МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

ФОРМИРОВАНИЕ НАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ БАКАЛАВРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

М А Г И С Т Е Р С К А Я   Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Направление подготовки магистра: 44.04.01 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математическое образование*

Студент А.А. Цацко _____________

Научный
руководитель Р.А. Утеева ____________

Руководитель программы д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»_______ 2016 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А.Утеева ___________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Проблема формирования научного мировоззрения у учащихся и студентов средствами предмета была и остается одной из актуальных проблем теории и практики обучения математике. Действительно, на разных этапах развития системы математического образования в нашей стране ей уделялось особое внимание.

Так, например, в 70-х – 80-х гг. прошлого века на страницах журнала «Математика в школе» появились статьи известных математиков А.И. Маркушевича [60], Б.В. Гнеденко [23], А.Н. Колмогорова [44], и методистов Е.Г. Глаголевой, Л.О. Денищевой, И.Л. Никольской [19] и др. , в которых раскрыты возможности математики для воспитания научного мировоззрения. Авторы обращают внимание на важность развития мышления и речи на уроках математики.

В докладе Международной комиссии по образованию для XXI века, созданной в 1993 году в рамках ЮНЕСКО отмечено, что «образование должно быть участником процесса зарождения нового всемирного сообщества с новым мышлением, новым мировоззрением, которое может быть сформировано через развитие личности отдельного человека» [91, С. 11].

Различные аспекты проблемы формирования научного мировоззрения в процессе обучения математике нашли отражение в докторских (А.Л. Жохов, 1999 [32]; И.В. Егорченко, 2003 [30]; М.В. Шабанова, 2005 [101] и др.) и кандидатских (И.Е. Карелина 2005 [40]; Д.А. Татаринов, 2013 [90] и др.) диссертационных исследованиях. Они также свидетельствуют об актуальности обозначенной проблемы.

В ФГОС ВО [99] по направлению подготовки 44.03.05 бакалавров педагогического образования (профиль «Математика и информатика») одной из общекультурных компетенций определена *способность использовать основы философских и социогуманитарных знаний для формирования научного мировоззрения* (ОК-1) у обучаемых.

Это означает, что будущие учителя математики (бакалавры математического образования) должны не только осознавать роль математики в формировании мировоззрения учащихся, но также владеть средствами такого формирования.

В ФГОС среднего (полного) общего образования [98] *к личностным результатам* каждого учащегося отнесена *сформированность мировоззрения*, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире.

В основу данного исследования положены работы И.Ф. Тесленко [92], Т.А. Ивановой [38, 91], в которых раскрывается *сущность научного мировоззрения* у учащихся в процессе обучения математике.

Суть основных положений указанных авторов состоит в следующем:

- существенными признаками научного мировоззрения являются:

а) наличие обобщенной, научно обоснованной системы представлений, мыслей, взглядов на природу, общество и мышление;

б) убежденность в истинности этих взглядов и восприятие их как своих собственных;

в) руководствование ими во всей своей деятельности как принципами для принятия решения и своего поведения, как опорой мышления, стремлений [92, С. 31];

- усвоение учащимися математических знаний, само по себе, автоматически не является определяющим в формировании мировоззрения. Необходимо в математических понятиях и утверждениях систематически выделять мировоззренческие аспекты и обеспечивать условия для осознания этих аспектов учащимися [Там же, С. 33];

- ознакомление школьников с математикой как определенным методом миропознания, формирование понимания диалектической взаимосвязи математики и действительности, представление о предмете и методе математики, его отличиях от методов естественных и гуманитарных наук, о математическом моделировании, владение математическим языком, понимание сущности и роли в познании действительности ведущих математических понятий способствуют миропониманию, вносят существенный вклад в формирование общей культуры личности [91, С. 42].

На практике большое значение для учителя или преподавателя математики приобретает вопрос об *условиях и средствах формирования* научного мировоззрения.

Авторы статьи [7] в качестве педагогических условий, влияющих на эффективность формирования научного мировоззрения студентов в образовательном процессе вуза, выделяют следующие:

1) разработка и реализация программы формирования основ научного мировоззрения студентов;

2) организация самостоятельной познавательной деятельности студентов, направленной на углубление их научного мировоззрения;

3) оценка результативности формирования научного мировоззрения студентов.

В статье Е.А. Лодатко [59] обосновываются методики диагностирования и разработки средств оценивания уровня развитости математического мировоззрения учителей начальных классов на основе тестов, определяющих мировоззренческие представления о:

1) природе математического знания и его месте в познании окружающего мира;

2) происхождении и развитии математических понятий;

3) сущности методов математики и их применении к решению практических задач;

4) влиянии математических знаний на интеллектуальное развитие человека;

5) месте математических знаний в профессиональной подготовке учителей начальных классов;

6) роли математики в национальной культуре и современном обществе. Они могут быть взяты за основу при разработке аналогичных материалов для бакалавров математического образования.

В качестве средства формирования научного мировоззрения у современных школьников и студентов в процессе обучения математике разными авторами предложены:

- *учебные мировоззренческие ситуации* (М.Ф. Гильмуллин [17], А.Л. Жохов [31], И.Е. Карелина [40], Д.А. Татаринов [90]);

- *система учебных материалов в виде комплекса серий специальных плакатов* (И.В. Егорченко [30]);

- *элективные методологически ориентированные курсы* (М.В. Шабанова [100,101]).

Анкетирование бакалавров математического образования и выпускников 11 классов общеобразовательных школ г. Тольятти свидетельствует о недостаточной сформированности у школьников и студентов историко-философских знаний по математике, аксиоматического метода.

Таким образом, **актуальность** данного исследования определяет возникшее *противоречие* между необходимостью формирования научного мировоззрения бакалавров – будущих учителей математики, – и низким уровнем их подготовленности к формированию в процессе обучения математике научного мировоззрения школьников.

Указанное противоречие позволило сформулировать **проблему исследования:** какие элементы математического содержания и средства, ориентированные на формирование научного мировоззрения студентов, можно включить в предметную или методическую подготовку бакалавров математического образования.

Объект исследования: процесс обучения бакалавров педагогического (математического) образования.

Предмет исследования: методическая система формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

Цель исследования заключается в выявлении элементов математического содержания и средств, ориентированных на формирование научного мировоззрения студентов, которые можно включить в предметную или методическую подготовку бакалавров математического образования.

Гипотеза исследования: математические курсы историко-мировоззренческой направленности и соответствующие им фонды оценочных средств способствуют повышению уровня сформированности научного мировоззрения у бакалавров педагогического образования − будущих учителей математики.

Задачи исследования:

1. Проанализировать различные подходы к понятию научного мировоззрения школьников и студентов.

2. Раскрыть компетентностную характеристику готовности бакалавров по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профиль «Математика и информатика») к формированию научного мировоззрения школьников.

3. Определить содержание, формы, методы и средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

4. Раскрыть роль и место математических курсов историко- мировоззренческой направленности как средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

5. Раскрыть роль аксиоматического метода в математике в формировании научного мировоззрения студентов и школьников.

6. Обосновать роль историко-методологических проектов по математике как средства формирования научного мировоззрения бакалавров.

7. Разработать фонд оценочных средств по формированию научного мировоззрения бакалавров математического образования и апробировать его на практике.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ научной и учебно-методической литературы; систематизация и обобщение ранее проведенных исследований; анализ учебных программ и учебных пособий по геометрии; анкетирование школьников и студентов; самостоятельная работа, констатирующий и поисковый этапы эксперимента.

Основные этапы исследования:

− *9 семестр* (2014/15 уч.г.): Анализ ранее выполненных исследований и опыта работы по теме диссертации; анализ школьных и вузовских учебников, нормативных документов (стандартов, программ).

− *10 семестр* (2014/15 уч.г.): Определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

− *11 семестр* (2015/16 уч.г.): Разработка содержания, форм, методов и средств формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

− *12 семестр* (2015/16 уч.г.): Оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, разработка фонда оценочных средств по формированию научного мировоззрения бакалавров математического образования, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем проблема выявления основного содержания и средств формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования, ориентированных на реализацию целей и задач обучения математике в классах с углубленным изучением предмета решается на основе курсов по выбору историко-мировоззренческой направленности и выполнения студентами историко-методологических математических проектов.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

– проанализированы различные подходы к понятию научного мировоззрения школьников и студентов;

– раскрыта компетентностная характеристика готовности бакалавров по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профиль «Математика и информатика») к формированию научного мировоззрения школьников;

– определены содержание, формы, методы и средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования;

– раскрыта роль аксиоматического метода в математике в формировании научного мировоззрения студентов и школьников;

– раскрыта роль и место математических курсов историко- мировоззренческой направленности как средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

Практическая значимость результатов исследования определяется тем, что в нем разработано методическое обеспечение (целевой, содержательный, организационный и результативно-оценочный компоненты) формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

В диссертации представлены:

– программа курса по выбору «Математика и культура» для студентов указанного направления подготовки;

– методический проект по теме «Аксиоматический метод в математике»;

– элементы фонда оценочных средств по указанным курсам;

– тематика историко-методологических проектов для студентов и школьников.

Достоверность полученных результатов **и обоснованность** выводов обусловлены использованием научных фактов теории и методики обучения математике; анализом педагогической практики и опыта работы; сочетанием теоретических и практических методов исследования.

На защиту выносятся:

1. Содержание курса по выбору «Математика и мировоззрение» («Математика и культура») и его методическое обеспечение (программа курса, методические рекомендации, теоретический и практический материал).

2. Тематика историко-методологических проектов по математике для студентов и школьников.

2. Фонд оценочных средств по формированию научного мировоззрения бакалавров математического образования.

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на:

− научно- методических семинарах преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ (декабрь 2014, июнь 2015, декабрь 2015, май 2016);

− научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (I этап, апрель 2015 г., апрель 2016 г.);

− IV Международной научно-практической конференции «Психология и педагогика в XXI веке» (Новосибирск, 14-15 августа 2015 г.).

Практическая апробация предлагаемых методических рекомендаций, программы курса была осуществлена в период педагогической, производственной и преддипломной практик на базе кафедры алгебры и геометрии Тольяттинского государственного университета.

Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях.

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы (103 источника).

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ НАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ БАКАЛАВРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Одной из задач высшего учебного заведения в современных условиях модернизации системы математического образования в России является формирование *научного мировоззрения* студентов. Традиционно решение этой задачи возлагалось на кафедры истории и философии. Однако наряду с формированием диалектико-материалистического мировоззрения, возникает необходимость и возможность формирования научного мировоззрения средствами математики, обладающей значительным мировоззренческим потенциалом.

Цель данной главы – раскрыть теоретические основы формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

§ 1. Различные подходы к понятию научного мировоззрения школьников и студентов

Понятие *«мировоззрение»* впервые стало употребляться в конце 18-19 вв. представителями немецкой классической философии (И. Кант, Г. Гегель).

Позже в философии мировоззрение стали рассматривать как *систему взглядов человека* на мир в целом, на место отдельных явлений в мире и на свое собственное место в нем.

В философском словаре дается такое определение: «Мировоззрение − совокупность принципов, взглядов и убеждений, определяющих направление деятельности и отношение к действительности отдельного человека, социальной группы, класса или общества в целом [96 , С. 219].

Большинство исследователей выделяют три основных формы мировоззрения: *житейское, религиозное и научное*.

В монографии А.Л. Жохова выделяются два противоположных подхода к понятию «мировоззрение», которые сформировались к концу XX века:1) гуманизм + космизм; 2) крайний эгоцентризм.

К представителям *первого подхода* относятся В.И. Вернадский, М.М. Бахтин, А.Д. Урсул, К. Ясперс и др. Суть подхода состоит в устремленности к созданию единой цивилизации Земли, условий устойчивого состояния Природы и Космоса, способствующего их развитию, а не разрушению; признание самоценности каждого индивида и других социальных субъектов (групп).

Второй подход (Х.Ортега-и-Гассет) – отрицание и неприятие любых ранее сформировавшихся традиций, притязания на неограниченные права, безнравственность и безответственность [31, С.14-15].

Не останавливаясь подробно на этих подходах, отметим роль русского ученого-энциклопедиста В.И. Вернадского (28.02.1863 – 6.01.1945), который в 1900 г. выступил с докладом о научном мировоззрении (позже статья была опубликована в журнале «Вопросы философии и психологии, 1902, № 65).

В понимании ученого, научное мировоззрение – это:

– сложное, своеобразное по своему составу отношение человечества к окружающей действительности;

– продукт исторического развития человечества и науки, подчиняющийся своеобразным законам;

– совокупность духовных сторон человека и человечества [42].

В современных исследованиях большинство авторов [51] рассматривают научное мировоззрение с позиции отдельного человека, сознания человеком самого себя, своего места в мире.

Н.К. Барсукова, Т.И. Шешелова [7] исходят из понимания *научного мировоззрения студентов* как одного из типов мировоззрения личности, в основе которого лежит совокупность обобщенных философских, фундаментально научных и общенаучных знаний о Мире в виде научной картины Мира. Научная картина Мира – это научная модель Мира, соответствующая конкретному историческому уровню знаний общества о реальности (свод знаний). А научное мировоззрение – это сложное образование внутреннего мира личности, которое строится на базе обобщенных научных знаний в виде научной картины Мира и позволяет выработать личностный взгляд на окружающий Мир, как единое, стройное, гармоническое целое.

В качестве *педагогических условий* формирования научного мировоззрения студентов, авторы выделяют следующие:

- разработка и реализация программы формирования основ научного мировоззрения у студентов;

- организация самостоятельной познавательной деятельности студентов, направленной на углубление их научного мировоззрения,

- оценка результативности формирования научного мировоззрения.

М.А. Захарян [34, С.53] под научным мировоззрением студентов понимает «качественную динамическую характеристику личности, включающую в себя совокупность личностных и профессиональных компетенций».

В исследованиях А.Л. Жохова [31-32] , Д.А. Татаринова [90] принято такое определение:

«Мировоззрение – это личностный механизм его (человека) обобщенной ориентировки в себе, в социуме и в мире, т.е. система сформированных у человека обобщенных ориентиров и качеств, позволяющих ему успешно разрешать различные ситуации и условно распределяемых по трем сферам личности (мотивационно-ценностная, деятельностно-волевая, образно-знаниевая)»;

– некое интегральное качество индивида, сформированное под влиянием организованного обществом образовательного процесса.

А.Л. Жоховым построена концепция мировоззренчески направленного обучения математике учащихся и студентов, суть которой состоит в следующем:

1. Основные компоненты мировоззрения: эмоционально-ценностный (потребности, мотивы, стимулы, вера, отношение к труду, учебе, людям, природе, нормы поведения); деятельностно – волевой (опыт, компетенции, умения и навыки, волевые усилия) и интеллектуальный (представления, нормы, компетентность, знания) [31, С.66-67].

2. Основным средством формирования мировоззрения являются учебно-мировоззренческие ситуации (побуждающие ученика занять определенную позицию). Последовательное использование таких ситуаций в обучении математике задает такую стратегию: «выбор – осмысление – переживание – порождение – ответственность» [Там же, С.104].

3. Математико- мировоззренческие знания и умения являются составной частью научного мировоззрения выпускника школы (вуза). Они включают в себя:

- умения распознавать те стороны объектов и явлений действительности, которые поддаются описанию или изучению с помощью математики (количественные отношения, пропорции; геометрические формы, взаимное расположение предметов; порядок, операции, топология, функциональные зависимости, типы преобразований – гомотетия, инверсия и др.);

- умения выделять математические свойства реальных объектов и явлений, остающихся неизменными при их различных преобразованиях – инварианты классов преобразований;

- видеть и выделять в объекте математическую форму и содержание;

- владеть различными языковыми кодами записи информации, использующимися в математической культуре; выражать математическое содержание с помощью различных языковых средств;

- строить математическую модель;

- устанавливать ошибки в рассуждениях с помощью логических правил или контрпримеров [Там же, С.120-121].

На необходимость и важность формирования научного мировоззрения на уроках математики указывали многие известные математики и методисты.

Так, например, Л.Д. Кудрявцев, отмечает, что «Взаимоотношения человека с другими людьми во многом определяются его мировоззрением, отношением к жизни, а в этом не последнюю роль может сыграть его воспитание, полученное в процессе образования» [48, С. 30].

В пособиях для учителя математики Б.В. Гнеденко [21, 22] изложены взгляды автора на *методологическое воспитание на уроках математики.*

Автор отмечает, что:

– под мировоззрением понимают систему взглядов на окружающий нас мир, на возможность его познания человеком, на отношение человека к обществу и общественно полезному труду. Это выработка идеалов и принципов жизни и деятельности, которые человек готов отстаивать в любых условиях и подтверждать свои каждодневным поведением;

– воспитание научного мировоззрения является сложной и ответственной задачей, которая требует длительного и настойчивого внимания.

В качестве *основных средств воспитания* автор называет такие:

1. Беседы по философским вопросам математики, раскрывающие происхождение математических понятий, роль математической абстракции, математических методов в решении прикладных и практических задач.

2. Насыщение самого содержания курса математики, иллюстративных упражнений, домашних заданий тем, что воспитывает мировоззрение (раскрытие длительного этапа формирования математических понятий на примере, например, понятия числа, уравнений и др.).

3. Сближение преподавания математики с физикой, химией, географией и др. предметами.

4. Для воспитания мировоззрения огромную ценность представляет ознакомление учащихся с основными моментами истории математики и математических открытий.

5. Школа должна прививать ребенку веру в неисчерпаемость интеллектуальных сил как человечества в целом, так и каждого человека, в том числе и его собственных. Необходимо открыть мир перед его умственным взором не только с позиций того, что уже сделано и известно, но и позиций того, что еще предстоит сделать, чтобы раскрыть пока не известное. Нужно ему показать, что в мире еще полно неразгаданных тайн, исследовать которые придется его сверстникам и ему самому; именно им предстоит внести свою лепту в дальнейшее познание окружающего нас мира, его сохранение и рациональное использование содержащихся в нем богатств.

6. Окружающий нас мир существует объективно и независимо от нашего сознания; человеческое мышление может его правильно отражать и тем самым познавать существующие в нем закономерности. Знание же этих закономерностей позволяет использовать их в практической деятельности общества.

7. Путей появления нового в математике имеется несколько:

1) решение задач практики в самом широком ее понимании;

2) обобщение ранее полученных результатов, стремление довести их до естественных границ;

3) объединение разрозненных результатов единой идеей и построение на этой базе теории;

4) критический пересмотр содержания математики в целом.

Авторы учебного пособия для студентов педагогических вузов – будущих учителей математики [62, С. 230-231], отмечая необходимость реализации прикладной направленности обучения математике в общеобразовательной школе, выделяют следующие *мировоззренческие* функции школьного курса математики:

– история возникновения и эволюции математических понятий;

– связь математики с дисциплинами школьного цикла;

– причины и законы развития математики (в рамках возможностей школьного курса);

– моделирование реальных объектов;

– решение задач с практическим содержанием;

– алгоритмы и вычисления;

– ЭВМ и их роль в современном обществе.

А.Х. Назиев в автореферате докторской диссертации [68, С. 17-18] представил *концепцию обучения математике*, суть которой сводится к следующему:

1. Математика – это доказательство (рассуждение, которое убеждает).

2. Преподавать математику – значит систематически побуждать учащихся к открытию собственных доказательств.

3. Преподавание математики является незаменимым средством развития умственных способностей, нравственного воспитания и обучения науке человеческой свободы.

Д.А. Татаринов [90] разработал методику обучения математике учащихся 5-6 классов в системе дополнительного образования интегрированному курсу «Математика и окружающий мир», направленную на формирование научного мировоззрения.

Итак, в данном параграфе было рассмотрено понятие «научное мировоззрение». Проанализированы работы ученых математиков и методистов, раскрывающие роль математики в формировании научного мировоззрения школьников и студентов.

Как было отмечено во введении магистерской диссертации, в основу данного исследования положены работы И.Ф. Тесленко [92], Т.А. Ивановой [91], в которых раскрывается *сущность научного мировоззрения* у учащихся в процессе обучения математике:

1. *Существенными признаками научного мировоззрения* являются:

а) наличие обобщенной, научно обоснованной системы представлений, мыслей, взглядов на природу, общество и мышление;

б) убежденность в истинности этих взглядов и восприятие их как своих собственных;

в) руководствование ими во всей своей деятельности как принципами для принятия решения и своего поведения, как опорой мышления, стремлений.

2. Усвоение учащимися математических знаний, само по себе, автоматически не является определяющим в формировании мировоззрения.

Необходимо в математических понятиях и утверждениях систематически выделять мировоззренческие аспекты и обеспечивать условия для осознания этих аспектов учащимися.

3. Ознакомление школьников с математикой как определенным методом миропознания, формирование понимания диалектической взаимосвязи математики и действительности, представление о предмете и методе математики, его отличиях от методов естественных и гуманитарных наук, о математическом моделировании, владение математическим языком, понимание сущности и роли в познании действительности ведущих математических понятий способствуют миропониманию, вносят существенный вклад в формирование общей культуры личности.

Таким образом, актуальным в рамках данной магистерской диссертации становится изучение нормативных документов и определение компетентностной характеристики готовности бакалавров математического образования к формированию научного мировоззрения школьников.

§ 2. Компетентностная характеристика готовности бакалавров математического образования к формированию научного мировоззрения школьников

В данной работе проанализируем те компетенции, в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профиль «Математика и информатика») [99], которые, на наш взгляд, раскрывают готовность выпускника бакалавриата к формированию научного мировоззрения учащихся в процессе обучения математике в школе (Табл.1).

При этом мы будем исходить из соответствия выделенных компетенций определенным трудовым функциям учителя математики. Такой подход начал разрабатываться в ряде исследований. Та, например, авторы статьи [15] на основе анализа трудовых действий, сформулированных в Профессиональном стандарте Педагога [81] показывают, что 6 из 10 трудовых действий, относящихся к обучению, могут быть сформированы на основе историко-методологической деятельности учителя математики.

В данном исследовании рассмотрены, с одной стороны, трудовые функции учителя математики с учетом тех компетенций бакалавра педагогического образования, которые формируются в результате изучения куров по выбору «*Математика и культура*» или *«История математических идей и открытий»*, включенных в ОПОП и учебные планы подготовки бакалавров в Тольяттинском государственном университете (набор 2011 г., группа МИб-1101 и набор 2014 г., группа МИб- 1401).

С другой стороны, будем ориентироваться на *включение методологического раздела « Математика в историческом развитии»* в школьный курс математики, направленный на формирования представлений о математике как части человеческой культуры, для общего развития школьников, для создания культурно-исторической среды обучения [79].

Таблица 1

Код компетенции	Наименование компетенции	Трудовые действия учителя математики
ОК-1	способность использовать основы философских и социогуманитарных знаний для формирования научного мировоззрения	Применяет в процессе обучения математике основы философских и социогуманитарных знаний, знание методологии и истории математики для формирования научного мировоззрения школьников
ОК- 3	способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Применяет в процессе обучения математике естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве. Реализует межпредметные связи школьного курса математики, физики, биологии и др.
ПК-1	готовность реализовывать образовательные программы по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Реализует образовательные программы по математике (5-11 классы) в соответствии с требованиями ФГОС основного общего образования и полного (среднего) общего образования и раздела школьной программы «Математика в историческом развитии»
ПК-3	способность решать задачи воспитания и духовно-нравственного развития обучающихся в учебной и внеучебной деятельности	Решает задачи воспитания и духовно-нравственного развития обучающихся в учебной и внеучебной деятельности при обучении математике, используя историю математики, историю научных идей и открытий в математике в соответствии с возрастными особенностями учащихся.
ПК-8	способность проектировать образовательные программы по математике	Проектирует программы по математике с учетом требований ФГОС основного общего образования (5-9 классы) и полного (среднего) общего образования (10-11 кл.) и раздела школьной программы «Математика в историческом развитии»
ПК-14	способность разрабатывать и реализовывать культурно-просветительские программы	Проектирует программы по математике для внеклассной работы или дополнительного образования с учетом требований раздела программы «Математика в историческом развитии»

В примерной основной образовательной программе основного общего образования [79] к *предметным результатам* освоения математики на базовом и углубленном уровнях по разделу *«История математики»* отнесены следующие (Табл. 2).

Таблица 2

Классы	для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом уровне	для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углубленном уровнях
5-6 классы **7-9 классы**	- описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки; - знать примеры математических открытий и их авторов, в связи с отечественной и всемирной историей.	- *характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей.*
7-9 классы	- понимать роль математики в развитии России.	- *понимать математику как строго организованную систему научных знаний, в частности владеть представлениями об аксиоматическом построении геометрии и первичными представлениями о неевклидовых геометриях;* - *рассматривать математику в контексте истории развития цивилизации и истории развития науки, понимать роль математики в развитии России.*

В результате изучения данного раздела учащиеся должны:

- понимать математику как строго организованную систему научных знаний, в частности владеть представлениями об аксиоматическом построении геометрии и первичными представлениями о неевклидовых геометриях;

- рассматривать математику в контексте истории развития цивилизации и истории развития науки, понимать роль математики в развитии России.

Отметим также, что у студентов указанного профиля должны быть сформированы *знания аксиоматического метода*, как одного из основных методов современной математики.

Содержание спецкурса «Аксиоматический метод в математике» подробно представлено во второй главе диссертации.

Выберем те компетенции, которые могут быть сформированы в результате изучения курса «Аксиоматический метод в математике» и раскроем их содержание на трех уровнях (Табл.3-5):

- способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-6);

- готовность реализовывать образовательные программы по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов (ПК-1);

- способность проектировать образовательные программы (ПК-8).

Таблица 3

Наименование компетенции	Уровни	Описание показателей
способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-6)		
Знать: - историю развития аксиоматического метода в математике; - имена ученых-математиков, внесших вклад в развитие аксиоматического метода в математике; - основные источники пополнения знаний по теме	Продвинутый уровень	- проявляет интерес к изучению истории математики; - знает основную и дополнительную литературу по теме; -знает историю развития аксиоматического метода в математике; - имена ученых-математиков, внесших вклад в развитие аксиоматического метода в математике.
	Базовый уровень	- знает краткую историю развития аксиоматического метода в математике; - имеет представления о вкладе Евклида, Гильберта, Лобачевского в развитие системы аксиом курса геометрии; - знает основные источники пополнения знаний по теме.
	Пороговый уровень	- имеет поверхностные представления об источниках пополнения знаний по теме; - имеет некоторое представление об аксиоматическом методе и истории его развития.
Уметь: - работать с различными источниками пополнения знаний	Продвинутый уровень	- осознанно работает с различными источниками пополнения знаний; - целенаправленно осуществляет поиск дополнительной литературы по теме
	Базовый уровень	- грамотно использует основные источники по теме
	Пороговый уровень	-демонстрирует неумение работать с различными источниками пополнения знаний по теме.
Владеть: - методами и приемами самообразования и самоорганизации	Продвинутый уровень	грамотно, доступно и корректно излагает в устной и письменной форме выполнение домашних самостоятельных заданий по теме; при решении задач и доказательстве теорем по теме демонстрирует владение методами и приемами самоорганизации и самообразования.
	Базовый уровень	демонстрирует основные методы и приемы самоорганизации и самообразования при выполнении домашних самостоятельных заданий по теме
	Пороговый уровень	испытывает затруднения в применении методов и приемов самоорганизации и самообразовании.

Таблица 4

<table>
<tr><th>Наименование компетенции</th><th>Уровни</th><th>Описание показателей</th></tr>
<tr><td colspan="3">готовность реализовывать образовательные программы по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов (ПК-1)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Знать: - понятие аксиоматического метода, его цели в обучении математике;
- понятие аксиомы, требования к системе аксиом;
- основные аксиомы школьного курса геометрии;
- следствия из аксиом;
- соответствующую терминологию и обозначения.</td><td>Продвинутый уровень</td><td>- раскрывает осознанно содержание и сущность понятия аксиоматического метода, его цели и задачи в обучении математике;
- грамотно и уверенно использует основные понятия (аксиома, теорема, следствие); их обозначения и соответствующую символику.</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень</td><td>-знает основные понятия, используемые в школьном курсе геометрии: аксиома, теорема, следствие;
- знает цели и задачи обучения аксиоматическому методу в школе;
-знает школьную символику и обозначения.</td></tr>
<tr><td>Пороговый уровень</td><td>- имеет представления об аксиоматическом методе, его целях и задачах в обучении математике;
- имеет представления об основных понятиях и аксиомах школьного курса геометрии.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Уметь: - решать задачи и доказывать теоремы с использованием аксиом школьного курса геометрии;
- наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь в аксиомах, теоремах, задачах;
- использовать соответствующую терминологию и обозначения.</td><td>Продвинутый уровень</td><td>- уверенно решает задачи и доказывает теоремы с использованием аксиом школьного курса геометрии;
- правильно изображает фигуры, грамотно использует терминологию и обозначения.</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень</td><td>- решает опорные задачи и доказывает теоремы по образцу с использованием аксиом школьного курса геометрии;
- умеет изобразить простейшие фигуры, используя основную символику;
- допускает неточности в оформлении решения задач;</td></tr>
<tr><td>Пороговый уровень</td><td>- испытывает затруднения:
- при решении задач и доказательстве теорем с использованием аксиом школьного курса геометрии; - в наглядном представлении, изображении фигур; - допускает ошибки и неточности в оформлении решения задач.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Владеть: - различными методами и приемами решения задач и доказательства теорем на основе системы аксиом;
- соответствующей терминологией и обозначениями.</td><td>Продвинутый уровень</td><td>- демонстрирует высокий уровень владения различными методами и приемами решения задач и доказательства теорем на основе системы аксиом</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень</td><td>- демонстрирует базовый уровень владения различными методами и приемами решения задач и доказательства теорем на основе системы аксиом</td></tr>
<tr><td>Пороговый уровень</td><td>- испытывает затруднения в применении тех или иных методов и приемов решения задач и доказательстве теорем на основе системы аксиом;
- допускает ошибки в используемых обозначениях и путается в терминологии.</td></tr>
</table>

Таблица 5

Наименование компетенции	Уровни	Описание показателей
способность проектировать образовательные программы (ПК-8)		
Знать: - содержание программы по геометрии в 7-11 классах; - требования к разработке программ для школьников; - систему аксиом школьного курса геометрии	Продвинутый уровень	на высоком уровне демонстрирует знание: - содержания программы по геометрии в 7-11 классах; - требования к разработке программ для школьников; - систему аксиом школьного курса геометрии.
	Базовый уровень	на базовом уровне демонстрирует знание: - содержания программы по геометрии в 7-11 классах; - требования к разработке программ для школьников; - систему аксиом школьного курса геометрии.
	Пороговый уровень	имеет представления: - о содержания программы по геометрии в 7-11 классах; - о требования к разработке программ для школьников; - об аксиомах школьного курса геометрии.
Уметь: проектировать образовательные программы по математике для школьников	Продвинутый уровень	- на высоком уровне демонстрирует умение проектировать образовательные программы по математике для школьников, в том числе, включающие тему «Аксиоматический метод в математике»;
	Базовый уровень	- на базовом уровне демонстрирует умение проектировать образовательные программы по математике для школьников, в том числе, включающие тему «Аксиоматический метод в математике»;
	Пороговый уровень	- испытывает затруднения при проектировании образовательных программ по математике для школьников;
Владеть: технологией проектирования образовательных программ по математике для школьников	Продвинутый уровень	- демонстрирует высокий уровень владения технологией проектирования образовательных программ по математике для школьников;
	Базовый уровень	- демонстрирует базовый уровень владения технологией проектирования образовательных программ по математике для школьников;
	Пороговый уровень	- демонстрирует затруднения или ошибки, свидетельствующие о низком уровне владения технологией проектирования образовательных программ по математике для школьников;

Выделенные компетенции и описание показателей, характеризующих их, будут учтены нами при разработке фонда оценочных средств (Глава II).

Основные выводы по первой главе

В первой главе «Теоретические основы формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования» представлено решение первых трех задач исследования, а именно:

– проанализированы различные подходы к понятию научного мировоззрения школьников и студентов;

– раскрыта компетентностная характеристика готовности бакалавров по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профиль «Математика и информатика») к формированию научного мировоззрения школьников;

– определены содержание, формы, методы и средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

Основными выводами данной главы являются следующие:

1. Формирование научного мировоззрения бакалавров и школьников определено в федеральных государственных образовательных стандартах в качестве одной из задач.

2. Научное мировоззрение студента (школьника) характеризует

а) наличие обобщенной, научно обоснованной системы представлений, мыслей, взглядов на природу, общество и мышление;

б) убежденность в истинности этих взглядов и восприятие их как своих собственных;

в) руководствование ими во всей своей деятельности как принципами для принятия решения и своего поведения, как опорой мышления, стремлений.

ГЛАВА II. СРЕДСТВА ФОРМИРОВАНИЯ НАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ БАКАЛАВРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Математические курсы историко-мировоззренческой направленности как средство формирования научного мировоззрения бакалавров педагогического профиля

В исследованиях ученых-методистов Ю.А. Дробышева [28], М.Ф. Гильмуллина [15], Е.И. Саниной [85], Тестова В.А. [93], Р.А. Утеевой [95], М.В. Шабановой [100] и др. важное место в формировании научного мировоззрения школьников и студентов отводится математическим курсам *историко-методологической направленности*.

В статье В.И. Варанкиной [11] раскрывается направленность, структура и содержание учебной дисциплины для магистрантов-математиков *«История и методология математики»*.

Представленный курс служит основой для формирования научного мировоззрения будущих математиков-исследователей и учителей математики, расширяет их кругозор, демонстрируя широкую востребованность математических знаний. Спецификой построения курса является его опора на региональный компонент. Среди используемой литературы много книг и статей, авторами которых являются кировские математики. Одна из тем целиком посвящена истории развития высшего математического образования в Кировской области.

Авторский курс «*Воспитательные аспекты истории математики»* Ю.А. Дробышева [28] направлен на формирование историко- математической компетентности будущего учителя математики. Его содержание, рассчитанное на 32 ч. аудиторных занятий, включает в себя такие вопросы:

– история математики как учебный предмет и область научного знания;

– компоненты истории математики и их использование в учебно-воспитательном процессе;

– понятие и структура персоналистического компонента истории математики;

– формы и методы его использования в нравственном воспитании и при формировании научного мировоззрения; краеведческий материал по истории математики.

Авторы статьи [85] отмечают влияние историко-методологического компонента на формирование научного мировоззрения студентов гуманитариев и предлагают включить в содержание следующие вопросы:

1. Математика как часть общечеловеческой культуры.
2. Взгляды на математику выдающихся деятелей прошлого и настоящего.
3. Аксиоматический подход к построению научных теорий.
4. Основные этапы становления современной математики.

В качестве самостоятельной работы студентам предлагаются сообщения и рефераты по темам:

1. Исторический очерк возникновения и развития математики.
2. Значение «Начал» Евклида для культуры в целом.
3. Неевклидовы геометрии.

М.Э. Григорян [24], опираясь на исследования Т.А. Ивановой, предлагает методику включения элементов истории математики в процессе обучения студентов теории вероятностей. Автор выделил *пять* основных этапов развития теории вероятностей и рассмотрел на каждом этапе *основные понятия, вклад ученых-математиков в развитии науки и источники становления и развития.*

Автором сделан вывод о том, что основными источниками развития теории вероятностей являются запросы практики.

Современный этап развития науки связан с внутренними потребностями, как самой математики, так и других наук. Отмечается большая роль ученых-математиков современного периода С.Н. Бернштейна, А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина, Р. Фишера, Д.фон Неймана.

В статье В.М. Дрибан [27] показано, как можно построить вводную лекцию по высшей математике для студентов, чтобы она стала для них первым этапом в формировании научного мировоззрения и вызвала интерес к изучению высшей математики. Основная идея автора сводится к раскрытию мировоззренческого потенциала читаемых студентам дисциплин: аналитическая геометрия, математический анализ и др.

Итак, на основы вышесказанного, можно сделать вывод о том, что *математические курсы историко-мировоззренческой направленности* рассматриваются авторами исследований как *средство формирования научного мировоззрения* обучающихся.

В учебном плане по направлению подготовки бакалавров профиля «Математика и информатика» в рамках дисциплин по выбору предусмотрен курс *«Математика и культура»*, который также можно предложить старшеклассникам в качестве элективного курса *«Мировоззрение и математика»*.

Пояснительная записка

Программа курса по выбору «*Математика и культура» (*элективного курса *«Мировоззрение и математика»)* предназначена для бакалавров математического образования (учащихся 10-11 общеобразовательных и профильных классов).

Она направлена на формирование научного мировоззрения учащихся за счет расширения, углубления, обобщения знаний и умений учащихся по математике.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

- в практике обучения математике в школе преобладают элективные курсы, связанные с подготовкой школьников к решению задач повышенной трудности, аналогичных задачам ЕГЭ (базовый или профильный уровень);

- в школьном курсе математики недостаточно внимания уделяется вопросам истории и философии математики.

Цель элективного курса: формирование у студентов (учащихся) научного мировоззрения.

Задачи элективного курса:

- формирование у студентов (учащихся) морально-этических качеств личности;

- широкий показ студентам (учащимся) роли математики в развитии человечества, влияния ее идей на развитие науки, техники, культуры, искусства;

- развитие мыслительных, творческих способностей студентов (учащихся);

- знакомство студентов (учащихся) с историей математических идей и открытий, показ роли видных ученых математиков.

Программа элективного курса рассчитана на 34 (1 ч. в неделю) часов в одном полугодии (Табл. 6).

Форма занятий: лекции, уроки-практикумы, уроки-семинары, урок-конференция.

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- знать историю и вклад ученых в создание того или иного раздела математики;

- уметь решать типовые задачи в рамках курса;

- уметь самостоятельно изучать дополнительную литературу и подготовить проект по теме.

Таблица 6

Учебно-тематическое планирование (34 ч.)

№	Содержание темы	Кол-во часов	
		лекций	Практ.
1	Математика как феномен человеческой культуры. Математика и философия. Математика и религия. Математика и искусство.	2	0
II	**Основные периоды развития математики**		
1	*Период зарождения математики.*	2	2
2	*Период элементарной математики*	2	2
3	*Период математики переменных величин*	2	2
4	*Период современной математики*	2	2
III	Концепция строения математики на основе теории множеств. *Простейшие понятия теории множеств. Г. Кантор. Проблема континуума*	2	2
IV	**Неевклидовы геометрии**. К.Ф. Гаусс, Н. И Лобачевский, Я. Бояи. Аксиоматическое построение геометрии.	2	2
V	**Математика XX века**. *Математические идеи и открытия в 20 веке. Проблемы Гильберта. Решение великой теоремы Ферма. Гипотеза Пуанкаре. Нерешенные проблемы современной математики: проблемы о совершенных числах, проблемы простых чисел; проблема близнецов; проблема Гольдбаха*	2	2
	Защита проектов		**4**
		16	**18**

Основной формой подведения итогов реализации данной образовательной программы курса является защита студентами (учащимися) историко-методологического проекта.

Новизна программы элективного курса состоит в том, что она знакомит студентов (учащихся) с историей развития математики в неразрывной связи с развитием человечества и его культуры.

Содержание материала, представленного в программе элективного курса, в курсе математики средней школы не изучалось.

Данная программа может быть использована в общеобразовательных классах и в классах с углубленным или профильным изучением математики.

Содержание и методическое обеспечение элективного курса

Раздел 1. Математика как феномен человеческой культуры. Математика и философия. Математика и религия. Математика и искусство

Основная цель - раскрыть студентам (учащимся) роль математики как феномена человеческой культуры.

В результате изучения данного раздела обучающиеся должны понимать, что математика является частью культуры.

Рекомендуемая литература к разделу 1:

1. *Александров П.* Математика и человеческая культура //Квант. – 1982. – №8. С. 2-3.

2. *Александров А.Д.* Математика и диалектика // Математика в школе. 1972. – №1. – С.3-9.

3. *Арнольд В*. Для чего мы изучаем математику? //Квант. – 1993. – №1. С. 5-15.

4. *Болтянский В.Г.* Математическая культура и эстетика //Математика в школе. – 1982. – № 2.

5. Зачем нужна математика //Квант. – 1988.-№5. С. 44.

6. *Мирошниченко Н.С*. Практическое применение математики при изучении явлений окружающего мира //Математика в школе. – 2011. – № 10. – С. 45-47.

7. «Математика в человеческом измерении» и др. новости (обзор Интернет-ресурсов) //Математика в школе. 2014. № 4. С. 10-13.

8. *Яглом И.* Что такое математика. //Квант. – 1992.-№9. С. 3 - 8.

Раздел 2. Основные периоды развития математики

Основная цель - познакомить студентов (учащихся) с основными периодами в развитии математики (по периодизации А.Н. Колмогорова) и основными достижениями на каждом из них.

В результате изучения данного раздела учащиеся должны знать основные периоды в развитии математики, основные идеи и открытия, роль тех или иных математиков на каждом из периодов.

Математика (в переводе с греческого mathema – знание, наука) - наука, возникшая в глубокой древности, по праву названная, великим немецким математиком К.Ф. Гауссом, - «Царицей наук».

Математика – это наука, история которой насчитывает более 3000 лет, это множество фактов и открытий, не потерявших ценности и значения в современном мире. *«Любая наука могла бы гордиться такой историей, как история математики, ибо она менее всего история ошибок»*, - пишет И.Г. Зенкевич [36, С.16].

Определяя сущность современной математики, Д.Д. Кудрявцев отмечает: *«Характерной чертой математических истин является их абсолютный и вечный характер, следовательно, они не меняются и не могут измениться с развитием наших знаний. Так, за последние две тысячи лет наши представления об окружающем нас мире и об управляющих им закономерностях претерпели существенные изменения, а, например, теорема Пифагора осталась и останется всегда такой же, какой она была в Древней Греции…»* [49, С. 81].

По классификации Э.Т. Белла[1] история математики насчитывает четыре великих периода: *вавилонский, греческий, ньютоновский* (около 1700 г) и *современный* (начавшийся в 1800 г), названный многими историками *«золотым веком математики»*. Именно 19 век внес в математику такие знания, которые по объему превосходят примерно в пять раз знания, добытые за всю предыдущую историю человечества [8].

[1] Эрик Темпл Белл родился в Шотландии, учился в Стенфордском университете, работал профессором в Вашингтонском, Чикагском университетах, занимал посты Президента Американской математической ассоциации, был член Академии наук США.

В современной математике с 1938 г. пользуются колмогоровской [2] периодизацией истории развития математики: *зарождение* математики (Египет, Вавилон до 6 в. до н.э.); *период элементарной математики* (с 6- 5 вв. до н.э. - Древняя Греция, римская эпоха, Китай, Индия, Средняя Азия и Ближний Восток, Западная Европа до 16 в., Россия до 18 в.) - *период математики постоянных* величин; *период математики переменных* величин (17-18 вв.) и *период современной математики* (19-20 вв.) [43].

Многовековая история математики связана с именами тысяч математиков. Например, в пособии [20] приведено более 500 имен математиков.

Любой образованный и культурный человек должен знать хотя бы несколько сотен имен и связанных с ними идей и открытий. *«Трудно оспорить, что любой человек достоин того, чтобы он с раннего детства научился ценить материальные и духовные достижения человечества… Умение ценить интеллектуальные «созданья» также должно быть присуще любому человеку»*, - писал В.М. Тихомиров в статье [94].

Математика, математические идеи и открытия являются одним из лучших образцов для знакомства школьников с историей культуры и философией математики, отмечает Р.А. Утеева [95].

Проследить путь прохождения идеи до научного открытия – значит, изучить историю нескольких веков, историю борьбы и столкновения разных взглядов, историю поражений и побед.

Рекомендуемая литература к разделу 2:

1. Белл Э.Т. Творцы математики: Предшественники современной математики. Пособие для учителей. Пер. с анг. В.Н. Тростникова, С.Н. Киро /Под ред. и с доп. С.Н.Киро. –М.: Просвещение, 1979.- 256 с.

2. Зенкевич И.Г. Эстетика урока математики: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981. -79 с.

[2] Андрей Николаевич Колмогоров – крупнейший отечественный математик 20 в., ученый с мировым именем.

3. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии /Под ред. В.А. Успенского. –М.: Наука., 1991. – 224 с.

4. Кудрявцев Д.Д. Мысли о современной математике и методике ее преподавания Избранные труды. Т.3. – М.: Физматлит, 2008.- 434 с.

5. Тихомиров В.М. Геометрия в современной математике и математическом образовании // Математика в школе. – 1993. - №4. С. 7.

6. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: Наука, 1981. -192 с. (Биб-ка «Квант». Вып. 14).

7. Глейзер Г.И. История математики в школе.9-10 кл.: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983.-351 с.

Раздел III. Концепция строения математики на основе теории множеств. Простейшие понятия теории множеств. Г. Кантор. Проблема континуума

Основная цель - раскрыть студентам (учащимся) роль теории множеств и ее создателя – Кантора в математике.

В результате изучения данного раздела студенты (учащиеся) должны знать:

- основные понятия теории множеств;
- понимать идею построения математики на основе теории множеств;
- иметь представления о проблеме континуума.

Рекомендуемая литература к разделу 3:

1. Гиндикин С. Сколько существует операций над множествами?//Квант. – 1973. №7. С.2-10.

2. Мадер В. Диаграммы Эйлера-Венна // Квант. -1991. № 12. С. 35-38.

3. Тихомиров В. Георг Кантор //Квант. -1995, №5. С. 3-7.

Раздел IV. Неевклидовы геометрии. К.Ф. Гаусс, Н. И Лобачевский, Я. Бояи. Аксиоматическое построение геометрии. Проблема пятого постулата.

Основная цель - раскрыть студентам (учащимся) роль К.Ф. Гаусса, Н. И Лобачевского, Я. Бояи в создании неевклидовой геометрии.

В результате изучения данного раздела студенты (учащиеся) должны иметь представления о неевклидовой геометрии. Основные знания и умения по данному разделу сформулированы в теме «Аксиоматический метод в математике», которая представлена в следующем параграфе.

Рекомендуемая литература к разделу 4:

1. Александров П. Николай Иванович Лобачевский //Квант. -1976, №2. С. 4-15.

2. Лобачевский Н., Геометрические исследования по теории параллельных линий //Квант. -1992, №12. С.3-10.

3. Норден А. Великое открытие Лобачевского //Квант. -1976, №2. С. 16-21.

4. Розенфельд Б., Халамайзер А. Творец новой геометрии //Квант. -1972, №12. С. 6-15.

5. Смилга В. Как начиналась геометрия //Квант. -1992, №2. С. 11-17.

6. Соловьев Ю. Николай Иванович Лобачевский //Квант.- 1992, №11. С. 2-9.

7. Тихомиров В.М. От «Начал» Евклида до «Оснований геометрии» Гильберта и «Геометрии» Колмогорова //Математика в школе. 2015. № 1. С. 3-8.

8. Ширшов А. Модель Кэли-Клейна геометрии Лобачевского //Квант. -1976, №3. С. 18-24.

Раздел V. Математика XX века

Основная цель - познакомить учащихся с достижениями в математике XX века: *Проблемы Гильберта. Решение великой теоремы Ферма. Гипотеза Пуанкаре. Нерешенные проблемы современной математики: проблемы о со-*

вершенных числах, проблемы простых чисел; проблема близнецов; проблема Гольдбаха.

В результате изучения данного раздела студенты (учащиеся) должны понимать, что математика продолжает развиваться. Благодаря математическим идеям, методам происходят важнейшие открытия в других науках.

Рекомендуемая литература к разделу 5:

1. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. - М.: МЦНМО, 2000. - 32 с.

2. Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математики. Пер. с фр. — М.: Иностранная литература, 1965. — С. 245-259.

3.Вейль Г. Математическое мышление /Под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина; пер. с анг. и нем. — М. Наука, 1989. 400 с.

4. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. - М.: Просвещение, 1985. 192 с.

5. Колмогоров, А.Н. Математика наука и профессия. -М.: Наука, 1988. - 288 с.

6. Колягин Ю.М. О прикладной и практической направленности обучения математике / Ю.М. Колягин, В.В. Пикан // Математика в школе. -1985. -№ 6. С. 27-32.

7. Кудрявцев, Л.Д. Современная математика и ее преподавание. - М.: Наука, 1980. - 144 с.

8. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы /Пер. с англ. И.Н. Веселовского- М., 1967. 152 с.

9. Пуанкаре, А. О науке /Пер. с франц.; Под ред. Л.С. Понтрягина. М.: Наука, 1983.-560 с.

10. Рузавин Г.И. Математизация научного знания.- М.: Мысль, 1984. - 207 с.

§2. Проектирование темы «Аксиоматический метод в математике» для бакалавров математического образования

Понятие аксиоматического метода является одним из основных понятий и методов в математике.

Основная цель изучения аксиоматического метода в школьном и вузовском обучении математике связана с *необходимостью формирования научного мировоззрения школьников и студентов*.

«Каждый учебный предмет, в силу своей специфики, вносит свой вклад в формирование научной, обобщенной картины мира. Она не может быть сформирована без осознания школьниками особенностей математического метода познания действительности…», - отмечает Т.А. Иванова [91, С.35].

Ю.М. Колягин и В.А. Оганесян, в качестве определения аксиоматического метода приводят определение со ссылкой на БСЭ:

«аксиоматический метод – способ построения научной теории, при котором в ее основу кладутся некоторые исходные положения (суждения) – *аксиомы* и *постулаты*, из которых все остальные утверждения этой теории (*теоремы*) должны выводиться чисто логическим путем, посредством *доказательств.* Назначение аксиоматического метода состоит в ограничении произвола при принятии научных суждений в качестве истин данной теории [63, С. 403].

В школьном и вузовском обучении аксиоматический метод выступает как «метод изложения математического материала в виде цепочки последовательных дедуктивных умозаключений, опирающихся на некоторые основные понятия и положения и проводимых на основе определенных законов логики» [Там же, С. 417].

В теории и методике обучения математике А.А. Столяр [61, С.145-146] выделил три аспекта проблемы отражения аксиоматического метода в школьном обучении математике:

- аксиоматический метод как *способ построения* школьного курса геометрии;

- аксиоматический метод как *предмет специального изучения* на конкретно выбранном материале с целью ознакомления школьников с современным его пониманием;

- аксиоматический метод как *метод обучения математике*.

Обозначенная выше *первая проблема* находит в той или иной степени отражение в школьных учебниках геометрии [2,3,6,76-78].

Вторая и третья проблемы в настоящее время в силу разных причин (нехватка времени, отсутствие разработанных методических материалов для учителя и др.) недостаточно решаются даже в вузовском обучении математике бакалавров (учителей) математического образования.

А.А. Столяр [61, С. 145-146] отмечает, что аксиоматический метод, свойственный математике, может быть адаптирован как метод обучения математике, если исходить из принципа активности учения, т.е. обучать школьников локальной аксиоматизации – посильному привлечению учащихся к самому построению аксиоматической теории в рамках небольшой темы (построение «маленькой теории»).

В статье В.А. Далингера [25] раскрывается возможность применения локальной аксиоматизации при проектировании элективных курсов по геометрии.

Е.И. Лященко [57 , С. 125-131] в *обучении аксиоматическому методу* выделяет три этапа:

1 этап: направлен на формирование общих приемов поиска и проведения доказательства, которые затем будут использоваться на всех последующих этапах.

Этот этап необходимо осуществлять во время изучения первых тем школьного курса геометрии.

2 этап: включает освоение специфических приемов поиска и проведения доказательства утверждений в зависимости от конкретного их содержания и собственно математических методов, используемых при доказательстве утверждений. Он осуществляется на протяжении изучения всего курса математики.

3 этап: включает в себя раскрытие сущности построения школьного предмета на основе аксиоматической теории. Осмыслить этот этап понимания аксиоматического метода можно либо в завершении курса планиметрии, либо при раскрытии логического построения курса стереометрии.

Можно выделить *4 этап*: осмысление аксиоматического метода как способа построения математической теории и метода обучения математике в специальном курсе для бакалавров математического образования.

Спроектируем изучение темы «Аксиоматический метод в математике» для:

- математического профиля в рамках уроков геометрии в 11 классах;

- бакалавров по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, профиль «Математика и информатика» в рамках изучения специального курса или встроенного в раздел «Основания геометрии» курса «Геометрия».

Прежде всего, выполним методический анализ теоретического и практического содержания по теме «Аксиоматический метод в школьном курсе математики».

Базовые (известные из школьного курса планиметрии) знания:

– неопределяемые понятия данной теории;

– неопределяемые отношения данной теории;

– понятие аксиомы;

– понятие теоремы;

– понятие «доказательство теорем»;

– аксиомы планиметрии.

Новые (вводимые) в курсе стереометрии 10 класса знания:

– аксиомы стереометрии;

– следствия из аксиом стереометрии.

Новые (вводимые) в вузовском курсе знания:

– понятие аксиоматического метода;

– понятие системы аксиом;

– основные требования к системе аксиом;

– интерпретация (модель) аксиоматической теории.

Анализ содержания темы «Аксиоматический метод» в учебниках геометрии 10-11 классов представлен в Таблице 7.

Анализ содержания учебников геометрии для 10-11 классов показал, что для реализации методического проекта по выбранной теме могут быть использованы учебники А.Д. Александрова, Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Выбор указанных учебников обоснован *следующими причинами*:

- они входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждений;

- учебники утверждены для углубленного уровня изучения математики в 10-11 классах;

- в них достаточно теоретического и задачного материала по теме.

В УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [76, 77,78], в отличие от других проанализированных выше учебников геометрии для старших классов, в тематическом планировании указана тематика проектов для учащихся и предусмотрена графическая работа № 1 «Следствия из аксиом стереометрии» (в качестве домашнего задания), а также контрольная работа №1.

Особенностью также является подборка *задач на применение аксиом стереометрии и их следствий* с использованием моделей и изображения куба, параллелепипеда, пирамиды с обязательным сопровождением решения аргументированными объяснениями.

Таблица 7

Анализ содержания темы «Аксиоматический метод» в учебниках геометрии 10-11 классов

Авторы учебника	Класс	Название глав, параграфов	Часов
А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик	10	Гл.1. Основания стереометрии 1. Аксиомы стереометрии (и повторение основных теорем о треугольниках). 6. Об аксиомах Дополнительный материал. Аксиоматика евклидовой планиметрии	6 1
	11	Гл.X. Современная геометрия и теория относительности .Геометрия на поверхности, геометрия Лобачевского. Основания геометрии.	2
Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.	10	Введение. Предмет стереометрии. Основные понятия и аксиомы стереометрии. Первые следствия из аксиом.	3
А.В. Погорелов	10	1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия	4 -5
Е.В. Потоскуев, Л. И. Звавич	10	Гл.1. Введение стереометрию	8
	11	Дополнительный материал в виде очерка «Об аксиоматическим построении геометрии»	-
И.М.Смирнова, В.А. Смирнов	10	Основные понятия и аксиомы стереометрии Следствия из аксиом стереометрии	4- 6

Кроме того, в учебнике 11 класса (в дополнении к основным главам) имеется очерк «Об аксиоматическим построении геометрии», состоящий из двух тем:

1. О построении трехмерной евклидовой геометрии по Гильберту.

2. Об обосновании трехмерной евклидовой геометрии по Вейлю.

В учебнике А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика [2,3] первая глава называется «Основания геометрии», в которой раскрываются аксиомы стереометрии. Заключительная глава посвящена обсуждению современной геометрии, в том числе геометрии Лобачевского.

При разработке данного методического проекта нами также были использованы учебно-методические материалы авторов И.М. Смирновой и В.А. Смирнова [89].

Обратимся к анализу практического опыта изучения темы на основе опубликованных статей и учебно-методических пособий.

В.Н. Блинков, опираясь на исследования А.А. Столяра [9], рассматривает формирование аксиоматического метода в школьном курсе геометрии, исходя из *пяти уровней развития геометрического мышления*.

Автор отмечает, что лишь на *четвертом и пятом* уровнях возможно формирование содержательной аксиоматической теории и аксиоматического метода. На основе этого, автор выделяет два взаимосвязанных аспекта проблемы обучения аксиоматическому методу в школе:

- аксиоматический метод как способ организации учебного материала;
- аксиоматический метод как метод эвристического познания.

Выделены также компоненты аксиоматического метода как способа организации учебного материала, соответствующие уровням:

I уровень:

1) понимание необходимости обоснования различных фактов, стремление учащихся логически обосновать правильность предложений и наблюдений;

2) умения выделять существенные свойства понятий;

3) умения выполнять дедуктивные выводы.

II уровень:

4) понимание того факта, что из одних предложений, пользуясь только рассуждениями, можно выводить новые предложения;

5) понимание необходимости определений;

6) понимание необходимости применения эвристических приемов.

III уровень:

7) понимание необходимости выделять идею доказательства;

8) понимание структуры определения;

9) понимание необходимости применения методов научного познания.

IV уровень:

10) понимание необходимости аксиоматической организации материала;

V *уровень:*

11) понимание содержательной аксиоматизации.

Выходят за уровни школьного курса геометрии:

12) понимание полуформальной аксиоматизации;

13) понимание формальной аксиоматизации.

В статье П.Н. Михайлова и В.В. Михайловой [66] отмечается, что изучение раздела «Основания геометрии»:

- остается одним из трудных для студентов;

- имеет особое значение в курсе высшей математики, так как способствует формированию аксиоматического метода.

Авторы предлагают следующую последовательность изучения аксиоматического метода:

1. Изучение системы аксиом Давида Гильберта, так как это первая полная система аксиом; она построена на наглядной основе, способствующей формированию у обучаемых пространственных представлений.

Основные недостатки этой системы аксиом (не согласуется с теоретико-множественной концепцией современной математики; громоздка, со сложной логической структурой) не позволяют школьный курс геометрии изложить на её основе.

2. Изучение системы аксиом Г. Вейля, так как она позволяет легко проверить её непротиворечивость и полноту; алгоритмизировать решение многих задач. Основные недостатки этой системы аксиом (абстрактный характер, утрата наглядности, зависимость) не позволяют школьный курс геометрии изложить на её основе.

3. Изучение систем аксиом А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна, так как учебники этих авторов наиболее распространены в школах.

На взгляд авторов, при изучении систем аксиом необходимо придерживаться такого плана:

- общая характеристика системы аксиом;

- выполнимость основных требований к системам (непротиворечивость, независимость и полнота);

- примеры формулировок определений и иерархии определений;

- примеры доказательства теорем, построение геометрии на базе конкретной системы аксиом;

- обоснование того, почему школьный курс геометрии не строится на рассматриваемой системе аксиом.

Таким образом, на основе вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что *формирование аксиоматического метода в школьном и вузовском курсах геометрии связано с определенными трудностями*.

Ю.М. Колягин отмечет, что «овладение идеями аксиоматического метода преследует цели, далеко выходящие за рамки задач обучения математике, как таковой. Таким целями, прежде всего, являются воспитание культуры мышления и языка, воспитание диалектического мировоззрения» [63, С. 416- 417].

К основным целям обучения аксиоматическому методу в школьном курсе математики авторы пособия относят:

- понимание роли и места математических моделей в процессе познания реальной действительности, а также при изучении конкретных вопросов математического характера;

- формирование умения в построении математических моделей простейших конкретных ситуаций;

- понимание сущности аксиоматизации некоторой математической ситуации как отыскания в ней системы исходных понятий и отношений, а также основных (управляющих ими) свойств (аксиом);

- понимание роли и места дедукции в научном построении того или иного раздела математики, т.е. возможности логического выделения (доказательства) самых разнообразных свойств изучаемой системы объектов и отношений из принятой ране системы основных понятий, отношений и аксиом (на основе известных правил логического вывода);

- умение проводить простейшие доказательства (или опровергнуть утверждения);

- понимание возможности и полезности интерпретации и конкретного применения выявленной и описанной на математическом языке структуры в самых разнообразных конкретных ситуациях как математического, так и нематематического характера;

- умение конкретизировать абстрактную математическую теорию в простейших случаях.

В Федеральном компоненте Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике (геометрия, профильный уровень) выделены следующие цели обучения:

- формирование представлений об идеях и методах математики; о математике, как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов;

- овладение языком математики в устной и письменной форме, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественнонаучных дисциплин, продолжения образования и освоения избранной специальности на современно уровне;

- развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности;

- воспитание средствами математики культуры личности через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; понимания значимости математики для научно-технического прогресса [98].

Авторы учебника «Геометрия, 10-11 классы» А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.В. Рыжик выделяют в качестве специфической цели курса геометрии старшей школы - развитие логического мышления и знакомство с ролью аксиоматики в математике на примере построения курса стереометрии на аксиоматической основе [2, С.54].

В авторской программе Е.В. Потоскуева [75, С.133-135] отмечается, что изучение геометрии на углубленном уровне предполагает достижение у учащиеся следующих результатов, непосредственно относящихся к теме проекта:

Личностные:

- сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки;

- сформированность представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

Предметные:

- сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

- сформированность представлений об историческом пути развития геометрии как науки, огромной роли отечественных математиков в этом развитии;

- владение методами доказательств теорем и решений задач на доказательство, построение и вычисление.

При проектировании методического проекта по теме «Аксиоматический метод в математике» будем исходить из указанных выше целей.

В Федеральном компоненте Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике (геометрия, профильный уровень) прописано, что учащиеся должны:

знать/понимать:

– возможности геометрии для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;

– роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знания и для практики.

уметь:

– решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;

- проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса.

И.М. Смирнова, В.А. Смирнов [89] отмечают, что в результате изучения геометрии, выпускники 11-го класса должны иметь сформированные представления:

- об истории возникновения и развития геометрии, учёных, внёсших существенный вклад в геометрическую науку;

- о сущности аксиоматического метода построения геометрии и роли математического доказательства;

- о значении геометрии в системе других наук и в познании окружающего нас мира;

- о некоторых современных направлениях развития геометрии и её приложениях.

В ФГОС ВО 3+ [99] по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (уровень бакалавриата) указаны компетенции, которые должны быть сформированы у выпускников (параграф 2 первой главы).

Выделенные в п.1. новые знания, не входят в содержание школьных учебников геометрии в качестве основного программного материала.

Поэтому предполагается реализация данного проекта в рамках лекционно-семинарской системы в конце изучения геометрии 11 класса за счет уроков обобщения и повторения, либо в рамках элективных курсов в 10-11 классах.

Проект также разрабатывался с учетом возможности его реализации в рамках курсов по выбору для бакалавров математического образования.

Тематическое планирование проекта «Аксиоматический метод в математике» представлено в таблице 8.

Таблица 8

Форма урока (занятия)	Тема	Кол-во часов
Вводно-обзорная лекция	*О роли аксиом в математике. Сущность аксиоматического метода*	2
Семинар	*История развития аксиоматического метода в математике*	2
Практикум	*Аксиоматический метод при решении задач и доказательстве теорем.*	2
Домашняя Графическая работа	*Следствия из аксиом стереометрии*	-
Итоговая контрольная работа	*Аксиомы школьного курса геометрии*	2
Итого		8

Рассмотрим содержание каждой темы данного проекта.

1. Вводная лекция-беседа по теме «О роли аксиом в математике»

Цель лекции: раскрыть роль аксиом в построении математической теории; на примерах разъяснить смысл основных понятий.

План лекции:

1. Что такое аксиома?
2. Чем отличаются обычные определения от аксиоматических?
3. В чем заключается роль аксиом в математике?
4. В чем состоит условность аксиом?
5. Что значит независимость системы аксиом?
6. Что значит непротиворечивость системы аксиом?
7. Что значит полнота системы аксиом?
8. В чем сущность аксиоматического метода в математике?

В ходе лекции учащиеся составляют опорный конспект.

1. Что такое аксиома?

Аксиома – слово греческого происхождения, что в переводе означает « достойное признания». Аксиома – истинное, исходное положение теории [4, С.13].

Аксиома – утверждение, принятое без доказательства, а теорема-утверждение, которое доказывается.

Аксиома - это утверждение, входящее в систему аксиом, т.е. совокупность утверждений, которые, которые образуют определение предмета теории и ее основных понятий. Из них путем логических выводов получаются другие утверждения теории – теоремы.

Основными называются понятия теории, которым не даются предварительных определений, но определения, которых даются самими аксиомами.

Всякая теория допускает разные системы аксиом и основных понятий. При замене одной аксиомы другой первая превращается в теорему, а заменившее ее утверждение становится из теоремы аксиомой.

2. Чем отличаются обычные определения от аксиоматических?

В обычном определении используются только такие понятия, которые заранее известны (определены).

В аксиоматических же определениях фигурируют такие понятия, которые только и определяются самими аксиомами.

Пример. Прямая - это множество точек, которые удовлетворяют соответствующим аксиомам.

3. *В чем роль аксиом?*

Система аксиом любой математической теории дает определение ее предмета и основных понятий (логический смысл).

С другой стороны, аксиомы служат описанием свойств и взаимоотношений реального, отраженного в основных понятиях геометрии (наглядный смысл).

4.*В чем состоит условность аксиом?*

Выбор аксиом – дело условия: одно и то же утверждение теории может быть по выбору принято за аксиому, а может выступать в качестве теоремы, когда приняты другие аксиомы.

А.Д. Александров отмечает, что « при условности аксиом сама стереометрия – совокупность ее утверждений с логическими связями – не зависит ни от каких – либо условий.

Так, достопримечательности города с системой улиц и сообщений между ними существуют независимо от выбора туриста. Но турист может выбрать тот или иной исходный пункт, чтобы пройти по всем достопримечательностям. Так и мы, выбрав исходный пункт – нашу систему аксиом, отправляемся по логическим доказательствам, как по улицам, на ознакомление с достопримечательностями стереометрии. А в ней много примечательного и интересного, хотя изучение ее требует труда… Но ведь мало, что значительное оказывается легко доступным» [2, С.53].

5. Что значит независимость системы аксиом?

Независимость системы аксиом - свойство системы аксиом данной аксиоматической теории, состоящее в том, что каждая аксиома является независимой, т. е. не является логическим следствием из множества остальных аксиом этой теории.

Независимость той или иной аксиомы данной аксиоматической теории означает, что эту аксиому можно без противоречия заменить ее отрицанием.

Иными словами, аксиома независима в том и только в том случае, если имеется *интерпретация,* при которой эта аксиома ложна, а все остальные аксиомы данной теории истинны. Построение такой интерпретации является классическим методом доказательства независимости.

Аксиома считается независимой, если она не может быть выведена из других аксиом с помощью правил вывода данной формальной системы.

6. Что значит непротиворечивость системы аксиом?

Система аксиом называется *непротиворечивой или совместной*, если в этой теории невозможно доказать какое-нибудь предложение A и его отрицание $\overline{A}$. В противном случае система аксиом называется *противоречивой.*

Всякий набор конкретных множеств и отношений между их элементами, удовлетворяющих всем требованиям системы аксиом аксиоматической теории, называется *моделью (интерпретацией)* данной системы аксиом.

Пусть система аксиом некоторой теории допускает построение двух моделей.

Модели называются *изоморфными,* если между элементами основных множеств данных моделей можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие элементы находятся в одинаковых взаимных отношениях.

Существуют системы аксиом, которые имеют бесконечное множество неизоморфных друг другу моделей.

Противоречивая система аксиом не допускает никакой модели, таким образом ни одно из отношений р, описываемых данной системой аксиом, не может выражать в модели одновременно предложения A и $\overline{A}$.

Материалом для построения моделей служит ранее известная математическая теория или система (старая система): каждому основному понятию проверяемой аксиоматики приписываем смысл в терминах старой системы, то есть создаём словарь интерпретаций, тогда каждое определяемое понятие новой системы также получит смысл в терминах старой системы, и все предложения новой системы обратятся в некоторые предложения на языке старой системы.

Модель (или интерпретация) считается построенной, если все аксиомы новой проверяемой аксиоматики обращаются в истинные предложения старой системы.

Таким образом, если для данных аксиом можно построить модель, то данная система аксиом непротиворечива.

В качестве домашнего задания предлагается составить *словарь основных* понятий по теме и подготовить *сообщение и презентацию* к семинарскому занятию.

2. Семинарское занятие по теме «История развития аксиоматического метода в математике»

Цель семинарского занятия: обсудить историю развития аксиоматического метода и роль ученых в его развитии.

План занятия:

Выступление студентов с подготовленными сообщениями и показом презентации. Тематика докладов представлена ниже.

1. Евклид и его вклад в развитии аксиоматического метода построения геометрии.

2. М. Паша и его вклад в развитии аксиоматического метода построения геометрии.

3. Д. Гильберт и его вклад в развитии аксиоматического метода построения геометрии.

4. В.Ф. Каган и его вклад в развитии аксиоматического метода построения геометрии.

5. М. Пиери и его вклад в развитии аксиоматического метода построения геометрии.

6. Г. Вейль и его вклад в развитии аксиоматического метода построения геометрии.

7. Н.И. Лобачевский и его вклад в развитие аксиоматического метода построения геометрии.

8. Система аксиом школьного курса геометрии А.Н. Колмогорова.

9. Система аксиом школьного курса геометрии А.В. Погорелова.

10. Система аксиом школьного курса Л.С. Атанасяна.

11. Система аксиом школьного курса геометрии А.А. Александрова.

12. Система аксиом школьного курса геометрии Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича.

13. Система аксиом школьного курса геометрии И.М. Смирновой, В.А. Смирнова.

Форма отчетности: реферат (с указанием используемых источников) и презентация (в печатном виде).

3. Практикум по теме «Аксиоматический метод при решении задач и доказательстве теорем»

Цель практического занятия: сформировать знания и умения студентов по основному методу доказательств в математике; подготовить студентов к работе в классах с углубленным изучением математики.

План занятия:

Выполните последовательно предложенные задания 1-8.

Задание 1. Внимательно ознакомитесь с аксиомой плоскости (А 1): *В пространстве существуют плоскости. Через каждые три точки пространства проходит плоскость.*

1) поясните первую часть аксиомы плоскости;
2) как сформулировать аксиому плоскости, если не оговаривать в ней, что в пространстве есть плоскости?
3) какие следствия вытекают из аксиомы плоскости?

Ответы:

1) из утверждения, что существуют в пространстве плоскости, следует, что плоскостей в пространстве больше одной;

2) если не оговаривать существование плоскости в пространстве, то тогда надо потребовать, чтобы в пространстве существовали, по крайней мере, три точки, т.е., аксиома будет звучать так: *в пространстве существуют, по крайней мере, три точки. Через каждые три точки пространства проходит плоскость.*

А чтобы плоскостей было больше одной, надо потребовать, чтобы существовали, по крайней мере, четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

3) *Следствия:*

1. Множество точек пространства бесконечно (так как в пространстве есть плоскости, а на каждой плоскости, как известно из планиметрии, множество точек бесконечно).

2. Плоскость проходит через каждую одну или две точки (действительно, взяв, например, любые две точки, можно добавить к ним еще одну точку (ее можно взять на плоскости, существующей согласно аксиоме 1) и провести через них плоскость).

3. В пространстве через каждые две точки проходит прямая (в пространстве через каждые две точки проходит плоскость, а в плоскости через каждые две точки проходит прямая).

Задание 2. Внимательно ознакомитесь с аксиомой принадлежности прямой плоскости (А 3): *Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она лежит в этой плоскости.* Поясните аксиому. Какие следствия вытекают из аксиомы?

Ответы:

1) если две точки данной прямой принадлежат данной плоскости, то прямая содержится в этой плоскости;

2) Следствие: если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки.

Задание 3 [78, № 1.006 **].** Прочитайте символическую запись, выполните рисунок и докажите: $(\alpha \cap \beta = a, P \in a, Q \notin \beta) \Rightarrow PQ \not\subset \beta$.

Решение.

Читается: Если плоскости α и β пересекаются по прямой a, и точка P принадлежит прямой a, а точка Q не принадлежит плоскости β, то прямая PQ не лежит в плоскости β.

Доказательство. Так как плоскости α и β пересекаются по прямой a, то прямая a лежит в каждой из этих плоскостей.

По условию точка P принадлежит прямой a, поэтому, как точка этой прямой, P принадлежит плоскости β. Но $Q \notin \beta$, то есть не любая точка прямой PQ принадлежит плоскости β.

Значит, прямая PQ не лежит в плоскости β, а пересекает ее в точке P. Что и требовалось доказать.

Задание 4 [78, 1. 026]. Дана плоскость α и три прямые AB, BC и AC, пересекающие ее соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

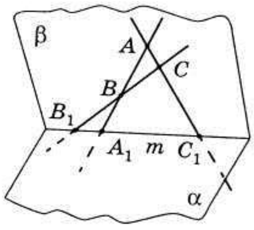

Рис.1

Решение. Так как три прямые АВ, ВС и АС попарно различны, то точки $A = AB \cap AC$,

$B = AB \cap BC$ и $C = BC \cap AC$ не лежат на одной прямой.

Тогда *по аксиоме о плоскости* через точки А, В и С, можно провести единственную плоскость.

Обозначим ее β (рис.1).

По аксиоме прямой и плоскости прямые АВ, ВС и АС лежат в плоскости β.

Так как прямая АВ лежит в плоскости β и пересекает плоскость α в точке A_1, то плоскости α и β имеют общую точку A_1.

Тогда *по аксиоме пересечения плоскостей* плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой $m = \alpha \cap \beta$, проходящей через точку A_1, т.е. $A_1 \in m$.

Аналогично рассуждая, получаем: все три точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой $m = \alpha \cap \beta$, что и требовалось доказать.

Задание 5 [89]. Определите по рисунку 2 плоскостям каких фигур принадлежит точка *M* плоскости.

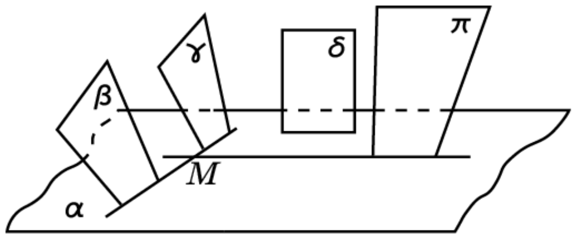

Рис.2.

Ответ: β,γ, π

Задание 6 [89**].** Найдите ошибку на рисунках 3а и 3 б, если: а) α и β - две пересекающиеся плоскости, и точки *A, B, C* принадлежат как α ,так и β ; б) α , β , γ - три попарно пересекающиеся плоскости, причем точки *K, L, M* принадлежат плоскостям α и β , а точки *N, O, P* – плоскостям α и γ .

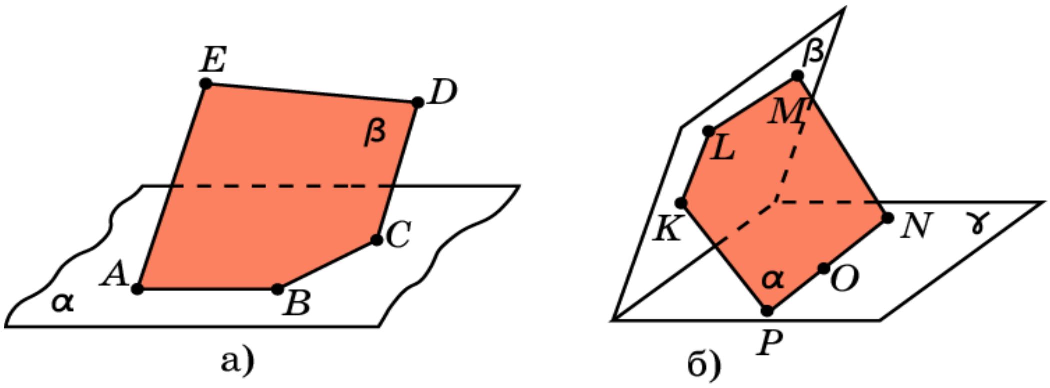

Рис.3

Ответ: а) Точки *A*, *B*, *C* должны принадлежать одной прямой;

б) точки *K*, *L*, *M* должны принадлежать одной прямой.

Задание 7 [89**].** Опираясь на аксиомы стереометрии, дайте ответы на вопросы:

1. Сколько прямых проходит через две точки пространства?

Ответ: Одна.

2. Сколько плоскостей проходит через три точки пространства?

Ответ: Одна, если три точки не принадлежат одной прямой; бесконечно много в противном случае.

3. Сколько общих точек могут иметь две плоскости?

Ответ: Ни одной, или бесконечно много.

4. Верно ли утверждение о том, что всякие: а) три точки; б) четыре точки пространства принадлежат одной плоскости?

Ответ: а) Да; б) нет.

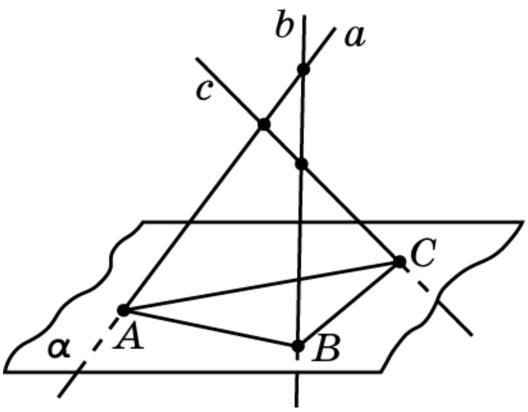

Рис. 4

5. Верно ли, что если окружность имеет с плоскостью две общие точки, то окружность лежит в этой плоскости?

Ответ: Нет.

Задание 8 [89 **].** На рисунке 4 попарно пересекающиеся прямые *a, b, c* пересекают плоскость соответственно в точках *A, B, C*. Правильно ли выполнен рисунок?

Ответ: Нет, прямая *b* не может пересекать прямую *c*.

Домашняя контрольная работа и другие виды промежуточного и итогового контроля представлены в последнем параграфе данной главы.

§ 3. Историко-методологические проекты по математике как средство формирования научного мировоззрения бакалавров

В федеральных государственных образовательных стандартах среднего (полного) общего образования и бакалавров педагогического образования большое внимание уделяется организации *проектной деятельности* учащихся и студентов – будущих учителей математики. Такая деятельность является относительно новой, как для учителей математики, так и для учащихся.

Анкетирование студентов и учителей математики показало, что основная трудность при организации проектной деятельности учащихся связана с неоднозначностью трактовки понятия математического проекта и недостаточной разработанностью содержательных проектов по математике.

Остановимся на анализе научно-методической литературы, описывающей применение математических учебных проектов для студентов.

В статье О.В. Задорожной [33] описан опыт применения учебных проектов при обучении математическому анализу в вузе.

Автор отмечает, что учебные проекты по математическому анализу направлены на систематизацию знаний по дисциплине, на установление взаимосвязей между отдельными понятиями, положениями всего курса, на взаимосвязь различных содержательно-методических линий предмета, что способствует углублению знаний и обеспечивает целостное восприятие курса математического анализа.

По содержанию проектов автором выделены мини, локальные, семестровые, курсовые глобальные проекты.

Минипроекты включают отдельные вопросы темы, излагаемые в части лекции, локальные – одну или несколько тем курса математического анализа. Семестровые и курсовые проекты включают один или несколько разделов курса, один или несколько семестров.

В статье приведены примеры проектов разных видов:

Минипроект 1. Понятие и различные определения функции.

Курсовой проект. Инвариантность некоторых свойств неявных взаимно обратных функций..

В работах М.Ф. Гильмуллина [16], Ю.А. Дробышева [29] раскрывается роль историко-математических проектов в процессе обучения математике школьников и студентов.

В нашем исследовании, под *математическим проектом*, согласно Е.Ю. Куприенко [56], будем понимать средство обучения математике, содержательную основу которого составляет проектное задание с необычной (нестандартной) формулировкой, содержание которого выходит за рамки школьного учебника математики и ориентировано на реализацию технологии сотрудничества.

В соответствии трактовкой указанного автора будем рассматривать *по содержанию* три типа проектов: *историко-методологические, теоретические и практико-ориентированные* [52].

При разработке математических проектов, мы опираемся на выделенный Т.А. Ивановой [91, с. 29-30] состав гуманитарно ориентированного содержания математического образования:

– предмет и метод математики, её ведущие идеи и понятия, математический язык, связь с другими науками и практикой, математическое моделирование;

– процесс познания в математике;

– специфику творческой математической деятельности как сплав интуиции и логики;

– методы научного познания (как общие эвристические и логические, так и специфические способы и приемы);

– эстетику математики;

– культуру мышления;

– историю математики;

– эмоционально-ценностное отношение к математике и математической деятельности;

– информационный компонент.

По характеру доминирующей деятельности, математические проекты могут быть *реферативными, исследовательскими* и *творческими.*

Цель исследовательских проектов – доказательство или опровержение какой-либо гипотезы, проблемы или самостоятельное формулирование гипотезы, самостоятельное решение задач, доказательство теорем, изучение или обнаружение нового свойства понятия.

Проектным продуктом (результатом) *исследовательских* проектов является доказательство теоремы, решение задачи, выполненное построение, сформулированное свойство, обнаруженная закономерность и т.п.

Как показывает практика, наибольший интерес у учащихся и студентов вызывают *историко-методологические проекты,* содержание проектного задания которых основано на историческом материале (история идей и открытий в математике) [55].

В результате выполнения историко-методологических проектов учащиеся:

- знакомятся с историей идей и открытий в математике;

- сопоставляют методы решения задач математиками разных эпох с современными;

- изучают биографии ученых-математиков, внесших вклад в тот или иной раздел математики;

- решают задачи, связанные с исторической тематикой.

Примеры разработанных Е.Ю. Куприенко тем исследовательских историко-методологических проектов «*Задача Кеплера*» (к теме «Объем цилиндра, конуса и шара», 11 класс); «*Квадратура параболы по Архимеду»* (к теме «Площадь поверхности конуса», 11 класс) приведены в статье [53].

В *результате выполнения теоретических проектов* учащиеся:

- осмысливают математические понятия или их свойства;

- знакомятся с различными подходами при определении математических понятий и соответственно с различными следствиями из этих определений;

- изучают различные способы доказательств.

Примеры разработанных Е.Ю. Куприенко тем исследовательских теоретических проектов «*Периодические и непериодические функции», «Теорема о трех перпендикулярах», «Геометрическая вероятность», «Замечательные свойства тетраэдра»* [54].

Указанные проекты представляют интерес для бакалавров – будущих учителей математики.

Таким образом, математические проекты могут быть эффективным средством формирования научного мировоззрения учащихся и бакалавров математического образования.

В рамках программы курсов по выбору «Математика и мировоззрение» или «Математика и культура» студентам можно предложить следующие *историко-методологические проекты*:

1.Математические идеи и открытия в период зарождения математики.

2. Математические идеи и открытия в период элементарной математики.

3. Математические идеи и открытия в период математики переменных величин.

4. Математические идеи и открытия в 19 в.

5. Математические идеи и открытия в 20 в.

Можно также предложить проекты, в которых *сопоставляются методы решения задач математиками разных эпох.*

Например:

1. Методы решения алгебраических уравнений математиками разных эпох.

2. Методы решения классических геометрических задач.

Следующий тип проектов может быть связан *с изучением биографии ученых-математиков,* внесших вклад в тот или иной раздел математики.

Примеры тем проектов:

1. Гаусс- король математики.

2. Н.И. Лобачевский - создатель неевклидовой геометрии.

При разработке проектов студентам предлагается придерживаться *следующего алгоритма:*

1. Придумать необычную формулировку проектного задания по теме, чтобы оно вызывало у школьников интерес.

2. Сформулировать проектные вопросы по теме проекта, вытекающие непосредственно из проектного задания.

3. Подобрать или придумать математические задачи проекта, вытекающие из проектного задания.

4. Решить указанные задачи и получить ответы на поставленные вопросы.

5. Сформулировать полученные выводы в виде определений понятий, свойств или теорем; формул или алгоритмов решения задач.

6. Попытаться обобщить полученные результаты.

Темы проектов для учащихся в рамках ЭК

Предлагаемые ниже темы исследовательских работ могут быть использованы учащимися при выполнении индивидуальных или групповых проектов или в качестве индивидуальных научно-исследовательских работ.

Темы выдаются в начале изучения программы элективного курса. Защита проектов или работ проходит в рамках учебно-исследовательской конференции. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся.

1. Тема проекта: Проблема о четырех красках.

Рекомендуемая литература:

Савин А. Карты и раскраски //1972.-№4. С.30-33, 82.

2. Тема проекта: Карл Гаусс и его теория множеств.

Рекомендуемая литература:

1. Гиндикин С. Дебют Гаусса // Квант, 1972, №1. С. 2-11.
2. Гиндикин С. Карл Фридрих Гаусс//Квант.- 1977, № 8. С. 2-14.

3. **Тема проекта:** Эварист Галуа и его вклад в развитие алгебры

Рекомендуемая литература:

1. Виленкин Н., Лишевский В. Эварист Галуа //Квант.- 1973, № 10. С. 2-13.

2. Соловьев Ю. Эварист Галуа //Квант.- 1986, № 12. С. 3-8.

4. **Тема проекта:** Лобачевский - создатель неевклидовой геометрии.

Рекомендуемая литература:

1. *Александров, П.С.* Николай Иванович Лобачевский //Квант. - 1976, №2.

2. *Полотовский, Г.М.* Как изучалась биография Н.И.Лобачевского (к 150-летию со дня смерти) //Математика в высшем образовании. – 2006, №4. С. 79-88.

3. *Потоскуев, Е.В.* Геометрия. 11 кл. : учеб. для классов с углуб. и профильным изучением математики общеобразоват. учреждений /Е.В.Потоскуев, Л.И.Звавич.- 7-е изд. – М.: Дрофа, 2010. – С. 297 – 315.

4.*Силин, А.В.* Открываем неевклидову геометрию: Кн. для внеклассного чтения учащимися 9-10 классов средней школы /А.В.Силин, Н.А.Шмакова. – М.: Просвещение, 1988. – (Мир знаний).

5. *Соловьев, Ю.* Николай Иванович Лобачевский //Квант.- 1992, № 11.

5. Тема проекта: Бояи – создатель неевклидовой геометрии

Рекомендуемая литература:

1. *Александров, В.А.* Краткая биография Яноша Боляи //Математика в высшем образовании. – 2004, №2. С. 85-88.

2. *Каша Золтан.* Культ Боляи в Румынии // Там же, С. 89- 92.

6. Тема проекта: Проблема Пуанкаре и миллион долларов.

Рекомендуемая литература:

1. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 11 кл. : учеб. для классов с углуб. и профильным изучением математики общеобразоват. учреждений /Е.В.Потоскуев, Л.И.Звавич.- 7-е изд. – М.: Дрофа, 2010. – С. 320-335

2. Седых, В.Д. Проблема Пуанкаре и миллион долларов //Математика в школе. 2007, № 2. С. 26-30.

При разработке проектов студенты должны ориентироваться на *содержание раздела «Математика в историческом развитии»*, приведенного в Примерной образовательной программе **[**79]:

История математики 5-6 классы

Появление цифр, букв, иероглифов в процессе счета и распределения продуктов на Древнем Ближнем Востоке. Связь с Неолитической революцией.

Рождение шестидесятеричной системы счисления. Появление десятичной записи чисел.

Рождение и развитие арифметики натуральных чисел. НОК, НОД, простые числа. Решето Эратосфена.

Появление нуля и отрицательных чисел в математике древности. Роль Диофанта. Почему $(-1)(-1) = +1$ *?*

Дроби в Вавилоне, Египте, Риме. Открытие десятичных дробей. Старинные системы мер. Десятичные дроби и метрическая система мер. Л. Магницкий.

История математики 7-9 классы (базовый уровень)

Возникновение математики как науки, этапы ее развития. Основные разделы математики. Выдающиеся математики и их вклад в развитие науки.

Бесконечность множества простых чисел. Числа и длины отрезков. Рациональные числа. Потребность в иррациональных числах. Школа Пифагора

Зарождение алгебры в недрах арифметики. Ал-Хорезми. Рождение буквенной символики. П. Ферма, Ф. Виет, Р. Декарт.

История вопроса о нахождении формул корней алгебраических уравнений степеней, больших четырех. Н. Тарталья, Дж. Кардано, Н.Х. Абель, Э. Галуа.

Появление метода координат, позволяющего переводить геометрические объекты на язык алгебры.

Появление графиков функций. Р. Декарт, П. Ферма. Примеры различных систем координат.

Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) о кроликах, числа Фибоначчи. Задача о шахматной доске. Сходимость геометрической прогрессии.

Истоки теории вероятностей: страховое дело, азартные игры. П. Ферма, Б.Паскаль, Я. Бернулли, А.Н.Колмогоров.

От земледелия к геометрии. Пифагор и его школа. Фалес, Архимед. Платон и Аристотель. Построение правильных многоугольников.

Триссекция угла. Квадратура круга. Удвоение куба.

История числа π. Золотое сечение.

«Начала» Евклида. Л Эйлер, Н.И.Лобачевский. История пятого постулата.

Геометрия и искусство. Геометрические закономерности окружающего мира.

Астрономия и геометрия. Что и как узнали Анаксагор, Эратосфен и Аристарх о размерах Луны, Земли и Солнца. Расстояния от Земли до Луны и Солнца. Измерение расстояния от Земли до Марса.

Роль российских ученых в развитии математики: Л. Эйлер. Н.И. Лобачевский, П.Л.Чебышев, С. Ковалевская, А.Н. Колмогоров.

Математика в развитии России: Петр I, школа математических и навигацких наук, развитие российского флота, А.Н. Крылов. Космическая программа и М.В. Келдыш.

История математики (углубленный уровень)

Возникновение математики как науки, этапы ее развития. Основные разделы математики.

Выдающиеся математики и их вклад в развитие науки.

Бесконечность множества простых чисел. Числа и длины отрезков. Рациональные числа. Потребность в иррациональных числах. Школа Пифагора

Зарождение алгебры в недрах арифметики. Ал-Хорезми.

Рождение буквенной символики.

П. Ферма, Ф. Виет, Р. Декарт.

История вопроса о нахождении формул корней алгебраических уравнений степеней, больших четырех. Н. Тарталья, Дж. Кардано, Н.Х. Абель, Э.Галуа.

Появление метода координат, позволяющего переводить геометрические объекты на язык алгебры. Появление графиков функций. Р. Декарт, П. Ферма. Примеры различных координат.

Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) о кроликах, числа Фибоначчи. Задача о шахматной доске. Сходимость геометрической прогрессии.

Истоки теории вероятностей: страховое дело, азартные игры. П. Ферма, Б. Паскаль, Я. Бернулли, А.Н. Колмогоров.

От земледелия к геометрии. Пифагор и его школа. Фалес, Архимед. Платон и Аристотель.

Построение правильных многоугольников.

Триссекция угла. Квадратура круга. Удвоение куба.

История числа π. Золотое сечение.

«Начала» Евклида. Л. Эйлер, Н.И. Лобачевский. История пятого постулата.

Геометрия и искусство. Геометрические закономерности окружающего мира.

Астрономия и геометрия. Что и как узнали Анаксагор, Эратосфен и Аристарх о размерах Луны, Земли и Солнца. Расстояния от Земли до Луны и Солнца. Измерение расстояния от Земли до Марса.

Роль российских ученых в развитии математики: Л.Эйлер. Н.И. Лобачевский, П.Л. Чебышев, С. Ковалевская, А.Н. Колмогоров.

Математика в развитии России: Петр I, школа математических и навигацких наук, развитие российского флота, А.Н. Крылов. Космическая программа и М.В. Келдыш

§ 4. Фонд оценочных средств к программам курсов по выбору для бакалавров математического образования

Фонд оценочных средств (ФОС) является составной частью нормативно-методического обеспечения системы оценки качества освоения основных профессиональных образовательных программ высшего образования, входит в состав ОПОП ВО в целом и в рабочую программу соответствующей дисциплины.

Под ФОС понимается комплект методических и контрольных материалов, методик и процедур, предназначенных для установления соответствия достигнутых результатов обучения запланированным результатам, используемого в ходе текущего контроля, промежуточной аттестации и итоговой (государственной итоговой) аттестации.

ФОС включает в себя:

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.
2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания.
3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, описанные в рабочей программе дисциплины, программе практики, программе НИР.
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

В данном параграфе представим разработанные нами виды заданий для проведения текущего и итогового контроля по теме «Аксиоматический метод в математике».

Цели, виды, содержание, формы и методы контроля знаний и умений по теме «Аксиоматический метод в математике»

Контроль должен быть разнообразным и охватывать все этапы лекционно-семинарской системы обучения по теме «Аксиоматический метод в математике».

Он состоит из промежуточного контроля и итогового.

Промежуточный контроль включает в себя:

1. Составление словаря по теме.
2. Подготовку сообщения и презентации по теме.
3. Выполнение графической работы .

Итоговый контроль включает в себя:

Итоговую контрольную работу.

Рассмотрим каждый из видов контроля.

1. *Составьте словарь основных понятий по теме «Аксиоматический метод в математике», включив в него определения и историю происхождения понятий:*

- аксиома;
- аксиоматика;
- аксиоматический метод;
- аксиоматическая теория;
- аргументы;
- геометрия;
- гипотеза;
- дедукция;
- демонстрация;
- доказательство;
- интерпретация;
- локальная аксиоматизация;

- модель;

- независимость;

- неопределяемое понятие;

- непротиворечивость;

- определение;

- планиметрия;

- полнота;

- полуформальная аксиоматизация;

- понятие;

- постулат;

- система аксиом;

- стереометрия;

- тезис;

- теорема;

- утверждение;

- формальная аксиоматизация.

Образец оформления

Аксиома

Термин встречается впервые у Аристотеля и перешел в математику от философов древней Греции. Греческое ἀξίωμα означает «достоинство», «уважение», «авторитет». Первоначально термин имел смысл «самоочевидная истина». В XIX в. аксиомы геометрии рассматривались как выражение свойств пространства. После работ Гильберта (на рубеже XIX—XX в.) устанавливается взгляд, согласно которому аксиомы математической теории представляют собой определения элементарных понятий этой теории и одновременно дают точное и полное описание тех соотношений, которые существуют между этими понятиями.

Источник: Александрова Н.В. Математические термины – справочник

/Словарь математических терминов.
http://fshq.ru/Alexandrova_N_V_Slovar_mathematical_terms/axiom.html

Форма отчетности: Словарь в печатном (компьютерном) виде (с ссылками на используемые источники).

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если словарь основных понятий содержит не только определение понятия, но и историю его происхождения. К каждому понятию указаны источники;

- оценка «хорошо», если допущены неточности в определениях не более чем двух понятий словаря; имеются ссылки на источники;

- оценка «удовлетворительно», если допущены неточности в определении в более чем двух, но не более шести понятиях; имеются ссылки на источники;

- оценка «неудовлетворительно», если допущены ошибки в более чем шести понятиях; отсутствуют ссылки на источники.

2. Графическая работа [77-78]. *Тема «Следствия из аксиом стереометрии»*

Цель: формирование геометрической культуры.

Задания:

1. Сделайте чертежи и соответствующие к ним символические записи по условиям задач 1-16, используя данные в них обозначения.

1. Прямая MP лежит в плоскости α.

2. Прямая AB пересекает плоскость α в точке M.

…

16. Две вершины треугольника ABC лежат в плоскости α, а вершина C не лежит. Прямая d пересекает стороны CB и CA соответственно в точках M и T, а плоскость α в точке K.

Источник: Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики /Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 4-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2008. С. 15-16.

Форма отчетности:

Тетрадь с выполненными чертежами и символическими записями к ним.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно выполнены чертежи и соответствующие к ним символические записи ко всем заданиям работы;

- оценка «хорошо», если допущены неточности в построении чертежей или записей к ним в не более чем двух задачах;

- оценка «удовлетворительно», если допущены неточности в построении чертежей или записей к ним в более чем двух, но не более шести задачах.

- оценка «неудовлетворительно», если допущены ошибки в более чем шести чертежах.

3. Итоговая контрольная работа

В качестве итоговой контрольной работы студентам могут быть предложены задания, составленные И.М. Смирновой [89].

Вариант 1

1. Изобразите прямую *a* и точки *A, B* и *C,* не принадлежащие данной прямой. Сделайте необходимые записи.

2. Изобразите плоскость β, точки *E, F,* принадлежащие ей, и точку *G,* ей не принадлежащую. Сделайте необходимые записи.

3. Изобразите прямую a, лежащую в плоскости α. Сделайте необходимую запись.

4. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β. Сделайте необходимую запись.

5. Из следующих предложений укажите аксиомы, определения, теоремы:

1) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2) Через две точки пространства проходит единственная прямая.

3) Вертикальные углы равны.

4) Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

6. Определите взаимное расположение плоскостей α и β, если в них лежит треугольник ABC. Ответ обоснуйте.

7. Сколько плоскостей может проходить через три точки?

8. Найдите наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из четырех точек.

9. В плоскости двух пересекающихся прямых a и b задана точка C, не принадлежащая этим прямым. Прямая c, лежащая в данной плоскости, проходит через точку C. Как может быть расположена прямая c относительно данных прямых?

10. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой. Докажите, что все прямые, пересекающие два из трех отрезков, соединяющих данные точки, лежат в одной плоскости.

11. Плоскость задана прямой c и не принадлежащей ей точкой C. Постройте в этой плоскости прямую a, отличную от данной прямой и не проходящую через данную точку.

12. Плоскость задана двумя пересекающимися в точке O прямыми a и b. Нарисуйте прямую c, которая пересекает данные прямые и не лежит в данной плоскости.

Вариант 2

1. Изобразите две пересекающиеся в точке O прямые a и b и точки A, B, C, причем точка A принадлежит прямой a, B принадлежит прямой b, точка C не принадлежит данным прямым.

2. Изобразите плоскость γ, не принадлежащие ей точки K, L и принадлежащую ей точку M. Сделайте необходимые записи.

3. Изобразите прямую b, пересекающую плоскость β в точке O. Сделайте необходимую запись.

4. Изобразите три пересекающиеся по прямой a плоскости α, β и γ. Сделайте необходимую запись.

5. Из следующих предложений укажите аксиомы, определения, теоремы: 1) Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

2) Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

3) Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются аксиомы планиметрии.

4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

6. Определите взаимное расположение двух плоскостей β и γ, если им принадлежат точки B и C. Ответ обоснуйте.

7. Найдите наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из 5 точек.

8. Найдите наибольшее число плоскостей, проходящих через различные тройки из четырех точек.

9. Прямая d, лежащая в плоскости треугольника ABC, пересекает его сторону AB. Каким может быть взаимное расположение прямых d и BC?

10. В плоскости α проведены две параллельные прямые a и b. Докажите, что все прямые, пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости.

11. Плоскость задана двумя пересекающимися в точке *O* прямыми *m* и *n*. Постройте в этой плоскости прямую *k*, отличную от данных прямых и не проходящую через точку *O*.

12. Плоскость задана тремя точками *D, E, F*, не принадлежащими одной прямой. Нарисуйте прямую *a*, которая пересекает стороны *DE* и *DF* треугольника *DEF* и не лежит в данной плоскости.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно выполнены чертежи и соответствующие к ним символические записи ко всем заданиям работы, даны верные обоснования с ссылками на соответствующие аксиомы и следствия из них;

- оценка «хорошо», если допущены неточности в построении чертежей или записей к ним в не более чем двух задачах, даны верные обоснования с ссылками на соответствующие аксиомы и следствия из них;

- оценка «удовлетворительно», если допущены неточности в построении чертежей или записей к ним в более чем двух, но не более шести задачах, имеются верные обоснования и ссылки на соответствующие аксиомы и следствия из них в более, чем 8 задачах;

- оценка «неудовлетворительно», если допущены ошибки в более чем шести чертежах, отсутствуют верные обоснования и ссылки на соответствующие аксиомы и следствия.

Основные выводы по второй главе

Во второй главе «Средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования» решены следующие задачи исследования:

− раскрыта роль и место математических курсов историко- мировоззренческой направленности как средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

− раскрыта роль аксиоматического метода в математике в формировании научного мировоззрения студентов и школьников.

− обоснована роль историко-методологических проектов по математике как средства формирования научного мировоззрения бакалавров.

− разработан фонд оценочных средств по формированию научного мировоззрения бакалавров математического образования и апробировать его на практике.

Основными выводами по данной главе являются следующие:

1. При разработке ОПОП для бакалавров математического образования необходимо включить в учебные планы математический курс по выбору историко-мировоззренческой направленности.

2. При подготовке бакалавров математического образования большую роль в формировании у них научного мировоззрения играет раскрытие роли аксиоматического метода в математике.

Спроектированный нами методический проект ориентирован на достижение указанной цели – формирование научного мировоззрения студентов.

3. Большинство исследователей отмечают в качестве эффективного средства формирования научного мировоззрения студентов и школьников – математические проекты историко-методологического характера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Магистерская диссертация по теме «Формирование научного мировоззрения бакалавров математического образования» посвящена актуальной теме теории и методики обучения математике в школе и в вузе.

Сформулированная в диссертации *проблема исследования:* выявление основного содержания и средств формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования, ориентированных на реализацию целей и задач обучения математике в классах с углубленным изучением предмета изучена и основана на показе роли математических курсов по выбору историко-мировоззренческой направленности и выполнения студентами историко-методологических математических проектов.

В выпускной квалификационной работе:

− проанализированы различные подходы к понятию научного мировоззрения школьников и студентов;

− раскрыта компетентностная характеристика готовности бакалавров по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профиль «Математика и информатика») к формированию научного мировоззрения школьников;

− определены содержание, формы, методы и средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования;

− раскрыта роль аксиоматического метода в математике в формировании научного мировоззрения студентов и школьников;

− раскрыта роль и место математических курсов историко- мировоззренческой направленности как средства формирования научного мировоззрения бакалавров математического образования.

В диссертации представлены:

− программа курса по выбору «Математика и культура» для студентов указанного направления подготовки;

– методический проект по теме «Аксиоматический метод в математике»;

– элементы фонда оценочных средств по указанным курсам;

– тематика историко-методологических проектов для студентов и школьников.

Гипотеза исследования требует дальнейшей проверки. На данном этапе был проведен только констатирующий и поисковый этапы эксперимента.

В целом основные задачи исследования решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д. Математика и диалектика //Математика в школе. 1972. − №1. − С.3−9.

2. Александров А.Д. Геометрия для 10-11 кл: Учеб. пособие для уч. шл. и кл. с углубл. изуч. математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. -5-е изд. – М.: Просвещение, 1995. С. 9-54.

3. Александров А.Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 10-11 кл. Учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни /А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. Гл.1. Основания стереометрии. §1. Аксиомы стереометрии. С.13-25. . [Электронный ресурс] – Режим доступа http://11book.ru/10-klass/233-geometriya/2390-geometriya-10-11-klass-aleksandrov

4. Александрова Н.В. Математические термины - справочник /Словарь математических терминов. [Электронный ресурс]– Режим доступа: http://fshq.ru/Alexandrova_N_V_Slovar_mathematical_terms/axiom.html

5. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. − М.: МЦНМО, 2000. − 32 с.

6. Атанасян, Л.С. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – М. : Просвещение, 2009. – 255 с.

7. Барсукова Н.К., Шишелова Т.И. Один из подходов к формированию научного мировоззрения студентов // Современные проблемы науки и образования. – 2008. – № 4 – С. 60-61. [Электронный ресурс] – Режим доступа: – URL: www.science-education.ru/25-994

8. Белл Э.Т. Творцы математики: Предшественники современной математики. Пособие для учителей. Пер. с анг. В.Н. Тростникова, С.Н. Киро /Под ред. и с доп. С.Н.Киро. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

9. Блинков В.Н. Аксиоматический метод и обучение геометрии учащихся средних общеобразовательных учреждений [Электронный ресурс] //Интеграция образования. 2008. № 4. С. 69-73. Режим доступа к журн.: http://elibrary.ru

10. Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математики. Пер. с фр. − М.: Иностранная литература, 1965. − С. 245−259.

11. Варанкина В.И. Учебная дисциплина «История и методология математики» для магистрантов –математиков //Современные проблемы науки и образования. 2015.- №5. С. 459- 460. Режим доступа к журн.: http://elibrary.ru

12. Вейль Г. Математическое мышление /Под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина; пер. с анг. и нем. − М.: Наука, 1989. − 400 с.

13. Власова С.А. Генетический подход к изложению аксиом школьного курса геометрии //Наука и школа. 2011. № 3. С. 82-85. Режим доступа к журн.: http://elibrary.ru

14. Геометрия Лобачевского . Режим доступа: http://geom.kgsu.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=41&Itemid=0

15. Гильмуллин М.Ф., Анисимова Т.И. Культурно-историческая среда обучения естественно- математическим дисциплинам в школе и в вузе // Материалы Всероссийской научно-практической конференции "Актуальные проблемы истории естественно- математических и технических наук и образования". – Елабуга: Изд-во ЕИ КФУ, 2014. С. 136-148.

16. Гильмуллин, М.Ф. Историко-математические проекты в школе /Проблемы теории и практики обучения математике: Сб. науч. работ, представленных на Международную научную конференцию «62

Герценовские чтения» /Под ред. В.В.Орлова.- СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 2009. –С. 12-14.

17. Гильмуллин М.Ф. Учебные ситуации и задачи профессионального развития будущего учителя математики при обучении истории математики //Ярославский педагогический вестник. 2010. Т. 2. № 1. С. 62-68.

18. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: Наука, 1981. – 192 с. (Биб-ка «Квант». Вып. 14).

19. Глаголева Е.Г., Денищева Л.О., Наелова Г.Г., Никольская И.Л. Вопросы формирования мировоззрения в процессе обучения математике //Математика в школе. 1979. – №5. С. 3– 9.

20. Глейзер Г.И. История математики в школе. 9–10 кл.: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.

21. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. − М.: Просвещение, 1985. −192 с.

22. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. −М.: Просвещение, 1982. −144 с.

23. Гнеденко Б.В. О воспитании научного мировоззрения на уроках математики // Математика в школе. 1977– №4. С. 13-19.

24. Григорян М.Э. Формирование научного мировоззрения студентов средствами истории математики в процессе обучения теории вероятностей //Социосфера. – 2014. - №4. – С. 87- 89. Режим доступа к журн.: http://elibrary.ru

25. Далингер В.А. Проектирование элективных курсов по геометрии посредством локальной аксиоматизации //Современные проблемы науки и образования. 2006. № 3. С. 67-70. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru

26. Дыбыспаев Б.Д. Об аксиоматическом построении школьного курса планиметрии / Математическое образование: концепции, методики, технологии: сборник трудов IV Межд. науч. конф. «Математика.

Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 21-24 апреля 2009 г.) / под общ. ред. Р.А. Утеевой. В 3-х ч. Ч.2. – Тольятти. Изд-во ТГУ, 2013. С. 175-180.

27. Дрибан В.М. Формирование научного мировоззрения студентов на вводной лекции по высшей математике //Дидактика математики: проблемы и исследования. 2008. № 29. С. 18-21.

28. Дробышев Ю.А. О постановке курса «Воспитательные аспекты истории математики» //Известия Тульского государственного университета Гуманитарные науки. 2013. № 3-2. С. 81-91. Режим доступа к журн.: http://elibrary.ru

29. Дробышев Ю.А. Историко-математические проекты и их роль в дифференцированном компетентностно-ориентированном обучении студентов вузов /В сборнике: Тенденции и перспективы развития математического образования: Материалы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, посвященного 100-летию ВятГГУ. 2014. С. 156-158.

30. Егорченко И.В. Математические абстракции и методическая реальность в обучении математике учащихся средней школы. – Автореф. дис. ... докт. пед. наук. – Саранск, 2003. – 44 с.

31. Жохов А.Л. Мировоззрение: становление, развитие, воспитание через образование и культуру: Монография. Архангельск: ННОУ «Институт управления». − Ярославль: Ярославский филиал ИУ, 2007. − 348 с.

32. Жохов А.Л. Научные основы мировоззренчески направленного обучения математике в общеобразовательной и профессиональной школе. – Дис…. докт. пед. наук. – М., 1999. – 479 с.

33. Задорожная О.В. Метод проектов в обучении математическому анализу //Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3-3. С. 41-46.

34. Захарян М.А. Анализ философско-педагогических особенностей формирования научного мировоззрения школьников // Инженерная педагогика.- 2015. Вып. 17, Т.2. С. 51-67. Режим доступа к журн.: http://elibrary.ru

35. Зверева Н.М. Методологическое знание в содержании образования / Н.М. Зверева, А.А. Касьян // Педагогика, 1993. №1. - С. 9-12.

36. Зенкевич И.Г. Эстетика урока математики: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981. -79 с.

37. Зимняя И.А. Ключевые компетенции новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. – 2003. – №5. -– С. 34– 42.

38. Иванова Т.А. Гуманитаризация общего математического образования. Н.-Новгород: НГПИ, 1998. – 206 с.

39. Касьян, А.А. Контекст образования: Наука и мировоззрение / А.А. Касьян-Н. Новгород: НГПУ, 1996. 184 с.

40. Карелина И.Е. Формирование мировоззрения учащихся при изучении геометрии в старших классах естественнонаучного профиля обучения. – Автореф. дис…. канд. пед. наук. – М., 2005. – 17 с.

41. Кенжалиева, С.З. Теория и методика реализации идейного потенциала математического анализа в школьном курсе математики: автореф. дис. канд. пед. наук // Рост. ГПУ. – Ростов-на-Дону, 2004. – 24 с.

42. Козиков И.А. В.И. Вернадский о научном мировоззрении //Философия и общество. −2014.№1. С.164-176.

43. Колмогоров, А.Н. Математика наука и профессия. − М.: Наука, 1988. − 288 с.

44. Колмогоров А.Н. О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения //Математика в школе. 1978. - №3. С. 6-9.

45. Колмогоров А.Н. Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьном курсе математики и физики //Квант. 1980.- №4. С. 15-18.

46. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии /Под ред. В.А. Успенского. –М.: Наука., 1991. – 224 с.

47. Колягин, Ю.М. О прикладной и практической направленности обучения математике Текст. / Ю.М. Колягин, В.В. Пикан // Математика в школе. -1985. -№ 6. С. 27-32.

48. Кудрявцев Л.Д. Образование и нравственность. – М., ПАИМ, 19994.-96 с.

49. Кудрявцев, Л.Д. Современная математика и ее преподавание Текст. / Л.Д. Кудрявцев. М.: Наука, 1980. - 144 с.

50. Кудрявцев Д.Д. Мысли о современной математике и методике ее преподавания Избранные труды. Т.3. – М.: Физматлит, 2008.- 434 с.

51. Кухтина Л.Ф. Научная картина мира как рациональный компонент научного мировоззрения (философско-методологический анализ): дисс. канд. философ. наук. – М., 1990. -158 с.

52. Куприенко Е.Ю. Типология учебных проектов по геометрии / Проблемы теории и практики обучения математике: Сб. научных работ, представленных на Межд. науч. конф. «65 Герценовские. чтения» /Под ред В.В. Орлова. – Спб: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2012. – С. 271-273.

53. Куприенко Е.Ю. Историко-методологические проекты по геометрии для учащихся старших классов / Геометрия и геометрическое образование: сб. трудов Межд. науч. конф. «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 70-летию В.А. Гусева), 22-25 ноября 2012 г. /под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2012. – С. 253-256.

54. Куприенко Е.Ю. Математический проект по теме «Периодические и непериодические функции» для учащихся старших классов / Науковi

записки МалоI Академіі наук Украіни: Збірник наукових праць. Серія: Педагогічні науки, - Випуск 3. –Киів 2013.- С. 273-278.

55. Куприенко Е.Ю. , Цацко А.А. Математические проекты как средство формирования научного мировоззрения у учащихся и студентов // Международная научная школа психологии и педагогики: Ежемесячный научный журнал, N 7 (15) / 2015 . С.17-20. http://nationscience.ru/

56. Куприенко Е. Ю. Понятие и типология математических проектов // Письма в Эмиссия.Оффлайн (TheEmissia.OfflineLetters): электронный научный журнал. - 2015. №8 (август). ART 2398. URL: http://www.emissia.org/offline/2015/2398.htm,

57. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов /Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко.- М.: Просвещение, 1988. С. 121-131.

58. Лакатос, И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы/ Пер. с англ. И.Н.Веселовского - М., 1967. 152 с.

59. Лодатко Е.А. Диагностирование сформированности математического мировоззрения учителя начальных классов //RELGA: научно-культурологический журнал, №18 [140] 01.10.2006 [Электронный ресурс] – Режим доступа: – URL: http://www.relga.ru/Environ (дата обращения 11.08.2015 г.).

60. Маркушевич А.И. Преподавание в школе естественно-математических наук и формирование научного мировоззрения // Математика в школе. – 1976. – № 2. – С. 32.

61. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов /А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина и др.; Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. С. 143-146.

62. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ-мат спец. /А,Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др. ; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. 416 с.

63. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов /Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л. Мокрушин и др. – М.: Просвещение, 1977. – С. 403 – 457.

64. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов математ. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В.Орлова. – М.: Дрофа, 2007. – С. 174 – 176, С. 245-250.

65. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов Текст. / под ред. Н.Jl. Стефановой, Н.С. Подходовой. М.: Дрофа, 2005. - 416 с.

66. Михайлов П.Н., Михайлова В.В. Изучение раздела «Основания геометрии» на педагогических специальностях /Математика и математическое образование: сборник трудов VI Межд. науч. конф. «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 24-26 апреля 2013 г.) /под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти. Изд-во ТГУ, 2013. С. 47-49.

67. Моносзон, Э.И., Рогова, Р.М., Правдик, Р. Формирование научного мировоззрения учащихся //Педагогика, 1985. –144с.

68. Назиев А.Х. Гуманитаризация основ специальной подготовки учителей математики в педагогических вузах. –Автореф. дис… д-ра п.н.. – М., 2000. –38 с.

69. Окунев А.А. Выстраивание собственного понимания школьного курса математики //Математика в школе, 2007, №1. – С. 20-26.

70. Окунев А.А. Выстраивание собственного понимания школьного курса математики //Математика в школе, 2007.№3. - С. 57-63.

71. Паладянц, Е.А. Формирование научного мировоззрения школьников средствами межпредметной интеграции: дис. … канд. пед. наук. –Армавир, 1999. –196с.

72. Погорелов, А.В. Геометрия: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2001. – 128 с.

73. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер.с англ. – М.: Наука, 1975. - 464 с.

74. Пойа, Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание . – М.: Наука, 1970. – 452 с.

75. Потоскуев Е.В. Геометрия. Рабочая программа к линии учебников Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича // Рабочие программы. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы: учебно-методическое пособие /Сост. О.В. Муравина. - М.: Дрофа, 2013. С.126-186 (ФГОС).

76. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: учеб. для классов с углубл. и профильным изучением математики в общеобразоват. учреждениях /Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 7-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2010. С. 335-343.

77. Потоскуев Е.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, Геометрия. Геометрия. 10 кл.: Углублённый уровень: учебник /Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2013. С. 9-32.

78. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики /Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 4-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2008. С. 7-18.

79. Примерная Основная образовательная программа Основного общего образования / В редакции протокола № 3/15 от 28.10.2015 федерального учебно-методического объединения по общему образованию. http://muravin2007.narod.ru/p101.htm

80. Программы общеобразовательных учреждений. Геометрия. 10-11 классы / Сост. Т.А. Бурмистрова. - М.: Просвещение, 2009. - 97 с.

81. Профессиональный стандарт. Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель). [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: www.rosmintrud.ru/docs/mintrud\orders/129/

82. Пуанкаре, А. О науке /Пер. с франц.; Под ред. Л.С. Понтрягина. – М.: Наука, 1983. –560 с.

83. Рыбников, К.А. Введение в методологию математики Текст. / К.А. Рыбников. М., МГУ, 1979. - 128 с.

84. Самаров К., Уроев В. Модель Пуанкаре //Квант, 1984.−№6. − С. 5−11.

85. Санина Е.И., Помелова М.С. Возможности современных форм обучения математике при подготовке студентов-гуманитариев //Современные проблемы науки и образования. −2012. −№ 4. −С. 229

86. Саранцев, Г.И. Гуманизация и гуманитаризация школьного математического образования // Педагогика. 1999. - №4. - С. 39-45.

87. Семенов Е. Точка, прямая... - что это такое? //Квант, 1975. № 11. С. 73-75.

88. Семенов Е. Точка, прямая... - что это такое? //Квант, 1975. № 12. С. 68-71.

89. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 кл.: учебн. для общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). – М.: Мнемозина. http://geometry2006.narod.ru/ProgTemPlan10-11.doc

90. Татаринов Д.А. Формирование основ научного мировоззрения учащихся 5-6 классов на интегрированных занятиях математического кружка. – Автореф. дис…. канд. пед. наук. – Ярославль, 2013. – 24 с.

91. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов матем. спец. педвузов /Под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд, испр. и доп. – Н.Новгород: НГПУ, 2009. – 355с.

92. Тесленко И.Ф. Формирование диалектико-материалистического мировоззрения учащихся при изучении математики: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979. – 136 с.

93. Тестов, В.А. Стратегия обучения математике Текст. / В.А. Тестов. — М.: Технологическая школа бизнеса, 1999. 304 с.

94. Тихомиров В.М. Геометрия в современной математике и математическом образовании // Математика в школе. – 1993. - №4. С. 7.

95. Утеева Р.А. Математические идеи и открытия как основа образования и культуры /Математическое образование: концепции, методики, технологии: сб. трудов IV межд. науч. конф. «Математика. Образование. Культура», 21-24 апреля 2009 г., Россия, г. Тольятти /под общ. ред. Р.А. Утеевой. – В 3-ч. Ч.2. Тольятти, ТГУ, 2009. – С. 56- 60.

96. Философский словарь /под ред. И.Т. Фролова. – 4-е изд. – М.: Политиздат, 1980. С.219.

97. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. – М.: Просвещение, 2011. -48 с. – (Стандарты второго поколения).

98. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012. № 413. [Электронный ресурс].
Режим доступа: URL:http://www.ug.ru/new_standards/5).

99. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки; уровень бакалавриата). Утвержден 9 февраля 2016 г. Приказом Минобрнауки РФ. [Электронный ресурс]. Режим доступа:
http://edu.tltsu.ru/sites/sites_content/site124/html/media92530/440305.pdf

100. Шабанова, М.В. Методология учебного познания как цель изучения математики: Монография. −Архангельск: Поморский университет, 2004. −402 с.

101. Шабанова М.В. Формирование методологических знаний при изучении математики в системе «школа-вуз». – Автореф. дис. … докт. пед. наук. – М., 2005. – 36 с.

102. Щербакова Р.Н., Пичурин Л.Ф. Значение аксиоматики в современном школьном курсе геометрии /Воспитание учащихся при обучении математике: Кн. для учителя: Из опыта работы /Сост. Л.Ф. Пичурин. – М.: Просвещение, 1987. С.11– 17.

103. Pardala A., Uteeva R, Ashirbaev N. Mathematical education in terms of innovative development // MATHEMATICS TEACHING-RESEARCH JOURNAL ONLINE. – New York. –V 7 N 4, Summer, 2015.