МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

Реализация принципов системности и последовательности при обучении решению задач по теме «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве» в углубленном курсе геометрии старшей общеобразовательной школы

М А Г И С Т Е Р С К А Я Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Направление подготовки магистра: 44.04.01 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математическое образование*

Студент Е.В. Иванова __________

Научный
Руководитель: к.ф. – м.н., профессор
кафедры алгебры и геометрии Е.В. Потоскуев __________

Руководитель программы: д.п.н., проф. Р.А. Утеева __________

«_____»_______ 2016 г.

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева __________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В нынешнее время, время роста информационного потока, в России идет процесс преобразования системы образования, сопровождаемый существенными изменениями в педагогической теории и практике. Соответствующие изменения наблюдаются и в школьном математическом, в частности, геометрическом, образовании.

Действенное и успешное обучение геометрии, как и любому другому разделу математики, предполагает следование определенным принципам, применяемым на соответствующих этапах процесса изучения и обучения геометрии. В процессе этого изучения и обучения возникают проблемы осознанного усвоения учащимися стереометрического материала, как теоретического, так и задачного.

Раздел «Прямые и плоскости в пространстве», по объему и времени изучаемый в 10 классе, представляет собой значительную часть всего школьного курса стереометрии. Эта первая часть «школьной» стереометрии, необходимая для сознательного изучения геометрии многогранников и фигур вращения, векторного и координатного методов, представляет собой последовательное, логически «устроенное» изложение большого количества взаимосвязанных вопросов, касающихся взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Следует заметить, что «вхождение в стереометрию», вследствие (на данном этапе обучения) не высокого уровня развитого абстрактного мышления учащихся, вызывает у них определенные затруднения.

Вопросы организации изучения теоретического материала этого раздела стереометрии, обучения владению методами выполнения заданий соответствующего задачного материала послужили предметом исследования настоящей диссертационной работы.

Проблематичным является вопрос о том, которую из двух тем стереометрии изучать первой: материал о перпендикулярности прямых и плоскостей, или материал о их параллельности? Опыт преподавания стереометрии свидетельствует, что изучение вопросов аффинной геометрии пространства – вопросов инцидентности и параллельности прямых и плоскостей - должен предшествовать изучению метрической стереометрии - перпендикулярности прямых и плоскостей в евклидовом пространстве.

Методически верная, проверенная практикой, система расположения материала в учебнике и задачнике в значительной степени облегчает прочность его усвоения.

В учебнике Потоскуева Е.В., Л.И. Звавича материал о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве изложен в такой последовательности: 1) взаимное расположение двух прямых в пространстве; 2) взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве; 3) взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. При этом изучение взаимного расположения прямых и плоскостей сопровождается решением большого количества задач, среди которых особое место занимают задачи на доказательство и задачи конструктивного характера.

Актуальность темы исследования данной диссертационной работы обусловлена необходимостью организации сознательного усвоения учащимися начал стереометрии, построения логически верной методики обучения началам стереометрии для осознанного изучения ими последующих и завершающих разделов школьной стереометрии - геометрии многогранников и фигур вращения.

В этой связи возникает проблема **диссертационного исследования**: методически верная организация изучения основополагающих разделов курса стереометрии в 10-11 классах с углубленным изучением геометрии - вопросов взаимного расположения прямых и плоскостей в трехмерном евклидовом пространстве.

В результате анализа научно-методической литературы по вопросам школьного геометрического образования (углубленный уровень) можно сделать вывод: важным фактором при изложении теоретического и подборе задачного материала является правильно разработанная, методически верная система обучения, которая должна становиться наиболее успешной для сознательного, успешного усвоения учащимися стереометрического материала старших классов с углубленным изучением геометрии в общеобразовательной школе.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в 10-11 классах с углубленным изучением геометрии общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся старших классов решению задач по теме «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве», ориентированная на реализацию принципов системности и последовательности в обучении на основе УМК авторов Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Цель исследования состоит в раскрытии специфики принципа системности и последовательности обучения геометрии в 10-11 классах, в рассмотрении сущности принципа системности и последовательности к подбору решаемых задач, как на уроках геометрии, так и рекомендованных для домашней работы.

Гипотеза исследования состоит в следующем: успех учебной деятельности решающим образом зависит от системности в работе по достижению поставленной цели.

Для достижения поставленной цели и проверки сформулированной гипотезы потребовалось решить следующие ***задачи***:

1. Проанализировать научную и учебно-методическую литературу по теме исследования.

2. Разработать методические рекомендации по реализации принципа системности и последовательности в геометрии учащихся старших классов на примере тем «Взаимное расположение прямых и плоскостей».

3. Разработать программу с содержанием элективного курса по теме «Скрещивающиеся прямые» для учащихся старших классов с углубленным изучением геометрии общеобразовательной школы.

4. Провести констатирующий этап педагогического эксперимента.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования**: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики, беседы с учителями; анализ собственного опыта работы в школе; анкетирование учителей; педагогический эксперимент и обработка его результатов.

Научно-методическую основу исследования составили: работы Е.В. Потоскуева.

Основные этапы исследования:

9 семестр (2014/15 уч.г.): Анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников геометрии, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

10 семестр (2014/15 уч.г.): Определение методических основ исследования по теме диссертации.

11 семестр (2015/16 уч.г.): Подборка системы задач по темам «Прямые в пространстве», «Прямая и плоскость в пространстве», «Плоскости в пространстве» для учащихся старших классов с углубленным изучением геометрии; разработка программы элективного курса по теме «Скрещивающиеся прямые»

12 семестр (2015/16 уч.г.): Оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна исследования заключается в разработке методических рекомендаций для реализации принципа системности и последовательности при обучении решению задач в рамках углубленного курса геометрии учащихся старших классов общеобразовательной школы, в соответствии с УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича.

Теоретическая значимость проведённого исследования заключается в следующем: а) предложены методические рекомендации применения принципа системности и последовательности к изучению отдельных тем курса стереометрии в старших классах; б) разработана система геометрических задач.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что методически разработанная подборка системы задач при изучении темы «Взаимное положение прямых и плоскостей» может быть использована учителями математики, а также студентами педагогических специальностей в ходе прохождения ими педагогической практики в старших классах с углубленным изучением геометрии.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обусловлены: а) использованием данных современной теории и методики обучения математике; б) анализом педагогической практики и личного опыта работы; в) сочетанием теоретических и практических методов исследования, а также экспериментальной проверкой.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по изучению тем («Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве») в классах с углубленным изучением геометрии по УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича.

2. Программа элективного курса по теме: «Скрещивающиеся прямые».

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций, программы элективного курса осуществлена в период педагогической и научно-исследовательской практик на базе кафедры алгебры и геометрии ТГУ, а также в период работы учителем математики на базе МБУ СОШ №74 г.о. Тольятти

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на научно-методическом семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ, научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ;

Основные результаты исследования отражены в *1 публикации*.

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы включает 37 наименований.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИНЦИПА СИСТЕМНОСТИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Роль принципа системности и последовательности в образовательной деятельности

Принцип системности предполагает, чтобы изложение учебного материала учителем доводилось до уровня системности в сознании учащихся, чтобы знания давались учащимся не только в определенной последовательности, но чтобы они были взаимосвязанными [5].

Принцип системности предполагает изложение курса геометрии в определенной логической последовательности. Нельзя овладеть геометрией, не изучая ее в определенной системе. В такой же мере, нельзя успешно развивать познавательные и творческие способности учащихся, без строго продуманной системы их обучения и воспитания.

«Принцип системности и последовательности в обучении обусловливается и логикой самих наук, изучаемых в школе, и особенностями познавательной и практической деятельности учащихся, протекающей в соответствии с закономерностями их умственного и физического развития. Принцип системности и последовательности в обучении лежит в основе построения учебных программ, определяет систему работы учителя и деятельность учащихся в процессе обучения» [14, с. 73].

Принцип системности и последовательности в обучении проводится во всей системе учебной работы. Излагать знания систематически — это значит: при изучении нового опираться на ранее пройденное, выделять в нем главное; вскрывать общую идею; формировать у учащихся умение анализировать, систематизировать и обобщать изучаемые явления и факты.

Принцип системности и последовательности изложения геометрического материала важен для выработки у учащихся умений и навыков самостоятельной работы с книгой, организованности и последовательности приобретения ими геометрических знаний.

Системность в обучении геометрии предполагает соблюдение определенной последовательности в изучении учебного геометрического материала, выработке навыков в решении геометрических задач при соблюдении принципа «от простого – к сложному» и постепенное овладение основными понятиями школьного курса геометрии.

Важную роль играет системность в подборе упражнений. Упражнения необходимо располагать по нарастанию сложности. Содержание задач должно носить комплексный характер: решая задачи, ученики должны не только закреплять вновь изученный материал, но и повторять ранее пройденный [11].

Последовательность в обучении геометрии означает, что при этом соблюдаются дидактические принципы:

а) от простого к сложному;

б) от представлений к понятиям;

в) от известного к неизвестному;

г) от знания к умению, а от него - к навыку.

Учитель реализует эти принципы, если обучение геометрии представляет собой цепочку последовательных шагов, каждый из которых дополняет известные учащимся знания и умения разумной дозой новых знаний и умений, которые, в свою очередь, становятся инструментом для приобретения школьниками новых знаний и умений [8].

Сказанное позволяет утверждать, что научность обучения решению геометрических задач немыслима без системности, а с системностью тесно связан вопрос о преемственности в обучении. Ее характеризует опора на пройденное, дальнейшее развитие имеющихся у учащихся знаний, умений и навыков, установление связей между новыми и ранее приобретенными знаниями. В результате этого знания становятся прочными и глубокими [35].

Правила принципа системности и последовательности:

1. Реализация преемственности и установление ассоциаций в процессе обучения с целью реализации данного принципа во многом зависит от планирования учебной работы (например, практические занятия необходимо проводить только после изучения теоретического материала, когда этот материал усвоен в комплексе; при изучении нового материала необходимо опираться на ранее усвоенные знания и т. д.).

2. Учитель не имеет морального права переходить к изучению последующего учебного материала, если он не уверен, что усвоен предыдущий (даже, если учитель ограничен рамками программы, количеством часов на изучение той или иной темы).

3. С целью реализации данного принципа необходимо осуществлять как бы «опережающее обучение». На каждом уроке при изучении любого учебного материала необходимо создавать «почву» для изучения последующего. Для начинающего учителя необходимо каждый раз готовиться не только к очередному уроку, а как бы одновременно к двум или даже нескольким.

4. Принцип системности и последовательности требует постоянного повторения изученного материала. Однако повторение не должно сводиться только лишь к воспроизведению пройденного (традиционный репродуктивный характер обучения как раз и ориентирует на такое воспроизведение: повторение после учителя, пересказ о прочитанном в учебнике и т. д.). Необходимо, чтобы при повторении пройденного учащиеся рассматривали его с новых позиций, увязывали со своим личным опытом, с личными наблюдениями, со знаниями по другим учебным дисциплинам и т. п.

Большое значение для реализации принципа системности и последовательности имеет практическая деятельность учащихся, когда они могут применить теоретические знания в практической деятельности. Важность такой связи подчеркивается введением самостоятельного принципа: связи теории с практикой [5].

В учебном процессе все дидактические принципы очень тесно переплетаются и порой невозможно четко определить, какой из них лежит в основе обучения. Однако они дают возможность осуществлять обучение таким образом, чтобы оно соответствовало логике познания как такового. Специфические связи и взаимообусловленность отдельных элементов процесса обучения осуществляются при соблюдении: сознательности и активности обучающихся; наглядности обучения; системности и последовательности; доступности обучения; прочности овладения знаниями, умениями и навыками; научности обучения; связи обучения с жизнью (теории с практикой); индивидуального похода к обучающимся [12].

§2. Основные аспекты при разработке системы задач по геометрии

Эффективность обучения геометрии в значительной степени зависит от правильной организации деятельности учащихся по решению геометрических задач. Успешность этой деятельности обусловлена тем набором задач и порядком их предъявления, которые выбраны для ее реализации.

Педагогами и психологами доказано, что для эффективности достижения целей образования, необходимо использовать в учебном процессе систему задач. Под *системой задач* будем понимать совокупность подобранных в соответствии с поставленной целью задач, действующих как одно - целое, взаимосвязь и взаимодействие которых приводит к заранее поставленному результату [9].

На большую важность решения задач в системе, выработку принципов составления систем задач указывали психологи А.Ф. Эсаулов, Н.А. Менчинская, Л.М. Фридман, В.И. Зыкова, педагоги Д.Пойа, М.И. Зарецкий, методисты Ю.М. Колягин, П.М. Эрдниев, Г.В. Дорофеев, И.Г. Шарыгин, Г.И. Саранцев и др [7].

Методистами, педагогами и психологами установлено, что ни одна задача, решаемая изолировано, не дает нужного образовательного результата, не позволяет достичь основных целей обучения математике. Так Г.И. Саранцев, указывает, что решение геометрических задач вызывает определенную умственную деятельность, которая обусловлена не только их содержанием, но и последовательностью их решения, количеством однотипных задач, комбинацией с другими задачами.

В методической литературе по изучению и обучению геометрии используются различные термины для обозначения «объединений» задач:

- блок – совокупность, связанных между собой задач, объединенных общей идеей, исходя из условия их упорядочивания посредством обобщения, конкретизации, аналогии, таким образом, что каждая последующая задача либо обобщает предыдущую, либо конкретизирует ее, либо является ее аналогом, либо использует результат предыдущей задачи (Т.М. Калинкина).

- серия – система задач, включающая задачи, объединенные общей идеей решения (Н.С. Мельник).

- семья – совокупность математических объектов, связанных каким-либо отношением (Е.А.Молчанова и др.)

- система – совокупность объектов, взаимодействие которых «вызывает» появление новых, интегративных качеств, не свойственных отдельно взятым образующим систему компонентам (Г.И. Саранцев, Ю.М. Колягин, О.Б. Епишева и др).

- цикл – совокупность, содержащая задачи, различные по формулировке и сюжету, но имеющее общее дидактическое назначение, служащее достижению одной цели (Г.В. Дорофеев).

И. Е. Дразнин считает одним из важнейших способов построения систем упражнений способ варьирования, под которым он понимает составление такой последовательности упражнений, в которой каждое последующее упражнение получено из предыдущего или одного из предыдущих изменением условия или параметра. Ссылаясь на опыт применения таких задач, ученый отмечает, что после нескольких месяцев работы учащиеся довольно успешно сами варьируют условия, а это развивает фантазию, интуицию, логику, т. е. предложенный способ дает ощутимый положительный результат [6].

Г. И. Саранцев отмечает, что на последних этапах процесса формирования понятия важно использование блоков задач, объединенных какой-либо общей идеей. Упорядочение задач может быть осуществлено посредством обобщения и конкретизации, привлечения аналогии, на основе составления взаимно обратных задач. Блоки задач могут конструироваться следующими способами:

— результаты решения предыдущей задачи используются в условии последующей;

— результаты решения предыдущей задачи используются в решении последующей;

— предыдущие задачи являются элементами последующей;

— решения совокупности задач осуществляются одним и тем же методом;

— на основе одной задачной ситуации.

Другими исследователями выделяются следующие методы конструирования систем задач: а) построение взаимообратных и противоположных задач; обобщение и конкретизация задач; рассмотрение аналогов; расчленение условия и требования задачи на части и включение их в новые связи; составление задач на основе использования в них результата решения предыдущих задач (Т. М. Калинкина); б) конструирование задач, аналогичных данной; обобщение задачи; конкретизация задачи; конструирование задачи, обратной данной; варьирование; переформулировка задачи (О. Н. Орлянская); в) обобщение; конкретизация; составление обратных задач; варьирование; составление более сложных задач (Т. И. Дюмина) и др.

Проанализировав различные подходы к конструированию «объединений» задач, совокупность приемов составления родственных задач представим следующим образом:

— обобщение условия (требования задачи);

— конкретизация условия (требования задачи);

— специализация условия (требования задачи);

— составление задач, обратных исходной;

— составление задач, аналогичных исходной;

— составление задач, являющихся частными случаями исходной;

— замена (добавление) требования с сохранением условия;

— замена (добавление) условия с сохранением требования;

— использование результатов решения предыдущей задачи в условии или решении последующей;

— составление задач, имеющих с исходной одинаковый метод решения.

Рассмотрим один из выше перечисленных приемов — прием обобщения. Обобщение как форма перехода от частного к общему имеет целью выделение общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу объектов. Использование обобщения основано на расширении области изменения параметра либо на переходе от данного множества к более широкому множеству, содержащему данное. Первое направление преимущественно применяется в алгебре, второе — в геометрии.

Снятие или ослабление ограничения, наложенного на условие первоначальной задачи, приводит к новой, более общей, задаче или к доказательству некоторого утверждения.

При построении задач, обобщающих данную, обобщается либо её условие, либо требование этой задачи, либо её части. В соответствии с этим формирование данного приема у учащихся предполагает наличие задач, необходимых для каждого рассматриваемого обобщения.

Примерами таких задач могут быть задачи на:

- введение понятия, обобщающего данное понятие;
- подборка задачи, обобщающей одну из задач данной их совокупности;
- составление задачи, обобщающей условие данной задачи;
- составление задачи, обобщающей часть требования данной задачи.

Анализ состояния современного отечественного математического образования позволяет сделать вывод, что в практике преподавания математики в школе и вузе системам задач не уделяется должного внимания. Работа с системами задач на занятиях открывает более широкие возможности эффективного использования учебного материала, создания проблемных ситуаций, требующих от учащихся исследовательских умений. В методическом отношении такое конструирование системы задач - сложная проблема.

В методической литературе выделяются четыре основных пути такого конструирования систем задач.

1. *Метод ключевых задач*. Идея состоит в выделении опорной задачи, вокруг которой группируется определенный набор задач. Существуют две точки зрения на понятие ключевой задачи. Первая из них состоит в том, что ключевая задача может быть рассмотрена как задача-факт или задача-метод, результат решения которой может быть использован при решении каждой из задач этой системы. Вторая точка зрения по этому вопросу заключается в отборе определенного минимума задач, достаточных учащимся для решения любой задачи по изучаемой теме.

2. *Метод варьирования задачи*. Задачная система строится таким образом, что её задачи и данная задача были взаимосвязаны по содержанию. *Под содержанием задачи понимают совокупность ее компонентов: условие, требование, базис и способ решения.* Можно выделить основные приемы варьирования: прием взаимно-обратных и противоположных задач; прием обобщения и конкретизации (замена задачи более общей, из решения которой непосредственно следует получение новых фактов и результатов); прием аналогии (перенесение некоторого знания, полученного при рассмотрении какого-либо объекта, на другой объект); прием варьирования объектов и отношений задачи (включение объектов и отношений компонентов задачи в новые связи посредством изменений, вносимых в условие или требование задачи).

3. *Метод определения целевой задачи*.

Для построения системы задач здесь выделяется целевая (достаточно сложная) задача, решение которой предполагает применение основного ядра знаний учащихся и наиболее полно отражает сущность изучаемого материала. Целевая задача предваряется вспомогательными задачами, постепенно приближающимися по уровню сложности к данной целевой задаче.

4. *Метод «снежного кома» задач*.

Система задач, построенная таким образом, имеет следующую структуру. Для решения первой задачи необходимо выполнить всего одну операцию; решение второй задачи предполагает выполнение подобной операции, плюс еще одной операции; в следующей задаче системы, кроме двух ранее решенных, выполняется новая, третья операция и т. д., пока не дойдет до достаточно сложной задачи, решение которой предполагает выполнение большого количества операций.

Е.И. Машбиц [17] выделил следующие требования к построению системы задач:

1) необходимо конструировать не отдельную задачу, а систему задач - это требование следует из того, что говорить о пользе той или иной задачи, о ее развивающем характере можно только в том случае, если известно ее место в системе задач; 2) при конструировании системы задач надо стремиться, чтобы она обеспечивала достижение не только ближайших учебных целей, но и перспективных; 3) задачи должны обеспечивать усвоение системы средств, необходимых и достаточных для успешного осуществления учебной деятельности; 4) задачи необходимо конструировать так, чтобы соответствующие средства деятельности, усвоение которых предусматривается в процессе решения задачи, выступали как прямой продукт обучения [17].

Правильно сконструированная система задач по геометрии обеспечивает полноту представлений школьников об изучаемом объекте, способствует глубине и осознанности знаний. Организация обучения посредством решения систем учебных геометрических задач позволяет повторить, обобщить и систематизировать ранее изученный материал, увидеть взаимосвязи отдельных тем школьного курса геометрии, вооружить учащихся различными методами решения основных типов геометрических задач.

При изучении геометрии в школе особое внимание уделяется обучению учащихся решению геометрических задач. Качество знаний учащихся оценивается главным образом по их умению самостоятельно решать задачи.

Мастерство учителя заключается в том, чтобы изучаемые теоретический материал по геометрии обеспечил успешное овладение учащимися основными приемами решения геометрических задач, а накопленные в ходе решения задач сведения и факты способствовали более углубленному пониманию теории.

Школьный курс геометрии открывает широкие перспективы для обучения учащихся решению задач. В современных условиях в распоряжении учителя имеются не только разнообразные по содержанию геометрические задачи, но и эффективные методы их решения: посредством векторов, координат. Не следует упускать из виду давно сложившиеся классические приемы, основанные на применении построений, тригонометрических соотношений.

Таким образом, обучение учащихся решению геометрических задач различными способами и методами дает возможность:

- прививать интерес к изучению геометрии;
- пробуждать учащихся к более вдумчивому изучению геометрии;
- развивать логическое, пространственное мышление;
- полнее исследовать свойства геометрических фигур [10].

Выводы по первой главе

1. Показана роль принципа системности и последовательности в обучении геометрии

2. Описаны различные подходы к конструированию систем математических задач.

3. Представлены основные требования к системе задач.

4. Рассмотрены варианты конструирования систем задач в зависимости от поставленных учителем целей урока.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИНЦИПА СИСТЕМНОСТИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Методические аспекты принципа системности и последовательности при обучении решению задач по теме «Прямые в пространстве» в задачах

1.1. Взаимное расположение прямых в пространстве

Изучение материала о взаимном расположении прямых в пространстве следует начать с повторения аналогичного материала о взаимном расположении двух прямых на плоскости.

Из планиметрии известно, что две прямые на плоскости могут либо пересекаться, либо не пересекаться (быть параллельными). Совпадающие прямые в школьном курсе геометрии рассматриваются в исключительных случаях.

Необходимо отметить, что в пространстве, как и на плоскости, прямую можно задать парой ее точек. Но кроме этого способа в пространстве есть и еще один способ задания прямой – парой пересекающихся плоскостей (рис.1).

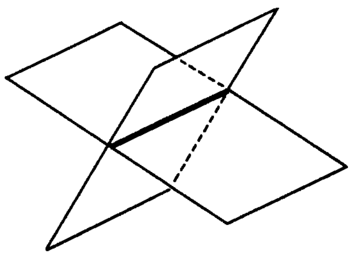

Рис. 1

В предшествующем изучению материала о взаимном расположении прямых в пространстве было доказано, что через две пересекающиеся (через две параллельные) прямые (всегда) можно провести плоскость, притом только одну. Иначе говоря, любые две пересекающиеся (параллельные) прямые пространства лежат в одной плоскости (определяют единственную плоскость).

Но в пространстве две прямые могут быть расположены так, что в этом пространстве не существует плоскости, в которой они лежали бы. В таком случае говорят, что эти две прямые не лежат в одной плоскости и называют их скрещивающимися.

В учебниках вводится такое определение: *Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.*

Из этого определения следует, что две *скрещивающиеся* прямые – это такие прямые, через которые плоскость провести нельзя.

Учащимся будет полезно привести наглядные примеры скрещивающихся прямых.

Пример. Реальные примеры скрещивающихся прямых дают транспортные развязки (рис. 2).

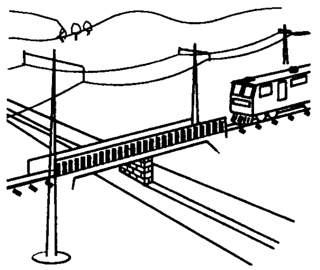

Рис. 2

Чтобы корректно, аргументированно доказать, что данные прямые скрещиваются, используют признак скрещивающихся прямых:

- *Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.*

Опыт показывает, что наиболее сознательному пониманию сущности этой теоремы способствует использование моделей многогранников. Более того, используя модель многогранника, учащиеся могут варьировать как «ролями» данных прямых, так и изменением плоскости, содержащей одну из этих прямых.

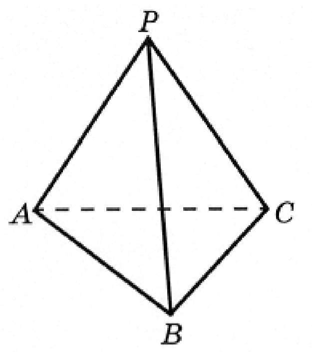

Рис. 3

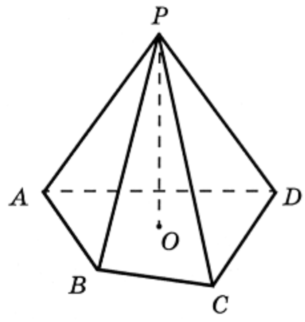

Рис. 4

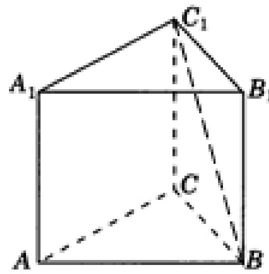

Рис. 5

Например, нужно доказать, что ребра АР и ВС тетраэдра РАВС (рис.3) скрещиваются. При решении этой задачи могут быть следующие варианты рассуждений: а) так как прямая АР лежит в плоскости АРС, а прямая ВС пересекает эту плоскость в точке С, не принадлежащей прямой АР, то прямые АР и ВС скрещиваются; б) так как прямая АР лежит в плоскости АРВ, а прямая ВС пересекает эту плоскость в точке В, не принадлежащей прямой АР, то прямые АР и ВС скрещиваются; в) прямые АР и ВС скрещиваются, так как прямая ВС лежит в плоскости АВС, а АР прямая пересекает эту плоскость в точке А, не принадлежащей прямой ВС; г) прямые АР и ВС скрещиваются, так как прямая ВС лежит в плоскости РВС, а АР прямая пересекает эту плоскость в точке Р, не принадлежащей прямой ВС.

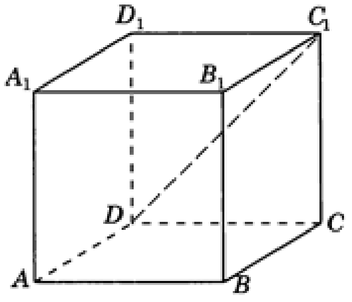

Рис. 6

Аналогичные рассуждения целесообразно проводить и для других пар скрещивающихся ребер тетраэдра РАВС: АС и ВР, АВ и РС.

Пары скрещивающихся прямых учащиеся могут «наглядно увидеть» на моделях или изображениях других многогранников: четырехугольной пирамиды PABCD (рис.4), треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис.5), куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.6).

Учащимся следует пояснить, что на «плоском» чертеже две скрещивающиеся прямые изображаются либо пересекающимися, либо параллельными прямыми.

На моделях и изображениях многогранников учащиеся могут «наглядно увидеть», что скрещивающиеся прямые AC и BC_1 (рис.5), AD и PC (рис.4), BC и DC_1 (рис.6), изображены пересекающимися. На рисунке 4 прямые AP и CD параллельны, но изображают они скрещивающие прямые.

Для наилучшего понимания и усвоения материала рассмотрим следующие задачи на взаимное расположение прямых в пространстве.

Задача 1. Каким может быть взаимное расположение двух прямых, если: а) они обе лежат в одной плоскости; б) обе не лежат в одной плоскости; в) одна из них лежит в плоскости α, другая – в плоскости β; г) одна из них лежит в плоскости α, а другая пересекает эту плоскость. Сделайте соответствующие рисунки [1].

Решение. а) Прямые a и b, лежащие в одной плоскости α, могут:

- пересекаться в некоторой точке М (рис 7,*а*)
- не иметь общих точек - быть параллельными (рис 7, б)

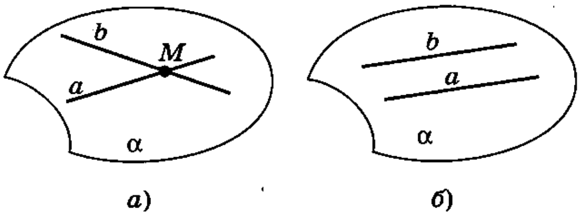

Рис 7

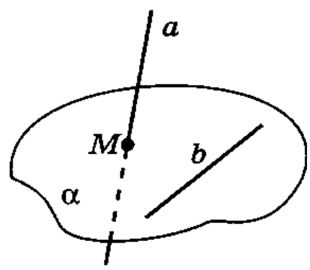

Рис. 8

б) Прямые, которые не лежат в одной плоскости, скрещиваются (рис 8) (по определению скрещивающихся прямых).

в) В данном случае прямые a и b могут иметь следующее взаимное расположение:

- быть скрещивающимися;

- пересекаться.

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.9). Может ли прямая быть параллельна [29]:

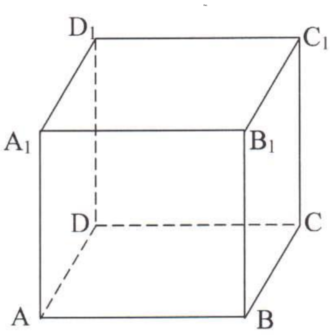

Рис.9

а) только одному ребру куба?

б) только четырем его ребрам?

в) пяти его ребрам?

г) только одной из диагоналей граней куба?

Ответ: а) нет; б) да; в) нет; г) нет.

Учащимся будет полезно предложить провести небольшое исследование в качестве домашнего задания:

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) перечислить все пары скрещивающихся ребер куба;

б) перечислить все пары пересекающихся ребер куба;

в) перечислить все пары параллельных ребер куба.

Ответ. а) 24 пары; б) 24 пары; в) 18 пар.

При решении стереометрических задач учащиеся *должны знать*, что:

1) если одна из параллельных прямых лежит в плоскости, то другая, параллельная ей прямая, не может эту плоскость пересекать;

2) через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну;

3) из двух пересекающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой;

4) если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны;

5) из двух скрещивающихся прямых, только одна может быть параллельна некоторой прямой;

6) если прямая *a* в точке М пересекает плоскость α, то эта прямая скрещивается с любой прямой плоскости α, не проходящей через точку М;

7) если четыре точки A, B, C и E не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CE, AC и BE, AE и BC попарно скрещиваются [18].

После выработки этих знаний целесообразно предложить учащимся для решения ряд следующих задач.

Задача 3. Точки T и K лежат на ребре CP, а точки O и E на ребре AB тетраэдра PABC (рис. 10). Докажите, что прямые TO и KE – скрещивающиеся [34].

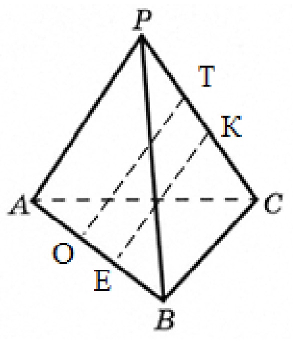

Рис. 10

Доказательство. Прямая OE лежит в плоскости ABC. Прямая TK пересекает эту плоскость в точке C, не принадлежащей прямой OE, поэтому прямые OE и TK скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых). Значит, точки T, K, E и O не лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что прямые TO и KE не лежат в одной плоскости, т.е. являются скрещивающимися.

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 - середины ребер соответственно A_1B_1, B_1C_1, BB_1, CC_1, DD_1, AB и AD (рис. 11). Как расположены прямые: а) P_1P_2 и P_3P_4 ; б) P_2P_3 и P_5P_7; в) P_1P_3 и P_6P_7; г) P_1P_2 и P_4P_5 [17].

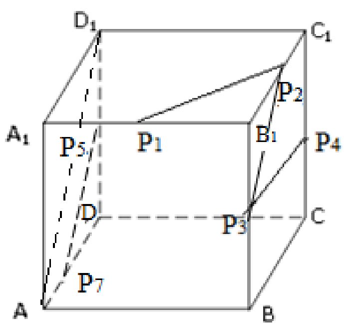

Рис. 11

Решение. а) Прямая P_3P_4 лежит в плоскости BB_1C. Прямая P_1P_2 пересекает эту плоскость в точке P_2, не принадлежащей прямой P_3P_4, поэтому прямые P_1P_2 и P_3P_4 скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых) (рис. 11).

б) Имеем: $P_2P_3 \parallel BC_1$ (как средняя линия треугольника BB_1C_1 (рис.11); $P_5P_7 \parallel AD_1$ (как средняя линия треугольника ADD_1). А так как $BC_1 \parallel AD_1$ (Почему?), то $P_2P_3 \parallel P_5P_7$.

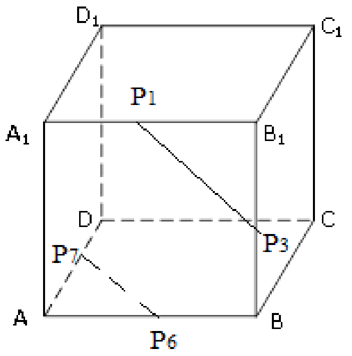

Рис 12

в) Прямая P_1P_3 лежит в плоскости ABB_1, прямая P_6P_7 пересекает эту плоскость в точке P_6, не принадлежащей прямой P_1P_3 (рис. 12). Это означает, что прямые P_1P_3 и P_6P_7 скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых).

г) P_1P_2 и P_4P_5 - скрещивающиеся прямые (Почему?).

В качестве упражнения для самостоятельной работы учащимся можно предложить следующую задачу.

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.13). Заполните таблицу.

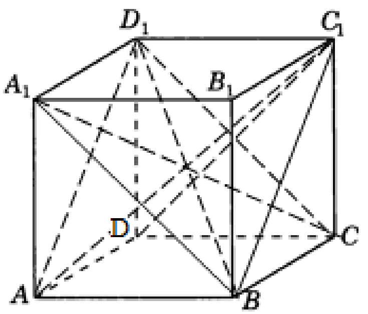

Рис. 13

	Прямые	Взаимное положение прямых
1	AB и D_1C_1	параллельны
2	BB_1 и C_1A	скрещиваются
3	DC_1 и D_1C	пересекаются
4	D_1A и BC_1	параллельны
5	DC и D_1C_1	параллельны
6	A_1B_1 и CC_1	скрещиваются
7	A_1B и DC	скрещиваются
8	DD_1 и A_1C	скрещиваются
9	A_1C и BD_1	пересекаются
10	D_1B и BD_1	совпадают

1.2. *Угол между прямыми в пространстве*

Во многих учебниках изучение темы: «Угол между прямыми в пространстве» переносится на более поздний срок. Однако такой «запоздалый перенос» этой темы препятствует динамике, темпам развития навыков учащихся в решении содержательных задач стереометрии, что, в свою очередь, не благоприятствует изучению дальнейшего теоретического материала стереометрии. В этой связи, авторы учебника [16] предлагают изучать вопросы об углах между прямыми в пространстве в первых параграфах учебника. В §7 учебника говорится о том, что за величину угла между пересекающимися прямыми принимается величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми. Величина угла между параллельными прямыми считается, равной 0°.

Для закрепления теоретического материала об углах между прямыми необходимо, используя модели и изображения многогранников, рассмотреть решение задач, подобранных по принципу «от простого - к сложному», в которых вырабатываются и закрепляются навыки и умения логического, графического и вычислительного характера.

Рассмотрим, например, следующую задачу:

Задача 6. В кубе $A…D_1$ (рис.14) найдите угол между прямыми: а) A_1D и DC_1;

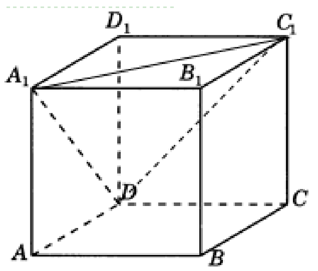

Рис. 14

Решение. Прямые A_1D и DC_1 имеют общую точку D, значит, они пересекаются. Проведем отрезок A_1C_1, получаем: $A_1C_1 = A_1D = DC_1$ (как диагонали равных квадратов -граней куба) $\Rightarrow$ ΔA_1C_1D - правильный. $\Rightarrow \angle A_1DC_1 = 60° \Rightarrow \angle(A_1D; DC_1) = 60°$.

Ответ: 60°.

Придерживаясь дидактического принципа «от простого –к сложному», целесообразно рассмотреть решение аналогичной задачи, используя многогранник более сложного устройства - правильную шестиугольную призму.

Задача 7. В правильной шестиугольной призме $A…F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и CD_1 (рис. 15).

Решение. Найдем этот угол с помощью теоремы косинусов в ΔACD_1. В правильном шестиугольнике ABCDEF имеем: $CD \perp AC$ (рис.16). Боковые ребра *правильной* призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис.15) перпендикулярны плоскости её основания. Тогда: $D_1D \perp (ABC)$, $CD \subset (ABC) \Rightarrow$ CD – ортогональная проекция наклонной D_1C на (ABC). А так как $CD \perp AC$, то $D_1C \perp AC$ (по теореме от трёх перпендикулярах) $\Rightarrow \angle ACD_1 = 90°$.

Ответ: 90°.

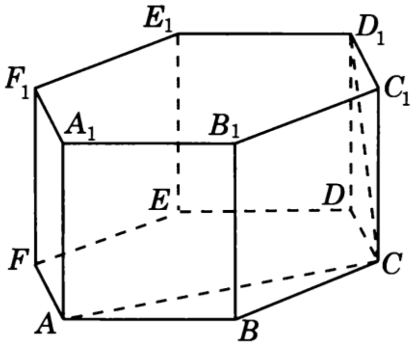

Рис.15

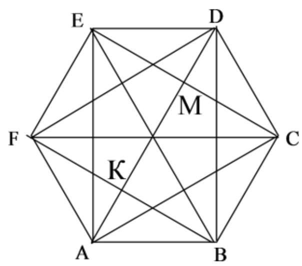

Рис.16

Далее методически оправдано приступать к изучению материала об углах между скрещивающимися прямыми в задачах.

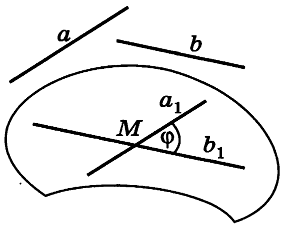

Рис. 17

Учащимся следует пояснить, что под углом между скрещивающимися прямыми понимают не «аналог» угла между пересекающимися прямыми, не геометрическую фигуру, а некоторую величину - величину угла между параллельными им пересекающимися прямыми.

Величину угла между скрещивающимися прямыми a и b определяют следующим образом. Через произвольную точку M пространства проводят прямые $a_1 \| a$ и $b_1 \| b$ и находят величину угла между пересекающимися прямыми a_1 и b_1 (рис.17). Эту величину и принимают за угол между скрещивающимися прямыми a и b. При этом величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M.

Точку М можно взять на одной из прямых a и b, например, на прямой a, и в плоскости, определяемой прямой b и точкой M, провести через M прямую $b_1 \| b$ (рис.18). Угол между пересекающимися прямыми a и b_1 равен углу между скрещивающимися прямыми a и b. При этом выбирать следует ту из

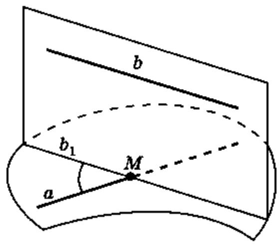

Рис. 18

двух данных прямых и такую точку на другой из них, чтобы полученное изображение угла было наглядным, а его построение наиболее простым; величина искомого угла не зависит от выбора точки *M*.

Величина угла φ между прямыми в пространстве, как и на плоскости, принадлежит промежутку [0º; 90º], при этом если φ = 90º, то прямые перпендикулярны. Если параллельные прямые рассматриваются в комбинации с перпендикулярными им прямыми, то справедливо следующее утверждение: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой прямой, то и вторая прямая перпендикулярна этой прямой.

Учащиеся должны научиться «видеть» и правильно строить, изображать и вычислять углы между прямыми. Особое внимание следует уделить выработке умений учащихся на данном изображении многоугольника, многогранника верно «проводить» прямую, перпендикулярную другой данной прямой или данной плоскости.

Дело в том, что при параллельном проектировании величина угла не сохраняется, поэтому перпендикулярные прямые изображаются на плоском чертеже, вообще говоря, не перпендикулярными прямыми, а прямой угол – вообще говоря, не прямым, а острым или тупым углом.

Рассмотрим задачи на нахождение углов между двумя прямыми в пространстве. При их решении последовательно используются теорема о трех перпендикулярах, признак перпендикулярности прямой и плоскости, тригонометрические функции углов треугольника и теорема косинусов.

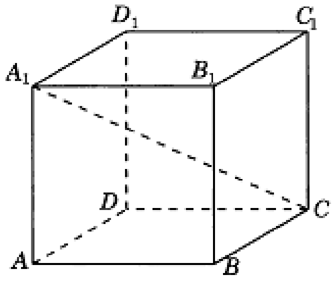

Рис 19

Задача 8. В единичном кубе $A…D_1$ найдите косинус угла между прямыми A_1C и AB (рис. 19).

Решение. Найдем косинус угла между прямыми AB и A_1C. Так как $AB \parallel CD$, то $\angle(AB; A_1C) = \angle(CD; A_1C) = \angle A_1CD = \beta$.

В ΔA_1CD, в котором $A_1D=\sqrt{2}$ (как диагональ квадрата со стороной, равной 1), $A_1C=\sqrt{3}$ (как диагональ куба с ребром, равным 1) по теореме косинусов находим:

[illegible] $= \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

*Задача 9***.** Дан правильный тетраэдр PABC. Найдите величину угла между прямыми: а) BC и AP (рис.20); б) MK и HT, где MK$\parallel$AC и HT$\parallel$PB (рис.21). в) Найдите величину угла KMT, если MK$\parallel$AC и MT$\parallel$BP (рис.22).

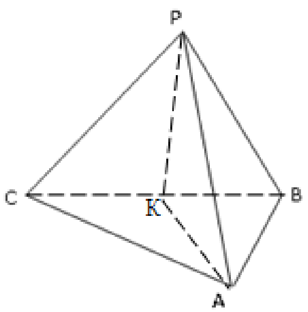

Рис. 20

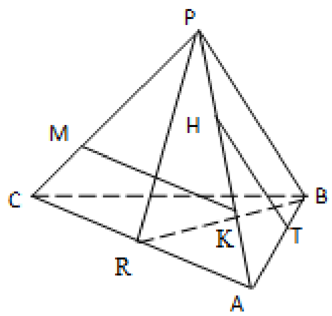

Рис. 21

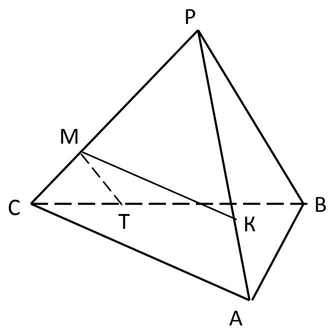

Рис. 22

Решение. а) Пусть точка K - середина ребра BC (рис.19) Имеем: $PK\perp BC$, $AK\perp BC$ (как медианы правильных треугольников соответственно PBC и ABC). Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $BC\perp(APK)$. Тогда $BC\perp AP$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости), поэтому $\angle(BC,AP) = 90^o$.

б) Так как MK$\parallel$AC и HT$\parallel$PB (по условию), то $\angle$(MK,HT)= $\angle$(AC,PB). Пусть точка R - середина ребра AC (рис.21). Имеем: $PR\perp AC$, $BR\perp AC$ (как медианы правильных треугольников соответственно PAC и ABC). Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AC\perp(PBR)$.

Тогда AC $\perp$ PB (по определению прямой, перпендикулярной плоскости), поэтому $\angle$(AC,PB)=$\angle$(MK,HT)= 90º.

Можно предложить учащимся самостоятельно решить задачу 9 (в).

Ответ: а) 90º; б) 90º; в) 90º.

Задача 10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите величину угла между прямыми: а) A_1B и C_1D (рис.23); б) F_1C и FD (рис.24); в) A_1B и B_1D (рис. 25);

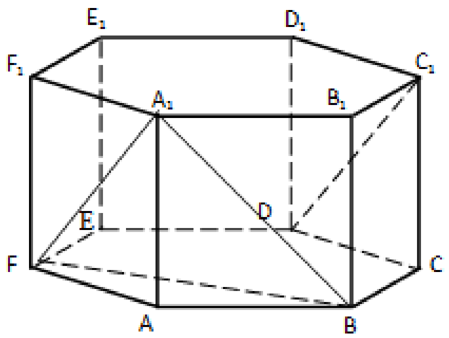

Рис. 23

Решение. а) Имеем: $C_1D \parallel A_1F$ (так как лежат в параллельных плоскостях DD_1C и AA_1F) $\Rightarrow \angle(A_1B; C_1D)=\angle(A_1B; A_1F) = \angle FA_1B=\varphi$ (рис.23).

Найдем этот угол в ΔA_1BF, в котором: $F_1A=A_1B = \sqrt{2}$ (как диагонали равных квадратов со стороной, равной 1). Находим:

в равнобедренном Δ ABF ($\angle$BAF =120°) по теореме косинусов:

$$BF^2= AB^2+AF^2 - 2\ AB\cdot AF\cdot \cos\angle BAF = 1^2+1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos120^{\circ} =3 \Rightarrow BF = \sqrt{3}.$$

Теперь в Δ A_1BF по теореме косинусов получаем:

$$\cos\varphi = \frac{\left|FA_1^2 + A_1B^2 - FB^2\right|}{2\cdot FA_1\cdot A_1B} = \frac{\left|\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right|}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\angle(A_1B;C_1D) = \arccos\frac{1}{4}$.

Можно предложить учащимся самостоятельно решить задачи 10 (б,в).

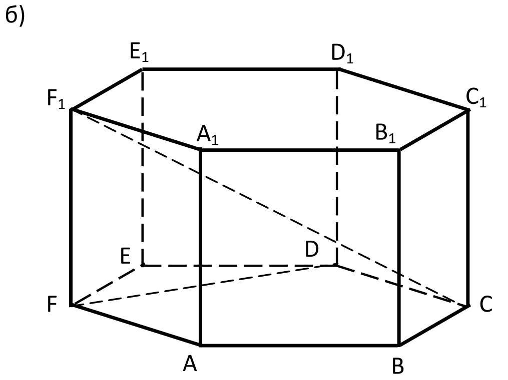

Рис. 24

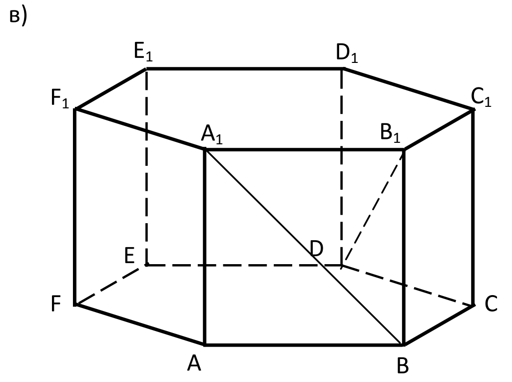

Рис. 25

Ответ: а) $\arccos\frac{1}{4}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задачи на вычисление угла между прямыми полезно решать векторным методом. Решение многих стереометрических задач векторным методом иногда значительно упрощает решение геометрической задачи, а также помогает учащимся развивать инициативу в поиске наиболее рационального пути решения геометрической задачи. При обучении учащихся решению геометрических задач векторным методом необходимо, прежде всего, научить учащихся переводить условие задачи на «векторный язык», применять алгебраические операции над векторами, полученный в векторном виде результат переводить обратно на язык геометрический.

Если в задаче требуется найти длину отрезка AB или величину угла, то в качестве базисных выбирают такие векторы, длины которых и углы между которыми уже известны. Длину отрезка AB находят как длину вектора $\overrightarrow{AB}$. Для этого вектор $\overrightarrow{AB}$ разлагают по базисным векторам, затем находят его скалярный квадрат и получают длину отрезка AB по формуле: |AB|=

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}.$$

При нахождении величины угла φ выбирают векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на сторонах этого угла с началом в его вершине и разлагают их по базису, а затем находят cos φ по формуле: cos φ = $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. При этом пользуются алгебраическими и геометрическими свойствами скалярного произведения векторов.

Проиллюстрируем сказанное на решении следующих задач.

Задача 11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите угол между прямыми: а) D_1B и A_1D; б) AC_1 и D_1B.

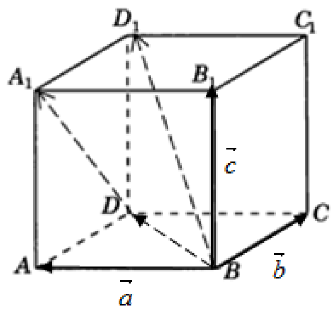

Рис. 26

Решение. Введем векторный базис в пространстве: $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BB_1}$ (рис.26), при этом, $\vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}=\vec{c}^{\,2}=1$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{b}=0$ (1)

а) Обозначим: $\angle(D_1B;\ A_1D)=\alpha$. Найдем $\cos\alpha$ = $\dfrac{|\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{BD_1}|}{|\overrightarrow{DA_1}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}$.

Имеем: $\overrightarrow{DA_1}=-\vec{b}+\vec{c}$; $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$

Тогда, учитывая соотношения (1), получаем:

$$\cos\alpha=\frac{|(-\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})|}{\sqrt{(-\vec{b}+\vec{c})^2}\cdot\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2}}=\frac{\left|-\vec{b}\vec{a}-\vec{b}^{\,2}-\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}+\vec{c}\vec{b}+\vec{c}^{\,2}\right|}{\sqrt{\vec{b}^{\,2}-2\vec{b}\vec{c}+\vec{c}^{\,2}}\cdot\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}}}=$$

$$\frac{|0-1-0+0+0+1|}{\sqrt{1-2\cdot0+1}\cdot\sqrt{1+1+1+2\cdot0+2\cdot0+2\cdot0}}=\frac{0}{\sqrt{6}}=0,$$ откуда α = 90°, то есть $\angle(D_1B;\ A_1D)=90°$.

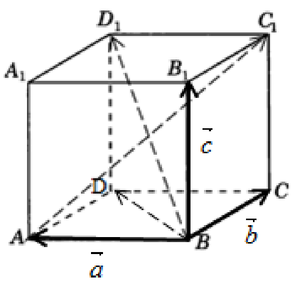

Рис. 27

б) Обозначим: $\angle(AC_1;\ D_1B)=\beta$. Найдем $\cos\beta=\dfrac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD_1}|}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}$. Имеем (рис.27): $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Тогда, учитывая соотношения (1), получаем:

$$\cos\beta = \frac{\left|(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|}{\sqrt{(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2}\cdot\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2}} =$$

$$= \frac{\left|-\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{a}+\vec{b}^2+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}+\vec{c}\vec{b}+\vec{c}^2\right|}{\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}}\cdot\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}}} =$$

$$= \frac{|-1-0-0+0+1+0+0+0+1|}{\sqrt{1+1+1-0-0+0}\cdot\sqrt{1+1+1+0+0+0}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3},\ \text{откуда: } \beta = \arccos\frac{1}{3}.$$

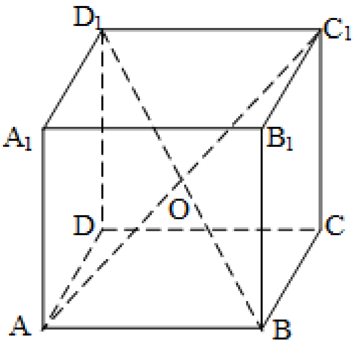

Рис. 28

Замечание. Угол между прямыми C_1A и D_1B можно найти иначе. Пусть $O = C_1A \cap D_1B$ (рис. 28). В ΔA_1CD, в котором $D_1O = C_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (так как диагонали куба точкой пересечения делятся пополам), $C_1D_1 = 1$ по теореме косинусов находим:

$$\cos\angle(C_1A;\ D_1B) = \frac{D_1O^2+C_1O^2-C_1D_1^2}{2\cdot D_1O\cdot C_1O} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\angle(C_1A;\ D_1B) = \arccos\frac{1}{3}$.

Ответ: а) 90°; б) $\arccos\frac{1}{3}$.

В качестве упражнения для самостоятельной работы учащимся можно предложить следующую задачу.

Задача 12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным *a*, найдите угол между прямыми: а) A_1B и B_1C (рис.29); б) BD_1 и B_1C (рис.30).

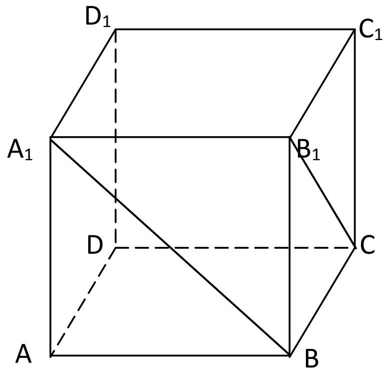

Рис. 29

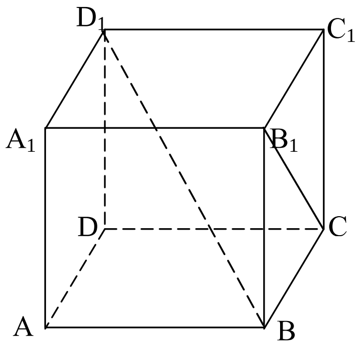

Рис. 30

Ответ: а) 60º; б) 90º;

Заметим, что координатно-векторный метод является эффективным способом решения многих стереометрических задач. Этот способ значительно облегчает их решение, при этом можно обойтись без дополнительных построений, которые становятся необходимыми при иных методах решения и загромождают рисунок. Например, угол между двумя скрещивающимися прямыми m и p равен углу между их направляющими векторами. Таким образом, если нам удастся найти координаты направляющих векторов $\vec{a}$ (x_1; y_1; z_1) и $\vec{b}$ (x_2; y_2; z_2) прямых m и p, то сможем найти искомый угол по формуле:

$$\cos(m; p) = |\cos(\vec{a}; \vec{b})| = \cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Рассмотрим это на примере следующей задачи.

Задача 13. В единичном кубе A…D₁ найдите косинус угла между прямыми A_1B и AC.

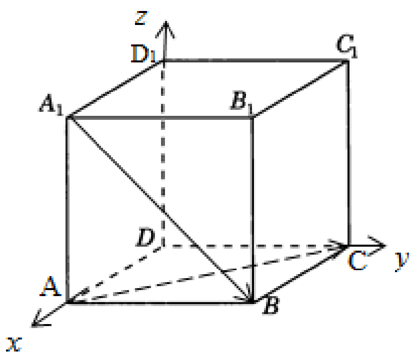

Рис. 31

Решение. Пусть $\angle(A_1B; AC) = \varphi$. На рисунке 30 изображен куб в системе координат Oxyz: точка D(0; 0; 0) – начало координат A(1;0;0), C(0;1;0),

D_1 (0;0;1) лежат на осях координат соответственно Ox, Oy, Oz (рис. 31). Далее: A_1(1; 0; 1), B(1; 1; 0), A(1; 0; 1), C(0; 0; 1).

Направляющими векторами прямых A_1B и AC являются соответственно векторы $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{AC}$.

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

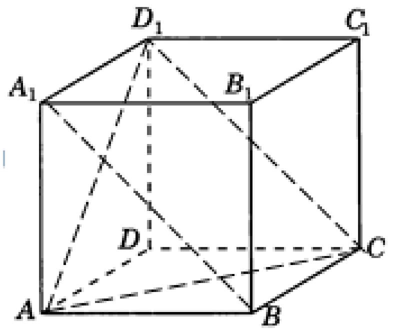

Рис. 32

Замечание. Угол между прямыми A_1B и AC можно найти иначе. Диагональ A_1B лежит в плоскости A_1AB, а диагональ AC пересекает эту плоскость в точке A, не принадлежащей прямой A_1B (рис. 32). Значит, диагонали A_1B и AC скрещиваются (по признаку скрещиваемости прямых). Найдем угол между этими диагоналями.

Имеем: $A_1B \parallel CD_1 \Rightarrow \angle(A_1B;AC) = \angle(CD_1;AC) = \angle ACD_1 = 60°$ (в правильном . $\Delta\, ACD_1$).

Ответ: 60°.

1.3. Расстояния в пространстве

1.3.1. Расстояние от точки до прямой

На данном этапе изучения стереометрии очень важно, чтобы учащиеся научились верно изображать на рисунке перпендикуляр, проведённый из данной точки на данную прямую. Навык нахождения расстояний от точки до прямой вырабатывается и закрепляется при решении задач конструктивного характера с использованием моделей и изображений куба, правильного тетраэдра, правильной шестиугольной призмы.

Расстояние от точки M до данной прямой *p* равно длине перпендикуляра, «опущенного» из точки M на прямую *p*. Если это расстояние равно m, то будем записывать: $\rho(M;p) = m$ [22] .

Чтобы выработать у учащихся навыки и умения верно изображать, находить численную величину расстояния от точки до прямой, необходимо предлагать для решения набор задач графического, логического и вычислительного характера, соблюдая при этом дидактический принцип «от простого - к сложному».

Рассмотрим, например, такую последовательность задач.

Задача 13. Пусть PABC – правильный тетраэдр, нарисуйте прямую, которая проходит: а) через точку P и перпендикулярна прямой AC; б) через точку C и перпендикулярна прямой PB; в) через точку K – середину отрезка BC – и перпендикулярна прямой PA; г) перпендикулярно прямым PC и AB.

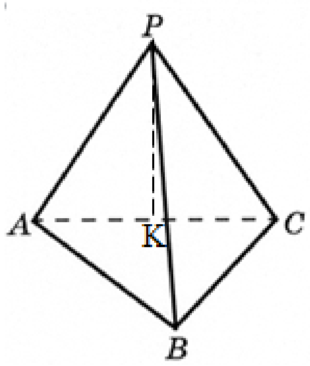

Рис. 33

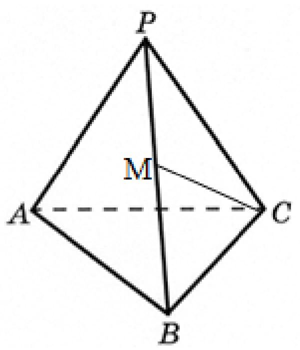

Рис. 34

Решение. а) Пусть точка K – середина ребра AC тетраэдра PABC (рис.33). Треугольник APC – правильный, поэтому его медиана PK перпендикулярна AC

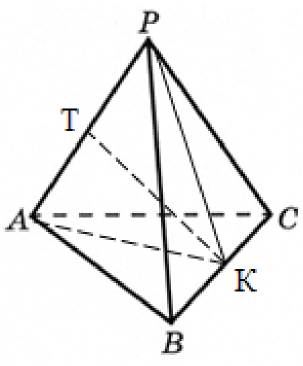

Рис. 35

б) Пусть точка M – середина ребра PB тетраэдра PABC (рис.34). Треугольник PBC – правильный, поэтому его медиана CM перпендикулярна PB.

в) Пусть точка T – середина ребра AP (рис. 35). Правильные треугольники PBC и ABC равны, значит, равны и их медианы PK и AK. Поэтому ΔAPK – равнобедренный с основанием AP (AK =PK). Так как точка T – середина этого основания, то проводим медиану TK этого треугольника, которая является искомым перпендикуляром из точки К на прямую AP.

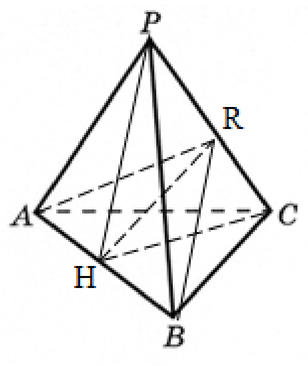

Рис. 36

г) Пусть точка H – середина AB (рис. 36). Тогда HP=HC (как медианы равных правильных треугольников APB и ABC соответственно), откуда: ΔPHC –равнобедренный. Если точка R – середина PC, то HR⊥PC (как медиана равнобедренного ΔPHC).

Далее, точка R – середина PC, значит, AR=BR (как медианы равных правильных треугольников APC и BPC соответственно), откуда: ΔARB – равнобедренный. Тогда RH ⊥ AB (как высота, проведенная к основанию AB в равнобедренном ΔARB). Таким образом, HR – общий перпендикуляр скрещивающихся ребер данного правильного тетраэдра PABC.

На уроках геометрии учащиеся узнают, что для нахождения расстояния от точки M, не лежащей в плоскости α, до прямой a, лежащей в этой плоскости, проводят перпендикуляр MP из точки M на плоскость α (P$\in$ α); |MP| =h $=\rho(M;\alpha)$. При этом, если точка P принадлежит прямой a, то $\rho(M;a)=$ $\rho(M;\alpha)=$ |MP|= h. Если точка P не принадлежит прямой a, то из точки P проводят в плоскости α перпендикуляр PK к прямой a, K$\in a$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах MK$\perp a$, поэтому $\rho(M;a)=$|MK| $=\sqrt{MP^2+PK^2}$.

Рассмотрим, например, решение следующей задачи.

Задача 14. Точка H – середина ребра PB правильного тетраэдра PABC (рис.37). Опустите перпендикуляры из точки H на прямые: AP, BC, AB. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $2\sqrt{3}$.

Решение. а) Пусть точки A_1, B_1, C_1 – середины ребер соответственно AP, BC, AB тетраэдра PABC (рис.37). Треугольник ABP – правильный, поэтому его медиана A_1B перпендикулярна AP. Значит, отрезок HM, проведенный парал-

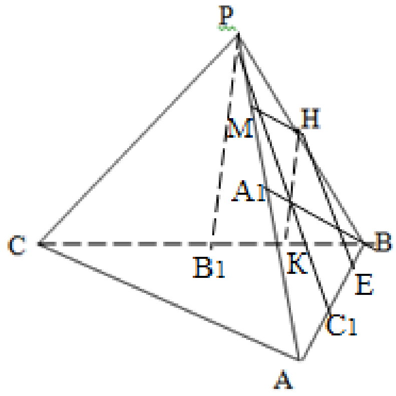

Рис.37

лельно A_1B, перпендикулярен AP и является искомым перпендикуляром из точки H на прямую AP.

Аналогично, проводим $EH||PC_1$ и $HK||PB_1$. Отрезки EH и HK – искомые перпендикуляры из точки H на прямые BC и AB соответственно. Найдем длины этих перпендикуляров.

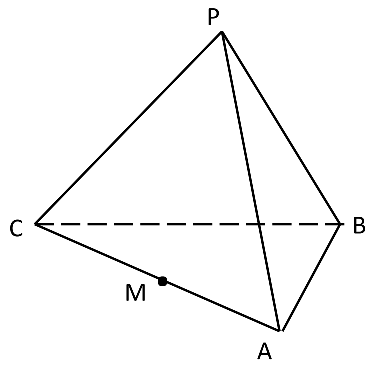

Рис. 38

Так как MH проходит через середину H ребра PB параллельно медиане A_1B треугольника ABP, то MH – средняя линия этого треугольника. Значит, $MH=\frac{1}{2}BA_1$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$=1,5. Аналогично, EH = $\frac{1}{2}PC_1$ =1,5; EK=$\frac{1}{2}PB_1$ =1,5.

Ответ: 1,5.

Можно предложить учащимся самостоятельно решить задачу 15.

Задача 15. Точка M –середина ребра AC правильного тетраэдра PABC (рис.38). Опустите перпендикуляры из точки M на прямые: а) AB; б) BC; в) AP; г) CP. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $4\sqrt{3}$.

Ответ: а)3; б)3; в)3; г)3.

Задача 16. Точка H – середина ребра PB правильного тетраэдра PABC (рис.39). Опустите перпендикуляры из точки H на прямую AC; Найдите длину этого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $2\sqrt{2}$.

Решение. Пусть точка T – середина ребра AC (рис. 39). Правильные треугольники PCB и PAB равны, значит, равны и их медианы CH и AH. Поэтому треугольник ACH – равнобедренный с основанием AC (CH =AH). Так как точка T – середина этого основания, то проводим медиану TH этого тре-

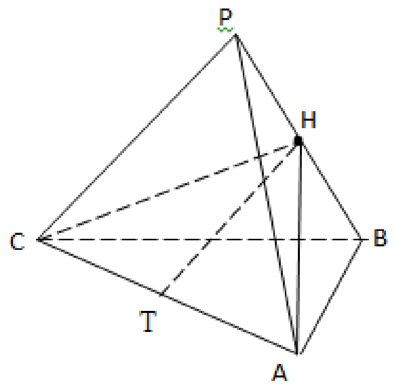

Рис.39

угольника, которая является искомым перпендикуляром из точки H на прямую AC. Найдем длину перпендикуляра TH.

В правильном ΔCBP: CH $=\frac{BC\sqrt{3}}{2}$ $=$ $\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$.

В прямоугольном ΔCTH: CT $=\frac{1}{2}$AC $=$ $\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$, тогда по теореме Пифагора получаем:

$$TH=\sqrt{CH^2-CT^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6-2}=2.$$

Ответ: 2.

В качестве упражнения для самостоятельной работы учащимся можно предложить следующую задачу.

Задача 17. Точка M – середина ребра AC правильного тетраэдра PABC (рис.40). Опустите перпендикуляры из точки M на прямую BP. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $4\sqrt{2}$.

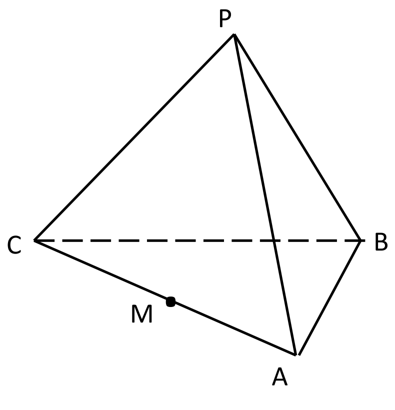

Рис. 40

Ответ: 4.

Для нахождения расстояния от точки А, не лежащей в плоскости β, до прямой *b*, лежащей в этой плоскости, проводят перпендикуляр АК из точки А на плоскость β (К$\in$ β); |АК| =h = ρ(А; β).

Если точка К принадлежит прямой *b*, то ρ(А; *b*) = ρ(А; β). =|АК|= h. Если точка К не принадлежит прямой *b*, то из точки К проводят в плоскости β перпендикуляр КВ к прямой *b*, В$\in b$. По теореме о трех перпендикулярах АВ$\perp$*b*, поэтому ρ(А; *b*)=|АВ| = $\sqrt{AK^2 + KB^2}$.

Рациональное использование времени урока является одним из необходимых условий получения качественных и прочных знаний по геометрии. Методически целесообразно организовать работу на уроке таким образом, чтобы по одному рисунку были решены несколько задач, опросив при этом несколько учащихся, что позволит увеличить количество задач, решенных в течение урока. Проиллюстрируем, сказанное выше, на примере следующей задачи.

Задача 18. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$; O=AC$\cap$BD. Найдите расстояние до прямой BD от вершин: а) B_1; б) A; в) C_1, если ребро куба равно 6.

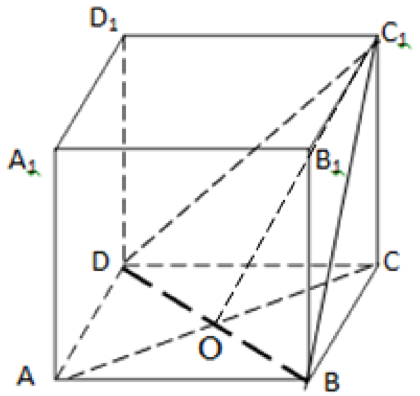

Рис. 41

Решение. а) Имеем: $B_1B\perp(ABC)$, $BD\subset(ABC)\Rightarrow B_1B\perp BD$ (рис. 41) (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Это означает, что $\rho(B_1; BD)= |BB_1|= 6$

б) Имеем: O=AC$\cap$BD, AC$\perp$BD (как диагонали квадрата) (рис. 41). Это означает, что $\rho(A;BD) = |AO| =|0,5AC|=0,5\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

в) Имеем: O=AC$\cap$BD, $C_1O\perp BD$ (как высота правильного треугольника BC_1D (рис. 41). Это означает, что $\rho(C_1; BD)$ = =$|C_1O|$.

В прямоугольном ΔCC_1O находим:

$$\rho(C_1; BD) = |C_1O| = \sqrt{C_1C^2 + OC^2} == \sqrt{6^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{6}.$$

Замечание. Расстояние $\rho(C_1;\ BD)$ можно найти иначе. Треугольник BC_1D является правильным со стороной $C_1B = 6\sqrt{2}$, причем $C_1O \perp BD$ (почему?) $\Rightarrow$ C_1O - медиана в $\Delta BC_1D \Rightarrow C_1O = \frac{C_1B\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$.

Ответ: а) 6; б) $3\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{6}$.

В качестве домашнего задания можно предложить учащимся самостоятельно решить задачу 19.

Задача 19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 42) найдите расстояние до прямой BD от вершин: а) B_1; б) A; в) A_1; г) C_1, если ребро куба равно 6.

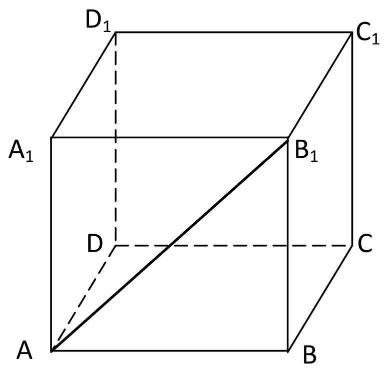

Рис.42

Ответ: а) 8; б) $4\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{6}$; г) $4\sqrt{6}$.

При решении задачи о нахождении расстояния от данной точки M до данной прямой *p*, расположенных в пространстве, можно построить точку H пересечения прямой *p* и плоскости, проведенной через точку M перпендикулярно прямой *p*. Тогда $|MH| = \rho(M; p)$. Рассмотрим решение следующей задачи.

Для выработки у учащихся прочных геометрических знаний и умений необходимо сформировать у них не только интерес к изучаемому геометрическому материалу, но и методически верно установить количество и содержательность упражнений по изучаемой теме, учесть индивидуальные особенности учащихся. Для этого при подборе задачного материала необходимо соблюдение дидактического принципа «от простого – к сложному».

Рассмотрим, например, задачи, в которых в качестве многогранника используется куб.

*Задача 20***.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние до прямой A_1C от вершин: а) A; б) B_1; в) D_1; г) D, если ребро куба равно 6.

Решение. а) Обозначим: $K = CA_1 \cap (AB_1D_1)$ и построим точку K (рис.43).

Так как диагональ A_1C лежит в диагональной плоскости ACC_1, то точка K должна принадлежать прямой пересечения плоскостей AB_1D_1 и ACC_1, то есть прямой AO_1, где $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$. Таким образом, $K = CA_1 \cap AO_1 = CA_1 \cap (AB_1O_1)$. Докажем, что $CA_1 \perp (AB_1D_1)$.

Ортогональной проекцией диагонали CA_1 данного куба на плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ является диагональ C_1A_1 этой грани. Вследствие $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (как диагонали квадрата $A_1B_1C_1D_1$), получаем: $CA_1 \perp B_1D_1$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, ортогональной проекцией диагонали CA_1 на плоскость грани ADD_1A_1 является ее диагональ DA_1, перпендикулярная диагонали AD_1 грани ADD_1A_1, поэтому $CA_1 \perp AD_1$ (по теореме о трех перпендикулярах).

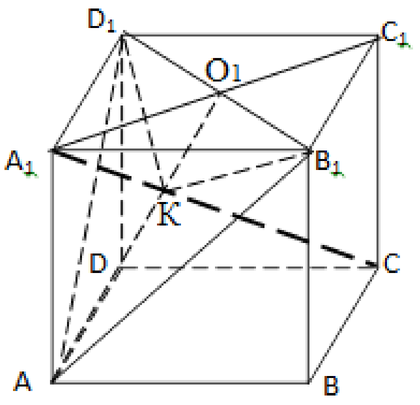

Рис. 43

Таким образом, $CA_1 \perp B_1D_1$, $CA_1 \perp AD_1$, $AD_1 \cap B_1D_1 = D_1 \Rightarrow CA_1 \perp (AB_1D_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), при этом $CA_1 \cap (AB_1D_1) = K$.

Так как $A_1K \perp (AB_1D_1)$, $A_1A = A_1B_1 = A_1D_1$, то $AK = B_1K = D_1K$ (как проекции равных наклонных), значит, точка K - центроид ΔAB_1D_1.

Получаем: $A_1C \perp (AB_1D_1)$, $AK \subset (AB_1D_1) \Rightarrow CA_1 \perp AK \Rightarrow AK = \rho(A; A_1C)$.

Находим: $D_1A = 6\sqrt{2}$ (как диагональ квадрата со стороной 6), поэтому в правильном ΔAB_1D_1 имеем: $AO_1 = \dfrac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$, тогда $AK = \dfrac{2}{3}AO_1 =$ $= \dfrac{2}{3}\cdot 3\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. Таким образом, $\rho(A;A_1C) = 2\sqrt{6}$.

Можно предложить учащимся в качестве домашней работы решить задачу 20 (б-г).

Ответ: а) $2\sqrt{6}$; б) $2\sqrt{6}$; в) $2\sqrt{6}$; г) $2\sqrt{6}$.

Далее, рассмотрим решение аналогичных задач, избрав в качестве многогранника правильную шестиугольную призму.

Указание. При решении задач на нахождение углов и расстояний в правильной шестиугольной призме удобно на отдельном рисунке вынести ее нижнее (или верхнее) основание – правильный шестиугольник ABCDEF (рис. 45), стороны которого равны 1. Взаимное расположение диагоналей этого шестиугольника, их длины и величины углов между ними известны еще из курса планиметрии.

Задача 21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$- правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние: а) от вершины А до прямой CD; б) от вершины В до прямой AC_1;

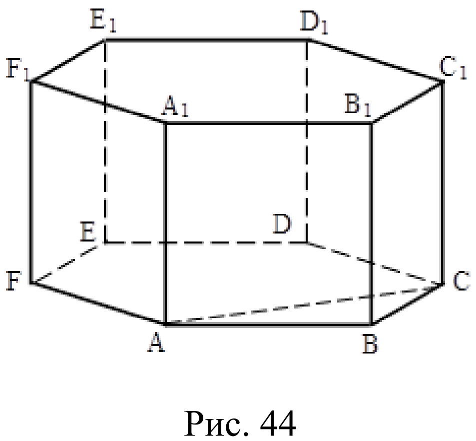

Рис. 44

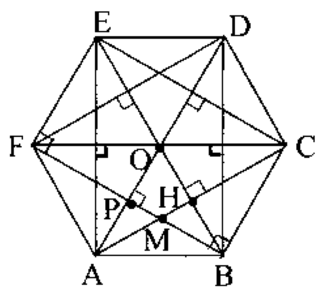

Рис. 45

Решение. а) Имеем: $C_1C\perp(ABC)$, $AC\subset(ABC)\Rightarrow C_1C\perp AC$ (рис.44) (по определению прямой, перпендикулярной плоскости); $AC\perp CD$ (шестиугольник ABCDEF - правильный, рис.45). Поэтому $AC\perp(C_1CD)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Это означает, что ρ(A;CD) = AC = $\sqrt{3}$ (как сторона правильного треугольника, вписанного в единичную окружность).

б) Рассмотрим ΔABC_1. Если BK - высота этого треугольника (рис.46), то $BK \perp AC_1$, значит, $BK = \rho(B;AC_1)$. Найдем BK.

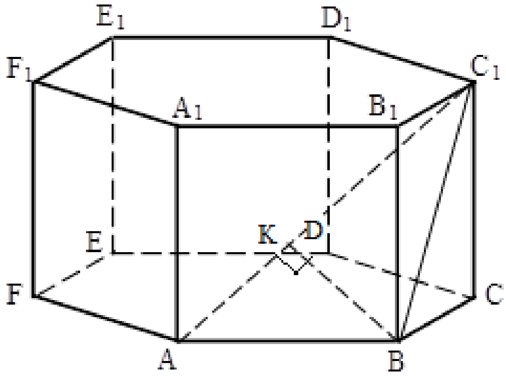

Рис. 46

В ΔABC_1: AB = 1; $BC_1 = \sqrt{2}$ (как диагональ квадрата со стороной, равной 1). В прямоугольном ΔCC_1A с катетами C_1C=1, AC= $\sqrt{3}$ находим AC_1:

$AC_1 = \sqrt{C_1C^2 + AC^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

Обозначим: AK = x, тогда C_1K = 2-x. Получаем: $C_1B^2 - C_1K^2 = AB^2 - AK^2$ или

$1 - x^2 = (\sqrt{2})^2 - (2 - x)^2$, откуда $x = \frac{3}{4}$ = AK. Значит, $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} =$

$= \sqrt{1^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. *Ответ*: а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Задача 22. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис.47), все ребра которой равны 1, найдите расстояние: а) от вершины F до прямой C_1B; б) от вершины А до прямой E_1C_1; в) от вершины А до прямой E_1F_1.г) от вершины А до прямой BF_1.

Решение. а) Имеем: $B_1B \perp (ABC)$, $BF \subset (ABC)$ (рис.47) $\Rightarrow$ $B_1B \perp BF$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Учитывая $BF \perp BC$ (рис.45), получаем $BF \perp (B_1BC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), откуда $BF \perp BC_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Это означает: $\rho(F;BC_1) = BF = \sqrt{3}$.

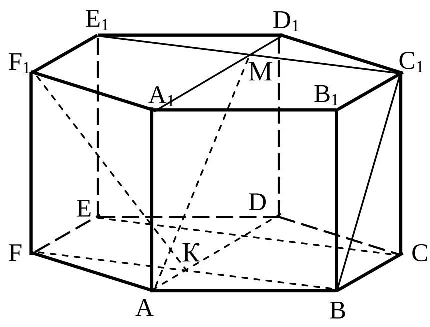

Рис. 47

б) Имеем: $AD \perp EC$ (рис.45); $C_1C \perp (ABC)$, $EC \subset (ABC)$ (рис.47) $\Rightarrow$ $C_1C \perp EC$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). А так как $C_1C \parallel D_1D$, то $D_1D \perp EC$. Таким образом,

$$\begin{cases} EC \perp AD, \\ EC \perp D_1D \end{cases} \Rightarrow EC \perp (AD_1D)$$

(по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Учитывая, $EC \parallel E_1C_1$ (в данной призме), получаем: $E_1C_1 \perp (AD_1D)$. А так как $AM \subset (AD_1D)$, ($M = E_1C_1 \cap D_1A_1$), то $E_1C_1 \perp AM$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Это означает, что $AM = \rho(A; E_1C_1)$.

В прямоугольном ΔAA_1M по теореме Пифагора находим:

$$AM = \sqrt{A_1A^2 + A_1M^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$ Таким образом, $\rho(A; E_1C_1) = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

в) Имеем: $AD \parallel EF$, $EF \parallel E_1F_1 \Rightarrow AD \parallel E_1F_1$ (рис.47). Учитывая, $К \in AD$, заключаем: $\rho(A; E_1F_1) = \rho(К; E_1F_1)$, где $К = BF \cap AD$.

Из $(B_1BF) \parallel (C_1CE)$ (Почему?) и $(C_1CE) \perp AD$ следует $(B_1BF) \perp AD$. А так как $AD \parallel EF \parallel E_1F_1$, то $(B_1BF) \perp E_1F_1$ (рис.47). Получаем: $E_1F_1 \perp (B_1BF)$, $F_1К \subset (B_1BF) \Rightarrow E_1F_1 \perp F_1К$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Это означает: $F_1К = \rho(К; E_1F_1) = \rho(A; E_1F_1)$. Теперь в прямоугольном $\Delta F_1КF$

находим: $F_1К = \sqrt{F_1F^2 + FК^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Ответ. а) $\sqrt{3}$; б) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$; в) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Методически целесообразно предложить учащимся самостоятельно решить задачу 23.

Задача 23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$- правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние: а) от вершины A до прямой

C_1D_1 (рис. 48); б) от вершины B до прямой A_1C (рис. 49); в) от вершины C до прямой AC_1 (рис. 50).

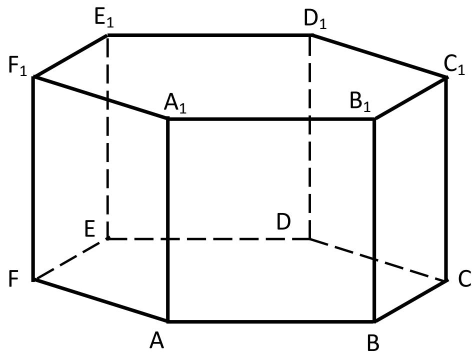

Рис. 48

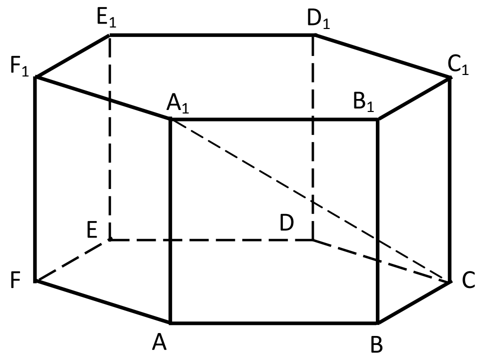

Рис. 49

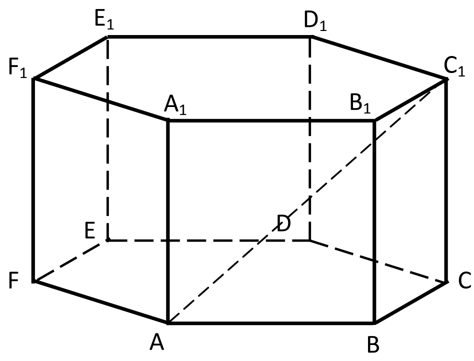

Рис. 50

Ответ: а) 2; б) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.3.2. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Одним из наиболее трудных вопросов школьной программы геометрии является вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми. Рассмотрим некоторые методы решения подобных задач.

Введем определение. *Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина отрезка с концами на этих прямых, перпендикулярного им обеим. Этот отрезок называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым.*

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться одним из нижеприведенных способов:

1. Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.

2. Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построения плоскости.

3. Через данные скрещивающиеся прямые провести параллельные плоскости. Тогда расстояние между этими плоскостями равно расстоянию между данными скрещивающимися прямыми (метод параллельных плоскостей).

4. Построить плоскость, перпендикулярную одной из прямых, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию этой прямой (метод проектирования).

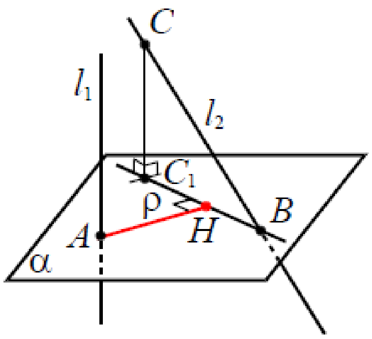

Рис. 51

$\rho(l_1,l_2)=\rho(A,BC_1)=AH$, где $A=l_1\cap\alpha$, $\alpha\perp l_1$, BC_1 – ортогональная проекция l_2 на плоскость α, H – основание перпендикуляра, опущенного из A на BC_1 (рис. 51).

5. Координатный метод. Используем следующий факт: *расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точкой од-*

ной прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.

Непосильный для начального уровня подготовленности учащихся учебный материал по геометрии вызывает их быстрое утомление, снижение мотивационного настроя на обучение, потерю интереса к геометрии. Но и излишнее упрощение учебного материала, системы заданий приводит к падению интереса учащихся к обучению. Именно поэтому методически целесообразно конструировать систему упражнений по принципу «от простого – к сложному».

Рассмотрим, например, следующий ряд задач, которые подобраны по мере возрастания трудности.

Задача 24. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 18 требуется найти расстояние между прямыми: а) C_1B и B_1D_1 (рис. 52); б) AC и D_1B.

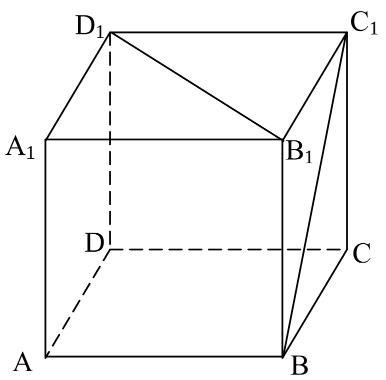

Рис. 52

Решение. а) Известно, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые («метод параллельных плоскостей»). Замечаем (рис.53), что прямые C_1B и B_1D_1 лежат в плоскостях соответственно AB_1D_1 и BC_1D, которые параллельны, так как из $AB_1 \| C_1D$, $B_1D_1 \| BD$ следует $(AB_1D_1) \| (BC_1D)$ (по признаку параллельности двух плоскостей).

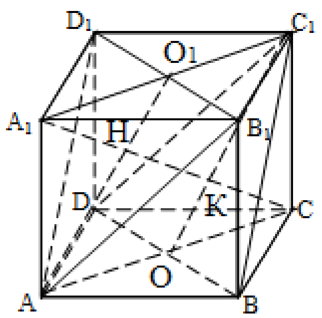

Рис.53

Построим точки $O = AC \cap BD$, $K = A_1C \cap C_1O = A_1C \cap (BC_1D)$ (рис.53) и докажем, что $A_1C \perp (BC_1D)$.

Действительно, ортогональной проекцией диагонали A_1C данного куба на плоскость грани $ABCD$ является диагональ AC этой грани. Вследствие $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата ABCD), получаем: $A_1C \perp BD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, ортогональной проекцией диагонали A_1C на плоскость грани B_1C_1CB является ее диагональ B_1C, перпендикулярная диагонали C_1B квадрата B_1C_1CB, поэтому $A_1C \perp C_1B$ (по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, $A_1C \perp BD$, $A_1C \perp BC_1$, $BD \cap BC_1 = B \Rightarrow A_1C \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Далее, построим точки $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$, $H = A_1C \cap O_1A = A_1C \cap (AB_1D_1)$. Тогда из $O_1A \parallel C_1O$ (почему?) следует: $A_1H = HK$ и $CK = KH$ (почему?), откуда $A_1H = HK = CK$, поэтому $CK = \frac{1}{3}A_1C = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ Это означает, что $\rho(C_1B; B_1D_1) = \rho((AB_1D_1);(BC_1D)) = KH = 6\sqrt{3}$.

Найдем $\rho(C_1B; B_1D_1)$ иначе, «методом проектирования».

Имеем: $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (как диагонали квадрата) (рис. 54); $AA_1 \perp (A_1B_1D_1)$, $B_1D_1 \subset (A_1B_1D_1) \Rightarrow AA_1 \perp B_1D_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости), значит, $(A_1AC) \perp B_1D_1$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), при этом $B_1D_1 \cap (A_1AC) = M = B_1D_1 \cap A_1C_1$.

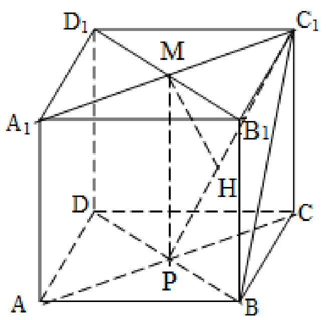

Рис. 54

Далее, $BD \parallel B_1D_1$, $B_1D_1 \perp (A_1AC)$ $\Rightarrow BD \perp (A_1AC)$. Ортогональной проекцией прямой BC_1 на (A_1AC) является отрезок C_1P, где $P = AC \cap BD$. Таким образом, $\rho(C_1B; B_1D_1) = \rho(M; C_1P)$.

Пусть MH - высота прямоугольного ΔPMC_1 ($\angle C_1MP = 90^\circ$): $MH \perp C_1P$, $H \in C_1P$. Тогда $MH = \dfrac{C_1M \cdot MP}{\sqrt{C_1M^2 + MP^2}} = \dfrac{9\sqrt{2} \cdot 18}{\sqrt{\left(9\sqrt{2}\right)^2 + 18^2}} = 6\sqrt{3}$.

. Это означает, что $\rho(C_1B; B_1D_1) = MH = 6\sqrt{3}$.

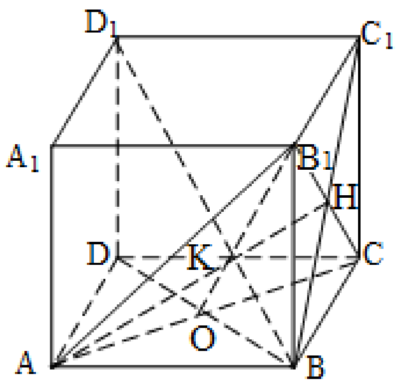

Рис. 55

б) Попытаемся «увидеть» общий перпендикуляр для прямых BD_1 и AC.

Докажем, что $BD_1 \perp (AB_1C)$.

Действительно, ортогональной проекцией диагонали BD_1 данного куба на плоскость грани $ABCD$ является диагональ BD этой грани. Вследствие $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата $ABCD$), получаем: $BD_1 \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, ортогональной проекцией диагонали BD_1 на плоскость грани B_1C_1CB является ее диагональ C_1B, перпендикулярная диагонали B_1C квадрата B_1C_1CB, поэтому $BD_1 \perp B_1C$ (по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, $BD_1 \perp AC$, $BD_1 \perp B_1C$, $AC \cap B_1C = C \Rightarrow BD_1 \perp (AB_1C)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Имеем: $BD_1 \perp (AB_1C)$, $B_1O \subset (AB_1C) \Rightarrow BD_1 \perp B_1O$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Учитывая, что $B_1O \perp AC$ (B_1O - медиана правильного ΔAB_1C), приходим к выводу: отрезок KO - общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD_1 и AC (рис.55), значит, $\rho(BD_1; AC) = KO$.

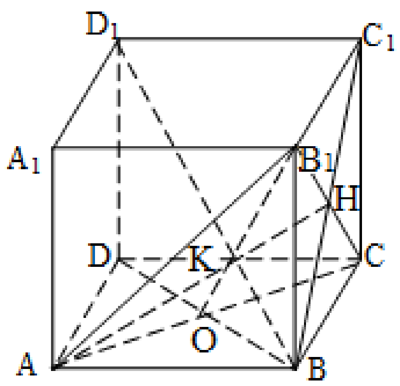

Рис. 56

Теперь находим длину KO: сторона AC правильного ΔAB_1C равна $18\sqrt{2}$, поэтому $B_1O = \dfrac{18\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}$, тогда $KO = \dfrac{1}{3} AO = \dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$. Таким образом, $\rho(BD_1; AC) = 3\sqrt{6}$.

Найдем расстояние между прямыми BD_1 и AC (рис.56) «методом проектирования».

Докажем, что $BD_1 \perp (AB_1C)$. Действительно, ортогональной проекцией диагонали BD_1 данного куба на плоскость грани $ABCD$ является диагональ BD этой грани. Вследствие $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата $ABCD$), получаем: $BD_1 \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, ортогональной проекцией диагонали BD_1 на плоскость грани B_1C_1CB является ее диагональ C_1B, перпендикулярная диагонали B_1C квадрата B_1C_1CB, поэтому $BD_1 \perp B_1C$ (по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, $BD_1 \perp AC$, $BD_1 \perp B_1C$, $AC \cap B_1C = C \Rightarrow BD_1 \perp (AB_1C)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Для решения данной задачи «методом проектирования» удобно использовать плоскость AB_1C.

Так как $AC \subset (AB_1C)$, то ортогональной проекцией прямой AC на (AB_1C) является эта же прямая AC.

Имеем: $BK \perp (AB_1C)$, $BC = B_1B = AB \Rightarrow KC = KB_1 = KA$ (как проекции равных наклонных) $\Rightarrow$ точка K - центроид ΔAB_1C.

Учитывая, что $B_1O \perp AC$ (B_1O - медиана правильного ΔAB_1C), приходим к выводу: $\rho(BD_1; AC) = \rho(K; AC) = KO$.

Находим: $AC = 18\sqrt{2}$ (как диагональ квадрата со стороной 18), поэтому в правильном ΔAB_1C имеем: $B_1O = \dfrac{18\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}$, тогда $KO = \dfrac{1}{3} B_1O = \dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$. Таким образом, $\rho(BD_1;AC) = 3\sqrt{6}$.

Ответ: а) $6\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{6}$.

В качестве упражнения для самостоятельной работы учащимся можно предложить следующую задачу.

Задача 25. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 18 требуется найти расстояние между прямыми: а) B_1D_1 и C_1D (рис.57); б) D_1B и A_1D (рис.58);

в) CD_1 и BD (рис.59).

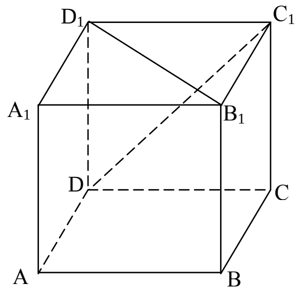

Рис. 57

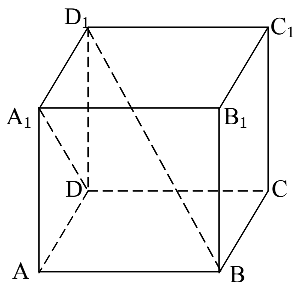

Рис. 58

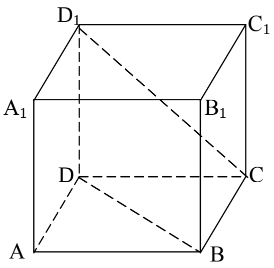

Рис. 59

Ответ: а) $6\sqrt{3}$;б) $3\sqrt{6}$; в) $6\sqrt{3}$.

Задача 26. PABC - правильный тетраэдр с ребром, равным 22. Найдите расстояние между прямыми: а) AC и BP; б) AP и BC.

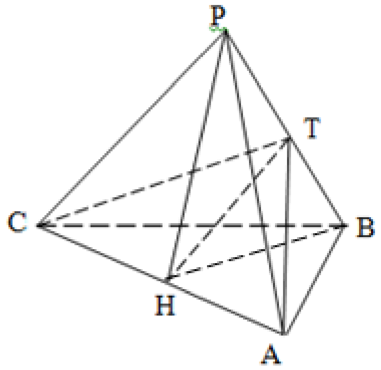

Рис. 60

Решение. а) Пусть точка T – середина PB, H – середина AC. В равнобедренном ΔTAC (CT=AT как медианы равных правильных треугольников PBC и PAB соответственно) имеем TH$\perp$AC (как высота, проведенная к основанию AC в равнобедренном ΔTAC), а в равнобедренном ΔBPH (PH=BH как медианы равных правильных треугольников APC и ABC соответственно) (рис.60): TH$\perp$BP (как высота, проведенная к основанию PB в равнобедренном треугольнике ΔBPH). Значит,

$$\rho(AC;BP) = TH = \sqrt{BH^2 - BT^2} = \sqrt{\left(\frac{22\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{22}{2}\right)^2} = 11\sqrt{2}.$$

Можно предложить учащимся самостоятельно решить задачу 26 (б).

Ответ: а)$11\sqrt{2}$; б) $11\sqrt{2}$.

Задача 27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ - правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми: а) BB_1 и E_1C; б) B_1A и C_1B; в) F_1E и C_1F.

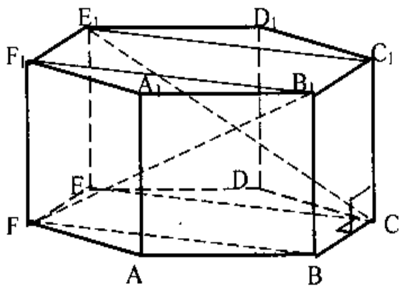

Рис. 61

Решение. а) Прямая BB_1 лежит в плоскости BB_1C. Прямая E_1C пересекает эту плоскость в точке C, не принадлежащей прямой BB_1, поэтому прямые BB_1 и E_1C скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых) (рис.61). Известно, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые («метод параллельных плоскостей»).

Имеем (рис.61): $BB_1 \parallel CC_1$, $B_1F_1 \parallel C_1E_1 \Rightarrow \Rightarrow (B_1BF) \parallel (C_1CE)$ (по признаку параллельности двух плоскостей); $BC \perp CE$, $BC \perp C_1C \Rightarrow BC \perp (C_1CE)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Тогда отрезок BC - общий перпендикуляр параллельных плоскостей B_1BF и C_1CE, содержащих скрещивающиеся прямые B_1F и E_1C. Это означает, что $\rho(B_1F; E_1C) = BC = 1$.

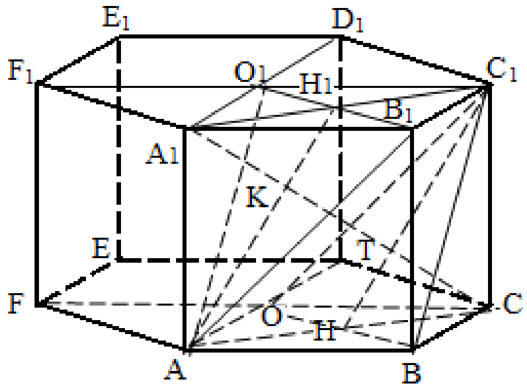

Рис. 62

б) Обозначим: $O = AD \cap CF$; $O_1 = A_1D_1 \cap C_1F_1$; $H = AC \cap BO$; $H_1 = A_1C_1 \cap B_1O_1$ (рис.62).

В прямом параллелепипеде $ABCOA_1B_1C_1O_1$, все ребра которого равны 1, а его основанием является ромб OABC (рис.62), имеем: $O_1A \parallel C_1B$, $B_1A \parallel C_1O$, откуда $(AB_1O_1) \parallel (BC\ _1O)$. Так как $C_1B \subset (BC\ _1O)$, $B_1A \subset (A\ B_1O_1)$, то $\rho(B_1A; C_1B) = \rho((AB_1O_1); (BC\ _1O))$.

Боковые грани этого параллелепипеда - равные квадраты, поэтому треугольники AB_1O_1 и $BC\ _1O$ равны и являются равнобедренными (их боковые стороны равны как диагонали равных квадратов). Откуда: $AH_1 \perp O_1B_1$, $C_1H \perp OB$. Учитывая перпендикулярность $OB \perp AC$, приходим к выводу: $OB \perp (A_1AC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), откуда $(A_1AC) \perp (BC_1O)$. А так как $(BC_1O) \parallel (AB_1O_1)$, то $(A_1AC) \perp (AB_1O_1)$. Это означает, что прямая, проведенная через точку A_1 перпендикулярно плоскостям AB_1O_1 и BC_1O, расположена в (A_1AC), поэтому она пересекает (AB_1O_1) и (BC_1O) в точках, принадлежащих прямым соответственно AH_1 и C_1H. Обозначим эти точки соответственно К и Т (рис.62). Тогда $\rho(AB_1;\ BC_1)=$ $\rho((AB_1O_1);\ (BC_1O)) = KT$.

Так как $AH_1 \parallel C_1H$ и $AH = HC$, то $CT = KT$ (по теореме Фалеса). Таким образом, $\rho(AB_1;\ BC_1) = CT$. Найдем длину CT.

В прямоугольном ΔCC_1H с катетами $C_1C = 1$, $CH = 0{,}5\sqrt{3}$ находим высоту CT: $CT = \dfrac{C_1C \cdot CH}{\sqrt{C_1C^2 + CH^2}} = \dfrac{1 \cdot 0{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{1+0{,}75}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Итак, $\rho(AB_1;\ BC_1) = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

в) Найдем расстояние между прямыми F_1E и C_1F.

Имеем: $F_1E \perp E_1F$ (как диагонали квадрата) (рис. 63); $FE \perp BF \Rightarrow$ $\Rightarrow F_1E \perp BF$ (по теореме о трех перпендикулярах). Тогда $F_1E \perp (E_1FB)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), при этом $F_1E \cap (E_1FB) = T = F_1E \perp E_1F$.

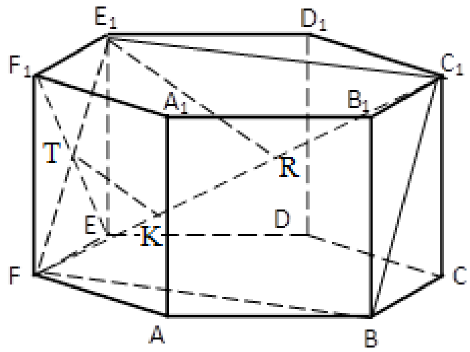

Рис. 63

Таким образом, в качестве плоскости, перпендикулярной прямой F_1E, выберем плоскость E_1FB, пересекающей эту прямую в точке Т.

Прямая C_1F лежит в плоскости E_1FB, поэтому ее проекцией на (E_1FB) является сама прямая C_1F. Тогда, в соответствие с «методом проектирования», $\rho(F_1E;\ C_1F) = \rho(T;\ C_1F)$.

Пусть: $TK \perp C_1F$, $K \in C_1F$, тогда $\rho(T;\ C_1F) = TK$, Найдем длину TK.

Если E_1R - высота прямоугольного $\Delta\ E_1C_1F$ (рис.63), то $E_1R \perp C_1F$, следовательно, $E_1R \parallel TK$, откуда TK - средняя линия $\Delta\ E_1FR$. Значит, $TK = \frac{1}{2} E_1R$. В прямоугольном Δ E_1C_1F с катетами $E_1C_1=\sqrt{3}$ и $E_1F=\sqrt{2}$ находим: $C_1R=\dfrac{E_1C_1\cdot E_1F}{\sqrt{E_1C_1^2+E_1F^2}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. Тогда ТК $=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. Таким образом,

$\rho(F_1E;\ C_1F)=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Ответ: а) 1; б) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$; в) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Методически целесообразно предложить учащимся самостоятельно решить задачу 28.

Задача 28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ - правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми а) A_1B и AF_1 (рис.64); б) B_1C и C_1D (рис.65);

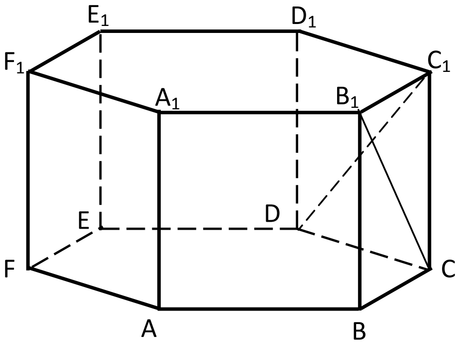

Рис. 64

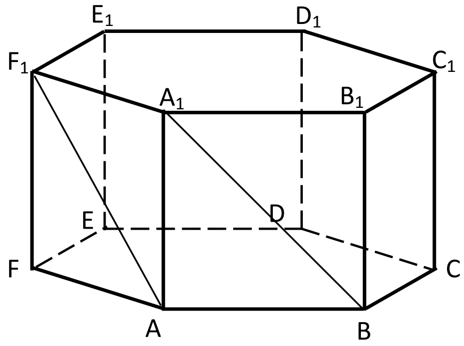

Рис. 65

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$; б) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Таким образом, по окончанию изучения раздела «Прямые в пространстве» учащиеся должны в овладеть навыками определения взаимного расположения прямых в пространстве, корректно, аргументировано доказывать, что данные прямые скрещиваются, используя признак скрещивающихся прямых находить расстояния и углы между прямыми.

§ 2. Методические аспекты принципа системности и последовательности при обучении решению задач по теме «Прямая и плоскость» в задачах

2.1. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Изучение материала следует начинать с рассмотрения вопроса о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве.

Прямая и плоскость в пространстве могут быть:

1) параллельными (рис. 66);

2) пересекающимися (рис. 67);

3) инцидентными (рис. 68).

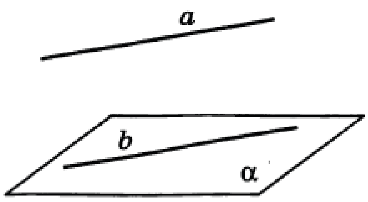

Рис. 66

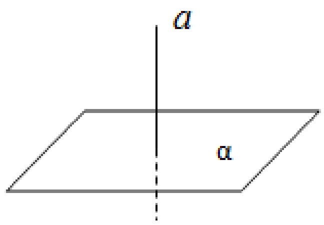

Рис. 67

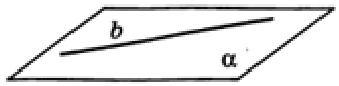

Рис. 68

Эти случаи характеризуются следующими параметрами:

1) расстоянием h между прямой и плоскостью (т.е. между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость);

2) углом φ между прямой и плоскостью (т.е. между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость).

Если прямая пересекает плоскость, то эти прямая и плоскость имеют *только* одну общую точку.

Если прямая и плоскость параллельны, то эти прямая и плоскость не имеют общих точек.

Если прямая лежит в плоскости, то все точки прямой принадлежат плоскости.

Случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве можно иллюстрировать с помощью следующей схемы 1.

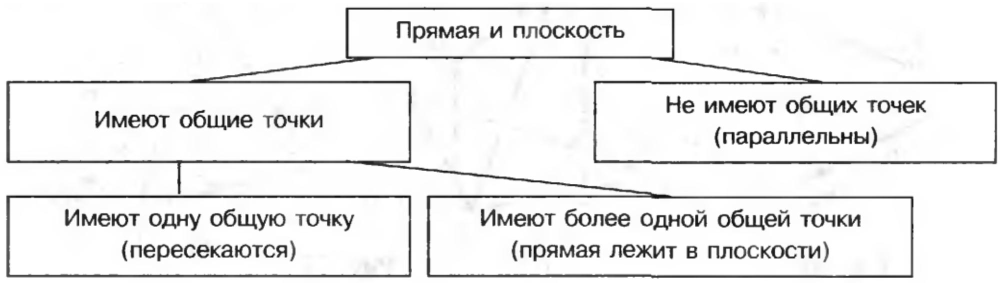

Схема 1

Наглядным представлением прямой, параллельной плоскости могут служить натянутые троллейбусные или трамвайные провода – они параллельны поверхности земли. Другим примером могут служить линии пересечения стены и потолка – эти линии параллельны плоскости пола. Заметим, что в плоскости пола имеется прямая, параллельная линии пересечения стены и потолка.

На рисунке 69 такие прямые обозначены буквами a и b.

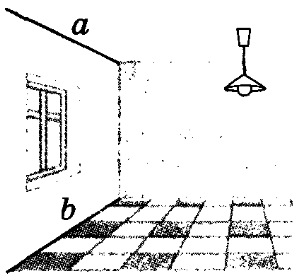

Рис. 69

Задачи данного раздела целесообразно подобрать таким образом, чтобы соблюдался один из принципов дидактики – принцип «от простого – к сложному»: сначала следовали несложные задачи на обоснование взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве (Параллельны ли? Каким может быть взаимное расположение …? Справедливо ли утверждение…? Возможно ли…?). Затем целесообразно предлагать для решения задачи на построение, в том числе**,** на построение сечений правильного тетраэдра, правильной четырехугольной пирамиды, куба и др.

Для лучшего понимания и закрепления материала на расположение прямой и плоскости в пространстве учащимся следует предложить ряд следующих задач.

Задача 29. Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли, что эта прямая: a) не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α; *б*) параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α; *в*) параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости a?

Ответ. а) Верно. В противном случае, прямая a пересекала бы плоскость α в некоторой точке С. А по условию задачи прямая a параллельна плоскости α, значит, не имеет с ней общих точек. *б)* Не во всех случаях. Прямые могут скрещиваться. *в)* Верно. Данное утверждение выражает предложение, обратное признаку параллельности прямой и плоскости.

Задача 30 Прямая a параллельна плоскости α. Сколько прямых, лежащих в плоскости α, параллельны прямой a?

Ответ. Бесконечное множество.

Задача 31. Прямая a пересекает плоскость α. Имеется ли в плоскости α хоть одна прямая, параллельная a?

Ответ. Нет.

Задача 32. Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

Ответ. Нет, вторая прямая может лежать в этой плоскости.

Задача 33. Верно ли утверждение: если две прямые параллельны некоторой плоскости, то они параллельны друг другу?

Ответ. Нет, прямые могут пересекаться или скрещиваться.

На начальной стадии изучения стереометрии весьма полезны так называемые таблицы – задания, которые являются своеобразной формой исследования свойств пространственных фигур. Так, например, при изучении вопроса о взаимном расположении прямой и плоскости рекомендуются следующие задания [10].

*Задача 34.*В тетраэдре ABCD точки K, F, N и M – середины ребер соответственно AD, BD, BC и AC (рис. 70). Заполните таблицу, выбрав определенное вами расположение указанных прямой и плоскости: А – пересекаются, Б – параллельны, В – прямая лежит в плоскости, Г – невозможно определить [18]:

	Прямая и плоскость	**Взаимное расположение**
1	DB и AMN	А
2	MN и ABC	В
3	KC и DMN	А
4	KF и DMN	Б
5	KF и ABD	В
6	MN и ABD	Б

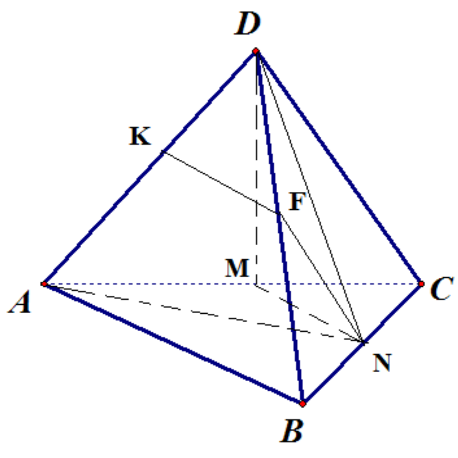

Рис. 70

2.2. Параллельность прямой и плоскости в пространстве

Мотивом изучения темы «Параллельность прямой и плоскости» является развитие абстрактного мышления и кругозора школьников. Решение задач данного параграфа будут способствовать выработке у них навыков осуществлять необходимые в будущем построения на изображениях многогранников.

*Определение****.*** *Прямая и плоскость, не имеющие общих точек, называются параллельными.*

Если прямая a и плоскость α параллельны, то записывают $a \parallel \alpha$ или $\alpha \parallel a$. При этом говорят, что прямая a параллельна плоскости α или плоскость α параллельна прямой a .

При решении стереометрических задач обоснование параллельности прямой и плоскости при помощи только одного определения затруднительно и не приводит к желаемому результату. В таких случаях пользуются признаками параллельности прямой и плоскости. Перечислим их:

- *Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны (рис. 71).*

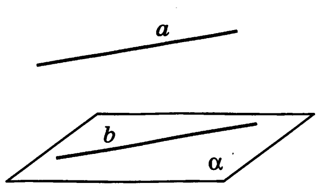

Рис. 71

- *Плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой плоскости, параллельны.*
- *Плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой прямой, параллельны.*

Кроме признаков параллельности прямой и плоскости, при решении задач используются свойства прямой и параллельной ей плоскости, выраженные в теоремах:

▪ *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.*

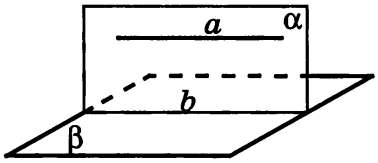

Рис. 72

На рис. 72 имеем: $a \parallel \beta$; $a \subset \alpha$; $\alpha \cap \beta = b \Rightarrow b \parallel a$.

Из этой теоремы следует, что если прямая a параллельна плоскости α, то в плоскости α существуют прямые, параллельные прямой a.

▪ *Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения параллельна каждой из данных прямых (рис. 73).*

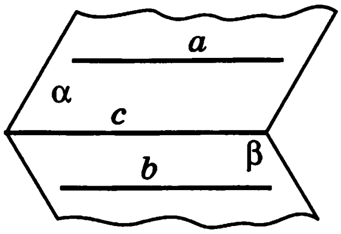

Рис. 73

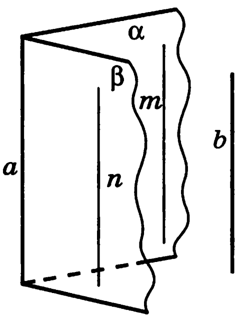

Рис. 74

▪ *Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения (рис 74)***.**

Эти *признаки* используются при решении различных по уровню сложности стереометрических задач, в том числе, и в тех случаях, когда для решения задачи требуется произвести некоторые дополнительные построения.

Полезно решить с учащимися следующие задачи или аналогичные им.

Задача 35.Дан правильный тетраэдр PABC; O – центроид грани ABC, K – середина отрезка PO (рис. 75). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, которая проходит через точку K и параллельна грани ABC. Вычислите площади получившихся сечений, если ребро тетраэдра равно 8.

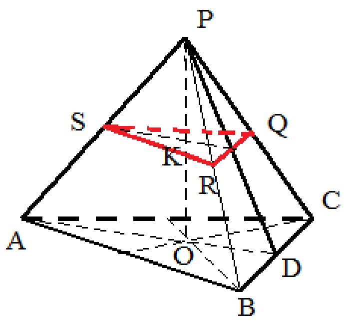

Рис. 75

Решение. Обозначим: α - искомая секущая плоскость. Построим сечение правильного тетраэдра плоскостью α, проходящей через точку K параллельно плоскости грани ABC.

В основании тетраэдра PABC проведем прямую AD (она является медианой равностороннего треугольника ABC).

Так как пересечением двух параллельных плоскостей третьей являются параллельные прямые, то, в силу $\alpha\|$ (ABC), пересечением $\alpha\cap$(APD) является некоторая прямая, параллельная прямой AD. Пусть $\alpha\cap AP = S$, тогда $KS\|AD$.

Далее, используя теорему о пересечении двух параллельных плоскостей третьей и учитывая $\alpha\|$(ABC), проводим $SR\|AB$ и $SQ\|AC$, где SR = $=\alpha\cap$(APB), SQ = $\alpha\cap$(APC).

Получаем ΔSRQ – искомое сечение, в котором: SR=RQ= SQ=4 (как средние линии треугольников APB, PBC, PAC соответственно). Получаем ΔSRQ – искомое сечение, в котором: SR=RQ= SQ=4 (как средние линии треугольников APB, PBC, PAC соответственно по построению). $\Rightarrow$

ΔSRQ - правильный. Получаем:

$$S_{\Delta SRQ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 36. ([18], 3.015) В правильном тетраэдре DABC, все ребра которого равны 8, точка K лежит на ребре BD так, что DK=2; точка M лежит на ребре BC так, что BM=6, точка P – середина AB (рис. 76).

а) Докажите, что KM параллельна плоскости ADC.

б) Докажите, что PM не параллельна плоскости ADC.

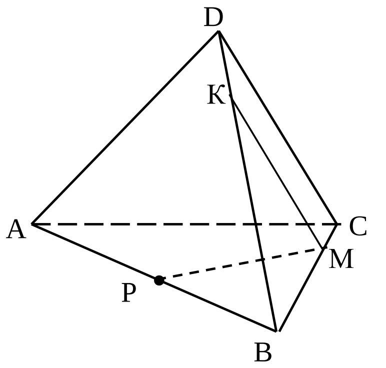

Рис. 76

Решение. Рассмотрим правильный тетраэдр DABC. По условию имеем: DK=2, BM=6. Находим: CM = BC – BM = 8 – 6 = 2, BK = BD – DK = 8 – 2 = 6, AP = PB = 4 (так как P – середина AB).

Для решения задачи воспользуемся теоремой о пропорциональных отрезках, которые отсекаются параллельными прямыми на сторонах данного угла. а) В грани BCD, по теореме о пропорциональных отрезках, имеем: $\dfrac{BK}{BD}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}.\Rightarrow\ KM \parallel CD \Rightarrow\ KM \parallel (ADC)$ (по признаку параллельности прямой и плоскости).

б) По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{BP}{AB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\ \frac{BM}{BC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow\ \frac{BP}{AB}\neq\frac{BM}{BC}.$$

Значит, прямая PM не параллельна прямой AC$\Rightarrow$ прямая PM не параллельна (*ADC*) (Почему?).

2.3.Перпендикулярность прямой и плоскости

Перпендикулярность прямых и плоскостей - важный раздел стереометрии. Наглядное представление о прямой, перпендикулярной плоскости мы получаем из многих наблюдений: к горизонтальному участку земли перпендикулярны электрический столб, телевизионная башня и т. п. Кроме того, в курсе черчения мы пользуемся перпендикулярным (ортогональным) проектированием на плоскость точек, отрезков и других фигур, т. е. таким проектированием, при котором проектирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций.

Введем следующее определение прямой, перпендикулярной данной плоскости.

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 77).

Необходимо четко провести различие между смыслом слов: «любой прямой плоскости» и «какой-либо прямой плоскости», здесь у учащихся нередко возникает путаница.

Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то записывают $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$ и также говорят, что плоскость α перпендикулярна прямой a или прямая a и плоскость α перпендикулярны.

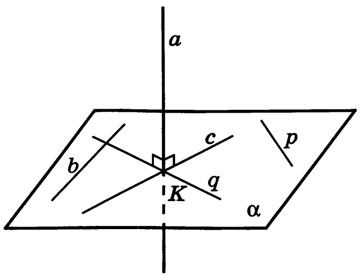

Рис. 77

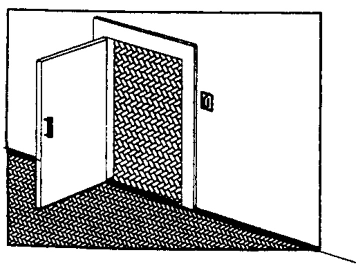

Рис. 78

Представление о прямых или, вернее, об отрезках, перпендикулярных плоскости, получаем, рассматривая вертикально стоящие столбы и мачты (они перпендикулярны поверхности земли или палубе), натянутый шнур, на котором висит лампа (он перпендикулярен потолку). Нижний край двери перпендикулярен косяку при всех положениях двери (рис. 78). Этим свойством и определяется перпендикулярность прямой и плоскости.

При решении задач обоснование перпендикулярности прямой и плоскости осуществляют не с помощью определения перпендикулярности прямой и плоскости, а используют признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*). Если прямая перпендикулярна каждой их двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Курс стереометрии предполагает объемный теоретический материал, в который входят система аксиом, определения, теоремы, а также задачный материал, который предполагает отработку теоретического материала и применение его в практике. Поэтому следует добиваться, прежде всего, отчетливого осознания учащимися понимания теории и применения ее на практике.

Решение задач данного раздела целесообразно начать с решения задач на вычисление расстояний, далее следует перейти к задачам на построение перпендикуляра на моделях куба и правильного тетраэдра.

Задача 37. Расстояние от точки М до каждой из вершин правильного треугольника АВС (АВ=6) равно 4. Найдите расстояние от точки М: а) до плоскости треугольника АВС (рис. 79); б) до каждой его стороны.

Решение.

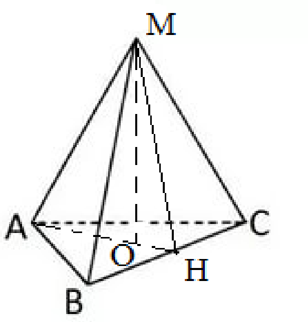

Рис. 79

а) Рассмотрим правильный треугольник АВС. Точка О является центроидом правильного треугольника АВС. Проведем МО перпендикулярно плоскости $\triangle ABC$. Так как равные наклонные имеют равные проекции, то АО=ВО=СО=R (R – радиус описанной окружности около $\triangle ABC$.

Рассмотрим $\triangle BMC$ - равнобедренный (так как ВМ=МС – по условию задачи). Построим высоту МН данного треугольника.

В $\triangle BMH$ по теореме Пифагора находим:

МН=$\sqrt{MB^2-BH^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

АН – медиана правильного $\triangle ABC$. По свойству медианы:

АН=$\frac{1}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Из прямоугольного $\triangle MOH$ по теореме Пифагора находим:

МО=$\sqrt{MH^2-OH^2}=\sqrt{7-3}=2$.

Можно предложить учащимся самостоятельно решить задачу б).

Ответ: а) 2; б) $\sqrt{7}$.

Задача 38. Диагонали ромба равны 30 см и 40 см и пересекаются в точке Н. Длина перпендикуляра НМ к плоскости ромба равна 5 см (рис. 80). Найдите расстояние от точки М до каждой стороны ромба.

Решение. Рассмотрим ромб ABCD. Пусть АС=40, BD=30 (по условию).

По свойству ромба диагонали АС и BD пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам. Значит, НВ=0,5BD=15, НС=0,5АС=20.

В прямоугольном ΔВСН (BD⊥АС, как диагонали ромба) по теореме Пифагора находим:

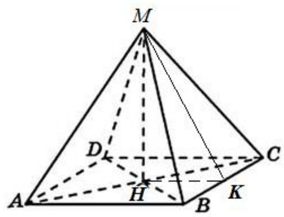

Рис. 80

ВС= $\sqrt{HB^2+HC^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25$.

Обозначим: НК= h_c; НВ=a, НС=b, ВС=c. Тогда:

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$$

$$S=\frac{1}{2}h_c c\Rightarrow h_c=\frac{2S}{c}=\frac{300}{25}=12.$$

В прямоугольном ΔМНК по теореме Пифагора находим

МК=$\sqrt{MH^2+HK^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

Поскольку точка М равноудалена от каждой из сторон ромба, то расстояние от точки М до каждой из сторон равно 13 см.

Ответ: 13 см.

2.4. Угол между прямой и плоскостью

Особое внимание следует уделить вопросу о нахождении угла между прямой и плоскостью. Во-первых, необходимо добиться осознанного понимания существования бесконечного множества углов между прямой, пересекающей плоскость, и прямыми, проведенными на плоскости через точку пересечения, во-вторых, необходимо, чтобы учащиеся знали какой из всех этих углов принято называть углом между прямой и плоскостью, т.е. знали и умели применять соответствующее определение на практике.

*Определение***.** Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость (рис. 81).

Угол между плоскостью и прямой, лежащей в плоскости или параллельной плоскости, считается равным 0°. Угол между плоскостью и прямой, перпендикулярной этой плоскости, считается равным 90°.

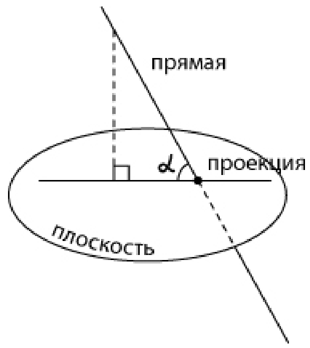

Рис. 81

Задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью достаточно разнообразны. В зависимости от исходных данных, приходится подбирать наиболее рациональный метод решения той или иной задачи. Для нахождения этого угла удобно использовать тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике, одним из острых углом которого является данный угол. Также можно найти угол между прямой и плоскостью координатным или векторным методом.

Следует выделить частные случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

1) $a \parallel \alpha \Leftrightarrow \angle(\alpha;a) = 0°$;

2) $a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a,\alpha) = 90°$.

Существуют различные методы решения стереометрических задач на вычисление угла между прямой и плоскостью.

При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью полезно пользоваться следующим фактом. Если расстояние от точки A до плоскости β равно h=AT, а точка B лежит в плоскости β (рис.82), то синус угла α между прямой AB и плоскостью

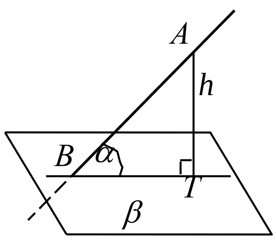

Рис. 82

β равен $\dfrac{h}{AB}$, т.е. $\sin\alpha = \dfrac{h}{AB}$.

Рассмотрим решение следующих задач.

*Задача 39***.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите синус угла между: а) прямой B_1D и плоскостьюACC_1; б) между прямой A_1B и (BC_1D).

Решение. а) Обозначим:$\angle(B_1D;(AC_1C))=\alpha$; $H=A_1C\cap B_1D=A_1C\cap(BB_1D)$;
$O=AC\cap BD$; $O_1= A_1C_1\cap B_1D_1$ (рис.83).

Имеем: $AC\perp BD$ (как диагонали квадрата); $BB_1\perp(ABC)$, $AC\subset(ABC) \Rightarrow BB_1\perp AC$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Таким образом, $AC\perp(BB_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости)$\Rightarrow(AC_1C)\perp(BB_1D)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей), при этом $B_1D\subset(BB_1D)$. Это означает: ортогональными проекциями точек D и B_1 на (AC_1C) являются соответственно точки $O = BD\cap(AC_1C)$ и $O_1 = B_1D_1\cap(AC_1C)$. Тогда прямая O_1O - ортогональная проекция прямой B_1D на (AC_1C). Поэтому $\angle(B_1D; (AC_1C)) =\angle B_1HO_1=\alpha$.

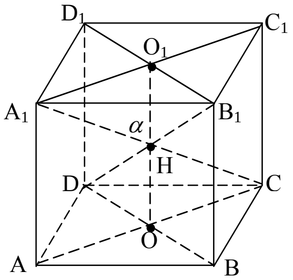

Рис.83

Найдем $\sin\alpha$.

В прямоугольном ΔB_1O_1H: $B_1O_1= 0,5\ B_1D_1=0,5\sqrt{2}$; $B_1H = 0,5\ B_1D =0,5\sqrt{3}$. Значит, $\sin\alpha = \dfrac{B_1O_1}{B_1H} = \dfrac{0,5\sqrt{2}}{0,5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

б) Обозначим: $A_1C\cap(BC_1D) = K = A_1C\cap C_1O$ (рис. 84).

Докажем, что $A_1C\perp(BC_1D)$. В самом деле, ортогональной проекцией диагонали A_1C данного куба на плоскость грани BB_1C_1C является ее диагональ B_1C.

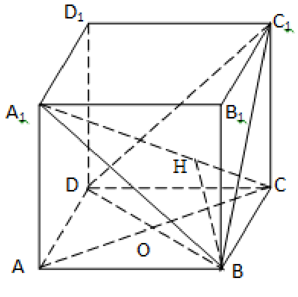

Рис. 84

Вследствие $B_1C \perp BC_1$ (как диагонали квадрата BB_1C_1C), получаем: $A_1C \perp BC_1$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, $A_1C \perp BD$ (почему?)

Имеем: $A_1C \perp BC_1$, $A_1C \perp BD \Rightarrow A_1C \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow (A_1BC) \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). А так как $BH = (A_1BC) \cap (BC_1D)$, $A_1B \subset (A_1BC)$, то прямая BH является ортогональной проекцией прямой A_1B на (BC_1D). Поэтому $\angle(A_1B; (BC_1D)) = \angle(A_1B; BH) = \angle A_1BH = \varphi$. Найдем $\sin\varphi$.

Известно, что диагональ куба с ребром *b* равна $b\sqrt{3}$. Поэтому, $A_1C = \sqrt{3}$, значит, $A_1H = \frac{2}{3}A_1C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Тогда в прямоугольном ΔA_1HB: $\sin\varphi = \frac{A_1H}{A_1B} = \frac{2\sqrt{3}}{3} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Можно предложить учащимся самостоятельно решить задачу 40.

Задача 40. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите синус угла: *а)* между прямой A_1B и (AB_1C); *б)* между прямой BC и (AB_1D_1);

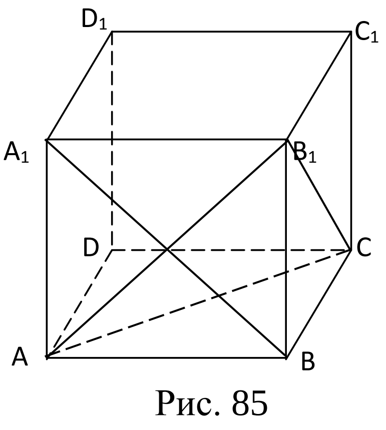

Рис. 85

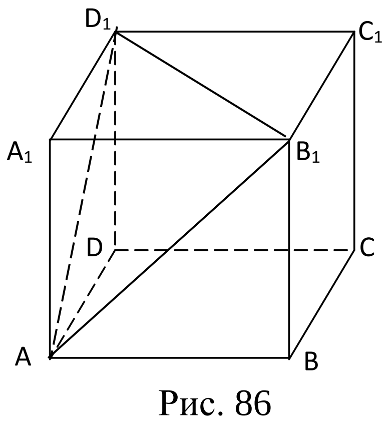

Рис. 86

Ответ: *а*) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; *б*) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 41. В правильном тетраэдре PABC с ребром, равным 1, найдите угол: а) между прямой PC и плоскостью ABK, где K - середина ребра BP (рис.87); б) между прямой AP и плоскостью ABK.

Решение. а) Имеем: $AK \perp CP$ (как медиана правильного ΔACP). Аналогично, $BK \perp CP$ в правильном Δ BCP. Тогда $CP \perp (ABK)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), значит, $\angle(CP;(ABK)) = 90^{\circ}$.

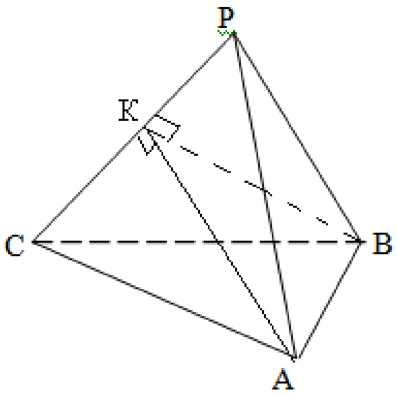

Рис.87

б) Так как плоскость ACP проходит через прямую CP, перпендикулярную плоскости ABK (рис.87), то $(ACP) \perp (ABK)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Значит, ортогональной проекцией прямой AP на (ABK) служит прямая $AK = (ACP) \cap (ABK)$. Поэтому $\angle(AP; (ABK)) = \angle(AP;\ AK) = \angle PAK = \frac{1}{2}\angle PAC = 30^{\circ}$ (AK - биссектриса в правильном Δ CAP).

Ответ: а) 90°; б) 30°.

*Задача 42***.** В правильном тетраэдре PABC с ребром, равным 1, найдите:

угол между прямой PK и (ABC), где точка K - середина AB;

Решение. Обозначим: $\angle(PK, ((ABC)) = \alpha$.

Имеем: $PK \perp AB$ (как медиана правильного ΔPAB) (рис.88); $CK \perp AB$(как медиана правильного ΔABC) $\Rightarrow$ $AB \perp (PKC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости)$\Rightarrow$ $(ABC) \perp (PKC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей), при этом $PK \subset (PKC)$. Это означает: ортогональной проекцией прямой PK на (ABC) служит прямая

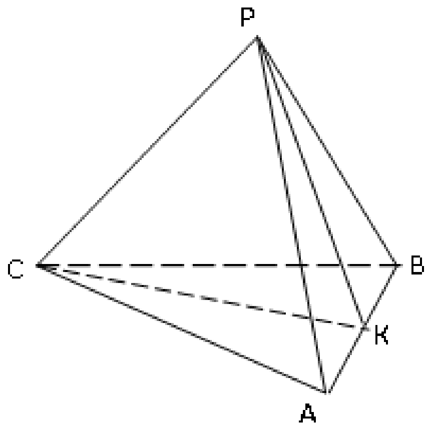

Рис. 88

$CK = (ABC) \cap (PKC)$. Поэтому $\angle(PK; (ABC)) = \angle(PK; CK) = \angle PKC = \alpha$.

В ΔPKC $PK=CK=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$(как медианы правильных треугольников PAB и ABC соответственно): $\cos\alpha=\dfrac{PK^2+CK^2-PC^2}{2PK\cdot CK}=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\alpha=\arccos\dfrac{1}{3}$. *Ответ:* $\alpha=\arccos\dfrac{1}{3}$.

В качестве упражнения для самостоятельной работы можно предложить учащимся решить следующую задачу.

*Задача 43***.** В правильном тетраэдре PABC с ребром, равным 1, найдите:

а) угол между прямой OP и (PAB), б) угол между прямой CP и (ABC); где точка O -центроид грани ABC;

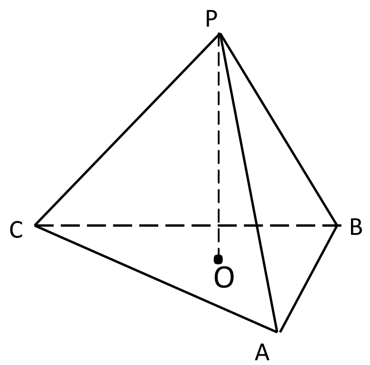

Рис. 89

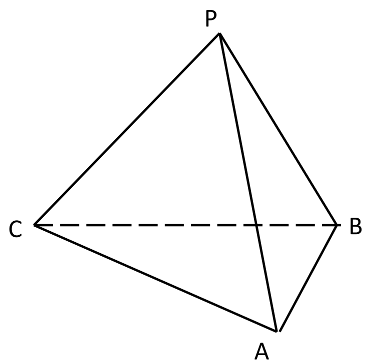

Рис. 90

*Задача 44***.** Дан куб с ребром, равным 20. Через концы трех ребер куба, исходящих из одной его вершины, проведена плоскость α, а через общую вершину этих ребер проведена диагональ m куба. Найдите угол между плоскостью α и прямой *m* (рис. 91).

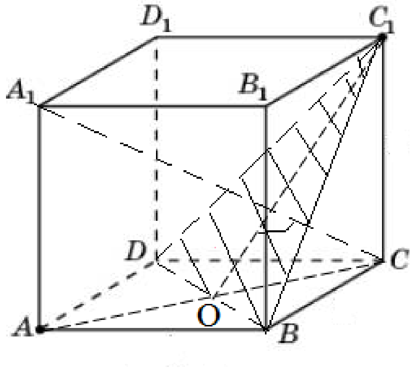

Рис. 91

Решение. Обозначим: $A_1C=m$, $(BC_1D)=\alpha$ (рис. 91). Имеем: $A_1C\perp BC_1$, т.к.

проекцией прямой A_1C на плоскость (BCC_1) является прямая B_1C, $B_1C \perp BC_1$(как диагонали квадрата). По теореме о трех перпендикулярах $A_1C \perp BC_1$. Аналогичным образом можно показать, что $A_1C \perp DC_1$. Таким образом, получаем: $A_1C \perp BC_1$, $A_1C \perp DC_1$ $\Rightarrow$ $A_1C \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow$ $\angle(A_1C;(BC_1D)) = 90°$.

Для решения задач на взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве координатно-векторным методом, на вычисление углов между ними используется следующий учебный материал: $Ax + By + Cz +D = 0$ – общее уравнение плоскости, $\vec{n}(A;B;C)$- вектор её нормали; $x = x_0 + a_1t$, $y = y_0 + a_2t$, $z = z_0 + a_3t$ – параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\vec{p}_1(a_1;a_2;a_3)$; $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=\vec{a}\cdot\vec{b}$ - скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$; $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ - признак перпендикулярности векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$.

Угол φ между векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ находится с помощью формулы: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

Угол между прямой $l: \begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ и плоскостью α: $Ax + By + Cz + D = 0$

можно найти, используя угол между направляющим вектором $\vec{p}(a;b;c)$ прямой l и вектором $\vec{n}(A;B;C)$ нормали плоскости α (рис.92, 93):

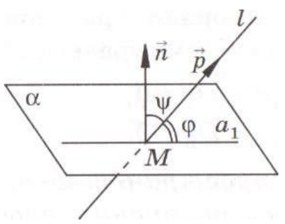

Рис. 92

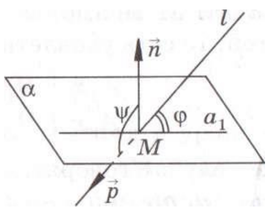

Рис.93

$$\sin\angle(l;\alpha) = \sin\varphi = \cos\psi = \left|\cos\angle(\vec{p},\vec{n})\right| = \frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Второй способ (*координатный метод*).

Решение. Для решения этой задачи необходимо составить уравнение плоскости проходящей через точки [illegible] (рис. 94). Уравнение искомой плоскости имеет вид: $x + y + z - 20 = 0$. Значит,

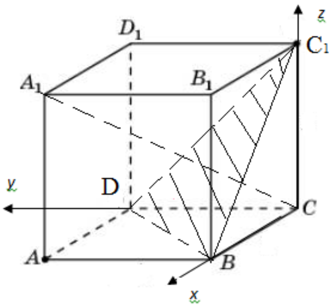

Рис. 94

вектор $\vec{n}$ нормали этой плоскости имеет координаты: $\vec{n}(1;1;1)$. Направляющий вектор $\overrightarrow{CA_1}$ прямой – диагонали A_1C имеет координаты: $\overrightarrow{CA_1}(20;20;20)$.

Найдем угол между вектором $\overrightarrow{CA_1}$ и вектором $\vec{n}$ нормали плоскости:

$$\sin\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} = \frac{|1\cdot 20 + 1\cdot 20 + 1\cdot 20|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{60}{60} = 1,$$

откуда следует, что $\varphi = 90°$.

Ответ: 90°.

Задача 45. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите синус угла между прямой D_1C_1 и плоскостью A_1BD.

Решение. Найдем $\sin\varphi$, где $\varphi = \angle(D_1C_1;(A_1BD))$.

Построим изображение этого куба и координатным методом найдём φ синус угла между прямой D_1C_1 и плоскостью A_1BD.

На рис.95 куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в системе координат *Oxyz* так, что его вершины имеют координаты: $D(0;0;0)$, $A_1(1;0;1)$, $C_1(0;1;1)$, $D_1(0;0;1)$, $A(1;0;0)$, $B_1(1;1;1)$, $C(0;1;0)$, $B(1;1;0)$.

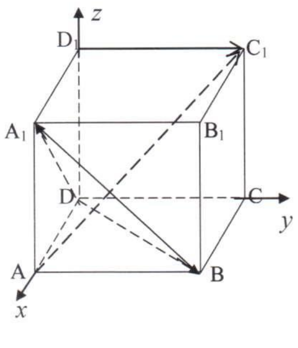

Рис. 95

В качестве направляющего вектора прямой D_1C_1 примем вектор $\overrightarrow{D_1C_1}(0;1;0)$, в качестве вектора нормали плоскости $\alpha = (A_1BD)$ -вектор $\vec{n}(a;b;c)$, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{DA_1}(1;0;1)$ и $\overrightarrow{DB}(1;1;0)$.

Найдем координаты вектора $\vec{n}(a;\, b;\, c)$.

Имеем:

$$\begin{cases} \vec{n}\perp\overrightarrow{DA_1}, \\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0, \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-b=-c.$$

Полагая a=1, получим: $b=c$=-1, то есть $\vec{n}$(1;-1;-1). Это означает, что уравнение плоскости α ($A_1\in\alpha$) имеет вид:

$1\cdot(x-1)-1\cdot(y-0)-1\cdot(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y-z=0,$

и

$$\sin\varphi=\frac{|\overrightarrow{D_1C}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{D_1C}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|\ldots|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Далее методически целесообразно рассмотреть задачу повышенного уровня сложности.

Задача 46. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE_1 и (BC_1C);

Решение. Обозначим: $\angle(BE_1, ((BC_1C))=\beta$ (рис.96).

Имеем: $C_1C\perp(A_1B_1C_1)$, $E_1C_1\subset(A_1B_1C_1)$ $\Rightarrow$ $C_1C\perp E_1C_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Получаем: $E_1C_1\perp B_1C_1$, $E_1C_1\perp C_1C\Rightarrow$ $E_1C_1\perp(BC_1C)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow$ $E_1C_1\perp BC_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Это означает, что BC_1 - ортогональная проекция прямой BE_1 на (BC_1C), при этом

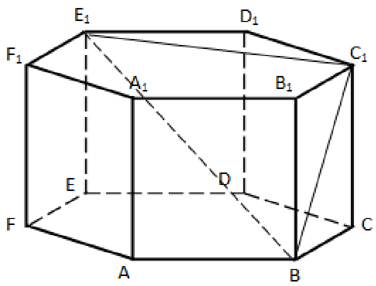

Рис. 96

$\angle E_1BC_1=\angle(BE_1, ((BC_1C))=\beta$, $\angle BC_1E_1=90^{\circ}$.

Тогда в прямоугольном ΔBC_1E_1 с катетами $E_1C_1=\sqrt{3}$ и $BC_1=\sqrt{2}$, находим: $\sin\beta=\frac{E_1C_1}{BE_1}=\frac{E_1C_1}{\sqrt{E_1C_1^{\,2}+BC_1^{\,2}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}}=0{,}2\sqrt{15}$.

Ответ: $0{,}2\sqrt{15}$.

§ 3. Методические аспекты принципа системности и последовательности при обучении решению задач по теме «Плоскости в пространстве» в задачах

Изучение вопросов о взаимном расположении плоскостей в пространстве необходимо связать с конкретными геометрически образами. Например, параллельными являются плоскости потолка и пола в любой комнате.

Опыт работы учителей математики по программам естественно-научного и физико-математического профиля убеждает, что трудности, возникающие на первых уроках стереометрии в 10 классе, успешно преодолеваются, если изучение теоретического материала начал стереометрии сопровождается моделями и изображениями различных многогранников и последующими дополнительными построениями на этих изображениях. При этом решаемые задачи обладают конкретностью, содержательностью и конструктивностью.

Ранее накопленный и хорошо усвоенный учащимися материал о взаимном расположении прямых, прямой и плоскости способствует успешному изучению ими материала о взаимном расположении плоскостей в пространстве.

Изучение темы «Плоскости в пространстве» следует начинать с вопроса о возможном числе общих точек двух плоскостей. Именно с этого и начинается изучение данной темы в учебнике [18] Потоскуева Е.В. и Звавича Л.И.

При взаимном расположении двух плоскостей в пространстве возможны следующие случаи.

1. Две плоскости имеют общую точку. Тогда по аксиоме пересечения двух плоскостей они имеют общую прямую. Такие плоскости называются пересекающимися.

2. Две плоскости не имеют общих точек. Такие плоскости называются параллельными.

3. Две плоскости имеют бесконечное множество общих точек. Такие плоскости совпадают.

3.1. Параллельность плоскостей в пространстве

Рассмотрим методику изложения материала о параллельных плоскостях. Сначала учащимся предлагается определение параллельных плоскостей.

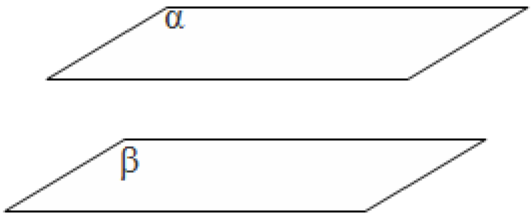

Рис. 97

Определение. Две плоскости, не имеющие общих точек, называются параллельными (рис. 97).

При решении задач доказательство параллельности двух плоскостей основывается не на определении, а на признаке параллельности двух плоскостей.

Теорема 1. (*признак параллельности плоскостей*). *Если каждая из двух пересекающихся прямых одной плоскости параллельна другой плоскости, то данные плоскости параллельны (рис 98)***.**

Теорема 2. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

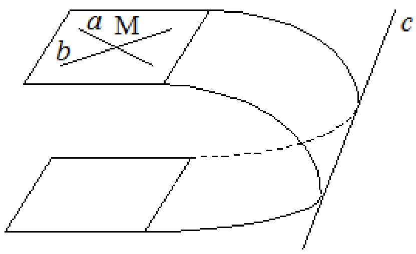

Рис. 98

Очень важными при решении задач являются теоремы о свойствах параллельных плоскостей. При изучении этих теорем учащиеся могут обнаружить определенную аналогию между свойствами параллельных плоскостей в пространстве и свойствами параллельных прямых на плоскости. Следует заметить, что только после прохождения материала о параллельных плоскостях учащиеся могут доказательно, а не интуитивно, утверждать, что противоположные грани параллелепипеда (куба) параллельны.

Проиллюстрируем это на примере следующих задач.

Задача 47. Докажите, что противоположные грани параллелепипеда параллельны.

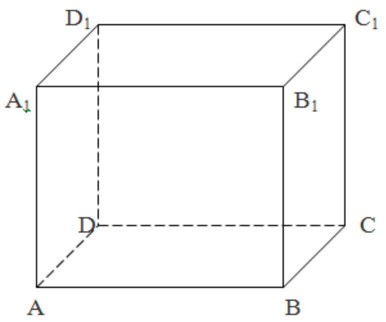

Рис. 99

Решение. Рассмотрим две противолежащие грани ABB_1A_1 и CC_1D_1D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 99). Так как $AB \parallel CD$ (как противоположные стороны параллелограмма ABCD) и $AA_1 \parallel DD_1$ (как противоположные стороны параллелограмма AA_1D_1D), то $(ABB_1) \parallel (CC_1D_1)$ (по признаку параллельности плоскостей), откуда следует параллельность граней ABB_1A_1 и CC_1D_1D данного параллелепипеда, что и требовалось доказать.

Задача 48. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина A_1B_1, N – середина B_1C_1, К – середина AD, P – середина DC, L – середина C_1C, O - точка пересечения диагоналей квадрата ABCD. Точка A_1 - середина отрезка AQ.

Заполните таблицу, выбрав (обведя в кружок) необходимое расположение указанных плоскостей: А – параллельны, Б – пересекаются, В – совпадают, Г – невозможно определить.

	Плоскости	**Взаимное расположение**
1	$A_1B_1C_1$ и ADC	А Б В Г
2	MPK и BB_1D	А Б В Г
3	MNK и MNP	А Б В Г
4	D_1KP и BMN	А Б В Г
5	QBO и MKP	А Б В Г
6	QB_1D_1 и A_1DO	А Б В Г
7	MNK и PLN	А Б В Г
8	B_1KP и DMN	А Б В Г
9	A_1DC_1 и AB_1C	А Б В Г

10	QBD и MOB	А Б В Г
11	A_1C_1C и MKP	А Б В Г
12	QC_1D_1 и A_1B_1D	А Б В Г

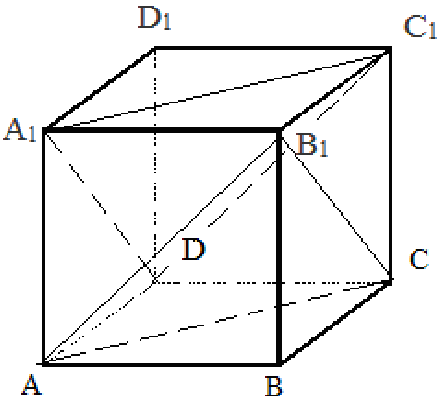

Рис.100

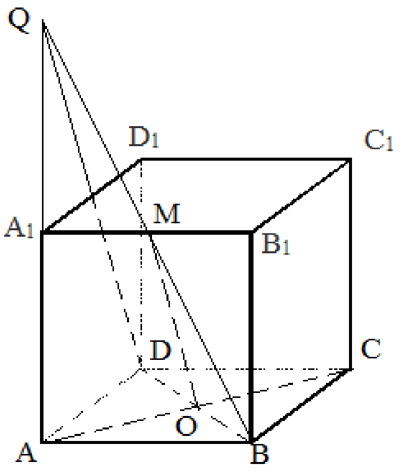

Рис.101

Решение. 9) Поскольку $A_1B_1 \parallel DC, A_1C_1 \parallel AC$ (так как лежат в противоположных гранях куба, которые в свою очередь являются параллельными (задача 2). Значит, $A_1DC_1 \parallel AB_1C$ по теореме 2. (рис. 100).

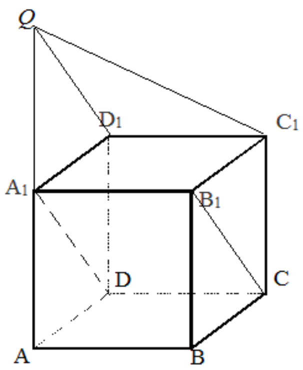

Рис. 102

10) (MOB) = (QBD), т.е. плоскости MOB и QBD совпадают (рис. 101)..

12). Поскольку $C_1D_1 \parallel A_1B_1$ (как противоположные стороны квадрата $A_1B_1C_1D_1$) и $A_1D \parallel QD_1$, так как $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, как противолежащие грани куба. Отсюда следует, что $(QC_1D_1) \parallel (A_1B_1D)$ по теореме 2 (рис. 102).

Задача 49. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите параллельные сечения, одно из которых проходит через прямую AC, а другое - через прямую BC_1. Найдите отношение площадей этих сечений (рис. 103).

Решение. Воспользуемся тем, что куб представляет собой многогранник, у которого шесть граней, и все они – равные квадраты. Поэтому в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.103) имеем: $AA_1 \| BB_1, AA_1=BB_1$ (как противоположные стороны квадрата AA_1B_1B) и $BB_1 \| CC_1$, $BB_1=CC_1$ (как противоположные стороны квадрата BB_1C_1C). Получили: $AA_1 \| BB_1$, $AA_1=BB_1$и $BB_1 \| CC_1$, $BB_1=CC_1$. Тогда на основании транзитивности отношения параллельности и равенства отрезков заключаем: $AA_1 \| CC_1$, $AA_1= CC_1 \Rightarrow$ четырёхугольник AA_1C_1C – параллелограмм, откуда следует, что $AC \| A_1C_1$, $AC= A_1C_1$ (как противоположные стороны этого параллелограмма).

Аналогично можно доказать, что $AD_1 \| BC_1$, $AD_1= BC_1$. Тогда получаем: $AC \| A_1C_1$, $AD_1 \| BC_1 \Rightarrow (A_1BC_1) \| (AD_1C)$ (по признаку параллельности плоскостей).

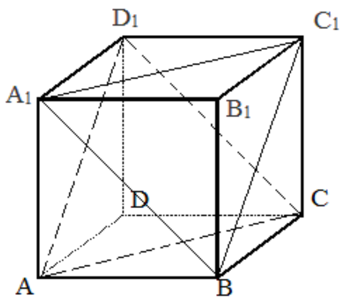

Рис.103

Таким образом, параллельными сечениями данного куба, проходящими через прямые AC и BC_1, являются треугольники A_1BC_1 и AD_1C. Сторонами этих треугольников-сечений являются диагонали граней куба – равных квадратов, поэтому $\Delta A_1BC_1 = \Delta AD_1C$ (по трём сторонам), значит, равны и площади этих треугольников, откуда следует, что отношение площадей треугольников-сечений равно 1 (единице).

Ответ: 1.

При решении стереометрических задач на взаимное расположение плоскостей учащимся необходимо знать и помнить свойства параллельных плоскостей. Отметим среди них следующие свойства.

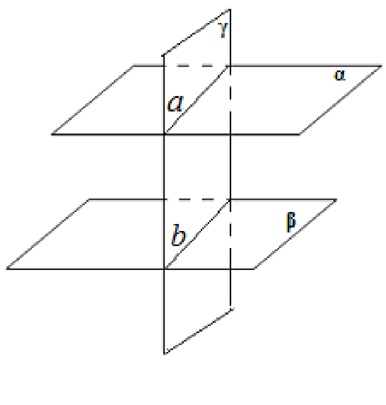

Рис.104

Теорема 3. *Прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны* (рис. 104).

Теорема 4. *Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.*

Теорема 5. *Если плоскость пересека-*

ет одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.

После доказательства этих свойств необходимо закрепить пройденный теоретический материал с помощью решения набора задач, подобранных по принципу: «от простого – к сложному».

Первыми могут быть предложены задачи на доказательство. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 50. Плоскости β и α параллельны. Прямая *a* пересекает плоскости β и α соответственно в точках A и A_1, а параллельная ей прямая *b* – соответственно в точках B и B_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 равны (рис. 105).

Решение. Проведем через параллельные прямые *a* и *b* плоскость γ. Получаем: $\gamma \cap \beta = AB$, $\gamma \cap \alpha = A_1B_1$ (рис.105). Тогда $AB \| A_1B_1$ (по теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей). Теперь имеем: $AB \| A_1B_1$, $AA_1 \| BB_1$ (по условию $a \| b$), откуда следует: $AA_1 = BB_1$ (как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми), что и требовалось доказать.

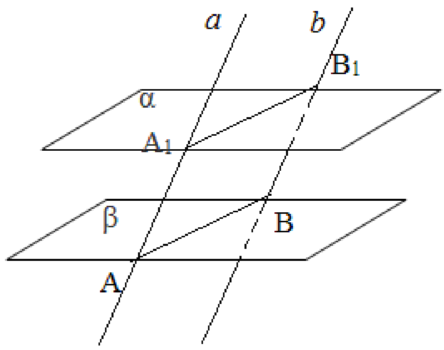

Рис.105

Для повышения исследовательского характера задачи вместо традиционного «Доказать» можно использовать «Верно ли, что …?», «Существует ли…?», «Что можно сказать о…?». Проиллюстрируем сказанное на примере следующей задачи.

Задача 51, [31]. Верно ли утверждение, что плоскости параллельны, если: а) прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой другой плоскости; б) две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым другой плоскости?

Ответ: а) нет; б) нет.

Следует заметить, что свойства параллельных плоскостей в пространстве во многом аналогичны свойствам параллельных прямых на плоскости. Учащимся стоит предложить сравнить свойства пары пересекающихся прямых на плоскости и пары плоскостей в пространстве. Для этого целесообразно составить следующую таблицу, в которой в столбце слева будут находиться свойства пары прямых на плоскости, а в другом столбце свойства пары плоскостей в пространстве (Таблица 1).

Таблица 1. Свойства пары пересекающихся прямых на плоскости и пары плоскостей в пространстве

Свойства пары прямых на плоскости	Свойства пары плоскостей в пространстве
1. Прямые, имеющие две общие точки совпадают	1. Плоскости, имеющие три общие точки (не лежащие на одной прямой), совпадают
2. Пересекающиеся прямые имеют ровно одну общую точку	2. Пересекающиеся плоскости имеют ровно одну общую прямую
3. Параллельные прямые не имеют общих точек	3. Параллельные плоскости не имеют общих точек
4. Две пересекающиеся прямые на плоскости образуют две пары вертикальных углов	4. Две пересекающиеся плоскости в пространстве образуют две пары вертикальных двугранных углов
5. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости	5. Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства

Анализ таблицы позволяет понять, что некоторые свойства пар плоскостей в пространстве аналогичны свойствам пар прямых на плоскости.

3.2. Двугранные углы

В процессе изучения раздела о перпендикулярных плоскостях рассматриваются следующие вопросы.

1. Определение перпендикулярных плоскостей.

2. Признак перпендикулярности плоскостей.

3. Построение перпендикулярных плоскостей.

4. Решение задач с использованием определения и признака перпендикулярности плоскостей.

С помощью рисунков, опираясь на жизненные представления учащихся, выясняется, что две перпендикулярные плоскости, являются пересекающимися.

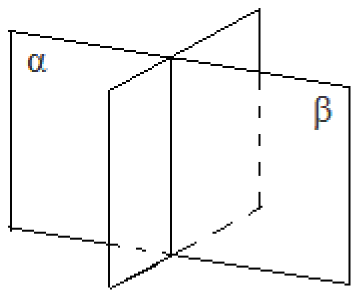

Рис.106

О перпендикулярности двух плоскостей можно говорить, зная понятие угла между ними. Здесь возникает следующий вопрос: что представляет собой угол между двумя плоскостями? (рис.106).

Сначала рассмотрим понятие двугранного угла, после чего перейдем к изучению материала об углах между двумя плоскостями.

Определение. Двугранным углом называют пересечение двух полупространств, границами которых служат непараллельные плоскости. Прямую, по которой пересекаются плоскости – границы полупространств, называют *ребром двугранного угла,* а полуплоскости этих плоскостей, принадлежащие двугранному углу, – *гранями двугранного угла* (рис.107).

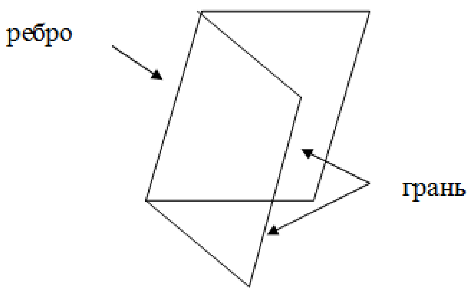

Рис.107

Обозначается двугранный угол также, как и плоский: грань-ребро-грань [4].

Так двугранный угол с гранями α, β и ребром a обозначают $\alpha a\beta$ (рис.108, а) или A(a)B, где A$\in\alpha$, B$\in\beta$ (рис.108, б) .

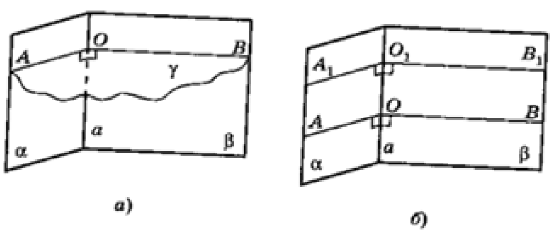

Рис.108

Двугранный угол может быть как выпуклым (рис.109, а), так и невыпуклым (рис.109, б.) Как и в планметрии, множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя своими точками, целиком содержит соединяющий их отрезок [8]

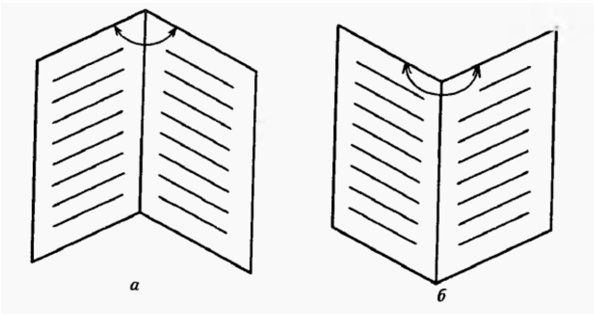

Рис.109

Для измерения двугранного угла вводят понятие его линейного угла: на ребре *а* двугранного угла *αаβ* отмечают произвольную точку *О* и в гранях *α* и *β* проводят из точки *О* соответственно лучи *ОА* и *ОВ*, перпендикулярные этому ребру (рис.108, а). Угол *АОВ*, образованный проведёнными лучами, называется *линейным углом данного двугранного угла αаβ.*

Так как $OA \perp a$ и $OB \perp a$, то плоскость *АОВ* перпендикулярна прямой *а*. Это означает, что *линейный угол двугранного угла есть пересечение данного двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру*.

Для измерения двугранного угла введем понятие его линейного угла.

В учебнике приводится сначала доказательство, а затем формулируется следующая теорема о линейных углах двугранного угла.

Теорема. *Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.*

Иначе говоря, все линейные углы данного двугранного угла равны между собой.

Это позволяет ввести следующее

Определение. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла (рис. 110).

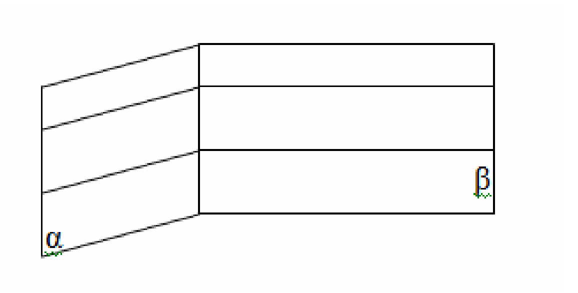

Рис.110

Важно обратить внимание на то, что величина двугранного угла (измеренная в градусах) принадлежит промежутку (0°;180°]. Учащиеся должны знать, что двугранный угол может быть острым (рис.111, а), прямым (рис.111, б) или тупым (рис.111, в), если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой.

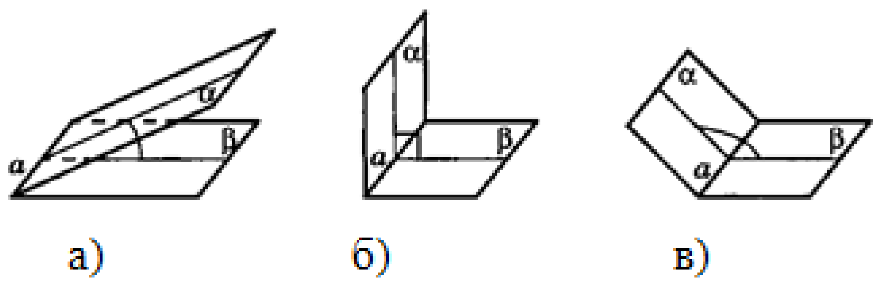

Рис.111

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рис.112). Если величина одного из них равна φ, то величины трех остальных равны соответственно $180° - \varphi$, φ, $180° - \varphi$ (почему?). Наименьшая из этих величин принимается за величину угла между данными плоскостями.

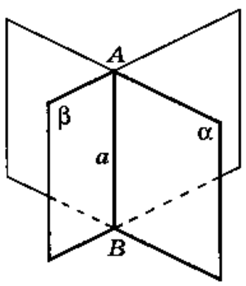

Рис.112

При этом следует объяснить учащимся, что аналогично планиметрии, в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы. Справедливы и аналогичные теоремы о величинах смежных и вертикальных двугранных углов (рис. 112).

Смежными называются два двугранных угла меньше развернутого с общим ребром, у которых две грани совпадают, а две другие лежат в одной плоскости и не совпадают.

Прямым называется двугранный угол, равный своему смежному.

Учащимся стоит предложить дать самостоятельно определение вертикальных двугранных углов [4].

В начале изучения материала необходимо решать задачи на вычисление величины двугранного угла, находить расстояние от точки**,** расположенной внутри двугранного угла, до его ребра и граней.

Для нахождение угла φ между двумя пересекающимися плоскостями □ и □ удобно использовать следующий факт: если плоскости □ и □ пересекаются по прямой *c*, а некоторая точка M плоскости □ удалена от плоскости □ на расстояние h и от прямой *c* – на расстояние m, то sin φ = $\frac{h}{m}$.

Задача 52. Точка A лежит на одной из граней двугранного угла, равного 30°, и удалена от ребра двугранного угла на 8. Найдите расстояние от точки A до плоскости второй грани двугранного угла.

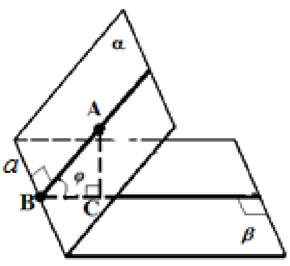

Рис.113

Решение. Пусть φ является линейным углом двугранного угла α*a*β. Опустим из точки A перпендикуляр AB на ребро *a* двугранного угла α*a*β. Имеем: AB⊥*a* ⇒

AB=8.

Теперь из точки A опустим перпендикуляр AC на плоскость β. Имеем: AC⊥β. Следовательно, □ABC - прямоугольный ($\angle C = 90°$)(рис. 113).

В прямоугольном □ABC имеем:

sin φ=$\frac{AC}{AB}$ ⇒AC=$\frac{AC}{AB}$ ⇒ $AB \cdot \sin\varphi = AB \cdot \sin 30° = 8 \cdot \frac{1}{2}$ =4. *Ответ*: 4.

Учащимся необходимо научиться видеть двугранные углы в пространстве, так как данный материал будет носить прикладной характер в задачах 11 класса. Проиллюстрируем применение определения двугранного угла на примерах решения следующих задач.

Задача 53. Точки А и В лежат на разных гранях двугранного угла. Прямая АВ перпендикулярна ребру двугранного угла, а точки А и В удалены от этого ребра на 3 и 4 соответственно. Найдите величину двугранного угла, если АВ=5 (рис. 114).

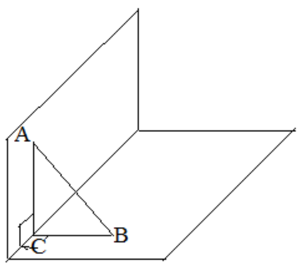

Рис.114

Решение. Пусть φ является линейным углом двугранного угла $\alpha a \beta$. Точка С – проекция точки А и точки В на ребро a данного двугранного угла $\alpha a \beta$. Получаем $\triangle ABC$ - египетский, поскольку стороны треугольника относятся друг к другу, как 3:4:5. Линейным углом данного двугранного угла является $\angle ACB$=90°.

3.3. Угол между двумя плоскостями

Теперь можно ввести понятие угла между плоскостями, которое в дальнейшем и приведет нас к понятию перпендикулярности двух плоскостей

Определение. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двухгранных углов, образованных при их пересечении.

Необходимо заметить, что угол между параллельными или совпадающими плоскостями принимается, равным нулю.

Понятие угла между плоскостями полезно рассматривать на моделях разнообразных многогранников: кубе, параллелепипеде, призме, тетраэдре. При решении задач на нахождение величин углов между плоскостями в различных многогранниках у учащихся развивается пространственное воображение.

Задача 54. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BC_1D и ABC;

Решение. Обозначим: $\angle((BC_1D),(ABC))=\alpha$; $O=AC\cap BD$ (рис.115).

Имеем: $AC\perp BD$ (как диагонали квадрата); $C_1O\perp BD$ (как медиана правильного $\Delta\ BC_1D$) $\Rightarrow\angle\ C_1OC$ - линейный угол двугранного угла $C_1(DB)C$ с ребром BD, образованного плоскостями BC_1D и ABC. Это значит, $\angle((BC_1D),(ABC))=\angle C_1OC=\alpha$. Найдем tg α.

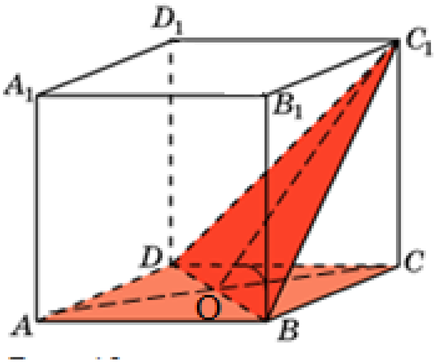

Рис.115

В прямоугольном ΔC_1OC ($C_1C\perp AC$) со сторонами $C_1C=1$, $OC=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (в единичном квадрате ABCD) находим: tg $\alpha=\frac{C_1C}{OC}=$ $=1:\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, откуда получаем: $\alpha=arctg\sqrt{2}$.

Ответ: $arctg\sqrt{2}$.

Замечание. Отметим, что в зависимости от способа решения задачи, ее ответ может быть записан в разной тригонометрической форме: $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $arcctg\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Целесообразно учащимся предложить заполнить таблицу, состоящую из 10 пунктов на определение взаимного расположения плоскостей и нахождение угла между ними, что позволит закрепить пройденный материал.

Задача 55. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M - середина ребра D_1C_1. Заполните таблицу:

	Плоскости	**Взаимное расположение плоскостей**	**Угол между плоскостями**
1	A_1BA и D_1CD	Параллельны	0 °
2	$A_1B_1C_1$ и DD_1C	Пересекаются	90 °
3	A_1BD и B_1D_1C	Параллельны	0 °

4	B_1AC и ADC	Пересекаются	$arctg\sqrt{2}$
5	A_1BD и C_1DB	Пересекаются	arccos $\frac{1}{3}$
6	A_1BD и CC_1A	Пересекаются	90 º
7	AB_1C_1 и ADC	Пересекаются	45 º

Решение. 5) Обозначим: $O=AC\cap BD$, $\angle((A_1BD), (C_1DB))=\alpha$; $BD=(A_1BD)\cap(C_1DB)$ (рис.116).

Имеем: $A_1C\perp BD$ (как медиана правильного ΔA_1BD); $C_1O\perp BD$ (как медиана правильного ΔC_1DB) $\Rightarrow \angle A_1OC_1$ - линейный угол двугранного угла $A_1(BD)C_1$ с ребром BD.

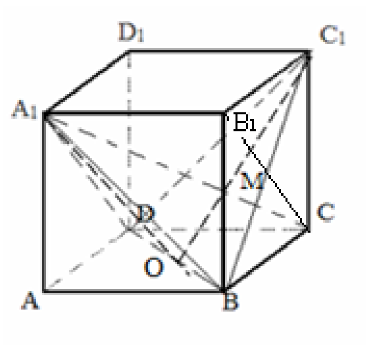

Рис.116

Проведем диагональ A_1C куба (рис. 116). Ортогональной проекцией этой диагонали на плоскость грани $ABCD$ является диагональ AC этой грани. Вследствие $AC\perp BD$ (как диагонали квадрата $ABCD$), получаем: $A_1C\perp BD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, ортогональной проекцией диагонали A_1C на плоскость грани B_1C_1CB является ее диагональ B_1C, перпендикулярная диагонали C_1B квадрата B_1C_1CB, поэтому $A_1C\perp C_1B$ (по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, $A_1C\perp BD$, $A_1C\perp BC_1$, $BD\cap BC_1=B\Rightarrow A_1C\perp(BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Обозначим: $M=A_1C\cap C_1O$.

В прямоугольном ΔA_1MO, в котором : $OM=\frac{1}{3}OC_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{BC_1\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

В правильном ΔA_1BD находим : $A_1O=\frac{A_1B\sqrt{3}}{2}=\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Теперь: $\cos\alpha=\frac{OM}{A_1O}=\frac{\sqrt{6}}{6}:\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{3}$.

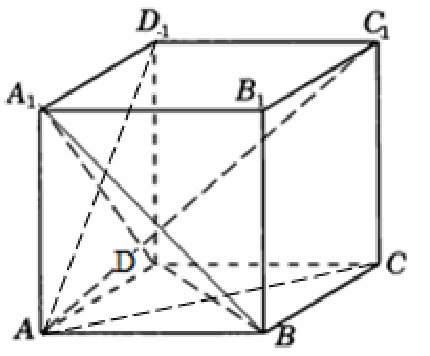

Рис.117

6) Имеем: ортогональной проекцией диагонали C_1A данного куба на плоскость грани AA_1D_1D является диагональ AD_1 этой грани (рис 117). Вследствие $AD_1 \perp A_1D$ (как диагонали квадрата AA_1D_1D), получаем: $C_1A \perp A_1D$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, ортогональной проекцией диагонали C_1A на плоскость грани ABCD является ее диагональ AC, перпендикулярная диагонали BD квадрата ABCD, поэтому $C_1A \perp BD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, $C_1A \perp BD$, $C_1A \perp A_1D$, $\Rightarrow C_1A \perp (A_1BD)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Только после рассмотрения и закрепления понятия двугранного угла и угла между плоскостями стоит приступать к изучению материала о перпендикулярности плоскостей в пространстве.

Введем определение перпендикулярных плоскостей в пространстве.

Определение. Две плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен $90°$.

Взаимную перпендикулярность плоскостей α и β обозначают $\alpha \perp \beta$. При этом также говорят, что плоскость α перпендикулярна плоскости β или плоскость β перпендикулярна плоскости α.

Заметим, что все четыре двугранных угла, образованные взаимно перпендикулярными плоскостями, прямые.

Как и при изучении темы «Параллельность плоскостей в пространстве», полезным является рассмотрение перпендикулярных плоскостей на конкретных примерах, используя окружающие нас предметы. Взаимно перпендикулярными плоскостями могут служить плоскости пола и стены комнаты, плоскости двух соседних граней куба или прямоугольного параллелепипеда.

Учащиеся следует объяснить, что как при выяснении вопроса о параллельности, перпендикулярности, скрещиваемости двух прямых, параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, использовались соответствующие признаки, так и при выяснении вопроса о том, перпендикулярны ли две плоскости, используются признаки их перпендикулярности.

Теорема 7 (*признак перпендикулярности двух плоскостей*). Если одна из двух пересекающихся плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

На начальной стадии изучения стереометрии полезным является решение конструктивных задач на модели куба. Каждая из таких задач выполняет дидактические функции, которые позволяют формировать пространственное воображение, знакомиться с основными свойствами геометрических фигур в пространстве. Рассмотрим следующие задачи на доказательство, используя модель куба, которые позволят учащимся сделать интересные обобщения, анализируя полученные решения, а также познакомят учащихся с некоторыми свойствами куба.

Задача 56. Докажите, что смежные грани куба взаимно перпендикулярны.

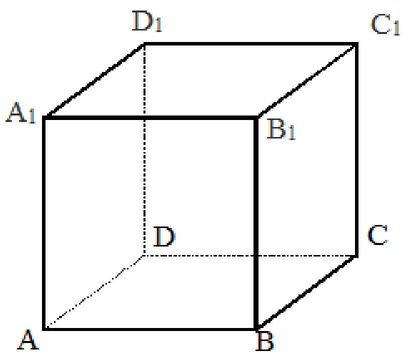

Рис.118

Решение. Докажем, что плоскость ABB_1 перпендикулярна плоскости BB_1C_1(рис.118). Сначала покажем, что прямая AB перпендикулярна плоскости BB_1C_1. $AB \perp BC$(как стороны квадрата ABCD), $AB \perp BB_1$ (как стороны квадрата AA_1B_1B).

Имеем: $AB \perp (BB_1C_1)$ и $AB \subset (ABB_1)$. Следовательно $AB \perp (BB_1C_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Задача 57. Докажите что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны: а) плоскости сечений ACC_1A_1 и BDD_1B_1.

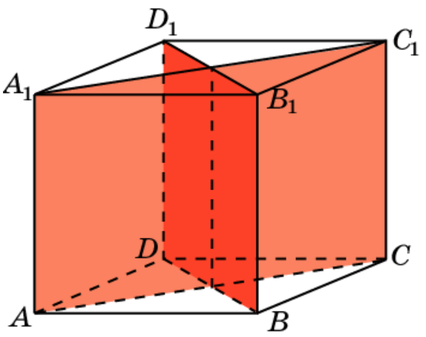

Рис.119

Решение. а) $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (по свойству диагоналей квадрата). $DD_1 \perp (A_1B_1C_1)$, поэтому $A_1C_1 \perp DD_1$. Так как $A_1C_1 \subset (A_1B_1C_1)$ (рис.119).

Т. о. прямая A_1C_1 перпендикулярна к двум пересекающимся прямым DD_1 и B_1D_1, лежащими в плоскости (BDD_1). Откуда следует, что прямая $A_1C_1 \perp (BDD_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Плоскость (ACC_1) проходит через прямую A_1C_1, перпендикулярную к плоскости (BDD_1). Отсюда следует, что $(ACC_1) \perp (BDD_1)$ по признаку перпендикулярности двух плоскостей.

Вместе с тем учащимся полезно знать следствия из данной теоремы для применения их при решении задачного материала на перпендикулярность плоскостей.

Следствие 1. Если в плоскости есть хотя бы одна прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

Следствие 2. Если плоскость перпендикулярна прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, то эта плоскость перпендикулярна каждой из данных плоскостей.

Кроме того, для дальнейшего решения задач учащимся необходимо знать свойства перпендикулярных плоскостей. Перечислим их.

Теорема 8. *Если прямая лежит в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то эта прямая перпендикулярна другой плоскости.*

Теорема 9. *Если прямая, проведенная через точку одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна другой плоскости, то она лежит в первой из них.*

Теорема 10. *Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.*

Задачный материал следует начинать с базовых задач, а затем приступать к более сложным.

Необходимо, чтобы набор задач по этой теме содержал как задачи на доказательство, построение и исследование, так и задачи вычислительного характера на нахождение расстояний, периметров и площадей сечений многогранников, углов между прямыми и плоскостями. При этом в основе подбора задач должен лежать принцип «от простого – к сложному».

Рассмотрим, например, такую задачу.

Задача 58. Плоскости равнобедренного треугольника ABF и квадрата ABCD перпендикулярны. Найдите расстояние от точки F до прямой CD, если сторона квадрата равна 32 и AF=BF=20.

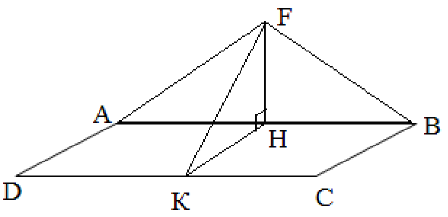

Рис.120

Решение. Рассмотрим $\triangle ABF$. AF=BF (по условию).Из точки F опустим перпендикуляр на прямую AB. Получим: FH – высота, проведенная к основанию, является и медианой в равнобедренном $\triangle ABF$. $\Rightarrow$ AH=HB. AH=$32 \cdot \frac{1}{2}$=16 (рис.120).

В $\triangle ABF$ по теореме Пифагора находим:

FH=$\sqrt{\ }$ [illegible]. HK=BC=32.

Так как плоскость квадрата ABCD перпендикулярна плоскости треугольника ABF, то линейный угол двугранного FHK=90°. Значит, $\triangle FHK$ - прямоугольный. FK – искомое расстояние, от точки F до прямой CD. В прямоугольном $\triangle FHK$ находим:

FK=$\sqrt{\ }$ [illegible]. *Ответ:* $4\sqrt{73}$.

Для наилучшего закрепления знаний в памяти учащихся, необходимо чтобы учащиеся проявляли интеллектуальную и познавательную активность. Рассмотрим решение задач на нахождение величины угла между плоскостями в кубе, правильном тетраэдре и правильной шестиугольной призме.

Задача 59. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите синус угла между плоскостями: а) AB_1C и ABC_1; б) AB_1D_1 и A_1BC_1; в) AB_1C и A_1BC.

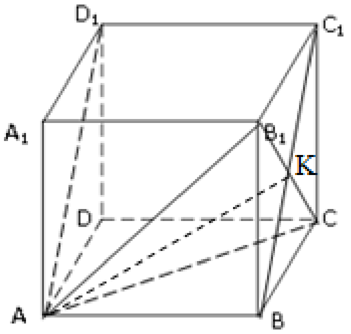

Рис.121

Решение. а) Обозначим: $\angle((AB_1C), (ABC_1)) = \alpha$; $K = C_1B \cap B_1C$ (рис.121). Тогда $AK = (AB_1C) \cap (ABC_1)$.

Имеем: $B_1C \perp C_1B$ (C_1B, B_1C - диагонали квадрата); $AK \perp B_1C$ (как медиана правильного $\Delta\ BC_1D$) $\Rightarrow B_1C \perp (ABC_1)$(по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow$ $(AB_1C) \perp (A_1BC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей)$\Rightarrow \angle((AB_1C),(ABC_1)) = \alpha = 90^o$. Значит, $\sin \alpha = 1$.

б) Обозначим: $\angle((BC_1D), (A_1AD)) = \alpha$. Т.к. $BCC_1 \parallel A_1AD$, тогда $\angle((BC_1D), (A_1AD)) = \angle((BC_1D), (BCC_1)) = \alpha$.

$K = C_1B \cap B_1C$ (рис.122).

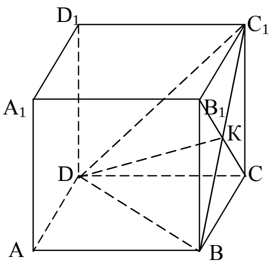

Рис.122

Имеем: $KC \perp C_1B$ (C_1B, B_1C - диагонали квадрата); $KD \perp C_1B$ (как медиана правильного $\Delta\ BC_1D$) $\Rightarrow \angle CKD$ - линейный угол двугранного угла с ребром C_1B, образованного плоскостями BCC_1 и BC_1D. Это значит, $\angle((BC_1D),(BCC_1)) = \angle CKD = \alpha$. Найдем $\sin\alpha$.

В прямоугольном $\Delta\ CKD$ ($\angle KCD = 90^o$) с катетом $KC = 0{,}5\sqrt{2}$, противолежащим углу $\angle CKD = \alpha$, и гипотенузой KD

$=0{,}5\sqrt{6}$ находим: $\cos\alpha = \dfrac{KC}{KD} = \dfrac{0{,}5\sqrt{2}}{0{,}5\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \Rightarrow \angle((BC_1D),\ (A_1AD)) = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

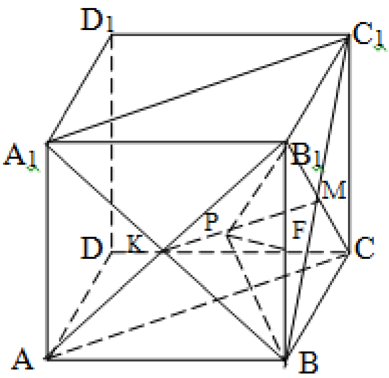

Рис.123

в) Обозначим: $\angle((AB_1C),(A_1BC_1)) = \beta$; $M = B_1C \cap C_1B$; $K = A_1B \cap B_1A$ (рис.123). Тогда $MK = (AB_1C) \cap (A_1BC_1)$.

Так как отрезок MK - средняя линия правильных треугольников AB_1C и A_1BC_1, то $KM \parallel AC$, $KM \parallel A_1C_1$, откуда следует: ΔB_1KM и ΔBKM - правильные и равны. Поэтому медианы B_1P и BP этих треугольников равны и являются их высотами. Это означает, что $\angle B_1PB$ - линейный угол двугранного угла с ребром KM, образованного плоскостями AB_1C и A_1BC_1. Тогда $\angle B_1PB =$
$= \angle((AB_1C),(A_1BC_1)) = \beta$. Найдем $\sin\beta$.

Пусть точка F - середина ребра B_1B. Тогда $PF \perp B_1B$ и $\angle BPF = \dfrac{\beta}{2}$. В прямоугольном ΔBPF с катетом $BF = 0{,}5BB_1 = 0{,}5$, противолежащим $\angle B_1PB$, и гипотенузой $BP = 0{,}5\cdot(0{,}5\cdot C_1B\cdot\sqrt{3}) = 0{,}5\cdot0{,}5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 0{,}25\sqrt{6}$ находим: $\sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{BF}{BP} = \dfrac{0{,}5}{0{,}25\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, значит, $\cos\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Следовательно, $\sin\beta = 2\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Теорема косинусов дает нам значение косинуса, которое может быть меньше нуля, иначе говоря, величину двугранного угла, который может оказаться тупым [28].

Задача 60. В правильном тетраэдре PABC с ребром, равным 1, точка K - середина ребра AB, точка T - середина ребра AC, точка M -середина ребра CP. Найдите угол:

а) между плоскостями APB и CPK; б) между плоскостями BPT и AMB;

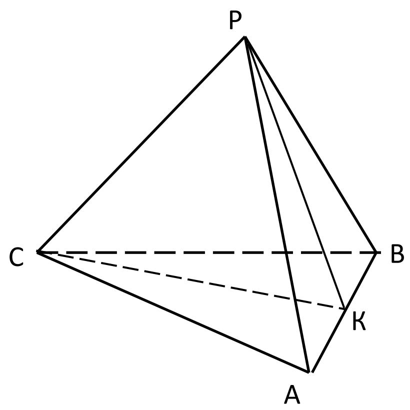

Рис.124

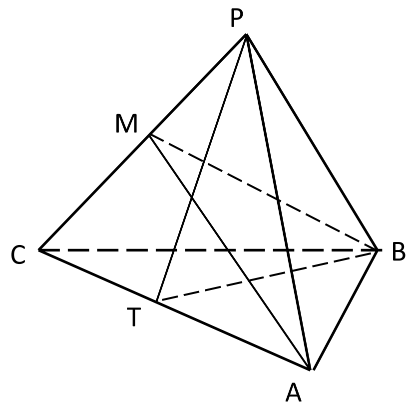

Рис.125

в) между плоскостями TPB и APB; г) между плоскостями BPT и ACH;

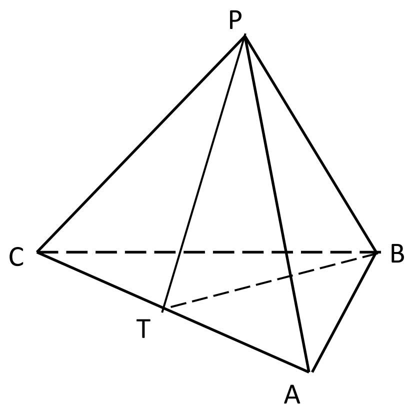

Рис.126

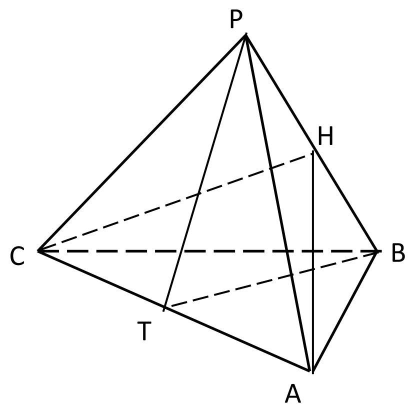

Рис.127

Решение. а) Имеем: $CK \perp AB$ (как медиана правильного ΔABC); аналогично, $PK \perp AB$ в правильном ΔABP (рис.128). Тогда: $AB \perp (CPK)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости)$\Rightarrow$(АРВ)$\perp$(СРК) (по признаку перпендикулярности двух плоскостей) $\Rightarrow \angle$((АРВ);(СРК)) = 90º.

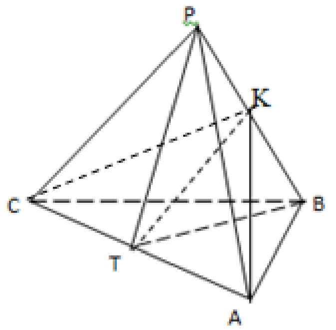

Рис.128

в) Прямая РВ = (ТРВ)$\cap$(АРВ) является ребром двугранного угла, образованного полуплоскостями ТРВ и АРВ (рис.128). Так как ТК - медиана равнобедренного Δ ТРВ, то ТК$\perp$РВ. Аналогично, АК$\perp$РВ в равностороннем ΔАРВ. Тогда

$\angle$ ((ТРВ); (АРВ)) = $\angle$(ТК;АК) = $=\angle$ АКТ $=\varphi$. Найдем $\sin\varphi$.

В равнобедренном ΔАКС ТК - медиана, поэтому ТК$\perp$АС. Тогда в прямоугольном ΔАКТ находим: $\sin\varphi = \dfrac{AT}{AK} = \dfrac{0,5}{0,5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

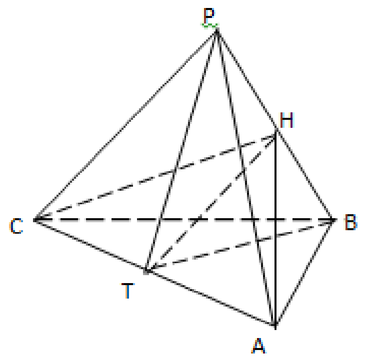

Рис.129

г) Имеем: ВТ$\perp$АС (как медиана правильного ΔАВС). Аналогично, в правильном ΔАРС: РТ$\perp$АС (рис.129). Тогда: АС$\perp$(ВРТ) (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Учитывая АС$\subset$(АСН), заключаем: по признаку перпендикулярности двух плоскостей (ВРТ)$\perp$(АСН)$\Rightarrow\angle$((ВРТ); (АСН)) = 90º.

Можно предложить учащимся самостоятельно решить задачу 59 (б).

Ответ: а) 90º; б) 60º; в) $arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; г) 90º.

Задача 61. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$,

все ребра которой равны 1, найдите косинус угла:

а) между плоскостями АВС и C_1AE; б) между плоскостями A_1FE и A_1BC;

г) между плоскостями A_1B_1C и BC_1D_1.

Решение. а) Обозначим: $\angle((C_1AE); (ABC)) = \alpha$; $P = B_1E_1 \cap A_1D_1$; $K = AB_1 \cap A_1B$. Плоскости C_1AE и ABC образуют двугранный угол $C_1(EA)B$ (рис.130), ребром которого служит прямая AE.

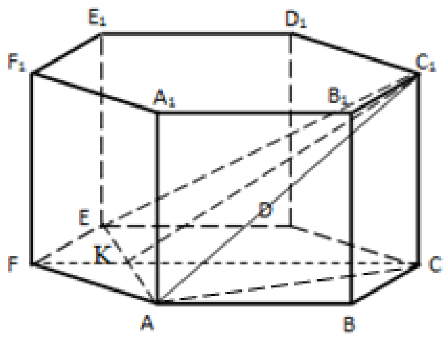

Рис. 130

Имеем: $K = AE \cap FC$, $KC \perp AE$; $C_1K \perp AE$ (как медиана равнобедренного ΔAC_1E, $AC_1=EC_1$). Тогда $\angle((C_1AE); (ABC)) = \angle(C_1K; KC) = \angle C_1KC = \alpha$. Найдем sin α.

В прямоугольном ΔAC_1C с катетами $AC = \sqrt{3}$ и $C_1C = 1$ находим: $AC_1 = \sqrt{AC^2 + C_1C^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

В прямоугольном ΔKC_1A с гипотенузой $AC_1=2$ и катетом $AK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

находим: $KC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AK^2} = \sqrt{2^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

. В прямоугольном ΔKC_1C находим: $\sin\alpha = \dfrac{C_1C}{C_1K}\ 1 : \dfrac{\sqrt{13}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

б) Плоскости A_1FE и A_1BC образуют двугранный угол, ребром которого служит прямая A_1D_1 (рис. 131).

Четырехугольник BCD_1E – равнобедренная трапеция, т.к. $BA_1=CD_1$ как диагонали равных квадратов, $A_1D_1 \parallel BC$, поскольку лежат в параллельных плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$. Аналогично можно показать, что четырехугольник FA_1D_1E – равнобокая трапеция.

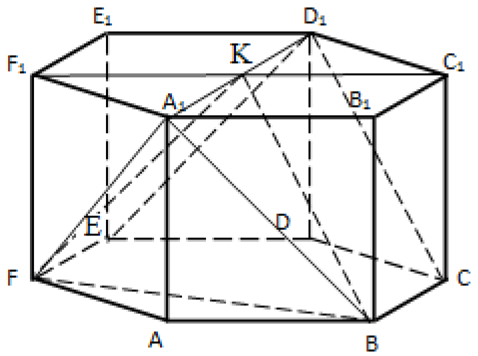

Рис. 131

Обозначим: $K = F_1B_1 \cap A_1D_1$, $F_1B_1 \perp A_1D_1$.

Имеем: $BK \perp A_1D_1$, $FK \perp A_1D_1$ по теореме о трех перпендикулярах. $BCD_1E = FA_1D_1E$, так как $A_1F=A_1B=D_1E=D_1C=\sqrt{2}$ как диагонали равных квадратов, FE=BC=1 как стороны равных квадратов, A_1D_1 – общая сторона. $\Rightarrow$ BK = FK, где BK и FK - высоты этих трапеций, проведенные к их общей стороне A_1D_1. Это означает, что $\angle((A_1BC); (A_1FE)) = \angle FKB = \beta$. Найдем cos β с помощью теоремы косинусов в ΔBKF:

$$\cos\beta = \frac{FK^2 + BK^2 - BF^2}{2FK \cdot BK} = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{1}{7}.$$

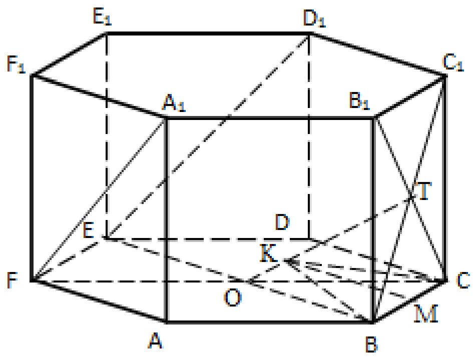

Рис.132

в) Обозначим: $\angle((A_1B_1C); (BC_1D_1)) = \varphi$; $O = BE \cap FC$; $T = B_1C \cap C_1B$. Тогда $(A_1B_1C) \cap (BC_1D_1)$ = OT - ребро двугранного угла, образованного плоскостями A_1B_1C и BC_1D_1 (рис.132). Найдем sin φ.

Имеем: точка T - середина диагоналей квадрата BC_1 и B_1C, равных $\sqrt{2}$, поэтому $B_1T = BT = 0{,}5\sqrt{2}$.

Аналогично, точка O - середина диагоналей BE и FC, равных 2, поэтому BO = OC=1. Тогда: $\Delta OBT = \Delta OCT \Rightarrow$ BK = CK, где BK и CK - высоты этих треугольников, проведенные к их общей стороне OT. Это означает, что $\angle((A_1B_1C); (BC_1D_1)) = \angle CKB = \varphi$. Найдем sin φ.

Замечаем, что отрезок OT - средняя линия ΔC_1BE, поэтому OT = 0,5BE=1.

Если OK = x, то TK = 1-x, тогда на основании $OB^2 - OK^2 = BT^2 - KT^2$ получаем: $0{,}51 - x^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (1-2x+x^2)$, откуда x = 0,75 =OK. Значит, BK= $\sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Далее, пусть точка M - середина BC. Тогда в равнобедренном ΔBKC находим: $\angle BKM = \frac{\varphi}{2}$, при этом $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{BM}{BK} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Тогда $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}. \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}$.

Ответ: а) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{7}$.

§4. Элективный курс «Скрашивающиеся прямые»

Программа элективного курса «Задачи на скрещивающиеся прямые» предназначена для учащихся 10-11 профильных классов. Она направлена на расширение и углубление знаний учащихся, прочное и сознательное овладение ими системой умений и навыков, необходимых для качественного решения геометрических задач выпускного ЕГЭ и вступительного испытания в избранный вуз. Следует заметить, что для освоения курса стереометрии старшей школы необходимы базовые знания по курсу планиметрии основной школы.

Актуальность предлагаемой программы обусловлена ее практической значимостью. Содержание данной программы представлено несколькими разделами. Особое внимание в программе уделяется выработке умений «видеть» наиболее рациональный путь решения задач на нахождение расстояний и углов между скрещивающимися прямыми.

Педагогическая целесообразность данной программы объясняется тем, что она позволяет решить важные педагогические задачи в рамках дополнительных занятий в школе, так как формирование хорошего геометрического образования, пространственного воображения и логического мышления необходимо не только профессиональному математику, но и инженеру, и экономисту, и юристу и специалисту других профессий. Включение в данную программу примеров и задач, относящихся к вопросам метрической геометрии, убеждают учащихся в значении и применении геометрических знаний в различных сферах человеческой деятельности, что способствует выработке у них уверенности в понимании полезности и практической значимости геометрии. Такие задачи вызывают интерес у обучающихся, пробуждают любознательность.

Цель и задачи программы элективного курса:

- формирование у учащихся верного и наглядного изображения пространственных фигур на плоскости;

- развитие пространственного воображения, умения представлять геометрический объект;

- выработка умений корректно аргументировать утверждения, возникающие по ходу решения любой геометрической задачи;

- знакомство учащихся с различными методами решения геометрических задач;

- совершенствование навыков решения задач;

- организация работы с дополнительной литературой.

Отличительные особенности данного элективного курса:

-данный курс построен на блочной подаче материала, что создает возможность в каждом новом разделе предлагать учащимся новое содержание, освоение которого возможно, только опираясь на умения, которые были выработаны ими в предшествующем блоке.

Новизна программы состоит в том, что она расширяет умение видеть и находить расстояние между точками, прямыми и плоскостями, а также дополняет навыки и умения в нахождении этих расстояний и углов.

Программа элективного курса рассчитана на 17 часов.

Форма занятий: фронтальная, коллективная, групповая, индивидуальная.

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- правильно употреблять новые термины, связанные с основными геометрическими понятиями;
- уметь строить искомый перпендикуляр двух скрещивающихся прямых;
- сформировать навык самостоятельной работы с таблицами и справочной литературой;
- уметь решать геометрические задачи различными методами.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются контрольная работа и проект.

Данная программа может быть использована, как в общеобразовательных, так и в классах с углубленным или профильным изучением геометрии.

УЧЕБНО - ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
I	**СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ**	**3**	
1	Взаимное расположение прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые.	1	Урок-лекция.
2	Признаки скрещивающихся прямых	2	Урок-лекция. Урок-практикум.
II	**РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ**	**4**	
1	Понятие расстояния между скрещивающимися прямыми. Построение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых.	2	Урок- лекция, Урок -практикум
2	Поэтапно-вычислительные методы решения за-	2	

	дач на скрещивающиеся прямые		Урок-лекция. Урок-практикум.
III	**УГЛЫ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ**	**4**	
1	Понятие угла между скрещивающимися прямыми. Основные методы решения задач.	1	Урок-практикум
2	Применение теоремы трех косинусов при решении задач на скрещивающиеся прямые	1	. Урок-лекция
3	Метод проектирования при решении задач на скрещивающиеся прямые	1	Урок-практикум
4	Применение векторного метода при решении задач на скрещивающиеся прямые	1	Урок-практикум
IV	**РЕШЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ КООРДИНАТНЫМ МЕТОДОМ**	**6**	
1	Решение задач на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми координатным методом	2	Урок-лекция. Урок- практикум
2	Решение задач на нахождение углов между скрещивающимися прямыми координатным методом	2	Урок-лекция Уроки-практикумы.
4	Контрольная работа	1	Урок самостоятельного решения задач.
5	Защита проектов	1	Учебно-исследовательская конференция

СОДЕРЖАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

Раздел 1. Основные понятия. Скрещивающиеся прямые (3 ч)

1.1.Взаимное расположение прямых в пространстве. Понятие скрещивающихся прямых. Признаки скрещивающихся прямых.

Основная цель - познакомить учащихся с понятием скрещивающихся прямых в пространстве, с признаком скрещивающихся прямых.

Изучение материала о взаимном расположении прямых в пространстве следует начать с повторения аналогичного материала о взаимном расположении двух прямых на плоскости.

Из планиметрии известно, что две прямые на плоскости могут либо пересекаться, либо не пересекаться (быть параллельными). Совпадающие прямые в школьном курсе геометрии рассматриваются в исключительных случаях.

Но в пространстве две прямые могут быть расположены так, что в этом пространстве не существует плоскости, в которой они лежали бы. В таком случае говорят, что эти две прямые не лежат в одной плоскости и называют их скрещивающимися.

Типичной ошибкой учащихся являются их попытки доказать, что две данные прямые скрещиваются, пользуясь непосредственно определением скрещивающихся прямых.

Чтобы корректно, аргументированно доказать, что данные прямые скрещиваются, используют признак скрещивающихся прямых.

В результате изучения данного раздела учащиеся должны определять взаимное расположение двух прямых в пространстве, уметь приводить примеры скрещивающихся прямых на моделях многогранников.

Задания для самостоятельной работы:

1. Решить цикл задач из раздела «Скрещивающиеся прямые» [1], (номера задач и их количество определяет учитель).

Примеры задач из учебных пособий:

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$: а) докажите, что прямые A_1B и AC скрещиваются; б) верно ли, что прямые BC и C_1B пересекаются; в) установите взаимное положение прямых A_1B и C_1D; г) охарактеризуйте взаимное положение прямых A_1B и C_1D_1, [1].

Литература:

1. Шлыков, В.В. Геометрия: учеб. пособие для 11-го Кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / В.В. Шлыков. – 2-е изд. – Минск : Нар. асвета, 2008. – 175 с.

Раздел 2. Расстояния между скрещивающимися прямыми (4 ч.)

2.1. Понятие расстояния между скрещивающимися прямыми. Построение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых. Поэтапно-вычислительные методы решения задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми.

Основная цель - познакомить учащихся с понятием расстояния между скрещивающимися прямыми, научить строить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых, познакомить с методами решения задач на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми.

Одним из наиболее трудных вопросов программы школьного курса геометрии является вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми, поэтому целесообразно выделить основные методы на нахождение этого расстояния:

-как длины построенного общего перпендикуляра;

-как расстояния между построенными параллельными плоскостями, содержащими исходные прямые;

-как расстояния от любой точки, принадлежащей одной из скрещивающихся прямых, до параллельной ей плоскости, проходящей через вторую прямую;

-методом ортогонального проектирования;

В результате изучения данного раздела учащиеся должны научиться, выработать навыки определять расстояния: между двумя скрещивающимися прямыми любым из перечисленных выше методов решения задач.

Задания для самостоятельной работы:

1. Решить цикл задач из раздела «Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых» [4], (номера задач и их количество определяет учитель). Подобрать для решения задачи из пособия

2. Учащиеся самостоятельно подбирают для решения задачи из пособий [1-3] на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми (количество задач определяет учитель).

Примеры задач из учебных пособий:

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 18 требуется найти расстояние между прямыми: а) A_1C и B_1D_1; б) B_1A и C_1B, [2].

Ответ. а) $3\sqrt{6}$; б) $6\sqrt{3}$.

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте общий перпендикуляр двух прямых: а) A_1D_1 и BB_1; б) DC и B_1C_1; в) CC_1 и AB, [4].

3. DABC – правильный тетраэдр с ребром, равным 1. Найдите расстояние между прямыми: AD и BC, [2].

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1C, [1].

Ответ. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Литература:

1. Балаян, Э.Н. Математика. Задачи типа С2. Геометрия. Стереометрия / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д : Феникс, 2014. – 248 с.

2. Потоскуев, Е.В. ЕГЭ. Задания 14, 16. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. / Е.В. Потоскуев. – М. : Издательство «Экзамен», 2016. – 223 [1] с.

3 Смирнов, В.А. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с..

4. Скопец, З.А. Геометрия: учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. / под ред. З.А. Скопеца. – М.: Просвещение, 1981. – 251 с.

Раздел 3. Углы между скрещивающимися прямыми (4 ч.)

3.1. Понятие угла между скрещивающимися прямыми. Основные методы решения задач. Применение теоремы трех косинусов при решении задач на скрещивающиеся прямые. Метод проектирования при решении задач на скрещивающиеся прямые. Применение векторного метода при решении задач на скрещивающиеся прямые.

Основная цель – познакомить учащихся с понятием угла между скрещивающимися прямыми, основными методами решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми. Формировать умения решать задачи метрического характера, используя куб, правильную пирамиду, правильный тетраэдр, параллелепипед, корректно аргументируя каждый шаг построения изображения, доказательной и вычислительной частей решения задачи.

Учащимся следует пояснить, что под углом между скрещивающимися прямыми понимают не «аналог» угла между пересекающимися прямыми, не геометрическую фигуру, а некоторую величину - величину угла между параллельными им пересекающимися прямыми.

В результате изучения данного раздела учащиеся должны определять углы между двумя скрещивающимися прямыми.

Задания для самостоятельной работы:

1. Решить указанные учителем задачи из статей соответствующей тематики журнала «Математика для школьников», [1].

2. Учащиеся самостоятельно подбирают для решения задачи из пособий [2-3] на вычисление угла между скрещивающимися прямыми (количество задач определяет учитель).

Примеры задач из данных учебных пособий:

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB и A_1C, [2].

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. В правильном тетраэдре ABCD точки E и F – середины ребер соответственно BC и BD. Найдите угол между прямыми AB и EF, [3].

Ответ: $90°$.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1, [2].

Ответ. $\arccos\frac{1}{4}$.

Литература:

1. Рыжик, В.И. Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах / В.И. Рыжик. // Математика для школьников – 2008. - №3. – С.9-22.

2. Потоскуев, Е.В. ЕГЭ. Задания 14, 16. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. / Е.В. Потоскуев. – М. : Издательство «Экзамен», 2016. – 223 [1] с.

3 Смирнов, В.А. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с.

Раздел 4. Решение метрических задач на скрещивающиеся прямые координатным методом (6 ч.)

4.1. Решение задач на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми. Решение задач на нахождение углов между скрещивающимися прямыми. Контрольная работа.

Основная цель - формировать умения учащихся с помощью уравнений прямых и плоскостей решать задачи стереометрии на нахождения различных расстояний, используя в качестве объектов правильный тетраэдр, куб, правильную шестиугольную призму.

В результате изучения данного раздела ученик должен в координатной форме знать и понимать выражение скалярного произведения, условие перпендикулярности двух векторов. Уметь: находить расстояния и углы между двумя скрещивающимися прямыми.

Задания для самостоятельной работы:

1. Решить цикл задач из раздела «Угол между двумя прямыми» [1], [2] (номера задач и их количество определяет учитель).

Примеры задач из учебных пособий:

1. В системе координат Oxyz расположен куб A…D_1 так, что B(1; 0; 0), C(1; 1; 1), D(0; 1; 0), A(0; 0; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите расстояние между прямыми, где M - середина ребра AD:

а) A_1C_1 и B_1C; б) AC_1 и B_1C; в) BD и A_1M, [1].

Ответ. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; в) $\frac{1}{3}$.

2. Правильная шестиугольная призма A…F_1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат Oxyz так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины A_1, B, C, B_1 имеют координаты: $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ C(0; 1; 0), $B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right)$ Постройте эту призму и найдите координатным методом расстояние между прямыми A_1B и C_1D, [1].

Ответ. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

3. В системе координат Oxyz расположен куб A…D_1 так, что B(0; 0; 1), A(1; 0; 1), C(0; 1; 1), D_1(1; 1; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите угол между прямыми: а) A_1B и AC; б) D_1B и B_1C, [2].

Ответ. а) 60°; б) 90°.

4. A…F_1 – правильная шестиугольная призма все ребра которой равны 1. Найдите величину угла между прямыми A_1B и B_1C, [2].

Ответ. $\arccos\frac{3}{4}$.

Литература:

1. Потоскуев, Е.В. Прямые и плоскости в координатах. /Е.В. Потоскуев // Математика (еженедельное приложение к газете "Первое сентября"). – 2012. - №6. – С. 22 – 33.

2. Потоскуев, Е.В. ЕГЭ. Задания 14, 16. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. / Е.В. Потоскуев. – М. : Издательство «Экзамен», 2016. – 223 [1] с.

Контрольная работа

Вариант 1

1. В единичном кубе A…D_1 найдите расстояние между прямыми A_1B и AC, [2]. *Ответ*. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. В правильном тетраэдре найдите угол ABCD найдите угол между прямыми AB и CD, [2]. *Ответ*. 90° .

3. Правильная шестиугольная призма A…F_1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат Oxyz так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины A_1, B, C, B_1 имеют координаты: $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ C(0; 1; 0), $B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right)$ Постройте эту призму и найдите координатным методом расстояние между прямыми A_1B и E_1F, [1].

Ответ. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Вариант 2

1. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и D_1A, [1]. *Ответ*. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. В правильном тетраэдре найдите угол ABCD найдите угол между прямыми AC и BD, [2]. *Ответ*. $90°$.

3. Правильная шестиугольная призма $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат Oxyz так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины A_1, B, C, B_1 имеют координаты: $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ C(0; 1; 0), $B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right)$ Постройте эту призму и найдите координатным методом угол между прямыми A_1B и F_1A [1].

Ответ. $\arccos\frac{3}{4}$.

Литература:

1. . Потоскуев, Е.В. ЕГЭ. Задания 14, 16. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. / Е.В. Потоскуев. – М. : Издательство «Экзамен», 2016. – 223 [1] с.

2. Смирнов, В.А. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с.

Тематика исследовательской работы учащихся

Предлагаемые ниже темы исследовательских работ могут быть использованы учащимися при выполнении индивидуальных или групповых проектов или в качестве индивидуальных научно-исследовательских работ.

Темы исследовательских работ определяются или распределяются в начале изучения программы. Защита проектов или работ происходит в рамках учебно-исследовательской конференции. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся. Учащимся могут быть предложенные следующие темы исследования:

1. Способы нахождения расстояния между скрещивающимися

прямыми.

2. Алгоритм нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

3. Метод опорных задач при решении задач на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми.

3. Вычисление угла между скрещивающимися прямыми с применением теоремы трех косинусов.

4. Вычисление угла между скрещивающимися прямыми с помощью «замкнутой ломаной».

5. Координатный метод нахождения углов между скрещивающимися прямыми.

6. Вычисление угла между скрещивающимися прямыми в кубе.

7. Вычисление угла между скрещивающимися прямыми в кубе.

8. Вычисление расстояний между скрещивающимися прямыми в правильном тетраэдре.

9. Вычисление углов между скрещивающимися прямыми в правильной шестиугольной призме.

10. Вычисление расстояний между скрещивающимися прямыми в правильной шестиугольной призме.

План работы группы:

1. Определение понятия, основные теоремы помогающие при решении задач.

2. Подобрать способы нахождения расстояний или углов (в зависимости от темы проекта).

3. Подобрать задачи, подходящие к теме проекта.

4. Аргументация каждого шага построения изображения, доказательной и вычислительной частей решения задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Балаян Э.Н. Математика. Задачи типа С2. Геометрия. Стереометрия / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д : Феникс, 2014. – 248 с.

2. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: учебник для классов с углубленным и профильным изучением математики. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2011. – 223 с.

3. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2004. – 256 с.

4. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич «Геометрия. 10 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочкин. – М.: Дрофа, 2004. – 224 с.

5. Потоскуев Е.В. Начала метрической стереометрии. О расстояниях в пространстве / Е.В. Потоскуев // Математика в школе – 2010. - №8. –С. 15 – 25.

6. Потоскуев Е.В. Эффективные помощники «вхождения» в метрическую стереометрию / Е.В. Потоскуев // Математика (еженедельное приложение к газете "Первое сентября"). – 2010. - №22. – С. 27 – 35.

7. Потоскуев Е.В. Решение задач по стереометрии. Практикум. Подготовка к ЕГЭ. – М.: Илекса, 2012. – 108 с.

8. Потоскуев Е.В. Решение разноуровневых задач по геометрии. Подготовка к ЕГЭ. – М.: Илекса, 2014. – 271 с.

9. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: учебник для классов с углубленным и профильным изучением математики. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2004. – 368 с.

10. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2004. – 240 с.

11. Потоскуев Е.В. Прямые и плоскости в координатах / Е.В. Потоскуев // Математика (еженедельное приложение к газете "Первое сентября"). – 2012, № 6.- С.22-23.

12. Рыжик В.И. Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах / В.И. Рыжик. // Математика для школьников – 2008. - №3. – С.9-22.

13. Смирнов В.А. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с.

14. Шлыков В.В. Геометрия: учеб. пособие для 11-го Кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / В.В. Шлыков. – 2-е изд. – Минск : Нар. асвета, 2008. – 175 с.

§5.Эксперимент и его результаты

Экспериментальная работа по исследуемой нами проблеме осуществлялась в МБУ СОШ №74 с 2014 по 2016 гг. в три этапа с учителями математики и учащимися 10 классов.

Экспериментальное исследование (констатирующий эксперимент) был проведен с 2014 по 2015 гг. В нем приняли участие учителя математики школ учителей математики из МБУ СОШ №74, 76, 77, 33 (20 человек).

Целью педагогического эксперимента был анализ школьной практики обучения математике в старшем звене профильных классов, в частности, анализ преподавания геометрии в аспекте построения методически верной системы задач, следуя принципу системности и последовательности обучению решению задач по геометрии.

На данном этапе применялись следующие *методы исследования*: беседа с учителями и учениками, анализ опыта учителей, анкетирование.

Анкетирование учителей математики было проведено с целью выявления организационно-методических особенностей обучения математике в профильных классах, а именно, в использовании принципа системности и последовательности при обучении решению задач по геометрии.

Анализ анкетных данных и опыта учителей показал, что преподаватели математики следуют принципу системности и последовательности при обучении решению задач по геометрии.

Анализ анкет показал:

1. На вопрос «Придерживаетесь ли Вы принципа системности и последовательности при обучении решению геометрических задач?» были получены следующие ответы: «на уроке» - 90% (18 чел.), «в домашнем задании» - 90% (18 чел.), «в проверочных работах» - 90% (18 чел.).

2. На вопрос «Проводите ли вы уроки обобщения и систематизации геометрического матераила?» были получены следующие ответы: «при подготовке к контрольным работам», «при завершении изучения определенных разделов», «для выявления основных понятий, теорем изучаемого раздела».

3. На вопрос «Оцените, насколько задачный материл в учебнике геометрии подобран, учитывая принцип системности и последовательности?» были получены следующие ответы: больше 70% опрощенных ответили «задачный материал структурирован по принципу «от простого – к сложному» (по программе учебника Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича).

4. На вопрос «Как Вы реализуете принцип системности и последовательности при решении геометрических задач?» большинство учителей ответили следующим образом: «структурированность задачного материала по мере возрастания трудности».

5. На вопрос «Используете ли Вы в своей работе метод ключевых задач?» были получены следующие ответы: «данный метод является основным при конструировании системы задач», «в основном, использую метод аналогии».

На *поисковом этапе* эксперимента предлагается апробация системы заданий, представленных в диссертации. В 2014-2015 учебном году с учащимися 10 классов в МБУ СОШ №74 г.о. Тольятти.

Обучающий этап эксперимента будет включать систему заданий по геометрии и реализации программы элективного курса, представленной выше.

Выводы по второй главе

В результате проведенного исследования были сделаны следующие выводы и получены результаты:

1. Применение принципа системчности и последовательности при обучении решению задач по геометрии позволяет каждому ученику: а) овладеть минимумом знаний общеобразовательной программы;

б) систематизировать эти знания.

2. Представлена подборка задач по темам «Прямые в пространстве», «Прямая и плоскость в пространстве» и «Плоскости в пространстве» с учетом требований, предъявляемых к разработке систем задач при обучении геометрии в профильных классах.

3. Разработан элективный курс «Скрещивающиеся прямые в пространстве » для учащихся профильных классов.

Заключение

В результате проведенного исследования были сделаны следующие выводы и получены результаты:

1. Выполнен анализ различных подходов к построению систем задач по геометрии, исходя из темы исследования. В процессе обучения геометрии методически верно предложенная система задач способствует выработке у учащихся прочных геометрических знаний и умений, осознанному восприятию материала по изучаемой теме.

2. Принцип системности и последовательности при обучении геометрии в профильных 10-11 классах предполагает усвоение геометрических знаний в определенной последовательности, логически построенной системе изложения изучаемого геометрического материала. Придерживаясь принципа системности и последовательности изложения и изучения стереометрии можно выдвинуть ряд требований к построению урока по геометрии: 1) каждый урок - это логическое продолжение предыдущего; 2) необходимо начинать с простого и постепенно, усложняя последующий материал; 3) в каждой теме следует выделить главные понятия, структурируя материал урока; 4) верно организовывать количество, периодичность упражнений и повторения изучаемого материала.

3. Представлена подборка задач по темам «Прямые в пространстве», «Прямая и плоскость в пространстве» и «Плоскости в пространстве» с учетом принципа системности и последовательности при обучении геометрии в профильных классах.

5. Применение принципа системности и последовательности в обучении геометрии учащихся 10-11 классов, заключающегося в логическом построении теоретического и задачного материала, позволяет учащимся: 1) развивать интерес к предмету; 2) проявлять интеллектуальную активность; 3) вырабатывать умение решать геометрические задачи различного уровня сложности. (Научиться лучше решать задачи по курсу геометрии, используя

разнообразные методы, умение видеть наиболее рациональный способ решения задачи.)

6. Разработан элективный курс «Скрещивающиеся прямые» для учащихся 10-11 профильных классов.

Сделанные выводы дают основания полагать, что гипотеза исследования экспериментально подтверждена, все поставленные задачи исследования решены.

Список литературы

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – М. : Просвещение, 2009. – 255 с.

2. Балаян Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ: 10-11 классы / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д : Феникс, 2013. – 217 с.

3. Балаян Э.Н. Математика. Задачи типа С2. Геометрия. Стереометрия / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д : Феникс, 2014. – 248 с.

4. Бескин Л.Н. Стереометрия. Пособие для учителей средней школы. М.: Издательство «Просвещение», 1971.

5. Голуб Б.А. Основы общей дидактики. Учеб. пособие для студ. педвузов. - М.: Владос, 1999. - 96 с.

6. Дразнин И. Е. О выборе последовательности упражнений / И. Е. Дразнин // Математика в школе. – 1990. – № 5. – С. 43.

7. Дюмина Т.Ю. Конструирование систем математических задач в зависимости от поставленных дидактических целей / Т. Ю. Дюмина // Известия ВГПУ. – 2006.

8. Калинин А.Ю., Терешин, Д.А. Стереометрия 10. – М.: Издательство МФТИ, 1996. – 256 с.

9. Ковалева Г.И. Методика использования систем задач, сконструированных методом «снежного кома» на уроках геометрии / Г.И. Ковалева // Вестник ТГПУ. – 2010. – № 2. – С. 78 – 81.

10. Ковалева Г.И. Варьирование как метод построения систем задач по математике / Г.И. Ковалева // Ярославский педагогический вестник. – 2009. – № 4. – С. 51 – 55.

11. Колягин Ю.М. Методика преподавания в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

12. Колягин Ю.М. Методика преподавания в средней школе. Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.
13. Ляпин С.Е. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С. А. Гастева, Б. И. Крельштейн, С. Е. Ляпин, М. М. Шидловская Пособие для учащихся– М.: Просвещение, 1965. – 730 с.
14. Мишин В.И. Методика преподавания в средней школе: Частная методика: Учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физ. –мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин– М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
15. Модонова М. В. Конструирование систем математических задач / М. В. Модонова // Интеграция образования. – 2009. – № 4. – С. 99 – 102.
16. Моисеева М.Ю. Подходы к конструированию математических задач как основы для создания их систем / М. Ю. Моисеева // Известия ВГПУ. – 2009.
17. Пойа Д. Как решать задачу / Д. Пойа. — М. : Учпедгиз, 1961. – 208 с.
18. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: учебник для классов с углубленным и профильным изучением математики. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2011. – 223 с.
19. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2004. – 256 с.
20. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич «Геометрия. 10 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочкин. – М.: Дрофа, 2004. – 224 с.
21. Потоскуев Е.В. Начала метрической стереометрии. О расстояниях в пространстве / Е.В. Потоскуев // Математика в школе – 2010. - №8. –С. 15 – 25.
22. Потоскуев Е.В. Эффективные помощники «вхождения» в метрическую стереометрию / Е.В. Потоскуев // Математика (еженедельное приложение к газете "Первое сентября"). – 2010. - №22. – С. 27 – 35.

23. Потоскуев Е.В. Решение задач по стереометрии. Практикум. Подготовка к ЕГЭ. – М.: Илекса, 2012. – 108 с.
24. Потоскуев Е.В. Решение разноуровневых задач по геометрии. Подготовка к ЕГЭ. – М.: Илекса, 2014. – 271 с.
25. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: учебник для классов с углубленным и профильным изучением математики. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2004. – 368 с.
26. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2004. – 240 с.
27. Потоскуев Е.В. Прямые и плоскости в координатах / Е.В. Потоскуев // Математика (еженедельное приложение к газете "Первое сентября"). –2012, № 6.- С.22-23.
28. Рыжик В.И. Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах / В.И. Рыжик. // Математика для школьников – 2008. - №3. – С.9-22.
29. Рыжик В.И. Угол между прямой и плоскостью / В.И. Рыжик. // Математика для школьников – 2010. - №2. – С.11-19.
30. Рыжик В.И. Немного о расстояниях и скрещивающихся прямых / В.И. Рыжик. // Математика в школе – 2008. - №5. – С.78-79.
31. Скопец З.А. Геометрия: учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. / под ред. З.А. Скопеца. – М.: Просвещение, 1981. – 251 с.
32. Смирнова И.М. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2008. – 288 с.
33. Смирнова И.М. Геометрия. Расстояния и углы в пространстве: учебно-методическое пособие / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 158 с.
34. Смирнов В.А. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с.

35. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 10-11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. заведений. – М.: Дрофа, 1999. – 208 с.
36. Черкасов Р.С., Столяр А.А., Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1985. – 336с.
37. Шлыков В.В. Геометрия: учеб. пособие для 11-го Кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / В.В. Шлыков. – 2-е изд. – Минск : Нар. асвета, 2008. – 175 с.