции интегрирования.

Имеет место формула подобия

$$R f(ax, ay)(s, \varphi) = \frac{1}{a} R f(x, y)(as, \varphi). \quad (1.29)$$

Действительно

$$\begin{aligned} R f(ax, ay)(s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a(s \cos \varphi - \tau \sin \varphi), a(s \sin \varphi + \\ &\tau \cos \varphi)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta \cos \varphi - t \sin \varphi, \zeta \sin \varphi + \\ &t \cos \varphi) \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} R f(x, y)(\zeta, \varphi) = \frac{1}{a} R f(x, y)(as, \varphi). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Заметим, что уравнение (1.27) связывает преобразование Радона двух разных функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y) = f(ax, ay)$ . В то время как формула

$$R f(x, y)(s, \varphi) = R f(x, y)(-s, \varphi + \pi) \quad (1.31)$$

связывает преобразование Радона одной и той же функции.

Преобразование Радона функции  $g(x, y)$ , полученной поворотом на угол  $\alpha$  из функции  $f(x, y)$ , вычисляется по формуле.

$$R g(x, y) = s, \varphi = R f(x, y) = s, \varphi - \alpha. \quad (1.32)$$

Действительно это можно увидеть на рисунке 1.7

$$g(x, y) = f(x', y') \quad (1.33)$$

Где

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

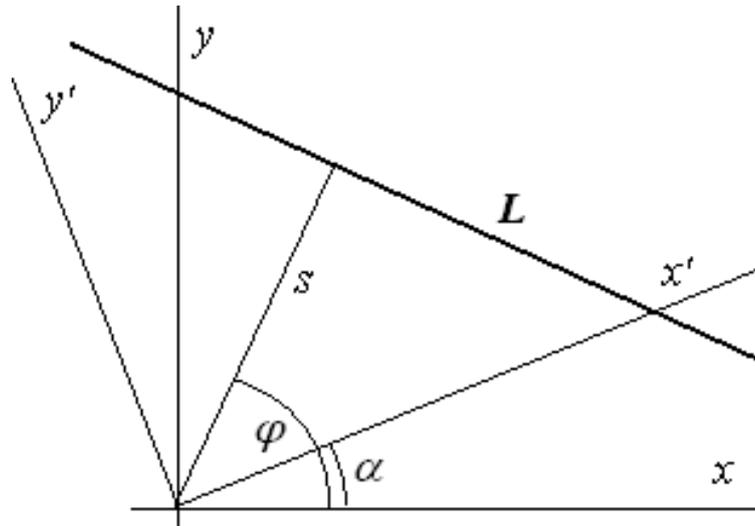


Рисунок 1.7 – К выводу формулы поворота

Расстояние  $s$  прямой  $L$  до начала координат одинаковое в обеих системах

координат  $(x, y)$  и  $(x', y')$ , а вектор нормали к прямой в системе  $(x', y')$  образует угол с осью  $x'$  равный  $\varphi - \alpha$ . Тогда имеем

$$x' = s \cos \varphi - \alpha - t \sin(\varphi - \alpha), \quad (1.34)$$

$$y' = s \sin \varphi - \alpha + t \cos(\varphi - \alpha).$$

Далее имеем

$$R f x', y' s, \varphi = \quad (1.35)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - \alpha - t \sin(\varphi - \alpha), s \sin \varphi - \alpha + t \cos(\varphi - \alpha)) dt = R f(x, y) (s, \varphi - \alpha).$$

Т.е. для матрицы  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  поворота на угол  $\alpha$  имеем

$$R f(Ax) s, \varphi = R f(x) (s, \varphi - \alpha) \quad (1.36)$$

Где  $x = (x, y)$ .

Пусть для функции  $f(x, y)$  преобразование Радона известно, т.е. функция  $R f(s, \varphi)$  задана. Функция  $f(x - x_0, y - y_0)$  получается из  $f(x, y)$  сдвигом на вектор  $r_0 = (x_0, y_0)$ . Введем координаты  $(x', y')$ , связанные с  $(x, y)$  соотношениями  $x' = x - x_0, y' = y - y_0$  на рисунке 1.8.

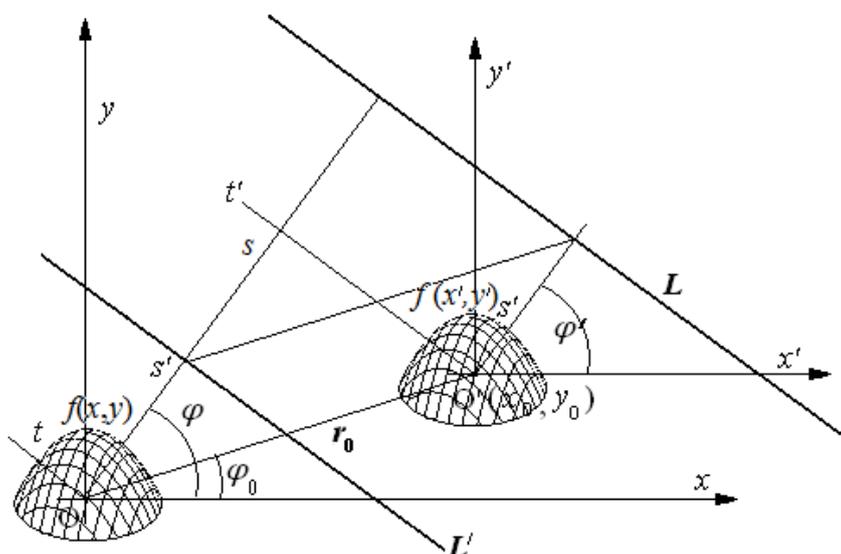


Рисунок 1.8 – К выводу формулы сдвига

Поскольку

$$f(x - x_0, y - y_0) = f(x', y') \quad (1.37)$$

и

$$s' = s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (1.38)$$

то получаем

$$\begin{aligned}
& R f(x - x_0, y - y_0) \quad s, \varphi = \tag{1.39} \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') dt \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} f(s' \cos \varphi - \sin \varphi \cdot t, s' \sin \varphi + \cos \varphi \cdot t) dt = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} f(s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi - \sin \varphi \cdot t, (s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin \varphi + \cos \varphi \cdot t) dt = \\
& = R f(x, y) \quad (s - r_0 \cos \varphi - \varphi_0, \varphi)
\end{aligned}$$

Но

$$r_0 \cos \varphi - \varphi_0 = r_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi + r_0 \sin \varphi_0 \sin \varphi = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi. \tag{1.40}$$

Поэтому

$$R f(x - x_0, y - y_0) \quad s, \varphi = R f(x, y) \quad (s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, \varphi). \tag{1.41}$$

Последнюю формулу можно записать в виде

$$R f(x - x_0, y - y_0) \quad s, \varphi = R f(x, y) \quad s - s_0, \varphi, \tag{1.42}$$

где

$$s_0 = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi. \tag{1.43}$$

Это означает, что смещение функции в пространственной области приводит к сдвигу «проекции» вдоль направления  $s$  на величину  $s_0(\varphi)$ , зависящую от угла. Аналогичное свойство имеет место в  $m$  – мерном случае.

Пусть дана функция

$$f(x - a) = f(x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m). \tag{1.44}$$

Ее преобразованием Радона будет

$$\begin{aligned}
R f(x - a) \quad s, n &= \int f(x - a) \delta(s - n, x) dx = \int f(x - a) \delta(s - n, a - n, y) dy = R f(s - n, a, n) \\
&= \int f(y) \delta(s - n, a - n, y) dy = R f(s - n, a, n)
\end{aligned} \tag{1.45}$$

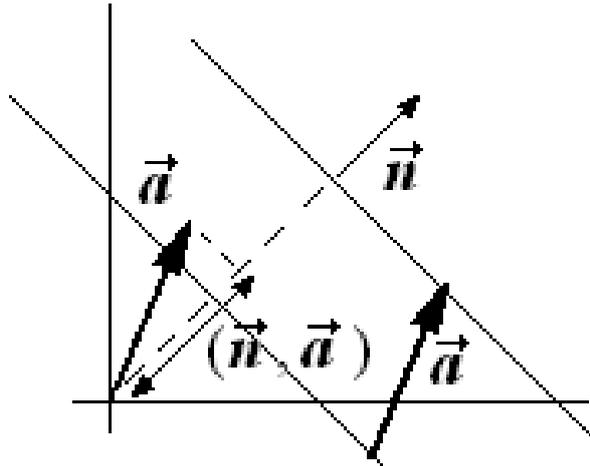


Рисунок 1.9 – проекции вектора сдвига  $a$

Из рисунка 1.9 видно, что сдвигка  $(n, a)$  равна проекции вектора сдвига  $a$  на направление единичного вектора  $n$  нормали к гиперплоскости/прямой. Для функций двух переменных.

Пусть функция  $F(x, y)$  получена сдвигом из некоторой осесимметричной функции  $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ , т.е.

$$F(x, y) = f(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}). \quad (1.46)$$

Тогда

$$\begin{aligned} R F(x, y) \quad s, \varphi &= R f(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) \quad s, \varphi = \\ &= R f(\sqrt{x^2 + y^2}) (s - a \cos \varphi - b \sin \varphi) = \Theta(s - a \cos \varphi - b \sin \varphi). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Таким образом, если преобразование Радона некоторой функции  $F(x, y)$  представляется выражением вида

$$\Theta(s - a \cos \varphi - b \sin \varphi), \quad (1.48)$$

то это значит, что она получена сдвигом на вектор  $a = (a, b)$  из некоторой осесимметричной функции

$$f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (1.49)$$

Преобразование Радона которой имело вид  $\Theta(s)$ , т.е. имело место

$$R f \quad s = \Theta \quad s. \quad (1.50)$$

Вычислим преобразование Радона функции

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) \quad (1.51)$$

Преобразование Радона функции  $\exp(-x^2 - y^2)$  было вычислено нами ранее. Оно равнялось

$$R \exp(-x^2 - y^2) = \bar{\pi} e^{-s^2}. \quad (1.52)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} R \exp(-(x-a)^2 - y^2) &= R \exp(-(s-a \cos \varphi - b \sin \varphi)^2) \\ &= \bar{\pi} \exp(-(s-a \cos \varphi - b \sin \varphi)^2). \end{aligned} \quad (1.53)$$

#### 1.4 Преобразование Радона осесимметричных функций

Преобразование Радона  $R(s, \varphi)$  осесимметричных функций не зависит от угла сканирования  $\varphi$  и, как оказывается, является хорошо известным задолго до Радона преобразованием Абеля[4]. Известно, что любая осесимметричная функция может быть представлена в виде

$$z(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r), \quad (1.54)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Преобразование Радона осесимметричной функции  $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  может быть вычислено по формулам

$$R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) dx. \quad (1.55)$$

Преобразование Радона осесимметричной функции не зависит от угла  $\varphi$ . Поэтому можно вычислить интеграл по любой прямой, находящейся на расстоянии  $s$  от начала координат, например, по прямой  $x = s$ , параллельной оси  $OY$ . Подстановка в значения  $\varphi = 0$  дает  $R(s) = R(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt$ . Учитывая, что для осесимметричной функции выполняется равенство  $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = F(y, x)$  получаем также  $R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) dt$  и имя переменной интегрирования не имеет значения. Заметим, что если выбрать

прямую  $y = s$ , при  $\varphi = \pi/2$  формула дает  $R s = R s, \frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) dt$  и замена  $-t = x$  приводит к тому же результату  $R s = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx$ .

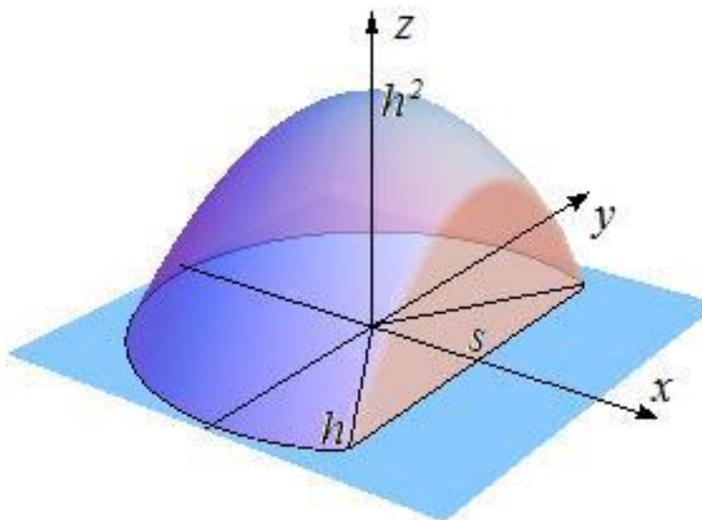


Рисунок 1.10. – Функция части параболоида вращения

Вычислим Преобразование Радона функции «шапочка».

$$f(x, y) = \begin{cases} h^2 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 < h^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq h^2 \end{cases} \quad (1.56)$$

«Шапочкой» является часть параболоида вращения. Поскольку функция осесимметричная, то можно использовать уравнение (1.54). Например, будем вычислять интеграл по прямой  $x = s$ , параллельной оси  $Oy$ . При  $s < h$  имеем

$$\begin{aligned} (s) \quad & \int_{-\sqrt{h^2-s^2}}^{\sqrt{h^2-s^2}} (h^2 - s^2 - y^2) dy = 2 \int_0^{\sqrt{h^2-s^2}} (h^2 - s^2 - y^2) dy = \\ & = 2 \left[ h^2 - s^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{h^2-s^2}} = 2(h^2 - s^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(h^2 - s^2)^{\frac{3}{2}} \\ & = \frac{4}{3}(h^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

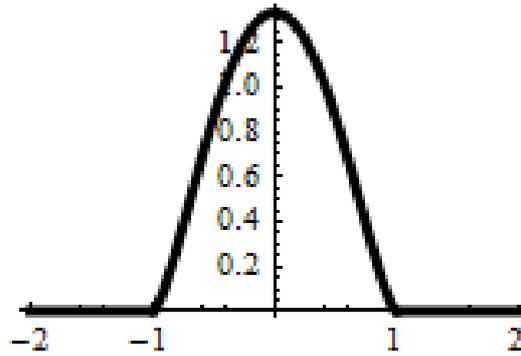


Рисунок 1.11 – График функции  $R(s)$  для функции шапочка

$$R s = \begin{cases} \frac{4}{3} (h^2 - s^2)^{3/2}, & s < h \\ 0 & , s \geq h \end{cases} \quad (1.58)$$

График функции  $R(s)$  при  $h = 1$  показан на рисунке 1.11. Используя этот результат, вычислим преобразование Радона функции  $r^2 \chi(r)$ , где  $\chi(r)$  – характеристическая функция единичного круга и  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Имеем

$$r^2 \chi r = \chi r - 1 - r^2 \chi r . \quad (1.59)$$

Тогда в силу линейности преобразования Радона:

$$R r^2 \chi(r) = R \chi(r) - R 1 - r^2 \chi r . \quad (1.60)$$

Но зная, что  $R \chi(r) = 2 \int_0^1 \sqrt{1-s^2} \chi(s) ds$ . Тогда при  $s < 1$  получаем

$$\begin{aligned} R r^2 \chi(r) &= 2 \int_0^1 \sqrt{1-s^2} - \frac{4}{3} \int_0^1 \sqrt{1-s^2} (1-s^2) ds \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-s^2} (2 - \frac{4}{3} (1-s^2)) ds = \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{1-s^2} (1+2s^2) ds , \end{aligned} \quad (1.61)$$

т.е.

$$R \sqrt{x^2 + y^2} \chi(r) = \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{1-s^2} (1+2s^2) ds \cdot \chi s . \quad (1.62)$$

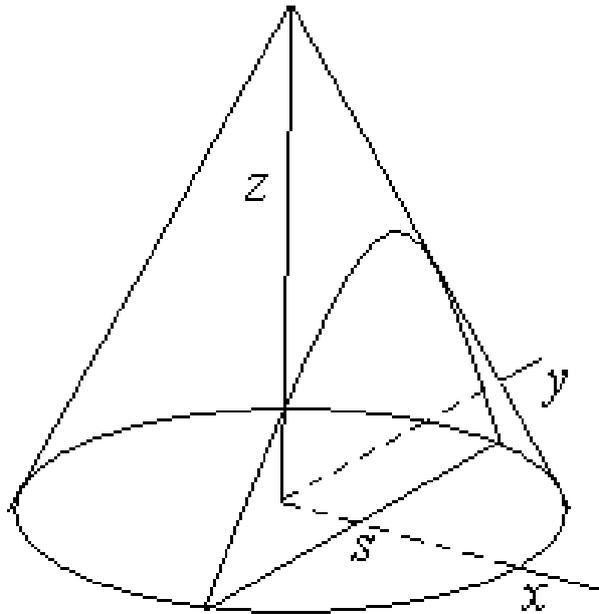


Рисунок 1.12 – Осесимметричная функция конуса

Вычислим преобразование Радона для конуса, т.е. функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \quad (1.63)$$

Поскольку функция осесимметричная, то достаточно вычислить интеграл по любой прямой, находящейся на расстоянии  $s$  от начала координат, например, по прямой  $x = s$ , параллельной оси  $Oy$ . При  $s < 1$  имеем

$$\begin{aligned} R_s f &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} (1 - \sqrt{y^2 + s^2}) dy = 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} (1 - \sqrt{y^2 + s^2}) dy = \quad (1.64) \\ &= 2 \sqrt{1-s^2} - 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{s^2 + y^2} dy = 2 \sqrt{1-s^2} - \left[ y \sqrt{s^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. s^2 \ln \left( y + \sqrt{y^2 + s^2} \right) \right]_0^{\sqrt{1-s^2}} = \\ &= 2 \sqrt{1-s^2} - \left[ \sqrt{1-s^2} \sqrt{1-s^2 + s^2} \ln \left( 1 + \sqrt{1-s^2} \right) - s \ln s \right] = \\ &= \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{s}{1 + \sqrt{1-s^2}}. \end{aligned}$$

Здесь использован табличный интеграл. В результате получаем

$$R(s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{s}{1+\sqrt{1-s^2}}, & s < 1 \\ 0, & s \geq 1 \end{cases} \quad (1.65)$$

График функции  $R(s)$  показан на рисунке 1.13.

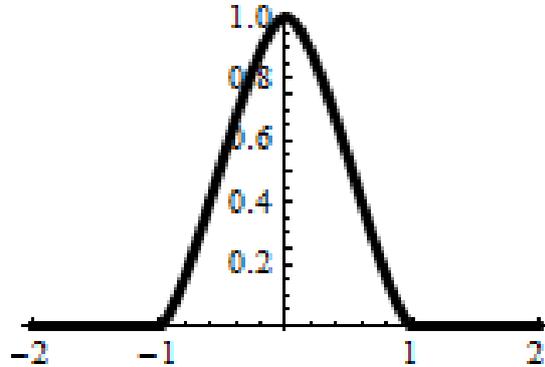


Рисунок 1.13 – График функции  $R(s)$  для конуса

Вычислим преобразование Радона сферического сегмента. Пусть радиус сферы равен  $a$  и на расстоянии  $h < a$  от центра проведена плоскость, которая отсекает от сферы сегмент. Расположим в этой плоскости начало координат так, как показано на рисунке 1.14. Радиус окружности  $L$  равен  $b = \sqrt{a^2 - h^2}$ . Вычислим преобразование Радона функции, совпадающей с поверхностью сегмента внутри окружности  $L$  и равной нулю вне нее.

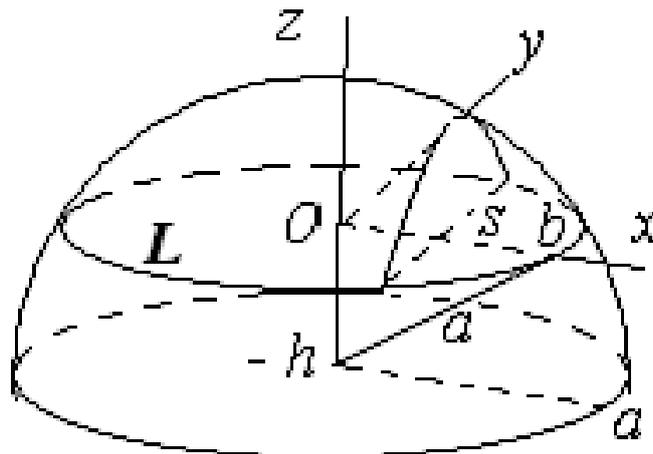


Рисунок 1.14 – Осесимметричная функция сферического сегмента

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 < a^2 - h^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq a^2 - h^2 \end{cases} \quad (1.66)$$

При  $s \leq b$  имеем

$$\begin{aligned} R(s) &= \int_{-\sqrt{b^2 - s^2}}^{\sqrt{b^2 - s^2}} \sqrt{a^2 - s^2 - y^2} - h \, dy \\ &= \int_0^{\sqrt{b^2 - s^2}} 2(\sqrt{a^2 - s^2 - y^2} - h) \, dy. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Используя табличный интеграл, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{b^2 - s^2}} (\sqrt{a^2 - s^2 - y^2} - h) \, dy \\ &= \frac{1}{2} y \sqrt{a^2 - s^2 - y^2} + (a^2 - s^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - s^2}} - h y \Big|_0^{\sqrt{b^2 - s^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - s^2} \sqrt{a^2 - b^2} + (a^2 - s^2) \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} - h \sqrt{b^2 - s^2}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

тогда

$$\begin{aligned} R(s) &= h \sqrt{b^2 - s^2} + (a^2 - s^2) \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} - 2h \sqrt{b^2 - s^2} = \\ &= (a^2 - s^2) \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} - h \sqrt{b^2 - s^2}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

График функции  $R(s)$  при  $a = 1, h = 1/2, b = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$  показан на рисунке 1.15.

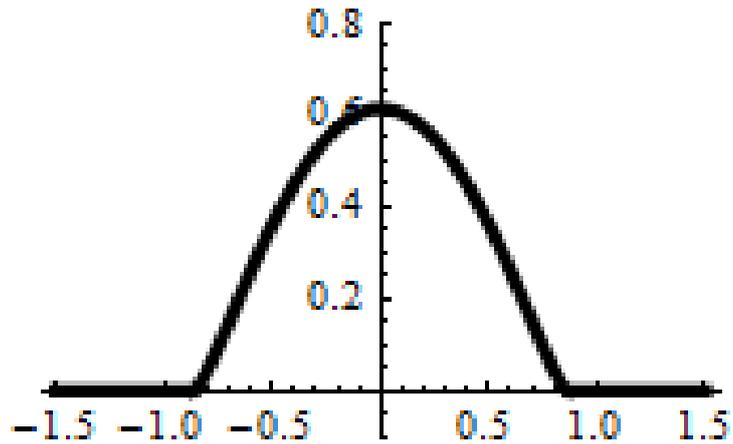


Рисунок 1.15 – График функции  $R(s)$  для сферического сегмента

Если выражение для  $R(s)$  записать в виде, использующем параметр  $b$ ,

$$R(s) = \begin{cases} a^2 - s^2 \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{a^2 - b^2} - \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - s^2)}}{(a^2 - b^2)(b^2 - s^2)}, & s < b, \\ 0, & s \geq b \end{cases} \quad (1.70)$$

то его можно пояснить по-другому. Изобразим сечение сферы плоскостью  $x = s$  ( $s < b$ ). Обозначения и длины отрезков  $DC$  и  $OC$  показаны на рисунке 1.16.

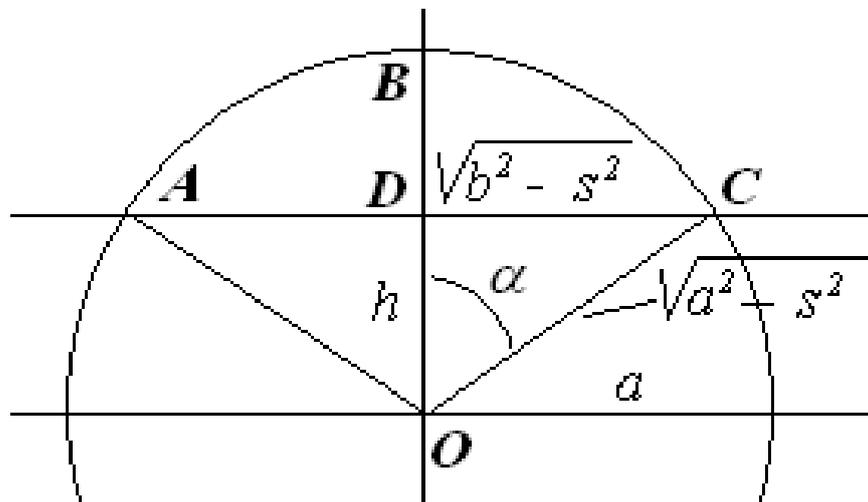


Рисунок 1.16 – Сечение сферы плоскостью

Преобразование Радона равно площади сегмента  $ABCD$ , которая равняется площади сектора  $OABC$  минус площадь треугольника  $OAC$ . Но

$$S_{OABC} = OC^2 \cdot \alpha = a^2 - s^2 \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{a^2 - b^2} \quad (1.71)$$

$$S_{OABC} = \frac{1}{2} AC \cdot OD = h \sqrt{b^2 - s^2}.$$

Вычитая из первого значения второе, приходим к тому же результату, что и выше. При  $h = 0$  и, следовательно,  $b = s$ , имеем

$$R_s = \begin{cases} a^2 - s^2 \pi/2, & s < a \\ 0, & s \geq a \end{cases} \quad (1.72)$$

### 1.5 Преобразование Радона осесимметричных функций как преобразование Абеля

Запишем преобразование Радона для осесимметричной функции  $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$ . Вспоминая следующее определение

$$R f(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt. \quad (1.73)$$

Для осесимметричной функции имеем

$$\begin{aligned} R f(\sqrt{x^2 + y^2}, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{(s \cos \varphi - t \sin \varphi)^2 + (s \sin \varphi + t \cos \varphi)^2}) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{s^2 + t^2}) dt = 2 \int_0^{\infty} f(\sqrt{s^2 + t^2}) dt = R_s. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Преобразование Радона осесимметричной функции не зависит от параметра  $\varphi$ . Сделаем замену

$$r = \sqrt{s^2 + t^2}, \text{ где } s \leq r < \infty \text{ и } t = \sqrt{r^2 - s^2}, dt = \frac{r dr}{r^2 - s^2}. \text{ Тогда} \quad (1.75)$$

$$R_s = 2 \int_0^{\infty} f(\sqrt{s^2 + t^2}) dt = 2 \int_s^{\infty} f(r) \frac{r dr}{r^2 - s^2}.$$

Таким образом, преобразование Радона осесимметричной функции  $f(r)$  выражается интегралом

$$R_s = 2 \int_s^\infty \frac{rf(r)}{r^2 - s^2} dr. \quad (1.76)$$

Если ввести обозначения  $x = s^2, R_s = R_{\bar{x}} = q(x), r^2 = \tau, f(r) = f(\bar{\tau}) = g(\tau)$  то получим

$$q(x) = \int_x^\infty \frac{g(\tau)}{(\tau - x)^{1/2}} d\tau. \quad (1.77)$$

В настоящее время преобразованием Абеля функции  $g(\tau)$  принято называть

интеграл вида

$$q(x) = \int_a^\infty \frac{g(\tau)}{(x - \tau)^\alpha} d\tau, \quad (1.78)$$

где  $0 < \alpha < 1$  и  $a > 0$ . Если известна функция  $q(x)$ , а  $g(x)$  – неизвестная, то данное уравнение называют уравнением Абеля. Другая его форма, которую называют «внешним» преобразованием Абеля, задается интегралом

$$q(x) = \int_x^\infty \frac{g(\tau)}{(\tau - x)^\alpha} d\tau. \quad (1.79)$$

В нашем случае преобразование Радона осесимметричной функции в форме уравнения (1.74) совпало с внешним преобразованием Абеля в уравнении (1.76) при  $\alpha = 1/2$ . Рассмотрим некоторое выражение  $f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Используя его, построим финитную осесимметричную

функцию  $f(r) = \begin{cases} f(r), & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$ . Тогда преобразование Радона функции  $f(r)$

имеет вид

$$R f s = 2 \int_s^{\infty} \frac{rf(r)}{r^2 - s^2} dr = \begin{cases} 2 \int_s^{\infty} \frac{rf(r)}{r^2 - s^2} dr, & s < a \\ 0, & s > a \end{cases} \quad (1.80)$$

Действительно, если  $s \geq a$ , то под интегралом  $I = \int_s^{\infty} \frac{rf(r)}{r^2 - s^2} dr$  будет стоять нулевая «ветвь» функции  $f(r)$ . Если же  $s < a$ , то для интеграла  $I$  будем иметь  $\int_s^{\infty} = \int_s^a + \int_a^{\infty} = \int_s^a$ , поскольку второй интеграл  $\int_a^{\infty}$  равен нулю.

Рассмотрим осесимметричную функцию

$$f(x) = \begin{cases} f_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (1.81)$$

При  $|s| > a$  функция  $f(r)$  равна нулю и формула (1.73) дает ноль.

При  $|s| < a$  имеем

$$\begin{aligned} R f s &= 2 \int_s^a \frac{rf_0}{r^2 - s^2} dr \\ &= 2f_0 \int_s^a \frac{r}{r^2 - s^2} dr = 2f_0 \int_s^a \frac{1}{r^2 - s^2} dr = 2f_0 \int_s^a \frac{1}{a^2 - s^2} dr. \end{aligned} \quad (1.82)$$

В результате получаем

$$R f s = \begin{cases} 2f_0 \frac{a^2 - s^2}{a^2 - s^2}, & s < a \\ 0, & s > a \end{cases} \quad (1.83)$$

Вычислить преобразование Радона полусферы, т.е. осесимметричной функции вида

$$f(r) = f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1 - r^2}, & r < 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (1.84)$$

Из уравнения (1.73) при  $s < 1$  имеем

$$\begin{aligned}
R f s &= 2 \int_s^1 \frac{r \sqrt{1-r^2}}{r^2-s^2} dr & (1.85) \\
&= 2 \int_s^1 \frac{\sqrt{1-r^2}}{r^2-s^2} dr = 2 \int_s^1 \frac{1}{1-r^2} d \sqrt{r^2-s^2} = \\
&= 2 \int_s^1 \frac{1}{1-r^2} \frac{1}{s} - \frac{1}{r^2-s^2} d \sqrt{1-r^2} \\
&= -2 \int_s^1 \frac{1}{r^2-s^2} d \sqrt{1-r^2} = \\
&= \int_{\sqrt{1-s^2}}^0 \frac{1}{1-s^2-t^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \frac{1}{1-s^2-t^2} dt = \\
&= 2 \left[ \frac{1}{2} t \frac{1}{1-s^2-t^2} + \frac{1}{2} \frac{1-s^2}{1-s^2} \arcsin \frac{t}{\sqrt{1-s^2}} \right]_{t=0}^{\sqrt{1-s^2}} = \\
&= 1-s^2 \cdot \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} (1-s^2).
\end{aligned}$$

В результате

$$R f s = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (1-s^2), & s < 1 \\ 0, & s \geq 1 \end{cases}. \quad (1.86)$$

Преобразование Радона полусферы можно вычислить геометрическим способом путем вычисления площади сечения полушара плоскостью, проходящей на расстоянии  $s$  от центра полусферы. Действительно, при  $s < R$  сечение полушара вертикальной плоскостью будет полукруг на рисунке 1.17.

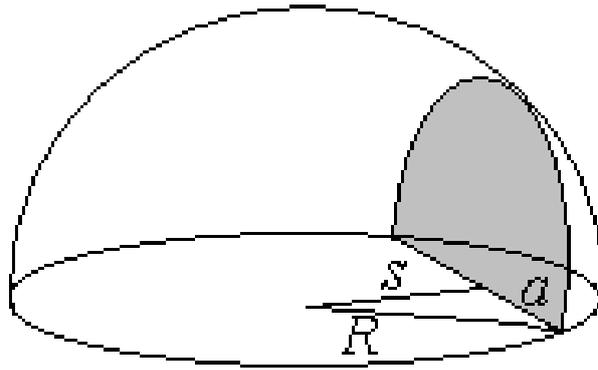


Рисунок 1.17 – Сечение полушара

Его радиус  $a$  равен  $a = \sqrt{R^2 - s^2}$ . И площадь полукруга  $S = \frac{\pi}{2} a^2 = \frac{\pi}{2} (R^2 - s^2)$

при  $s < R$ . Площадь сечения равна нулю при  $s \geq R$ .

Далее вычислим преобразование Радона осесимметричной функции  $f(r)$  вида

$$\begin{aligned}
 & 0, r \leq r_1 & (1.87) \\
 f(r) &= f_1 + \frac{f_2 - f_1}{r_2 - r_1} (r - r_1), r_1 < r < r_2 \\
 & 0, r \geq r_2 \\
 & (r = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 < r_1 < r_2)
 \end{aligned}$$

Обозначим  $k = \frac{f_2 - f_1}{r_2 - r_1}$ . Если  $s \leq r_1$ , то из уравнения (1.73) имеем

$$\begin{aligned}
 R(s) &= 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r(f_1 + k(r - r_1))}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 \int_{r=r_1}^{r_2} (f_1 + k(r - r_1)) d\sqrt{r^2 - s^2} & (1.88) \\
 &= \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{t}{s^2 + t^2} dt \\
 &= 2 \left[ f_1 - k r_1 t \right]_{r=r_1}^{r_2} + 2k \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{t}{s^2 + t^2} dt = \text{см. А.2} =
 \end{aligned}$$

$$= 2 f_1 - k r_1 t \frac{\sqrt{r_2^2 - s^2}}{\sqrt{r_1^2 - s^2}} + k t \sqrt{s^2 + t^2} + s^2 \ln t + \frac{\sqrt{r_2^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 + t^2}} \frac{\sqrt{r_1^2 - s^2}}{t}$$

## 1.6 Обращение осесимметричного преобразования Радона

Как было рассмотрено ранее, осесимметричное преобразование Радона сводится к решению «внешнего» интегрального уравнения Абеля

$$\int_s^\infty \frac{2rf(r)}{r^2 - s^2} dr = R(s). \quad (1.89)$$

Для его решения используем методику, которую применял Абель. Будем считать, что правая часть непрерывно дифференцируема, а искомая подынтегральная функция такова, что несобственный интеграл сходится. Для этого на бесконечности она должна убывать быстрее, например, чем  $1/r$ . Заметим, что функция  $R(s)$  в осесимметричном случае является четной и может быть представлена в виде  $R(s)$ . Но тогда в уравнении (1.89) можно рассматривать только положительные значения  $s$  и модуль  $s$  в нижнем пределе интеграла можно убрать. Умножим обе части (1) на  $2s \sqrt{s^2 - x^2} ds$  и проинтегрируем по  $s$  в пределах от  $x$  до  $\infty$ . Имеем

$$\int_x^\infty \frac{2s}{s^2 - x^2} ds \int_s^\infty \frac{2rf(r)}{r^2 - s^2} dr = \int_x^\infty \frac{2sR(s)}{s^2 - x^2} ds. \quad (1.90)$$

Используя формулу Дирихле имеем

$$\int_a^b \int_y^b f(x,y) dx = \int_a^b \int_a^x f(x,y) dy. \quad (1.91)$$

Формула Дирихле в случае бесконечных пределов имеет вид

$$\int_a^\infty \int_y^\infty f(x,y) dx = \int_a^\infty \int_a^x f(x,y) dy, \quad (1.92)$$

если только все интегралы сходятся. Для повторного интеграла в левой части уравнения (1.90) уравнение (1.91) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \int_x^\infty ds \int_s^\infty \frac{2rf(r)}{r^2 - s^2} \frac{2s}{s^2 - x^2} dr &= \begin{matrix} x \rightarrow a \\ y \leftrightarrow s \end{matrix} r \rightarrow x \quad (1.93) \\
 &= \int_x^\infty dr \int_x^r \frac{2rf(r)}{r^2 - s^2} \frac{2s}{s^2 - x^2} ds \\
 &= \int_x^\infty 2rf(r) dr \int_x^r \frac{2s ds}{r^2 - s^2} \frac{1}{s^2 - x^2}.
 \end{aligned}$$

Это приводит уравнение (1.90) к уравнению

$$\int_x^\infty 2rf(r) dr \int_x^r \frac{2s ds}{r^2 - s^2} \frac{1}{s^2 - x^2} = F(x) \quad (1.94)$$

где

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{2sR(s)}{s^2 - x^2} ds. \quad (1.95)$$

Во внутреннем интеграле уравнения (1.92) сделаем подстановку  $s^2 = r^2 - y(r^2 - x^2)$ , тогда  $ds^2 = -r^2 - x^2 dy$ ,  $s^2 - x^2 = (r^2 - x^2)(1 - y)$ ,  $r^2 - s^2 = y(r^2 - x^2)$ , и диапазоном изменения  $y$  будет 1 и 0. Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_x^r \frac{2s ds}{r^2 - s^2} \frac{1}{s^2 - x^2} &= \int_{x^2}^{r^2} \frac{ds^2}{r^2 - s^2} \frac{1}{s^2 - x^2} = \quad (1.96) \\
 &= \int_1^0 \frac{-r^2 - x^2 dy}{y(r^2 - x^2) (1 - y)(r^2 - x^2)} = \int_0^1 \frac{dy}{y(1 - y)}.
 \end{aligned}$$

Преобразуем формулу

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1 - y)^{1-\alpha} y^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}, \quad (1.97)$$

которая при  $\alpha=1/2$  принимает вид

$$\int_0^1 \frac{dy}{y(1-y)} = \pi, \quad (1.98)$$

и получаем

$$\int_x^\infty \frac{2rf(r)dr}{s^2 - x^2} = F(x). \quad (1.99)$$

Дифференцируя по  $x$ , имеем

$$-2xf'(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{2sR(s)}{s^2 - x^2} ds, \quad (1.100)$$

или

$$f(x) = -\frac{1}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{sR(s)}{s^2 - x^2} ds. \quad (1.101)$$

Возвращаясь к старым обозначениям, решение уравнения (1.89) получаем в виде

$$f(r) = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{sR(s)}{s^2 - r^2} ds. \quad (1.102)$$

Получим другую форму записи формулы обращения. Для этого выполним в уравнении (1.102) интегрирование по частям и учтем условие регулярности на бесконечности  $s \cdot R(s)_{s \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{sR(s)}{s^2 - r^2} ds = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty R(s) \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 - r^2} ds \\ &= -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \left[ R(s) \frac{1}{s^2 - r^2} \Big|_r^\infty - \int_r^\infty \frac{d}{ds} R(s) \frac{1}{s^2 - r^2} ds \right] \\ &= \frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{dR(s)}{ds} \frac{1}{s^2 - r^2} ds, \end{aligned} \quad (1.103)$$

т.о.

$$f r = \frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} R'_s(s) \frac{ds}{s^2 - r^2}. \quad (1.104)$$

Если в уравнении (1.104) выполнить дифференцирование по  $r$ , то получим

$$\begin{aligned} f r &= \frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} \frac{dR(s)}{s^2 - r^2} ds - \int_r^{\infty} \frac{dR(s)}{s^2 - r^2} \frac{ds}{ds} \Big|_{s=r} = \\ &= \frac{1}{\pi r} \int_r^{\infty} \frac{-r}{s^2 - r^2} \frac{dR(s)}{ds} ds = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{1}{s^2 - r^2} \frac{dR(s)}{ds} ds. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Таким образом

$$f r = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{s^2 - r^2} ds \quad (1.106)$$

Есть еще одна формула обращения, которая принадлежит А. Кормаку.

$$f r = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{rR s}{s^2 - r^2} ds. \quad (1.107)$$

Она приводится к виду уравнения (1.105) после интегрирования по частям. Действительно,

обозначим  $u = rR(s)$  и  $v = \frac{1}{r} \arccos \frac{r}{s}$ . Отсюда  $du = rR'_s ds$  и

$$\begin{aligned} dv &= \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \arccos \frac{r}{s} ds = \frac{1}{r} \frac{-1}{1 - \frac{r^2}{s^2}} \cdot \frac{r}{s^2} ds = \frac{ds}{s^2 \sqrt{1 - \frac{r^2}{s^2}}} \\ &= \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - r^2}} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Тогда интеграл в (1.108) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \int_r^{+\infty} \frac{rR s}{s^2 - r^2} ds &= \int_{s=r}^{\infty} u dv = uv \Big|_{s=r}^{\infty} - \int_{s=r}^{\infty} v du \\ &= R s \arccos \frac{r}{s} \Big|_{s=r}^{\infty} - \int_{s=r}^{\infty} \arccos \frac{r}{s} \cdot R'_s ds = \end{aligned} \quad (1.109)$$

$$= \frac{R}{\arccos 1} \Big|_{s=r}^{\infty} = 0 = - \int_{s=r}^{\infty} R'_s s \arccos \frac{r}{s} ds.$$

Полученное выражение дифференцируем по  $r$ .

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \int_{s=r}^{\infty} R'_s s \arccos \frac{r}{s} ds & (1.110) \\ &= - \int_{s=r}^{\infty} R'_s s \frac{d}{dr} \arccos \frac{r}{s} ds - R'_s s \arccos \frac{r}{s} \Big|_{r=s} \\ &= \\ &= - \int_r^{\infty} R'_s s \frac{d}{dr} \arccos \frac{r}{s} ds \\ &= - \int_r^{\infty} R'_s s \frac{-1}{1 - r/s} \frac{1}{s} ds = \int_r^{\infty} \frac{R'_s s}{s^2 - r^2} ds. \end{aligned}$$

Т.о.

$$\frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{rR(s)}{s^2 - r^2} ds = \int_r^{\infty} \frac{R'_s s}{s^2 - r^2} ds. \quad (1.111)$$

Учитывая множитель  $-1/\pi$  приходим к уравнению (1.105).

Определим следующий интеграл  $J$

$$J g t, \alpha = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{tg(t)}{t^2 - \alpha^2} dt, \quad (1.112)$$

где первый аргумент  $g(t)$  является некоторой функцией одного аргумента. Формулы прямого и обратного преобразований Радона можно выразить через  $J$  следующим образом:

$$\begin{aligned} R f s &= 2J(f r, s) & (1.113) \\ R^{-1} R f s &= f r = - \frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} J R f s, r. \end{aligned}$$

Если интеграл  $J(h t, \alpha)$  для некоторой функции  $h(t)$  вычисляется символично, то символично будет вычисляться прямое  $R[h r](s)$  и обратное  $R^{-1}[h s](r)$  преобразования Радона.

В осесимметричном случае задача восстановления функции  $f(r)$  по ее радоновскому образу  $R(s)$  однозначно разрешима.

Определим радоновский прообраз функции  $R s = e^{-s^2}$ . Из уравнения (1.93) имеем

$$f r = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} \frac{s e^{-s^2}}{s^2 - r^2} ds = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} I. \quad (1.114)$$

Здесь и в следующих примерах через  $I$  будем обозначать интеграл, стоящий в формуле обращения  $I = \int_r^{\infty} \frac{sR(s)}{s^2 - r^2} ds$ . Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_r^{\infty} \frac{s e^{-s^2}}{s^2 - r^2} ds = e^{-r^2} \int_{s=r}^{\infty} \frac{e^{-(s^2 - r^2)}}{s^2 - r^2} ds = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{s^2 - r^2} dt. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Учитывая табличный интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-q^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}$   $q > 0$  имеем

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-r^2},$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} f r &= -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-r^2} \right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi r} (-2e^{-r^2}) = \frac{1}{\pi} e^{-r^2} \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 - y^2)}. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Далее определим радоновский прообраз функции

$$R s = \begin{cases} \frac{b}{a}(a - s), & s < a \\ 0, & s \geq a \end{cases} \quad (1.117)$$

Легко видеть, что

$$\frac{dr}{ds} = \begin{cases} 0, & s < -a \\ \frac{b}{a}, & -a < s < 0 \\ -\frac{b}{a}, & 0 < s < a \\ 0, & s > a \end{cases} \quad (1.118)$$

Поскольку интегрирование выполняется по положительному участку вещественной оси  $0 \leq r \leq s < \infty$ , то нам важно представление «проекции»  $R(s)$  только для положительных значений  $s$ .

При  $r > a$  имеем  $\frac{dr}{ds} = 0$  и из уравнения (1.97) следует  $f(r) = 0$ . При  $r < a$  из уравнения (1.103) получаем

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{1}{s^2 - r^2} \frac{dR}{ds} ds = \frac{b}{\pi a} \int_r^a \frac{1}{s^2 - r^2} ds. \quad (1.119)$$

Учитывая табличный интеграл

$$\int \frac{1}{s^2 - r^2} ds = \ln \left| \frac{s+r}{s-r} \right|, \quad (1.120)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_r^a \frac{1}{s^2 - r^2} ds \\ &= \ln \left| \frac{s+r}{s-r} \right| \Big|_{s=r}^a \\ &= \ln \left| \frac{a+r}{a-r} \right| - \ln 1 = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Тогда

$$f(r) = \begin{cases} \frac{b}{\pi a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases} \quad (1.122)$$

Далее определим радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 1 - s^2, & s < 1 \\ 0, & s \geq 1 \end{cases} \quad (1.123)$$

Модуль здесь выбран потому, что функция  $R(s)$  должна быть четной.

Легко видеть, что

$$\frac{dr}{ds} = \begin{cases} -3s & , s < 1 \\ 0 & , s \geq 1 \end{cases} \quad (1.124)$$

Используем формулу обращения. При  $r > 1$  будет  $\frac{dr}{ds} = 0$  и уравнение (1.95) дает  $f(r) = 0$ . При  $0 \leq r < 1$  из уравнения (1.95) получаем

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{s^2 - r^2} \frac{dR}{ds} ds = \frac{3}{\pi} \int_r^1 \frac{s}{s^2 - r^2} ds = \frac{3}{\pi} \int_r^1 \frac{s^2}{s^2 - r^2} ds = \\ &= \frac{3}{2\pi} \left[ \frac{1}{1 - r^2} + r^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{r} \right]. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Тогда

$$f(r) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi} \left[ \frac{1}{1 - r^2} + r^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{r} \right], & r < 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (1.126)$$

Далее определим радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 1, & s < a \\ 0, & s \geq a \end{cases} \quad (1.127)$$

Вычислим интеграл  $I = \int_r^\infty \frac{sR(s)}{s^2 - r^2} ds$ , стоящий в формуле (1.101). При  $r > a$  этот интеграл равен нулю. При  $r < a$  имеем

$$I = \int_r^a \frac{s}{s^2 - r^2} ds = \int_{s=r}^a d \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{s^2 - r^2} \Big|_{s=r}^a = \sqrt{a^2 - r^2}, \quad (1.128)$$

и

$$-\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} I = -\frac{-2r}{\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (1.129)$$

Тогда

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (1.130)$$

В первой главе рассмотрены методы преобразования Радона используемые в медицинской томографии. Проблема восстановления трехмерной информации из двумерных изображений является общей во многих областях, но это особенно важно для астрономии. В медицинской визуализации, можно взять изображения источника из нескольких точек, чтобы помочь реконструкции[4]. Имея большое количество проекционных снимков с различных направлений, можно с достаточной степенью точности восстановить внутреннюю структуру объекта, а точнее функцию плотности поглощения излучения.

## ГЛАВА 2 МЕТОД ГЕОМТРИЧЕСКОЙ ДЕПРОЕКЦИИ

Во второй главе рассмотрен метод геометрической депроекции *onion-skin*. Этот метод можно применять для восстановления осесимметричных объектов, он основан на геометрическом методе, для депроекции рентгеновских изображений. Метод геометрической депроекции полностью непараметричен и позволяет восстановить трехмерные изображения.

### 2.1 Применимость модели *onion-skin* к геометрической депроекции

В активных галактических ядрах релятивистские струи энергии и массы активно влияют на близлежащие галактики и окружающую межзвездную и внутрикластерную среду. Генерация этих потоков привязана к процессу аккреции на вращающихся черных дырах[34]. Хотя эти струи имеют доминирующее направление движения (т. е. наружу от черной дыры) они часто имеют изгибы, а также особенности внутри них, которые либо перпендикулярны, либо выровнены относительно струи под некоторым углом. Расшифровка истинной природы этих признаков, их геометрии и их связи с динамическим смыслом в потоке является трудной проблемой, так как любые астрономические образы, которые берутся, являются двумерным видами трехмерного объекта.

Точная наблюдательная характеристика структуры внутрикластерной среды имеет решающее значение. Термодинамика структуры внутрекластерной среды определяется не только гравитационной аккрецией газа в темную материю, а также процессами обратной связи с энергией (т. е. от взрывов сверхновых и активных галактических ядер), которые имели место быть во время космической истории. Изучение свойств структуры внутрекластерной среды до сих пор производилось с помощью рентгеновских наблюдений[14]. Данные со спутников Chandra и XMM-Newton обеспечивают точные измерения характеристик температуры и поверхностной яркости для довольно большого количества соседних ( $z \leq 0,3$ ) кластеров, достигающих ( $z = 0,6$ ) для самых ярких объектов.

Эти наблюдения позволили в первую очередь детально проследить распределение масс в скоплениях галактик[33]. Однако в рентгеновских лучах доступный динамический диапазон ограничивается газовой зависимостью излучательной способности  $p_{gas}^2$ , что приводит к тому, что измерения боковых проекций обычно ограничиваются радиусами в 2-3 ядра, простирающимися до  $r_{500}$  только в наиболее благоприятных случаях.

Благодаря различной зависимости рентгеновского излучения от плотности электронов температуры  $T_e$  существует альтернативный путь к рентгеновской спектроскопии для изучения структурных свойств внутрeкластерной среды. Действительно, рентгеновская излучательная способность масштабируется как  $n_e^2 \Lambda(T)$  [где  $\Lambda(T)$  является функцией охлаждения], сигнал рентгеновских профилей пропорционален давлению газа,  $n_e T_e$ , интегрированному вдоль линии обзора.

Ранее был использован метод депроекции, основанный на преобразовании Фурье температурных профилей, рентгеновских и линзирующих изображений. После применения этого метода к простым аналитическим моделям был сделан вывод, что комбинация трех карт позволяет независимо измерять постоянную Хаббла  $H_0$  и угол наклона. Метод основанный на преобразовании Фурье был так же применен к космологическому гидродинамическому моделированию скоплений галактик, которые обнаружили, что надежное определение кластерной барионной фракции, независимо от угла наклона[28]. Реблинский применил метод, основанный на деконволюции комбинированных данных температурных профилей и рентгеновских изображений на набор имитируемых кластеров. Так же был использован пертурбативный подход для описания трехмерной структуры кластера, чтобы объединить тепловой эффект и линзирующие изображения. Таким образом, была предсказана возникающая яркость поверхности рентгеновского излучения. После тестирования метода можно сделать вывод о том, что распределение темной материи и газа может быть восстановлено достаточно точно. Метод,

основанный на допущении политропного уравнения состояния газа в гидростатическом равновесии позволяет восстановить трехмерные профили кластеров с использованием температурных профилей и рентгеновских сигналов[34].

Что касается применения к реальным изображениям, то оно достаточно сравнимо с рентгеновской спектроскопией. Можно использовать данные приведенные Watson в его работе[34]. Применяя метод депроекции, подтверждается, что предельные депроекции должны быть выровнены вдоль линии прямой видимости. Некоторые из подробных методов, применяемых к численным кластерным моделям, объясняют наличие реалистичного шума в изображениях[14]. Однако они, как правило, не представляют детальной оценки того, как этот шум находит неопределенности в депроецированных профилях, которые, в конечном счете, характеризуют термодинамику структуры внутркластерной среды. Хороший контроль над ошибками особенно важен для любого метода депроекции, поскольку ошибки при заданном проецируемом разделении влияют на депроецированный сигнал во внутренних областях, тем самым вводя пренебрежимо малую ковариантность в реконструкции трехмерных профилей.

Далее обсуждается метод преобразования трехмерных профилей, тестирования характеристик идеализированных сферических кластеров. Этот метод основан на предположении о сферической симметрии. Далее описан способ реализации метода. Он применим к спектроскопическим данным рентгеновских лучей и основан на предположении об осевой структуре, в которой проецируемые данные профилей используются для восстановления во внешних слоях, а затем итерационным способом распространяются во внутренние слои. Значения параметров получаются с помощью максимального правдоподобия метода Монте-Карло марковской цепи путем сравнения полученных проекционных рентгеновских изображений и температурных профилей с результатами, полученными на картах. В данном методе матрица корреляции ошибок полностью учитывает ковариацию

между оценками ошибок в разных радиусах и между различными профилями. Качество рентгеновских данных, необходимых для методов депроекции, в основном уже доступно с нынешним поколением рентгеновских телескопов. Для иллюстративных целей будем предполагать прогнозные условия наблюдения и чувствительность ССАТ, хотя эти вычисления можно легко повторить и для других телескопов.

## 2.2 Модель onion-skin геометрической депроекции

Метод, который применяется для восстановления трехмерных профилей, основан на геометрическом методе, для депроекции рентгеновских изображений и спектров кластеров галактик. Этот метод геометрической депроекции полностью непараметричен и позволяет восстановить трехмерный профиль данной величины на рисунке 2.1.

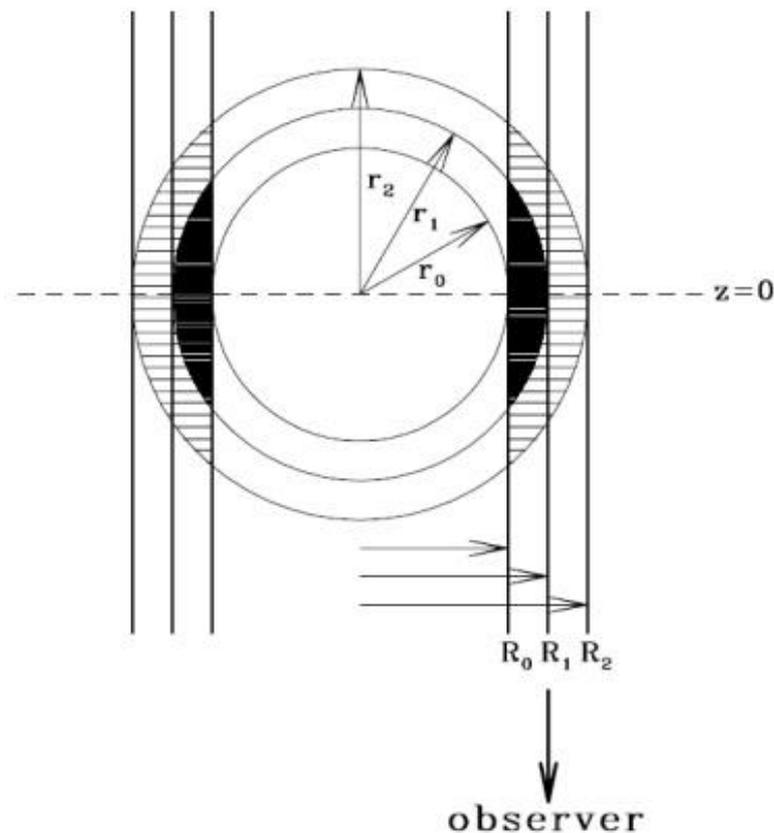


рисунок 2.1 – Иллюстрация модели onion-skin принятой для геометрической депроекции

Двумерная наблюдаемая проекция вытекает из предположения о сферической симметрии. Предположим, что кластер имеет структуру onion-skin на рисунке 2.1, с  $N$  концентрическими сферическими оболочками, каждая из которых характеризуется однородной плотностью. Поэтому изображение в проекции делится на кольца, которые обычно считаются одинаковыми радиусами трехмерных сферических оболочек. Определим  $\rho_i$  как сигнал, который нужно восстановить из метода депроекции в  $i$ -ой оболочке. В анализе  $\rho_i$  будет пропорционален либо  $n_e T_e$  для сигнала профилей, либо  $n_e^2(T)$  для излучательной способности рентгеновских лучей. Таким образом, вклад  $i$ -ой оболочки в поверхностную яркость в кольце  $j$  будет задаваться  $s_{i,j} = \rho_i \cdot V_{i,j}/A_j$ , где матрица  $V_{i,j}$  имеет в качестве значений объема оболочки  $i$ , которая проецируется на кольцо  $j$ , площадь которого равна  $A_j$ . По определению  $s_{i,j} = 0$  при  $j > i$ . Соответственно, поверхностную яркость  $S'_j$  в кольце  $j$  можно получить, суммируя вклады от всех оболочек,

$$S'_j = \frac{1}{A_j} \sum_{i=j}^N \rho_i \cdot V_{i,j} \quad (2.1)$$

где сумма распространяется на  $N$  радиальных позиции. Выделение представляет собой инвертирование вышеупомянутого уравнения, то есть восстановление значений  $\rho_i$  из наблюдаемого прогнозируемого сигнала  $S'_j$ . На рисунке 3.3 проиллюстрирована депроекция на практике. Пусть оболочка  $i$ , ограниченная  $r_i$  и  $r_{i+1}$ , является самой внешней. Тогда из поверхностной яркости  $S'_j$  в кольце  $i$  (ограниченное  $R_i$  и  $r_{i+1}$ ) можно непосредственно вычислить излучательную способность оболочки, зная объем закрашенной области и площадь кольца. В этом случае сумма в уравнении (2.1) имеет только член  $j = i = N$ . Для ясности укажем проецируемую величину с поверхностной яркостью.  $i$ -ая оболочка вычисляется путем умножения излучательной способности этой оболочки

на объем заштрихованной области. После его вычитания единственным оставшимся слагаемым является сумма, равная оболочке  $i-1$ , из которой вычисляется излучательная способность  $q_{i-1}$ . Затем эта процедура повторяется на каждом кольце до центра.

Для применения этой простой схемы требуется, чтобы изображения были расширены до истинного внешнего края, то есть к радиусу, где поверхностная яркость практически равна нулю. Ясно, что эта ситуация никогда не достигается на практике по крайней мере по двум причинам. Во-первых, изображения всегда встроены в крупномасштабную космическую сеть, что затрудняет определение резкой внешней границы. Во-вторых, и что более важно, как инструментальные, так и космические фоны часто доминируют над подлинным сигналом задолго до достижения его видимой границы.

Чтобы преодолеть эту проблему, необходимо принять во внимание эмиссию газа, которая выходит за пределы  $N$ -й оболочки. Эта эмиссия не имеет соответствующего кольца в изображении, но может дать незначительный вклад в поверхностную яркость во всех кольцах. Далее будем моделировать объемную эмиссию газа, используя последнее наблюдаемое кольцо как степенной закон,  $\epsilon_r \propto r^{-\alpha}$ . Идея этого метода заключается в том, что вклад в каждое кольцо из внешней части можно рассчитать, объединив объемную эмиссию  $\epsilon_r$ . Тогда нормализация степенной формы  $\epsilon_r$  фиксируется требованием согласования полной поверхностной яркости последнего кольца. Эта поправка может быть выражена как дополнительный член уравнения (2.1), который пропорционален поверхностной яркости последнего кольца:

$$S_j = S'_j + f_j \cdot S_N \quad (2.2)$$

Здесь  $f_j$  - геометрический фактор, который однозначно определяется значениями предельных радиусов  $j$ -ого кольца и показателя  $\alpha$ . Уравнение (2.2) должно быть фактически интерпретировано как совокупность  $2N$  уравнений, что соответствует отдельной депроекции профилей, каждый из

которых выполняется для радиальной позиций  $N$ . Затем геометрическая депроекция выполняется путем инвертирования каждого набора значений, начиная с самого внешнего бина и проходящего внутрь. Комбинация профилей  $n_e T_e$  и  $n_e^2 \Lambda(T)$ , в конечном итоге дает трехмерные профили плотности.

Учитывая итеративный характер этой процедуры, неопределенность, связанная с каждым кольцом, распространяется не только на соответствующую трехмерную оболочку, но и на все внутренние оболочки. По этой причине очень трудно сделать строгий вывод статистических неопределенностей, связанных с депроецированными профилями. Это особенно справедливо для рентгеновских профилей. Общепринятое решение основано на реализации методов Монте-Карло марковской цепи, по которым можно вычислить ошибки.

Кроме того, ошибки, связанные с различными радиальными позициями, не являются независимыми. Это связано с тем, что проецируемый сигнал в данном кольце имеет несколько оболочек. Ковариация в сигналах, полученных в разных оболочках, не обеспечивается этим методом депроекции.

### **2.3 Расчет максимальной вероятности геометрической депроекции**

Этот метод основан на получении депроекции путем максимизации функции вероятности, которая вычисляется путем сравнения наблюдаемых профилей с использованием модели onion-skin в плоскости неба. Данный подход имеет несколько преимуществ в сравнении с ранними методами депроекции. Помимо дисперсии, также можно вычислить корреляционную матрицу для всех параметров без каких-либо дополнительных вычислительных затрат. В целях повышения точности и надежности метода можно ввести дополнительные условия.

Определение вероятности является самой важной частью всей процедуры. Для профилей рентгеновского излучения принимаем формулу Гаусса для вероятности,

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \chi^2 = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{O_i - M_i}{\sigma_i}^2 \quad (2.3)$$

где  $O_i$  - значения профилей в гистограмме  $i$ , тогда как  $M_i$  это предсказанные моделью значения профиля, полученные для набора из  $x$  параметров. Наконец,  $\sigma_i$  - неопределенность измеренных значений  $O_i$ . Применение выражения Гаусса вместо распределения Пуассона требует, чтобы количество фотонов, отбирающих карту поверхностной яркости в каждой радиальной оболочке, было достаточно большим, чтобы пренебречь пуассоновским шумом. Даже в самых внешних кольцах у нас всегда есть как минимум 20 фотонов на «шумных» рентгеновских картах. Метод состоит в минимизации суммы квадратов производных  $k$ -го порядка вокруг каждой точки данных, чтобы сгладить колебания в профилях. Здесь решено минимизировать производную второго порядка, поскольку мы стремимся устранить флуктуации в профилях, но не общий градиент. Такие колебания связаны либо с подлинными основаниями, либо с шумом, который распространяется от соседних бинов в депроекции. Локальная производная функции  $x_i$  в  $i$ -ом радиальном интервале вычисляется путем определения его значения и значений в смежных точках  $x_{i-1}$  и  $x_{i+1}$  с полиномом второго порядка. Пусть  $r_i$  - значение одинаково распределенных расстояний, при которых профили отбираются, и их интервал составляет  $\Delta_r$ . Затем, вероятность регуляризации может быть выражена в формуле

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}^\lambda &= -\frac{1}{2} \lambda' \sum_{i=3}^{N-1} \frac{2f_i - f_{i-1} - f_{i+1}}{\Delta_x^2} \equiv \\ &\equiv -\lambda \sum_{i=3}^{N-1} \frac{2f_i - f_{i-1} - f_{i+1}}{2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Величина между скобками в уравнении 2.4 - является точным значением локальной производной второго порядка вокруг  $r_i$ . Все константные факторы включены в коэффициент  $\lambda$ , который называется параметром регулярности. Выбор его значения определяется компромиссом, который требуется достичь между точностью данных (минимальное значение  $\lambda$ ) и регулярностью решения (максимальное значение  $\lambda$ ). Небольшое значение  $\lambda$  даст неудовлетворительную регуляризацию, в то время как слишком высокое  $\lambda$  выстраивает профиль в прямую линию, особенно если отношение сигнал/шум (S/N) низкое. Применяем ограничение регуляризации к профилю, который обычно показывает большие колебания. Сумма в уравнении 2.4 начинается с  $i = 3$ , так как предпочитаем исключить самую внутреннюю точку из процедуры регуляризации. При таком подходе значения трехмерных характеристик плотности и температуры газа рассчитываются при  $N = 15$  радиусов каждый. Таким образом, общее число параметров, которые должны быть определены с помощью метода максимального правдоподобия, составляет 30. Для оптимизации выборки такого большого пространства параметров применяем метод Монте-Карло марковской цепи. То, что вычисляет метод Монте-Карло марковской цепи, является распределением каждого параметра множества  $x_i$  (т.е. значения в каждом бине), для которых глобальная (задняя) вероятность  $P(x)$  пропорциональна вероятности функции, известной в любой точке пространства параметров. В случае большого числа параметров или особо сложного  $P(x)$  это довольно тяжело сделать аналитически или просто очень дорого вычислительно. Вместо этого метод Монте-Карло марковской цепи выполняет исследование параметра в пространстве с ограниченными вычислительными затратами, благодаря итеративному методу, путем выборки распределения  $P(x)$ . На каждой итерации новые значения параметров берутся из симметричного распределения предложений, что в нашем случае является Гауссианой,

$$q(x_i, x_i) \propto e^{-x_i - x_i^2 / 2\alpha_i^2} \quad (2.5)$$

Здесь  $x_i$  и  $x_i$  - это записи двух векторов, каждый из которых состоит из компонентов, которые представляют собой новые и старые значения параметров депроекции, соответственно. Параметр  $\alpha_i$  определяет возможный диапазон для  $x_i$ . После вычисления функции вероятности для нового набора параметров  $x$  эти новые значения принимаются или отклоняются с вероятностью, заданной так называемым критерием Метрополиса:

$$A_{x, x} = \min \left( 1, \frac{P(x)}{P(x)} \right) \quad (2.6)$$

где  $P(x)$  - распределение, отобранное методом Монте-Карло марковской цепи. Обобщая это обращение на несимметричные распределения предложений, добавив параметр в уравнение 2.6, который учитывает распределение предложения  $q(x, x)$ :

$$A_{x, x} = \min \left( 1, \frac{P(x) q(x, x)}{P(x) q(x, x)} \right) \quad (2.7)$$

Это называется критерием Метрополиса-Гастингса. Ширина распределения предложения, появляющаяся в уравнении (2.5),  $\alpha_i$ , определяет поведение цепи: небольшое значение  $\alpha_i$  увеличивает скорость приема, поскольку новое предлагаемое значение близко к старому, в то время как высокое значение обеспечивает более быстрое исследование пространства параметров. Критерий выбора значений  $\alpha_i$  состоит в том, что результирующая скорость принятия, заданная уравнением (2.6), составляет около 10 процентов. Каждому параметру разрешается варьироваться в течение конечного интервала, чтобы избежать того, что метод Монте-Карло марковской цепи обнаруживает вторичные максимумы в нефизических областях пространства параметров. Поскольку плотность в основном ограничена рентгеновским сигналом, который пропорционален  $i$ , он всегда достаточно хорошо ограничен, и указанный выше большой интервал вариации не создает проблем сходимости ни в одном из наших объектов.

Итеративная процедура, описанная выше, повторяется до тех пор, пока в цепочке не будет принято подходящее количество новых наборов параметров (обычно  $\geq 5 \times 10^4$ ). В этом условии частота появления в цепочке  $i$ -го параметра  $x_i$  приближается к его истинному распределению вероятности  $P(x_i)$ . Каждое распределение параметров уже содержит распределения всех других параметров.

Во второй главе рассмотрен метод геометрической депроекции *onion-skin*. Метод геометрической депроекции полностью непараметричен и позволяет восстановить трехмерные осесимметричные изображения.

## ГЛАВА 3 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕПРОЕКЦИИ

В главе 3 рассмотрено применение метода депроекции к идеализированным и зашумленным изображениям.

### 3.1 Применение метода депроекции к идеализированным изображениям

Мы смоделировали объект в виде конуса раствором 56 градусов, усечённого на высотах  $z=1$  и  $z=30$ , состоящим из 4 млн точек, распределённых случайным образом равномерно по  $z$ , равномерно по полярному углу, и по экспоненциальному закону по азимуту, который определяем как угловое расстояние от оси конуса, измеряемое в вершине конуса. Он представлен на рисунке 3.1 сжатым в 10 раз по  $Z$  для удобства представления.

Вследствие большого числа точек и равномерности распределений по  $Z$  и  $\varphi$ , объект в высокой степени осесимметричен. Каждая точка эквивалентна фотону. На рисунке 3.1 видим плоское изображение, созданное этими фотонами.

Его азимутальный профиль определяем, как зависимость потока (числа точек) в данном изображении от азимута  $\theta$ . Интегральный профиль, всего изображения, при наклоне оси конуса к плоскости неба  $i = 0$  показан на рисунке 3.2. Он состоит из 31 точек/бинов. Депроекцией изображения объекта по этому профилю получаем распределение объёмной меры эмиссии, или просто количество точек в единице объёма, в зависимости от азимута  $\theta$  на рисунке 3.3.

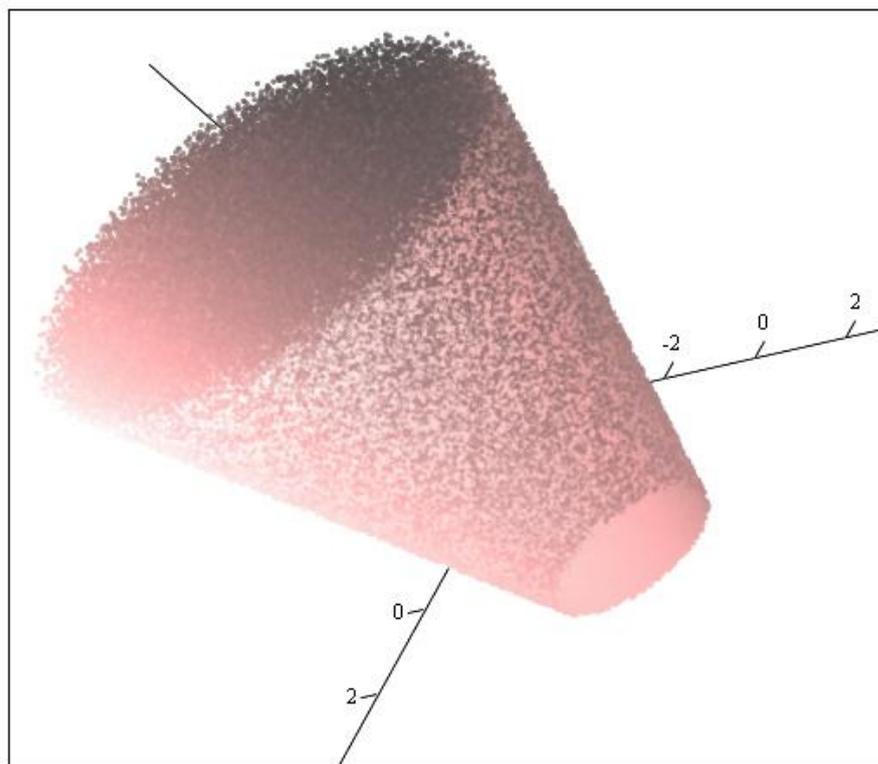


Рисунок 3.1 – Смоделированный объект.

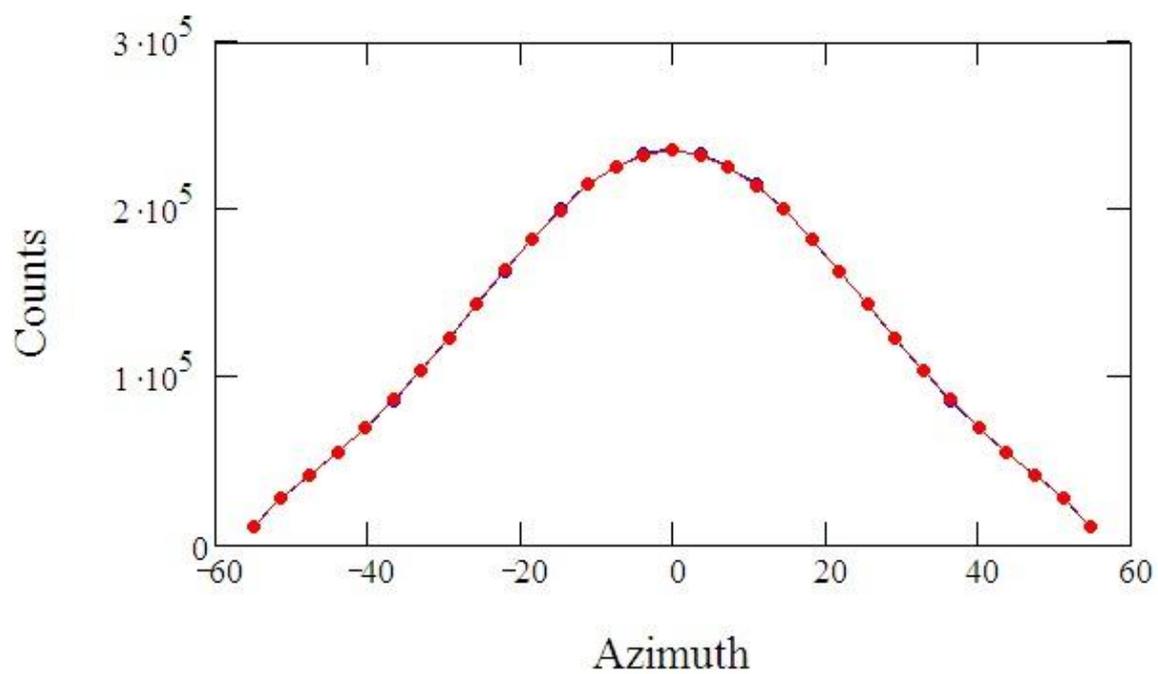


Рисунок 3.2 – Интегральный профиль.

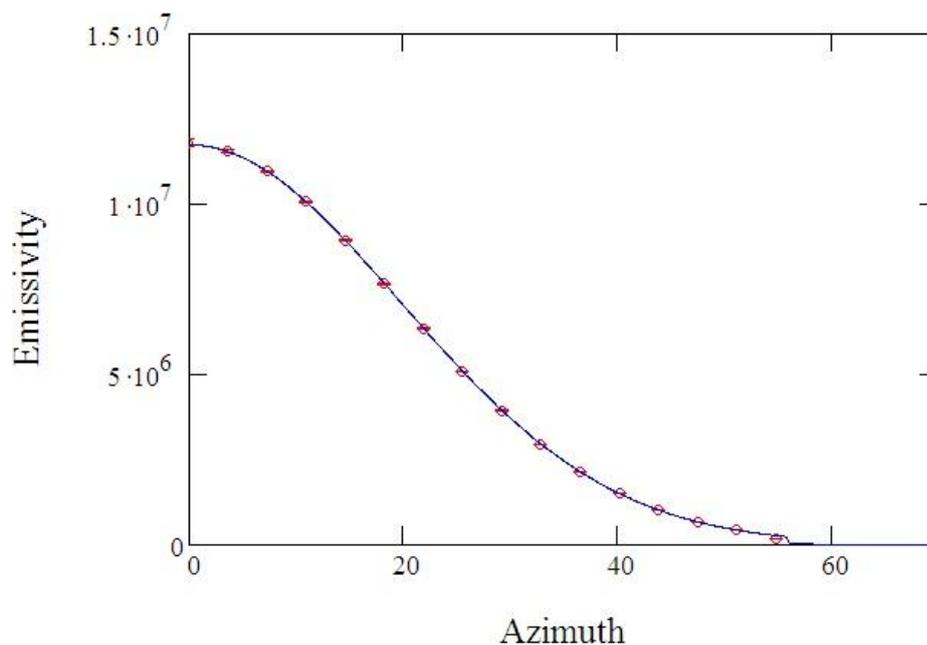


Рисунок 3.3 – Распределение объёмной меры эмиссии.

Непрерывная линия - истинное распределение, точки - результат депроекции изображения. Результат приведен с барами погрешности. Она определялась формально, как корень из дисперсии, которая в случае пуассоновской статистики равна сигналу, т.е. накопленному потоку. На наших рисунках бары обычно малы и поэтому не всегда различимы. На рисунке 3.4 показано различие между ними.

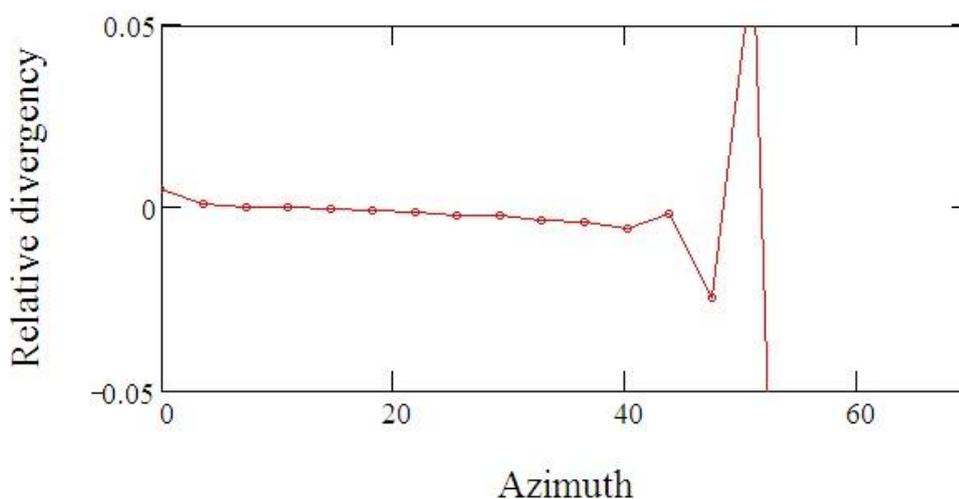


Рисунок 3.4 – Истинное распределение и результат депроекции изображения.

Среднеквадратичная относительная погрешность  $\Delta = 2.6 \cdot 10^{-3}$  на одну точку, и нормированный критерий  $\chi^2 = 2.28$  (т.е. неудовлетворительное согласие между распределениями). Большие отклонения в начале и конце восстановленного распределения объясняются малой статистикой (на единицу объёма) на концах распределений. Процедура депроекции происходит послойно и начинается снаружи. Видно, что сначала происходят большие колебания, потом они гасятся.

Аналогично можно восстанавливать изображение по разрезам. На рисунках 3.5 – 3.7 подробно показаны результаты депроекции для участка конуса между  $Z = 1.7$  и  $Z = 2.7$ .

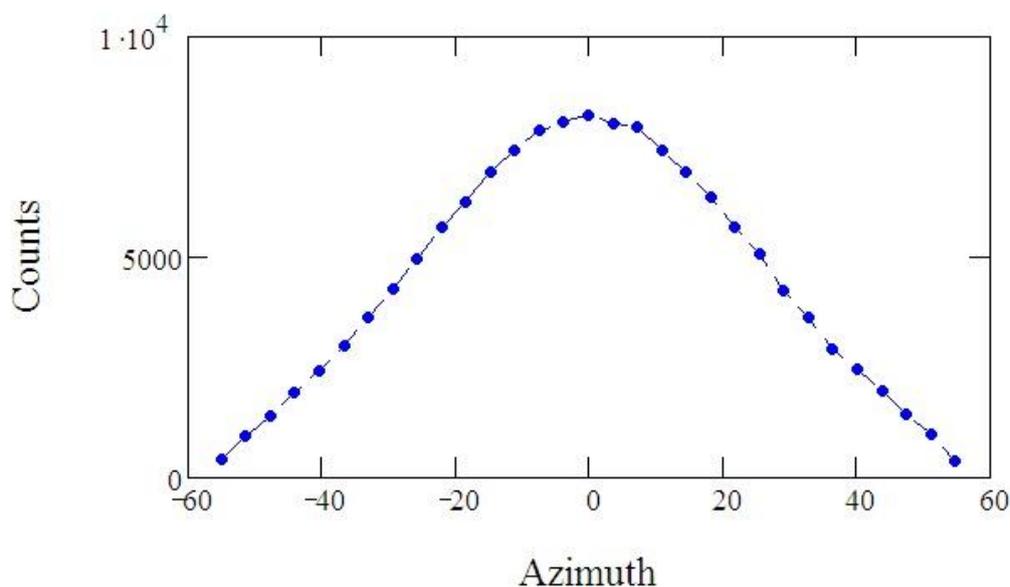


Рисунок 3.5 – Интегральный профиль для участка конуса между  $Z = 1.7$  и  $Z = 2.7$ .

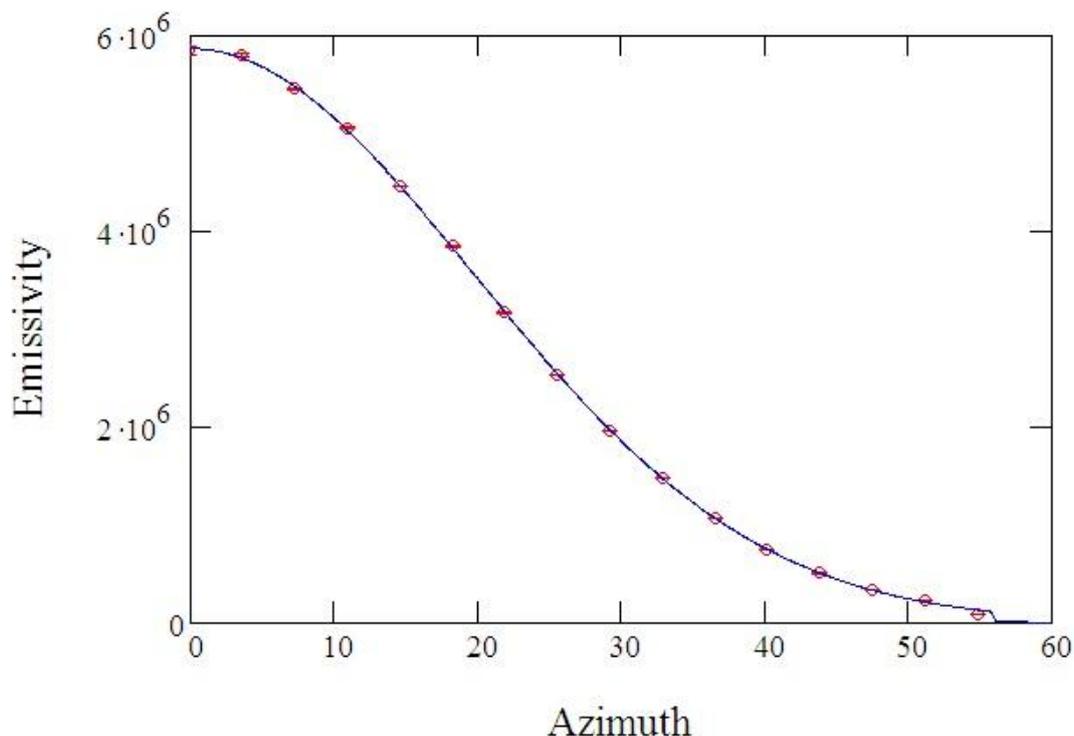


Рисунок 3.6 – Распределение объёмной меры эмиссии для участка конуса между  $Z = 1.7$  и  $Z = 2.7$ .

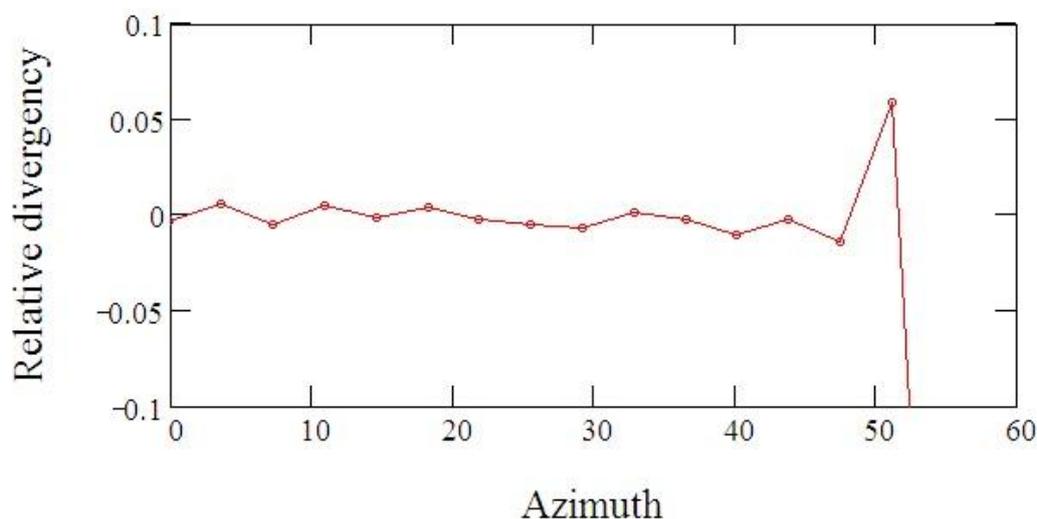


Рисунок 3.7 – Истинное распределение и результат депроекции изображения для участка конуса между  $Z = 1.7$  и  $Z = 2.7$ .

Очевидно, что уменьшение статистики даёт худшее согласие восстановленной меры эмиссии с истинной:  $\Delta = 32 \cdot 10^{-3}$  на одну точку, и нормализованный  $\chi^2 = 11.8$ .

Этот разрез мы используем в дальнейшем для исследования качества/степени депроекции от угла наклона оси конуса к небесной плоскости. Выбор этого объекта представляет собой хороший компромисс между потребностями точного разрешения профиля и наличия нормального  $S/N(\geq 10)$ . Нужно учитывать, что правильный критерий позиций важен для того, чтобы получить точное преобразование сечений, а сферические оболочки имеют однородную плотность. Поэтому пренебрегаем любым внутренним радиальным градиентом. С другой стороны, часть каждой оболочки, которая проецируется на соответствующее кольцо изображения, расположена на большем радиальном расстоянии от центра, в сравнении с частью той же оболочки, которая проецируется во внутренние кольца. Поэтому, если ширина бина сопоставима или больше, чем скалярная длина внутреннего радиального градиента оболочки, то излучательная способность, внесенная в соответствующее кольцо, ниже, чем ожидалось, из плотности однородного газа, тогда как она больше для всех внутренних колец. Как следствие этого, излучательная способность оболочки недооценивается, а для всех внутренних оболочек она завышена. Чтобы проверить наличие такой систематики, вначале был применен метод депроекции в случае идеального наблюдения, без каких-либо помех.

### **3.2 Применение метода депроекции к зашумленным изображениям**

Случай бесшумных наблюдений, рассмотренный ранее, сильно идеализирован. Однако влияние включения реалистичного шума является очень важным аспектом, которым нельзя пренебрегать. Как уже упоминалось, восстановление подробных профилей требует, чтобы оба они имели адекватное пространственное разрешение и это, безусловно, имеет место для нынешнего поколения рентгеновских спутников. Сочетание хорошей чувствительности и пространственного разрешения для

наблюдений профилей будет доступно только в следующем поколении субмиллиметровых телескопов.

Правильное моделирование рентгеновских наблюдений требует генерации спектров для каждого пикселя, которые должны быть свернуты с функцией отклика данного инструмента. Однако для того, чтобы применить метод реконструкции, нужно создавать изображения с заданным количеством событий (фотонов), независимо от их энергии. Для этой цели моделируем отсчеты рентгеновских фотонов, используя выборку Монте-Карло из карт поверхности. Фиксируем  $N=10^4$ , как общее число фотонов в пределах заданного радиуса, что довольно типично для средне-глубинных наблюдений. Каждое событие фотона генерируется в конкретный пиксель  $i$ , с вероятностью где  $s_i$  поверхностная яркость пикселя, и сумма распространяется на все пиксели.

$$P_i = \frac{s_i}{\sum_j s_j} \quad (3.1)$$

В уравнении 3.1 число ожидаемых отсчетов в каждом пикселе будет задаваться пуассоновским распределением со средней вероятностью  $n_i = NP_i$ . Преобразование между отсчетами и затем поверхностной яркостью задается выражением  $n_i = \sum_j s_j P_{ij}$ , поэтому полный поток сохраняется.

Введение шума порождает флуктуации в профилях. Положительные флуктуации плотности соответствуют отрицательным колебаниям и наоборот. Кроме того, любые колебания в заданном направлении одной радиальной позиции обычно соответствуют флуктуации в противоположном направлении соседнего бина в пределах одного профиля. Эта закономерность в колебаниях свидетельствует о наличии значительной ковариации среди соседних сегментов в том же профиле, восстановленным в пределах того же радиального бина. Что касается ковариации между соседними бинами, то это обусловлено структурой модели onion-skin, принятой в депроекции. Каждый раз, когда количество флуктуаций

оценивается в радиальной ячейке, депроекция заставляет ту же величину находиться под (над) соседним бином, чтобы сформировать правильный проецируемый профиль. Что касается ковариации между различными профилями, то она в основном индуцируется сигналом профилей.

Чтобы оценить ошибки в депроецированных профилях, выполняем повторную выборку Монте-Карло прогнозируемых профилей: значение профиля внутри каждого радиального кольца случайным образом рассеивается по распределению Гаусса, ширина которого определяется формулой ошибки, связанной с шумом, введенным на карту. Затем ошибки  $1\sigma$  в депроецированных профилях получаются как разброс в пределах набора из 10 депроекций рекомплектованных образцов профилей, полученных методом Монте-Карло марковской цепи. Наилучший процент ошибок - 10%. Это вполне ожидаемо.

Результат депроекции зависит от качества изображения, т.е. уровня накопленного сигнала. Для исследования качества/степени депроекции от уровня шума изображения, депроекция производилась после добавления пуассоновского шума к идеальному азимутальному профилю на рисунке 3.8.

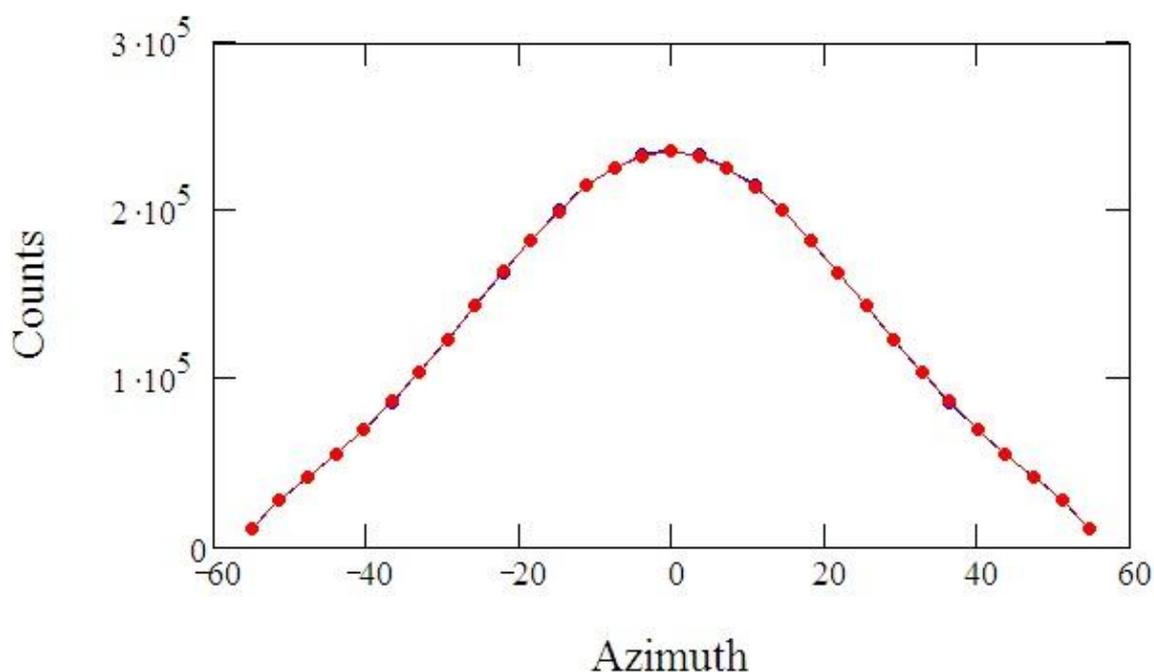


Рисунок 3.8 – Идеальный азимутальный профиль.

Рисунки 3.9-3.20 для уровней сигнал к шуму ( $S/N$ ) и оценки  $\Delta$  на одну точку и нормализованный  $\chi^2$  согласования депроецированного и реального профилей следующие (заметим, что выборка шумов однократная случайная, и результат будет зависеть от реализации выборки).

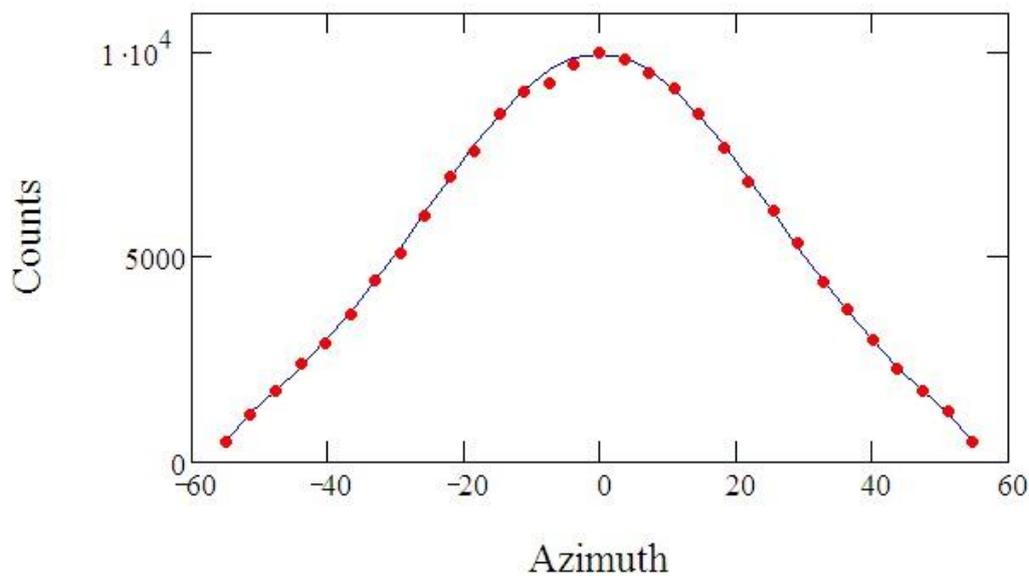


Рисунок 3.9 – Интегральный профиль ( $S/N=100$ ,  $\Delta = 39 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 14.5$ ).

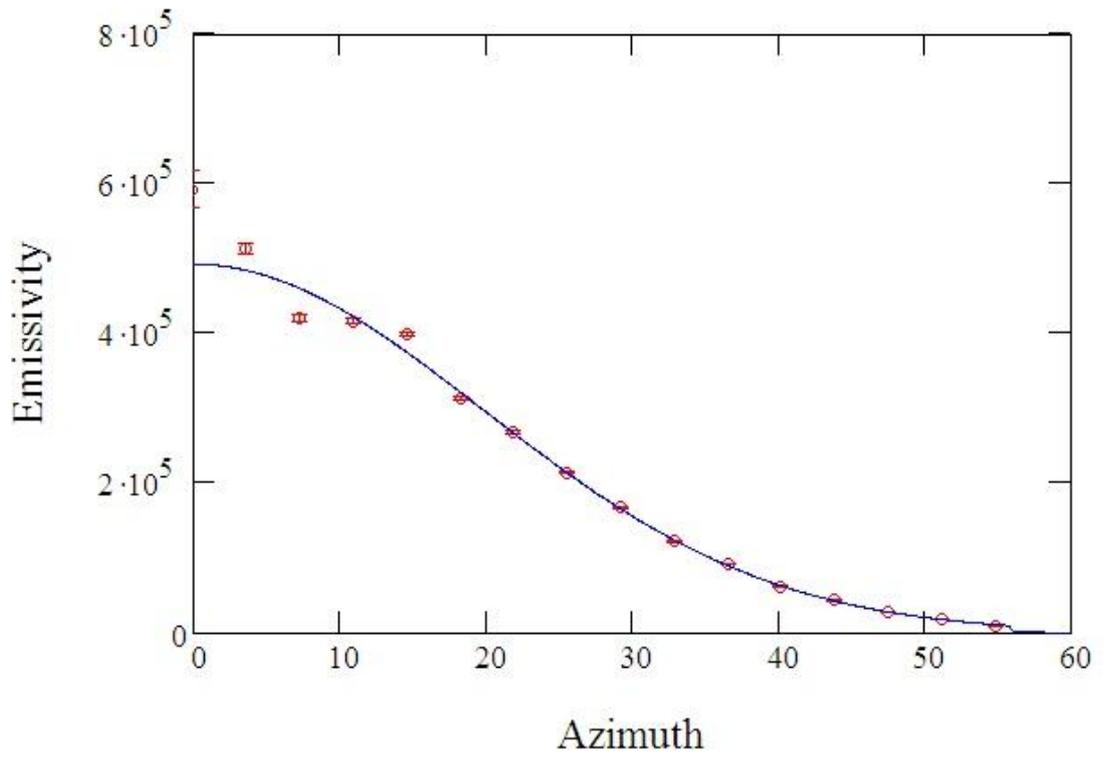


Рисунок 3.10 – Распределение объёмной меры эмиссии ( $S/N=100$ ,  $\Delta = 39 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 14.5$ ).

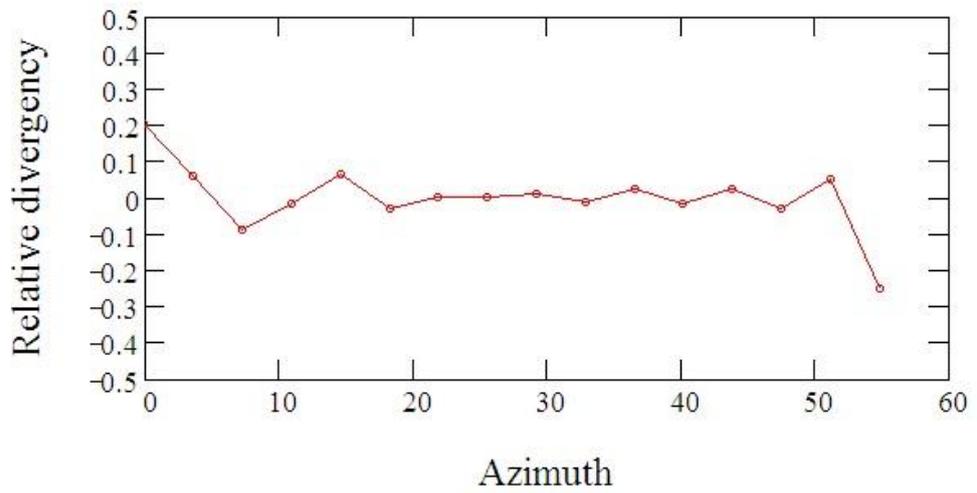


Рисунок 3.11 – Истинное распределение и результат депроекции изображения ( $S/N=100$ ,  $\Delta = 39 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 14.5$ ).

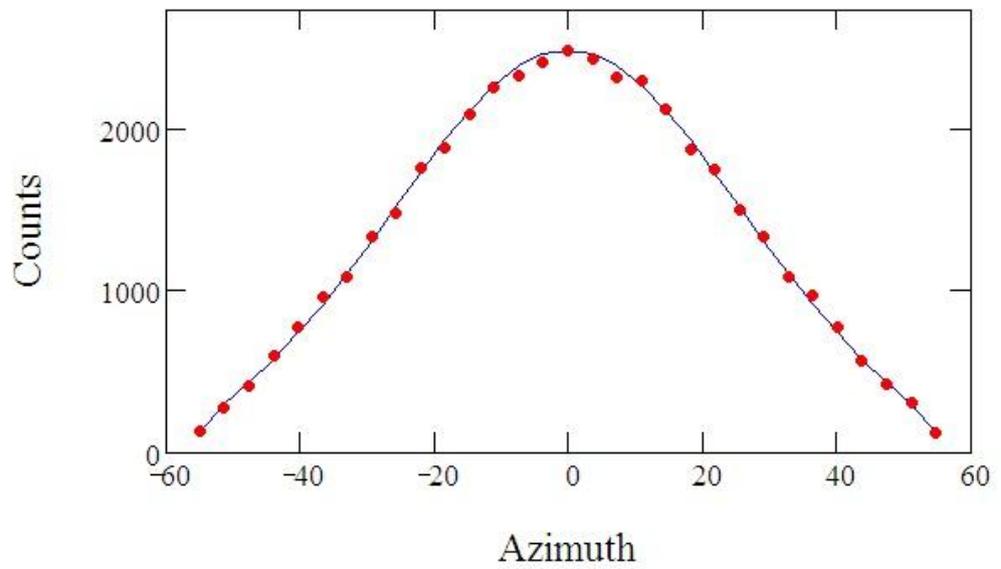


Рисунок 3.12 – Интегральный профиль ( $S/N=50$ ,  $\Delta = 97 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 31.9$ ).

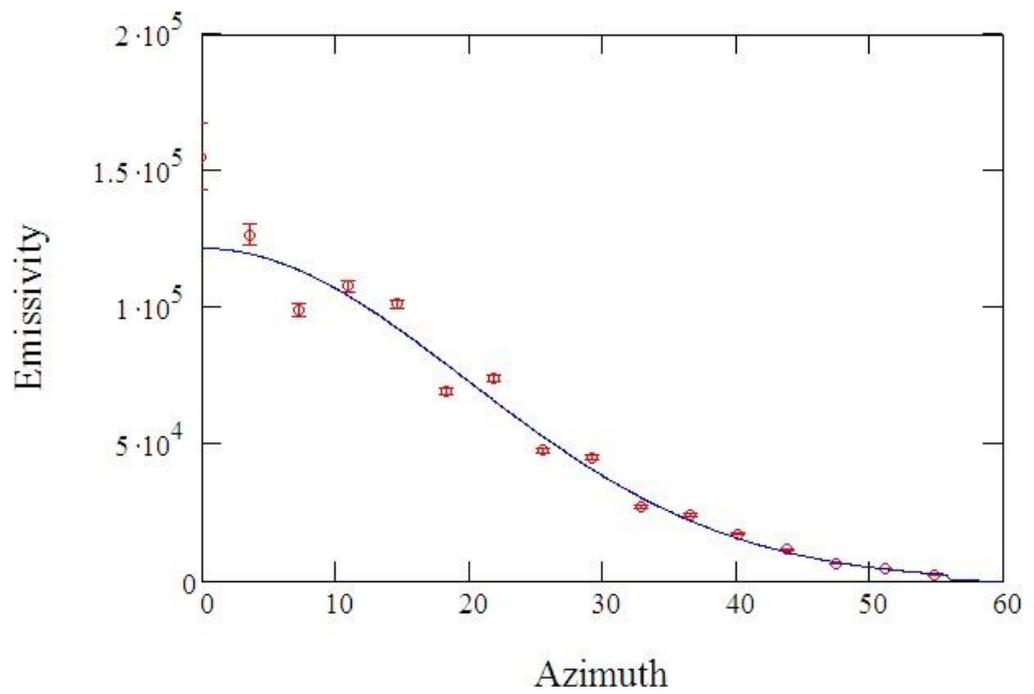


Рисунок 3.13 – Распределение объёмной меры эмиссии ( $S/N=50$ ,  $\Delta = 97 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 31.9$ ).

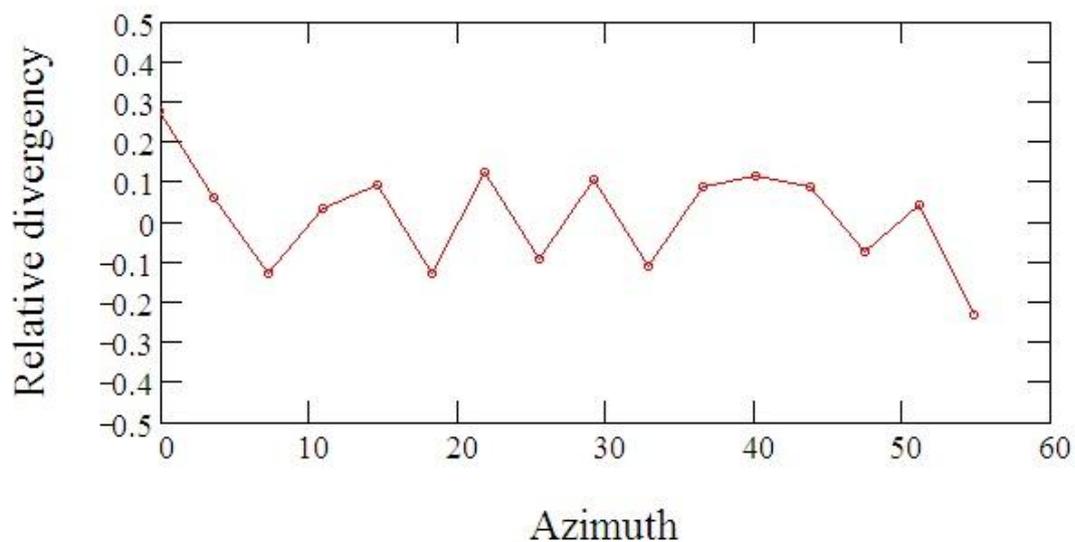


Рисунок 3.14 – Истинное распределение и результат депроекции изображения ( $S/N=50$ ,  $\Delta = 97 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 31.9$ ).

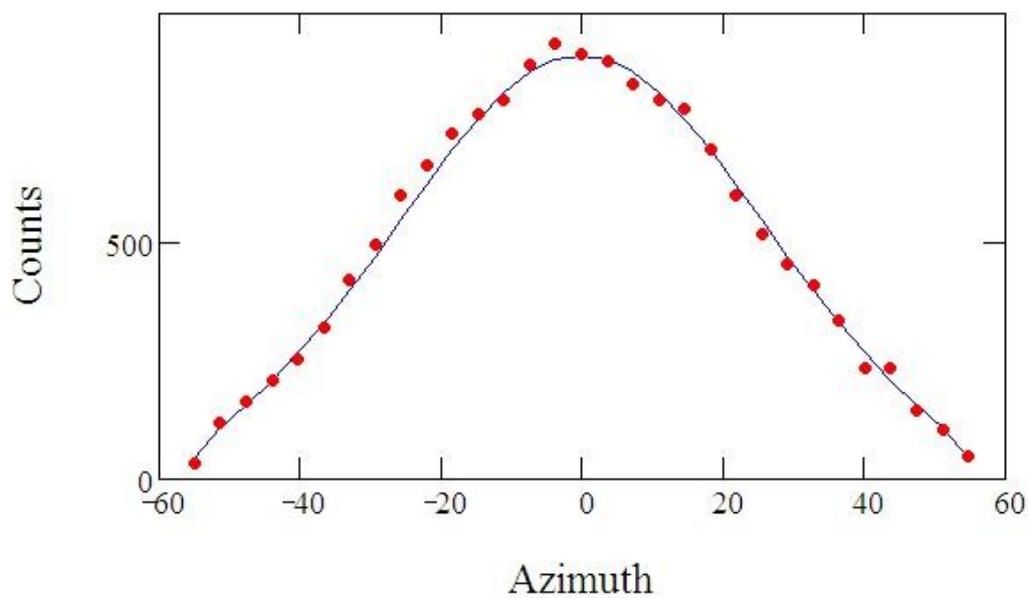


Рисунок 3.15 – Интегральный профиль ( $S/N=30$ ,  $\Delta = 122 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 19.3$ ).

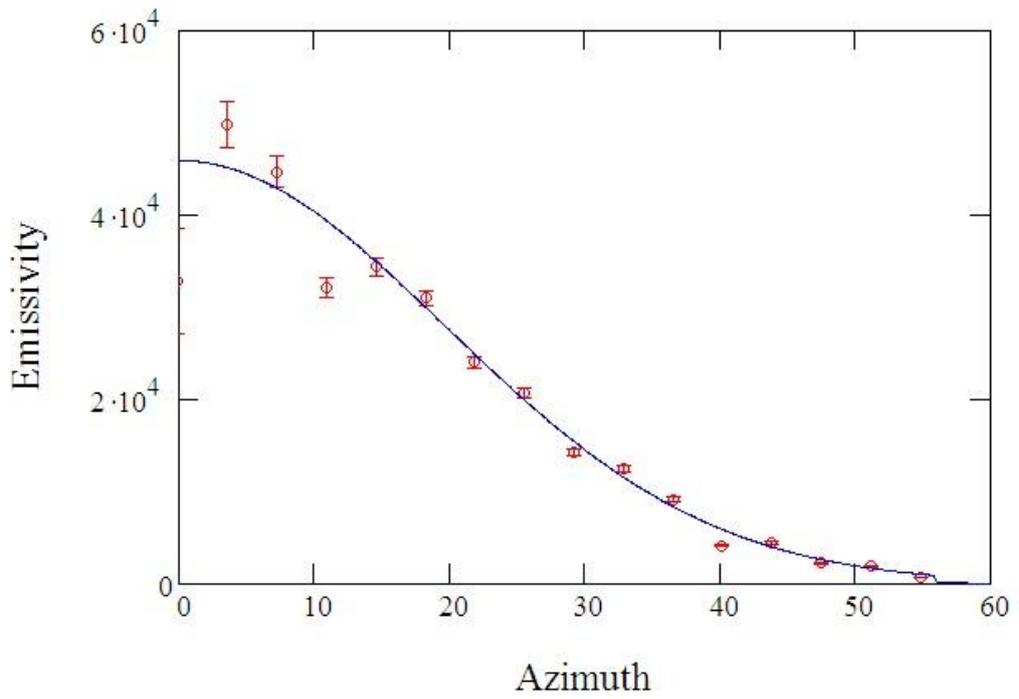


Рисунок 3.16 – Распределение объёмной меры эмиссии ( $S/N=30$ ,  $\Delta = 122 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 19.3$ ).

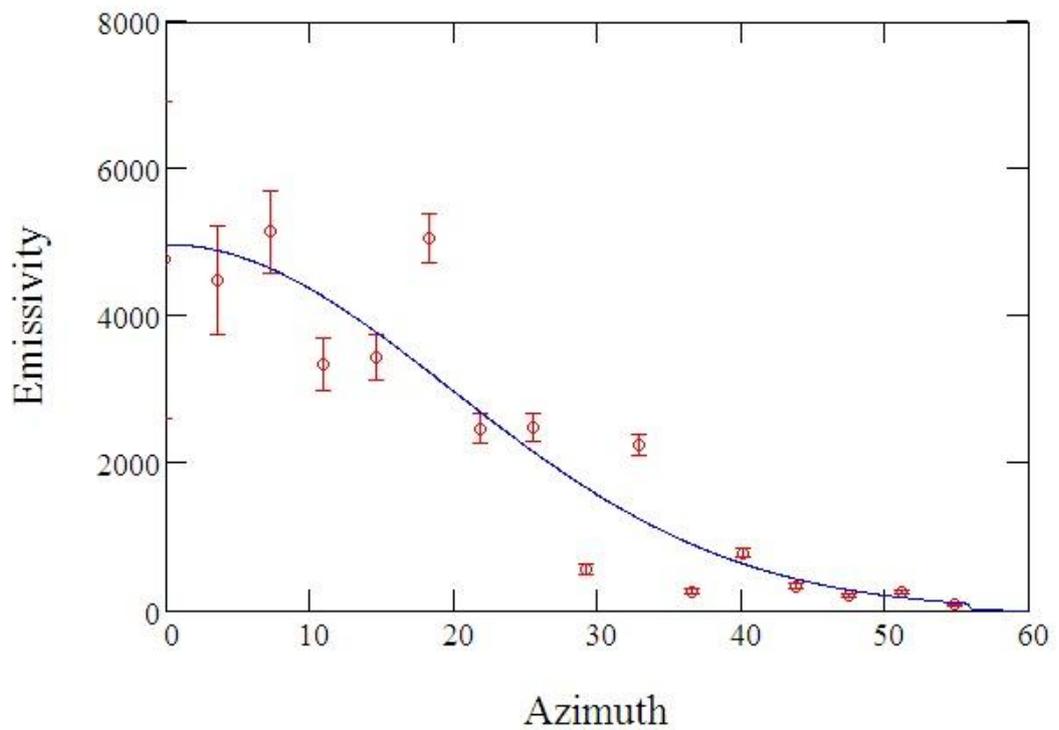


Рисунок 3.17 – Истинное распределение и результат депроекции изображения ( $S/N=30$ ,  $\Delta = 122 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 19.3$ ).

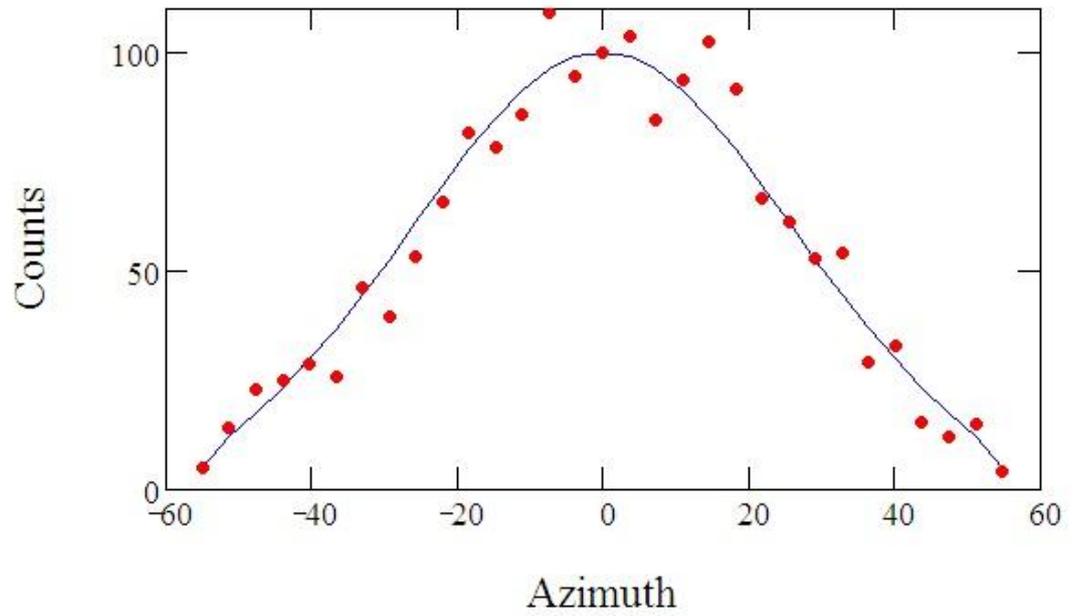


Рисунок 3.18 – Интегральный профиль ( $S/N=30$ ,  $\Delta = 122 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 19.3$ ).

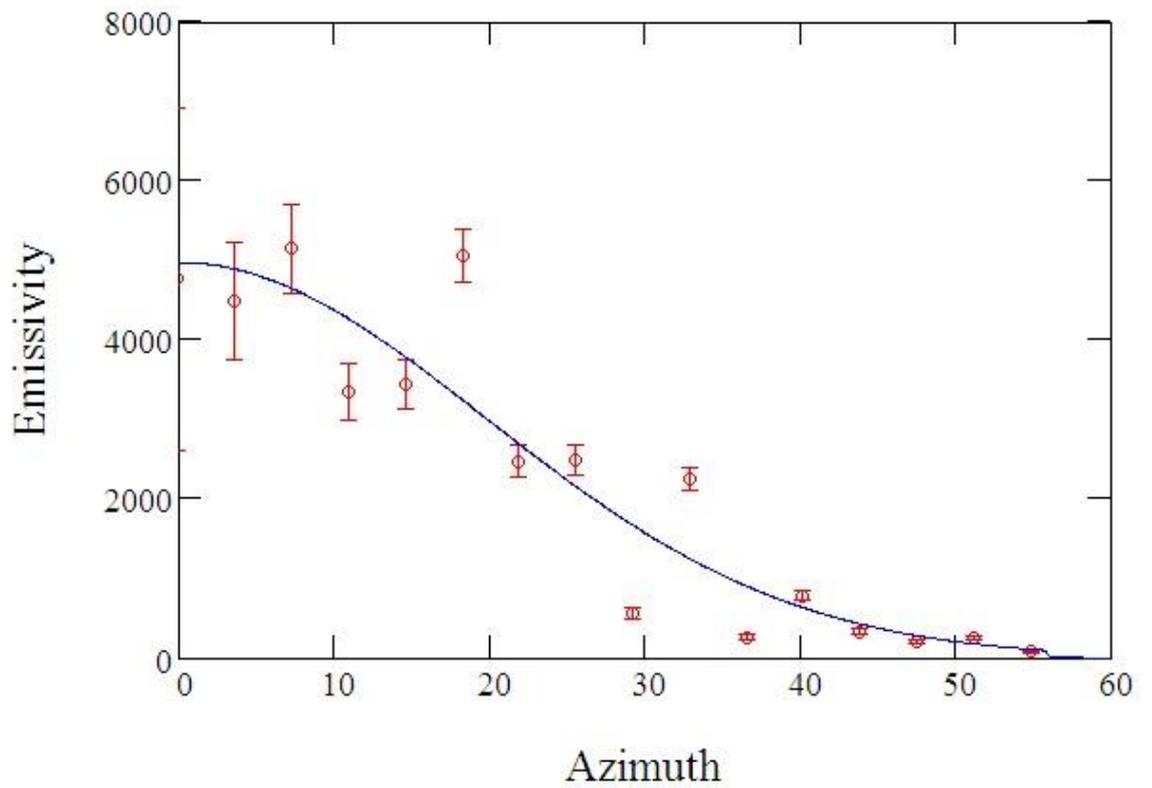


Рисунок 3.19 – Распределение объёмной меры эмиссии ( $S/N=30$ ,  $\Delta = 122 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 19.3$ ).

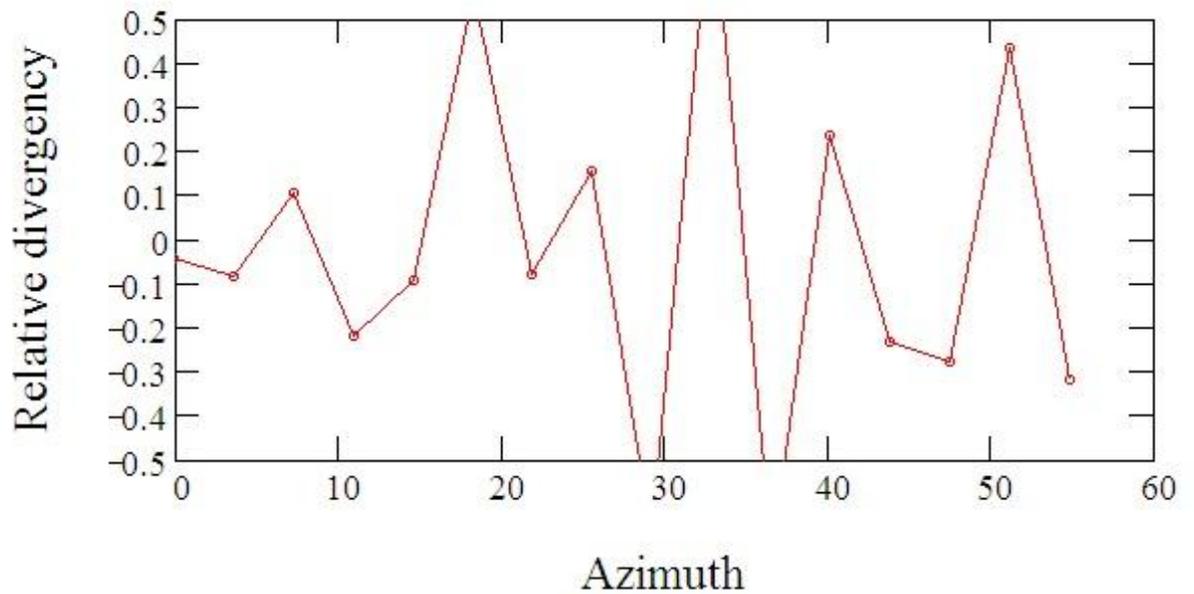


Рисунок 3.20 – Истинное распределение и результат депроекции изображения ( $S/N=30$ ,  $\Delta = 122 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 19.3$ ).

Несмотря на большое  $\chi^2$ , депроекция достаточно точна, как видно из рисунков. Однако рисунки для  $S/N=10$  показывают невозможность депроекции для столь малого отношения  $S/N$ , по критериям астрономических наблюдений.

Хороший контроль над ошибками особенно важен для любого метода депроекции, поскольку ошибки при заданном проецируемом разделении влияют на депроектированный сигнал во внутренних областях, тем самым вводя пренебрежимо малую ковариантность в реконструкции трехмерных профилей.

Ясно, что этот метод введения шума учитывает только статистические ошибки, связанные с конечными воздействиями. Однако он игнорирует эффекты любой систематики (например, вклад инструментального и космического фона и т. д.), которые должны быть включены в более реалистичную систему наблюдений. Вероятно, самым серьезным ограничением в данном подходе является то, что предполагается отсутствие какого-либо фона или, что фон можно удалить с произвольной точностью.

Значение профиля внутри каждого радиального кольца случайным образом рассеивается по распределению Гаусса, ширина которого определяется формулой ошибки, связанной с шумом, введенным на карту. Затем ошибки  $1\sigma$  в депроецированных профилях получаются как разброс в пределах набора из депроекций образцов профилей, полученных методом Монте-Карло марковской цепи. Наилучший процент ошибок - 10%. Это вполне ожидаемо из-за чувствительной зависимости.

Введение шума порождает флуктуации в тепловых профилях, которые переводят на вариации восстановленной плотности и температуры. Положительные флуктуации плотности соответствуют отрицательным колебаниям температуры (и наоборот). Кроме того, любые колебания в заданном направлении одной радиальной позиции обычно соответствуют флуктуации в противоположном направлении соседнего бина в пределах одного профиля. Эта закономерность в колебаниях свидетельствует о наличии значительной ковариации среди соседних сегментов в том же профиле и между значениями плотности и температуры, восстановленными в пределах того же радиального бина. Что касается ковариации между соседними бинами, то это обусловлено структурой модели onion-skin, принятой в депроекции. Каждый раз, когда количество флуктуаций оценивается в радиальной ячейке, депроекция заставляет ту же величину находиться под (над) соседним бином, чтобы сформировать правильный проецируемый профиль.

### **3.3 Зависимость от угла наклона**

Обычно угол наклона  $i$  к небесной плоскости астрономических вытянутых объектов неизвестен. Поэтому интересен вопрос насколько результат депроекции зависит от этого угла. Мы депроецировали срез между  $Z = 1.7$  и  $2.7$  (в системе координат наблюдателя, очевидно что соответствующие разрезы будут наклонены к оси конуса) в случаях наклона

10, 20 и 30 градусов. Большие значения мы не рассматривали, т.к. предельный угол наклона конуса полураствора 56 градусов - 34 градуса, в этом случае одна из плоскостей разреза конуса является касательной к поверхности конуса и не сечёт его. На рисунках 3.20 – 3.29 депроекция для предельных углов 10, 20 и 30 градусов.

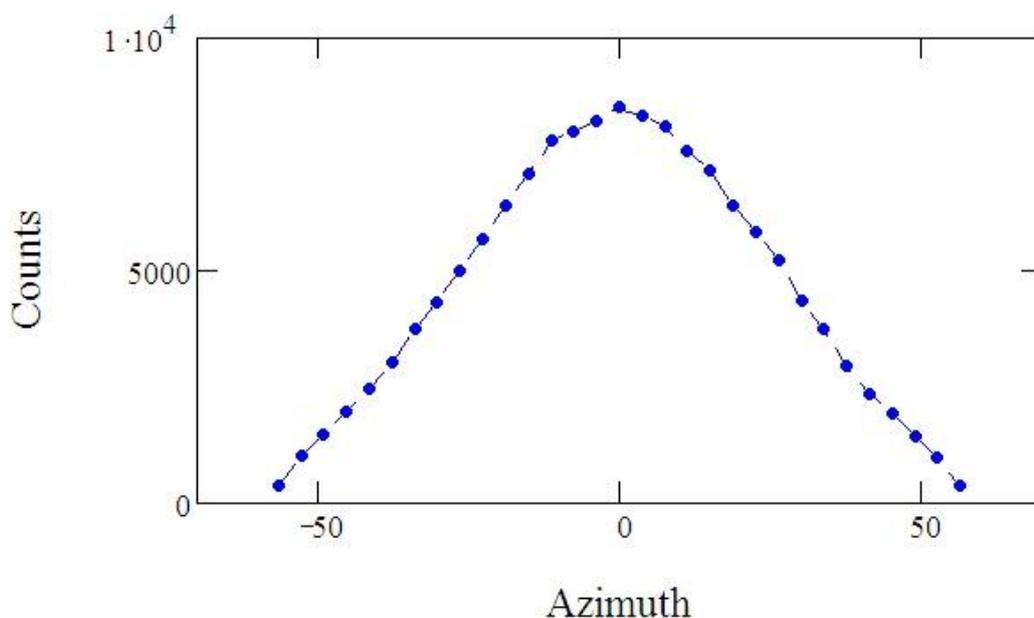


Рисунок 3.21 – Интегральный профиль ( $I = 10$ ,  $\Delta = 44 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 23.8$ ).

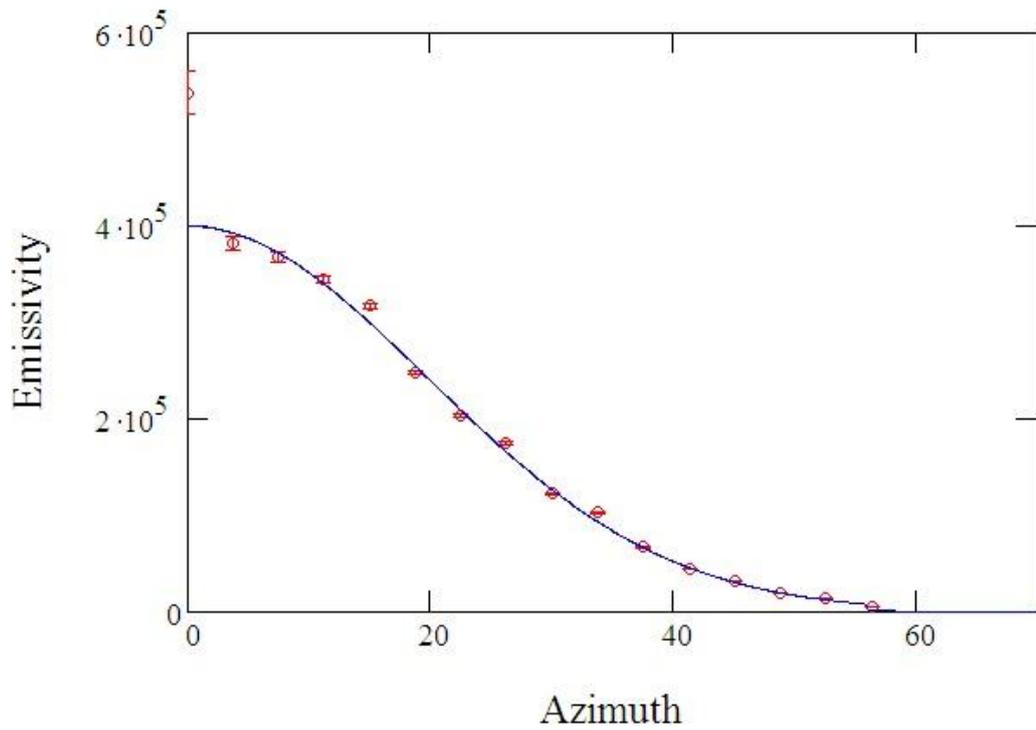


Рисунок 3.22 – Распределение объёмной меры эмиссии ( $I = 10$ ,  $\Delta = 44 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 23.8$ ).

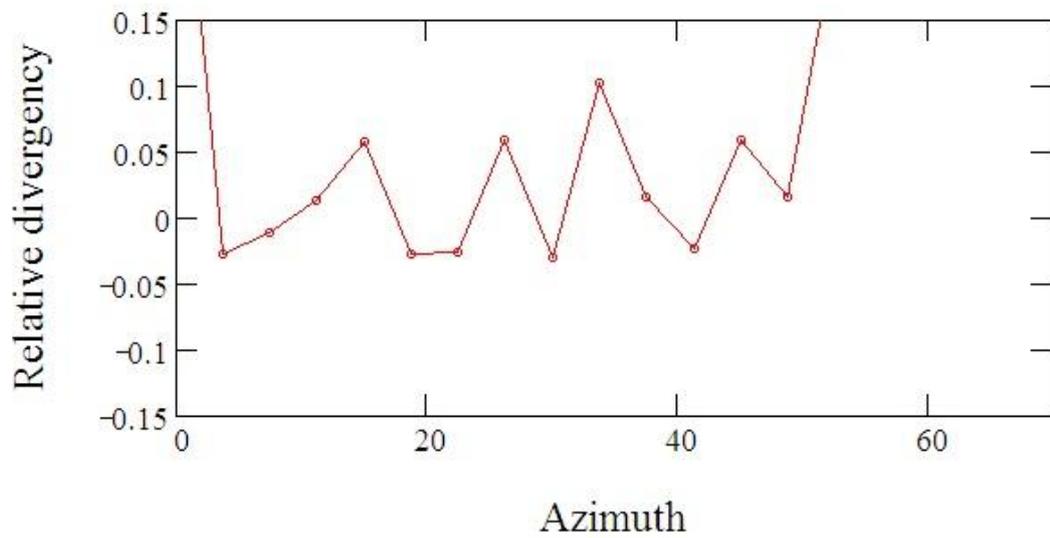


Рисунок 3.23 – Истинное распределение и результат депроекции изображения ( $I = 10$ ,  $\Delta = 44 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 23.8$ ).

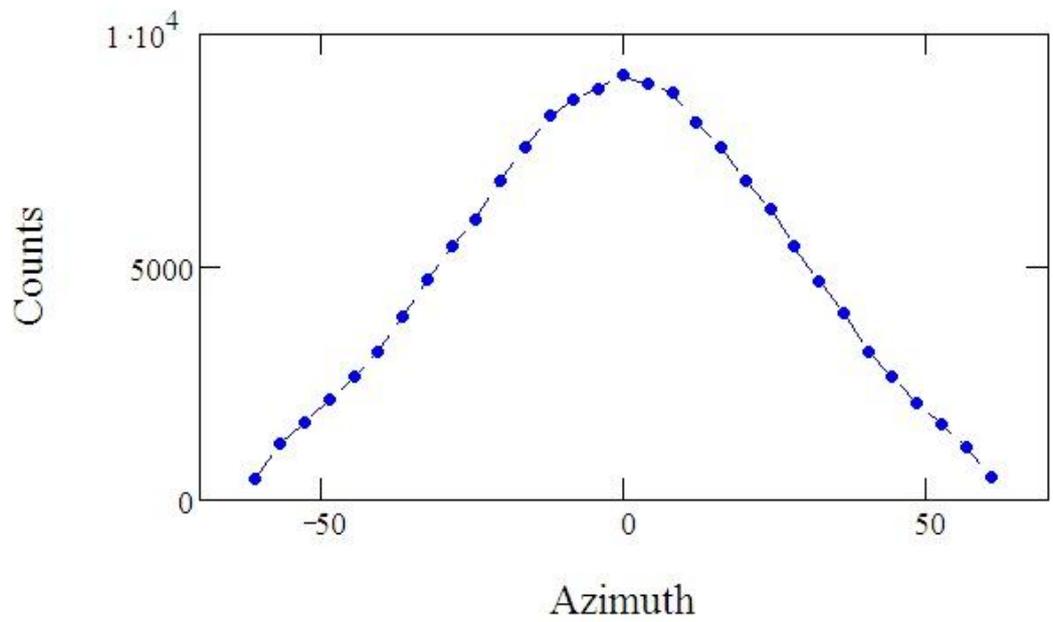


Рисунок 3.24 – Интегральный профиль ( $I = 20$ ,  $\Delta = 93 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 84,9$ ).

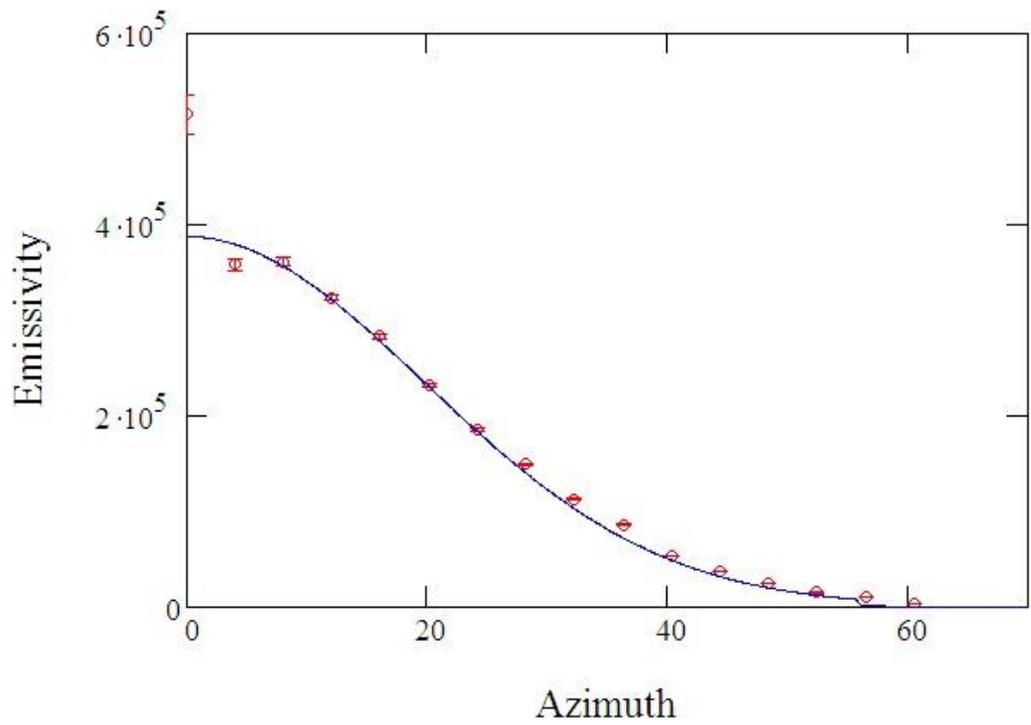


Рисунок 3.25 – Распределение объёмной меры эмиссии ( $I = 20$ ,  $\Delta = 93 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 84,9$ ).

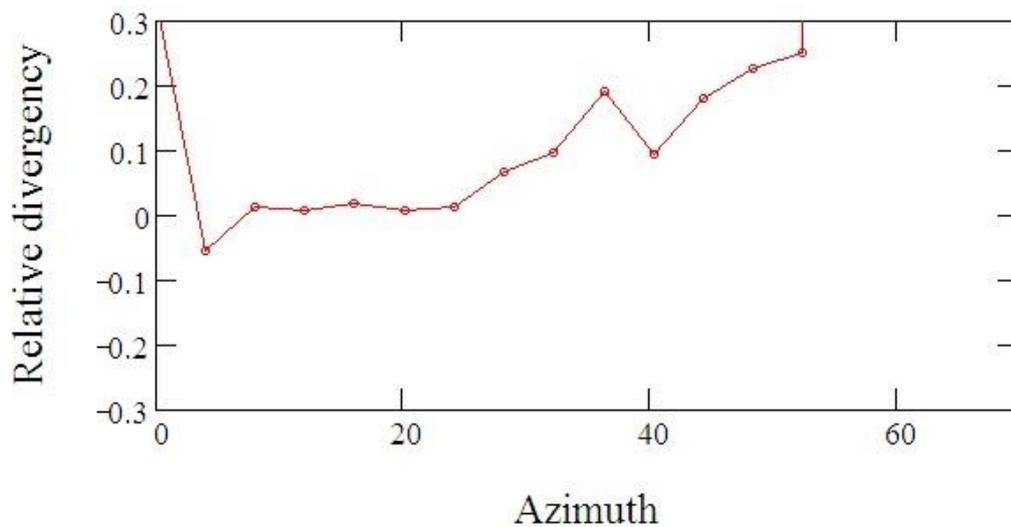


Рисунок 3.26 – Истинное распределение и результат депроекции изображения ( $I = 20$ ,  $\Delta = 93 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 84,9$ ).

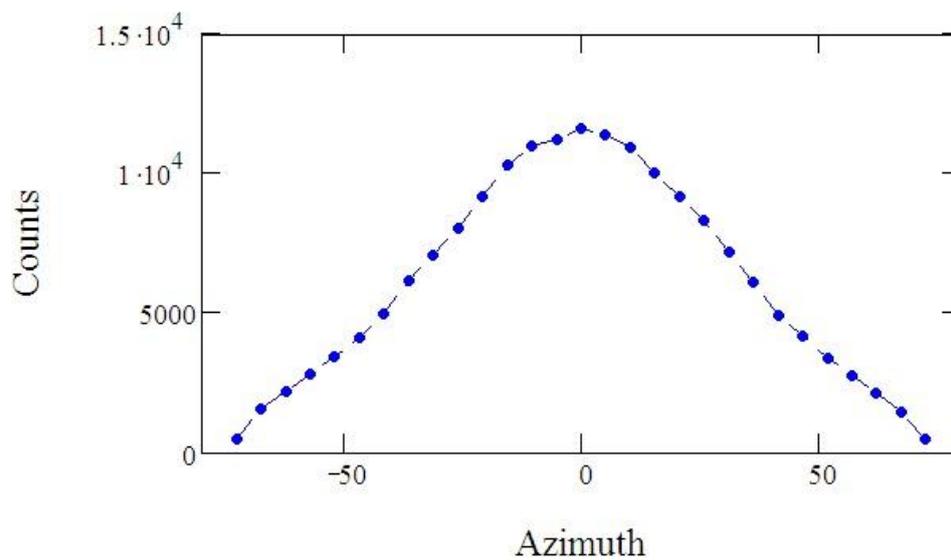


Рисунок 3.27 – Интегральный профиль ( $I = 30$ ,  $\Delta = 289 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 636$ ).

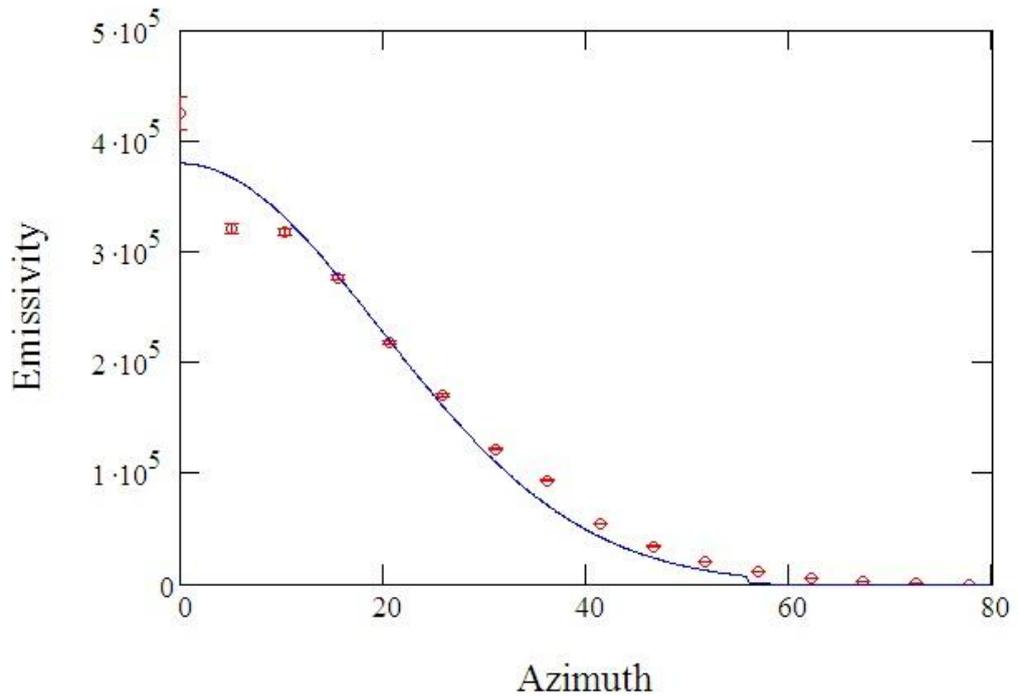


Рисунок 3.28 – Распределение объёмной меры эмиссии ( $I = 30$ ,  $\Delta = 289 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 636$ ).

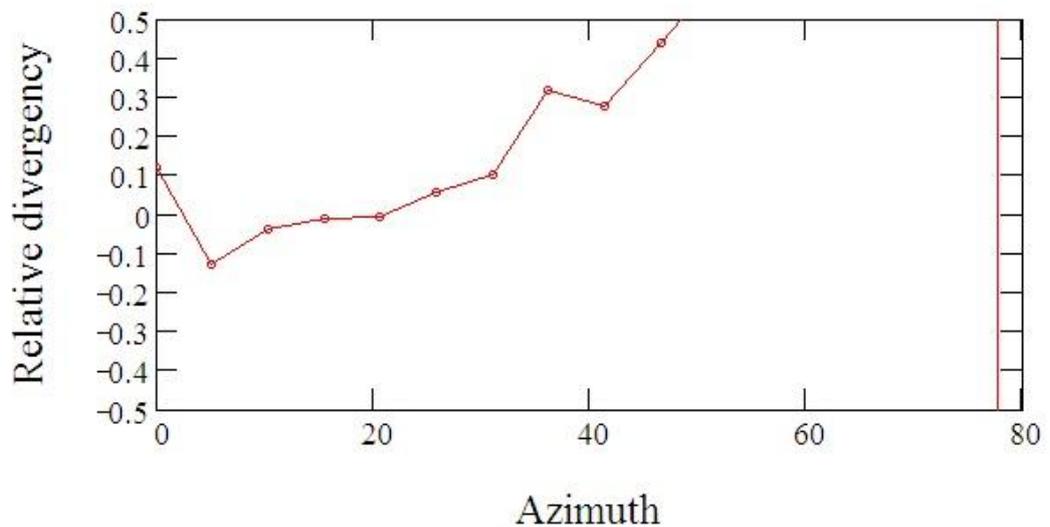


Рисунок 3.29 – Истинное распределение и результат депроекции изображения ( $I = 30$ ,  $\Delta = 289 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi^2 = 636$ ).

Судя по рисункам 3.20 – 3.29, даже для предельных углов наклона депроекция даёт профили с хорошей точностью, т.е. хорошо восстанавливается форма распределения в целом. Возможно, с меньшим накоплением, и потому с большим шумом,  $\chi^2$  мог бы быть меньшим.

В главе 3 рассмотрено применение метода депроекции к идеализированным и зашумленным изображениям. Мы смоделировали объект в виде конуса раствором 56 градусов, усечённого на высотах  $z=1$  и  $z=30$ , состоящим из 4 млн точек, распределённых случайным образом равномерно по  $z$ , равномерно по полярному углу, и по экспоненциальному закону по азимуту, который определяем как угловое расстояние от оси конуса, измеряемое в вершине конуса. Он представлен на рисунке 3.1 сжатым в 10 раз по  $Z$  для удобства представления.

## ГЛАВА 4 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕПРОЕКЦИИ К РЕАЛЬНЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК

### 4.1 Применение к реальным изображениям

Ряд различных анализов, основанных на депроекции профилей с предположением осевой симметрии, указывают на то, изображения имеют тенденцию ориентировать объектам, которые удлиняются вдоль прямой видимости. Чтобы контролировать эффект этого смещения, было решено выбрать оси проекции, которые будут выровнены с главными осями инерции. Это позволит количественно определить разницу в восстановленных профилях, когда направление проецирования равно максимальному удлинению.

Проверив надежность метода депроекции на идеализированных объектах применим этот метод к более реалистичному случаю. В этом случае ожидается, что ряд эффектов, таких как отклонения от сферической симметрии, наличия оснований и наличия фоновых загрязняющих структур, ухудшит способность депроекции восстанавливать трехмерные профили.

Объект описанный Watson в своей работе[34] является типичным для этого исследования. Он довольно рассеян и имеет небольшое количество оснований. Что касается наличия оснований, то они хорошо известны как важный источник смещения в депроекции, особенно рентгеновского сигнала, который очень чувствителен к сгущению газа. Замаскированные области исключаются из вычисления сигналов, которые должны быть депроецированы. Это приводит к увеличению статистической неопределенности в тех областях, которые имеют значительное перекрытие с замаскированными. Ясно, что из-за конечной статистики фотонов небольшие скопления могут опускаться ниже порога обнаружения, а их присутствие все еще может влиять на излучательную способность.

Отметим также, что в трехмерных профилях, полученных из трех ортогональных направлений проецирования, имеются довольно небольшие

различия, что указывает на то, что они почти сферические и без значительных оснований вдоль разных направлений проецирования. Шкалы ошибок всегда составляют порядка нескольких процентов. Очень малые погрешности частично являются следствием ограничения регуляризации.

Профили, извлеченные из проекции максимального удлинения, завышены при малых радиусах, в то время как они не до конца распознаются на окраинах. Чтобы количественно оценить этот эффект, показано соотношение между истинным и восстановленным профилями. Посредством усреднения по всем проекционным направлениям плотность обычно переоценивается примерно на 10% при всех радиусах. Этот результат подтверждается также анализами, выполненными на идеализированных изображениях. С другой стороны, подтверждается, что профиль плотности, восстановленный из проекции вдоль оси  $z$ , значительно больше, чем вдоль другого направления в самой внутренней части. Удлинение приводит к тому, что объекты становятся более компактными. Это повышает депроецированную центральную плотность и истощает ее на окраинах.

Показываем результат депроекции вдоль трех ортогональных направлений. Строки ошибок соответствуют уровню достоверности  $1\sigma$ , учитывая полную корреляционную матрицу ошибок при интеграции трехмерных сечений плотности газа.

В качестве применения метода депроекции вычислим массу газа, которая рассчитывается путем суммирования массы, содержащейся в каждом радиальном сегменте. Поскольку позиции не являются независимыми, ошибки на общей массе газа рассчитывались с использованием как дисперсий, так и ковариаций значений плотности при разных радиусах. Важно учитывать, что ковариация между плотностью в соседних позициях отрицательна. Если этим пренебрегать, это приведет к систематической переоценке ошибок на массе.

Малая переоценка для профилей, явно распространяется на оценку общей массы газа. Получающееся отклонение оказывается очень маленьким и составляет около 5%. Это демонстрирует, что остаточное уплотнение газа после удаления шумов, идентифицированных на картах рентгеновских лучей, мало влияет на способность восстанавливать общую массу. Дисперсия часто сравнима с «проекционной дисперсией», т. е. с различиями, обнаруженными при проецировании одних и тех же данных по разным направлениям. Также неопределенности в отдельных оценках, как правило, порядка нескольких процентов.

Для применения метода депроекции был использован профиль из работы Watson[34] рисунок 4.1.

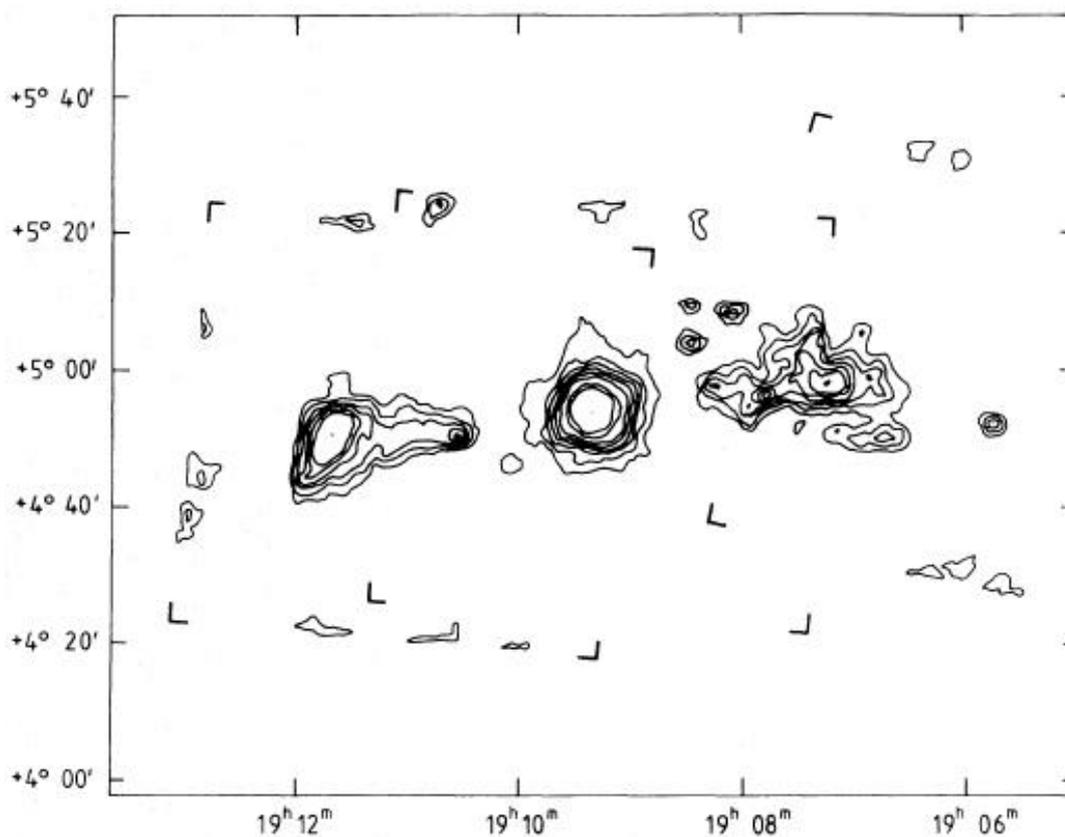


Рисунок 4.1– Реальный профиль.

Применение метода к реальному описанному Watson объекту[34] на рисунке 4.2.

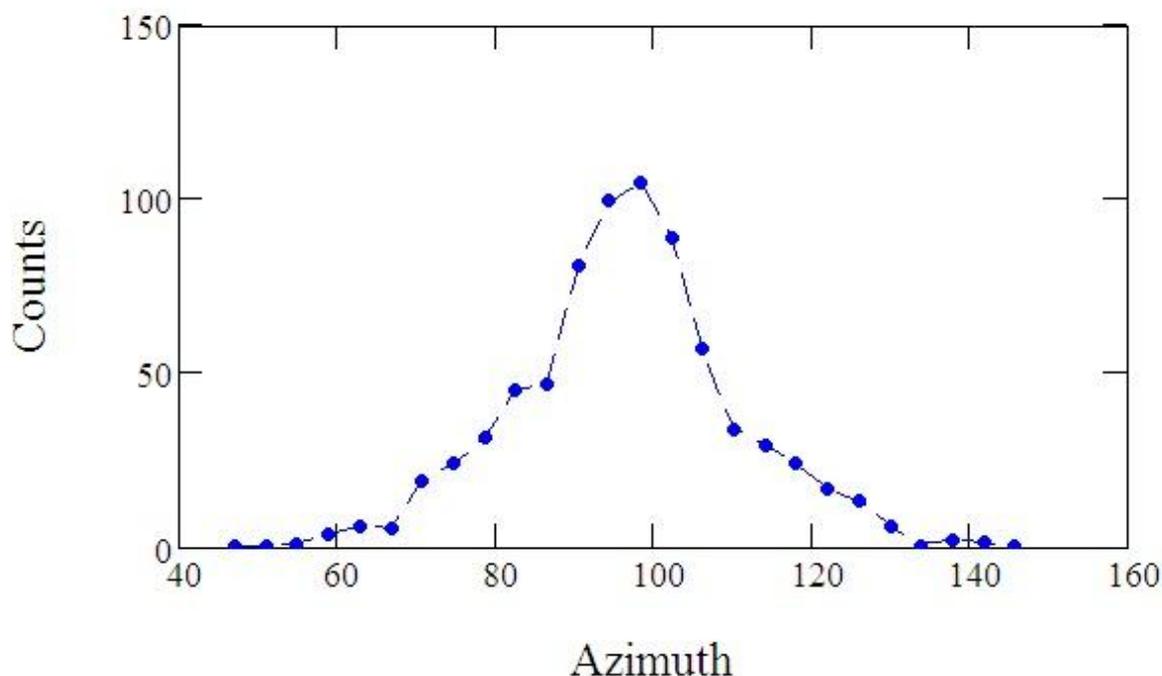


Рисунок 4.2– Реальный профиль, полученный Watson.

Он довольно симметричен. Процедура депроекции усредняет, делает депроецируемый профиль симметричным. Азимут исчисляется от направления на небо на север против часовой стрелки. Результат депроекции на рисунке 4.3.

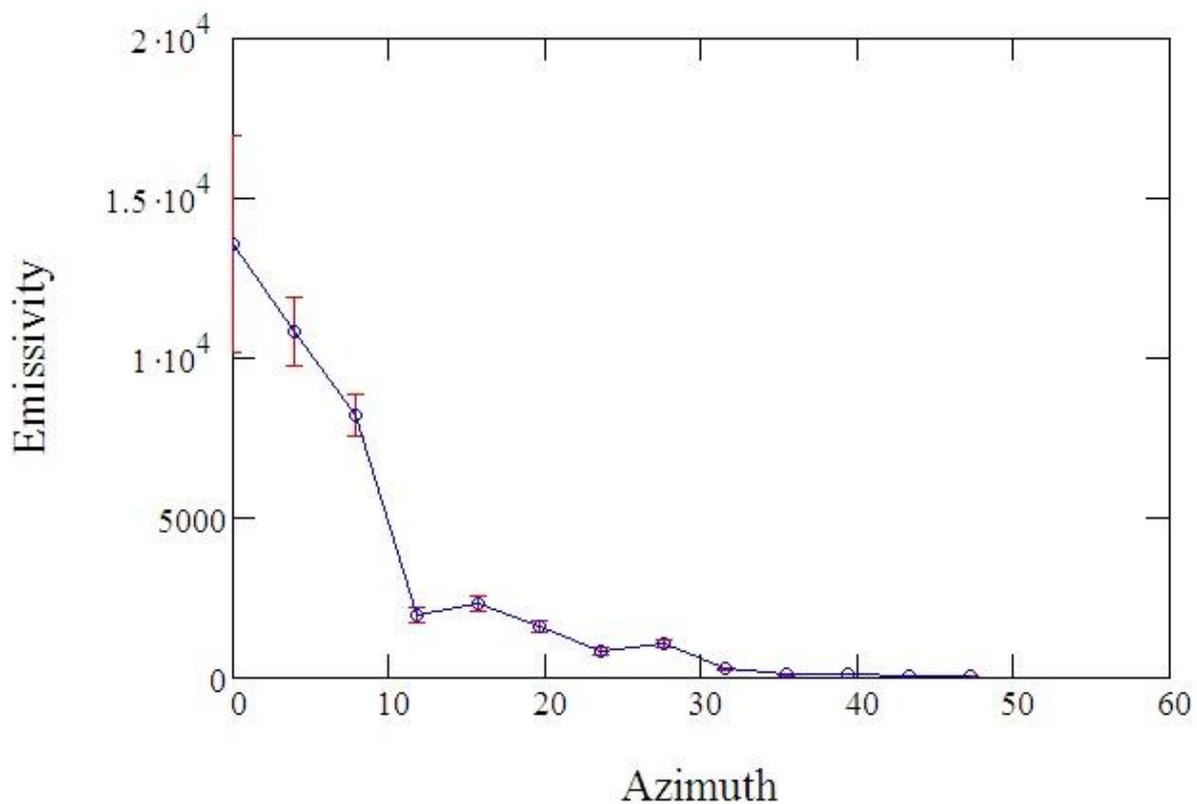


Рисунок 4.3—Результат депроекции профиля Watson.

Видно, что основная часть рентгеновского излучения происходит в растворе порядка 20 градусов, и существенно меньшая эмиссия происходит в существенно более широком слое около оси рентгеновской туманности, раствором 60-80 градусов, с пологим распределением на конце.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации представлены результаты методов депроекции, направленных на восстановление трехмерных плотностных и температурных профилей.

Целью выпускной квалификационной работы является исследование прямого метода восстановления "onion-skin" 3D структуры протяженных осесимметричных объектов.

Рассматриваемый метод депроекции основан на сферической симметрии кластеров.

Используя метод Монте-Карло Марковской цепи для оптимизации выборки пространства параметров, данный способ депроекции позволяет восстановить полную корреляционную матрицу ошибок в параметрировании.

Основные результаты работы можно резюмировать следующим образом:

1. Показано, что применение данного метода к объекту с осью симметрии, лежащей в небесной плоскости, восстанавливает 3D структуру объекта полностью идентичную оригинальной структуре, в отличие от аналитических;

2. Получена зависимость невязки между реальным и восстановленным распределениями от уровня шума;

3. Получена зависимость невязки между реальным и восстановленным распределениями от угла наклона.

Этот подход имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными методами рентгеновской спектроскопии. Ограничение анализа, представленное в данной работе, заключается в реалистичности создания профилей. Фоновые сигналы от неразрешенных точечных радиоисточников и групп фоновых галактик могут влиять на сигнал в окраинах изображения. В этом отношении возможность проведения многочастотных наблюдений с хорошим угловым разрешением, несомненно, поможет определить и

устранить эти загрязнения. Однокомпонентные телескопы следующего поколения обещают обеспечить изображениями с пространственным разрешением нескольких десятков дуговых секунд. В то же время планируемые спутники для рентгеновских съемок будут обладать способностью обследовать большие районы неба с качественной визуализацией и контролем фона. Эти наблюдательные объекты откроют возможность проведения высококачественной съемки. Применение методов депроекции, представленных в данной работе, позволит использовать их потенциал как инструмент для точной космологии.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### *Нормативно-правовые акты*

1. ГОСТ 19.701-90. ЕСПД. Схемы алгоритмов, программ, данных и систем. Обозначения условные и правила выполнения.

### *Научная и методическая литература*

2. Байдицкая В.К. Методы восстановления трёхмерной структуры осесимметричных объектов//XLIV Студенческая международная научно-практическая конференция «Научное сообщество студентов: междисциплинарные исследования». Новосибирск, 2018. – С. 50-53.

3. Винтаев, В.Н. Адаптивное восстановление резкости на цифровых космических изображениях/ В.Н. Винтаев, М.Ю. Жиленев, С.И. Маторин, Н.Н. Ушакова, Н.В. Щербинина//Журнал «Информационные технологии и вычислительные системы», 2014. – Выпуск 4. – С. 33-43.

4. Доля, П.Г. Введение в математические методы компьютерной томографии/ П.Г. Доля, Харьковский Национальный Университет механико – математический факультет, 2015.

5. Иванков, А.Ю. Алгоритм построения сверхразрешения изображений с использованием фильтра Калмана / А.Ю. Иванков, А.А. Сирота // Сборник студенческих научных работ факультета компьютерных наук ВГУ. – Воронеж, 2012. – Выпуск 6. – С. 55-64.

6. Иващук, О.А. Сравнительный анализ методов восстановления при коррекции резкости на снимках высокого разрешения с помощью координируемой коррекции резкости и с применением деконволюции/ Иващук 134 О.А., Щербинина Н.В.// Научные ведомости БГУ. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика, 2014. – №21 (192). Выпуск 32/1. – С. 118-123.

7. Константинов, И.С. Адаптивная коррекция процесса восстановления резкости космических изображений высокого разрешения/ Константинов И.С., Щербинина Н.В., Жиленев М.Ю., Винтаев В.Н.,

Ушакова Н.Н.// Научные ведомости БГУ. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика, 2014. – №8 (179). – С. 189-200. (Выполнена при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-07-00171).

8. Константинов, И. С. Специальная коррекция в процедурах регуляризации и итеративных процессах снижения пятна функции рассеяния точки на космических изображениях/ Константинов И.Г., Щербинина Н.В., Жиленев М.Ю., Винтаев В.Н., Ушакова Н.Н // Научные ведомости БелГУ. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика, 2014. – № 8(151). – Выпуск 26/1. – С. 194-199.

9. Кухарев Г. А., Каменская Е. И., Щеголева Н. Л. Методы представления и сравнения семантически разных классов изображений // Бизнес-информатика, 2013 № 4(26). – С. 43-52.

10. Фаворская, М. Н. Метод улучшения цветных изображений на основе выравнивания спектральных диапазонов и коррекции контрастности /Фаворская М. Н., Зотин А. Г., Пахирка А. И.// Сборник трудов научно-технической конференции «Техническое зрение в системах управления 2011». – Москва, ИКИ РАН, 2012. – Т.38. – С. 99-104.

11. Фисунов А.В., Кожин Р.А., Воронин В.В., Левина О.М. Исследование метода повышения разрешения цифровых изображений на основе поиска самоподобных областей // Материалы XI Международный научно-технический форум «Инновации, экология и ресурсосберегающие технологии», Ростов н/Д: ДГТУ, 2014. – С. 1347-1353.

12. Щекотин Д.С. Сравнение и развитие различных методов реконструкции изображений в рентгеновской томографии // Современные направления приборостроения, информационных и гуманитарных наук. Сборник научных трудов. СПб: СПбГУ ИТМО. 2015. Т.2. С. 247-254.

*Литература на иностранном языке*

13. Bove V., Becker S. Semiautomatic 3-D model extraction from uncalibrated 2- D camera views // In SPIE V. 2410, Visual Data Exploration and Analysis II, San Jose. 2012. - P. 447-461.
14. Bremer M. 3D iterative deprojection techniques. / M. Bremer / A&A Suppl. Ser. – 1995. – №112. – P. 551.
15. Denisova, A.Yu. Energy spectrum method for identification of a linear observation model without correlation model of input signal./ V.V.Sergeyev, A.Yu.Denisova //11th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies. Conference Proceedings - Samara: IPSIRAS, 2013. - V. 1.- P. 315-318.
16. Efros A., Leung T. Texture synthesis by non-parametric sampling // IEEE International conference on Computer Vision (ICCV), Corfu, Greece, September 2012. – P. 1033-1038.
17. Entezari A., Nilchian M., Unser M. A Box Spline Calculus for the Discretization of Computed Tomography Reconstruction Problems // IEEE Transactions on Medical Imaging. – 2012. – Vol. 31, No. 8. – P. 1532–1541.
18. Grossauer H., Scherzer O. Using the complex Ginzburg-Landau equation for digital inpainting in 2D and 3D // In Sacle space method in computer vision, Springer, 2012.
19. Kaup A., Aach T. Efficient prediction of uncovered background in interframe coding using spatial extrapolation: materials conf. // Proceedings of the international conference on acoustics, speech, and signal processing, V. 5, 2012. – P. 501-504.
20. Kazantsev I.G., Schmidt S. A spherical x-ray transform and hypercube sections // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2014. – Vol. 22, No. 4. – P. 471–483.
21. Klukowska J., Davidi R., Herman G.T. SNARK09 - A software package for reconstruction of 2D images from 1D projections // Computer Methods and Programs in Biomedicine. – 2013. – Vol. 110, No. 3. – P. 424–440.

22. Lanman D., Crispell D., Taubin G. Surround structured lighting for full object scanning // In Proceedings of the International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, 2012. – P. 107-116.
23. Lavrov S.A., Simonov E.N. Effect of regrouping of projecting data from fan to parallel geometry in reconstruction of tomographic images // Biomedical Engineering. 2010. Vol. 44, №3. P. 114-120.
24. Narasimhan S., Nayar S. Structured light methods for underwater imaging: light stripe scanning and photometric stereo // Proceedings of 2012 MTS/IEEE OCEANS, V. 3, 2012. – P. 2610-2617.
25. Oliveira M., Bowen B., McKenna R., Chang Y. Fast Digital Image Inpainting // Proceedings of the International Conference on Visualization, Imaging and Image Processing, ACTA Press, 2012. – P. 261-266.
26. Pavelyeva E. A., Krylov A. S. Synthesis of phase and magnitude of images by Hermite projection method // Pattern Recognition and Image Analysis. – Vol. 25, no. 2. – 2015. – P. 187-192.
27. Pavelyeva E. A., Krylov A. S. Image reconstruction from phase using Hermite projection method // Proceedings of 11-th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-11-2013). - 2013. - Vol. 1. – P. 296-299.
28. Pinkus A. Smoothness and Uniqueness in Ridge Function Representation // Indagationes Mathematicae. – 2013. – Vol. 24. – P. 725–738.
29. Qi F., Han J., Wang P., Shi G., Li F. Structure guided fusion for depth map inpainting // Pattern Recognition Letters 34, 2013. – P. 70-76
30. Rigaud G., Nguyen M.K., Louis A.K. Modeling and simulation results on a new Compton scattering tomography modality // Simulation Modeling: Practice and Theory. – 2013. – Vol. 33. – P. 28–44.
31. Schmidt S., Gade-Nielsen N.F., Hostergaard M., Dammann B., Kazantsev I.G. High resolution orientation distribution function // Materials Science Forum. – 2012. – Vol. 702-703, No. 1. – P. 536– 539.

32. Tallon M., Babacan S. D., Mateos J, Do M., Molina R., Katsaggelos A. Upsampling and denoising of depth maps via joint-segmentation // European Signal Processing Conference, 2012. – P. 245-249.
33. Tomori Z., Gargalik R., Hrmo I. Active Segmentation in 3D using Kinect Sensor // Proc. of the 20th International Conference on Computer Graphics / Visualization and Computer Vision 2012, Part 2, 2012.
34. Watson M. The x-ray lobes of ss433/ M. Watson, R. Willingale / ApJ – 1983. – 1983. – №273, – P. 688.
35. Zhang B., Li Y. F. Automatic Calibration and Reconstruction for Active Vision Systems, Intelligent Systems, Control, and Automation // Science and Engineering. V. 57, Springer, 2012. – P. 175.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

$$z1 := 1 \quad z2 := 3C \quad \theta_j := 56 \text{ deg} \quad \theta_m := 0.0\theta_j \quad \theta_s := 0.5\theta_j$$

$$\kappa := 40 \quad \theta_{jH} := \left(1 + \frac{10}{2\kappa}\right) \cdot \theta_j \quad H(\theta) := \frac{1}{1 + \exp[2\kappa \cdot |\theta - \theta_j|]}$$

$$f(\theta) := \exp\left[-\left(\frac{\theta - \theta_m}{0.5\theta_j}\right)^2\right] \cdot H(\theta) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^3} \quad f_0(\theta) := \exp\left[-\left(\frac{\theta - \theta_m}{0.5\theta_j}\right)^2\right] \cdot H(\theta)$$

```

ob(a) :=
  j ← -1
  θ ← θs
  while θ > 0
    Θj←j+1 ← θ
    Δθ1 ← 1 ÷ (A·f(θ))
    Δθ2 ← 1 ÷ (A·f(θ - 0.5Δθ1))
    θ ← θ - 0.5(Δθ1 + Δθ2)
  Θ ← submatrix(Θ, j, 0, 0, 0)
  Δθ1 ← 1 ÷ |A·f(θs)|
  Δθ2 ← 1 ÷ |A·f(θs + 0.5Δθ1)|
  θ ← θs + 0.5(Δθ1 + Δθ2)
  while θ < θjH
    Θj←j+1 ← θ
    Δθ1 ← 1 ÷ (A·f(θ))
    Δθ2 ← 1 ÷ (A·f(θ + 0.5Δθ1))
    θ ← θ + 0.5(Δθ1 + Δθ2)
  J ← j
  i ← -1
  for j ∈ 0..J
    z ← z1 + rnd(z2 - z1)
    φ ← Δφ · j
    i ← i + 1
    Mi,0 ← z·tan(Θj)·cos(φ)
    Mi,1 ← z·tan(Θj)·sin(φ)
    Mi,2 ← z
  (M)
  (Θ)

  θ ← θs + 1 ÷ |A·f(θs)|
  for j ∈ 0..J
    z ← z1 + rnd(z2 - z1)
    φ ← Δφ · j
    i ← i + 1
    Mi,0 ← z·tan(Θj)·cos(φ)
    Mi,1 ← z·tan(Θj)·sin(φ)
    Mi,2 ← z

```

$$\theta_{sc}(\kappa) := \left(1 - \frac{10}{2 \cdot \kappa}\right) \cdot \theta_j \quad \text{OY}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

```

ob(a) :=
  i ← -1
  for j ∈ 1..J
    θj ← Δθ · j
    K ← round(|f(θj) · V(θj)|)
    continue if K = 0
    Δφ ←  $\frac{2 \cdot \pi}{K}$ 
    φ0 ← rnd(Δφ)
    for k ∈ 0..K - 1
      z ← z1 + rnd(z2 - z1)
      φ ← k · Δφ + φ0
      M<i←i+1> ← z ·  $\begin{pmatrix} \tan(\theta_j) \cdot \cos(\phi) \\ \tan(\theta_j) \cdot \sin(\phi) \\ 1 \end{pmatrix}$ 
    (MT)
    (θ)

```

cone<sub>0</sub> := "cone0-300.dat"      cone<sub>1</sub> := "cone301-600.dat"      cone<sub>2</sub> := "cone601-900.dat"  
 cone<sub>3</sub> := "cone901-1200.dat"      cone<sub>4</sub> := "cone1201-1500.dat"      cone<sub>5</sub> := "cone1501-1800.dat"  
 cone<sub>6</sub> := "cone1801-2100.dat"      cone<sub>7</sub> := "cone2101-2400.dat"      cone<sub>8</sub> := "cone2401-2700.dat"  
 cone<sub>9</sub> := "cone2701-3003.dat"

```

glu(a) :=  $\begin{pmatrix} p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + p_3 \cdot x^3 + p_4 \cdot x^4 \\ M \leftarrow \text{READPRN}(\text{cone}_0) \\ 1 \\ \text{for } i \in 1..a \\ X \leftarrow \text{READPRN}(\text{cone}_i) \\ x \\ M \leftarrow \text{stack}(M, X) \\ x \\ M \end{pmatrix}$ 
Fp(x, p) :=
p :=  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
O := ob(0)      M := O0      rew(M) := Nq ← rows(M) - 1
WRITEPRN("cone4M30z.dat") := M■
M := READPRN("cone4M30z.dat")■
M := glu(9)■
92
odd ! M       $\begin{pmatrix} 1 \\ z \leftarrow \frac{30 - z1}{z2 - z1} \cdot (M_{i,2} - z1) + z1 \\ M_{i,0} \leftarrow \frac{M_{i,0}}{M_{i,2}} \cdot z \\ M_{i,1} \leftarrow \frac{M_{i,1}}{M_{i,2}} \cdot z \\ M_{i,2} \leftarrow \frac{z}{M_{i,2} - 1} \end{pmatrix}$ 
z1 := 1      odd ! M      Nq

```

$$\text{rot}(\alpha, M) := \left\{ \begin{array}{l} Nq \leftarrow \text{rows}(M) - 1 \\ M \leftarrow M^T \\ \text{for } i \in 0..Nq \\ \quad M^{(i)} \leftarrow OY(\alpha) \cdot M^{(i)} \\ M^T \end{array} \right. \quad \text{kf}(\text{sh}, Nb, S) := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } j \in \frac{Nb-1}{2} - \text{sh} .. \frac{Nb-1}{2} + \text{sh} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} i \leftarrow j - \left( \frac{Nb-1}{2} - \text{sh} \right) \\ y_{i,0} \leftarrow S_{j,0} \\ y_{i,1} \leftarrow S_{j,3} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad y$$

$$\text{cut}(M) := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..Nb - 1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{i,0} \leftarrow \delta A \cdot (i + 0.5) - \Delta A \div 2 \\ s_{i,1} \leftarrow 0 \\ s_{i,2} \leftarrow 0 \end{array} \right. \\ Nq \leftarrow \text{rows}(M) - 1 \\ \text{for } i \in 0..Nq \\ \quad \text{if } M_{i,2} \geq z1 \wedge M_{i,2} \leq z2 \\ \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} j \leftarrow \text{round} \left( \text{atan} \left( \frac{M_{i,0}}{M_{i,2}} \right) \div \delta A \right) + m \\ s_{j,1} \leftarrow s_{j,1} + 1 \\ k \leftarrow \text{round} \left( \text{atan} \left( \frac{M_{i,1}}{M_{i,2}} \right) \div \delta A \right) + m \\ s_{k,2} \leftarrow s_{k,2} + 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta \leftarrow \text{atan} \left[ \frac{\sqrt{|M_{i,0}|^2 + |M_{i,1}|^2}}{|M_{i,2}|^2} \right] \\ \text{if } \theta \leq \Delta A \div 2 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} j \leftarrow \text{round} \left( \text{atan} \left( \frac{M_{i,0}}{M_{i,2}} \right) \div \delta A \right) + m \\ s_{j,1} \leftarrow s_{j,1} + 1 \\ k \leftarrow \text{round} \left( \text{atan} \left( \frac{M_{i,1}}{M_{i,2}} \right) \div \delta A \right) + m \\ s_{k,2} \leftarrow s_{k,2} + 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j \leftarrow \text{round} \left( \text{atan} \left( \frac{M_{i,0}}{M_{i,2}} \right) \div \delta A \right) + m \\ s_{j,1} \leftarrow s_{j,1} + 1 \\ k \leftarrow \text{round} \left( \text{atan} \left( \frac{M_{i,1}}{M_{i,2}} \right) \div \delta A \right) + m \\ s_{k,2} \leftarrow s_{k,2} + 1 \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

Y := rew(M)  $\blacksquare$

WRITEPRN("cone4M30z.dat") := Y  $\blacksquare$

```

cutn(n,M) :=
|
|  A ← ∫0θjH f(x)·V(x) dx ÷ (m + 1)
|
|  θj←0 ← 0
|
|  for i ∈ 1..n
|  |
|  |  θ2 ←  $\frac{\theta_{jH} \cdot i}{n}$ 
|  |
|  |  θj←j+1 ← θ2 if ∫0θ2 f(x)·V(x) dx ≥ A·(j + 1)
|  |
|  θ0 ← submatrix(θ, 1, j, 0, 0)
|  s<0> ← stack(-submatrix(θ0, j - 1, 0, 0, 0), θ0)
|  for i ∈ 0..Nb - 1
|  |
|  |  si,1 ← 0
|  |  si,2 ← 0
|  Nq ← rows(M) - 1
|  for i ∈ 0..Nq
|  |
|  |  if Mi,2 ≥ z1 ∧ Mi,2 ≤ z2
|  |  |
|  |  |  θx ← atan( $\frac{|M_{i,0}|}{M_{i,2}}$ )
|  |  |
|  |  |  θy ← atan( $\frac{|M_{i,1}|}{M_{i,2}}$ )
|  |  |
|  |  |  for j ∈ 1..m + 1
|  |  |  |
|  |  |  |  if θx > θj-1 ∧ θx ≤ θj
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  j0 ← m + sign(Mi,0) · (j - 1)
|  |  |  |  |  sj0,1 ← sj0,1 + 1
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  if θy > θj-1 ∧ θy ≤ θj
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  j0 ← m + sign(Mi,1) · (j - 1)
|  |  |  |  |  |  sj0,2 ← sj0,2 + 1
|  |  |  |
|  |  |
|  |
|  s

```

U := cutn(100Q M) ■

S := cut(M) ■

S<sup><0></sup> := S<sup><0></sup> ÷ deg

```

S := READPRN("WatsonF4.dat")      S<2> := S<1>      S<3> := (S<1> + S<2>)/2
S := READPRN("dprof4M3 1-cut 30.dat")
SN := 3(      mx := SN^2 ÷ max(S<3>))
i := 0..rows(S) - 1      Ti := mxSi,3      Si,4 := rnorm(1, Ti, sqrt(Ti))
WRITEPRN("dprof.dat") := S
y := kf(sh, Nb, S)
y := stack(submatrix(y, 0, sh - 2, 0, 1), submatrix(y, sh + 2, 2*sh, 0, 1))
p := genfit(y<0>, y<1>, p, Fp)      u(x) := p0 + p1·x + p2·x^2 + p3·x^3 + p4·x^4
j := (Nb - 1)/2 - sh .. (Nb - 1)/2 + sh      Sj,3 := u(Sj,0)

```

Test of rotation symmetry:

$$Nbx := 5 \cdot (Nb - 1) + 1 \quad \delta A := \frac{\Delta A}{Nbx - 1}$$

```

cutr(M) := for i ∈ 0..Nbx - 1
|
| si,0 ← i·δA - ΔA ÷ 2
| si,1 ← 0
Nq ← rows(M) - 1
for i ∈ 0..Nq
  if Mi,2 ≥ z1 ∧ Mi,2 ≤ z2
    |
    | j ← floor(0.5 + atan( $\frac{M_{i,0}}{M_{i,2}}$ ) ÷ δA) +  $\frac{Nbx - 1}{2}$ 
    | sj,1 ← sj,1 + 1
for i ∈ 0..Nb - 1
|
| ui,0 ← 0
| ui,1 ← 0
cts0 ← round( $\frac{Nq + 1}{Nb}$ )
cts ← 0
j ← 0
i ← 0
u0,0 ← -(δA + ΔA) ÷ 2
while j <  $\frac{Nb - 1}{2}$ 
|
| cts ← cts + si,1
| uj,1 ← uj,1 + si,1
| uNb-1-j,1 ← uNb-1-j,1 + sNbx-1-i,1
| if cts ≥ cts0·(j + 1)
|   |
|   | uj+1,0 ← (i + 0.5)·δA - ΔA ÷ 2
|   | uNb-1-j,0 ← ΔA ÷ 2 - (i + 0.5)·δA
|   | j ← j + 1
|   i ← i + 1
for k ∈ i..Nbx - i - 1
  u $\frac{Nb-1}{2},1$  ← u $\frac{Nb-1}{2},1$  + sk,1
(
  u
  s
  cts0
)
Y<0> := Y<0> ÷ deg
C<0> := C<0> ÷ deg

```

```

(
  Y
  C
  cts0
) := cutr(M)

```

```
WRITEPRN("dprof_e.dat") := Y
```

$\text{Sh}(g) :=$

<p>for <math>i \in 0..q</math></p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>F_i \leftarrow v_{y_{m-i}} + v_{y_{m+i}}</math></td> <td><math>\theta_i \leftarrow \text{deg} \cdot \Delta\phi \cdot (i + 0.5)</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>\theta_i \leftarrow \delta A \cdot (i + 0.5)</math></td> <td><math>\theta_i \leftarrow v_{x_{m+i}} \cdot \text{deg} + \delta A \div 2</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>k2_i \leftarrow \tan^2 \theta_i - \tan^2 \theta_{i-1}</math> if <math>i &gt; 0</math></td> <td><math>\theta_i \leftarrow v_{x_{m+i+1}}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>k2_i \leftarrow \tan^2 \theta_i</math> otherwise</td> <td></td> </tr> </table> <p>for <math>i \in 1..q</math></p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">for <math>j \in 0..i - 1</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>k_{j,i} \leftarrow \tan \theta_j \div \tan \theta_i</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>a \leftarrow \arccos \left( \frac{k_{j,i} - k_{j,i} \sqrt{1 - k_{j,i}^2}}{k_{j,i}} \right)</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>s_{j,i} \leftarrow 2 \cdot \tan^2 \theta_i \cdot a</math></td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>S_i \leftarrow \pi \cdot \left( \tan^2 \theta_i - \tan^2 \theta_{i-1} \right)</math></td> <td></td> </tr> </table> <p><math>f_q \leftarrow g_q \cdot F_q \cdot S_q \div s_{q-1,q}</math></p> <p><math>L_q \leftarrow f_q</math></p> <p><math>Fs_q \leftarrow F_q</math></p> <p>for <math>j \in 1..q - 1</math></p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>i \leftarrow q - j</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>fs_i \leftarrow 0</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>Fs_i \leftarrow Fs_{i+1} + F_i</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">for <math>n \in i..q - 1</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>fs_i \leftarrow fs_i + \frac{s_{i-1,n+1} - s_{i-1,n}}{S_{n+1}} \cdot f_{n+1}</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>f_i \leftarrow g_i \cdot \left( Fs_i - fs_i \right) \cdot S_i \div s_{i-1,i}</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>L_i \leftarrow L_{i+1} + f_i</math></td> <td></td> </tr> </table> <p><math>Fs_0 \leftarrow Fs_1 + F_0 \div 2</math></p> <p><math>f_0 \leftarrow Fs_0 - L_1</math></p> <p>for <math>i \in 0..q</math></p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>\varepsilon_i \leftarrow \frac{f_i}{k2_i}</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>D_i \leftarrow \frac{f_i}{k2_i^2}</math></td> <td></td> </tr> </table> <p><math>O \leftarrow \text{augment}(\theta - \delta A \div 2, Fs, L, f, \varepsilon, D)</math></p>	$F_i \leftarrow v_{y_{m-i}} + v_{y_{m+i}}$	$\theta_i \leftarrow \text{deg} \cdot \Delta\phi \cdot (i + 0.5)$	$\theta_i \leftarrow \delta A \cdot (i + 0.5)$	$\theta_i \leftarrow v_{x_{m+i}} \cdot \text{deg} + \delta A \div 2$	$k2_i \leftarrow \tan^2 \theta_i - \tan^2 \theta_{i-1}$ if $i > 0$	$\theta_i \leftarrow v_{x_{m+i+1}}$	$k2_i \leftarrow \tan^2 \theta_i$ otherwise		for $j \in 0..i - 1$		<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>k_{j,i} \leftarrow \tan \theta_j \div \tan \theta_i</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>a \leftarrow \arccos \left( \frac{k_{j,i} - k_{j,i} \sqrt{1 - k_{j,i}^2}}{k_{j,i}} \right)</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>s_{j,i} \leftarrow 2 \cdot \tan^2 \theta_i \cdot a</math></td> <td></td> </tr> </table>	$k_{j,i} \leftarrow \tan \theta_j \div \tan \theta_i$		$a \leftarrow \arccos \left( \frac{k_{j,i} - k_{j,i} \sqrt{1 - k_{j,i}^2}}{k_{j,i}} \right)$		$s_{j,i} \leftarrow 2 \cdot \tan^2 \theta_i \cdot a$			$S_i \leftarrow \pi \cdot \left( \tan^2 \theta_i - \tan^2 \theta_{i-1} \right)$		$i \leftarrow q - j$		$fs_i \leftarrow 0$		$Fs_i \leftarrow Fs_{i+1} + F_i$		for $n \in i..q - 1$		$fs_i \leftarrow fs_i + \frac{s_{i-1,n+1} - s_{i-1,n}}{S_{n+1}} \cdot f_{n+1}$		$f_i \leftarrow g_i \cdot \left( Fs_i - fs_i \right) \cdot S_i \div s_{i-1,i}$		$L_i \leftarrow L_{i+1} + f_i$		$\varepsilon_i \leftarrow \frac{f_i}{k2_i}$		$D_i \leftarrow \frac{f_i}{k2_i^2}$		<p><math>\theta_i \leftarrow \text{deg} \cdot \Delta\phi \cdot (i + 0.5)</math></p> <p><math>\theta_i \leftarrow v_{x_{m+i}} \cdot \text{deg} + \delta A \div 2</math></p> <p><math>\theta_i \leftarrow v_{x_{m+i+1}}</math></p> <p><math>\theta_i \leftarrow \frac{v_{x_{m+i}} + v_{x_{m+i+1}}}{2}</math></p> <p><math>O \leftarrow \text{augment}(\theta - \delta A \div 2, Fs, L, f, \varepsilon, D)</math></p> <p><math>O \leftarrow \text{augment}(\theta, Fs, L, f, \varepsilon, D)</math></p>
$F_i \leftarrow v_{y_{m-i}} + v_{y_{m+i}}$	$\theta_i \leftarrow \text{deg} \cdot \Delta\phi \cdot (i + 0.5)$																																						
$\theta_i \leftarrow \delta A \cdot (i + 0.5)$	$\theta_i \leftarrow v_{x_{m+i}} \cdot \text{deg} + \delta A \div 2$																																						
$k2_i \leftarrow \tan^2 \theta_i - \tan^2 \theta_{i-1}$ if $i > 0$	$\theta_i \leftarrow v_{x_{m+i+1}}$																																						
$k2_i \leftarrow \tan^2 \theta_i$ otherwise																																							
for $j \in 0..i - 1$																																							
<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>k_{j,i} \leftarrow \tan \theta_j \div \tan \theta_i</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>a \leftarrow \arccos \left( \frac{k_{j,i} - k_{j,i} \sqrt{1 - k_{j,i}^2}}{k_{j,i}} \right)</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>s_{j,i} \leftarrow 2 \cdot \tan^2 \theta_i \cdot a</math></td> <td></td> </tr> </table>	$k_{j,i} \leftarrow \tan \theta_j \div \tan \theta_i$		$a \leftarrow \arccos \left( \frac{k_{j,i} - k_{j,i} \sqrt{1 - k_{j,i}^2}}{k_{j,i}} \right)$		$s_{j,i} \leftarrow 2 \cdot \tan^2 \theta_i \cdot a$																																		
$k_{j,i} \leftarrow \tan \theta_j \div \tan \theta_i$																																							
$a \leftarrow \arccos \left( \frac{k_{j,i} - k_{j,i} \sqrt{1 - k_{j,i}^2}}{k_{j,i}} \right)$																																							
$s_{j,i} \leftarrow 2 \cdot \tan^2 \theta_i \cdot a$																																							
$S_i \leftarrow \pi \cdot \left( \tan^2 \theta_i - \tan^2 \theta_{i-1} \right)$																																							
$i \leftarrow q - j$																																							
$fs_i \leftarrow 0$																																							
$Fs_i \leftarrow Fs_{i+1} + F_i$																																							
for $n \in i..q - 1$																																							
$fs_i \leftarrow fs_i + \frac{s_{i-1,n+1} - s_{i-1,n}}{S_{n+1}} \cdot f_{n+1}$																																							
$f_i \leftarrow g_i \cdot \left( Fs_i - fs_i \right) \cdot S_i \div s_{i-1,i}$																																							
$L_i \leftarrow L_{i+1} + f_i$																																							
$\varepsilon_i \leftarrow \frac{f_i}{k2_i}$																																							
$D_i \leftarrow \frac{f_i}{k2_i^2}$																																							

$I := \text{Sh}(g) \quad i_1 := 1 \quad i_r := q - 1 \quad I_c := \text{submatrix}(I, i_1, i_r, 0, 4)$

```

st := | a ← 0
      | s ← 0
      | for i ∈ i_1..i_r
      | | a ← a +  $\left( \frac{I_{i,4} - p \cdot f(I_{i,0})}{p \cdot f(I_{i,0})} \right)^2$ 
      | | s ← s +  $\frac{(I_{i,4} - p \cdot f(I_{i,0}))^2}{I_{i,5}}$ 
      | O_0 ←  $\sqrt{a \div (i_r - i_1 + 1)}$ 
      | O_1 ←  $s \div (i_r - i_1)$ 
      | O

```

$St := st \quad i_r - i_1 = \quad xi2n := St_1 \quad \sigma := St_0$

$i := 0..q \quad g_1 := 1 \quad \text{WRITEPRN}(\text{"norm0.dat"}) := g$   
 $g := \text{READPRN}(\text{"norm.dat"})$

$$Fp(\theta, p) := \begin{bmatrix} p \cdot \exp\left[-\left(\frac{\theta - \theta_m}{0.5\theta_j}\right)^2\right] \cdot H(\theta) \\ \exp\left[-\left(\frac{\theta - \theta_m}{0.5\theta_j}\right)^2\right] \cdot H(\theta) \end{bmatrix}$$

$p := 1$

$$f(\theta) := \exp\left[-\left(\frac{\theta - \theta_m}{0.5\theta_j}\right)^2\right] \cdot H(\theta)$$

$p := \text{genfit}(I_c^{\langle 0 \rangle}, I_c^{\langle 4 \rangle}, p, Fp)$

```

res := | for i ∈ 0..q
      | r_i ←  $\frac{I_{i,4} - p \cdot f(I_{i,0})}{p \cdot f(I_{i,0})} \quad Iu := \overrightarrow{I^{\langle 4 \rangle} + \sqrt{I^{\langle 5 \rangle}}}$ 
      | r      Id :=  $\overrightarrow{I^{\langle 4 \rangle} - \sqrt{I^{\langle 5 \rangle}}}$ 

```

$r := res$