МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование кафедры)

01.03.02 Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки, специальности)

Системное программирование и компьютерные технологии
(направленность (профиль)/специализация

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему Применение метода динамического программирования для решения задачи замены оборудования

Студент	А.С. Поплавский	
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Руководитель	Н.А. Сосина	
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Консультанты	М.А. Четаева	
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой к.т.н., доцент, А.В. Очеповский ________________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«_____»______________________20_____г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Выпускная квалификационная работа посвящена вопросу принятия управленческих решений на основе метода динамического программирования.

Цель исследования - обоснование метода динамического программирования (метода ДП) для решения задачи замены оборудования (ЗО); решение задач замены оборудования на основе метода динамического программирования.

Для достижения поставленных целей требовалось решить следующие **задачи**:

- изучить общие принципы ДП;
- решить задачу ЗО на основе метода ДП;
- проанализировать существующие программные обеспечения для решения задач ЗО на основе метода ДП;
- написать собственное программное обеспечение для решения задач ЗО на основе метода ДП.

Данная дипломная работа состоит из пояснительной записки на 40 страниц, введения на 2 страницы, списка 20 источников, включая 5 источников на иностранном языке. Ключевым вопросом в дипломной работе является метод динамического программирования. Особое внимание уделяется принципу оптимальности Беллмана.

В выпускной квалификационной работе подробно описывается метод динамического программирования, решаются задачи ЗО методом ДП, подробно описывается интернет сервис math-semestr, с помощью которого решаются задачи ЗО повышенной сложности, а также представлена собственная реализация программного обеспечения для решения задач ЗО.

Анализ динамического программирования, выполненный в работе, показал, что данный метод имеет широкую сферу приложений в экономике, технике, естествознании, военном деле, а также важен для аналитической деятельности при ведении бизнеса.

ABSTRACT

The bachelor’s thesis is devoted to the issue of making managerial decisions on the basis of dynamic programming.

The purpose of the study was to substantiate the method of dynamic programming for solving the problem of replacing equipment; solving the problems of replacing equipment on the basis of the method of dynamic programming.

To achieve these goals, it was necessary to solve the following **tasks**:

- to study the general principles of dynamic programming;

- to solve the problem of replacing equipment on the basis of the dynamic programming method;

- to analyze the existing software to solve the problems of replacing equipment on the basis of the dynamic programming method;

- to write our own software to solve the problems of replacing equipment on the basis of the dynamic programming method.

This thesis consists of an explanatory note on 40 pages, an introduction on 2 pages, a list of 20 references, including 5 references in a foreign language. The key question in the thesis is the method of dynamic programming. Particular attention was paid to the Bellman's Principle of Optimality.

In the bachelor’s thesis, the method of dynamic programming was described in detail, the problems of replacing equipment were solved by the method of dynamic programming, the Internet service math-semestr, which helped to solve problems of replacing equipment of increased complexity, was described in detail, and our own implementation of software solutions for equipment replacement needs was also provided.

The analysis of dynamic programming performed in the work showed that this method has a wide range of applications in economics, engineering, natural sciences, military science, and is also important for analytical activities in conducting business.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Динамическое программирование (ДП) - математический инструмент для решения трудоемких задач, основой которого является разбиение исходной задачи на некоторое количество более простых подзадач. Метод динамического программирования (метод ДП) может быть применен к задачам с оптимальной подструктурой, которая представляет собой набор перекрывающихся подзадач, каждая из которых по сложности меньше исходной. Применение метода динамического программирования позволяет существенно сократить время вычислений.

При решении поставленной задачи методом динамического программирования решаются отдельные части задачи (подзадачи), после чего, полученные решения, собираются в единое общее решение. Зачастую большинство из этих подзадач одинаковы. Подход ДП обеспечивает то, что каждая из подзадач решается только один раз, тем самым уменьшая количество вычислений.

Объект исследования – решение задачи замены оборудования (задачи ЗО) методом ДП.

Предмет исследования – задача ЗО.

Цель исследования - обоснование метода ДП для решения задачи ЗО; решение задач ЗО на основе метода ДП.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие **задачи**:

- изучить общие принципы ДП;
- решить задачу ЗО на основе метода ДП;
- проанализировать существующие программные обеспечения для решения задач ЗО на основе метода ДП;
- написать собственное программное обеспечение для решения задач ЗО на основе метода ДП.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка используемых источников.

В главе 1 описаны теоретические аспекты метода ДП. В главе 2 приводятся решения задач ЗО с применением метода ДП. В главе 3 приводится пример успешной реализации алгоритма решения задачи ЗО на примере онлайн-сервиса, а также реализация собственного программного обеспечения. В заключении представлены результаты и выводы о выполненной работе.

Теоретической основой исследования явились научные труды следующих авторов: Т. В. Завьялова, И. Н. Пирогова, Е. Г. Филиппова, В. А. Охорзина и др. Бакалаврская работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка используемой литературы и приложений.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1 Общая постановка задачи динамического программирования

ДП – математический метод, предназначенный для поиска оптимальных решений по управлению многоступенчатыми процессами, которые видоизменяются во времени. Данные процессы широко распространены в реальном мире, а важность и актуальность применения математических методов для решения подобных управленческих задач обусловливается необходимостью выбора наиболее эффективного управления. Метод ДП основан на принципе оптимальности, который широко распространен в сфере приложений экономики, техники, естествознании, военного дела.

ДП является особым программированием, направленным на исследование экстремальных задач.

Экстремальные задачи – методы вычислительной математики, которые применяются для поиска экстремумов функций [5].

Исследование операций - математическая наука, в основе которой лежит изучение экстремальных задач управления, планирование и разработка методов их решения. ДП является одним из разделов данной науки, в котором процесс принятия решения разбивается на отдельные этапы [3].

Основоположником динамического программирования можно считать нашего соотечественника, русского математика А. А. Маркова (начало XX века). Его исследовательские работы были продолжены в 1940-х годах американским математиком А. Вальдом, одним из основателей так называемого исследовательского анализа. Однако наиболее полно и систематизировано сформулировать основные принципы оптимального управления многошаговыми процессами впервые удалось американскому математику Р. Беллману (Беллман Ричард Эрнест (1920 – 1984); американский математик, основные труды которого посвящены вычислительной математике и теории оптимального управления). Беллманом был описан процесс поиска решения задачи, при котором решение одной задачи находится после решения предшествующей ей задачи. В 1953 г. данное определение было уточнено до современного. Лепта Беллмана в динамическом программировании была увековечена в заглавии уравнения Беллмана, главного результата доктрины динамического программирования, формулирующий оптимизационную задачу в рекурсивной форме.

В результате, решение задач, в которой присутствует оптимальная подструктура, сводится к следующему алгоритму:

- разбить исходную задачу на несколько подзадач;
- произвести поиск оптимального решения для подзадач рекурсивно, используя данный алгоритм;
- использовать найденные решения подзадач для нахождения решения исходной задачи [6].

Разбиение задачи на подзадачи производят до тех пор, пока последняя подзадача не сведется к тривиальному случаю задачи, которая решается за кратчайшее время.

Перекрывающиеся подзадачи в ДП подразумевают подзадачи, использующиеся для решения некоторого количества задач большего размера. Одним из примеров является вычисление чисел Фибоначчи, $F_3 = F_2 + F_1$ и $F_4 = F_3 + F_2$ — даже в таком элементарном случае вычисления двух чисел Фибоначчи нам уже пришлось посчитать F_2 дважды. Следовательно, простой рекурсивный подход расходует время на уже решенные задачи.

Для того, чтобы избежать вышеописанный ход событий, требуется сохранять решения уже вычисленных подзадач, и когда нам вновь понадобится решение подзадачи, мы вместо того, чтобы заново производить вычисления, просто достанем его из памяти. Этот подход именуется мемоизацией.

Из вышесказанного следует, что ДП использует следующие свойства задачи:

- оптимальная подструктура;
- перекрывающиеся подзадачи;

- возможность запоминания решения часто встречающихся подзадач.

ДП обычно следует двум подходам к решению задач:

- нисходящее ДП: задача делится на малые подзадачи, которые решаются и затем объединяются для решения исходной задачи, при этом используется запоминание для вычислений часто используемых подзадач;
- восходящее ДП: все подзадачи, необходимые для решения исходной задачи вычисляются заранее для использования в построении решения исходной задачи. Если учитывать размер необходимого стека и количество вызовов функций, то данный способ лучше нисходящего, но иногда неизвестно, решение каких подзадач нам потребуется в дальнейшем.

Аддитивность - одно из главных свойств задач, которые решаются с помощью ДП. Неаддитивные задачи решаются иными методами. К примеру, большинство задач по оптимизации инвестиций компании относятся к неаддитивным и их решения основаны на сравнении стоимости компании при проведении инвестиций и без них.

Процессы принятия решений, которые строятся по принципу оптимальности, называются многошаговыми процессами.

Многошаговый процесс – процесс, при котором одно состояние системы последовательно переходит в другое состояние. [4]

Динамическое программирование может применяться ко многим задачам, не связанным с износом или старением. Многошаговым вполне может быть и процесс решения статической задачи. К примеру, таковой задачей является задача распределения ресурсов [9].

Математически оптимизационная задача базируется на последовательности связанных между собой соотношений: к примеру, результат вычислений для одного года является входным параметром для следующего (предыдущего). Следовательно, с помощью компьютера можно получить результаты решения задачи для любого момента времени.

Управляемые системы – системы, на состояние которых может непосредственно влиять некоторый управляющий субъект. [5]

Возможность управления системой порождает проблему выбора и ведет к поиску наилучшего, наиболее оптимального управления. Подобного типа задачи именуются задачами многоэтапной оптимизации или просто задачами ДП.

Рассмотрим одну из задач ДП на примере некоторой экономической системы. Она может быть представлена в виде предприятия, фабрики, отрасли промышленности и т.п. Состояние системы, определенное в определенный момент времени набором параметров, обозначим через S. Такие параметры обусловлены некоторым экономическим смыслом, который представлен в виде производственной мощности, себестоимости продукции и т.п.

Обозначим через x параметр, который характеризует состояние системы, Такой параметр именуется переменной состояния и принимает значения из множества X допустимых значений, т.е. $x \in X$.

Как правило, состояние управляемой системы S может видоизменяться за счет некоторых факторов. Главным фактором из них является влияние управляющего субъекта, которое приводит к выбору им соответствующих управлений. Такими управлениями могут быть: состав работающего оборудования, режим его эксплуатации, объём товаров и т.п. Обозначим управляющую переменную через u, которая, в свою очередь, принимает значения из множества U допустимых значений, $u \in U$. [6]

За счет воздействия управления u система S трансформируется из начального состояния x_0 в последующее состояние x_1. Следствием такой трансформации является достижение экономического эффекта, представленного критерием оптимальности f:

$$f = f(x_0, u) \qquad (1.1.1)$$

Функция (1.1.1) является представлением количественного показателя эффективности управления системой S на текущем шаге. К примеру, если требуется достичь определенного дохода или прибыли, то наибольшим интересом является её максимальное значение: $f \rightarrow \max$; если же требуется снизить затраты, то наибольшим интересом является её минимальное значение: $f \to \min$.

Главным объектом при решении задач ДП являются многоступенчатые процессы, ограниченные некоторым числом шагов N. Выразим через i номер шага, при этом $i \in 1...N$. В зависимости от шага процесса управление u принимает различные значения $u_1, u_2, \dots, u_N$.

На первом шаге система S на основе управления u_1 преобразуется из начального состояния x_0 в состояние x_1, при этом достигается экономический эффект f_1. На следующем шаге система S на основе управления u_2 преобразуется из состояния x_1 в состояние x_2, при этом достигается экономический эффект f_2. Данный процесс повторяется до последнего шага, где система S на основе управления u_N преобразуется из состояния x_{N-1} в конечное состояние x_N, при котором достигается экономический эффект, равный f_N. Данный многошаговый процесс представлен на рис. 1.1.1.

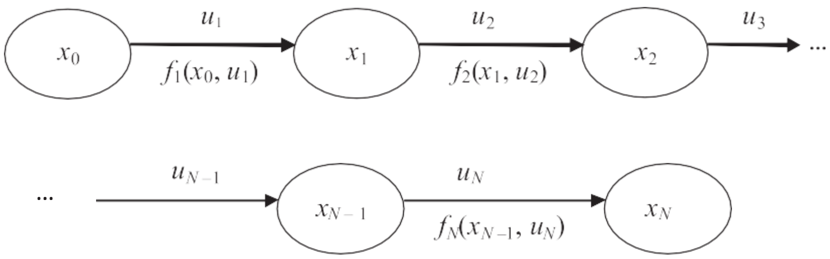


Рис. 1.1.1 - Переход системы S из состояния x_0 в состояние x_N

Пусть состояние x_i, зависит от предшествующего состояния x_{i-1} и выбранного управления u_i и при этом не зависит от того, как система S оказалась в состоянии x_{i-1}. При достижении определенного дохода, путем выполнения i-ой итерации, который зависит от исходного состояния системы x_{i-1} и выбранного управления u_i, равный $f_i(x_{i-1}; u_i)$, суммарный доход за N шагов составляет

$$F = \sum_{i=1}^{N} f_i(x_{i-1}; u_i) \qquad (1.1.2)$$

Следовательно, рассматриваемая задача ДП должна удовлетворять следующим условиям:

- условие отсутствия последействия;
- условие аддитивности целевой функции задачи.

Результатом решения задачи является оптимальная стратегия управления, т.е. такая совокупность управлений $U^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$, реализация которой приводит систему S за N шагов к преобразованию из начального состояния x_0 в конечное x_N и при этом функция дохода (1.1.2) достигает наибольшего значения [11].

1.2 Принцип оптимальности Беллмана

При всяком состоянии системы перед очередным шагом, необходимо выбрать на данном шаге такое управление, при котором доход на этом шаге в сумме с оптимальным доходом на всех последующих шагах был максимальный. Если считать, что все шаги независимы, то оптимальным управлением будет управление, которое обеспечивает максимальный выигрыш именно на этом шаге. Следует учесть, что замена устаревшей техники подразумевает затраты определенных средств, что приводит к снижению дохода от ее эксплуатации вначале, но при этом в последующие годы новая техника будет приносить больший доход. Также напротив, если сохранить старую технику для получения дохода в текущем году, то в будущем это приведет к большим убыткам. Таким образом, в многошаговых процессах, при выборе управления на каждом шаге, необходимо учитывать его будущее воздействие на весь процесс [1].

Согласно принципу оптимальности, оптимальная стратегия управления может быть получена при условии нахождения оптимальной стратегии управления на последнем шаге, затем на двух последних шагах и т.д., вплоть до первого шага. Поэтому, поиск решения задачи ДП следует начать с определения оптимального решения на конечном шаге. Поиск данного решения требует произвести различные предположения, как мог окончиться предпоследний шаг, и на основе данных предположений выбрать управление

u_n^0, реализация которого приводит к максимальному значению функции дохода $f_n(x_{n-1}; u_n)$. Подобное управление, которое выбрано на основе определенных предположений, как завершился предшествующий шаг, именуется условно-оптимальным управлением. Таким образом, согласно принципу оптимальности, необходимо найти на всех шагах условно-оптимальное управление для всех возможных исходов предшествующего шага. Для математической формулировки принципа оптимальности введем некоторые дополнительные обозначения. Через $F_1(x_{N-1})$, $F_2(x_{N-2})$, ..., $F_i(x_{N-i})$,..., $F_N(x_0)$ обозначим условно-оптимальные значения функции цели на всех этапах.

Процесс решения задачи начинаем с конечного шага. Предположим x_{N-1} – возможные состояния системы на начало N-го этапа. Находим:

$$F_1(x_{n-1}) = \max_{u_n}(\min) f_n(x_{n-1}, u_n) \tag{1.2.1}$$

$$F_2(x_{n-2}) = \max_{u_{n-1}}(\min)(f_{n-1}(x_{n-2}, u_{n-1}) + F_1(x_{n-1})) \tag{1.2.2}$$

Аналогично:

$$F_3(x_{n-3}) = \max_{u_{n-2}}(\min)(f_{n-2}(x_{n-3}, u_{n-2}) + F_2(x_{n-2})) \tag{1.2.3}$$

$$F_i(x_{n-i}) = \max_{u_{n-i+1}}(\min)(f_{n-i+1}(x_{n-i}, u_{n-i+1}) + F_{i-1}(x_{n-i+1})) \tag{1.2.4}$$

$$F_n(x_0) = \max_{u_1}(\min)(f_1(x_0, u_1) + F_{n-1}(x_1)) \tag{1.2.5}$$

В выражении (1.2.5) представлено математическое выражение принципа оптимальности. Общая форма записи условно-оптимального значения функции цели для оставшихся этапов описана в выражении (1.2.4). Выражения (1.2.1–1.2.5) именуются функциональными уравнениями Беллмана. Проанализировав данные выражения, можно заметить их рекуррентный характер. Следовательно, поиск оптимального управления на последнем шаге обязывает знать условно-оптимальное управление на предшествующих этапах и т.д. Следуя из вышесказанного функциональные уравнения были названы рекуррентными соотношениями Беллмана [8].

Результатом последовательного прохождения всех этапов мы обусловливаем максимальное (минимальное) значение выигрыша (затрат) за N шагов и для каждого из них находим условно-оптимальное управление. Данная процедура называется условной оптимизацией.

На основе найденной функции Беллмана и оптимальных управлений для всех шагов, выполняется второй этап решения задачи, именуемой безусловной оптимизацией. Нахождение оптимальной стратегии управления подразумевает определение искомого решения задачи, путем прохождения всей последовательности шагов от начала к концу.

На первой итерации в качестве оптимального управления u_1^* принимаем найденное условно-оптимальное управление u_1^0. На следующей итерации найдем состояние системы x_1^*, которое преобразуется на основе управления u_1^*. Данное состояние обусловливает найденное условно-оптимальное управление u_2^0, впоследствии которое будет считаться оптимальным. На основе u_2^*, находим x_2^*, тем самым определяем u_3^* и т.д. В результате будет найдено решение задачи, т.е. максимально (минимально) возможный доход (затраты) и оптимальную стратегию управления, которая включает оптимальные управления на отдельных шагах [9].

Процесс очень трудоемкий. Однако использование компьютера позволяет получать решение и более сложных задач.

1.3 Уравнение Беллмана для непрерывных систем

Рассмотрим непрерывный случай, где управляемый объект описан векторным дифференциальным уравнением в общем виде

$$x\ t\ = f(x\ t\ , u\ t\ , t) \qquad (1.3.1)$$

В качестве критерия оптимальности рассмотрим функционал

$$I = \int_{t_0}^{T} L(x\ t\ , u\ t\ , t)dt \qquad (1.3.2)$$

Требуется построить управление $u_0(t)$, при котором функционал I достигнет наименьшего значения в классе допустимых управлений $\Omega(u)$, т.е.

$$I = \min, \quad u(t) \in \Omega(u), \quad t \in [t_0, T], \tag{1.3.3}$$

Следует учесть, что за время T- t_0 необходимо преобразовать из начального состояния $x(t_0)$ в произвольное конечное, которое принадлежит пространству состояний $\Omega(u)$.

Дальнейшие рассуждения будут основаны на принципе оптимальности, исходя из которого следует, что каждый из оставшихся участков оптимальной траектории представлен аналогичной оптимальной траекторией.

На основе построенного оптимального управления $u_0(t)$ и найденной траектории движения объекта x(t), соответствующей данному управлению, на оптимальной траектории требуется выбрать две точки, которые соответствуют моментам времени t и $t+\Delta t$, где Δt – приращение. Такие участки оптимальной траектории от точек t и $t+\Delta t$ до конечной точки T, в соответствии с принципом оптимальности, являются оптимальными [12]. Минимальное значение функционала (1.3.2), соответствующее этим участкам обозначим:

$$V(x(t),t) = \min_{u\in\Omega(u)} \int_t^T L(x(t),u(t),t)dt \tag{1.3.4}$$

$$V(x(t+\Delta t),t+\Delta t) = \min_{u\in\Omega(u)} \int_{t+\Delta t}^T L(x(t),u(t),t)dt \tag{1.3.5}$$

На основании равенств(1.3.4, 1.3.5) можно записать

$$V(x(t),t) = \min_{u\in\Omega(u)} \{ \int_t^{t+\Delta t} L(x(t),u(t),t)dt + V(x(t+\Delta t),t+\Delta t) \} \tag{1.3.6}$$

С учетом малости Δt, (1.3.6) можно переписать

$$\int_t^{t+\Delta t} L(x(t),u(t),t)dt = L(x(t),u(t),t)\Delta t + \delta_1(t), \tag{1.3.7}$$

$\delta_1(t)$ – бесконечно малая высшего порядка по отношению к Δt.

Запишем разложение функции $x(t+\Delta t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t + \delta_2(t), \qquad (1.3.8)$$

$\delta_2(t)$ – остаточный член ряда.

Предположим, что функция V дифференцируема по всем своим аргументами и учитывая (1.3.8), для функции V(x(t+Δt), t+Δt) запишем в ряд Тейлора в окрестности точки (x(t), t):

$$V(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = V(x(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \delta_3(t), \qquad (1.3.9)$$

где $\frac{\partial V}{\partial x} = [\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}]$- вектор-строка частных производных в точке (x(t),t);

$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \delta_2$- приращение вектора x(t);

$\delta_3(t)$ – остаточный член ряда Тейлора.

Подставим (1.3.7, 1.2.9) в (1.3.6):

$$V(x(t), t) = \min_{u\in\Omega(u)}\{L(x(t), u(t), t)\Delta t + V(x(t), t) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t}\Delta t + \delta_4(t)\} \qquad (1.3.10)$$

где $\delta_4(t)$ - все члены высшего порядка малости, чем Δt .

Так как функция V(x(t),t) не зависит от управления, вынесем ее из-под символа минимума. Следующим шагом взаимно уничтожим V(x(t),t) с левой частью выражения. Оставшиеся члены сократим на Δt. Производную $\frac{dV}{\partial t}$, которая не зависит от u(t), вынесем за скобки, а производную $\frac{dx}{dt}$ заменим функцией f, согласно (1.3.1). Если учитывать то, что $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta_4(t)}{\Delta t} = 0$, получим уравнение Беллмана [13]

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} = \min_{u\in\Omega(u)}\{L(\mathbf{x}(t), u(t), t) + \frac{\partial V(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}(t), u(t), t)\} \qquad (1.3.11)$$

ГЛАВА 2 ЗАДАЧА ЗАМЕНЫ ОБОРУДОВАНИЯ

2.1 Построение математической модели для задачи замены оборудования

Во всем мире можно насчитать немало предприятий, которые в производстве своей продукции используют машинное оборудование. Вопрос о своевременной замене оборудования всегда являлся важной экономической проблемой. Ежегодно оборудование устаревает, что подразумевает под собой физический и моральный износ. Вследствие этого расходы на ремонт и обслуживание возрастают, а производительность труда и остаточная стоимость снижается. Время от времени данный вопрос приводит к необходимости замены оборудования, так как его дальнейшая эксплуатация не рентабельна. Учитывая данный факт, формулировка задачи о замене оборудования может выглядеть следующим образом. Во время эксплуатации оборудование приносит ежегодно прибыль, требует эксплуатационных затрат и имеет остаточную стоимость. Данные характеристики зависят от возраста оборудования. Ежегодно перед управляющим субъектом предстает выбор: сохранить оборудование или продать его по остаточной стоимости и приобрести новое. В случае сохранения оборудования возрастают эксплуатационные затраты и снижается производительность. При замене требуются дополнительные капитальные вложения на приобретение и установку нового оборудования.

Поэтому при внедрении оборудования нужно составлять наиболее оптимальный план эксплуатации и замены оборудования. Такие задачи по замене оборудования представляют собой многошаговый процесс, характерный для динамического программирования. Многие предприятия используют свою интуицию для принятия решения, сохранить или заменить свое оборудование, не применяя метод динамического программирования. Но стоит отметить, что метод динамического программирования позволяет наиболее четко максимизировать прибыль или минимизировать затраты. Поэтому применять этот метод целесообразно.

В общем виде проблема трактуется так: построить оптимальную стратегию использования оборудования на **m** лет так, чтобы прибыль за каждые **i** лет от продажи продукции была максимальной.

Обозначим следующие переменные:

r(t) – стоимость продукции, производимой за год на единице оборудования возраста t лет;

c(t) – расходы, связанные с эксплуатацией и ремонтом оборудования возраста t лет;

u(t) – остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P – цена нового оборудования;

N – продолжительность планового периода;

t = 0, 1, 2, …, N – номер текущего периода.

Построение математической модели решения задачи сводится к последовательному выполнению шагов, описанных ниже.

1. Определить количество шагов. Как правило, количество равно числу лет, при котором эксплуатируется оборудование.

2. Определить состояние системы, которое обуславливается возрастом оборудования.

3. Определить управление на каждом из шагов: заменять или оставить оборудование. Каждому варианту управления приписывается число.

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{если оборудование не заменяется} \\ 1, & \text{если оборудование заменяется} \end{cases}$$

4. Определить функцию выигрыша на **i**-м шаге, т.е. выгоду от эксплуатации оборудования к завершению **i**-го года эксплуатации.

$$f_j = \begin{cases} r(t) - c(t), & \text{если оборудование не заменяется} \\ c(t) - p + r(0) - u(0), & \text{если оборудование заменяется} \end{cases}$$

Следовательно, при сохранении оборудования прибылью от его эксплуатации является разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными затратами. В случае замены оборудования прибыль представляет собой разность между остаточной стоимостью оборудования и стоимостью нового оборудования, в совокупности с разностью между стоимостью продукции и эксплуатационными затратами для нового оборудования, возраст которого в начале **i**-го шага составляет 0 лет.

5. Определить функцию изменения состояния.

$$\mathrm{f_j}\ \mathrm{t}\ = \begin{matrix} \mathrm{t}+1, & \text{если}\ \mathrm{x_j}=0 \\ 1, & \text{если}\ \mathrm{x_j}=1 \end{matrix}$$

6. Составить функциональное уравнение, при котором $\mathbf{i}=\mathrm{N}$.

$$\mathrm{W_N}\ \mathrm{t}\ = \max_{\mathrm{x_m}\in\{0,1\}} \begin{matrix} \mathrm{r}\ \mathrm{t}\ -\mathrm{c(t)} \\ \mathrm{c}\ \mathrm{t}\ -\mathrm{p}+\mathrm{r}\ 0\ -\mathrm{u(t)} \end{matrix}$$

7. Составить основное функциональное уравнение

$$\mathrm{W_N}\ \mathrm{t}\ = \max_{\mathrm{x_m}\in\{0,1\}} \begin{matrix} \mathrm{r}\ \mathrm{t}\ -\mathrm{c}\ \mathrm{t}\ +\mathrm{W_{i+1}}\ \mathrm{t}+1 \\ \mathrm{c}\ \mathrm{t}\ -\mathrm{p}+\mathrm{r}\ 0\ -\mathrm{u}\ 0\ +\mathrm{W_{i+1}}\ 1 \end{matrix}$$

2.2 Решение задач замены оборудования методом динамического программирования

Предположим, что на предприятии установили новое оборудование. Зависимости прибыли от реализации продукции на каждую единицу оборудования и ежегодные издержки, связанные с содержанием и ремонтом одной единицы оборудования, показаны в таблице 2.2.1.

*	Время t, в течение которого использовалось оборудование				
	$\tau=0$	$\tau=1$	$\tau=2$	$\tau=3$	$\tau=4$
$r(\tau)$	80	75	65	60	60
$c(\tau)$	20	25	30	35	45

Таблица 2.2.1 – Начальные условия

Для решения поставленной задачи введём следующие обозначения:

r(t) – стоимость продукции, производимой за год на единице оборудования возраста t лет;

c(t) – расходы, связанные ремонтом оборудования возраста t лет;

s(t) – остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P – покупная цена нового оборудования;

N – продолжительность планового периода;

t = 0, 1, 2, …, N – номер текущего периода;

Затраты на приобретение и установку нового оборудования составляют 40 тыс. рублей, при этом старое оборудование списывается. Требуется составить оптимальную стратегию замены оборудования, реализация которой позволяет получить максимальную общую прибыль за пять лет.

Данная задача относится к типу задач динамического программирования, в которой оборудование выступает в роли системы S. Состояние системы описывается временем эксплуатации оборудования t. В качестве управлений выступают решения о замене и сохранении оборудования. Управление принимается ежегодно. Необходимо найти такую стратегию управления, при которой прибыль за все пять лет работы предприятия будет максимальной. На рисунке 2.2.1 представлена задача в виде сети.

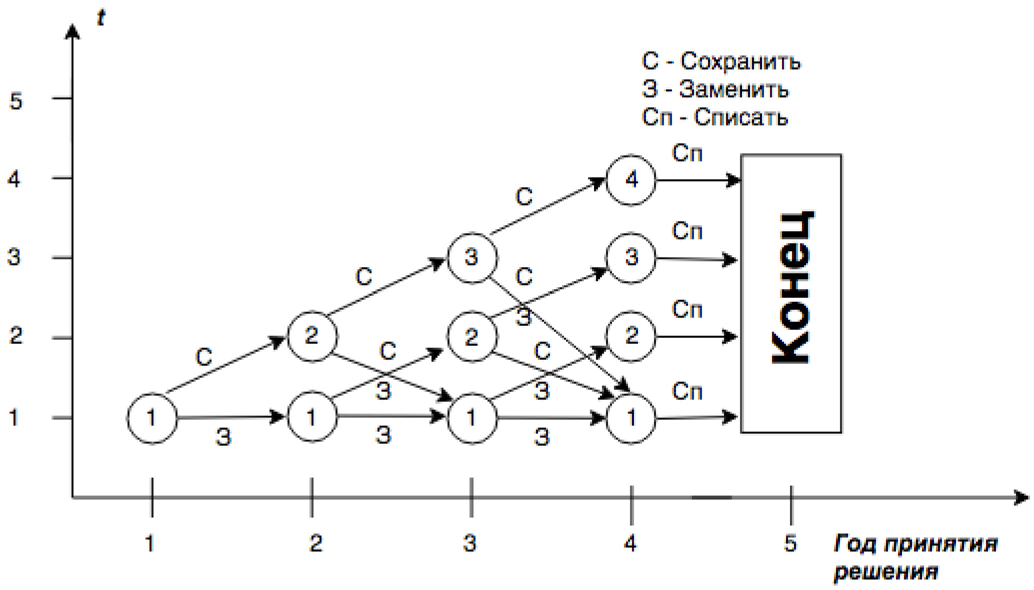


Рисунок 2.2.1 - Схема возможной замены оборудования

Решение задачи методом ДП будет реализовано в два этапа. Первый этап, именуемый условной оптимизацией, подразумевает нахождение условно-оптимального управления для всех состояний оборудования, при этом двигаясь от начала 5-го года к началу 1-го года. Второй этап, именуемый безусловной оптимизацией, подразумевает составление оптимального плана замены оборудования на основе условных оптимальных решений, полученных на первом этапе, двигаясь от начала 1-го года пятилетки к началу 5-го года.

Через **С** обозначим решение о сохранении оборудования, а через **З** обозначим решение о замене оборудования.

Начнем процедуру условной оптимизации с анализа последнего, года планового периода. В этом случае в правой части уравнение Беллмана $F_{k+1}(\tau)=0$.

I этап. Условная оптимизация.

К началу пятого года необходимо решить вопрос о сохранении или замене оборудования. Возможные состояния системы: оборудование прослужило один год, два, три, четыре года (соответствующие значения параметра $\tau = 1, 2, 3, 4$). Прибыль от реализации продукции для каждого состояния рассчитывается дважды: первый раз в предположении, что в течение пятого года предприятие будет работать на старом оборудовании, второй раз – в предположении, что к началу пятого года произошла замена оборудования. В зависимости от того, какое из двух полученных значений больше, выбирается управление u_5: сохранять (С) или заменять (З) оборудование.

Рекуррентные соотношения с учётом списывания оборудования имеют вид:

$$F_k(\tau, u_k) = \max_{u_k} \begin{cases} r(\tau) - c(\tau) & при \quad u_k = C \\ -P + r(0) - c(0) & при \quad u_k = З \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$$F_5(1, u_5) = \max_{u_5} \begin{cases} r(1) - c(1) \\ -40 + r(0) - c(0) \end{cases} = \max_{u_5} \begin{cases} 75 - 25 = 50 \\ -40 + 80 - 20 = 20 \end{cases} = 50 \quad при\ u_5 = C;$$

$$F_5(2,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(2)-c(2) \\ -40+r(0)-c(0) \end{cases} =\max_{u_5}\begin{cases} 65-30=35 \\ -40+80-20=20 \end{cases}$$ =35 при $u_5=C$;

$$F_5(3,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(3)-c(3) \\ -40+r(0)-c(0) \end{cases} =\max_{u_5}\begin{cases} 60-35=25 \\ -40+80-20=20 \end{cases}$$ =25 при $u_5=C$;

$$F_5(4,u_5)=\max_{u_5}\begin{cases} r(4)-c(4) \\ -40+r(0)-c(0) \end{cases} =\max_{u_5}\begin{cases} 60-45=15 \\ -40+80-20=20 \end{cases}$$ =20 при $u_5=З$.

Таблица 2.2.2 - Условно-оптимальные решения к началу 5 года

Возраст оборудования, t	Максимальный доход за последний год, $F_1(t)$	Условно-оптимальное решение
1	50	С
2	35	С
3	25	С
4	20	З

К началу четвертого года также необходимо решить вопрос о сохранении или замене оборудования. Возможные состояния системы: оборудование прослужило один год, два, три года (соответствующие значения параметра $\tau=1,2,3$). Управление выбирается согласно принципу Беллмана так, чтобы оно в совокупности с управлением на предыдущем шаге доставляло максимум целевой функции (суммарной прибыли от реализации продукции, произведенной за четвертый и пятый года работы предприятия).

Уравнение Беллмана будет иметь вид:

$$F_k(\tau,u_k)=\max_{u_k}\begin{cases} r(\tau)-c(\tau)+F_{k+1}(\tau+1) & при \quad u_k=C \\ -P+r(0)-c(0)+F_{k+1}(1) & при \quad u_k=З \end{cases}, \qquad (2.2.2)$$

где $F_k(\tau,u_k)$ - условно-оптимальное значение целевой функции (функции прибыли от реализации продукции) на интервале от начала $k-го$ года до последнего пятого года пятилетки, которое зависит только от срока использования оборудования τ.

$$F_4(1,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(1)-c(1)+F_5(2) \\ -40+r(0)-c(0)+F_5(1) \end{cases} = \max_{u_4}\begin{cases} 75-25+35=85 \\ -40+80-20+50=70 \end{cases}$$ =85 при $u_4 = C$;

$$F_4(2,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(2)-c(2)+F_5(3) \\ -40+r(0)-c(0)+F_5(1) \end{cases} = \max_{u_4}\begin{cases} 65-30+25=60 \\ -40+80-20+50=70 \end{cases}$$ =70 при $u_4 = З$;

$$F_4(3,u_4)=\max_{u_4}\begin{cases} r(3)-c(3)+F_5(4) \\ -40+r(0)-c(0)+F_5(1) \end{cases} = \max_{u_4}\begin{cases} 60-35+20=45 \\ -40+80-20+50=70 \end{cases}$$ =70 при $u_4 = З$.

Таблица 2.2.3 - Условно-оптимальные решения к началу 4 года

Возраст оборудования, t	Максимальный доход за последний год, F_1(t)	Условно-оптимальное решение
1	85	С
2	70	З
3	70	З

К началу третьего года аналогично решается вопрос о сохранении или замене оборудования. Возможные состояния системы: оборудование прослужило один год, два года (соответствующие значения параметра $\tau = 1, 2$). Управление выбирается согласно принципу Беллмана так, чтобы оно в совокупности с управлением на предыдущем шаге доставляло максимум целевой функции (суммарной прибыли от реализации продукции, произведенной за третий и последующие года пяти лет работы предприятия).

$$F_3(1,u_3)=\max_{u_3}\begin{cases} r(1)-c(1)+F_4(2) \\ -40+r(0)-c(0)+F_4(1) \end{cases} = \max_{u_3}\begin{cases} 75-25+70=120 \\ -40+80-20+85=105 \end{cases}$$ =120 при $u_3 = C$;

$$F_3(2,u_3)=\max_{u_3}\begin{cases} r(2)-c(2)+F_4(3) \\ -40+r(0)-c(0)+F_4(1) \end{cases} = \max_{u_3}\begin{cases} 65-30+70=105 \\ -40+80-20+85=105 \end{cases}$$ =105 при $u_3 = C$.

Таблица 2.2.4 - Условно-оптимальные решения к началу 3 года

Возраст оборудования, t	Максимальный доход за последний год, $F_1(t)$	Условно-оптимальное решение
1	120	С
2	105	С/З

К началу второго года решается вопрос о сохранении или замене оборудования. К началу второго года оборудование может прослужить не более года. Управление выбирается согласно принципу Беллмана так, чтобы оно в совокупности с управлением на предыдущем шаге доставляло максимум целевой функции (суммарной прибыли от реализации продукции, произведенной за второй и последующие года пяти лет работы предприятия).

$$F_2(1,u_2) = \max_{u_2}\begin{cases} r(1)-c(1)+F_3(2) \\ -40+r(0)-c(0)+F_3(1) \end{cases} = \max_{u_2}\begin{cases} 75-25+105=155 \\ -40+80-20+120=140 \end{cases} = 155 \text{ при } u_2 = C.$$

Таблица 2.2.5 - Условно-оптимальные решения к началу 2 года

Возраст оборудования, t	Максимальный доход за последний год, $F_1(t)$	Условно-оптимальное решение
1	155	С

Учитывая то, что к началу первого года пятилетки установлено новое оборудование ($\tau = 0$), то $F_1(0,u_1) = r(0) - c(0) + F_2(1) = 80 - 20 + 155 = 215$.

Таким образом, получили, что максимально возможная прибыль предприятия при своевременной замене оборудования равна 215 тыс. руб.

Определим оптимальный план замены оборудования.

II этап. Составление оптимального плана замены оборудования на пятилетку

Результаты вычислений сводим в таблицу 2.2.6.

Таблица 2.2.6 - Значения функции прибыли $F_k(\tau, u_k)$ от реализации продукции

Начало k-го года пятилетки	Возраст оборудования τ			
	1	2	3	4
2	**155 (С)**			
3	120 (С)	**105 (С)**		
4	85 (С)	70 (З)	**70 (З)**	
5	**50 (С)**	35 (С)	25 (С)	20 (З)

На основе результатов вычислений из I–го этапа построим оптимальный план замены оборудования. Для первого года единственным верным решением будет сохранить оборудование. Из таблицы (2.2.6) видно, что оптимальное решение для второго года – сохранение оборудования. Следовательно, возраст τ к началу третьего года составит два года. На данном этапе оборудование следует сохранить. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования τ составит три года. На этом этапе оборудование следует заменить. В этом случае к началу пятого года пятилетки оборудование проработает один год и его следует сохранить.

Таким образом, максимальная прибыль при реализации продукции 215 тыс. руб. может быть получена при эксплуатации оборудования три года и замене на новое оборудование в начале четвертого года.

Но что, если стоит задача не списывать старое оборудование, а реализовать его путем продажи по цене его остаточной стоимости. Предположим, у компании имеется оборудование, которое эксплуатировалось на протяжении 3-х лет. Требуется определить оптимальную политику замены оборудования с целью достижения максимального суммарного эффекта на последующие 4 года, учитывая срок эксплуатированного оборудования. Таблица 2.2.7 содержит относящиеся к задаче данные. При этом, по требованиям техники безопасности, оборудование, находящееся в эксплуатации шесть лет, подлежит обязательной замене. Стоимость нового оборудования равна 100 тыс. долларов.

Таблица 2.2.7 – Начальные условия задачи

Время t, лет, в течение которого используется механизм	0	1	2	3	4	5	6
Ежегодная прибыль r(t), тыс. долл., от использования механизма возраста t, лет	20	19	18,5	17,2	15,5	14	12,2
Ежегодная стоимость обслуживания u(t), тыс. долл., механизма возраста t, лет	0,2	0,6	1,2	1,5	1,7	1,8	2,2
Остаточная стоимость s(t), тыс. долл., механизма возраста t, лет	-	80	60	50	30	10	5

Решение.

Поиск оптимального решения включает четыре этапа (по числу запланированных лет работы). Движемся от начала четвёртого года к началу первого.

Согласно условию задачи, на момент начала работы возраст механизма составляет три года, поэтому процесс построения схемы замены оборудования нельзя назвать тривиальной задачей. На рис. 2.2.2 представлена в виде сети рассматриваемая задача замены оборудования. В начале первого года имеется механизм, эксплуатирующийся три года (на схеме по оси OY откладывается возраст механизма). Начиная работу, необходимо принять решение о замене (З) или эксплуатации (С) на протяжении следующего года. При замене механизма в начале второго года его возраст будет равен одному году, в обратном случае – четыре года (т.к. решение о сохранении или замене оборудования принимается в начале года, а далее в течение года идёт эксплуатация механизма, следовательно, к началу следующего года возраст оборудования увеличивается на один год). Аналогичный подход используется в начале каждого года, начиная со второго по четвёртый.

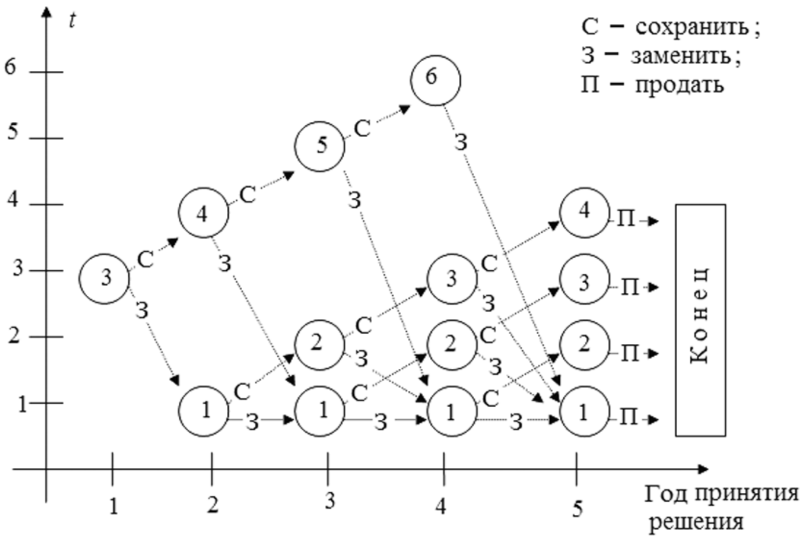


Рисунок 2.2.2 - Схема возможной замены оборудования

Условная оптимизация

4 этап. К началу четвёртого года возраст механизма может составлять 1, 2, 3 года или 6 лет, т.е. допустимые состояния системы t = 1, 2, 3, 6. Для каждого состояния определим условно-оптимальное решение и вычислим максимальный доход $F_1(t)$ за последний год.

Рекуррентные соотношения с учётом продажи бывшего в эксплуатации механизма имеют вид

$$F_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + s(t+1), & \text{если сохранить (С)} \\ r(0) - u(0) - P + s(t) + s(1), & \text{если заменить (З)} \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

следовательно

$$F_1(1) = \max \begin{cases} 19 - 0{,}6 + 60 = 78{,}4 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 80 + 80 = 79{,}8 \end{cases} \rightarrow F_1(1)=79{,}8 \ \text{(З)}$$

$$F_1(2) = \max \begin{cases} 18{,}5 - 1{,}2 + 50 = 67{,}3 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 60 + 80 = 59{,}8 \end{cases} \rightarrow F_1(2)=67{,}3 \ \text{(С)}$$

$$F_1(3) = \max \begin{cases} 17{,}2 - 1{,}5 + 30 = 45{,}7 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 50 + 80 = 49{,}8 \end{cases} \rightarrow F_1(3)=49{,}8 \ \text{(З)}$$

$$F_1(6) = \max \begin{cases} \text{механизм подлежит обязательной замене} \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 5 + 80 = 4{,}8 \end{cases} \rightarrow F_1(6)=4{,}8 \ \ (З)$$

Все полученные данные запишем в виде вспомогательной таблицы (таблица 2.2.8).

Таблица 2.2.8 - Условно-оптимальные решения четвёртого этапа

Возраст механизма t, лет	Максимальный доход за последний год $F_1(t)$, тыс. долл.	Условно-оптимальное решение
1	79,8	З
2	67,3	С
3	49,8	З
6	4,8	З

3 этап. К началу третьего года, согласно схеме, возраст механизма может составлять 1, 2 года или 5 лет.

Рекуррентные соотношения имеют вид

$$F_2(\mathbf{t}) = \max \begin{cases} r(\mathbf{t}) - u(\mathbf{t}) + F_1(\mathbf{t}+1), & \text{если сохранить (С)} \\ r(0) - u(0) - P + s(\mathbf{t}) + F_1(1), & \text{если заменить (З)} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

значения $F_1(t)$ берём из таблицы 2.2.8, получим:

$$F_2(1) = \max \begin{cases} 19 - 0{,}6 + 67{,}3 = 85{,}7 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 80 + 79{,}8 = 79{,}6 \end{cases} \rightarrow F_2(1)=85{,}7 \ \ (С)$$

$$F_2(2) = \max \begin{cases} 18{,}5 - 1{,}2 + 49{,}8 = 67{,}1 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 60 + 79{,}8 = 59{,}6 \end{cases} \rightarrow F_2(2)=67{,}1 \ \ (С)$$

$$F_2(5) = \max \begin{cases} 14 - 1{,}8 + 4{,}8 = 17 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 10 + 79{,}8 = 9{,}6 \end{cases} \rightarrow F_2(5)=17 \ \ (С)$$

Все полученные данные третьего этапа занесём в таблицу 2.2.9.

Таблица 2.2.9 - Условно-оптимальные решения третьего этапа

Возраст механизма t, лет	Максимальный доход за последний год $F_2(t)$, тыс. долл.	Условно-оптимальное решение
1	85,7	С
2	67,1	С
5	17	С

2 этап. К началу второго года допустимые состояния системы t = 1 или t = 4. Для каждого состояния определим условно-оптимальное решение и максимальную прибыль за три года работы.

Рекуррентные уравнения Беллмана имеют вид

$$F_3(\mathbf{t}) = \max \begin{cases} r(\mathbf{t}) - u(\mathbf{t}) + F_2(\mathbf{t}+1), & \text{если сохранить (С)} \\ r(0) - u(0) - P + s(\mathbf{t}) + F_2(1), & \text{если заменить (З)} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

значения F_2 (t) берём из таблицы 2.2.9

$$F_3(1) = \max \begin{cases} 19 - 0{,}6 + 67{,}1 = 85{,}5 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 80 + 85{,}7 = 85{,}5 \end{cases} \rightarrow F_3(1)=85{,}5 \ \text{(С)}$$

$$F_3(4) = \max \begin{cases} 15{,}5 - 1{,}7 + 17 = 30{,}8 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 30 + 85{,}7 = 35{,}5 \end{cases} \rightarrow F_3(1)=35{,}5 \ \text{(З)}$$

Максимальную прибыль за последние три года работы компании и условно-оптимальные решения запишем таблично (таблица 2.2.10).

Таблица 2.2.10 - Условно-оптимальные решения второго этапа

Возраст механизма t, лет	Максимальный доход за последний год $F_1(t)$, тыс. долл.	Условно-оптимальное решение
1	85,5	С
4	35,5	З

1 этап. Начало первого года работы компании. Вычислим максимальную прибыль за четыре года. Согласно условию, в начальный момент установлен

механизм, имеющий наработку три года, поэтому рекуррентные уравнения Беллмана примут вид

$$F_4(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + F_3(t+1), & \text{если сохранить (С)} \\ r(0) - u(0) - P + s(t) + F_3(1), & \text{если заменить (З)} \end{cases} \quad (2.2.6)$$

значения F_3 (t) берём из таблицы 2.2.10, следовательно:

$$F_4(3) = \max \begin{cases} 17{,}2 - 1{,}5 + 35{,}5 = 51{,}2 \\ 20 - 0{,}2 - 100 + 50 + 85{,}5 = 55{,}3 \end{cases} \rightarrow F_4(3)=55{,}3 \ \text{(З)}$$

Исходя из этого, максимальная прибыль компании за четыре года работы может составить 55,3 тыс. долл. Определим политику замены механизма.

Безусловная оптимизация

Поднимаемся снизу вверх. Для первого года работы решение: заменить, тогда к началу второго года возраст оборудования составит один год, следовательно, по таблице 2.2.10 находим условно-оптимальное решение для t = 1: сохранить. К началу третьего года возраст оборудования составит два года, по таблице 2.2.9 находим условно-оптимальное решение для t = 2 – сохранить, – тогда к началу четвёртого года наработка оборудования составит три года и, согласно таблице 2.2.8, для t = 3 принимаем решение: заменить.

Итак, оптимальной стратегией управления, при которой компания получит максимальную прибыль F = 55,3 тыс. долл., является следующая политика замены оборудования: U = (З, С, С, З).

Для получения максимальной прибыли в размере 55,3 тыс. долл. механизм необходимо заменить в начале первого и четвёртого годов работы.

ГЛАВА 3 ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ

3.1 Поиск и анализ существующих реализаций алгоритма для решения задач замены оборудования на основе динамического программирования

Для решения задачи о замене оборудования необходим сервис или программное обеспечение (ПО) удовлетворяющее следующим условиям:

- удобство эксплуатации;
- кроссплатформенный (возможность использования сервиса или приложения на большинстве операционных систем, а так же на мобильных устройствах).

В ходе поиска и анализа существующих в интернете решений реализации задачи о замене оборудования был найден онлайн сервис по решению математических задач, в том числе и задачи о замене оборудования - math.semestr.ru. Данный сервис работает с 2006 года, имеет трафик в 11 тыс. человек в день (рисунок 3.1.1), зарекомендовал себя как один из самых доступных, мобильных и точных сервисов по решению математических задач в интернете.

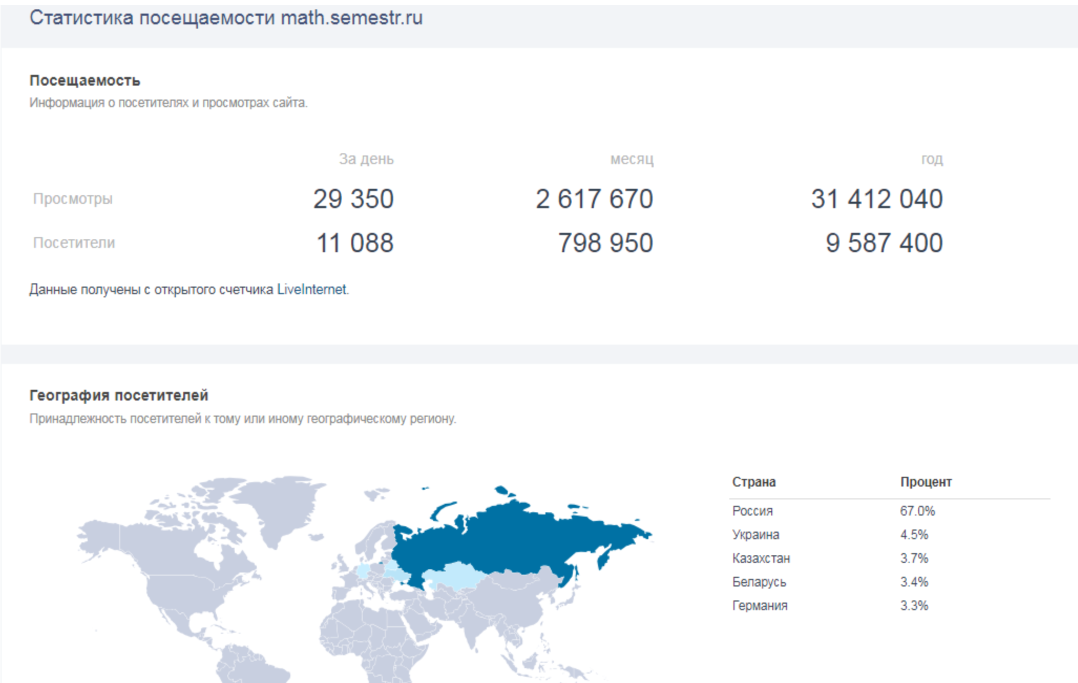


Рисунок 3.1.1 - Статистика

К плюсам данного сервиса можно отнести:

- возможность работы с любого устройства, имеющего браузер и подключенного к сети Интернет;
- подробная видео-инструкция по использованию сервиса;
- возможность получить отчет о результатах решения задачи в формате Word файла (при подключении премиум подписки);
- возможность указать начальный возраст оборудования;
- подробное описания решения задач.

Из минусов можно отметить:

- наличие рекламы;
- отсутствует возможности работать с сервисом в оффлайн режиме (для работы с сервисом требуется подключение к сети Интернет);
- отсутствие построения графиков наглядного представления плана о замене оборудования.

В качестве тестирования была решена одна из представленных в данной работе задач. Для решения задачи о замене оборудования в сервисе math.semestr.ru необходимо указать данные о периоде эксплуатации и стоимости оборудования (Рисунок 3.1.2).

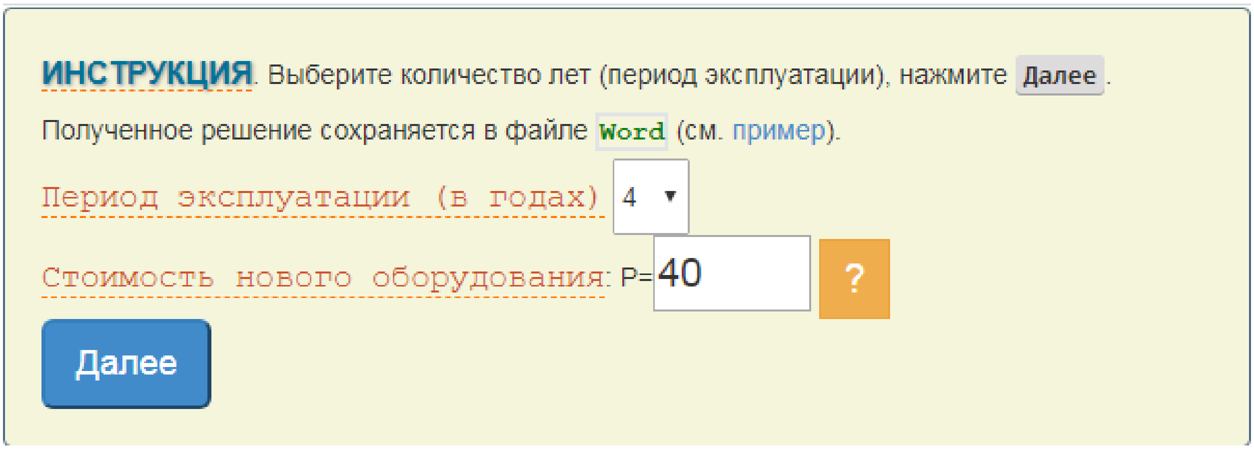
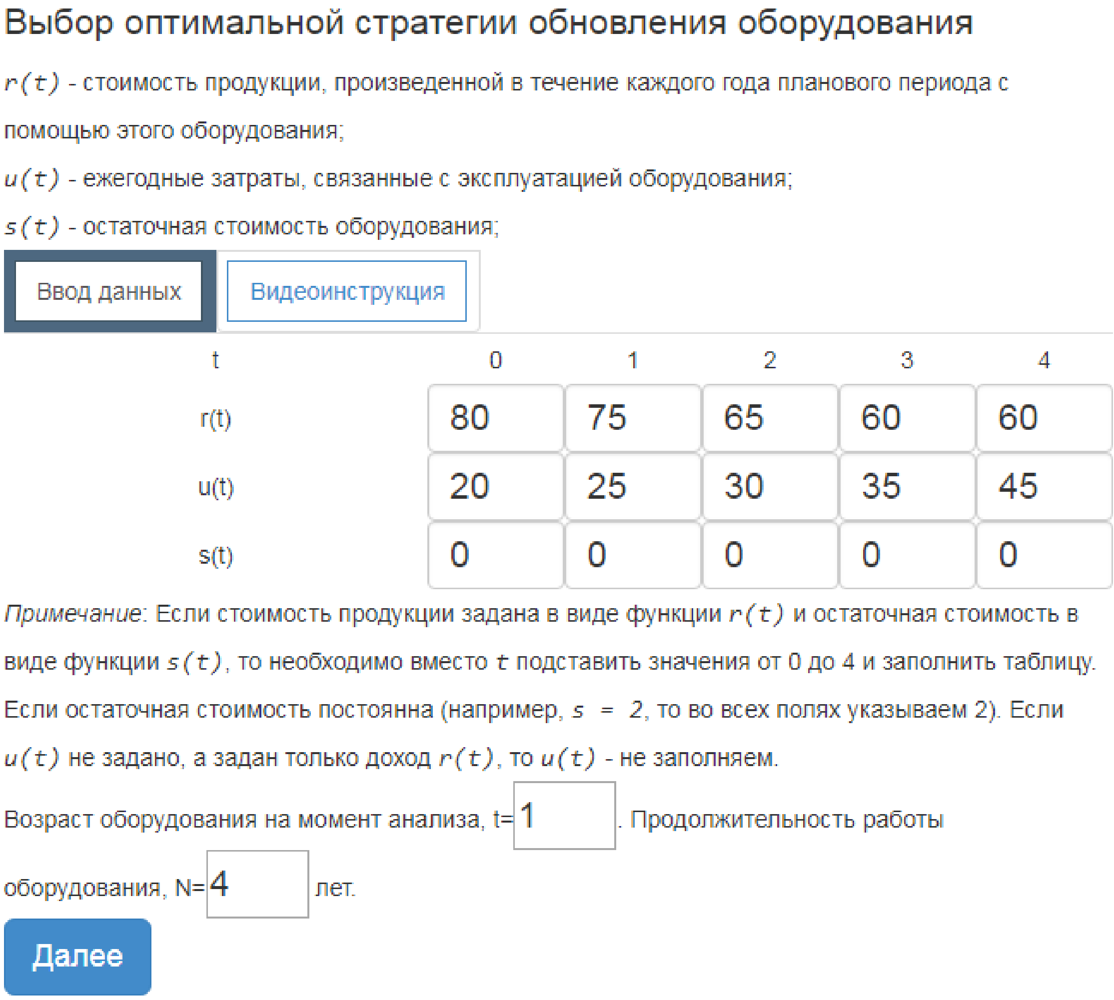


Рисунок 3.1.2 - Ввод исходной информации

В следующем окне необходимо ввести данные о стоимости продукции, произведенной данным оборудованием в течении каждого года, стоимости затрат на обслуживание данного оборудования в течении каждого года, а так же, при необходимости, указать остаточную стоимость оборудования на каждом году эксплуатирования (Рисунок 3.1.3).



Выбор оптимальной стратегии обновления оборудования

$r(t)$ - стоимость продукции, произведенной в течение каждого года планового периода с помощью этого оборудования;

$u(t)$ - ежегодные затраты, связанные с эксплуатацией оборудования;

$s(t)$ - остаточная стоимость оборудования;

Ввод данных | Видеоинструкция

t	0	1	2	3	4
r(t)	80	75	65	60	60
u(t)	20	25	30	35	45
s(t)	0	0	0	0	0

Примечание: Если стоимость продукции задана в виде функции $r(t)$ и остаточная стоимость в виде функции $s(t)$, то необходимо вместо t подставить значения от 0 до 4 и заполнить таблицу. Если остаточная стоимость постоянна (например, $s = 2$, то во всех полях указываем 2). Если $u(t)$ не задано, а задан только доход $r(t)$, то $u(t)$ - не заполняем.

Возраст оборудования на момент анализа, t= 1 . Продолжительность работы оборудования, N= 4 лет.

Далее

Рисунок 3.1.3 - Ввод исходной информации

В конечном результате сервис выдаст подробный отчет, в котором отображены шаги реализации алгоритма, таблица значений функции прибыли от реализации продукции (Рисунок 3.1.4) и ответ на поставленную задачу. При необходимости есть возможность поэтапно проследить за ходом всего решения задачи. Ответом на данную задачу будет вывод, на каком году эксплуатации следует заменить оборудование для максимизации прибыли (Рисунок 3.1.5).

Результаты вычислений по уравнениям Беллмана $F_k(t)$ приведены в таблице, в которой k - год эксплуатации, а t - возраст оборудования.

Таблица – Матрица максимальных прибылей

k / t	1	2	3	4
1	155			
2	120	105		
3	85	**70**	**70**	
4	50	35	25	**20**

Рисунок 3.1.4 - Значения функции прибыли от реализации продукции

Оптимальное управление при k = 4, $x_4(1)$ = (C), т.е. максимум дохода за годы с 1-го по 4-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

$F_1(1) \rightarrow (C) \rightarrow F_2(2) \rightarrow (C) \rightarrow F_3(3) \rightarrow$ **(З)** $\rightarrow F_4(1) \rightarrow (C) \rightarrow$

Таким образом, за 4 лет эксплуатации оборудования замену надо произвести:

- в начале 3-го года эксплуатации

Рисунок 3.1.5 - Получение решения задачи

Следует учесть, что ответ сервиса на задачу полностью совпадает с ответом на данную задачу, решенной вручную. Таким образом, была произведена проверка на верность решения задачи.

Сервис позволяет решать довольно громоздкие задачи. К примеру, определить оптимальную политику для замены оборудования на протяжении 10 лет, учитывая остаточную стоимость оборудования. Стоимость нового оборудования равна 60 у. е. Введем исходные данные в таблицу сервиса (рисунок 3.1.6)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r(t)	100	95	90	85	80	75	70	70	65	60	50
u(t)	20	25	30	35	35	40	45	50	50	55	60
s(t)	0	30	25	25	20	18	15	13	14	10	8

Примечание: Если стоимость продукции задана в виде функции $r(t)$ и остаточная стоимость в виде функции $s(t)$, то необходимо вместо t подставить значения от 0 до 10 и заполнить таблицу. Если остаточная стоимость постоянна (например, $s = 2$, то во всех полях указываем 2). Если $u(t)$ не задано, а задан только доход $r(t)$, то $u(t)$ - не заполняем.

Возраст оборудования на момент анализа, t= 1 . Продолжительность работы оборудования, N= 10 лет.

Далее

Рисунок 3.1.6 – Ввод исходных данных

Сервису удалось решить и такую, довольно трудоемкую задачу, включающую большое количество входных параметров. В результате был получен отчет, в котором отображены шаги реализации алгоритма, таблица значений функции прибыли от реализации продукции (Рисунок 3.1.7), а также оптимальная политика для замены оборудования сроком на 10 лет (Рисунок 3.1.8).

k / t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	595									
2	535	525								
3	480	465	**465**							
4	420	410	**405**	**400**						
5	360	350	**350**	**345**	**343**					
6	305	290	**290**	**285**	**283**	**280**				
7	245	235	**230**	**225**	**223**	**220**	**218**			
8	185	175	**175**	**170**	**168**	**165**	**163**	**164**		
9	130	**115**	**115**	**110**	**108**	**105**	**103**	**104**	**100**	
10	70	60	50	45	**38**	**35**	**33**	**34**	**30**	**28**

Рисунок 3.1.7 - Значения функции прибыли от реализации продукции

Оптимальное управление при k = 10, $x_{10}(1)$ = (C), т.е. максимум дохода за годы с 1-го по 10-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

$F_1(1) \to (C) \to F_2(2) \to (C) \to F_3(3) \to \mathbf{(З)} \to F_4(1) \to (C) \to F_5(2) \to (C) \to F_6(3) \to \mathbf{(З)} \to F_7(1) \to (C) \to F_8(2) \to (C) \to F_9(3) \to \mathbf{(З)} \to F_{10}(1) \to (C) \to$

Таким образом, за 10 лет эксплуатации оборудования замену надо произвести:

- в начале 3-го года эксплуатации
- в начале 6-го года эксплуатации
- в начале 9-го года эксплуатации

Рисунок 3.1.8 - Получение решения задачи

3.2 Реализация собственного программного обеспечения для решения задач замены оборудования на основе динамического программирования

В качестве языка программирования был выбран один из самых популярных, объектно-ориентированных языков программирования Java. Данный язык разработан компанией Sun Microsystems, в настоящее время принадлежит организации Oracle [15].

С помощью виртуальной Java-машины (JVM), исполняющей роль интерпретатора, программные обеспечения написанные на Java могут работать на любой компьютерной архитектуре [16]. Это достигается за счет того, что программные обеспечения написанные на Java транслируются в байт-код, который впоследствии обрабатывает JVM и передает команды оборудованию.

С применением подобного способа выполнения программ достигается независимость байт-кода от операционной системы и оборудования. Данный факт позволяет запускать Java-приложения на всех устройствах, для которых существует соответствующая виртуальная машина [18].

Для облегчения написания и отладки кода была использована одна из самых популярных IDE (Integrated Development Environment — интегрированная среда разработки) Intellij IDEA 2017. Данная среда разработки позволяет писать код на многих языках программирования, в том числе и Java, JavaScript, Pyton и др.

По описанной ранее математической модели было реализовано программное обеспечение для решения задач замены оборудования на основе динамического программирования. Для хранения и обработки входных данных были созданы массивы размерность которых равна количеству лет, на которое строится оптимальное управление (Рисунок 3.2.1).

```
Scanner input = new Scanner(System.in); // Объявляем Scanner
System.out.println("Введите кол-во лет");
int size = input.nextInt(); // Читаем с клавиатуры размер массива и записываем в size
double r[] = new double[size]; // Создаём массив double размером в size
double c[] = new double[size]; // Создаём массив double размером в size
double u[] = new double[size]; // Создаём массив double размером в size
```

Рисунок 3.2.1 – Создание массивов

Заполнение массивов осуществляется пользователем, посредством ввода входных данных с клавиатуры (Рисунок 3.2.2).

```
System.out.println("Введите доход от продукции");
for(int i=0;i<size;i++){
    r[i]= input.nextDouble();

}
System.out.println("Введите расходы от починки");
for(int i=0;i<size;i++){
    c[i]= input.nextDouble();

}
System.out.println("Введите оставшуюся стоимость оборудования");
for(int i=0;i<size;i++){
    u[i]= input.nextDouble();

}
System.out.println("Введите стоимость оборудования");
int p = input.nextInt();
```

Рисунок 3.2.2 – Ввод входных данным задачи

Основная логика, реализующая алгоритм, описана в методах, которые являются рекуррентными уравнениями Беллмана (Рисунок 3.2.3).

```
public static double preFunkProfit(int i,int size,int p,double r[], double
c[],double u[]) {
    double max;
    if((size-(size-i)+2)>u.length-1){
        max = Math.max(r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+u[size-(size-
i)+1],-p+r[0]-c[0]+u[size-(size-i)+1]+u[1]);
    }else{
        max = Math.max(r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+u[size-(size-
i)+2],-p+r[0]-c[0]+u[size-(size-i)+1]+u[1]);
    }
    return max;
}
```

Рисунок 3.2.3 – Рекуррентные уравнения Беллмана

Методы возвращают максимальный доход ща каждый период времени, которые, в свою очередь, записываются в двумерный массив. Происходит цикличный возов метода для записи значений прибыли от реализации продукции (Рисунок 3.2.4).

```
for(int i = size-3;i>-1;i--) {
    for (int j = 0; j < size-1-q; j++) {
        preMax = matrixRez[i+1][j+1];
        preMaxOne = matrixRez[i+1][0];

        matrixRez[i][j] = FunkProfit(j,size, p, r, c, u, preMax,preMaxOne);
        matrixSave[i][j] = FunkProfitSave(j,size, p, r, c, u, preMax,preMaxOne);
    }
    q++;
}
```

Рисунок 3.2.4 – Цикличная запись значений прибыли в двумерный массив

Результатом выполнения программы является таблица значений прибыли от реализации продукции на каждом отрезке времени, оптимальная политика управления, и итоговая прибыль, которую получит компания придерживаясь данной политики управления (Рисунок 3.2.5).

```
Значения функции прибыли от реализации продукции
155.0(C)
120.0(C) 105.0(З/С)
85.0(C) 70.0(З) 70.0(З)
50.0(C) 35.0(C) 25.0(C) 20.0(З)
Итоговая прибыль с учетом начало 1-ого года эксплуатации 215.0
 придерживаясь данной стратегии:( C, C, З, C)
```

Рисунок 3.2.5 – Выполнение программы

Заключение

В выпускной квалификационной работе приведены основные теоретические аспекты динамического программирования и принцип оптимальности Беллмана, рассматривается вывод уравнения Беллмана для непрерывного случая.

Методом динамического программирования осуществляется решение задач замены оборудования с различными входными параметрами. Решение представлено аналитически, а также с помощью онлайн сервиса math.semestr.ru и собственного программного обеспечения. Приводится подробный анализ полученных решений, позволяющий осуществить прогноз замены оборудования по годам с наименьшими потерями прибыли.

В работе приводится обоснование того, что метод динамического программирования в значительной степени повышает эффективность принятия управленческих решений по замене оборудования.

Список используемой литературы

1. Беллман, Р. Динамическое программирование [Текст]: под редакцией Н.Н. Воробьева - Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. - 549 с.

2. Брюс Э. Философия Java / Эккель. Брюс. – М. : Питер, 2017. – 1168 с.

3. Гладких Б.А. Методы оптимизации и исследования операций. Часть 1. Введение в исследование операций. Линейное программирование. — Томск: НТЛ, 2009. — 200 с.

4. Замкова, Л.И. Булева двухкритериальная задача о рюкзаке / Л.И. Замкова // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2009. – № 4. – С. 201 – 204.

5. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций. – СПб.:Питер, 2001. – 192с.

6. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Кормен Т. [и др.] [Текст]: под ред. Красикова И.В. -2-е изд. - Москва: Вильямс, 2005. - 1296 с.

7. Косоруков, О.А. Исследование операций / О.А. Косоруков, А.В. Мищенко [Текст]: под ред. Н.П. Тихомирова - Москва: Экзамен, 2003. - 599 с.

8. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом анализе [Текст]: учеб. пособие/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов - 3-е издание - Москва: Дело, 2002. - 500 с.

9. Лежнев, А.В. Динамическое программирование в экономических задачах [Текст]: учеб. пособие / Лежнев А.В. - Москва: Бином, 2010. - 176 с.

10. Окулов С.М. Динамическое программирование. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2017. – 296 с.

11. Пантелеев А.П., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах. / Окулов С.М., Пестов О.А. – М.: Высшая школа, 2007. – 544 с.

12. Сторонгин Р. Г. Исследование операций. Модели экономического поведения. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 208 с.

13. Шапкин А.С. Математические методы и модели исследования операций / Шапкин А.С., Шапкин В.А. - М.:Дашков и К, 2016. - 400 с.

14. Ширяев В.И. Исследование операций и численные методы оптимизации[Текст]: М.: Комкнига, 2007. – 216 с.

15. Andrew, LeeRubinger. Continuous Enterprise Development in Java / LeeRubinger. Andrew, Knutsen. Aslak. – London : Addison-Wesley Professional, 2014. – 222 с.

16. Benjamin, J. Evans. Java in a Nutshell / J. Evans. Benjamin, Flanagan. David. – London : , 2014. – 418 с.

17. Cay, S. Hortsman. Core Java SE 9 for the Impatient / S. Hortsman. Cay. – London : Addison-Wesley Professional, 2017. – 576 с.

18. Katty Sierra Head First Java. - 2nd Edition изд. - London: O'Reilly Media, Inc., 2017. - 720 с.

19. Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, Umesh Vazirani. Algorithms — 1-е изд. — McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2006. — С. 336.

20. Zadeh L.A. Optimality and Nonscalar-valued Performance Criteria. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-8, p. 1, 1963

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг кода для реализации задачи замены оборудования методом динамического программирования

Replacement.java

```
import java.util.Scanner;
public class Replacement {
   public static void main(String[]  args) {
      Scanner input = new Scanner(System.in); // Объявляем Scanner
      System.out.println("Введите кол-во лет");
      int size = input.nextInt();  // Читаем с клавиатуры размер массива и
записываем в size
      double r[] = new double[size]; // Создаём массив double размером в size, в
который записываются данные о прибыли за счет реализации продукции
      double c[] = new double[size]; // Создаём массив double размером в size, в
который записываются данные о расходах за счет содержания и ремонта
оборудования
      double u[] = new double[size]; // Создаём массив double размером в size, в
который записываются данные об остаточной стоимости оборудования
      System.out.println("Введите доход от продукции");
      for(int i=0;i<size;i++){
         r[i]= input.nextDouble();//записываются данные о прибыли за счет
реализации продукции
      }
      System.out.println("Введите расходы от починки");
      for(int i=0;i<size;i++){
         c[i]= input.nextDouble();//записываются данные о расходах за счет
содержания и ремонта оборудования
      }
      System.out.println("Введите оставшуюся стоимость оборудования");
```

```
        for(int i=0;i<size;i++){
            u[i]= input.nextDouble();//записываются данные об остаточной стоимости оборудования
        }
        double matrixRez [][] = new double[size-1][size-1];//массив  для хранения переменных максимальной прибыли на каждом этапе времени
        String matrixSave [][] = new String[size-1][size-1];  ];//массив для хранения переменных управления (С) или (З)
        double finallyProfit;//переменная  для хранения итоговой прибыли
        double preMax = 0; //переменная для хранения прибыли на предшествующих шагах
        double preMaxOne = 0; //переменная для хранения прибыли на первом шаге
        System.out.println("Введите стоимость оборудования");
        int p = input.nextInt();//записываются данные о стоимости нового оборудования
        int q=1;// буферная переменная
        for(int j=0;j <size-1;j++){//заполняются массивы с конца оптимальными управлениями
            matrixRez[size-2][j]=preFunkProfit(j,size,  p, r, c, u);
            matrixSave[size-2][j]=preFunkProfitSave(j,size,  p, r, c, u);
        }
        for(int i = size-3;i>-1;i--)  {
            for (int j = 0; j < size-1-q; j++) {//заполняются массивы с конца оптимальными управлениями
                preMax = matrixRez[i+1][j+1];
                preMaxOne = matrixRez[i+1][0];
                matrixRez[i][j]  = FunkProfit(j,size, p, r, c, u, preMax,preMaxOne);
                matrixSave[i][j]  = FunkProfitSave(j,size, p, r, c, u, preMax,preMaxOne);
            }
            q++;
```

```
        }
        System.out.println("\nЗначения функции прибыли от реализации продукции");//оптимальные управления выстраиваются в виде структуированной таблицы
        for(int i = 0;i<size-1;i++)  {
           for (int j = 0; j < size - 1; j++) {
              if(matrixSave[i][j]!=null)  {
                 System.out.print(matrixRez[i][j]  + "(" + matrixSave[i][j]  + ")" + " ");
              }
              if (j == size - 2) {
                 System.out.println();
              }
           }
        }
        preMax= matrixRez[0][0];
        finallyProfit  = FinallyProfit(r,c,u,preMax);
        System.out.println("Итоговая прибыль с учетом начало 1-ого года эксплуатации "+ finallyProfit);
        Strategy(matrixSave,size);//производится итоговый подсчет прибыли за все года эксплуатации оборудования
    }
    public static double preFunkProfit(int i,int size,int p,double r[], double c[],double u[]) {//функция для подсчета оптимального управления на N шаге
        double max;
        if((size-(size-i)+2)>u.length-1){
           max = Math.max(r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+u[size-(size-i)+1],-p+r[0]-c[0]+u[size-(size-i)+1]+u[1]);
        }else{
           max = Math.max(r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+u[size-(size-i)+2],-p+r[0]-c[0]+u[size-(size-i)+1]+u[1]);
```

```
        }
        return max;
    }
    public static String preFunkProfitSave(int i,int size,int p,double r[], double
c[],double u[]) {//функция для подсчета оптимального управления на N шаге
        String s;
        if(size-(size-i)+2>u.length-1){
            if (r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+u[size-(size-i)+1]==-p+r[0]-
c[0]+u[size-(size-i)+1]+u[1]){
                s="З/С";
            }else if (r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+u[size-(size-i)+1]>-p+r[0]-
c[0]+u[size-(size-i)+1]+u[1]){
                s = "С";
            } else {
                s = "З";
            }
        }else{
            if (r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+u[size-(size-i)+2]==-p+r[0]-
c[0]+u[size-(size-i)+1]+u[1]){
                s="З/С";
            }else if (r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+u[size-(size-i)+2]>-p+r[0]-
c[0]+u[size-(size-i)+1]+u[1]){
                s = "С";
            } else {
                s = "З";
            }
        }
        return s;
    }
    public static double FunkProfit(int i,int size,int p,double r[], double c[],double
```

u[], **double** preMax, **double** preMaxOne) {//функция для подсчета оптимального управления на остальных шагах

double max = Math.*max*(r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+preMax,-p+r[0]-c[0]+preMaxOne+u[size-(size-i)+1]);

return max;

}

public static String FunkProfitSave(**int** i,**int** size,**int** p,**double** r[], **double** c[],**double** u[], **double** preMax, **double** preMaxOne) {//функция для подсчета оптимального управления на остальных шагах

String save;

if(r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+preMax==-p+r[0]-c[0]+preMaxOne+u[size-(size-i)+1]){

save = **"З/С"**;

}**else if** (r[size-(size-i)+1]-c[size-(size-i)+1]+preMax>-p+r[0]-c[0]+preMaxOne+u[size-(size-i)+1]){

save = **"С"**;

} **else** {

save = **"З"**;

}

return save;

}

public static double FinallyProfit(**double** r[], **double** c[],**double** u[],**double** preMaxOne) {//функция для подсчета максимальной прибыли

double profit = r[0]-c[0]+ preMaxOne;

return profit;

}

public static void Strategy(String matrixSave [][],**int** size){//функция для построения оптимальной стратегии

String [] strategy = **new** String[size-1];

int shag = 0;

```
        for(int i = 0;i<size-1;i++) {
            if(matrixSave[i][shag].equals("С")) {
                strategy[i]=matrixSave[i][shag];
                shag++;
            }else if(matrixSave[i][shag].equals("З/С")) {
                strategy[i]="С";
                shag++;
            }
            else if(matrixSave[i][shag].equals("З")){
                strategy[i]=matrixSave[i][shag];
                shag=0;
            }
        }
        System.out.print(" придерживаясь данной стратегии:( ");
        for(int i = 0;i<size-1;i++) {
            if(i==size-2){
                System.out.print(strategy[i]+")");
            }else{
                System.out.print(strategy[i]+", ");
            }
        }
    }
}
```