МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

ФОРМИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

М А Г И С Т Е Р С К А Я   Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Направление подготовки магистра: 44.04.01 *Педагогическое образование*
Направленность (профиль): *Математическое образование*

Студент Я.А. Урусова ___________

Научный
Руководитель: к.п.н., доцент кафедры алгебры и геометрии И.В. Антонова ___________

Руководитель программы: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»_______ 2016 г.

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. ФГОС среднего (полного) общего образования [63] ориентирован на становление определенных личностных характеристик выпускника: креативный и критически мыслящий, активно и целенаправленно познающий мир; владеющий основами научных методов познания окружающего мира; уважающий мнение других людей, умеющий вести конструктивный диалог, достигать взаимопонимания и успешно взаимодействовать и др.

Одной из актуальных проблем преподавания математики является *проблема развития математического мышления учащихся,* так как качество обучения их математике определяется также и уровнем математического развития *учащихся*, степенью их подготовки к самостоятельному овладению знаниями [69].

В настоящее время в теории и методике обучения математике уделяется внимание вопросами *модернизации задачного материала* в современных учебных пособиях, так как в них зачастую предполагается алгоритмический способ решения задач [39].

Вместе с этим, эффективно *организованная учебная деятельность* обучающихся в ходе решения задач является одним из средств формирования *критичности мышления учащихся,* что влияет на возможность успешного осуществления их творческой деятельности.

Правильный *подбор методов обучения* также позволяет развивать критическое мышление учащихся [38].

Исследования по формированию критического мышления школьников были начаты в 70-е годы прошлого столетия и возобновлены лишь в конце 90-х годов XX века [48].

В работах зарубежных исследователей рассматривались не только теоретические аспекты проблемы формирования критического мышления, но и описывались методические рекомендации по его формированию для учителей [1].

Анализ ранее выполненных *диссертационных работ*, посвященных *проблеме развития критичности мышления учащихся*, показал, что они были рассмотрены в аспекте:

– *нестандартных задач как средства развития творческих способностей учащихся*, которые способствуют развитию гибкости и критичности мышления; автором представлены общие положения методики обучения решению нестандартных задач, к которым отнесены задачи, порождающие для учащегося напряженную ситуацию, требующую для своего разрешения гибкости и критичности мышления, изобретательности, распределения внимания, выработки новых способов действий; разработаны *учебных материалы,* включающие нестандартные задачи, направленные на развитие творческих способностей учащихся, особенностью которых является организация творческой деятельности, ориентированной на познание, создание, преобразование и использование в новом качестве математических объектов (С.Ф. Митенева [39], 2005);

– выявления основных *путей формирования умений критически мыслить в контексте решения математических задач*; автором обоснован подход формирования умений критически мыслить в процессе решения математических задач, выявлены уровни сформированности данных умений, а также разработана методика формирования данных умений при обучении элементарной математике, теории и методике обучения математике в педвузе, разработана и апробирована модель формирования у студентов математических специальностей педвузов данных умений (Е.Г. Журавлева [15], 2008);

– выявления возможностей и разработки *дидактических механизмов* (метода составления бифункциональных учебных материалов по математике, бифункциональных учебных математических материалов, учебно-методического комплекса) формирования критического мышления учащихся при обучении математике в основной школе; автором разработана дидактическая модель и методика формирования критического мышления учащихся при обучении математике в основной школе, на основе *педагогической технологии* развития критического мышления *посредством чтения и письма* (О.В. Андронова [1], 2010).

Результаты констатирующего эксперимента, анализ научно-методической литературы по теме исследования позволили сделать вывод о том, что для практики обучения математике в общеобразовательной школе проблема методики формирования критического мышления учащихся при обучении математике представляется недостаточно решенной.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречиями между*: требованиями, предъявляемыми к обязательным результатам освоения программы среднего (полного) общего образования по математике, и фактическим состоянием методики методика формирования критического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

Необходимость разрешения этого противоречия определяет актуальность **проблемы диссертационного исследования:** обоснование и разработка методики формирования критического мышления при обучении математике учащихся общеобразовательной школы, ориентированной на качественное усвоение ими знаний и умений согласно ФГОС.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика формирования критического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

Целью исследования заключается в теоретическом обосновании и экспериментальной проверке предлагаемой методики формирования критического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

Гипотеза исследования заключается в том, что повышение качества математической подготовки учащихся в целом достигается, если выявить методические особенности формирования критического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе и с учетом этих особенностей разработать соответствующую методику.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть понятие задачи и их роль в обучении математике.

2. Выявить различные подходы к определению понятий «критичность» и «критическое мышление» на основе анализа психолого-педагогической литературы.

3. Рассмотреть методы определения уровня критичности мышления учащихся.

4. Раскрыть различные приемы и средства формирования критического мышления учащихся общеобразовательной школы при обучении математике.

5. Выделить методические особенности организации обучения математике учащихся с помощью задач на развитие критичности.

6. Раскрыть кейс-технологию как одну из форм организации обучения математике по формированию критического мышления учащихся старших классов общеобразовательной школы на примере темы «Отбор корней при решении логарифмических уравнений».

7. Разработать методические материалы по теме «Логарифмическая функция», способствующие развитию критичности учащихся общеобразовательной школы.

8. Представить результаты констатирующего педагогического эксперимента.

Методы исследования: анализ педагогической, психологической и методической литературы по проблеме исследования; анализ программы и основных действующих учебников по математике для средней общеобразовательной школы, изучение опыта работы учителей; проведение констатирующего педагогического эксперимента.

Основные этапы исследования:

9 семестр (2014/15 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы);

10 (А) семестр (2014/15 уч.г.): определение психолого-педагогических и методических основ исследования по теме диссертации;

11(В) семестр (2015/16 уч.г.): разработка методики организации контроля знаний и умений учащихся на примере темы «Логарифмическая функция»;

12 (С) семестр (2015/16 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика формирования критического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- выявлены различные подходы к определению понятий «критичность» и «критическое мышление»;

- раскрыты методы определения уровня критичности мышления;

- определены различные приемы и средства формирования критического мышления учащихся общеобразовательной школы при обучении математике;

- представлены методические особенности организация обучения математике учащихся с помощью задач на развитие критичности в общеобразовательной школе.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические материалы (самостоятельная работа, математический диктант, тест, кроссворд) по теме «Логарифмическая функция» для учащихся профильных классов; методический проект изучения темы «Отбор корней при решении логарифмических уравнений» по кейс – технологии, направленные на формирование критического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе. Данные материалы могут быть использованы учителями математики в практической деятельности, а также студентами педагогических направлений подготовки при прохождении практики.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обусловлены использованием данных теории и методики обучения математике, анализом педагогической практики и личным опытом работы, сочетанием теоретических и практических методов исследования, а также проведенным педагогическим экспериментом.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Содержание работы учителя математики по формированию критического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе определяется соответствующими *умениями критически мыслить*; каждому умению должны быть определенные *упражнения*.

2. Кейс-технология (на примере темы «Отбор корней при решении логарифмических уравнений»), как одна из форм организации обучения математике, способствует формированию критического мышления учащихся старших классов при обучении математике в общеобразовательной школе.

На защиту также выносится методические материалы (самостоятельная работа, математический диктант, тест, кроссворд) на формирование критичности мышления при изучении темы «Логарифмическая функция».

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на научно-методических семинарах преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ (декабрь 2014, июнь 2015, декабрь 2015, май 2016); научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (апрель 2015, апрель 2016); VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (ТГУ, апрель 2015, диплом за 3 место).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период педагогической и научно-исследовательской практик на базе кафедры алгебры и геометрии Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе МБУ «Школа №80» г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях:

1.Урусова Я.А. О различных подходах к определению понятий «критичность» и «критическое мышление» / Я.А. Урусова, И.В. Антонова // Математика и математическое образование: сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2015. – С. 99-103.

2. Урусова Я.А. К вопросу о формировании критичности мышления у учащихся при изучении математики в общеобразовательной школе // Я.А. Урусова, И.В. Антонова // Вестник магистратуры. - 2016. - №2 (53). - Том 1. – С. 106-111.

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы (70 наименований) и Приложений.

ГЛАВА I. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ КРИТИЧНОСТИ МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

§ 1. Понятие задачи и их роль в обучении математике

Понятие задачи предстает одним из фундаментальных в психологии, в кибернетике, в любой из наук естественно-математического цикла, в том числе в теории обучения и воспитания математике. В литературе, посвященной указанным отраслям знаний, это понятие содержит разнообразные трактовки, поскольку в силу особенности той или иной научной дисциплины изучаются различные аспекты данного объекта.

В толковом словаре С.И. Ожегова под «задачей» понимается: 1) «то, что требует исполнения, разрешения»; 2) «упражнение, которое выполняется посредством умозаключения, вычисления» [45].

В *философской* точки зрения задача - это знание о незнании, возникающее в противоречии между субъектом и объектом [67].

В психологии понятие задачи связывают с деятельностью субъекта и условиями ее протекания. Как пишет А.Н. Леонтьев, задача - это «цель, данная в определенных условиях» [26].

В педагогике А.М. Леонтьев не связывает явно проблемную ситуацию с задачей, однако автор отмечает, что к возникновению последней приводит осознание субъектом проблемности некоторой ситуации и указание к ее разрешению. Аналогичная точка зрения отражена и в характеристике задачи, предложенной В.И. Пушкиным: *«Задача - это результат определенного этапа мыслительной деятельности человека. Постановка, формулировка задачи зависит от того, как была проанализирована проблемная ситуация»* [26].

С.Л. Рубинштейн основной *формой проявления задачи* считает ее речевую формулировку [53].

Л.М. Матюшкин под задачей понимает «способ знакового проявления задания одним человеком другому (самому себе), включающий указания на цель и условия ее достижения» [34].

В теории и методике обучения математике Е.И. Лященко говорит, что «учебная задача в случае решения математических задач – это такая задача, цель решения которой получить:

1. Теоретическое обобщение математических задач определенного типа.
2. Метод решения математических задач данного типа, который определяется взаимосвязью специфических и общих учебно-познавательных действий, т.е. обучаемые овладевают общим способом решения всех частных задач определенного типа» [29].

Н.Л. Стефанова утверждает, что «существует несколько определений понятия задачи: как цели, заданной в определенных условиях, как модели проблемной ситуации и как объекта мыслительной деятельности» [56].

В большинстве исследований понятия *«задача»* и «проблемная ситуация» не отождествляют, хотя они имеют много общего.

Так, *Л.М. Фридман* определяет задачу как «всякую знаковую модель проблемной ситуации». Автор считает понятие проблемной ситуации исходным, так как различия между понятием «задача» и «проблемная ситуация» связаны с тем, что последняя существует реально, а задача является абстрактной моделью реальной ситуации и поэтому проблемная ситуация всегда богаче содержанием, чем задача, которая отражает лишь некоторые ее стороны. Для каждой проблемной ситуации существует одна или несколько задач, которые могут отличаться друг от друга как совокупностью представленных в них свойств ситуации, так и языком, на котором она выражена.

Автор в понятии «задача» выделяет составные части [65]*:*

- предметная область, состоящая из одного или нескольких фиксированных объектов (предметов) или множеств;
- предикаты, связывающие между собой объекты этой области.

Л.М. Фридман указывает, что любая задача состоит из [65]*:*

- условия задачи, представленного в высказывательной форме;

- объекта задачи, то есть какого-либо элемента предметной области или предиката;

- цели задачи, состоящей в нахождении значения объекта задачи, обращающего условие в верное высказывание.

В отличие от Л.М. Фридмана *Ю.М. Колягин* в математической задаче выделяет *определенные компоненты:*

- условие задачи;

- заключение задачи;

- преобразование условия для нахождения искомого;

- теоретическое обоснование решения, считая математическими все задачи, в которых переход от условия задачи к ее заключению, осуществляется математическими средствами. К этой группе автор относит и задачи, все компоненты которых являются математическими объектами, и прикладные задачи, решаемые математическим аппаратом [23].

Проблеме классификации задач в современной методической и психолого-педагогической литературе посвящены работы [8; 23; 29; 56; 58].

По характеру требования задачи делятся на задачи на доказательство; построение; вычисление.

По функциональному назначению (К.И. Нешков, А.Д. Семушин) существуют задачи с:

- дидактическими функциями;

- познавательными функциями;

- развивающими функциями.

По величине проблемности (У. Рейтман, Ю.М. Колягин) выделяют:

- стандартные *задачи*, где известны все ее компоненты;

- обучающие *задачи*, где неизвестен один из четырех ее компонентов;

- поисковые *задачи*, где неизвестны два из четырех ее компонентов;

- проблемные *задачи*, где неизвестны три из четырех ее компонентов.

По методам решения задач существуют задачи на:

- геометрические преобразования,
- векторы и др.

По числу объектов в условии задачи и связей между ними выделяют простые и сложные задачи.

По компонентам учебной деятельности существуют:

- организационно-действенные задачи;
- стимулирующие задачи;
- контрольно-оценочные задачи.

Кроме того, в учебно-методической литературе различают: стандартные и нестандартные задачи; теоретические и практические задачи; устные и письменные задачи; одношаговые, двушаговые задачи и др.; устные, полуустные, письменные задачи и т.д. [58].

Задачи предстают основным средством, которое используется при обучении математике с целью формирования знаний, умений и навыков обучащихся.

Посредством решения задач реализуются все цели обучения математике: образовательные, развивающие, воспитательные.

К развивающим задачам относятся:

- задачи, для решения которых не требуются новые знания по предмету, надо применять имеющиеся знания в иной комбинации;
- задачи, с помощью и на основе которых приобретаются знания по предмету (П.М. Эрдниев) Основная идея *этих задач* заключается в составлении комплексного задания (укрупненной единицы), включающего: решение обычной задачи, составление и решение аналогичной и обратной задач, задачи по некоторым элементам общим с исходной задачей, задачи, обобщенные по тем или иным параметрам с исходной и т. д. [10].

П.М. Эрдниев отмечает, что при построении системы *обучающих задач* необходимо:

1) обязательно чередовать упражнения;

2) однотипных заданий должно быть не более трех;

3) формировать умение владеть каким-либо действием во всех возможных ситуациях;

4) совместно с упражнениями на прямое действие выполнять упражнения на обратные действия;

5) переходить от действия с моделями к умственному этапу (без наглядной модели, в уме) [10].

К системам учебных задач существует различные требования. Так, в учебном пособии Е.И. Лященко [29] выделены требования к системам задач на усвоение понятия и его определения, на усвоение теоремы и ее доказательства, на усвоение правил (алгоритмов).

Решение любой задачи осуществляется в несколько этапов [58]:

I. Ознакомление с содержанием задачи.

II. Поиск решения - выдвижение плана решения задачи.

III. Процесс решения - реализация плана решения.

IV. Проверка решения задачи.

Таким образом, основополагающим в развитии познавательных процессов является развитие мышления школьников; под задачей мы будем понимать всякую знаковую модель проблемной ситуации.

§ 2. Развитие критичности мышления учащихся при обучении математики

2.1. Особенности математического мышления и его компоненты

Рассмотрим различные подходы к определению понятия мышления, представленные в различной психолого-педагогической и методической литературе.

В «Педагогическом энциклопедическом словаре» под мышлением понимают опосредованное отражение внешнего мира, которое опирается на впечатления от реальности и даёт возможность человеку в зависимости от усвоенных им знаний, умений и навыков правильно оперировать информацией, успешно строить свои планы и программы поведения [4]**.**

В педагогике Г.М. Коджаспирова, А.Ю. Коджаспиров рассматривают мышление как *познавательная деятельность личности*, характеризующаяся обобщенным и опосредованным отражением действительности [21].

Известный психолог А.Н. Леонтьев считает, что «жизненный правдивый подход к обучению – это такой подход к отдельным образовательным задачам, который исходит из требований к человеку: каким человек должен быть в жизни и чем он должен быть для этого вооружён, какими должны быть его знания, его мышление, его чувства и т.д.» [26].

Д. Дьюи подчеркивает, что если с этой точки зрения посмотреть на задачи общего образования и в частности на задачи школьного курса математики, то можно прийти к выводу, что одной из первоначальных является задача развития мышления учащихся.

Формирование критического мышления учащихся младших и средних классов требует внедрения таких известных методик и методик формирования процесса, как экспертный анализ и оценка действительных данных, сравнение, соотнесение, обобщение, решительное заявление загвоздки создающих задач, установление причинно-следственных связей, мотивировка причин с ошибками опечаток и несуразностей, подтверждение предположения и опровержение [70].

Психологи и исследователи в области теории и методике обучения математике выделяют различные *виды мышления*:

- теоретическое и практическое;
- словесно-логическое и наглядно-действенное;
- аналитическое и интуитивное;
- реалистическое и артистическое;
- продуктивное и репродуктивное;
- непроизвольное и произвольное.

Для развития естественно-математического мышления учащихся при обучении решению задач, необходимо целенаправленное постепенное формирование у них таких *основных умений и навыков,* как [44]:

1. Анализ и синтез.
2. Сравнение.
3. Обобщение.
4. Конкретизация.
5. Абстрагирование.

Анализ – это мысленное разложение целого на части или мысленное выделение из целого его сторон, действий, отношений.

Синтез – это обратный анализу процесс мысли, это объединение частей, свойств, действий, отношений в одно целое. Анализ и синтез – две взаимосвязанные логические операции. Синтез, как и анализ, может быть как практическим, так и умственным.

Анализ и синтез сформировались в практической деятельности человека.

Сравнение – это установление сходства и различия предметов и явлений. Сравнение основано на анализе. Прежде чем сравнивать объекты, необходимо выделить один или несколько их признаков, по которым будет осуществлено сравнение.

Д.М. Шакирова отмечает, что в процессе критического мышления в первую очередь доминирует такая мыслительная операция как *сравнение,* то есть сопоставление по типу: правильно – неправильно, больше – меньше, верно – неверно и т.д.» [70].

Сравнение может быть односторонним, или же неполным, и многосторонним, либо наиболее полным. Сравнение, как анализ и синтез, может быть разных уровней – поверхностное и более глубокое. В этом случае мысль человека идёт от внешних признаков сходства и различия к внутренним, от видимого к скрытому, от явления к сущности.

Обобщение – это выделение в предметах и явлениях общего, которое выражается в виде понятия, закона, правила, формулы и тому подобное. Обобщение плотно сплетено с абстракцией. При обобщении предметы либо явления объединяются на базе их соединено совместных и ощутимых симптомов. В обучающей тренировочной деятельности обобщение, как правило, проявляется в определениях, выводах, правилах. Учащимся зачастую трудно выполнить обобщение [44].

. *Конкретизация* – это процесс, обратный абстрагированию и неразрывно связанный с ним; представляет собой возвращение мысли от общего и абстрактного к конкретному с целью раскрытия содержания.

Абстрагирование – это процесс мысленного отвлечения от некоторых признаков, сторон конкретного с целью лучшего познания его.

Один из типов мышления - *творческое мышление*, «результатом которого является открытие принципиально нового или усовершенствованного решения той или иной задачи»; *критическое мышление* представляет собой *проверку предложенных решений.* Творческое мышление направлено на создание новых идей, а *критическое* – на выявление их недостатков. Для эффективного решения задач необходимы оба вида мышления, хотя используются они раздельно: «творческое мышление является помехой для критического, и наоборот» [27].

В.Н. Дружинина в [13] отмечает, что *критическое мышление* является левополушарным, сознательным, вербально-логическим, абстрактно-схематическим, дедуктивным, аналитическим, сукцессивным, а *творческое мышление* – правополушарным, неосознанным, интуитивным, синтетическим.

С.В. Лаптинская **[**25**]** результаты сравнения данных видов мышления представляет в виде Таблицы 1.

Характеристику математического мышления считается целесообразным рассматривать в таких аспектах, как [69]: 1) *содержание* (основные типы математического мышления); 2) *математическая деятельность* (методы научного, математического исследования); 3) *формы* (качества мышления, определяющие стили мышления); 4) *субъективные свойства характера человека, занимающегося математикой* (нравственные качества).

Таблица 1

Критерии творческого мышления (по С.Д. Смирнову)	*Критерии критического мышления (по А.В. Тягло и Т.В. Воропай)*
Деятельность с целью получения нового результата	Планирование наиболее коротких путей получения нового результата
Преодоление логического разрыва на пути от условий задачи к ее решению (за счет иррационального начала, интуиции)	Отказ от традиционных форм решения задач путем «мозговой атаки»; часто следование «от обратного»
Умение самостоятельно увидеть и сформулировать проблему	

А.А. Черных подчеркивает, что в настоящее время главной целью обучения учащихся должно быть развитие у них умения учиться, для чего им необходимо совершенствовать качества мышления, в том числе, его критичность.

Так, автор составил сводную *характеристику компонентов математического мышления* (табл. 2) [69]*:*

Таблица 2

Характеристика компонентов математического мышления

Содержание (типы мышления)	*Деятельность*	*Формы (стиль мышления)*	*Субъективные свойства характера*
конкретное абстрактное (аналитическое, логическое, пространственное, математическое). индуктивное функциональное структурное утилитарное творческое	наблюдение и опыт; индуктивный; дедуктивный; традуктивный (применение аналогии); моделирование (использование абстрактных математических моделей)	Гибкость. Активность. Целенаправленность Широта. Глубина. Критичность, самокритичность, лаконичность, ясность и точность речи и записи. Оригинальность. Доказательность.	Вкус к исследованию. Способность сосредоточиться. Настойчивость. Склонность к творчеству. Любознательность. Интеллектуальная честность. Точность, правильность. Ясность, сжатость речи. Способность к воображению и фантазии. Удовлетворенность процессом работы и её результатом.

2.2. Различные подходы к определению понятий «критичность» и «критическое мышление»

Способность критически мыслить была важны во все времена, в XXI веке каждому человеку требуется принимать большое количество важных решений; зачастую учащиеся лишаются обучения способности мыслить [66].

О *критичности мышления* говорит умение дать оценку рациональности способов решения задач, как в целом, так и отдельных операций; осуществить самоконтроль своей деятельности, спрогнозировать результат использования различных способов решения задач [18].

В психолого-педагогической литературе встречаются различные точки зрения на *понятие критичности мышления*.

В *толковом словаре* С.И. Ожегова *критичность* трактуется как «способность относиться с критикой к чему-либо, видеть недостатки» [45].

В *философии* [25] *критическое мышление* связывают с: 1) постановкой перед собой вопросов и осуществление планомерного поиска ответов; 2) вскрытием причин и последствий определенных фактов; 3) проявлением вежливого скептицизма, сомнением в общепринятых истинах, постановкой постоянного вопроса: а что, если ?..; 4) выработкой собственной точки зрения по определенному вопросу и способность ее отстаивать логическими доводами; проявлением повышенного внимания к аргументам оппонента и логического их осмысления.

Рассмотрим различные подходы к понятию критического мышления *в трудах* отечественных и зарубежных *психологов.*

В психологии чаще всего под критическим мышлением понимают *использование когнитивных техник или стратегий*, которые увеличивают вероятность грамотного конечного результата [66].

О.К. Тихомиров в работе «Психология мышления» приводит несколько подходов к понятию критичность *в отечественной психологии*:

1) критичность – это «умение строго оценивать работу мысли, тщательно взвешивать все доводы за и против намечающихся гипотез и подвергать эти гипотезы всесторонней проверке» (Б.М. Теплов, [59]);

2) проверка, критика, контроль характеризуют мышление как сознательный процесс (С.Л. Рубинштейн, [53]);

3) взаимосвязь самостоятельности ума с его критичностью, то есть с умением не поддаваться внушающему влиянию чужих мыслей, а строго и правильно оценивать их, видеть их сильные и слабые стороны, вскрывать, то ценное, что в них имеется, и те ошибки, которые допущены в них; критичность является необходимой предпосылкой творческой деятельности (А.А. Смирнов, [59]);

4) критичность - это умение обдуманно действовать, сличать, проверять и исправлять свои действия в соответствии с ожидаемыми результатами (Б.В. Зейгарник, [59]).

Кроме того, в работах зарубежного психолога Д. Халперна [66], критическое мышление – это: 1) «…*использование таких когнитивных навыков и стратегий, которые увеличивают вероятность получения желательного результата*; отличается взвешенностью, логичностью и целенаправленностью»; 2) направленное мышление, так как оно нацелено на получение желаемого результата.

Автор определяет шесть *основных признаков критически мыслящего человека*: 1. Готовность к планированию. 2. Гибкость. 3. Настойчивость. 4. Готовность исправлять свои ошибки. 5. Осознание. 6. Поиск компромиссных решений.

В педагогике под критическим мышлением понимают:

1) *один из способов интеллектуальной деятельности человека,* который характеризуется *следующими умениями:* определять ложные стереотипы, ведущие к неправильным выводам; выявлять предвзятое отношение, мнение и суждение; уметь отличить факт, от предположения и личного мнения; подвергать сомнению логическую непоследовательность

устной и письменной речи; определять суть проблемы и альтернативные пути ее творческого решения; уметь делать вывод о том, чьи конкретно ценностные ориентации, интересны, идейные установки отражают текст; избегать категоричности в утверждениях и т.д. (Г.Д. Дмитриев, [11]);

2) *специфическая форма оценочной деятельности субъекта познания*, направленная в самом общем смысле на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам, включающая определенные процедуры и способствующая смысловому самоопределению субъекта познания по отношению к самым разнообразным проявлениям окружающего мира и его продуктивному преобразованию (В.А. Попков, [48]);

3) *интеллектуально организованный процесс*, направленный на активную деятельность по осмыслению, применению, анализу, обобщению или оценке информации, полученной или создаваемой путем наблюдения, опыта, рефлексии, рассуждений или коммуникации как руководство к действию или формированию убеждения (Д. Дьюи, [5]);

4) *прижизненно формирующееся мышление*, развитие которого можно ускорить с помощью специально организованного обучения, тренируя школьников, прежде всего в нахождении и опровержении ошибок, а также в рецензировании ученических работ (С.И. Векслер, [6]).

Отметим, что ещё П.Ф. Каптерев (1849-1922 гг.) доказывал необходимость в школьном процессе обучения «создавать» у ребенка такое мышление, посредством которого *учащийся сам в состоянии вырабатывать субъективно новые знания* [20].

Развитие критичности ведёт к формированию у человека *критического мышления.*

Кроме того, Д. Дьюи отмечает, что все подходы к понятию критического мышления в психологии, педагогике и смежных науках довольно близки по смыслу, и предлагает определение данного понятия, передающего суть данных подходов: «критическое мышление - это *использование когнитивных техник или стратегий, которые увеличивают вероятность получения желаемого конечного результата*»; развитие критичности ведёт к формированию у человека критического мышления [14].

Что же такое критическое мышление? По мнению С.В. Лаптинской, «думать критически» означает [25]:

- проявлять любознательность и использовать исследовательские методы: ставить перед собой вопросы и осуществлять планомерный поиск ответов;

- не довольствоваться фактами, а вскрывать причины и последствия этих фактов;

- проявлять вежливый скептицизм, сомнение в общепринятых истинах, ставить постоянный вопрос: а что, если ?...;

- вырабатывать свою точку зрения по определенному вопросу и способность отстоять эту точку зрения логическими доводами; проявлять повышенное внимание к аргументам оппонента и логически их осмыслять.

В теории методики обучения математике Е.Г. Бурмистровой дается такое определение критичности мышления: «Критичность мышления – это очень важное *качество, которое учитель может всячески поддерживать и развивать*. Автор подчеркивает, что возможности уроков математики в формировании критичности мышления трудно переоценить; в процессе обучения математике значительное место отводиться выстраиванию рассуждений и обоснований, поиску решения доказательства, опровержению и проверке найденного решения» [5].

М.И. Зайкин [18] связывает *критичность мышления* учащихся с их умением дать оценку рациональности способов решения задач, как в целом, так и отдельных операций; осуществить самоконтроль своей деятельности, спрогнозировать результат использования различных способов решения задач.

Кроме того, одним из главных *условий критичности мышления* является знание субъектом обучения правил логики, классификации, сравнения и обобщения [60].

С.В. Лаптинская в качестве характерных, устойчивых *особенностей развитого критического мышления* выделяет:

- оценочность, включая и ценностную сторону оценки;
- открытость новым идеям;
- рефлексия оснований собственных критических суждений.

Е.Г. Журавлева [16] подчеркивает, что, в решении проблемы развития критического мышления учащихся можно выделить несколько подходов: *критическое мышление* понимается как *свойство личности*, *качество ума*, *форма оценочной деятельности*, *вид мышления*.

Автор под *умением критически мыслить* понимает *способ выполнения деятельности*, направленной на анализ педагогических ситуаций определенного рода. Овладение этой деятельностью обеспечивается следующими *умениями*:

- умением критично подходить к полученной информации;
- умением находить ошибки, устранять их и выявлять причины допущенных ошибок; умением проводить опровержение;
- умением объективно оценивать выдвинутые гипотезы и результаты их проверки;
- умением эффективно осуществлять отбор полезной информации, содержащейся в самой задаче, процессе решения и его результатах.

О.В. Андронова [1] определяет критическое мышление как *целенаправленную самостоятельную деятельность индивида,* в процессе которой происходит постановка вопросов и уяснение проблем, формулировка гипотез, их проверка, убедительная аргументация недостатков и достоинств содержания, подвергнутого критике, поиск компромиссных решений.

А.В. Тихоненко, Ю.В. Трофименко под критическим мышлением понимают такую *систему критических действий*, как [60]: проявление детской любознательности; выработку собственной точки зрения по определенному вопросу сложившейся ситуации; способность наблюдать, сравнивать, определять, отстаивать выработанную точку зрения четко обоснованными логическими выводами; способность прогнозировать ситуацию, проблему и умение использовать в практической деятельности исследовательские методы.

По мнению авторов, *критическое мышление направлено* на умение:

1) исследовать факты, доказательства, надежность источников информации;

2) ставить в конкретных ситуациях рациональные вопросы;

3) вырабатывать дополнительные разнообразные подкрепления выдвинутых аргументов, корректно определяя проблему;

4) анализировать идеи, предложения и принимать независимые продуманные решения;

5) занимать критическую позицию, мыслить нестандартно;

6) быть коммуникативным: учитывать другие объяснения, быть терпимым, толерантным, избегать изложения эмоциональных рассуждений, объяснений.

Таким образом, *критическое мышление подразумевает* обязательное присутствие *этапа проверки и оценки предположений перед ответом на поставленный вопрос* с точки зрения их достоверности и значимости, в противовес оперированию готовыми фразами, подсказанными память, без участия их творческой переработки. Под критичностью мышления мы будем понимать «*специфическую форму оценочной деятельности субъекта познания*, направленную в самом общем смысле на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам, включающую определенные процедуры и способствующую смысловому самоопределению субъекта познания по отношению к самым разнообразным проявлениям окружающего мира и его продуктивному преобразованию.

2.3. Методы определения уровня критичности мышления учащихся

Д.М. Шакировой при формировании критического мышления старшеклассников используется определенная *технология*, основанная на общедидактических *принципах построения*: информационной насыщенности учебного и практического материала для использования аргументов, доказательств или опровержений, основанных на конкретных фактах, источниках, данных; социальной обусловленности предмета осмысления; коммуникативности в процессе осмысления проблемы и ее обсуждения; проблемности содержания материала; мотивации и потребности в знании; научности, достоверности и доступности информации - способности и умения определить ценность информации, необходимой для формирования критического мышления.

Автором установлено, что развивать критическое мышление можно в любом возрасте, без специального предварительного обучения, но эффективность этого процесса и его результат наиболее значимы при системном последовательном обучении данному типу мыслительной деятельности, начиная со школы и продолжая в вузе [70].

Кроме того, Д.М. Шакировой выделены *этапы формирования критического мышления:* 1) актуализация знаний, пробуждение интереса, любознательного отношения к теме, определение целей изучения материала; 2) осмысление новой информации, критическое чтение и письмо; 3) размышление, или рефлексия, формирование личного мнения и отношения к материалу; 4) обобщение и оценка информации, проблемы, способов ее решения и проявление собственных возможностей; установлено, что при формировании критического мышления старшеклассников эффективнее использовать групповую и коллективную *формы организации учебной деятельности* учащихся; выявлены *частные методы оценки критического* *мышления* старшеклассников: тесты с готовыми вариантами ответов; тесты с альтернативными ответами; протоколы наблюдений за процессом дискуссии; индивидуальные протоколы самоанализа обучаемого по предложенному алгоритму; описаны *методы определения уровня критичности мышления* старшеклассников, которые делятся ею на три группы: а) комплекс средств, приемов и техник оценки мыслительных компетенций критичности ума в применении к широкому классу проблем, ситуаций, ценностей и установок на критичность; б) частные методики и техники оценки способностей и умений критически мыслить в определенных ситуациях, конкретных предметных областях; в) оценивание отдельных аспектов критического мышления, выраженных в виде конкретных умений типа видеть и осмысливать проблемы, сравнивать свои и чужие доказательства при разрешении проблемы.

Для *повышения уровня сформированности умений критически мыслить* у учащихся Е.Г. Журавлевой разработана соответствующая *модель*, которая представляет собой совокупность компонентов, включающая *цель*, *принципы* (принцип деятельностного подхода; принцип целеполагания; принцип дифференцированного подхода; принцип развивающего контекста; принцип адекватного контроля; принцип вариативности), *этапы формирования*, *методы* и *формы организации обучения*, что в результате обеспечивает достижение учащимися определенных *уровней сформированности умений* (минимального, среднего, оптимального, высокого).

В качестве *этапов формирования* у учащихся умения критически мыслить автор выделяет [15]:

1) актуализацию познавательных мотивов учащихся к оценке решения математической задачи;

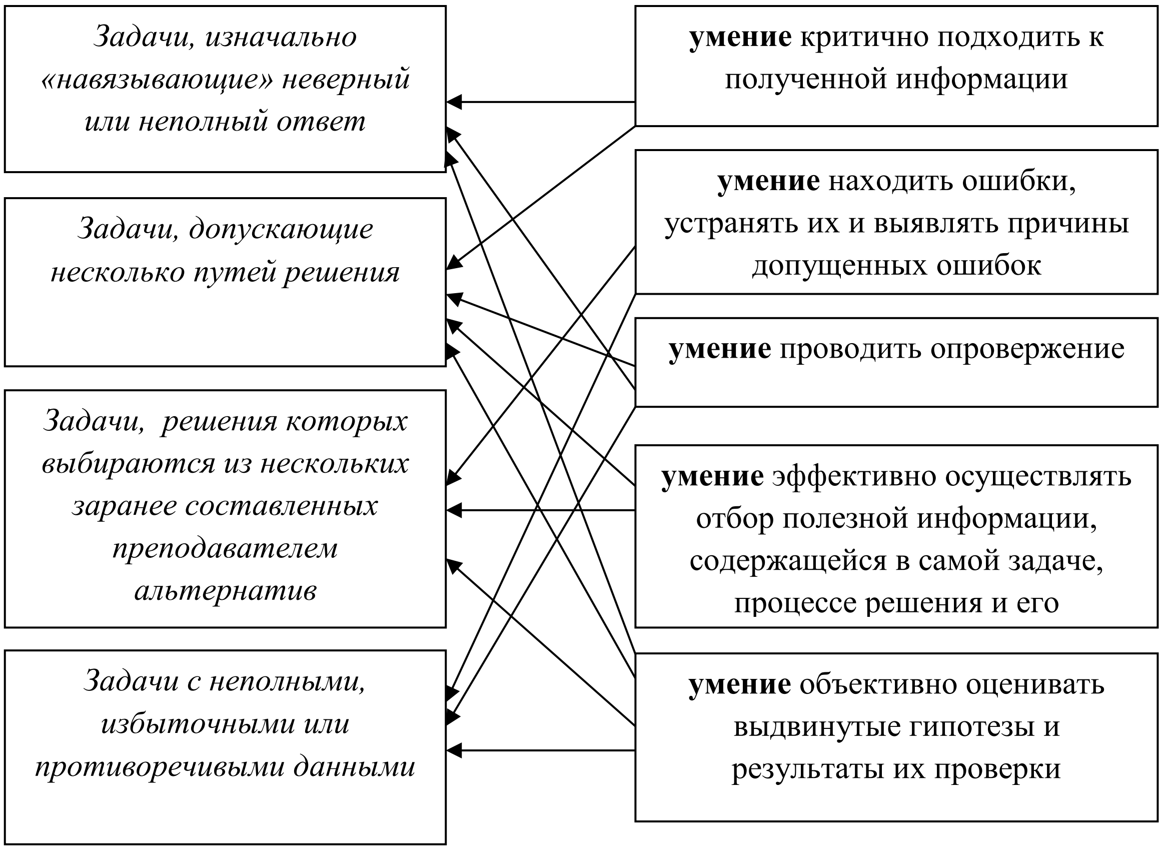
2) включение учащихся в систематический и последовательный процесс решения математических *задач* определенных *видов*, подобранных в

соответствии с выделенными *умениями критически мыслить*, что представлено ниже в виде Схемы 1;

3) создание учебно-исследовательской среды, которая включает предметное содержание, методологические средства системного познания, алгоритмы деятельности и рефлексии учителя и учащихся.

Схема 1

Соответствие различных видов математических задач и умений критически мыслить (по Е.Г. Журавлевой)



О.В. Андронова предлагает применять на уроках математики *технологию развития критического мышления учащихся посредством чтения и письма*, разработанную американскими педагогами Дж. Стил, К. Мередитом и Ч. Темплом в середине 90-х годов XX века и используемую в основном традиционно при изучении гуманитарных дисциплин. Одна из основных целей данной технологии - научить ученика самостоятельно мыслить, осмысливать, структурировать и передавать информацию, чтобы другие узнали о том, что новое он открыл для себя. Кроме того, данной технологии присущи различные элементы творчества (эссе, синквейн и т.д.), которые способствуют повышению интереса учащихся к урокам математики, познавательной активности, учебной мотивации и т.д.

Автор подчеркивает, что в данной технологии в процесс обучения включен каждый школьник, а не часть ученического коллектива, что способствует их более качественному, а не поверхностному обучению [1].

Н.Ф. Плотникова связывает *формирование критического мышления* с процессом обучения и воспитания.

На основе изучения *этапов и способов формирования критического мышления* Н.Ф. Плотниковой представлена модель формирования критического мышления студентов вузов [50].

В монографии А.В. Федорова [64] представлены результаты анализа научных трудов зарубежных и отечественных ученых по формированию критического мышления учащихся.

Определение уровня развития критичности – важное условие выбора педагогических технологий, методов формирования и развития мышления обучающихся.

Чаще всего *у младших школьников* различают *три уровня проявления критичности мышления* [3]: *зарождающейся* критичности – школьник замечает то, что в изображении объекта познания допущены ошибки, но он еще не может их осмыслить, пояснить; *статирующей* критичности - ученики находят допущенные в объекте познания ошибки, но не стараются выявить причину их возникновения; *корригирующей* критичности – учащиеся не только отражают части, компоненты объекта познания во взаимосвязи взаимозависимости и замечают допущенные в них ошибки, но и выявляют причины их появления, а также указывают пути и средства их устранения.

Таким образом, зная методы определения уровня критичности мышления учащихся общеобразовательной школы, необходимо рассмотреть различные приемы и средства формирования критичности мышления учащихся общеобразовательной школы, которые будут раскрыты в следующем параграфе.

§ 3. Различные приемы и средства формирования критического мышления учащихся общеобразовательной школы при обучении математике

По мнению С.В. Лаптинской, что т*ехнология развития критического мышления* подразумевает привлечение обучаемых к различным способам и приемам *оценочной деятельности* (самооценка, взаимооценка). Используя технологию критического мышления, педагог создает такие ситуации, проживая которые учащийся осознал бы себя в обществе в большой степени. Ситуация выбора, диалог, работа в группе, дискуссия – учебные ситуации, обычные для формирования критического мышления [25].

Обучение критическому мышлению нужно воспринимать как одну из базовых форм подготовки к успешной жизнедеятельности в информационном и постинформационном обществе [61].

К *педагогическим средствам формирования критического мышления* отнесены [70]:

- включение в образовательные стандарты и программы целей развития мышления и обогащения содержания, которые способствуют условиям становления *критичности ума*;
- выделение профессиональных компетенций и системы умений и навыков логически и *критически мыслить*;
- подготовка учителей, направленная на овладение профессиональными компетенциями в области логического и *критического мышления* и знаниями о методах и способах их формирования;
- координация исследований в области развития мышления и обмен опытом исследователей и учителей об инновациях в технологиях формирования критического мышления путем публикаций, конференций, семинаров, мастер-классов и специальных проектов.

Е.А. Ходос и А.В. Бутенко предлагают использовать на уроках «дидактические игры с использованием техник критического мышления» [61].

Формирование данного типа мышления более эффективно при одновременном развитии логического мышления [38].

В.А. Попков и А.В. Коржуев используют *классические приемы формирования критического мышления* (диспут, рецензирование и оппонирование) [49].

Д.М. Шакирова приводит *четыре этапа формирования критического мышления* [70]*:* 1) актуализация знаний, пробуждение интереса, любознательного отношения к теме, определение целей изучения материала; 2) осмысление новой информации, критическое чтение и письмо; 3) размышление, или рефлексия, формирование личного мнения и отношения к материалу; 4) обобщение и оценка информации, проблемы, способов ее решения и проявление собственных возможностей.

Е.П. Мельникова рекомендует применять следующие приемы технологии критического мышления [37]:

1. *Написание эссе* - еще один современный прием технологии критического мышления, который позволяет раскрыть интересующую тему и подчеркнуть собственное мнение, возникшее после работы с наглядными источниками информации.

2. *Технология «Портфолио»* помогает обучающимся не только самоопределяться в изучаемом предмете, но и делать практические выводы в любой жизненной ситуации, то есть реализовывать собственную индивидуальность. Портфолио может включать в себя не только материалы студенческих работ, но и листы наблюдения, фрагменты эссе, видеозаписи, проекты и планы выступлений, компьютерные презентации.

Дидактическая модель формирования критического мышления охватывает характеристику деятельности обучаемого, которая включает методику работы с информацией, формы, методы и приемы учения и самооценки.

В качестве примера Д.М. Шакирова приведены такие возможные *методы и приемы формирования критического мышления*, как [70]:

1) самоанализ и самооценка уровня собственной готовности к критическому усвоению материала и анализ критического потенциала проблемы;

2) сочетание репродуктивного и частично-поискового методов учения при выполнении учебных заданий и различных видов критики (критика-аналогия, критика-похвала, критика-озабоченность и т.п.);

3) поисковые методы учения, которые применяются при выполнении творческих работ;

4) перенос методов и приемов критического анализа в новые ситуации;

5) применение мыслительных компетенций при выполнении самостоятельных работ (рецензирование, разрешение критических ситуаций, анализ данных Интернет – источников, книг, публичных выступлений и т.п.).

В Мозырском государственном областном лицее учителями предлагается использовать в работе различные методы и приемы для развития критичности мышления учащихся: мозговой штурм; инсерт; ролевая игра; свободное письмо; синквейн; кластер; взаимоопрос; перекрестная дискуссия [35].

Так, под *кластером* в методической литературе [1] понимают графический наглядный способ формирования материала (таблица, схема); под *инсертом* – способ работы с текстом, который подразумевает использование определенных пометок («+» - ранее известное; «Δ» - новое; «?» - вызывает затруднение); *синквейном* – метод краткого описания урока с помощью ключевых слов.

Таким образом, в данном параграфе рассмотрены различные приемы и средства формирования критического мышления учащихся обще-образовательной школы при обучении математике. Возникает вопрос рассмотрения методики организации обучения математике с помощью определенных видов заданий, направленных на формирование критичности мышления у учащихся.

§ 4. Организация обучения математике учащихся с помощью задач на развитие критичности мышления

Учебная задача существенно отличается от многочисленных частных задач, входящих в программу того или иного класса при традиционном обучении. При решении учебной задачи школьник первоначально овладевает общим способом решения частных задач на уровне теоретического обобщения. Задача решается для всех однородных случаев сразу. Разрешение учебной задачи всегда заканчивается построением программы, предписания, алгоритма – получением ориентировочной основы для решения сходных задач. Эта ориентировочная основа является основанием для анализа условия, планирования, осуществляемых учеником при решении задач, для рефлексивных действий, для развития соответствующих особенностей мышления, которые являются показателем *развитого мышления* [8].

Как показывает практика работы в школе, математику любят в основном те ученики, которые умеют решать задачи. Следовательно, научив детей владеть умением решать задачи, мы окажем существенное влияние на их интерес к предмету, *на развитие их мышления.*

Напомним, что кроме классификации задач при обучении математике, представленные выше в §1, задачи делят на стандартные и нестандартные. *Нестандартная задача* – это задача, решение которой не является для решающего известной цепью известных действий, способствуют *развитию логического мышления.* Для ее решения учащийся сам должен изобрести (составить, придумать) способ решения.

Так, *Ю.М. Колягин* раскрывает это понятие следующим образом: «Под *нестандартной* понимается *задача*, при предъявлении которой учащиеся не знают заранее ни способа ее решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение» [23].

Т.И. Лябина предлагает при обучении математике использовать следующую нестандартную задачу для развития критичности [28]:

Задача. На день рождения Малыша фрекен Бок испекла торт. Малыш и торт весили столько же, сколько Карлсон и фрекен Бок. Когда торт съели, Карлсон весил столько же, сколько фрекен Бок и Малыш. Докажите, что Карлсон съел кусок торта, весивший столько же, сколько фрекен Бок до дня рождения.

Решение: Т+М = К+Б. Кт+Тб+Тм+М=К+Б. К+Тк = Б+Тб +М+Тм. Прибавим к обеим частям Тк. К+2Тк =Б+М+Тк+Тм+Тб. К+2Тк=Б+М+Т. т.к. Т+М=К+Б, то К+2Т=К+2Б. 2Т=2Б. Т=Б. ч.т.д.

Из нестандартной задачи, представленной Т.И. Лябиной для развития критичности видно, что автором используются *логические операции анализа и синтеза*, а также *прием составления алгоритма при решении задач*.

Н.В. Загурская предлагает для формирования критичности мышления школьников использовать на уроках математики задачи умение анализировать, развитие наблюдательности, самоконтроля.

Автор приводит задания, связанные с темой «*Одночлен*», которую изучают в 7-м классе [17]:

Задание 1. Выпишите выражения, которые могут быть преобразованы с помощью формулы квадрата суммы:

1) (x-3)(x-3); 2) (2a-5,7b)2a; 3) (a-5)(a + 5); 4) (1-a)4;

5) (x2 + y2)2; 6) (d-2)(2-d); 7) (3m + 4n)2; 8) (1,2 - 5xy6)2;

9) (5a-2b + 6c)(6c + 5a-2b); 10) (-5m - 2,2n)2.

По каким признакам вы выделяли выражения?

Чтобы ваш опыт не пропал даром, составьте памятку для распознавания таких выражений, которые являются квадратами суммы.

Сравните вашу памятку со следующей (Рис.1):

Рис.1

Отметим, что данное задание может использоваться в 7 классе при изучении темы «Квадрат суммы» после объяснения нового материала.

Задание 2. Составьте два выражения, которые по формуле квадрата суммы преобразовать нельзя.

Обратили ли вы внимание на то, что в прочитанном параграфе много задач, связанных с понятием признака? Что такое признак, вы можете подробнее узнать из беседы психолога «Что такое признак?»

Как видно, данное задание предназначено для работы с учебником, с помощью него у учащихся формируется *уметь анализировать и находить в тексте главное*.

Задание 3. Представим характерные портреты некоторых одночленов. К заданию выдаются карточки, представленные ниже на Рис.2.

Рассмотрите портреты и вставьте пропущенные слова в следующих определениях: *1.* Одночлен, в котором единственный числовой множитель стоит на первом месте и степень любой переменной входит множителем только один раз, называется одночленом … *вида*. *2.* Сумма показателей всех степеней переменных называется … *одночлена. 3.* Числовой множитель одночлена стандартного вида называется … *одночлена. 4.* Одночлены, буквенные части которых равны, называются … *одночленами.*

Проверьте себя. Вставленные вами слова должны находиться среди следующих: "стандартный", "нулевой", "степень", "подобные", "коэффициент", "дробь".

Каждый ли одночлен можно привести к стандартному виду?

Проанализируйте процесс приведения к стандартному виду одночлена $25a^3bc(0,2)a^2cb^2$.

Рис.2

Как отмечает Н.В. Загурская, в ходе выполнения задания согласно определения для приведения одночлена к стандартному виду необходимо сгруппировать все числовые множители, затем все степени с одинаковым основанием и выполнить соответствующие умножения. $25a^3bc(0,2)a^2cb^2 = (25 * 0,2)(a^3 * a^2)(b ** b^2)(c * c)$ - на основе коммутативного и ассоциативного свойств умножения; $(25 * 0,2)(a^3 * a^2)(b * b^2)(c * c) = 5 * a^5 * b^3 * c^2$ - по основному свойству степени. Итак, $5 * a^5 * b^3 * c^2$ - стандартный вид исходного одночлена $25a^3bc(0,2)a^2cb^2$.

Автор рекомендует при решении данного задания обратить внимание, насколько проще стандартный вид одночлена по сравнению с исходным. Преобразуя одночлен, фактически получает алгоритм приведения любого одночлена к стандартному виду [17].

Таким образом, в заданиях 1-3, предложенные Н.В. Загурской, для развития критичности мышления учащихся 7 классов используются в основном задания: а) на формирование условия задачи по типу «вопрос-ответ»; б) на восприятие на слух; в) содержащие задачи на развитие различных мыслительных умений (анализ).

Вместе с тем, одним из ценных дидактических *средств развития критичности мышления* школьников являются *математические софизмы*, которые можно использовать как с первых ступеней обучения, так, и, на протяжении дальнейшего обучения.

Софизмы – ложные результаты, полученные с помощью рассуждений, которые только кажутся правильными, но обязательно содержат ту или иную ошибку [30].

Софизмы выбираются в зависимости от дидактических целей обучения учащихся и этапа усвоения учебного материала.

Математический софизм тем более замысловат, чем более тонкого характера ошибка в нём проводится, чем менее она предупреждена обычным школьным курсом [9].

Разбор софизма разбивают на *два этапа*:

1 этап - нахождение суждения (математического рассуждения), в котором имеется ошибка;

2 этап - подбор аргументов для обоснования наличия ошибки [47].

Ложность мнения можно установить путём его сравнения с законами, правилами, формулами, аксиомами, теоремами и другими настоящими по истине утверждениями.

Наибольшую трудность вызывает процесс нахождения ошибки. Это связано с тем, что: 1) задания такого рода являются для учеников новыми (по требованию, по способу выполнению); 2) некоторые ученики не достаточно владеют способами самопроверки [47].

По мнению А.П. Податова, в большинстве случаев для поиска ошибки в софизме можно применять те же *приёмы, что и для проверки решения текстовых задач, уравнений, неравенств.*

А.Г. Мадера приводит пример софизма, который можно разобрать с учениками 7-х классов: *все числа равны между собой*.

Автор предлагает провести с учащимися следующие рассуждения [30]: взять два произвольных неравных между собой числа a и b и записать для них очевидное тождество $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$.

Слева и справа стоят полные квадраты, то есть могут записать $(a-b)^2 = (b-a)^2$. (1)

Извлекая из обеих частей последнего равенства квадратный корень, получим $a-b=b-a$, (2) или $2a=2b$, или окончательно $a=b$.

Раскрытие софизма: исходное тождество и равенство (1) вполне справедливы. Но при переходе от равенства (1) к равенству (2) была совершена ошибка: извлечение квадратного корня из обеих частей равенства (1) сделано неправильно. В действительности же вместо равенства (2) из равенства (1) должно следовать равенство $|a-b|=|b-a|$. (*)

А.Г. Мадера рекомендует здесь рассмотреть *два случая* [30]:

1 случай. $a-b \geq 0$, тогда, очевидно, $b-a \leq 0$. Тогда из равенства (*) следует $a-b=-(b-a)$, или $a=a$, т.е. просто тождество числа a самому себе.

2 случай. $a-b<0$, тогда $b-a>0$, откуда следует, что $-(a-b)=b-a$ или $a=a$.

Е.А. Максимова предлагает для развития критичности мышления у учеников использовать *задания*, в которых *вопросы формулируются* следующим образом:

- задать *вопрос* и только потом назвать учащегося, который на него будет отвечать;
- дать учащемуся адекватное время для обдумывания вопроса, который ему задается;
- задавать один вопрос за один раз;
- давать возможность всем учащимся отвечать на вопросы (т.е. не выделяйте учащихся, которым вы предпочитаете их задавать);
- перефразировать вопрос, который задается, если чувствуется, что у учащегося возникли трудности с ответом;
- избегать вопросов с ответами «да» и «нет»;
- задавать вопросы, требующие разнообразных мыслительных умений: на сравнение, сопоставление, выявление общего/различного;
- задавать вопросы, которые, по возможности, апеллируют к личному опыту учащихся;
- если позволяет содержание урока, градуировать вопросы от простого к сложному;
- задавать вопросы, которые помогают учащимся прояснить или расширить их ответы;
- задавать вопросы, которые заставляют учащихся задуматься над ответом, данным другим учащимся, чтобы они могли расширить, дополнить ответ одноклассника;
- передвигаться по классу, когда задаете вопросы и встречайтесь глазами с разными учащимися;

– создавать в классе атмосферу, когда учащиеся могут отвечать, не боясь быть высмеянными;

– задавать вопросы, которые будут давать учащимся возможность пережить успех [31].

Таким образом, в данном параграфе рассмотрена методика организации обучения математике с помощью таких видов заданий, как: нестандартные задачи; задачи на умение анализировать, развитие наблюдательности, самоконтроля; формирование условия задачи по типу «вопрос-ответ»; восприятие на слух; софизмы, направленных на формирование критичности мышления у учащихся.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

1. Рассмотрено понятие задачи и их роль в обучении математике. Определенно, что под задачей мы будем понимать всякую знаковую модель проблемной ситуации.

2. Выполнен анализ различных трактовок определений понятий «мышление», «критическое мышление». Определено, что под *мышлением* в учебно – методической литературе чаще всего понимают как *познавательную деятельность личности*, характеризующуюся обобщенным и опосредованным отражением действительности; под *критическим мышлением* - специфическую форму оценочной деятельности субъекта познания, направленную в самом общем смысле на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам.

3. Рассмотрены методы определения уровня критичности мышления учащихся, которые делятся на группы: комплекс средств, приемов и техник оценки мыслительных компетенций критичности ума; частные методики и техники оценки способностей и умений критически мыслить; оценивание отдельных аспектов критического мышления.

4. Раскрыты различные приемы и средства, способствующие формированию критического мышления у учащихся общеобразовательной школы.

5. Выделены методические особенности организации обучения математики с помощью задач на развитие критичности (использование при обучении учащихся заданий на раскрытие софизма; нестандартных задач; заданий в виде вопроса).

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ (НА ПРИМЕРЕ ТЕМ «ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ», «ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ»)

§ 5. Анализ программы и школьных учебников

5.1. Тема «Логарифмические уравнения»

Методический анализ темы. Базовые знания:

- определение понятия логарифма и его свойства;
- понятие логарифмического уравнения и его виды;
- свойства логарифмических уравнений;
- примеры нахождения корней при решении логарифмических уравнений.

Теоретический материал.

Рассмотрим содержания темы «Логарифмические уравнения» в различных учебниках, рекомендованных Минобрнауки РФ, чтобы выяснить есть ли в учебниках по математике задачи для выявления критичности мышления учащихся.

Посмотрим определение понятия и свойства в каждом учебнике.

В ***учебнике Н.Я. Виленкина*** [7] понятие логарифмического уравнения дается в 11 классе следующим образом: «Простейшим *логарифмическим уравнением* (то есть уравнением, содержащим неизвестное под знаком логарифма) является $log_a x = b$, где а > 0, а ≠ 1. Так как равенство $log_a x = b$ равносильно равенству $x = a^b$, то получаем *следствие:* если а > 0, а ≠ 1, то корень уравнения $log_a x = b$ равен a^b».

Изучив параграфы «Простейшие логарифмические уравнения и неравенства» и «Решение логарифмических уравнений и неравенств», были выделены задания, которые способствуют *развитию критичности мышления учащихся*, например, такие, как: № 127 [7], в котором нужно решить уравнения, данный номер содержит 19 заданий.

В ***учебнике А.Г. Мордковича*** [40] понятие логарифмического уравнения рассматривается в 11 классе так: «Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $log_a f(x) = log_a g(x)$, где а – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду».

В параграфе «Логарифмические уравнения» представлено много заданий для решения. Сделав анализ задач в данном учебнике, были определены задания для развития критичности, всего их 15 номеров [41]: №17.11; № 17,12; № 17.16; № 17.19; № 17.26; №17.27 – 17.32; № 17.39; №17.40 – 17.42.

В ***учебнике М.Я. Пратусевича*** [51] определение логарифмического уравнения также приводится в 11 классе следующим образом: «Логарифмическим уравнением мы называем уравнение, содержащее неизвестное (переменную) под знаком логарифма. Простейшее из таких уравнений – это $log_a x = b$, где а > 0, а ≠ 1. Его решением является $x = a^b$».

Рассмотрев задачный материал параграфа «Логарифмические уравнения и неравенства» можно выделить следующие номера для развития критичности [51]: глава XIII, № 109, 110, 113, 114, 115, 116.

Проанализировав учебники алгебры и начала анализа 11 класса Н.Я. Виленкина, А.Г. Мордковича и М.Я. Пратусевича по теме «Логарифмические уравнения», установлено, что для развития критичности у учащихся в них имеется небольшое количество заданий; таким образом, возникает необходимость подбора соответствующих задач из дополнительной литературы.

Основным учебником математики для математического профиля выбран учебник А.Г. Мордковича [40], данный учебник включен в федеральный список рекомендованных учебников.

Тема «Логарифмические уравнения» входит в Главу 3 «Показательная и логарифмическая функции» и рассматривается после параграфа §16

«Свойства логарифмов», в котором представлены основные свойства данного понятия и следствия из них.

В авторской программе отмечается, что в результате изучения темы учащиеся должны [42]:

- формулировать *определение логарифмического уравнения*;
- формулировать *свойства логарифмических уравнений;*
- решать простейшие логарифмические уравнения.

Для профильного уровня изучения математики на тему «Логарифмические уравнения» по программе А.Г. Мордковича отводится 5 часов, в течение которых рассматриваются определение понятия логарифмического уравнения, а также такие методы решения логарифмических уравнений, как: функционально-графический метод, метод потенцирования, метод введения новой переменной, метод логарифмирования.

Таким образом, выбор учебника А.Г. Мордковича обоснован *следующими причинами* [40]:

- учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждений;
- в данном учебнике *представлены* следующие *виды логарифмических уравнений*:

1) простейшие логарифмические уравнения: $log_a x = b$;

2) уравнения $log_a x = log_a y$;

3) уравнения квадратного вида $log^2{}_a x + log_a x + c = 0$;

4) уравнения вида $a^x = b$. Каждый из видов логарифмических уравнений могут решаться определенными методами, которые помогают найти корни уравнения:

а) функционально – графический метод;

б) метод потенцирования;

в) метод введения новой переменной;

г) метод логарифмирования;

– в учебнике наиболее полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы;

– учебник написан на высоком научном уровне, и в то же время понятен для читателя.

На сайте «Решу ЕГЭ» [52] представлен материал для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике.

В ***задании 5 части 1*** «Простейшие уравнения» есть раздел с заданиями на тему «Логарифмические уравнения», в котором рассматривается много заданий по теме исследования, например, такие как [52]:

1. Найдите корень уравнения $log_5(5-x) = log_5 3$. Так как логарифмы имеют одинаковые основания, то получаем 5 – x = 3, отсюда следует, что x=2.

2. Решите уравнение $log_{x-5}49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Решение: на ОДЗ перейдем к уравнению на основание логарифма:

$$log_{x-5}49 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = 49, \\ x-5>0, x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = \pm 7, \\ x-5>0, x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

⇔ x - 5 = 7 ⇔ x = 12. Итак, на ОДЗ уравнение имеет только один корень.

Ответ: 12.

В ***задании 13 (С1) части 2*** «Уравнения» есть раздел на тему «Логарифмические и показательные уравнения», рассмотрим одно из заданий [52]:

Решите уравнение $log_5(2-x) = log_{25}x^4$. Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [$log_9\frac{1}{82}$; $log_9 8$].

Решение. Запишем исходное уравнение в виде:

$$log_5(2-x) = log_5 x^2 \iff \begin{cases} x^2 = 2-x, \\ x^2 > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x+2)*(x-1) = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Получим, что x= - 2 или x=1.

Поскольку $log_9 \frac{1}{82} < -2 < log_9 8 < 1$, получаем, что отрезку $[log_9 \frac{1}{82};\ log_9 8]$ принадлежит единственный корень -2.

Ответ: -2.

В ***задании 18 (С6) части 2*** «Задача с параметром» содержит раздел «Уравнения с параметром», в котором присутствуют задания с логарифмами, например [52]:

Определите, при каких значениях параметра *a* уравнение

$$|x-2| = alog_2|x-2|$$

имеет ровно два решения.

Решение. Пусть |x - 2| = t, тогда $t = alog_2 t,\ t > 0$.Чтобы исходное уравнение имело ровно два решения, уравнение $t = alog_2 t$ должно иметь единственное решение.

Если a = 0, то уравнение не имеет решений.

Если a < 0 , то уравнение имеет единственное решение (см. рис.3).

Если a > 0, уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда прямая y = t касается графика функции $y = alog_2 t$ (см. Рис.3 ниже), что задаётся системой соотношений:

$$\begin{cases} t' = (alog_2 t)' \\ t = alog_2 t \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \dfrac{a}{tln2}, \\ t = alog_2 t, \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{a}{ln2}, \\ t = \dfrac{alnt}{ln2}, \end{cases} \iff \begin{cases} a = tln2, \\ lnt = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} a = eln2, \\ t = e. \end{cases}$$

Заметим, что найденное значение параметра, действительно, положительно.

Ответ: a<0, a= *e* ln2.

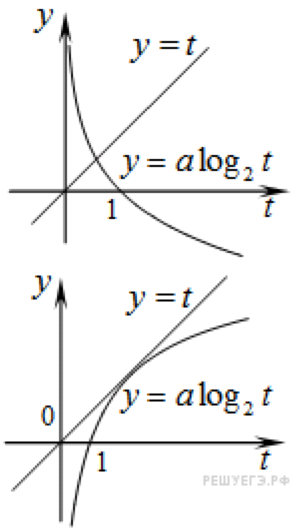


Рис.3

5.2. Тема «Логарифмическая функция»

В ФГОС среднего (полного) общего образования представлены требованиях к предметным результатам освоения образовательной программы по математике на базовом и углубленном уровнях у учащихся:

1) на базовом уровне [63]*:*

- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

- сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

- владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

- владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

- сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

2) на углубленном уровне [63]*:*

- сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

- сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

- сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

- владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

В Примерной программе среднего (полного) общего образования по математике [54] содержание курса также представлено для базового и углубленного уровней. Во втором модуле углубленно курса «Математический анализ» (160 ч) представлена Тема 1 «Элементарные функции» (90 ч). По теме «Логарифмическая функция» представлены задачи, содержание курса и виды деятельности учащегося (Таблица 3).

Таблица 3

***Содержание темы «Элементарные функции» в примерной программе среднего (полного) общего образования по математике* [54]**

Задачи модуля	*Сформировать* у обучающихся систему знаний о логарифмических функциях и их свойствах; *организовать* учебную деятельность, направленную на освоение тождественных преобразований и методов решения логарифмических уравнений и неравенств, а также на формирование геометрических представлений, с помощью которых можно дать наглядные объяснения сущности стандартных и эвристических приемов решения соответствующих математических задач; *спроектировать* учебные ситуации, наглядно и убедительно для обучающихся демонстрирующие пользу от применения приобретенных знаний и умений для решения задач практического характера, задач из других разделов математики или смежных учебных предметов.
Содержание	Мотивировка введения логарифмов. Понятие логарифма. Действия с логарифмами. Число *е*. Преобразование выражений, содержащие логарифмы. Логарифмическая функция, ее свойства и графики. Решение уравнений и неравенств, содержащих логарифмическую функцию.
Виды деятельности	Описание свойств функций по графику функции. Формулирование и доказательство свойств логарифмической функции. Преобразования логарифмических выражений. Решения логарифмических уравнений, неравенств и их систем. Построение графиков элементарных функций, изучение свойств элементарных функций по их графикам, выдвижение гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих элементарные функции, проверка гипотезы.

С целью определения различий в изложении темы «Логарифмическая функция» был проведен анализ учебников алгебры углубленного уровня (Таблица 4).

Таблица 4

Анализ учебников по теме «Логарифмическая функция»

Н.Я. Виленкин и др. *[7]*	***А.Г. Мордкович*** *[40, 41]*	***М.Я. Пратусевич*** *[51]*	***Г.К. Муравин, О.В. Муравина*** *[43]*
Количество часов, класс, тема			
4 часа, 11класс, тема «Логарифмическая функция и степень с любым показателем»	4 часа, 11класс, тема «Логарифмическая функция, её свойства и график»	4 часа, 10 класс, тема «Логарифмическая функция и ее монотонность»	5 часов, 10 класс, тема «Понятие логарифма»
Определение понятия логарифмическая функция			
Пусть a>0 и a≠1. Функция $\frac{\ln x}{\ln a}$ принимает значение 1 при x=a. Ее называют *логарифмической функцией по основанию a* и обозначают $log_a x$.	График функции $y = log_a x$ называют логарифмической кривой.	Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функция f(x) = $log_a x$ называется логарифмической функцией.	$y = log_a x$ логарифмическая функция.
Основная цель изучения темы			
Дать учащимся систематические сведения *об основных телах и поверхностях вращения* – цилиндре, конусе, сфере, шаре.	Ввести определения *конуса вращения, прямого кругового конуса, их элементов.*	Ознакомить учащихся с понятием логарифмическая функция и ее свойствами.	Ввести понятия логарифма и *логарифмической функции, и ее свойства.*
Знать/понимать			
- определение логарифмической функции.	- знать понятие логарифма и некоторые его свойства.	- понимать, что происходит с областью определения соответствующих выражений при определенных преобразованиях; -различать графики степенных, показательных и логарифмических функций.	- определение логарифма; - определение логарифмической функции; - свойства логарифмической функции.
Уметь			
-строить графики логарифмической функции.	-определять значение функции; -строить график функции; - описывать по графику поведение функции.	- на уровне навыка проводить тождественные преобразования логарифмических выражений; - решать простейшие уравнения, содержащие логарифмические выражения, пользуясь соответствующим определением.	-строить графики логарифмических функций; -решать логарифмические уравнения и неравенства простейших видов; -решать логарифмические уравнения и неравенства с параметрами, модулем, с неизвестным в основании логарифмов; - доказывать свойства логарифмов.
Задания для развития критичности мышления			
№ 87, 88, 92, 95, 96, 100-103, 105 - 107.	§15 номера: 1, 5, 10, 11, 12, 13, 17, 20, 40, 41, 45, 46.	Глава V номера: 93, 98, 107.	№ 181, 182, 183

Анализ задачного материала учебников алгебры углубленного уровня. показал, что в них в разном количестве присутствуют задания по теме «Логарифмическая функция» на развитие критичности мышления. Так, в учебнике Н.Я. Виленкина – 12 заданий, в учебнике А.Г. Мордковича – 11 заданий, в учебниках М.Я. Пратусевича и Г.К. Муравина – по 3 задания. Все указанные задания распределены ниже в Таблице 5 по соответствующим *умениям критически мыслить*.

Таблица 5

Умения/ автор	*Н.Я. Виленкин*	*А.Г Мордкович*	*М.Я. Пратусевич*	*Г.К. Муравин*
Критично подходить к полученной информации	92, 95	15.5, 15.17, 15.41, 15.45, 15.46	V.107	181, 183
Находить ошибки, устранять их и выявлять причины допущенных ошибок	-	15.1	-	-
Проводить опровержение	96	15.1	V.107	
Эффективно осуществлять отбор полезной информации, содержащейся в самой задаче, процессе решения и его результатах	92, 95, 96, 100, 101, 103-105, 107	15.10, 15.11, 15.12, 15.13, 15.45, 15.46	V.93, V .98, V.107	182
Объективно оценивать выдвинутые гипотезы и результаты их проверки	87,88, 100-102, 106,107	15.10, 15.11, 15.12, 15.13, 15.20, 15.40	V.107	182

Учебники [7; 40; 41; 43; 51] соответствуют обязательному минимуму содержания образования и федеральному компоненту Государственного стандарта общего образования по математике и предназначены для преподавания алгебры и начала анализа на базовом и углубленном уровнях.

§ 6. Кейс-технология как одна из форм организации обучения математике по формированию критического мышления учащихся старших классов на примере темы «Отбор корней при решении логарифмических уравнений»

Применение кейс - технологии позволяет организовать новый способ познавательной деятельности обучающихся на уроках математики. Работая в школе, учитель всегда сталкивается с вопросом: как заинтересовать учеников на уроке? Наблюдая за учениками, которые могут использовать свои умственные способности, можно сказать о самостоятельной познавательной деятельности учащихся, в ходе которой ученик учится проектировать, открывать что-то новое, исследовать, так у него появляется увлечение предметом. Для осуществления познавательной деятельности учащихся на уроках математики учителю необходимо использовать современные технологии обучения.

Кейс-технология – *современная образовательная технология, в основе которой лежит анализ какой-то проблемной ситуации.* Она объединяет в себе одновременно и ролевые игры, и метод проектов, и ситуативный анализ. Кейс-технология – это не повторение за учителем, не пересказ параграфа или статьи, не ответ на вопрос преподавателя, это анализ конкретной ситуации, который заставляет поднять пласт полученных знаний и применить их на практике [55].

По мнению Б.Е. Андюсева, кейс (с англ. — случай, ситуация) — это разбор ситуации или конкретного случая, деловая игра. Он может быть назван технологией анализа конкретных ситуаций, «частного случая». Суть технологии состоит в том, что в основе его используются описания конкретных ситуаций или случая (от английского «case» - случай) [2].

Рассмотрим **методы кейс - технологии** [68]:

– ***метод инцидентов.***

Цель метода – поиск и обработка информации самим учеником.

Сообщение в кейсе может быть как письменным, так и устным («случилось…» или «произошло»).

– ***метод разбора деловой корреспонденции.***

Цель ученика – сыграть роль человека, ответственного за обработку данных документов. Обработать предоставленные документы.

– ***игровое проектирование.***

Для осуществления этой технологии участников занятия разбивают на группы, каждая из которых занимается разработкой своего проекта.

Цель – создание проекта (готового продукта) по заданной теме.

– ***ситуационно - ролевая игра.***

Цель – инсценировать реальную ситуацию и дать возможность оценить поступки, поведение участников инциеровки.

– ***метод дискуссии.***

Обычно дискуссией руководит учитель. «Общие правила коммуникации при групповой дискуссии» выражаются в следующих требованиях к участникам группы: излагать материал кратко, конкретно, озвучить основные выводы по какому-либо вопросу или ситуации; ориентироваться на цель (задачу); уметь слушать; быть активными в беседе; осуществлять конструктивную критику.

– ***метод кейс – стади.***

Предполагает: подготовленный в письменном виде пример кейса; самостоятельное изучение и обсуждение кейса учащимися; совместное обсуждение кейса в аудитории под руководством учителя; следование принципу «процесс обсуждения важнее самого решения».

Материалы кейса могут иметь различные *варианты подачи*. Е.О. Цаплиной выделены определенные ***виды кейсов*** [68]:

1. Печатный кейс (может содержать графики, таблицы, диаграммы, иллюстрации, что делает его более наглядным).

2. Мультимедиа - кейс (наиболее популярный в последнее время, но зависит от технического оснащения школы).

3. Видео кейс (может содержать фильм, аудио и видео материалы.

Г.Л. Купряшин в книге выделяет четыре *этапа создания кейса* [24]*:*

1 этап: сбор информации;

2 этап: создание текста кейса;

3 этап: подготовка методических указаний;

4 этап: проверка и корректировка кейса.

По мнению М.А. Урбан, традиционно кейс эффективен на практических занятиях, посвященных закреплению изучаемой темы. Однако, работа с кейсом может быть продуктивна и при введении нового материала для постановки проблемы, теоретические аспекты которой потом будут рассматриваться на лекциях [62].

Ф.-Й. Кайзер, Х. Камиски в книге [19, С. 26] описывают ход работы с использованием кейс-метода, представленный ниже в Таблице 6.

Таблица 6

Ход работы с использованием кейс - метода

Этапы работы	*Цели этапов*
1. Знакомство с конкретным случаем	понимание проблемной ситуации и ситуации принятия решения
2. Информация, полученная из материалов выбранной задачи и благодаря самостоятельной обработке информации	научиться добывать информацию, необходимую для поиска решения и оценивать ее
3. Обсуждение: обсуждение возможности альтернативных решений	развитие альтернативного мышления
4. Резолюция: нахождение решения в группах	сопоставление и оценка вариантов решения
5. Диспут: отдельные группы защищают свое решение	аргументированная защита решений
6. Сопоставление итогов: сравнение решений, принятых в группах с решением, встречающимся в действительности	оценить взаимосвязь интересов, в которых находятся отдельные решения

Е.О. Цаплина отмечает, что работая с технологией кейсов, учащийся должен выполнять определенную последовательность действий, поэтому перед знакомством с каким-либо кейсом, необходимо уточнить этапы работы с выданными материалами [68].

Г.К. Селевко в учебном пособии приводит следующие *этапы технологии работы с кейсом* в учебном процессе [55]: 1) индивидуальная самостоятельная работы обучаемых с материалами кейса (идентификация проблемы, формулирование ключевых альтернатив, предложение решения или рекомендуемого действия); 2) работа в малых группах по согласованию видения ключевой проблемы и ее решений; 3) презентация и экспертиза результатов малых групп на общей дискуссии (в рамках учебной группы).

В Таблице 7 представлены возможности интеграции разных методов при организации работы с кейсом [46].

Таблица 7

Кейс - метод в системе методов организации обучения

Метод, интегрированный в кейс - метод	*Роль данного метода в кейс - методе*
моделирование	построение модели ситуации
системный анализ	системное представление и анализ ситуации
мысленный эксперимент	способ получения знания о ситуации посредством ее мысленного преобразования
методы описания	создание описания ситуации
проблемный метод	представление проблемы, лежащей в основе ситуации
метод классификации	создание упорядоченных перечней свойств, сторон, составляющих ситуации
игровые методы	представление вариантов поведения героев ситуации
«мозговой штурм»	генерирование идей относительно ситуации
дискуссия	обмен взглядами по поводу проблемы и путей ее решения

Е.О. Цаплиной определены преимущества использования кейса на уроке: активизация учащихся на уроке; ученик становиться субъектом деятельности; использование жизненной ситуации повышает мотивацию к обучению. Учащийся видит, где его знания могут пригодиться в реальной жизни и он становиться заинтересованным в их получении [68].

По мнению Б.Е. Андюсева, *кейс-технологии* развивают *умения* [2]:

- анализировать и устанавливать проблему;

- четко формулировать, высказывать и аргументировать свою позицию;

- общаться, дискутировать, воспринимать и оценивать вербальную и невербальную информацию;

- принимать решения с учетом конкретных условий и наличия фактической информации.

Автор отмечает, что *кейс-технологии* помогают учащимся: а) понять, что чаще всего не бывает одного единственно верного решения; б) выработать уверенность в себе и в своих силах, отстаивать свою позицию и оценивать позицию оппонента; в) сформировать устойчивые навыки рационального поведения и проектирования деятельности в жизненных ситуациях.

Б.Е. Андюсевым выделены такие преимущества данной технологии, как [2]: наличие логической структуры, четкой последовательности шагов и действий, повторяемости, воспроизводимости, нацеленности на получение конкретного образовательного результата; ранняя профориентация учащегося; систематизированность предметных, метапредметных умений и личностных качеств обучаемого, что в соответствие с ФГОС является образовательным результатом.

Кейс – технология способствует развитию критичности мышления, задается какая-либо ситуация и ученики должны ее разобрать. Учитель использую данную технологию сможет создать кейс на определенную тему для развития критичности мышления.

На основе данной технологии разработан кейс на тему «Отбор корней при решении логарифмических уравнений».

Рассмотрев особенности организации обучения учащихся на уроках математики с помощью кейс – технологии, спроектировано изучение данной темы. Далее представлен кейс, рассчитанный на три урока. *На первом уроке* учащиеся будут знакомиться с разработанным кейсом, анализировать заданную ситуацию и разбирать конкретный пример по теме с учителем. *На втором уроке* учащиеся самостоятельно решают в командах полученное задание и обсуждают свои результаты, доказывая их достоверность. *На третьем уроке* им предоставляется самостоятельная работа.

Кейс: «Отбор корней при решении логарифмических уравнений».

Вид кейса: печатный.

Тип кейса: практический.

Урок 1

Описание ситуации: Все усилия ученицы 11 класса Марии направленны на поступление в престижный вуз города. У Марии выявилась одна из жестких проблем: зачастую на экзаменах появляются задания, *связанные с решением уравнений.* Ситуация усугубляется тем, что у Марии гуманитарный склад ума, и при встрече с любыми величинами её приводит в ступор. Познакомившись с заданиями первой и второй части ЕГЭ для выпускников 11 класса, Мария сразу определила своего **«врага» - задание №13.** Для Марии оказалось трудным решение логарифмических уравнений и отыскания корней, она не знает с чего начинать и как к ним «подходить». Изучив учебник математики Мария, поняла, что боится большого количества формул и правил. **Так давайте поможем, Марии справится с ее проблемой. Может у кого-то есть проверенный способ, как решить данную проблему?**

Цель: *рассмотреть пример решения задания с учителем и далее весь класс решает аналогичное задание.*

Рассмотрим задание №13, взятое с сайта «Решу ЕГЭ», которое поможет развить навыки решения логарифмических уравнений и отбору корней [52]:

Решите уравнение $\boldsymbol{1 + log_2(9x^2+5) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}}$***, найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку*** $\boldsymbol{\left[-1; \frac{8}{9}\right]}$**.**

Решение:

В первую очередь, когда начинаем решать логарифмические уравнения нужно вспомнить основное правило решения логарифмических уравнений. Оно заключается в следующем: *Любое логарифмическое уравнение, что бы в него не входило, какие бы логарифмы, по какому бы основанию, и что бы в себе не содержали, обязательно нужно привести к уравнению вида (каноническое уравнение):*

$$log_a f(x) = log_a q(x)$$

Стоит учесть, что в нашем примере первое слагаемое вообще не является логарифмов, и нужно представить единицу в виде логарифма по основанию 2, потому что слева стоит уже логарифм по основанию 2.

Теперь перепишем все наше уравнение и сразу применяем другое правило: сумма логарифмов равна логарифму произведения аргументов. Получаем:

$$\boldsymbol{log_2 2 + log_2(9x^2+5) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}},$$

$$\boldsymbol{log_2 2(9x^2+5) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}}.$$

Мы получили новое уравнение, которое становится ближе к каноническому. Далее приведем наши логарифмы к общему основанию. С левой стороны логарифм с основанием 2 оставим, и попробуем правую часть уравнения привести к основанию 2. Выпишем этот логарифм отдельно:

$$\boldsymbol{log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}}$$

Мы можем записать корни в качестве степени с рациональным показателем. А затем выносим степень $\frac{1}{2}$ и из аргумента, и из основания логарифма, и сокращаем двойки стоящие перед логарифмом:

$$\boldsymbol{\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}};\ log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14} = log_{2^{\frac{1}{2}}}(8x^4+14)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}*\frac{2}{1}*log_2(8x^4+14)}.$$

Перепишем исходное уравнение с учётом новых коэффициентов:

$$\boldsymbol{log_2 2(9x^2+5) = log_2(8x^4+14)}$$

Мы получили каноническое логарифмическое уравнение. Сейчас можем избавиться от логарифма и решим выражение:

$$2(9\mathrm{x}^2+5) = 8\mathrm{x}^4+14$$

$$18x^2+10 = 8x^4+14$$

$$8x^4+14-18x^2-10 = 0 \mid : 2$$

$$4x^4-9x^2+2 = 0$$

Перед нами обычное *биквадратное уравнение*, и его корни легко считаются через дискриминант: D = 81 – 4*4*2 = 81 – 32 = 49.

В данном случае корни получатся не x, а x^2, потому что у нас биквадратное уравнение. Первый корень:

$$x^2 = \frac{9+7}{8} = 2\ \Rightarrow\ x^2 = 2\ \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Обратите внимание: мы извлекали корни, поэтому ответов будет два, так как квадрат – функция четная.

Второй корень биквадратного уравнения:

$$x^2 = \frac{9-7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Прежде чем приравнять аргументы логарифмов в канонической форме, нужно определить ОДЗ, которое всегда больше 0.

Получилось *четыре корня*, которые все являются решениями нашего исходного уравнения. В исходном уравнении внутри логарифмов стоит или $9x^2 + 5$ (эта функция всегда положительна), или $8x^4 + 14$ – она тоже всегда положительна. Значит, область определения логарифмов производится во всяком случае, какой-либо корень мы не получили, что означает, что все 4 корня являются решениями нашего уравнения.

Отбор корней на отрезке [-1; $\frac{8}{9}$]

Отберем из наших четырех корней те, которые лежат на заданном отрезке **[-1; $\frac{8}{9}$].** Для этого начертим координатную ось и отметим на ней концы заданного отрезка, обе точки будут закрашены (Рис.4):

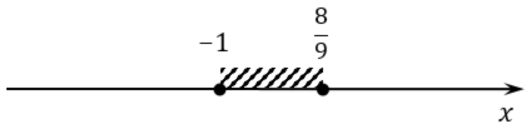


Рис.4

Иррациональные корни. Заметим, что $\frac{8}{9} < \frac{9}{9}$, $\sqrt{2} > 1$. Получим (Рис.5):

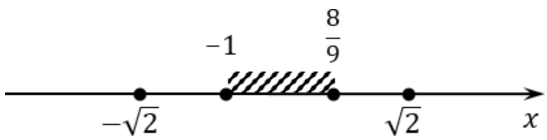


Рис.5

Из этого видим, что $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ не попадают в заданный отрезок.

Рациональные корни. Остается два корня: $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.Отметим, что левый конец отрезка (−1) — отрицательный, а правый ($\frac{8}{9}$) — положительный. Значит, между этими концами лежит число 0. Корень $x = -\frac{1}{2}$ станет находиться между −1 и 0, то есть попадет в итоговый результат. Подобно действуем с корнем $x = \frac{1}{2}$. Данный корень также находится на осматриваемом отрезке.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$.

Далее ученики решают аналогичный пример самостоятельно [53]:

Решите уравнение $1 + log_2(9x^2+1) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{2x^4+42}$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}]$.

Решение: запишем исходное уравнение в следующем виде

$$log_2(9x^2+1) = log_2(2x^4+42) - log_2 2$$

$$log_2(9x^2+1) = log_2(x^4+21)$$

$$9x^2+1 = x^4+21$$

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0$$

$$(x^2-4)(x^2-5) = 0$$

Значит, либо $x^2 - 4 = 0$, откуда x= - 2 или x= 2,

либо $(x^2-5) = 0$, откуда $x = -\sqrt{5}$ или $x = \sqrt{5}$.

Поскольку $-\sqrt{5} < -2 < \frac{3}{2} < 2 < \sqrt{5} < \frac{5}{2}$, отрезку принадлежат корни x = 2 и x = $\sqrt{5}$.

Ответ: x = 2, x = $\sqrt{5}$.

Урок 2

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУПП. *От каждой группы нужно разработать и предоставить на уроке не менее пяти рекомендаций к системе подготовки решения заданий данного типа. Показать ваше преимущество. Каждой команде нужно решить предоставленное задание.*

Задание для выполнения [52]:

Группа 1: Решите уравнение $\boldsymbol{log_3(3x^4+42) = 1 + log_{\sqrt{3}}\sqrt{13x^2+2}}$, найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5}{4}; 2]$.

Группа 2: Решите уравнение $1 + \boldsymbol{log_3(x^4+25) = log_{\sqrt{3}}\sqrt{30x^2+12}}$, найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{11}{5}, \frac{16}{5}]$.

Группа 3: Решите уравнение $\boldsymbol{log_2(20x^2+8) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{10x^4+16} - 1}$**,** найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [- 1, $\frac{\sqrt{323}}{9}$] .

Решения заданий представлены в Приложение 1.

Каждая команда предоставляет решение своего уравнения, предлагает свои рекомендации, показывая их преимущество.

Учащиеся совместно с учителем обсуждают уровень достижения поставленных целей. Отвечают на такие вопросы, как: *1.* В чем, по вашему мнению, состоит преимущество кейс - технологии? *2.* Справились ли вы с темпом урока? *3.* Что вызывало у вас затруднения? *4.* Что вам понравилось на уроке?

Урок 3

Индивидуальная работа с кейсом

Вариант 1

1. Решите уравнение $log_{x-1}81 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них [52].

2. Найдите корень уравнения $log_4(4+7x) = log_4(1+5x) + 1$ [52].

3. Найдите сумму всех корней уравнения

$\log_2(x^2-16x+64)\cdot\log_3(2x-9)\cdot\log_4(x^2-10x+25)=0.$ [33].

4. Найдите произведение всех корней уравнения

$\log_{0,5}^2 x - 7\log_2|x| + 12 = 0$. [33]

Вариант 2

1. Решите уравнение $log_{x-2}16 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них. [52]

2. Найдите корень уравнения $log_5(6+5x) = log_5(2-x) + 1.$ [52]

3. Найдите сумму всех корней уравнения $\lg(x^2-10x+25)\cdot\log_{11}(3x-5)\cdot\log_{12}(x^2-4x+4)=0.$ [33]

4. Найдите произведение всех корней уравнения $\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3|x| + 6 = 0$. [33]

За каждую задачу можно получить от 0 до 3 баллов:

0 баллов – к задаче не приступал или сделано все неверно;

1 балл – попытка выполнения задания, но имеются ошибки в решении;

2 балла – задание выполнено с полным развёрнутым решением.

Отметка «5» - 7-8 баллов;

Отметка «4» - 5-6 баллов;

Отметка «3» - 4-3 баллов;

Отметка «2» - меньше 3 баллов.

Ответы к заданиям:

Вариант 1: 1) 10. 2) 0. 3) 22. 4) 128.

Вариант 2: 1) 6. 2) 0,4. 3) 13. 4) 243.

§ 7. Методические материалы на формирование критичности мышления учащихся при изучении темы «Логарифмическая функция»

Выявив методические особенности формирования критичности мышления учащихся общеобразовательной школы с помощью задач, были разработаны соответствующие методические материалы: самостоятельная работа, математический диктант, тест, кроссворд.

Самостоятельная работа на тему «Логарифмическая функция»

Работа составлена в 2-х вариантах на основе заданий с сайта «Решу ЕГЭ» [52]. Задания направлены на формирование различных умений.

1 вариант:

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке [- 2,5; 0]. *Оцените правильность решения.*
2. *Найдите ошибки в рассуждениях при решении задания*:

Опишите свойства логарифмической функции $y = log_a x$, при **a > 1:**

1) D (f)= (0, + ∞);
2) не является ни четной, ни нечётной;
3) не ограничена сверху, ограничена снизу;
4) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
5) непрерывна;
6) E(f) = (- ∞; + ∞);
7) выпукла вверх.

3. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5) - 2x + 9$. Сравните два алгоритма нахождения максимума функции (Табл.8), найдите в них ошибки или пропущенные этапы решения, если они есть. Проведите обобщение данных алгоритмов и составьте свой алгоритм нахождения максимума функции.

Таблица 8

Алгоритм 1	**Алгоритм 2**
1.Найдите производную заданной функции. 2.Определите нули функции. 3. Найдите значения функции.	1.Находим область определения функции. 2.Ищем критические точки. 3.Определяем знаки производной в полученных промежутках.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = log_4(x^2 + 6x + 25) - 5$. *Опровергните предложенное решение:*

Решение: Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае – в точке - 3. Функция $y = log_4(x^2 + 6x + 25) - 5$ в этой точке определена и принимает значение $log_4((-3)^2 + 6 * (-3) + 25) - 5 = log_4 16 - 5 = 4 - 5 = -1.$ Поскольку логарифмическая функция с основанием, большим 1, возрастает, найденное значение является искомым наименьшим значением заданной функции.

Ответ: - 1.

2 вариант:

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 10x - \ln(x+10)^{10}$ на

отрезке [- 9,5; 0]. *Оцените правильность решения.*

2. *Найдите ошибки в рассуждениях при решении задания*:

Опишите свойства логарифмической функции $y = log_a x$, при 0< **a** < 1**:**

1) D (f)= (0, + ∞);
2) является четной;
3) убывает на (0, + ∞);
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) непрерывна;
6) E(f) = (- ∞; + ∞);
7) выпукла вниз.

3. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+3) + 7$. Сравните два алгоритма (Табл.9), найдите в них ошибки или пропущенные этапы решения, если они есть. Проведите обобщение данных алгоритмов и составьте свой алгоритм нахождения максимума функции.

Таблица 9

Алгоритм 1	**Алгоритм 2**
1.Найдите производную заданной функции. 2.Определите нули функции. 3.Найдите значения функции.	1.Находим область определения функции. 2.Ищем критические точки. 3.Определяем знаки производной в полученных промежутках.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = log_5(x^2 + 4x + 29) - 8$. *Опровергните предложенное решение:*

Решение: Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае – в точке -2. Функция $y = log_5(x^2 + 4x + 29) - 8$ в этой точке определена и принимает значение $log_5((-2)^2 + 4 * (-2) + 29) - 8 = log_5 25 - 8 = 5 - 8 = -3$. Поскольку логарифмическая функция с основанием, большим 1, возрастает, найденное значение является искомым наименьшим значением заданной функции.

Ответ: - 3.

Данную самостоятельную работу можно использовать после изучения темы «Логарифмическая функция» для проверки остаточных знаний учащихся и подготовки к ЕГЭ, а так же для проверки уровня развития критичности мышления. Ответы и решения данной самостоятельной работы можно увидеть в Приложение 2.

Математический диктант на тему «Логарифмическая функция».

Математический диктант составлен на основе анализа методической литературы [40; 41] *с использованием заданий типа «вопрос-ответ».* Его можно использовать после ознакомления учащихся с новым материалом. При организации обучения с использованием данного диктанта учитель читает вопросы, учащиеся отвечают письменно на листочках либо «да», либо «нет», комментируя ответ.

Вопросы:

1. Логарифмическая функция $y = log_a x$ определена при любом *x ?*
2. Правда, что функция $y = log_a x$ определена при $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$?
3. Областью значений логарифмической функции является множество действительных чисел?
4. Верно ли утверждение, что логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной?
5. Областью определения логарифмической функции является множество действительных чисел?
6. Верно ли, что ось *y* является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции?
7. Ответьте, функция $y = log_3 x$ – убывающая?
8. Логарифмическая функция $y = log_a x$ имеет экстремум в точке (1;0)?
9. Скажите, график логарифмической функции $y = log_a x$ проходит через точку с координатами (1;0)?
10. График логарифмической функции $y = log_a x$ находится в 1 и 4 четвертях?
11. Скажите, существует логарифм отрицательного числа?

12. Вся числовая прямая это область определения логарифмической функции, а промежуток (0; + ∞) является областью значений этой функции?
13. Правда ли, что монотонность логарифмической функции зависит от основания логарифма?
14. Верно ли, что график логарифмической функции $y = log_a x$ проходит через точку (0;0)?

Ответы: 1) нет; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) нет; 8) да; 9) да; 10) да; 11)нет; 12) нет; 13) да; 14) нет.

Тест на тему «Логарифмическая функция».

Тест составлен на основе анализа методической литературы [40; 41]. В нем используются задания на умение эффективно осуществлять отбор полезной информации, содержащейся в самой задаче, в процессе решения и его результатах. Его можно использовать после изучения темы для проверки остаточных знаний у учеников.

Вариант 1:

1. На каком рисунке (рис.6) схематично изображен график функции $y = log_5 x$?

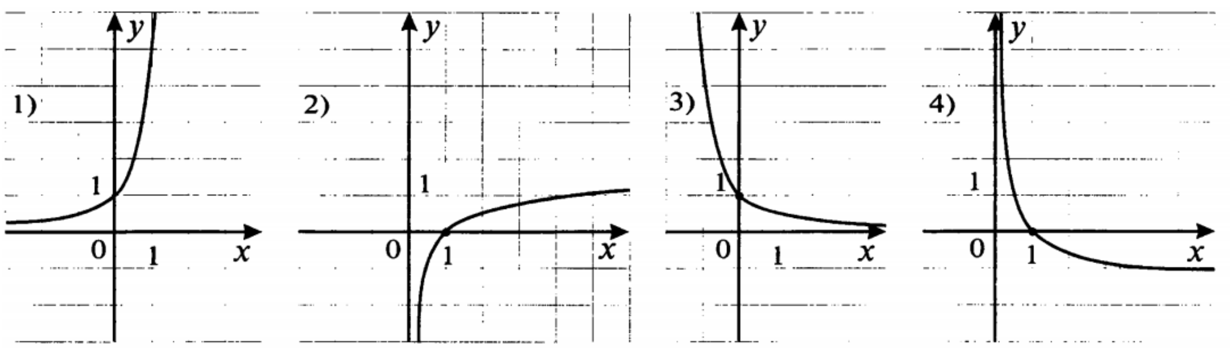


Рис. 6

2. Для функции $y = log_{\frac{1}{4}} x$ выберите верное утверждение:

1. Областью значений функции является множество положительных чисел.
2. Функция является четной.

3. Функция убывает.

4. Графиком функции является гипербола.

3. Областью определения функции $y = log_{0,1}(3 - 2x)$ является множество:

1. (- ∞; + ∞). 2.(- ∞; $\frac{2}{3}$). 3. (- ∞; 1,5]. 4.(- ∞; 1,5).

4. Какому промежутку принадлежит корень уравнения $\log_7(2\text{x} - 20) = \log_7 4$.

1. (- ∞; 3). 2. (- ∞; 12). 3. (11; 14) . 4. [0 ; 2].

5. Найдите область определения функции $\lg(\text{x} + 7)$

1. (- 7; 0). 2. [- 7; +∞). 3. (7; +∞). 4. (- 7; +∞).

6. Какая функция является убывающей?

1. $\text{y} = \log_5 \text{x}$. 2. $\text{y} = \log_{\frac{10}{3}} \text{x}$. 3. $\text{y} = \log_{1,3} \text{x}$. 4. $\text{y} = \log_{0,8} \text{x}$.

7. Какова область значений функции $y = 3log_2 x - 4$?

1. (0;+∞). 2. (-∞; +∞). 3. [-4; 3]. 4. [-4; +∞).

8. График какой функции изображен на Рис.7?

1. $y = \log_3(x+2)$.
2. $y = \log_3(x-2)$.
3. $y = \log_3(2-x)$.
4. $y = log_2(x + 2)$.

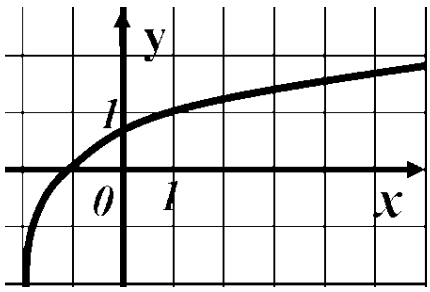


Рис. 7

9. Какая из представленных функций является убывающей?

1. $y=2^x$. 2. $y= \log_{1,15} x$. 3. $y= \log_{0,5} x$.

Вариант 2:

1. На каком рисунке (рис.8) схематично изображен график функции $y = log_{\frac{1}{2}} x$?

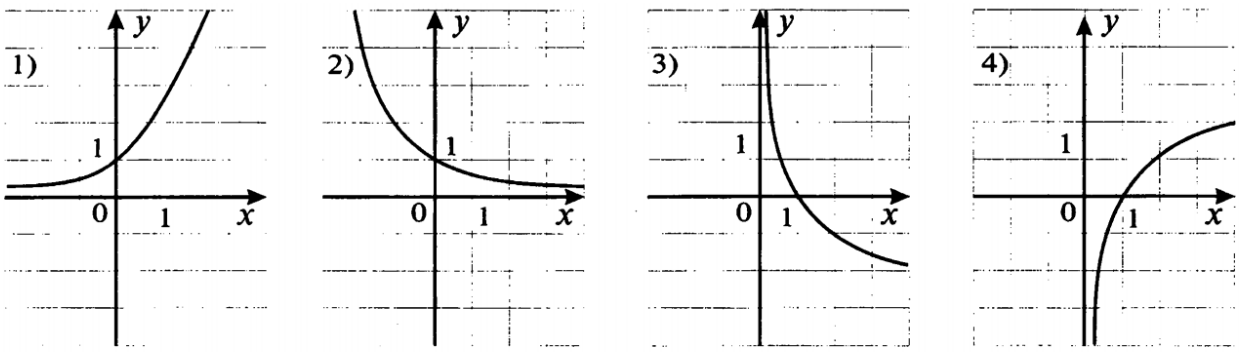


Рис.8

2. Для функции $y = log_5 x$ выберите верное утверждение:

1. Областью значений функции является множество всех действительных чисел.
2. Функция возрастает на R.
3. Функция является нечетной.
4. График функции проходит через точку (1;0).

3. Областью определения функции $y = lg(1 - 4x)$ является множество:

1. (- ∞; + ∞). 2. (0,25; + ∞). 3. (- ∞; 0,25). 4. (- ∞; 0,25].

4. Какому промежутку принадлежит корень уравнения $\log_2(\mathrm{x} - 10) = \log_2 3$.

1. (- ∞; 8). 2. (12; + ∞). 3. (11; 13). 4. [15; 18].

5. Найдите область определения функции $\lg(\mathrm{x} - 4)$

1. [4; +∞). 2. (- 4; +∞). 3. (0; 4). 4. (4; +∞).

6. Какая функция является возрастающей?

1. $y = \log_{0,5} x$. 2. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. 3. $y = \log_{13} x$. 4. $y = \log_{\frac{4}{5}} x$.

7. Какова область значений функции $y = 5 - 2lnx$?

1. (0;5). 2. [5; +∞). 3. [-2; 5]. 4. (-∞; +∞).

8. График какой функции изображен на Рис.9?

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2. $y = \log_2 x$.

3. $y = \log_{0,2} x$.

4. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

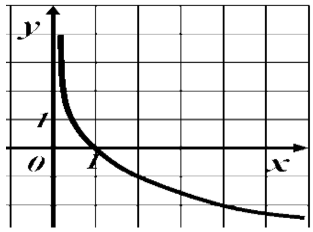


Рис. 9

9. Какая из представленных функций является убывающей?

1. $y = \log_{1,1} x$.
2. $y = -\log_{0,5} x$.
3. $y = \log_{\frac{5}{4}} x$.
4. $y = \log_{0,2} x$.

Ответы:

Вариант 1

вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ответ	2	3	4	3	4	4	2	1	3

Вариант 2

вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ответ	3	4	3	2	4	3	4	4	4

Математический кроссворд на тему «Логарифмическая функция»

Математический кроссворд составлен на основе анализа методической литературы [40; 41]. Кроссворд направлен на формирование таких умений, как: критично подходить к полученной информации. Его можно использовать после изучения темы для проверки остаточных знаний у учеников, которые должны его заполнить (см. Рис.10).

Вопросы по горизонтали:

1. Логарифм с основанием равным числу e?
2. Назовите свойство, характерное для логарифмической функции с основанием, a>1?
3. Что в логарифмической функции не зависит от основания логарифма?

4. Верно, что логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной?
5. Логарифм с основанием 10?
6. Чему равен логарифм $log_2 128$?

Вопросы по вертикали:

1. Действие нахождения логарифма числа (выражения)?
2. Чему равен логарифм единицы?
3. Множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому отношению.
4. Как ведет себя график функции при $0<a<1$?
5. Графики показательной и логарифмической функций относительно прямой y=x …?
6. Что есть в каждом уравнении, слове и растении?

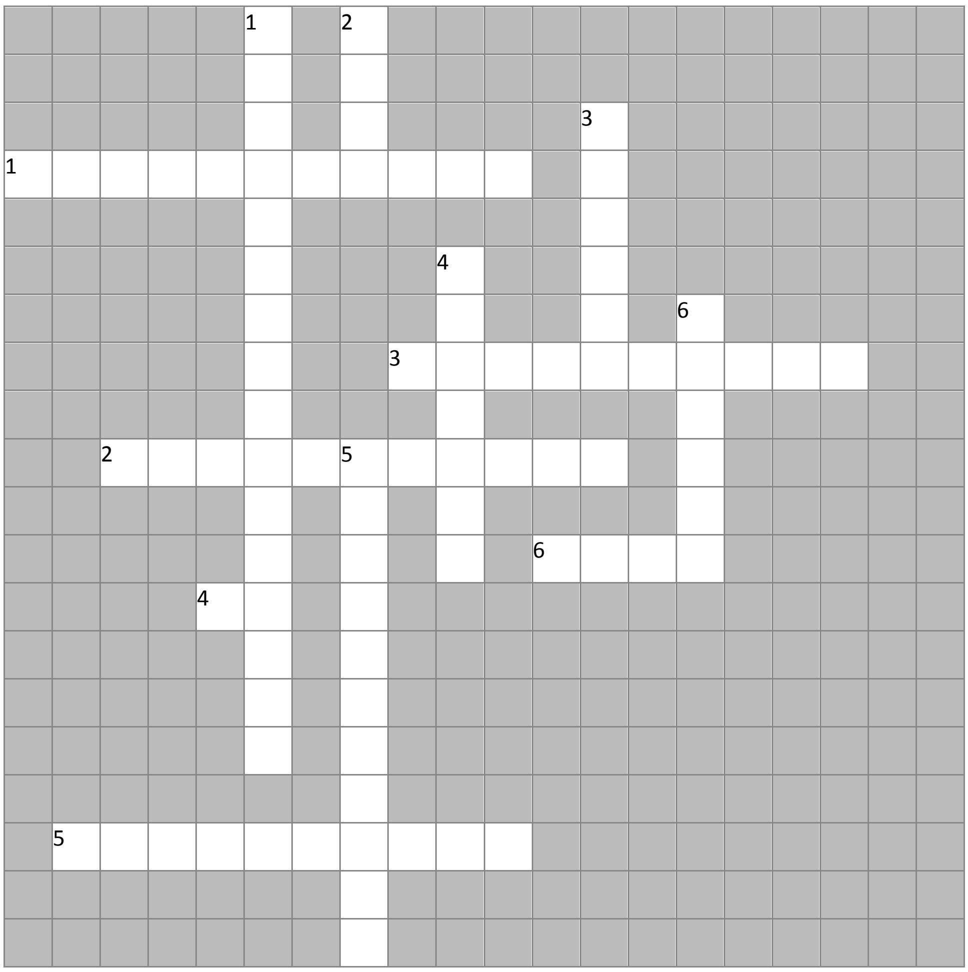


Рис. 10

Ответы по горизонтали: 1. Натуральный. 2. Возрастание. 3. Выпуклость. 4.Да. 5. Десятичный. 6. Семь.

Ответы по вертикали: 1. Логарифмирование. 2. Ноль. 3. График. 4.Убывает. 5. Симметричны. 6. Корень.

Все вышерассмотренные методические материалы способствуют формированию критичности мышления учащихся общеобразовательной школы при обучении математике.

§ 8. Результаты констатирующего эксперимента

В ходе прохождения преддипломной практики мною проводился констатирующий педагогический эксперимент, который включал:

1) *анкетирование учителей* математики с целью выявления фактического уровня владения ими методикой формирования критического мышления учащихся общеобразовательных школ на уроках;

2) *проведение диагностической контрольной работы* с целью выявления у учащихся фактического уровня сформированности критического мышления.

Анкетирование *учителей* математики проводилось на базе МБУ «Школа № 80» и МБУ «Школа № 7» г.о. Тольятти (10 человек) в апреле 2016 года. Текст анкеты представлен в Приложение 3. Анкета включала семь вопросов.

При выборе определения понятия критического мышления **60%** учителей математики указали что, критическим мышлением понимают специфическую форму оценочной деятельности учащихся, направленную на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам.

При ответе на второй вопрос о том, *почему современный школьник должен владеть навыками критического мышления,* **60%** учителей отметили, что критическое мышление помогает оптимизировать учебный процесс и улучшить качество усвоения материала.

70% опрошенных учителей математики, при ответе на третий вопрос, *какими умениями должен обладать ученик при обучении в общеобразовательной школе, чтобы мыслить критически*, выделяют умение эффективно осуществлять отбор полезной информации, содержащейся в самой задаче, процессе решения и его результатах.

На четвертый вопрос о том, *какие из приемов развития критического мышления Вы знаете,* **80%** учителей математики выбирают прием «мозговой штурм».

При ответе на пятый вопрос о том, *какие из приемов развития критического мышления Вы используете на уроке, в каком классе,* **70%** учителей выбрали прием «мозговой штурм», который применяют в основном в 5-6 классах. Так же **50%** опрошенных учителей математики выделяют прием «инсерт» и используют его в 10 - 11 классах.

На шестой вопрос о том, *по какой причине вы не используете остальные приемы развития критического мышления,* **60%** учителей считают их неэффективными при обучении математике учащихся.

Все опрошенные учителя математики, при ответе на седьмой вопрос, указали все формы реализации технологии развития критического мышления учащихся на уроках, такие как: *дискуссия, 8-9 классы; лекция, 10-11 классы; семинар, 10-11 классы; конференция, 10-11 классы; исследование, 5-6 и 9-11 классы.*

Диагностическая контрольная работа проводилась среди учащихся 11 класса МБУ «Школа № 80» г.о. Тольятти в мае 2016 года.

В эксперименте приняло участие 20 учеников 11 класса, им была дана самостоятельная работа на тему «Логарифмическая функция», время для ее выполнения - один урок, текст работы изложен в §7, результаты показаны в Таблице 10.

Эксперимент показал, что большинство учащихся справились с подобранными заданиями, значит критичность мышления у них развита.

Таблица 10

Анализ результатов самостоятельной работы

Кол-во учеников: 20	**Номер задания**			
Тема: Логарифмическая функция	**1**	**2**	**3**	**4**
Правильно и полностью выполнили задание	17	15	13	15
Неправильно выполнили задание	3	5	7	5
% от общего числа учащихся, выполнивших задание	85%	75%	65%	75%

Таким образом, в результате анкетирования учителей математики установлено, что учителя понимают, что критическое мышление помогает оптимизировать учебный процесс и улучшить качество усвоения материала учащимися; 70% из них используют в основном в 5-6 классах *прием мозгового штурма*; 50% учителей в 10 - 11 классах выделяют *прием «инсерт»,* другие приемы формирования критического мышления они считают неэффективными при обучении математике учащихся. Технология развития критического мышления еще недостаточно распространена и мало используется в практической деятельности учителей.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1. Выполнен анализ школьных учебников и программы по алгебре и началам анализа для общеобразовательных школ (профильный уровень). Установлено, что по теме «Логарифмические уравнения» в учебнике Н.Я Виленкина отводится 1 задание на развитие критичности мышления учащихся, в учебнике А.Г. Мордковича – 14 заданий, в учебнике М.Я. Пратусевича - 6 заданий; по теме «Логарифмическая функция» в учебнике Н.Я. Виленкина – 12 заданий, в учебнике А.Г. Мордковича – 11 заданий, в учебниках М.Я. Пратусевича и Г.К. Муравина – по 3 задания.

2. Разработаны задания по темам «Отбор корней при решении логарифмических уравнений» (с применением кейс – технологии), «Логарифмическая функция» на формирование критичности мышления учащихся и соответствующие методические рекомендации по их применению.

3. Проведено *анкетирование учителей* математики в МБУ «Школа №80» и «Школа №7» г.о. Тольятти с целью выявления фактического уровня владения ими методикой формирования критического мышления учащихся общеобразовательных школ на уроках.

4. Проведена *диагностическая контрольная работа* в 11 классе МБУ «Школа №80» г.о. Тольятти с целью выявления у учащихся фактического уровня сформированности критического мышления. Результаты эксперимента показали, что у учащихся развита критичность мышления, о чем свидетельствует большой процент верных решений задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты:

1. Рассмотрено понятие задачи и их роль в обучении математике. Определенно, решение задач является наиболее эффективным средством развития критичности мышления у учащихся общеобразовательной школы.

2. Выявлены различные подходы к определениям понятий «критичность», «критическое мышление». Определено, что под *мышлением* в учебно – методической литературе мы понимаем как *познавательную деятельность личности*, характеризующуюся обобщенным и опосредованным отражением действительности; под *критическим мышлением* - специфическую форму оценочной деятельности субъекта познания, направленную в самом общем смысле на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам.

3. Рассмотрены методы определения уровня критичности мышления учащихся, которые делятся на группы: комплекс средств, приемов и техник оценки мыслительных компетенций критичности ума; частные методики и техники оценки способностей и умений; оценивание отдельных аспектов критического мышления.

4. Раскрыты различные приемы и средства, способствующие формированию критического мышления у учащихся общеобразовательной школы при обучении математике.

5. Выделены методические особенности организации обучения математике учащихся с помощью задач на развитие критичности.

6. Представлена кейс-технология как одна из форм организации обучения математике по формированию критического мышления учащихся старших классов общеобразовательной школы на примере темы «Отбор корней при решении логарифмических уравнений».

7. Разработаны методические материалы по теме «Логарифмическая

функция» (самостоятельная работа, математический диктант, тест, кроссворд) способствующие развитию критичности у учащихся общеобразовательной школы.

8. Представлены результаты констатирующего педагогического эксперимента в 11 –ом классе на базе школ МБУ «Школа №80» и «Школа №7» г.о. Тольятти с целью выявления фактического уровня владения ими методикой формирования критического мышления учащихся общеобразовательных школ на уроках. Проведена диагностическая контрольная работа в 11 классе МБУ «Школа №80» г.о. Тольятти с целью выявления у учащихся фактического уровня сформированности критического мышления. Результаты эксперимента показали, что у учащихся развита критичность мышления, о чем свидетельствует большой процент верных решений задач. Представлены результаты анкетирования учителей, в результате установлено, что учителя понимают, что критическое мышление помогает оптимизировать учебный процесс и улучшить качество усвоения материала учащимися.

Таким образом, одним из важнейших средств формирования критичности мышления у учащихся в школе являются задачи.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронова О.В. Формирование критического мышления учащихся при обучении математике в основной школе: Автореф. дис. канд. пед. наук. - Ярославль, 2010. – 23 с.

2. Андюсев Б.Е. Кейс – метод как инструмент формирования компетентностей // Директор школы. – 2010. - №4. С. 61-69.

3. Байрамов А.С. Динамика развития самостоятельности и критичности мышления у детей младшего школьного возраста. Дисс. на соискание докт.пед.наук. - Баку, 1968. – 296 с.

4. Бим-Бад Б.М. Педагогический энциклопедический словарь / Б.М. Бим-Бад. - М., 2002. – С. 155-156.

5. Бурмистрова Е.Г. Формирование критичности мышления подростков на уроках математики / Сборник трудов по материалам 2 международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», 1-3 ноября 2005г., Россия, г.Тольятти/в 3-х ч. Ч.3. Тольятти: ТГУ, 2005.- С. 65-68.

6. Векслер С.И. Развитие критического мышления старшеклассников в процессе обучения: Автореф.дисс. канд.пед.наук. - Киев, 1974. – 20 с.

7. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала математического анализа 11 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень). – М.: Мнемозина, 2014. – 312 с.

8. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб.пособие/ Л.В. Виноградова. - Ростов н/Д.:Феникс, 2005. – 252 с.

9. Гайдук Ю.М. Математические софизмы // Математика в школе. - 1952. – № 6. – С. 83-94.

10. Головко Е.В. Развивающие задачи как средство развития познавательных процессов школьников на уроках математики URL: http://festival.1september.ru/articles/102912/ (дата обращения 27.05.2016).

11. Дмитриев Г.Д. Многокультурное образование. Учебник для вузов. – М.: Народное образование, 1999. – 208 с.

12. Долгоруков А. Метод кейс-стади как современная технология профессионально – ориентированного обучения. URL: http://www.evolkov.net/case/case.study.html (дата обращения 17.05.2016).

13. Дружинина В.Н. Когнитивная психология. Учебник для вузов. - М.: ПЕР СЭ, 2002. - 480 с.

14. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления. - М.: Лабиринт, 1999. – 192 с.

15. Журавлева Е.Г. Задачи как средство формирования умений критически мыслить у студентов математических специальностей педвузов: Автореф. дис. канд. пед. наук. - Пенза, 2008. – 19 с.

16. Журавлева Е.Г. Формирование критического мышления учащихся на уроках математики /Сборник трудов по материалам 3 международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», 17-21 апреля 2007 г., г.Тольятти/В 4-х ч. Ч.3. Тольятти: ТГУ, 2007. – С. 405-410.

17. Загурская Н.В. Развивающие уроки математики. URL: http://algebra-5.narod.ru/index3.htm (дата обращения 27.05.2016).

18. Зайкин М.И. Развивающий потенциал математики и его реализация в обучении: сб. науч. и метод. р./ под ред. М.И. Зайкина. – М.: Арзамас, 2002. – 334 с.

19. Кайзер Ф.-Й., Камиски Х. Методика преподавания экономических дисциплин. Книга для учителя. – М.: Вита-Пресс, 2007. – 184 с.

20. Каптерев П.Ф. Избранные педагогические сочинения. М., 1982. – 703 с.

21. Коджаспирова Г.М. Словарь по педагогике / Г.М. Коджаспирова, А.Ю.Коджаспиров. – М.: ИКЦ МарТ; Ростов н/Д: Изд.ц. МарТ, 2005. – 448 с.

22. Козырева Л.Д. Метод кейс – стади и его применение в процессе обучения студентов. URL: http://www.nwaqs.ru/files/files/407324/doc (дата обращения 17.05.2016).

23. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, Г.Л. Луканин, В.Я. Саннинский − М.: Просвещение, 1980. - 258 с.

24. Купряшин Г.Л. Ситуационный анализ (case study) в учебных курсах по государственному управлению и политике: Учебное пособие/Федер.агенство по образованию, Нац. фонд подготовки кадров. – М.: Издательский дом «Новый учебник», 2004. – 256 с.

25. Лаптинская С.В. Критическое мышление как объект педагогического исследования в системе высшего юридического образования// Вестник Томского госуд. пед. университета. – 2005. - №5. - С. 125-129.

26. Леонтьев А.Н. Мышление и творчество / М., Политиздат,1976. - 144 с.

27. Линдсей Г., Халл К.С., Томсон Р.Ф. Творческое и критическое мышление// Познавательные психические процессы/ Сост. и общая редакция А.Г. Маклакова. СПб: Питер, 2001.- 500 с.

28. Лябина Т.Н. Нестандартные задачи как средство развития логического мышления. URL: http://www.wiki.vladimir.i-edu.ru/ (дата обращения 27.05.2016).

29. Лященко Е.И. и др. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб.пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов – М.: Просвещение, 1988. - 223 с. – С. 29-30.

30. Мадера А.Г. Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным рассуждениям: Кн. для учащихся 7- 11кл / А.Г. Мадера, Д.А. Мадера. / М.: Просвещение, 2003. – 112 с.

31. Максимова Е.А. Развитие критического мышления учащихся на уроках математики. URL: http://uipk.narod.ru/Articles/maksimova.htm (дата обращения 27.05.2016).

32. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики. Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 2002. – 175 с.

33. Маркина Л.В. Методическая разработка по теме «Логарифмические уравнения и неравенства. Подготовка к ЕГЭ». URL: http://gov.cap.ru/HOME/121/raznoe/end/mathematics/маркина%20л.в.doc (дата обращения 27.05.2016).

34. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Педагогика, 1972. – 168 с.

35. МГО лицей. Проект «Развитие критического мышления через чтение и письмо». Мозырский Государственный областной лицей. URL: http://mozliceum.na.by/mr_proekt_critic.php (дата обращения 27.05.2016).

36. Мельникова Е.П. Критерии и показатели оценки сформированности у студентов критического мышления// Среднее профессиональное образование. – 2009 - №12. – С. 55-58.

37. Мельникова Е.П. Развитие умений работы с источниками информации средствами технологии критического мышления// Среднее профессиональное образование. – 2007. - №4. – С. 20-22.

38. Минкина Ф.Ф. Критическое мышление учащихся и педагогические способы его формирования. Дисс. канд.пед. наук. - Казань, 2000. -166 с.

39. Митенева С.Ф. Нестандартные задачи по математике как средство развития творческих способностей учащихся: Автореф. дис. канд. пед. наук. - Вологда, 2005. – 19 с.

40. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

41. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразоват. организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович и др. – М.: Мнемозина, 2014. – 264 с.

42. Мордкович А.Г. Программы. Математика 5 – 6 классы. Алгебра 7-9 классы. Алгебра и начала анализа 10-11 классы.- М.: Мнемозина, 2010. – 68 с.

43. Муравин Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс. : учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

44. Немов Р.С. Психология: Учеб. для студ. высш. пед. учеб. заведений: В 3 кн. – 4е изд. / М.:Гумакнит. изд. центр ВЛАДОС, 2003.- Кн.2:Общие основы психологии. – 608 с.

45. Ожегов С.И., Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка, 41089 словарных статей. Издательство "Азъ", 1992. – 506 с.

46. Павлова Ю.Н. Кейс – метод, как важный фактор повышения профессиональной компетентности преподавателя на уроках информатики. URL: http://elib.osu.ru/bitstream/123456789/509/1/3399-3404.pdf (дата обращения 17.05.2016).

47. Податов А.П. Математические софизмы, парадоксы и логические задачи. Улан-Удэ: Бурятское книжное издательство, 1962. – 112 с.

48. Попков В.А. Критический стиль мышления в профессиональном самостановлении преподавателя высшей школы: Автореф. дис. д-ра псих.наук. - Москва, 2002. – 42 с.

49. Попков В.А., Коржуев А.В. Критический стиль мышления у субъектов высшего профессионального образования. Автореф. дисс. - Москва, 2002. – 30 с.

50. Плотникова Н.Ф. Критическое мышление и его формирование в высшем учебном заведении// Образовательные технологии и общество. - 2009. Т.12. - №1. – С. 396-400.

51. Пратусевич М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений : профил. уровень / М.Я. Пратусевич. К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2010. – 463 с.

52. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. URL: http://math.reshuege.ru/ (дата обращения 17.05.2016).

53. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии: Учебное пособие – М.: Учпедгиз, 1946. – 704 с.

54. Седова Е.А. Примерные программы среднего (полного) общего образования. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 10-11 классы / Е.А. Седова, С.В. Пчелинцев, Т.М. Мищенко и др.; под общ. ред. М.В. Рыжакова. – М.: Вентана– Граф, 2012. – 136 с.

55. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: учебное пособие. М.: Народное образование, 1998. – С. 254-255.

56. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов – М.: Дрофа, 2005. – С. 107.

57. Стефанова Н.Л. и др. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. Пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов. М.: Дрофа, 2007. – 320 с.

58. Темербекова А.А. Методика преподавания математики: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. – 176 с. URL: http://static.my-shop.ru/product/pdf/88/874028.pdf (дата обращения 27.05.2016).

59. Тихомиров О.К. Психология мышления /О.К. Тихомиров. – М.: Академия, 2002. – 288 с.

60. Тихоненко А.В., Трофименко Ю.В. Реализация развития критического мышления младших школьников на уроках математики // Вестник Таганрогского гос. пед. института. Физико-математические и естественные науки. – 2012. - №1. – С. 82-91.

61. Тягло А.В., Воропай Т.С. Критическое мышление: Проблема мирового образования 21 века.- Харьков: Ун-т внутр. дел, 1999. - 285 с.

62. Урбан М.А. Обучение с помощью конкретных ситуаций. URL: http://elib.bspu.by/bitstream/doc/4680/1/Урбан_Пач_школа.pdf (дата обращения 17.05.2016).

63. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012г. №413. URL: http://минобрнауки.рф/документы/2365 (дата обращения 17.05.2016).

64. Федоров А.В. Развитие медиакомпетентности и критического мышления студентов педагогического вуза// МОО ВПП ЮНЕСКО «Информация для всех», 2007. – 616 с.

65. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: Учебное пособие.– М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 248 с.

66. Халперн Д. Психология критического мышления: Учебное пособие. - СПб.: Издательство «ПИТЕР», 2000. – 512 с.

67. Хрестоматия по истории философии. Учебное пособие для вузов. В 2-х ч. Ч.1. / М.: Прометей, 1994. – 536 с.

68. Цаплина Е.О. Кейс – технологии на уроках математики. URL: https://perm.hse.ru/okrug/section3 (дата обращения 17.05.2016).

69. Черных А.А. Формирование качеств мышления студентов, характерных для математической деятельности и необходимых для полноценной жизни в обществе. URL: http://michac.narod.ru/Konferencia/Matematika/Chernih.doc (дата обращения 27.05.2016).

70. Шакирова Д.М. Технология формирования критического мышления старшеклассников и студентов// Педагогика. – 2006. - №9. – С. 72-77.

Приложение 1

Решения заданий [52] для групп на уроке 2 с использованием кейс-технологии

Группа 1: Решите уравнение $\boldsymbol{log_3(3x^4+42)=1+log_{\sqrt{3}}\sqrt{13x^2+2}}$ **,** найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5}{4};2]$.

Решение: запишем исходное уравнение в виде:

$$log_3(3x^4+42)-log_3 3 = log_3(13x^2+2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow log_3(x^4+14)=log_3(13x^2+2) \Leftrightarrow x^4+14=13x^2+2 \Leftrightarrow x^4-13x^2+$ $+12=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-12)=0.$

Значит, либо $x^2-1=0$, откуда х= - 1 или х= 1, либо $x^2-12=0$, откуда х = -2$\sqrt{3}$ или х = 2$\sqrt{3}$.

Поскольку -2$\sqrt{3}$ < $-\frac{5}{4}$ < - 1 < 1 < 2 < 2$\sqrt{3}$, отрезку $[-\frac{5}{4};2]$ принадлежат корни х = - 1 и х = 1.

Ответ: ± 1.

Группа 2: Решите уравнение $1+\boldsymbol{log_3(x^4+25)=log_{\sqrt{3}}\sqrt{30x^2+12}}$ **,** найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{11}{5},\frac{16}{5}]$.

Решение: запишем исходное уравнение в виде:

$$log_3(x^4+25) = log_3(30x^2+12)-log_3 3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow log_3(x^4+25)=log_3(10x^2+4) \Leftrightarrow x^4+25=10x^2+4 \Leftrightarrow x^4-10x^2+$ $+21=0 \Leftrightarrow (x^2-3)(x^2-7)=0.$

Значит, либо $x^2-3=0$, откуда х= - $\sqrt{3}$ или х= $\sqrt{3}$, либо $x^2-7=0$, откуда х = - $\sqrt{7}$ или х = $\sqrt{7}$.

Поскольку - $\sqrt{7}$ < $-\frac{11}{5}$ < - $\sqrt{3}$ < $\sqrt{3}$ < $\sqrt{7}$ < $\frac{16}{5}$, отрезку $[-\frac{11}{5},\frac{16}{5}]$ принадлежат корни х = ± $\sqrt{3}$ и х = $\sqrt{7}$.

Ответ: $\boldsymbol{\pm\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{7}}$ **.**

Группа 3: Решите уравнение $\boldsymbol{log_2(20x^2+8) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{10x^4+16} - 1}$ **,** найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [- 1, $\frac{\sqrt{323}}{9}$] .

Решение: заметим, что уравнение определено при всех значениях переменной. Преобразуем исходное уравнение:

$$\log_2(20x^2+8) = \log_2(10x^4+16) - \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(20x^2+8) =$$
$$= \log_2(5x^4+8) \Leftrightarrow 20x^2+8 = 5x^4+8 \Leftrightarrow 5x^4 - 20x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x^2(x^2-4) = 0.$$

Значит, либо x^2=0, откуда x=0, либо $x^2 - 4 = 0$, откуда x=2 или x=-2.

Отрезку [- 1, $\frac{\sqrt{323}}{9}$] принадлежит только корень x = 0, так как

$-1 < 0 < \frac{\sqrt{323}}{9} < \frac{\sqrt{324}}{9} = \frac{18}{9} = 2.$

Ответ: 0.

Приложение 2

Решение самостоятельной работы на тему «Логарифмическая функция»

Вариант 1

1. *Решение:*

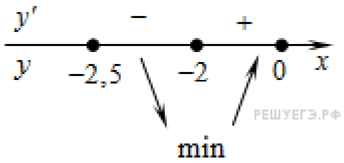
Найдем производную заданной функции:

$y'(x) = (3x)' - (ln(x+3)^3)' = 3 - (3\ln(x+3))' = 3 - 3(\ln(x+3))' = 3 -$
$-3 * \frac{1}{x+3} = 3 - \frac{3}{x+3}.$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{3}{x+3} = 0, \\ -2{,}5 \le x \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} = 1, \\ -2{,}5 \le x \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2{,}5 \le x \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке x= -2 заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: y(-2)= -2*3- ln1= -6.

Ответ: -6.

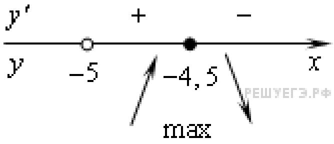
2. Ошибка в 4 пункте, правильный ответ: функция не ограничена сверху, не ограничена снизу. И пропущен пункт что функция возрастает на (0, + ∞).

3. В алгоритме 1: третий пункт не для нахождения максимума, а надо определите знаки производной функции и изобразите на рисунке поведение функции. В алгоритме 2: пропущен пункт о нахождение производной функции.

Решение:

1. Найдем производную заданной функции: $y' = \frac{1}{x+5} - 2.$

2. Найдем нули производной: $\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \;\Leftrightarrow x + 5 = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow x = \; -4{,}5.$

3. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведении функции: 

Искомая точка максимума $x = -4{,}5$.

Ответ: $-4{,}5$.

4. Ошибка в вычисление: $log_4 16 - 5 = 2 - 5 = -3$. *Ответ:* -3.

Вариант 2

1. *Решение:*

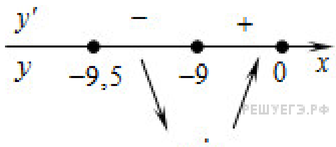
Найдем производную заданной функции:

$y'(x) = (10x)' - (ln(x+10)^{10})' = 10 - (10\ln(x+10))' = 10 -$

$-10(\ln(x+10))' = 10 - 10 * \frac{1}{x+10} = 10 - \frac{10}{x+10}$.

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 10 - \dfrac{10}{x+10} = 0, \\ -9{,}5 \le x \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+10} = 1, \\ -9{,}5 \le x \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9, \\ -9{,}5 \le x \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = -9.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции: 

В точке x= -9 заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: y(-9)= 10*(-9)- ln1= -90.

Ответ: -90.

2. Ошибка в пункте 2, правильный ответ: функция не является ни четной, ни нечетной. Пропущен пункт, что функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

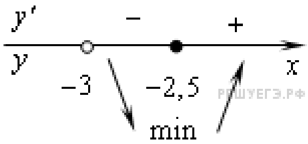
3. В алгоритме 1: третий пункт не для нахождения максимума, а надо

определите знаки производной функции и изобразите на рисунке поведение функции. В алгоритме 2: пропущен пункт о нахождение производной функции.

Решение:

1. Найдем производную заданной функции: $y' = 2 - \frac{1}{x+3}$.

2. Найдем нули производной: $2 - \frac{1}{x+3} = 0 \iff x + 3 = \frac{1}{2} \iff x = -2{,}5$.

3. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции: 

Искомая точка минимума $x = -2{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$.

4. Ошибка в вычисление: $log_5 25 - 8 = 2 - 8 = -6$. *Ответ:* -6.

Приложение 3

Анкета для учителей математики

1. Что Вы понимаете под «критическим мышлением»?

А – это способность среди множества решений выбирать наиболее оптимальное, аргументировано опровергать ложное.

Б – это негативность суждений, умение подвергать все факты легкому скепсису и не принимать всё на веру.

В – специфическая форма оценочной деятельности субъекта познания, направленная в самом общем смысле на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам, включающая определенные процедуры и способствующая смысловому самоопределению субъекта познания по отношению к самым разнообразным проявлениям окружающего мира и его продуктивному преобразованию.

Г – свойство личности, качество ума, форма оценочной деятельности, вид мышления.

2. Как Вы считаете, почему современный школьник должен владеть навыками критического мышления?

А – критическое мышление способствует взаимоуважению учащихся, пониманию и продуктивному взаимодействию между ними.

Б – критическое мышление облегчает понимание различных взглядов на мир.

В – критическое мышление помогает оптимизировать учебный процесс и улучшить качество усвоения материала.

Г – другое: ____

____.

3. Какими умениями должен обладать ученик при обучении в общеобразовательной школе, чтобы мыслить критически?

А – умением критично подходить к полученной информации.

Б – умением находить ошибки, устранять их и выявлять причины допущенных ошибок.

В – умением проводить опровержение.

Г – умением объективно оценивать выдвинутые гипотезы и результаты их проверки.

Д – умением эффективно осуществлять отбор полезной информации, содержащейся в самой задаче, процессе решения и его результатах.

4. Какие из приемов развития критического мышления Вы знаете?

А – мозговой штурм.

Б – инсерт, под которым понимается чтение с пометками («+»- новое для меня, «-» - не согласен, «V»- уже знал, «?» - есть вопросы).

В – З. Х. У. (знаю / хочу узнать / узнал новое).

Г – эссе.

Д – кластер, прием систематизации материала в виде схемы (рисунка), когда выделяются смысловые единицы текста.

5. Какие из приемов развития критического мышления Вы используете на уроке, в каком классе?

А – мозговой штурм, ________ класс(ы).

Б – инсерт, ________ класс(ы).

В – З. Х. У. (знаю / хочу узнать / узнал новое) , ________ класс(ы).

Г – эссе, ________ класс(ы).

Д – кластер, ________ класс(ы).

6. По какой причине Вы не используете остальные приемы развития критического мышления?

А – нет четкого представления о них.

Б – считаю неэффективными при обучении учащихся.

В – другая причина, ____

____ .

7. Если Вы используете технологию развития критического мышления учащихся, то какую форму реализации Вы предпочитаете, в каком классе?

А – дискуссия, ________ класс(ы).

Б – лекция, ________ класс(ы).

В – семинар, ________ класс(ы).

Г – конференция, ________ класс(ы).

Д – исследование, ________ класс(ы).