МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

РАЗВИВАЮЩИЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ОСОЗНАННОСТИ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Направление подготовки магистра: 44.04.01 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математическое образование*

Студент О.А. Евтеева ___________

Научный
Руководитель: д.п.н., проф. Н.С. Симонова ___________

Руководитель программы: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

Допустить к защите
Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ____________

«______» ______________2016 г.

Тольятти - 2016

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных проблем современного образования является повышение качества знаний, что требует поиск путей совершенствования методов и средств обучения, обеспечивающих глубокое и прочное усвоение знаний умений, активизация познавательной деятельности учащихся.

По мнению большинства дидактов осознанность знаний является наиболее важной характеристикой качества знаний учащихся, которая предполагает понимание учащимися связей между знаниями, путей получения знаний, умение их доказать, применять в различных ситуациях [9,11,14,16].

Традиционная система образования характеризуется тем, что учителя реализуют в основном *информативную функцию* знаний, оставляя в стороне другую, не менее значимую, *развивающую.* Как отмечает И.С. Якиманская, образованность, т.е. научная информированность, и развитость мышления далеко не одно и то же [94, С.18]. В связи с переходом современного образования на новые образовательные стандарты (ФГОС) [86], приоритетной задачей обучения в общеобразовательной школе является развитие учащихся, это означает, не только владение школьников знаниями и умениями, но и их активное использование для преобразования действительности. В связи с этим проблема осознанности знаний становится особенно актуальной.

Ссылаясь на ФГОС, заметим, что потребности современного общества выражаются в воспитании личностей, обладающих качественными, *осознанными знаниями* и имеющими богатый опыт творческой деятельности. Исследования в области дидактики и психологии, позволили выявить взаимосвязи между этими понятиями [3,14]. По мнению, М.Н. Скаткина, В.В. Краевского и других авторов [13,14,43], одним из важнейших проявлений *осознанности* служит умение применять знания в нестандартных ситуациях. Также, опираясь на исследования психологов и дидактов, можно утверждать, что решение задач, служит одним из средств овладения системой знаний и в то же время способствует развитию самостоятельного творческого мышления» [14, С.123].

А.Н. Колмогоров отмечал, что «даже простейшие математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так что сам учащийся видит, как можно было прийти к ним самостоятельно» [46, С.3]. Способность учащихся самостоятельно приобретать новые знания и использовать их в учебной и практической деятельности является показателем развитости, обучение не может считаться правильно – ориентированным и протекать успешно, если у школьников не формируется система умений и навыков учебного труда, культура мышления.

В методике преподавания математики приводятся исследования [16,22,29,73,81,89], рассматривающие задачи, с развивающими функциями, в которых показано влияние развивающих задач на качество знаний учащихся. Однако, идея того что развивающие задачи, выступают средством формирования осознанности знаний, не отражена в исследованиях.

Таким, образом, существует ***противоречие*** между возможностями развивающих задач в повышении осознанности знаний, отмеченных дидактами [11,17,20,36,47,51,80], и отсутствием исследований в теории методики обучения математике, посвященных данной теме.

Актуальность настоящего исследования обусловлена недостаточной изученностью вопросов повышения осознанности знаний по математике учащихся общеобразовательной школы при решении развивающих задач.

Объект исследования: процесс обучения математике в 10-11 классах общеобразовательной школе.

Предмет исследования: использование развивающих задач по математике в формировании осознанных знаний учащихся общеобразовательной школы.

Проблема исследования: раскрытие возможных путей формирования осознанности знаний учащихся в процессе решения развивающих задач по математике.

Цель исследования: разработка наборов развивающих задач по математике для учащихся общеобразовательной школы как средства формирования осознанности знаний учащихся.

Гипотеза исследования: если в процессе обучения математике учащихся общеобразовательной школы использовать специально созданный набор развивающих задач, то это будет способствовать:

– *осмыслению и переосмыслению (рефлексии) изучаемого материала;*

– *развитию творческих способностей учащихся, а также познавательного интереса к предмету;*

– *формированию самостоятельности в поиске решения задачи, применению имеющихся знаний учащихся в незнакомой ситуации.*

Для достижения цели исследования и проверки выдвинутой гипотезы были поставлены и решены следующие ***задачи:***

1) Проанализировать психолого-педагогическую и методическую литературу с целью изучения понятий «развивающее обучение», «развивающие задачи», «осознанность знаний», «пути формирования осознанности знаний»;

2) Выявить критерии и содержание задач, формирующих осознанность знаний учащихся;

3) Провести сравнительный анализ результатов единого государственного экзамена по математике (ЕГЭ), на основе результатов определить распространенные недостаточно осознанные знания учащихся, установить их причины;

4) Разработать набор развивающих задач по математике для учащихся общеобразовательной школы, с учетом выявленных недостатков в знаниях учащихся;

5) Проверить на этапе констатирующего эксперимента влияние развивающих задач по математике на формирование осознанности знаний учащихся общеобразовательной школы.

В ходе исследования были использованы различные методы:

– теоретический анализ психолого-педагогической литературы и методической литературы по проблеме исследования;

– организация и проведение констатирующего этапа эксперимента;

– наблюдение за учащимися;

– беседы с учителями.

Научная новизна и теоретическая значимость проведенного исследования:

– Обосновано положение о том, что развитие способностей к осмыслению и переосмыслению важно как для решения развивающих задач, так и для повышения осознанности знаний;

– Определена совокупность недостаточно осознанных знаний учащихся по математике, выявленных на основе результатов единого государственного экзамена по математике учащихся;

– Показано, что осознанность знаний учащихся по математике формируется в процессе решения развивающих задач, а также в процессе творческой деятельности.

Основные этапы исследования:

9 семестр (2014/2015 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных и вузовских учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

10 семестр (2014/2015 уч.г.): уточнение объекта, предмета, цели, задач исследования, формулирование научной гипотезы; определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации; разработка наборов развивающих задач для учащихся 10-11 классов как средства формирования осознанных знаний учащихся общеобразовательной школы;

11 семестр (2015/2016 уч.г.): описание технологии творческих мастерских как одной из форм организации обучения математике по формированию осознанных знаний учащихся 8-11 классов на примере изучения темы «Принцип Дирихле», выполнение методического проекта по теме «Принцип Дирихле».

12 семестр (2015/2016 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Практическая значимость исследования:

Разработан набор развивающих задач по математике для учащихся 10-11 классов общеобразовательной школы, направленный на формирование осознанности знаний учащихся общеобразовательной школы.

На защиту выносятся наборы развивающих задач по математике для учащихся 10-11 классов общеобразовательной школы.

Апробация результатов исследования осуществлена путем выступлений на: научно-методических семинарах преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ (декабрь 2014, июнь 2015, декабрь 2015, май 2016); III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в средней и высшей школе» (к 75-летию профессора Е.В. Потоскуева, ТГУ, ноябрь 2014); VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (ТГУ, 27-29 апрель 2015).

Экспериментальная проверка предлагаемых результатов была осуществлена в период педагогической и научно-исследовательской практик на базе кафедры алгебры и геометрии Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе ГБОУ СОШ №953 г. Москвы.

Основные результаты исследования отражены в *2* публикациях.

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы (93 наименования).

ГЛАВА I. «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИВАЮЩИХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ОСОЗНАННОСТИ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ»

§1. Осознанность как показатель качества математических знаний учащихся

1.1. Подходы к понятию осознанности

Проблемой формирования и выявления качеств знаний учащихся занимались многие авторы. В шестидесятые-семидесятые годы этот вопрос разрабатывался Б.П. Есиповым, М.А. Даниловым, в дальнейшем – М.Н. Скаткиным, И.Я. Лернером и другими исследователями.

Понятие осознанности может быть рассмотрено с двух позиций.
Во-первых, осознанность выступает как один из принципов дидактики. Этот принцип был сформулирован в шестидесятые годы в работах Б.П. Есипова, Ш.И. Ганелина, И.Я. Лернера, и других [36,43]. По их мнению, осознанные знания заключаются в ясном и полном понимании изучаемого материала. Учителем и учениками во что бы ни стало должно быть обеспечено понимание точного смысла каждого термина, каждой теоремы, каждого правила, данный принцип построен на сознательном отношении к учению.

Во-вторых, понятие осознанности неразрывно связывают с качеством полученных знаний, при этом осознанность считается одной из характеристик качества знаний. М.Н. Скаткин и В.В. Краевский, сторонники этого же подхода, отмечают, что самым важным и значимым результатом усвоения знаний является их осознание.

По мнению М.А. Данилова осознанность знаний выражается в понимании их связей и путей их получения, в умении их доказывать, в понимании принципа действия связей и механизма их становления [36].

Качество знаний как объект научных исследований представляет собой некую систему, имеющую ряд характеристик. Эти характеристики достаточно широко освещены в работах Б.П. Есипова, В.В. Краевского, И.Я. Лернера [36,51,52], отраженные в таблице 1.

Таблица 1

Качество знаний	**Характеристика качества знаний**
Полнота	Количество всех знаний об изучаемом объекте, предусмотренных программой
Глубина	Число осознанных существенных связей данного знания с другими, с ним соотносящимися
Оперативность	Готовность и умение ученика применять знания в сходных и вариативных ситуациях
Гибкость	Быстрота нахождения вариативных способов применения знаний при изменении ситуации
Конкретность и обобщенность	Конкретные проявления обобщенного знания и способности находить конкретные знания под обобщенные
Свернутость и развернутость	Умение, с одной стороны, выразить знание компактно, чтобы оно представляло видимый результат сжатия некоторой совокупности знаний, с другой – раскрыть систему шагов, ведущую к сжатию, свертыванию знаний
Систематичность	Осознание учеником состава некоторой совокупности знаний, иерархии их и последовательности, то есть осознание одних знаний как базовых для других
Осознанность	*Понимание связей между знаниями, умение их доказывать*
Прочность	Длительность сохранения знаний в памяти, воспроизводимость в необходимых случаях
Системность	Совокупность знаний в сознании учащихся, структура, которой соответствует структуре научной теории (элементы теории: понятия, основные положения и следствия, находятся в тесной связи)

Некоторые авторы не выделяют осознанность как особую характеристику, не считая ее важнее остальных, другие авторы, такие как М.Н. Скаткин, В.В. Краевский, Ш.И. Ганелин и др. наоборот выделяют осознанность как качество, преобладающее в обучении.

Среди работ исследователей также встречаются те, в которых осознанность не рассматривают как одно из качеств знаний, поскольку в работах авторы придерживаются мнения, о том, что осознанность, это качество, отражающее глубокие, полные знания, что учащийся способен перегруппировать и преобразовать материал, творчески применить описание законов и т.д. (рис. 1).

Рис.1

Н.Г. Демиденко считает, что осознанность проявляется в умении учащегося перегруппировать и преобразовать материал, творчески применить описание законов и т.д. [29].

«Осознанность» математических знаний учащихся можно рассматривать на трех различных уровнях, связанных с соответствующими умениями. *На первом уровне* данный показатель – знание связи между определениями понятий математических объектов, их свойствами и различными представлениями (аналитическими, графическими), предполагающее умение логически правильно определять каждый из видов знания, опираясь на его существенные признаки. *На втором уровне* – умение преобразовывать учебную информацию с помощью знаний связи между различными представлениями математических объектов для конструирования нового математического объекта. *На третьем уровне* – умение применять знания в новой ситуации и умение создавать новые связи, которые могут иметь форму вывода, следствия, гипотезы [93];

Е.Ю. Васюкова [16, С.8] выделила следующие *характеристики осознанности знаний* учащихся:

– развернутые аргументированные ответы учащихся,

– решение творческих задач,

– способность объяснять свои действия,

– использование знаний для объяснения фактов и явлений,

– планирование эксперимента и интерпретация его результатов,

– использование знаний в новых (незнакомых) ситуациях.

Наиболее очевидной формой выражения осознанности знаний является умение ученика излагать знания своими словами, менять порядок изложения при сохранении связей между отдельными его фрагментами, перестраивать изложение в зависимости от его цели, извлекать необходимые части целостного знания для ответа на изолированные вопросы. Другой формой выражения осознанности знаний является группировка и систематизация знаний в зависимости от вопроса, ответ на который прямо не излагается учителем или в учебнике, но данные для такого ответа были в той или иной форме представлены.

Особое место осознанности среди остальных выделенных качеств знаний обусловлено тем, что оно единственное качество, которое участвует в формировании всех трех интегративных качеств знаний (системности, действенности, прочности).

В своей работе, под *осознанностью знаний* примем определение, данное в педагогической энциклопедии: осознанность - осмысленность, насыщенность конкретным содержанием, четким представлением и пониманием изучаемых предметов, явлений и их закономерностей, умение не только называть и описывать, но где надо, и объяснять изучаемые факты, указывать их связи и отношения, обосновывать усваиваемые положения, делать выводы из них [64, С.119].

1.2. Проблема осознанности в методической литературе

Проблема повышения качества знаний по математике рассматривается в методической литературе, в основном, в двух направлениях. Первое направление касается собственно путей повышения качества знаний по математике, второе – способов контроля и учета знаний. В данном пункте освящёны вопросы первого направления, в нем показывается, как развивались представления о качестве знаний и его совершенствовании в методике математике.

При рассмотрении вопросов качества знаний методисты [20,28,43,47,52,76] редко выделяют отдельные характеристики, в основном, при обсуждении проблемы качества знаний, ведут речь о качестве вообще, о полноценных знаниях учащихся. Некоторые авторы, конкретизируя понятие «качество знаний», прибегают к таким характеристикам как, полнота, глубина, систематичность, прочность знаний, используя как итоговый результат усвоения. Работ, посвященных осознанности знаний по математике, встречается немного. Вместе с тем, Федеральный государственный стандарт требует от учащихся осознанных знаний, способов действий, в стандарте под осознанностью понимается «соответствие требуемым в программе умениям применять полученную информацию» [86].

В методике преподавания математики 60-70-х гг. [54] уделяется внимание качеству знаний, качество определяется глубиной, прочностью овладения школьниками системой математических знаний, умений и навыков, предусмотренных программой, степенью подготовки к самостоятельному овладению знаниями, главной целью обучения стало формирование у учащихся математического мышления. Отечественный психолог С.Л. Рубинштейн [19, С.92] выдвинул идею о способе развития сознания человека через разрешение познавательных проблем, содержащих в себе противоречия. Его идея лежит в основе проблемного обучения, проблемная ситуация в процессе обучения предполагает, что ученик хочет решить трудные для себя задачи, но ему не хватает данных и он должен сам их искать, такая ситуация стимулирует к поиску новых знаний и способов деятельности. К этому времени, конкретных рекомендаций повышения качества знаний в работах не содержится.

Основываясь на идее проблемного обучения, для выявления качеств знаний М.Н. Скаткин и В.В. Краевский [43] предлагают использовать метод учебных затруднений. Суть этого метода заключается в том, что для проверки наличия или отсутствия у учащихся качеств знаний используют задания, моделирующие различные типы учебных затруднений. Под затруднением будем понимать препятствие, возникающее в процессе деятельности в результате недостатка, несоответствия знаний, средств или способов их применения, противоречия в знаниях и ряда других причин. По характеру затруднения разделяют на проблемного и не проблемного характера. Преодоление затруднений является для учащихся стимулом в учебной деятельности [28,29].

На основе типологии учебных затруднений М.Н. Скаткина, В.В. Краевского и типологии задач Ю.М. Колягина [43, С.138] выявлены критерии отбора задач, ориентированных на формирование осознанности знаний учащихся общеобразовательной школы.

Критерии к системе задач на формирование осознанности знаний:

1) задачи, требующие от учащихся выбора из совокупности учебных действий одного в качестве ведущего, тренировочного типа;

2) предполагающие планирование предстоящей деятельности, выбора предполагаемых средств и способов её выполнения тренировочного, обучающего и поискового типов задач по Ю.М. Колягину.

3) задачи, в которых учащимся предлагается определить или предсказать результат предстоящего действия, определить или описать предполагаемые признаки или свойства этого результата, тренировочного, обучающего и поискового типов задач по Ю.М. Колягину;

4) творческого применения знаний и умений в новой для учащихся ситуации, обучающего, поискового и проблемного типов;

5) рефлексивные задачи, требующие рациональной и эмоциональной оценки выполненного действия, определения значимости полученного результата обучающего, поискового и проблемного типов.

Характеризуя содержательную сторону знаний, М.П. Барболин [12] рассматривает пары качеств «полнота и глубина», «осознанность и прочность», «систематичность и системность».

Для формирования осознанности автор предлагает использовать задачи на доказательство, в которых требуется показать, что объекты одного множества обладают характеристическими свойствами другого множества [12].

Отмечая, что осознанность знаний граничит с такой категорией, как понимание, В.А. Далингер, в качестве средства углубления понимания математического материала предлагает использовать рефлексивные задачи [31]. Под рефлексивными задачами, автор понимает задачи, направленные на формирование у учащихся умения проводить самостоятельный анализ процесса решения задач, умения рассматривать способы собственных действий. Отметим, что в классификациях задач с предложенных требованиями общими являются *задачи на «отыскание ошибок в предлагаемом решении»*, *задачи с избыточными и недостаточными данными, а также задачи включающие элементы исследования.*

Е.В. Васюкова и П.А. Оржековский [9] подчеркивают, что в заданиях на выявление осознанности знаний должна присутствовать доля неопределенности, в которой учащиеся должны самостоятельно установить связи между элементами содержания. При этом, учащиеся должны не только владеть теоретическим материалом, но и уметь применять полученные им знания в незнакомых ситуациях. Отмечается так же важность того, чтобы при выполнении заданий учащийся использовал теоретические знания для аргументации прогнозов, объяснения результатов эксперимента, явлений окружающей действительности. Авторами выявлены *требования к задачам на выявление осознанности знаний учащихся:*

1) соответствовать реальным проблемам, решаемым человеком в жизни;

2) включать стереотипные представления учащихся;

3) иметь несколько решений;

4) способствовать выявлению причинно-следственных связей, пониманию областей и границ применения знания.

Итак, в результате анализа методической литературы, был выявлен ряд требований к системе задач, формирующих осознанность знаний, обобщив их мы, выделили виды задач на формирование осознанности знаний, соответствующие требованиям М.Н. Скаткина, В.В. Краевского:

– *задачи на приведение примеров и контрпримеров;*

– *задачи на выявление ошибок и неточностей в рассуждениях, доказательствах и т.д.;*

– *задачи, с элементами исследования.*

Обращаясь к психологическим исследованиям, Г.И. Саранцев [77, С.31] предпринимает попытки выяснить каковы условия формирования осознанных математических знаний. Анализируя психологические исследования, он приводит выводы П.А. Шеварева [77, С.31], который установил следующие ***закономерности.***

Закономерность такова: ***если в процессе обучения выполняются три условия:***

1) Учащийся выполняет задания одинакового типа;

2) Некоторая особенность заданий неизменно повторяется;

3) Учащийся может получить верный ответ и в том случае, когда не осознает эту особенность.

то степень осознания данной особенности снижается.

Закономерность I.

Первая закономерность связна с тем, что выполнение первого из однотипных упражнений основывается на использовании соответствующего правила. При решении следующих упражнений обычно правила не вспоминают, происходит «механическая» работа, по применению алгоритма использования правила, Г.И. Саранцев формулирует гипотезу, что *для осознания некоторой особенности оптимальное число однотипных упражнений равно трем.*

Закономерность II.

Упрочение ошибочной ассоциации, возникающей в соответствии с отмеченной выше закономерностью **I**, начинается после выполнения трех однотипных упражнений.

Закономерность III.

Выполнение упражнения на овладение каким-либо действием в некоторой ситуации вовсе не обеспечивает успеха в применении этого действия в другой ситуации, отличной от рассмотренной ситуации.

Закономерность IV.

Упражнения на выполнение действия на материализованном этапе существенно не влияют на овладение этим действием на умственном этапе.

Закономерность V.

Если взаимно обратные действия изучаются раздельно, но в совокупность упражнений, выполнение которых требует прямых действий, следует включать упражнения на обратные действия. Этим достигается быстрое переключение мышление школьника с прямых задач на обратные и наоборот, исключается развитие инерции школьника.

Полученные закономерности были сформулированы и обоснованы автором экспериментальным путем.

В сочетании с приведенными закономерностями и выводами Г.И. Саранцев [77, С.45] предлагает следующие рекомендации, по формированию качественных осознанных знаний учащихся:

1) для решения задачи следует искать несколько путей, в некоторых случаях чередовать их по нескольку раз;

2) решение следует начинать с выдвижения интуитивной гипотезы;

3) проанализировать и осознать условие, вычленить отдельные элементы из требования и условия задачи;

4) в процессе решения задачи необходимо выполнять соотнесение мыслительных действий решающего с преобразованиями содержания задачи (схемы, чертежи, модели).

Таким образом, формирование осознанных знаний учащихся сложный процесс, направленный на преодоление препятствий при решении задач, путем творческого подхода, использования теоретических знаний в незнакомых ситуациях.

1.3. Пути формирования осознанности знаний учащихся

Осознанность знаний, по мнению М.Н. Скаткина, В.В. Краевского [43,С.79] стоит на вершине пирамиды качества знаний.

Осознанность знаний учащихся проявляется в умении решать задачи, творческого характера, то есть задачи, требующие творческого мышления учащихся. Так М.Н. Скаткин, И.Я. Лернер отмечали, что осознанность состоит в умении учащихся творчески применять свои знания в нестандартных ситуациях. Формирование осознанных знаний учащихся сложный процесс, направленный на преодоление препятствий при решении задач, путем применения *эвристических* приемов, использования теоретических знаний в незнакомых ситуациях.

Для формирования осознанности знаний учителя выработали немало средств и приемов обеспечения осознанности знаний (доказательность, раскрытие связей, механизма и процессов, построение схем и т.д.).

Обратимся к методам обучения, среди них выделяют *информационно-рецептивный, репродуктивный методы, метод проблемного изложения, эвристический, исследовательский методы* [54].

Первых двух методов достаточно для того, чтобы обеспечить усвоение готовых знаний, а также навыков и умений по образцу, однако владение данными методами не представляет возможностей для развития и воспитания творческих способностей учащихся, развития их инициативы.

Для формирования творческих способностей учащихся, для усвоения ими опыта творческой деятельности применяются три метода. Сущность *метода проблемного изложения* в том, что перед учащимися раскрывается доступный для них процесс познания, движения к этому решению в его противоречиях, аргументируется каждый шаг, обнаруживаются возникающие при этом «за» и «против» данного шага, иначе говоря, выявляется логика процесса и ход решения задачи. В то же время проблемное изложение, не может в достаточной мере формировать опыт творческой деятельности, необходимо включение в процесс обучения задач «по отдельным элементам». Поэлементное формирования опыта творческой деятельности осуществляется *эвристическим методом*, при котором учитель включает учеников в решение не всей проблемы, а только части ее. Этот метод реализуется в разных вариантах: учитель излагает фактический материал, а вывод просит сделать учащихся, ставит учеников перед необходимостью высказать гипотезу, обнаружить возможную альтернативную решения, построить план проверки гипотезы и т.д. Основной принцип, применяющийся в *эвристическом* методе обучения – «сохранять видимость игры, уважать свободу ребенка, поддерживая иллюзию (если таковая есть) его собственного открытия истины», «избегать в первоначальном воспитании ребенка опасного искуса злоупотреблением упражнениями памяти, ибо это убивает его врожденные качества, обучать, опираясь на интерес к изучаемому.

В свою очередь, эвристический метод, формируя только элементы опыта творческой деятельности, не позволяет научить школьников решать целостные творческие задачи. Общие творческие способности, призван развивать *исследовательский метод*, метод осуществляется при систематическом выполнении учащимися исследовательских заданий в виде кратких текстовых задач, проблемы и проблемные задачи должны составлять определенную систему и располагаться по степенно возрастающей сложности.

Последние три метода (*исследовательский, эвристический, метод проблемного изложения*) составляют методы проблемного обучения, призванные развивать творческие возможности учащихся, приучать их к творческому добыванию и применению знаний и умений, научить школьников методам научного познания [62, С.18].

Каждый из названных методов обучения, оказывает влияние на формирование осознанных знаний учащихся, эвристический метод предоставляет учащимся самостоятельность в осознании знаний, исследовательский и репродуктивный методы предполагает обоснованный ответ учителю, разъяснение товарищу, изложение и объяснение не знающему предмет человеку, составление плана, тезисов и др.

Творческие способности учащихся могут быть реализованы посредством задач, цель которых активизировать мыслительную деятельность, побудить к рассуждению, поиску закономерностей, то есть совершенствовать мышление учащихся.

Учитель организует процесс, активизирующий деятельность учащихся и развивающий не только память, но и восприятие, воображение, разные формы мышления. Со стороны учителя не остаются без внимания успехи и промахи, трудности и ошибки каждого ученика, разные точки зрения учащихся по обсуждаемой проблеме или задаче, их версии и предложения. Успешность решения таких задач зависит от уровня сотрудничества учителя и ученика, от овладения учеником системой умственных действий (сравнение, анализ, синтез и т.д.).

При решении развивающих задач, Н.В. Бордовская [18,19] ведет речь о специфике, при которой учитель:

– ставит вопросы и предлагает задания, не опасаясь «тупиковых» вариантов в работе учащихся;

– придерживается мнения, что учащийся не всегда должен уходить от педагога с сознанием полной разрешённости всех рассмотренных или затронутых вопросов и проблем; он должен думать, размышлять, искать самостоятельно ответ на учебные вопросы и после занятия;

– формирует убеждение, что понимаемое им сегодня может быть понято завтра иначе, более глубоко;

– предлагает во внешнем простом и привычном увидеть глубину, новые грани в явлении, событии, процессе;

– стремится вызвать у учащихся удивление интересному в привычном;

– вместе с учениками формулирует гипотезы, версии, обобщения при рассмотрении тех или иных фактов в контексте изучаемых явлений, событий или процессов.

Таким образом, мы считаем, что урок математики, построенный в сочетании с *эвристическим, исследовательским, репродуктивным методами и методом проблемного изложения* способствует формированию творческого мышления учащихся, служащего залогом качественных осознанных знаний.

§2. Развивающие задачи по математике и их роль в формировании осознанности знаний учащихся

2.1. Различные трактовки понятия задачи

Существуют различные трактовки понятия задачи. Так, Л. М. Фридман в книге [87] понимает под любой задачей требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче. Поэтому, приступая к решению какой-либо задачи, надо ее внимательно изучить, установить, в чем состоят ее требования (вопросы), каковы условия, исходя из которых надо решать задачу. Все это называется анализом задачи, проведем анализ задачи, согласно анализу автора.

Пример 1 [87]. *В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.*

Первое, что мы можем заметить при чтении этой задачи, состоит в следующем: в ней имеются определенные *утверждения и требования*. В ней утверждается, что «в прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см». Требование состоит в том, что нужно «найти катеты треугольника».

Часто требование задачи формулируется в виде вопроса. Но всякий вопрос предполагает требование найти ответ на этот вопрос, а поэтому всякий вопрос можно заменить требованием. Утверждения задачи называются условиями задачи.

То есть, первое, что нужно сделать при анализе задачи, - это расчленить формулировку задачи на условия и требования. Заметим, что в задаче обычно не одно условие, а несколько независимых элементарных (т.е. нерасчленимых дальше) условий; требований в задаче также может быть не одно. Поэтому необходимо расчленить все утверждения и требования задачи на отдельные элементарные условия и требования.

В данной задаче элементарными условиями являются:

1. Треугольник, о котором идет речь в задаче, прямоугольный;
2. В этот треугольник вписана окружность;
3. Точка касания окружности с гипотенузой делит ее на два отрезка;
4. Длина одного из отрезков – 5 см;
5. Длина другого отрезка равна 12 см.

Требование этой задачи можно расчленить на два элементарных:

1. Найти длину одного катета треугольника;
2. Найти длину другого катета треугольника.

Точка зрения на понятие задачи была высказана болгарским математиком – методистом И. Ганчевым [47], который представлял задачу (точнее, математическую задачу) как «последовательное выражение мысли, с помощью которого задается некоторое начальное подмножество R на данном множестве M математических объектов или соотношений и при этом требуется:

а) построить данное подмножество R конструктивно или описательно, или

б) установить как R задано на M через другие его подмножества, или в) показать, что объекты и соотношения из R можно получить посредством определенных правил, характеризующих некоторые чертежные инструменты, или

г) показать, что R совпадает с некоторым множеством R', которое считается известным».

Множество M автор называет областью решения задачи; подмножество $R \subseteq M$ – системой решения (ответов) задачи; последовательность мыслей, выраженную словесно или символически, с помощью которой задается M, свойства объектов из R и указание относительно искомого в R – текстом задачи (отличая в последнем ту часть, в которой выражено условие задачи от части в которой выражено ее заключение). Деятельность, с помощью которой выполняется требование, заданное текстом, - процессом решения задачи. Решение любой математической задачи представляется как последовательность переходов от некоторых множеств R_k, заданных на М, к множеству R^2.

Понимание понятия задачи И. Ганчевым является развитием подхода, характерного для исследований известного чехословацкого математика – методиста Я. Вишина, который также считает возможным дать определение любой математической задачи (имея в виду, характерные для традиционного школьного курса математики) в следующем виде. «Задача имеет место, если дано некоторое множество Q математических объектов, и на этом множестве требуется найти подмножество всех объектов, удовлетворяющих данным условиям или обладающих данными свойствами. Множество Q в этом случае назовем областью решения задачи», а способы выявления искомого подмножества R – системой решений задачи.

Модель задачи И. Ганчева – Я. Вишина, [47] оказывается действенной для всех традиционных задач школьного курса математики (на вычисление, построение и доказательство), что является несомненным ее достоинством.

Согласно А.Н. Леонтьеву задача – «это цель, данная в определенных условиях», и хотя автор в своем определении явно не связывает понятия *про-*

блемной[1] ситуации и *задачи*[2] в его определении нетрудно обнаружить существо дела: определенные условия существования задачи есть не что иное, как осознание субъектом проблемности некоторой ситуации; указание к ее разрешению (цель) приводит к возникновению задачи, как таковой.

Исследование по анализу различных трактовок понятия задачи было проведено Г.А. Баллом [11].

Автор рассматривает задачу как некоторую ситуацию, в которой оказывается и должен действовать субъект. При этом он выделяет три возможных подхода к характеристике этого понятия.

1) Задача представляет собой определенную ситуацию, требующую от субъекта некоторого действия (такие задачи именуются им просто задачами);

2) Задача представляет собой определенную ситуацию действия направленного на нахождение неизвестного посредством его существующей связи с известным;

3) Задача представляет собой такую ситуацию, в которой от субъекта требуется отыскать действие, направленное на установление связи неизвестного с известным, в условиях, когда субъект не владеет способом (алгоритмом) этого действия.

Ю.М. Колягин [46] рассматривает систему *S – P – человек – задачная система*, где под последней автор понимает объект, также представляющий систему. Если человеку, вступившему в контакт с системой *P* известны все элементы множества и известны все свойства элементов и отношения между ними, достаточные того, чтобы он мог считать множество *P* системой, то такую систему *P* будем называть *стационарной* по отношению к данному человеку. Автор считает стационарной относительно данного человека и всякую систему *P*, с которой у него не возникло контакта. Если субъекту неизвестен хотя бы один элемент, одно свойство или отношение, определенные в

[1] ситуация в которой необходимо … «найти новые (открыть или усвоить), ранее известные знания или способы действия», [11, с. 193]

[2] задача есть «способ знакового предъявления задания одним человеком другому (или самому себе), включающий указания на цель и условия ее достижения» [11, с.189]

P, необходимые для того, чтобы он мог считать P системой, то такую систему называют *проблемной* по отношению к данному субъекту. Так, уравнение $478 \cdot x = 97034$ является проблемной системой для учащихся, незнакомых с операцией умножения.

По его мнению, при наличии каким бы то ни было образом выраженной потребности и возможности в установлении неизвестных данному человеку элементов, свойств и отношений из множества *P*, проблемный характер которого зафиксирован, последнее становится *задачей* для данного субъекта. Указанная выше потребность нередко выражается в форме специального целевого указания, связанного с множеством P и указывающего одновременно на проблемность системы *P* и на желательность или необходимость ее устранения. Так, например, уравнений 123+2x = 197 становится задачей, если оно сопровождается целевым указанием «Решить уравнение».

Таким образом, во всех рассмотренных подходах понятие задачи является понятием, отражающим *определенное взаимодействие субъекта с внешним миром (объектом)*, при этом подход Ю. М. Колягина, в полной мере раскрывает характер задачи, как сложной системы, состоящей из взаимосвязанных частей.

2.1. Развивающие задачи по математике как инструмент развивающего обучения

Проблеме классификации задач в методической, психологической литературе посвящено немало работ.

По мнению Г. И. Саранцева [76, С.123] в методике обучения математике многие годы была распространена классификация основу, которой составлял характер требования:

а) задачи на доказательство;

б) задачи на построение;

в) задачи на вычисление.

Длительный успех этой классификации обеспечивало то, что она в какой-то степени предопределяла метод решения каждого типа задач. В связи с расширением целей обучения и роли задач в их обеспечении в школьный курс математики начали проникать задачи, не укладывающиеся в традиционную типологию.

К.И. Нешков, А.Д. Семушин функции задач в обучении подчеркивают в следующей классификации [60]:

а) задачи с дидактическими функциями;

б) задачи с познавательными функциями;

в) задачи с развивающими функциями.

Данная классификация позволяет обоснованно осуществлять отбор задач, хотя на практике дольно трудно отделить друг от друга указанные типы задач. Задачи с дидактическими функциями предназначены для усвоения теоретического материала, в процессе решения задач второго типа учащиеся углубляют теорию и методы решения задач, задачи третьего типа характеризуют то, что их содержание может отходить от основного курса математики, посильно осложнять изученные раннее вопросы курса.

В рамках темы диссертации более подробно остановимся на *задачах с развивающими функциями.*

Реализация развивающей функции обучения требует от учителя не просто излагать знания в определенной системе, а посредством знаний учить школьников мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже известные. Учащихся надо целенаправленно обучать познавательной деятельности, вооружать их учебно-познавательным аппаратом.

С.Л. Рубинштейн отмечал, что процесс накопления знаний и умений следует рассматривать как учение, а процесс приобретения способностей - развитием. [74, С.221]. Степень развитости измеряется и оценивается его способностью самостоятельно приобретать новые знания и использовать в учебной и практической деятельности уже полученные. Вот почему целью общего среднего образования является воспитание у учащихся активности и учебной самостоятельности. Обучение не может считаться правильно ориентированным, если у учащихся не формируется система умений и навыков учебного труда, культура мышления.

По мнению В.А. Далингера [32, С.4] обучение школьников доказательству теорем упирается во все те же пресловутые «вооружения учащихся умениями и навыками умственного труда», «развитие самостоятельности мышления», «развивающие функции обучения» и т.п. «оживить» эти термины, предполагает реализация в процессе обучения деятельностного подхода.

К реализации деятельностного подхода [34, С.71] приступили в 2000 г., ассоциация «Школа 2000…», представляемая Л.Г. Петерсон совместно с Академией ПК и ПРО (г. Москва). В рамках подхода утверждается, что деятельностные способности формируются у обучающегося лишь тогда, когда он не пассивно усваивает новое знание, а включен в самостоятельную учебно-познавательную деятельность. В.В. Давыдов отмечает, что «именно понятие деятельности может быть той исходной абстракцией, конкретизация которой позволит создать общую теорию развития общественного бытия людей и различные частные теории его отдельных сфер» [49, с.14].

С точки зрения Л.Г. Петерсон [65], исторический процесс развития школы наглядно отображает схема (рис.2).

В основу деятельностного подхода вошла *система развивающего обучения*, согласно которой в процессе обучения реализуются следующие *принципы:*

1) Принцип деятельности заключается в том, что формирование личности ученика и продвижение в его развитии осуществляется не тогда, когда он воспринимает готовое знание, а в процессе его собственной деятельности, направленной на «открытие» им нового знания.

Рис.2

2) Принцип непрерывности означает такую организацию обучения, когда результат деятельности на каждом предыдущем этапе обеспечивает начало следующего. Непрерывность процесса обеспечивается инвариантностью технологии, а также преемственностью между всеми ступенями обучения содержанию и методиками.

3) Принцип целостного представления о мире означает, что у учащегося должно быть сформировано обобщенное и целостное представление о мире (природе – обществе - самом себе), о роли и месте каждой науки в системе наук.

4) Принцип минимакса заключается в том, что школа предлагает каждому обучающемуся содержание образования на максимальном (творческом) уровне и обеспечивает его усвоение на уровне социально безопасного минимума (государственного стандарта знаний).

5) Принцип психологической комфортности предполагает создание в школе и на уроке доброжелательной атмосферы, ориентированной на реализацию идей педагогики сотрудничества.

6) Принцип вариативности предполагает развитие учащихся вариативного мышления, то есть понимания возможности различных вариантов

решения проблемы, формирование к систематическому перебору вариантов и выбору оптимального варианта.

7) Принцип творчества предполагает максимальную ориентацию на творческое начало в учебной деятельности школьников, приобретение ими собственного опыта творческой деятельности.

В.А. Далингер и Н.В. Толпекина [35, С.41] подчеркивают, что в условиях развивающего обучения исследовательский метод играет решающую роль в развитии творческих способностей до уровня, обеспечивающего дальнейшее саморазвитие каждого ученика в зависимости от его природных задатков и усердия.

Н.И. Зильберберг [39] рекомендует в плане каждого урока выделять отдельным пунктом исследовательские задания школьников и указывает несколько путей привлечения учащихся к исследовательской деятельности: работу с утверждениями следует строить по специальной схеме; полезна работа со статьями из журналов и книг; следует организовывать самостоятельное открытие теорем и получать новые признаки изученной фигуры.

Анализ этапов исследования решения задачи, выделяемых разными авторами Г.К. Муравиным, М.Д. Касьяненко, А.Е. Захаровой, Г.Б. Лузиной, Б.Е. Райковым показал, что главными и обязательными из них являются три, которые и образуют основную структуру учебного исследования (рис.3).

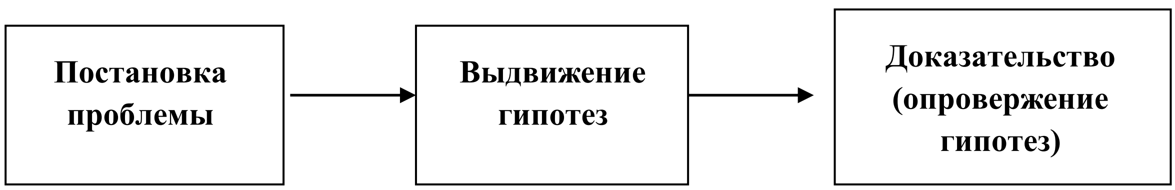


Рис.3

В.А. Далингер и Н.В. Толпекина [35, С.60] приводят пример мини-исследования «Сумма расстояний» из цикла заданий, содержащих уравнения и неравенство с модулем, одно из которых, на решение уравнений с модулем.

Пример [30, С.60]. *Решите уравнение*: $|x-10|+|x-2|=8$.

Занимаясь исследованием, учащиеся должны вывести положение о том, что уравнение сводится к нахождению всех точек числовой оси, для которых сумма расстояний от точек 10 и 2 равны 8. Любая точка отрезка [2;10] обладает этим свойством, а для любой точки вне этого отрезка сумма расстояний больше 8.

Научным руководителем проекта «Школа 2000…», в системе которого Л.Г.Петерсон разработала деятельностный метод, является доктор физико-математических наук, профессор Г.В. Дорофеев. В соответствии с этим методом главной задачей обучения математике становится не изучение основ математической науки, а общеинтеллектуальное развитие – формирование у учащихся качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе, для динамической адаптации человека к этому обществу [37, С.79].

Из всего вышесказанного следует, что в настоящее время в современной школе обучение в значительной степени строится по формуле:

«усвоение = понимание + запоминание»,

в основу же должна быть положена следующая формула:

«овладение = усвоение + применение знаний на практике»,

которая в полном объеме реализуется в процессе восприятия, осмысления, применения, обобщения и систематизации.

2.3. Развивающие задачи по математике в методической литературе

Задачи с развивающими функциями, с точки зрения, Ю.М. Колягина [47], формируют у учащихся:

1) владение известными методами научного познания как методами изучения (умение эффективно использовать при изучении наблюдение, сравнение, опыт, анализ и синтез, обобщение и специализацию, абстрагирование и конкретизацию);

2) способность к умозаключениям индуктивного и дедуктивного характера (в частности, умение правильно пользоваться аналогией и интуицией);

3) умение правильно ставить мысленный и практический эксперимент, высказывать гипотезы и проверять их;

4) умения осуществлять простейшие моделирования учебных ситуаций и использовать имеющиеся (или сконструированные) модели для изучения свойств объектов (построение и использование графиков, диаграмм, рисунков, схем и т.д.);

5) умение классифицировать изучаемые объекты, систематизировать уже имеющиеся знания, устанавливать причинно-следственные и структурные связи между ними;

6) умение осуществлять выбор средств и методов для достижения поставленной цели, учитывая конкретные условия; умение выделить главное;

7) умение усматривать связь изучаемого материала с окружающей жизнью, с практической деятельностью людей, оценивать практическую значимость изучаемого материала;

8) владение основными качествами, присущими научному мышлению (гибкость, оригинальность, широта, глубина, критичность, ясность и четкость речи и записи и т.д.);

9) обладать избирательной и прочной памятью и умением воспроизводить в памяти важнейшие положения из изученного материала.

Е. И. Лященко *развивающими задачами или задачами с развивающими функциями* считает:

- задачи, для решения которых не требуются новые знания по предмету, надо применять имеющиеся знания в иной комбинации;

- задачи, с помощью и на основе которых приобретаются знания по предмету [76].

По мнению К.И. Нешкова, А.Д. Семушина [60], развивающие задачи - это «задачи, содержание которых может отходить от основного курса математики, посильно осложнять некоторые из изученных ранее вопросов школьной программы; запоминание и усвоение этого материала всеми учащимися необязательно. При решении этих задач ученику недостаточно применять изученные теоретические сведения или уже известные методы решения задач, а необходимо проявить выдумку и сообразительность».

Автор пособия «Развивающие задачи на уроках математики в V-VIII классах» Т.Н. Миракова [55, С.5] под развивающими задачами понимает задачи, направленные на развитие умственных способностей школьников. Для решения таких задач необходимо владение эвристическими приемами, как общего, так и конкретного характера. По мнению автора, систематическая работа с этими задачами на уроках математики будет способствовать как более глубокому усвоению знаний, так и закреплению умений пользоваться эвристическими приемами. В ее пособии выделено 38 эвристических приемов и их применение на конкретных задачах, направленных на развитие логико-лингвистических способностей учащихся. Задачи, представленные в пособии, вполне посильные всем без исключения учащимся, независимо от их различий в уровне интеллектуального развития и математической подготовки, но также включены задания повышенной трудности, предназначенные для ребят, проявляющих повышенный интерес к математике.

Н.Б. Истомина [42] анализируя учебно-методический комплект по математике для 5-6 классов говорит, о целенаправленном развитии мышления всех учащихся в процессе усвоения программного содержания. Критериями развития мышления является сформированность таких приемов умственной деятельности, как анализ и синтез, сравнение, аналогия, классификация и обобщение. По мнению, психологов, овладев этими приемами, ученики становятся более самостоятельными в решении учебных задач и могут рационально строить свою деятельность, направленную на усвоение знаний, умений и навыков. У Н.Б. Истоминой задачи, развивающие задачи, выступают в роли проблемных задач. В процессе решения задачи, перед учащимися возникает неизвестное, которое должно быть раскрыто. Главный механизм этого «открытия» - образование новых связей, так как неизвестное ученику свойство, отношение, закономерность, способ действия раскрываются только через установление связей с уже известными. При решении проблемных задач ученик повторяет ранее изученный материал, активно мыслит, и наконец, сам формулирует новую задачу и решает ее. Итак, учебники математики 5-6 классов разработанные Н.Б. Истоминой представляют систему задач, нацеленных на развитие мышления, в процессе которого школьники усваивают знания, умения и навыки и овладевают приемами умственной деятельности.

Н.П. Кострикина [48] в своей книге называет главной целью задач – развитие творческого и математического мышления, заинтересованность учащихся математикой, приведение их к «открытию» математических фактов. Достижение этой цели Н.П. Кострикина видит в рассмотрении, как на уроках, так и во внеклассной работе задач, направленных на воспитание у учеников устойчивого интереса к изучению математики, творческого отношения к учебной деятельности математического характера. Осуществляя целенаправленное обучение школьников решению задач, следует учить их наблюдать, пользоваться аналогией, индукцией, сравнениями и делать соответствующие выводы. Необходимо прививать навыки не только логического рассуждения, но и прочные навыки эвристического мышления.

В школьных учебниках математики (и не только ныне действующих), отмечает автор, мало задач, с помощью которых можно показать учащимся роль наблюдения, аналогии, индукции, эксперимента.

С целью развития у учащихся навыков эвристического мышления полезно предложить, например, следующую задачу: «Может ли: а) сумма пяти последовательных натуральных чисел быть простым числом; б) сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел быть простым числом?» [48, С.59]. Иногда для развития навыков эвристического мышления целесообразно несколько изменить условия задач, встречающихся в школьных и других учебниках. Так, вместо задачи «Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть квадратом натурального числа» [48, С.64] полезно предложить учащимся следующую задачу:

«Может ли сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел быть квадратом натурального числа?» В таком случае учащиеся индуктивным путем должны сами сформулировать соответствующую гипотезу и только после этого ее доказывать. Вместо задачи «Докажите, что многочлен $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ не принимает отрицательных значений» [48, С.72] полезнее для развития навыков эвристического мышления предложить следующую задачу: «Может ли многочлен $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ принимать отрицательные значения?». Прежде чем давать учащимся задачу: «Доказать, что если из трехзначного числа вычесть трехзначное число, записанное теми же цифрами, что и первое, но в обратном порядке, то модуль полученной разности будет делиться на 9 и 11» [48, С.75], следует предложить им установить (с помощью индукции), каким свойством обладает рассматриваемая разность (делится на 9,11, 99), и только после этого доказать закономерность, подмеченную на частных примерах, в общем виде.

По нашему мнению, задачи с развивающими функциями не должны быть объектом изучения, но это не означает, что они превращаются в задачи, необязательные для решения. Их решение не доводится до навыка, учащиеся – каждый по мере своих возможностей – должны просто решать эти задачи. Развивающие задачи, в основном предназначены для развития мышления учащихся, однако учитывая различные способности учащихся, необходимо понимать, что не каждый ученик сможет решить подобную задачу, сумеет достаточно глубоко разобраться в некоторых готовых решениях. Также развивающие задачи следует использовать в тесной связи с изучаемым материалом и представлять посильные для учащихся трудности. Причем, наибольшую пользу эти задачи приносят тогда, когда они решаются без предварительной подготовки и достаточно разнообразны по содержанию и способам решения.

Задачи с развивающими функциями не пользуются популярностью у многих учителей по ряду причин. Обучение их решению требует большого напряжения со стороны учителя и не сразу дает внешне заметные результаты. Кроме того, эти важные результаты обучения довольно трудно выявить самому учителю (одну задачу решила одна группа учащихся, с другой справилась другая группа, и учитель постоянно испытывает тревогу). Однако, при систематической работе по решению развивающих задач уже через 1-2 месяца заметны успехи учащихся. [81, С.82].

Итак, под развивающими задачами будем понимать такие задачи, которые направлены на *развитие творческого и математического мышления* учащихся, а именно *задачи, обучающие умению вести поиск, открывать, доказывать утверждения и теоремы*. Такие задачи, призваны формировать у учащихся познавательные действия, учить применять их в нужных ситуациях.

§3. Направления обучения решению развивающих задач по математике

В исследованиях методистов и преподавателей совершенно ясно изложена идея о необходимости обучения учащихся решению развивающих задач, начиная с первой ступени обучения учащихся.

В частности, В.А. Далингер [32], разработавший методику обучения учащихся доказательству математических предложений, считает, что работа по обучению учащихся решению задач на доказательство должна начинаться задолго до того, как начнут явно изучаться теоремы.

Поскольку в основе решения составленного набора развивающих задач лежат такие умения, как оперирование понятиями, работа с текстом утверждения, рассуждения, работа с чертежом, выбор необходимых знаний для выведения следствий, то пропедевтика обучения решению развивающих задач должна строиться вокруг перечисленных умений.

В рамках выделенных нами *видов развивающих задач на формирование осознанности знаний учащихся*, необходимо вести работу по формированию у учащихся следующих умений [32, С.42].

– *подмечать закономерности*;

– *пользоваться примерами и контрпримерами;*

– *выполнять геометрические чертежи и читать их;*

– *выводить следствия из заданных условий.*

Заметим, что формирование перечисленных умений нужно не только в качестве обучения учащихся решению задач, с указанными требованиями, в курсе алгебры и геометрии, но они играют существенную роль уже при изучении курса математики 5-6 классов. Так, В.А. Далингер приводит пример того, что в курсе математики 6 класса [61] уже встречаются рассуждения, строящиеся, по существу, на методе доказательства от противного. При изучении параллельных прямых утверждение: «Если две прямые в плоскости перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны» - обосновывается посредством этого метода. Подобные примеры можно было бы привести по каждому из указанных направлений, утверждает автор.

Теперь подробно рассмотрим каждое из направлений, позволяющих формировать у учащихся умения, необходимые для решения развивающих задач.

3.1. Формирование у учащихся умения подмечать закономерности

Умение подмечать закономерности у учащихся, пишет В.А. Далингер [32, С.43], можно формировать на основе наблюдений, вычислений, преобразований и сопоставлений.

Обращаясь к преподавателям, Д. Пойа [66, С.389], призывал: «Результат творческой работы математика – доказательное рассуждение, доказательство, но доказательство открывают с помощью правдоподобных рассуждений, с помощью догадки. … Преподаватель должен показать, что догадки в области математики могут быть разумными, серьезными, ответственными. … Давайте будем учить догадываться!».

Выполнение заданий на выявление закономерностей, основано на методах наблюдения, опыта, сравнения, аналогии, индукции, обобщения и абстрагирования. Среди методов исследователи особенно выделяют **метод**

сравнения. К.Д. Ушинский писал: «Если вы хотите, чтобы какой-нибудь предмет внешней природы был ясно понят, то отличайте его от самых сходных с ним предметов…напрасно нас упрекают в том, что мы везде настаиваем на сравнении: другого пути для понимания предметов внешней природы нет» [69]. Считая сравнение дидактическим принципом он писал: « сравнение…, есть самый существенный акт сознания, без которого само сознание, а, следовательно, и вся сознательная жизнь человека невозможны… без сравнения – невозможно различение, без различения нет сознания. Следовательно, *возможность сравнения есть необходимое условие сознания…*»

Аналогия – сходство нетождественных объектов в некоторых сторонах, качествах, отношениях. Вывод по аналогии всегда вероятен, поэтому требует дополнительного доказательства. Но этот метод крайне полезен при выдвижении гипотез, уяснения проблем и их решений.

Обобщение – это мысленное выделение, фиксирование каких-нибудь общих существенных свойств, изучаемых объектов и явлений.

Для отработки у учащихся умения проводить обобщение полезно предложить им упражнения на нахождение общего, существенного признака нескольких понятий, отнесение понятий к соответствующему классу предметов или явлений, на определение понятий.

Психологами установлено, что учащиеся не могут самостоятельно осознанно сравнивать и обобщать даже простые математические объекты, только с помощью учителя учащееся начинают анализировать признаки, устанавливать связи между объектами.

Абстрагирование – это мысленное вычленение общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, и превращения их в самостоятельный объект рассмотрения. Обобщение и абстрагирование – это два метода, которые в процессе познания почти всегда присутствуют одновременно.

Приведем примеры, на которых можно научить школьников подмечать закономерности.

1.

2. Установите закономерность и укажите недостающее число [32, С.43]:

2	7	17
3	11	19
5	13	?

Ответ: 23 (простое число, следующее за 19).

3. *Вставьте пропущенное число* [32, С.44] (рис. 4)*:*

Ответ: 174 ($174 = 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$*).*

4. *Вставьте пропущенное число* [32, С.44] (рис.5)*:*

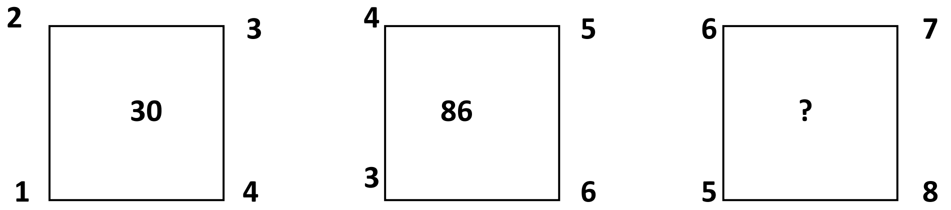


Рис.4

Ответ:10 ($10 = \sqrt{9^2 + 4^2 + 3}$*).*

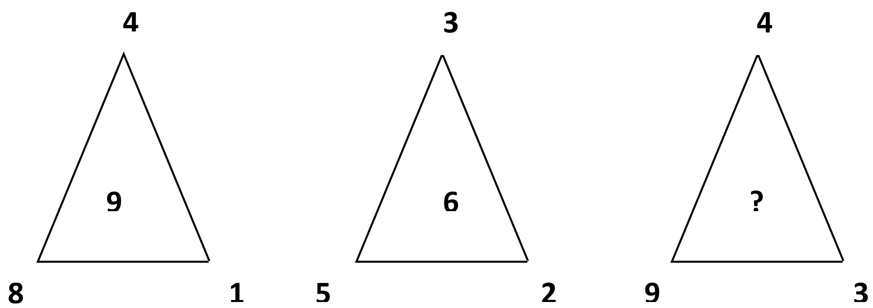


Рис. 5

5. *Вставьте пропущенное слово* [32, С.46]*:*

а) площадь (лоск) плоскость

трапеция (…) сумма

б) система	(сакля)	скаляр
матрица	(…)	многочлен
в) геометрия	(метла)	алгебра
степень	(…)	аксиома

6. *Выполняя над цифрами числа 1636 различные арифметические операции, установите их некоторые свойства* [32, С.49].

Возможные ответы:

а) число оканчивается цифрой 2, значит число четное, и оно делится на 2;

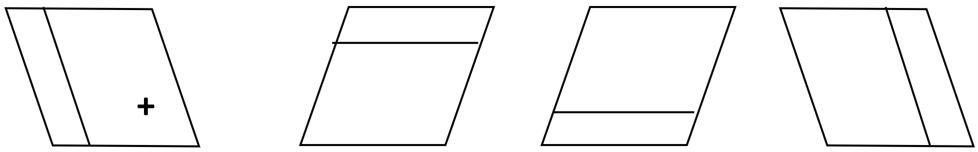
б) сумма цифр числа равна 16, и она равна квадрату числа 4;

в) сумма крайних цифр равна сумме двух первых цифр (считая слева направо);

г) произведение цифр, стоящих на нечетных местах (считая справа налево), в двенадцать раз больше произведения цифр, стоящих на на нечетных местах (считая слева направо);

д) произведение первых двух цифр (считая слева направо) в двенадцать раз больше частного от деления третьей цифры на последнюю (считая слева направо).

7. *Не поворачивая головы и не вращая бумагу, отметьте, положение крестика на рисунках 2,3, и 4* [32, С.50] *(рис.6).*



1) 2) 3) 4)

Рис. 6

3.2. Формирование у учащихся умения пользоваться примерами и контрпримерами

Учить школьников приводить необходимые примеры и контрпримеры, значит учить их творческому подходу к изучению математики, отмечает В.А. Далингер [31, С.5]. Такая работа позволяет исключить шаблонность в действиях и позволяет преодолеть формализм в знаниях.

Контрпримеры чаще всего применяются тогда, когда надо убедить учащихся в том, что они ошибаются. Чтобы убедиться в ложности некоторого общего высказывания, достаточно привести один контрпример.

Н.А. Курдюмова [50] изучала воздействие примеров и контпримеов на достижение развивающих целей обучения математике и сделала вывод: эти дидактические средства усиливают развивающую функцию процесса обучения математике, так как позволяют развивать логическое и критическое[3] мышление.

Примеры и контрпримеры выполняют в обучении математике следующие функции:

– иллюстрирующая и конкретизирующая функции (роль рисунков-примеров и рисунков–контрпримеров в формировании понятий, контроль за классификацией);

– доказательная или опровергающая функции (умение распознать ложное или истинное высказывание или умозаключение);

– функция предупреждения ошибок и ложных аналогий;

– конструктивная функция (построить примеры существования объектов, удовлетворяющих указанным свойствам);

– функция развития речевой самостоятельности;

– функция обучения самоконтролю.

[3] Критическое мышление выполняет функции проверки существующих идей и решений на наличие недостатков и ошибок. Качествами критического мышления являются: ясность, точность,последовательность, логичность, глубина, полнота и оригинальность; доказательность, аргументированность.

Работа учащихся с примерами и контрпримерами существенно повышает показатели гибкости, оригинальности и быстроты мышления.

В качестве примера рассмотрим высказывание [31, С.9]: *«Любой четырехугольник, у которого два противоположных угла равны по* 90°*, есть прямоугольник».* Ложность этого высказывания доказывает контрпример, приведенный на рисунке 7.

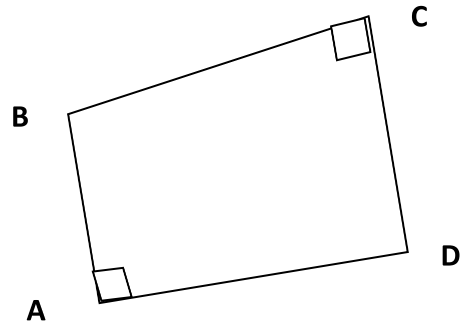


Рис.7

Или такой **пример** [26]: *Докажите или опровергните утверждение: «Квадратом называется многоугольник, у которого все стороны и все углы равны между собой» (рис.8).*

У правильного пятиугольника $ABCDE$ *все стороны между собой равны, и все углы между собой равны, но не является квадратом.*

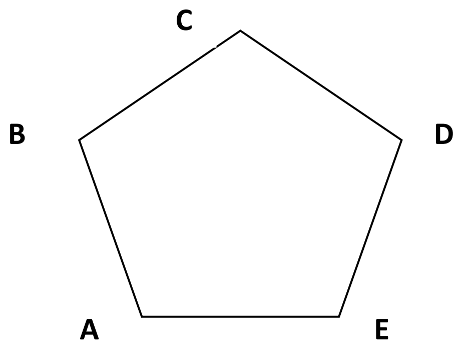


Рис.8

Пример [31, С.12] *Докажите, утверждение: «Есть такое значение* λ*, при котором вектор* $\lambda\vec{a}$ *противоположно направлен вектору* $5\vec{a}$*.*

Доказательство. Примеры, доказывающие суждение: $\lambda = -5$, $\lambda = -2$, $\lambda = -0{,}5$ *и т.д. Вывод:* $\lambda -$ *любое действительное отрицательное число.*

Другой тип заданий, в которых формулировка состоит в следующем: приведите контрпримеры, доказывающие ложность умозаключений.

Например, утверждение с данной выше формулировкой [31, С.16]: *«Высоты треугольника пересекаются в одной точке» (рис.9).*

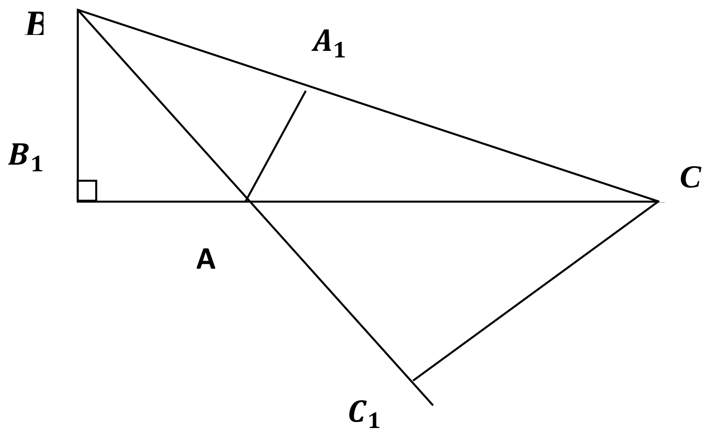


Рис.9

Ответ: *В тупоугольном треугольнике ABC проведены высоты $\boldsymbol{AA_1}$, $\boldsymbol{BB_1}$, $\boldsymbol{CC_1}$, которые вообще не пересекаются. Если высоты продолжить, то прямые содержащие высоты пересекутся водной точке. Значит, теореме должна быть сформулирована так: «Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются водной точке».*

3.3. Формирование у учащихся умения выполнять геометрические чертежи и читать их

В.А. Далингер [32, С.76] замечает, что, если на пропедевтическом уровне у учащихся не будут сформированы умения выполнять и читать геометрический чертеж, то это приведет к серьезным затруднениям при изучении теорем в систематическом курсе геометрии.

Выполнение построений чертежа служит наглядным средством решения задачи, без наглядных образов знания становятся бессодержательными, бессознательными, что приводит к формализму. При решении любой геометрической задачи, необходимо обязательно давать наглядную интерпретацию математическому объекту.

Следуя Д.Н. Богоявленскому и Н.А. Менчинской [17, С.132], мы понимаем под наглядностью «деятельность ученика по отношению к конкретным предметам и явлениям». Это тот практический, реальный анализ, который представляет первую ступень познавательной деятельности, предшествующий умственному анализу и синтезу, происходящему в словесном плане».

В школьном курсе геометрии можно выделить три вида чертежей:

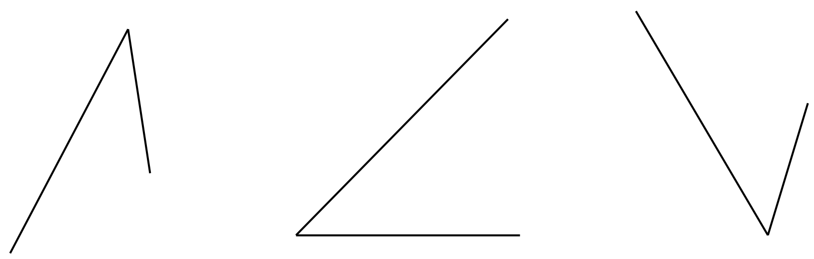
а) чертежи, иллюстрирующие содержание вводимого понятия;

б) чертежи, которые образно представляют условие решаемой задачи или рассматриваемого математического предложения;

в) чертежи, иллюстрирующие преобразование геометрических фигур.

В.А. Далингер [32] рекомендует учителю при решении геометрических задач, а именно при выполнении чертежа, не ограничиваться стандартными чертежами, поскольку в дальнейшем учащиеся будут воспринимать этот чертеж с фигурой определенного вида и расположения.

Например, ряд учащихся 5 класса при выполнении задания на распознавание фигур, к углу относили лишь фигуру, изображенную на рисунке 9б, это говорит о недостаточно развитых наглядных представлениях учащихся.



а) **б)** **в)**

Рис.9

С целью предупреждения ошибок учащихся в понимании и роли чертежа, в умении читать и строить чертеж по словесному заданию условия целесообразно: довести учащихся до полного понимания роли чертежа в геометрии, добиться того, чтобы школьники умели видеть в чертеже не только то, что бросается в глаза, но и все, что содержится в нем. Необходимо формировать у учащихся навыки в технике черчения, применять вариацию положения чертежа.

В.П. Покровский [70] разработал систему приемов, которые учащиеся должны последовательно проделывать при работе с чертежом:

1) ***Прием подведения геометрической фигуры под понятие:***

– вспомнить существенные признаки понятия, указанного в задаче;

– рассмотреть данную фигуру и проверить наличие у нее каждого из существенных признаков данного понятия;

– сделать соответствующий вывод.

2) ***Прием вычленения геометрической фигуры на чертеже:***

– выяснить, о какой фигуре говорится в задаче;

– мысленно представить искомую фигуру и отметить ее существенные признаки;

– выделить ее на чертеже.

3) ***Прием установления вида геометрической фигуры:***

– Вспомнить виды указанного в задаче понятия и существенный признак каждого вида;

– Установить, каким из этих признаков обладает данная фигура;

– На основании этого признака, установить вид фигуры.

4) ***Прием включения одного и того же элемента чертежа в разные геометрические фигуры:***

– выделить на чертеже элемент, о котором говорится в задаче;

– Последовательно включить его в различные фигуры на чертеже.

5) ***Прием нахождения общих элементов разных геометрических фигур:***

– Вычленить на чертеже каждую из фигур, указанных в задаче;

– Выделить общий элемент (точку, отрезок, угол и др.) этих фигур.

6) ***Прием разностороннего рассмотрения геометрической фигуры на чертеже:***

– Рассмотреть чертеж и выделить тот его элемент, о котором говорится в задаче;

– Последовательно соотносить выделенный элемент с другими элементами чертежа;

– Каждый раз подводить его под соответствующее понятие и указывать характерные свойства;

– Использовать нужные свойства для решения задачи.

Также полезно варьировать не только чертеж, но и способ построения. Покажем это на примере одного задания, учащимся дается задача на проведение перпендикуляра к данному отрезку через его середину в двух случаях: а) традиционный способ (отрезок расположен на достаточном расстоянии от обоих краев листа бумаги) (рис.10, а); б) отрезок расположен очень близко к нижнему краю листа бумаги (рис.10, б).

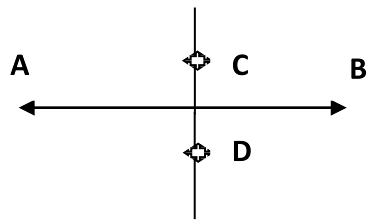


Рис.10,а

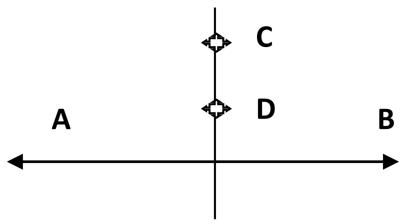


Рис.10,б

3.4. Формирование у учащихся умения выводить следствия из заданных условий

А.А. Столяр [84] в обучении учащихся доказательствам выделяет два основных уровня:

а) первый уровень (5-8 классы) используемые в доказательствах правила вывода остаются невыясненными, они применяются в основном в неявном виде, основное внимание уделяется выяснению того, «что следует», но не «как это следует»;

б) второй уровень (9-11 классы) – понятие доказательства может быть несколько уточнено, учащимся разъясняются простейшие правила вывода, и им становятся доступны анализ доказательства, выявление его логической структуры, использование в нем правил вывода, т.е. уделяется внимание и тому, «как это следует».

Приведем примеры для первого уровня, на которых можно формировать у учащихся умение выводить следствие из заданных условий.

Пример №1 [32, С.92]. *Дано: AB=CD (рис.11). Сделайте возможные выводы.*

Рис.11

Ответ: AC=BD.

Пример №2. [32, С.92]. *Назовите свойства треугольника ABC, которые следуют из рисунка 12.*

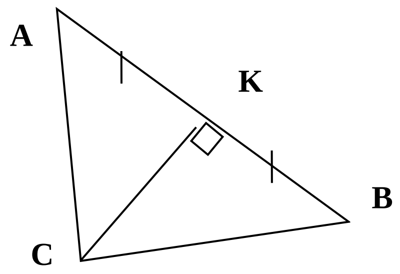


Рис. 12

Ответ: ΔABC - *равнобедренный, CK – высота, медиана, биссектриса.*

Пример №3. *Дано: AB=BC (рис.13)* [32, С.92]. *Сделайте возможные выводы.*

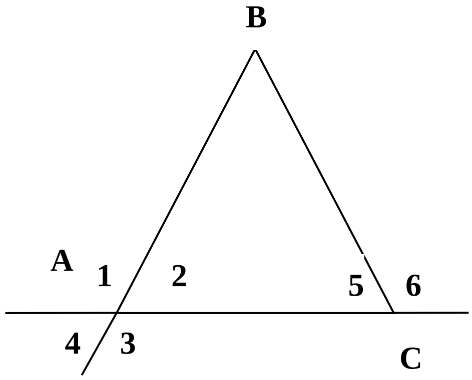


Рис.13

Ответ: $\angle 2 = \angle 5$; $\triangle ABC$ – *равнобедренный;* $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$; $\angle 2 + \angle 1 = 180^{\circ}$; $\angle 5 + \angle 6 = 180^{\circ}$; $\angle 6 + \angle 1 = 180^{\circ}$; $\angle 4 + \angle 1 = 180^{\circ}$; $\angle 3 + \angle 4 = 180^{\circ}$; $\angle 1 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 6$.

Пример №4. *Дано:* $BC \parallel AD$, $BC = AD$, $AM = CK$ (рис.14) [32, С.92]. *Найдите возможные следствия из заданных условий.*

Ответ: следствия: 1) $ABCD$ *- параллелограмм; 2)* $AB = CD$;

3) $AB \parallel CD$; *4)* $BM = KD$; *5)* $\triangle BKC = \triangle DAM$; *6)* $\angle C = \angle A$;

7) $\angle BKC = \angle DAM$; *8)* $BKDM$ *- параллелограмм; 9)* $\angle BKD = \angle BMD$;

10) $BK \parallel MD$; *11)* $BK = MD$ *и т.д.*

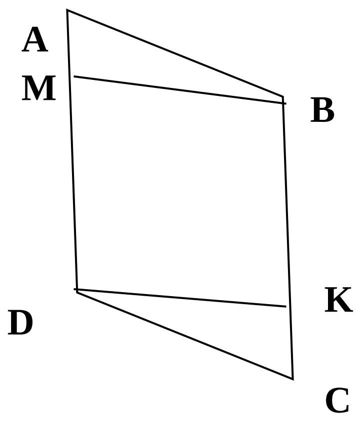


Рис.14

Пример №5 [32, С.94]. *Всякий ли делитель наибольшего общего делителя данных чисел есть общий делитель этих чисел?*

Ответ: всякий делитель наибольшего общего делителя есть общий делитель этих чисел.

Пример №6 [32, С.94]. *Что вы можете сказать, о произведении наибольшего общего делителя двух чисел на их наименьшее общее кратное?*

Ответ: произведение двух данных чисел равно произведению их наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Обучая учащихся выводить следствия из заданных условий, целесообразно показать им, что среди этих следствий есть *первичные* и *производные*. Так, например, из условия «$\angle 1$ и $\angle 2$- смежные углы» следует такие ***первичные следствия*****:** два угла; одна сторона общая; две другие стороны этих углов являются продолжением друг друга.

Производными следствиями будут:

- сумма смежных углов равна 180°;

- если два угла равны, то смежные с ними углы равны;

- угол, смежный с прямым, есть прямой угол;

- угол, смежный с острым, есть тупой угол;

- угол, смежный с тупым, есть острый угол;

- угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

Из примеров видно, что существенные признаки из определения понятия относятся к первичным следствиям.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ I

Одной из наиболее важных характеристик качества знаний является их осознанность, которая проявляется в умениях применять приобретенные знания в различных ситуациях, в том числе и незнакомых для учащихся. В случае применения знаний в нестандартной ситуации, говорят о проявлении творчества школьников.

Анализ психологической и методической литературы позволяет сделать вывод о том, что процессы формирования осознанных знаний и развитие творческого мышления имеют общий механизм. Так, способность к осмыслению и переосмыслению знаний, то есть рефлексию, психологи И.Н. Семенов, С.Ю. Степанов выделяют в качестве основного механизма творчества, позволяющего получить оригинальное решение, которая играет немаловажную роль при формировании осознанности знаний учащихся.

Развивающие задачи по математике позволяют формировать у учащихся такие способности как интуиция, рефлексия творческие способности, значит, их можно рассматривать в качестве средства формирования осознанных знаний учащихся.

ГЛАВА II. «МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИВАЮЩИХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ОСОЗНАННОСТИ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ»

§4. Распространенные недостаточно осознанные представления учащихся

При формировании глубоких осознанных знаний, необходимо опасаться появления так называемых «формальных знаний». Преодолению формализма в знаниях посвящены работы многих дидактов и методистов [64,72,80]. По определению М.Н. Скаткина, формальные знания это такие знания, в которых наблюдается «отрыв формы от …их содержания, механическое запоминание учебного материала без ясного его понимания» [80, С.17]. Поэтому, такие знания нельзя называть осознанными, так как неосознанные знания проявляются том, что учащиеся не могут самостоятельно установить существующие взаимосвязи между понятиями, моделями, законами, испытывают при изменении знаний в нестандартных ситуациях. В связи с этим, недостаточно осознанные знания могут быть использованы при составлении развивающих задач по математике. Чтобы провести такую работу необходимо определить те знания по математике, которые не достаточно осознаются многими учащимися. Традиционные письменные работы на выявление недостаточно осознанных знаний нельзя считать эффективными, так как, в основном, задания предусматривают умения выполнять различные действия по алгоритмам, правилам, рассмотренным на уроках. Таким образом, нашей задачей является составление наборов развивающих задач, направленных на формирование недостаточно осознанных математических знаний учащихся.

Анализируя материалы, связанные итоговой аттестацией, то есть проверкой качества знаний учащихся**,** необходимо отметить, что в них, в большей степени раскрывается сущность и причины возникновения ошибок.

Так, А.Н. Соловьев, Т.Ф. Бурухина [83, С.68] провели анализ результатов «репетиции» ЕГЭ по математике, проведенной в Московском автомобильно-дорожном институте (государственном техническом университете) – МАДИ (ГТУ) в феврале 2009 года. Как отмечают авторы, репетиция проводилась по билетам, составленным Национальным агентством тестовых технологий согласно принципу «Плану экзаменационной работы ЕГЭ 2009 года по математике» и по аналогии с «реальными» билетами ЕГЭ, процент неудовлетворительных оценок был равен 7,0, а процент «троек» - 41,2. В результате анализа, в работах учащихся были выделены «слабые места». Во-первых, низкий навык выполнения арифметических действий и алгебраических преобразований, во-вторых, неумение интерпретировать графическую информацию, в-третьих, учащиеся показали низкий уровень знаний по тригонометрии, в-четвертых, производная, ее геометрический и механический смысл освоены на уровне дифференцирования простейших функций, а также отсутствие умения применять производную для исследования простых функций. Что касается геометрии, лишь 6% участников «репетиции» решили (не самую сложную) задачу В11 по планиметрии и ни один не решил сложную стереометрическую задачу.

Недостатки знаний в математической подготовке отмечены И.В. Кительниковым [44, С.2510], по результатам ЕГЭ 2013 года, проведенным в Алтайском крае, у учащихся:

1) Неосознанно понятие «равносильность преобразования» при решении уравнений или неравенств и, соответственно, допущение в процессе решения неравносильных преобразований (деление обеих частей уравнения на выражение с переменной без исследования возможности его равенства нулю при некотором значении переменной);

2) Не сформирован четкий алгоритм решения задач с параметром, что приводит к потерям решений (рассмотрены не все случаи раскрытия модуля, не проведены проверки найденный значений параметра и т.д.);

3) Присутствует формализм в решении задания С5, акцентируя все внимание на условии «уравнение должно иметь единственное решение»,

учащиеся пропускают другие компоненты условия (присутствие модуля, симметричность корней и т.д.);

4) Недостаточная сформированность умений применять методы решений системы различных видов неравенств, неглубокое владение понятием логарифма, незнание свойств логарифмической и показательной функции, также при решении различных неравенств учащиеся испытывают затруднения с обратной заменой, иногда совсем отсутствует шаг с использованием метода интервалов или кривой знаков.

С целью выявления причин, влияющих на низкий уровень качества знаний по математике в 2013 году, методисты кафедры естественно-математических дисциплин в Калининградском институте развития образования провели качественный анализ результатов работ учащихся [91]. В результате анализа мониторингов в 5-х, 8-х классов, также сдачи государственной итоговой аттестации в 9-х классах и единого государственного экзамена выпускников 11 класса, были обнаружены ряд трудностей, испытываемых учащимися. Среди них Шевченко Н.И., Егорова Л.В. выделяют трудности в решении прикладных задач, в том числе социально-экономического и физического характера, трудности, связанные с недостаточным развитием пространственных представлений, а именно неумение изображать геометрические фигуры, проводить дополнительные построения, применять полученные знания для решения практических задач.

Одной из причин, связанных с указанными трудностями, авторы предлагают считать учебники математики, в которых недостаточное количество учебных задач, построенных на геометрическом материале, исследовательских работ обучающего характера, а также практически отсутствуют прикладные задачи и задачи «реальной» математики.

Вопросы, связанные с качеством знаний, в первую очередь, по мнению А.Г. Мордковича [59], связаны с формальным обучением учащихся, учителя гипертрофированно занимаются развитием только левого полушария мозга школьников, предпочтением учителей заниматься обучением, а не развитием учащихся.

Возможность в исправлении современного подхода к обучению математике автор видит в использовании учителями принципов развивающего обучения, он утверждает, что при обучении математике необходимо помнить, что активное использование наглядности и опоры на интуицию способствует гармоничному развитию обоих полушарий мозга учащегося.

Наиболее проблемными задачами, в едином государственном экзамене по математике (профильный уровень), проводимом в 2015 году, Г.А. Троякова [85] называет:

– B7 (планиметрия, задача, связанная с углами);

– B8, B14 (производная и первообразная, умение выполнять действия с функциями и определять свойства функции по графику производной и наоборот, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции);

– B9, B12 (стереометрия, уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами);

– B11 (задачи с прикладным содержанием);

– B13 (текстовые задачи, уметь строить и исследовать простейшие математические модели).

С ее точки зрения, существенными недостатками в математической подготовке учащихся являются:

- негативная тенденция, выражаемая в недостаточной отработке обязательных результатов обучения: ошибки в несложных арифметических операциях, незнание формул сокращенного умножения, незнание свойств и формул логарифмов, формул решения простейших тригонометрических уравнений и т.д.;

- разделы «Геометрии» усвоены недостаточно как на уровне основного, так и полного общего образования (B16 и B18 задания ЕГЭ по математике);

- усиление формализма в усвоении в теоретической части математики, что приводит, как следствие, к проблемам у учащихся в решении нестандартных задач;

- наблюдается отсутствие навыков «чтения» задачи, как следствие неосознанный процесс решения задачи, механическая работа препятствует творчеству;

- наблюдается отсутствие навыков доказательства в геометрии (В16 и В18).

ФГБОУ ВПО «Самарский государственный университет» в числе первых вузов принял участие в проекте Научно-исследовательского института мониторинга качества образования (г. Йоршкар-Ола) «Диагностическое интернет-тестирование для студентов первого курса», данный проект позволил провести мониторинг реального уровня подготовки студентов I курса по предметам школьного курса «Математика» [8].

На основе полученных результатов была получена таблица, показывающая коэффициенты решаемости заданий по математике в 2012 и 2014 гг. (табл. 2).

В соответствии с таблицей, можно сделать вывод о том, что проблемными к 2014 гг. с точки зрения решаемости остались темы: *«Преобразования тригонометрических выражений», «Иррациональные уравнения», «Логарифмические уравнения», «Тригонометрические уравнения», «Показательные неравенства», «Область определения функции», «Геометрический смысл определенного интеграла», «Применение геометрических знаний для решения практических задач».*

Из представленных анализов и исследований методистов отметим, что недостатки в знаниях содержатся почти во всех разделах математики: алгебра, в том числе и тригонометрия, геометрия.

Таблица 2

№ п/п	***Наименование темы***	***Коэффициент решаемости заданий, 2012 г.***	***Коэффициент решаемости заданий, 2014 г.***
1	Степени и корни	0,50	0,58
2	Тождественные преобразования алгебраических выражений	0,46	0,55
3	Преобразования тригонометрических выражений	0,22	0,48
4	Тождественные преобразования логарифмических выражений	0,37	0,57
5	Задачи из практической деятельности и повседневной жизни	0,94	0,92
6	Текстовая задача	0,53	0,75
7	Уравнения с переменной под знаком модуля	0,50	0,68
8	Иррациональные уравнения	0,28	0,32
9	Логарифмические уравнения	0,32	0,46
10	Тригонометрические уравнения	0,35	0,40
11	Системы линейных уравнений	0,75	0,90
12	Квадратные неравенства	0,50	0,62
13	Показательные неравенства	0,46	0,45
14	Область определения функции	0,37	0,45
15	Графики элементарных функций	0,53	0,71
16	Производная функции	0,49	0,55
17	Наименьшее и наибольшее значения функции	0,39	0,50
18	Геометрический смысл определенного интеграла	0,41	0,43
19	Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	0,79	0,78
20	Решение прямоугольных треугольников	0,71	0,67
21	Применение геометрических знаний для решения практических задач	0,37	0,49

Выделим распространенные недостаточно осознанные знания учащихся.

1. Знания учащихся по алгебре и началам анализа:

- тригонометрические функции sinx, cosx, их свойства;
- логарифмическая функция, свойства логарифмов;
- задачи с модулем и параметром.

2. Геометрические знания учащихся:

– определения и свойства различных видов треугольников, четырехугольников;

– решение прямоугольных треугольников (sinα, cosα углов прямоугольного треугольника);

– теоремы «sin-ов и cos-ов» углов треугольника;

– касательная к окружности, свойства касательной; вписанные и центральные углы окружности;

– векторы: длина вектора, координаты вектора, скалярное произведение векторов.

Как было сказано выше, причины разнообразны, но главной и существенно влияющей на качество знаний учащихся, по нашему мнению, является причина в формальности обучения, отсутствии развивающих принципов обучения математике. Согласно результатам исследования на тему: «О влиянии ЕГЭ на качество школьного образования», осуществляемых В.С. Собкиным, Д.В. Адамчук, Е.В. Барановой, О.С. Маркиной и О.В. Ткаченко [82], авторы получили такие мнения: 56,7% учителей считают, что ЕГЭ «ориентирует образовательный процесс на натаскивание учащихся, а не на развитие их мышления и творческих способностей», 17,9% считают, что введение ЕГЭ «формирует у учащихся формальные, а не содержательные критерии оценки своей успешности в учебной деятельности», еще 8,8% указали на то, что ЕГЭ «существенно снижает интерес к предмету и позитивную мотивацию учебной деятельности учащихся». Опираясь на результаты данного исследования, можно полагать, что результатом неосознанных знаний учащихся является «натаскивание» на ОГЭ (ГИА) и ЕГЭ в 9, 10-11 классах.

§5. Наборы развивающих задач, формирующие осознанность знаний учащихся

Рассмотрев и изучив различные точки зрения методистов и исследователей [32,34,39,60,65,76,81] на содержание и классификацию развивающих задач по математике, выявив в работах учащихся недостаточно сформированные знания, мы выделим виды задач, активизирующие и развивающие мышление учащихся, согласно требованиям, сформулированным в главе I:

- *задачи и упражнения на отыскание ошибок в рассуждениях, доказательствах утверждений;*

- *задачи и упражнения на приведение примеров и контрпримеров;*

- *задачи, включающие элементы исследования.*

Неосознанность мыслительной деятельности заключается в том, что ученик не может показать, как он рассуждал, как решал задачу, не замечает своих ошибок, не в состоянии указать те признаки, на которые он опирался.

Вид *задач на отыскание ошибок* может быть полезен тем, что при решении задач учащиеся, анализируя условие задач, осознанно находят ошибки в рассуждениях других, что в дальнейшем будет влиять на их рассуждения и умозаключения.

Задачи и упражнения на приведение контрпримеров предназначены развивать такие качества учащихся как интуиция, фантазия и другие. Проверяя свое интуитивное предположение, учащиеся затрагивают логическое мышление, тем самым превращая задачу на закрепление, усвоение понятия в развивающую задачу.

В процессе решения *задач и упражнений, включающие элементы исследования* учащиеся овладевают некоторыми навыками наблюдения, экспериментирования, сопоставления и обобщения фактов, делают определенные выводы. Задачи исследовательского характера формируют черты творческой деятельности и познавательный интерес к математике.

Рассмотрим на примере, как проявляется неосознанность учащихся.

Пример №1 [45]. Учащимся выдаются различные *четырехугольники разного цвета*, им предложено сгруппировать полученные фигуры. Ученики, отличающиеся глубиной ума, к одной группе отнесут параллелограммы, к другой – трапеции, к третьей – четырехугольники общего вида. В отличие от них, учащиеся, которые не владеют осознанными знаниями, распределят четырёхугольники по цвету.

Пример №2 [45]. Ученикам дается задание: по рисункам определить вид четырёхугольника (рис.15).

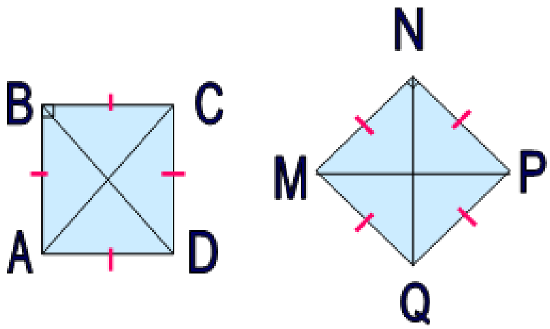


Рис.15

Выясняется, что на первом рисунке изображен квадрат. Предполагается определить вид четырехугольника, изображенного на втором рисунке. Ученики, которые отличаются гибкостью ума, сразу догадаются, что это тот же самый рисунок, только развернутый. И сразу дадут ответ: на рисунке изображен квадрат.

После введения определения квадрата учащимся предложено выяснить свойства квадрата. Учащиеся с устойчивым умом используют определение квадрата и отнесут к свойствам квадрата свойства прямоугольника. В свою очередь, учащиеся с неосознанными знаниями будут испытывать некоторые трудности с определением свойств квадрата. Это связано с неумением таких учеников использовать уже известные закономерности.

На примере темы «Четырехугольники» рассмотрим виды задач, способствующих развитию мышления и формированию осознанности знаний.

1. *Найдите параллелограмм* [26] (рис.16).

Ответ: рисунки e) и g) контрпримеры параллелограммов.

2. *Укажите вид четырехугольника* (упражнение на *узнавание четырехугольников и их свойств*) [45] (рис.17).

3. *Докажите, четырехугольник $ABCD$ – является параллелограммом, если* [26] (рис.18).

а) противоположные его углы равны;

б) противоположные его стороны попарно равны;

4. в) его диагонали точкой пересечения делятся пополам;

5. г) две его противоположные стороны параллельно равны.

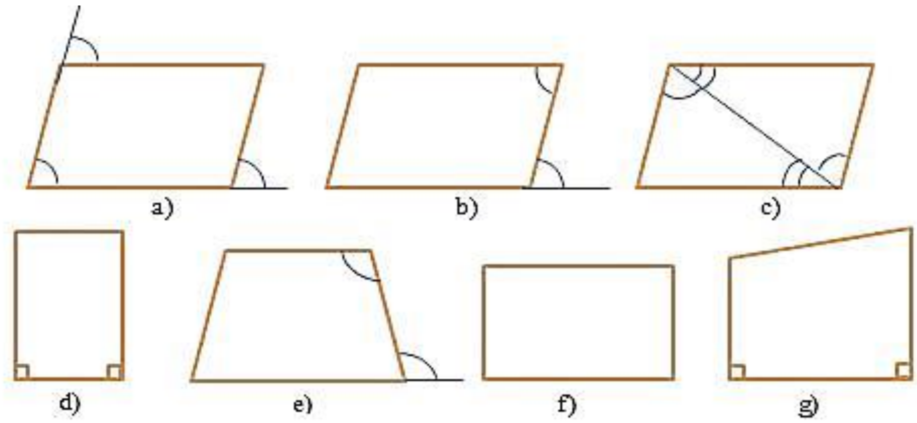


Рис.16

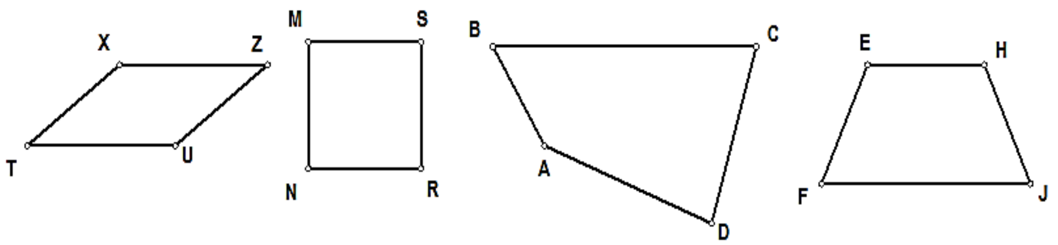


Рис.17

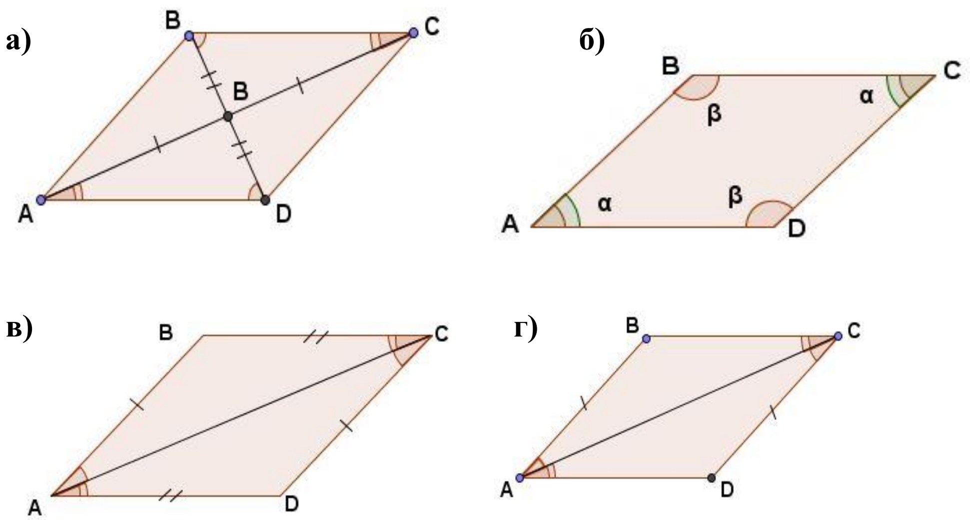


Рис.18

№4 [5]. *Какое наименьшее количество любых натуральных чисел следует взять, чтобы среди них всегда нашлась такая пара чисел, разность которых делилась бы на 5?*

Разобьем множество натуральных чисел на 5 классов: к первому классу отнесем все числа, которые при делении на 5 дают остаток, равный 0, ко второму классу – остаток, равный 1, к третьему классу – остаток, равный 2, к четвертому – остаток, равный 3, к пятому – остаток, равный 4.

Очевидно, что разность двух чисел, принадлежащих одному и тому же классу, делится на 5, а разность двух чисел, принадлежащих разным классам, на 5 не делится. Если же взять шесть чисел, то среди них обязательно найдутся два числа, принадлежащие одному и тому классу, и разность этих чисел делится на 5. Итак, наименьшее количество натуральных чисел, которое следует взять, равно 6.

5.1. Задачи и упражнения на отыскание ошибок

В данный набор преимущественно вошли задачи по алгебре и геометрии для учащихся 9-11 классов, но также в нем можно заметить задачи, посильные для учащихся 7 и 8 классов.

«Геометрия»

№1 [26]. *Постройте треугольник ABC,* в котором AC=5,7 см,

$\angle A = 135^{\circ}, \angle C = 60^{\circ}$.

№2 [31]. *Найдите ошибку в таком способе построении касательной к окружности с данным центром O.*

1 шаг. Беру произвольную точку *A* вне окружности.

2 шаг. Провожу отрезок *OA.*

3 шаг. Провожу радиус *OB* перпендикулярно *OA.*

4 шаг. Провожу отрезок *AB,* который пересекает окружность в точках *B и C.*

5 шаг. Отмечаю точку D – середину меньшей из дуг BC.

6 шаг. AB – касательная.

№3. *Проверьте, верно ли изображен вектор* $\vec{a}$, *если* $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ *(верные рисунки, отмечены* «+» (рис.19):

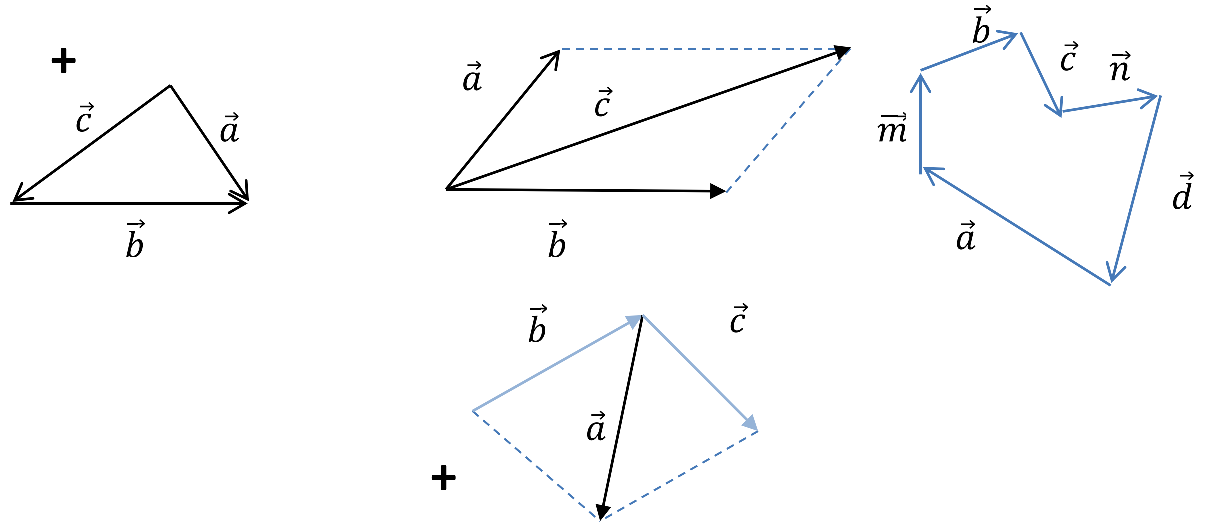


Рис.19

№4 [27]. *Координаты вектора* $\vec{f}(-2;2)$, *проверьте, верно, ли определены его координаты, обоснуйте ответ (рис.20).*

№5 [27]. *Все рёбра тетраэдра* $SABC$ *равны. Точки* M, N, P, R *– середины ребер* BS, AS, BC, AB. *Найдите ошибочные утверждения, укажите верные утверждения (рис.21).*

1) $\overrightarrow{NM} = -0{,}5\overrightarrow{AB}$;

2) $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{MP}$;

3) $|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{NM}|$;

4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}$;

5) $|\overrightarrow{MP}| = 2|\overrightarrow{SC}|$.

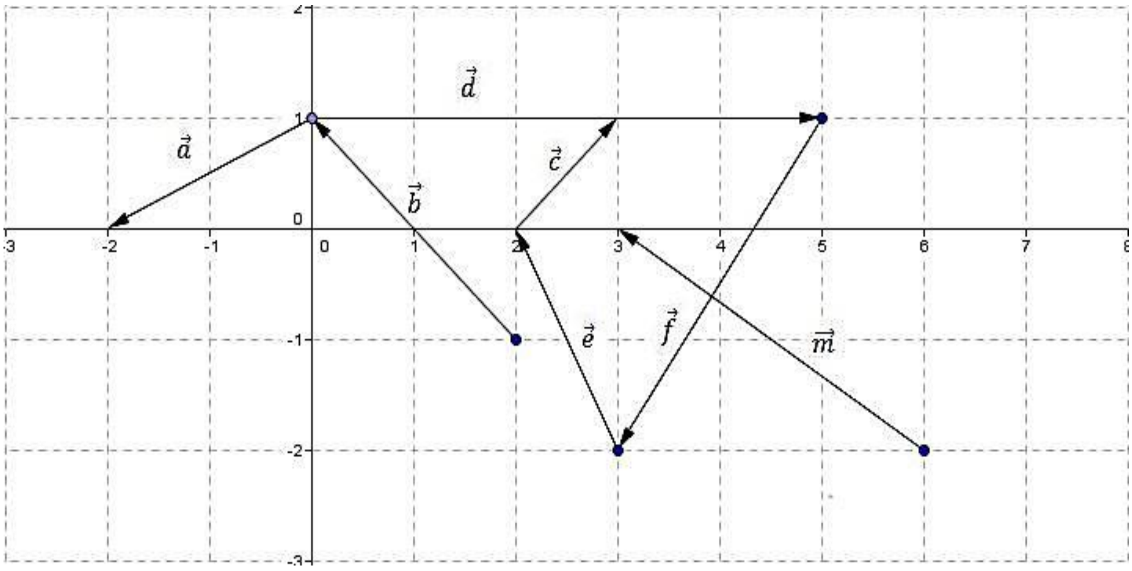


Рис.20

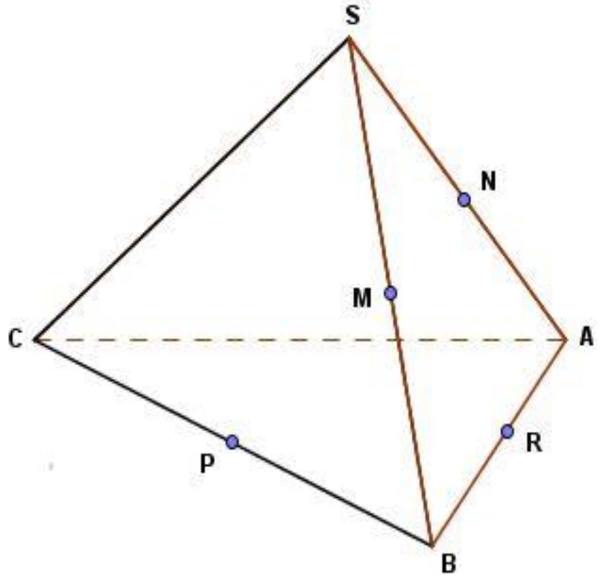


Рис. 21

№6 [27]. *Дан куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$*, в котором* $\overrightarrow{A_1B}$*, равен вектору* $\overrightarrow{AB_1}$*, (рис.22). Проверьте справедливость этого утверждения, обоснуйте свой ответ.*

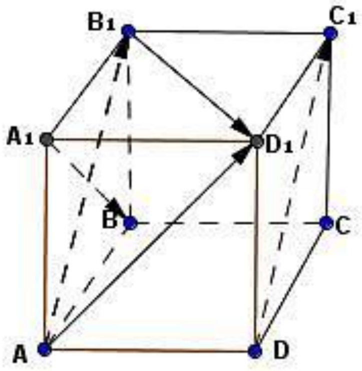


Рис.22

Ответ: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}$.

№7 [31]: *Найдите ошибку в рассуждениях.*

«Во всяком прямоугольном треугольнике катет больше гипотенузы»

Доказательство.

Пусть дан треугольник ABC. Требуется доказать, что катет AC больше гипотенузы BC (рис.25).

Для прямоугольного треугольника можно записать: $AB^2 - BC^2 = (AB + BC)(AB - BC)$;

Преобразуем правую часть равенства:

$$AB^2 - BC^2 = -(AB + BC)(BC - AB);$$

Разложим в левой части равенства разность квадратов:

$$(BC + AC)(BC - AC) = -(BC + AC)(AC - BC).$$

$$(AB - BC)(BC + AB) = -(AB + BC)(BC - AB).$$

Разделим оба члена последнего равенства на $-(AB + BC)(AB - BC)$:

Получим:

$$\frac{AB-BC}{-(AB-BC)} = \frac{BC-AB}{AB-BC}.$$

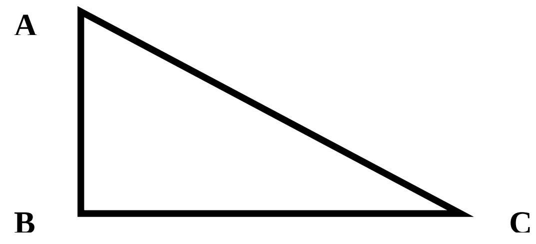


Рис.25

В левой части пропорции $AB - BC > -(AB - BC)$, так как положительная величина всегда больше отрицательной. Значит, $BC - AB > AB - BC$.

Переносим BC в левую часть неравенства, а AB – в правую: $BC + BC > AB + AB$ или $2BC > 2AB$ или $BC > AB$, т.е. **в прямоугольном треугольнике катет больше гипотенузы.**

№8 [20]. *Найдите ошибку в рассуждениях:*

«Сумма катетов равна гипотенузе»

Доказательство.

Дан прямоугольный треугольник ABC (рис.26) Разделим пополам его гипотенузу ВС точкой *D*. Проведём линии *BM* и *DN* параллельно катету *AC*, а также линии *CN* и *DM* параллельно катету *AB*. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} BM + DM = AC \\ CN + DM = AB \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Разделим теперь отрезки *BD* и *DC* пополам и сделаем аналогичные построения. Получим:

$$\left.\begin{aligned} BK + EL + DP + FG = AC \\ CQ + EP + DL + EK = AB \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Сложим равенства (2) почленно:

$$BK + EL + DP + FG + CQ + EP + DL + EK = AC + AB \qquad (3)$$

или:

$$BK + KE + EL + LD + DF + PF + FQ + QC = AC + AB \qquad (4)$$

Увеличивая, таким образом, число депеши гипотенузы *BC*, мы каждый раз будем получать ломаную линию всё с большим и большим числом зубцов, размеры которых будут все меньше и меньше. При этом как бы мелко мы ни делили гипотенузу, сумма всех отрезков, образующих ломаную линию, будет всегда равна сумме катетов (рис. 26).

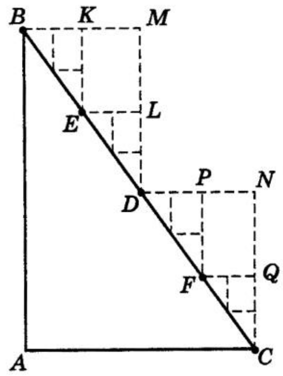


Рис.26

Когда число отрезков гипотенузы будет бесконечно велико, то ломаная линия утратит свою зубчатую форму и будет сливаться с гипотенузой, а в пределе обратится в прямую, равную гипотенузе.

Однако сумма прямых отрезков ломаной линии есть величина постоянная и всегда равна *(AB + AC)*, поэтому равенство *(4)* будет верным и тогда, когда число делений гипотенузы будет бесконечно велико.

Таким образом, предел суммы отрезков прямых, составляющих ломаную линию, будет равен сумме катетов. Так как эта ломаная линия в пределе будет равна гипотенузе *BC*, то: *AB + AC = BC.*

№9 [20]. *Найдите ошибку в рассуждениях*:

«Площадь прямоугольника равна нулю».

«Алгебра и начала математического анализа»

№ 10 [20]. *Найдите ошибку в рассуждениях:*

«Косинус любого острого угла больше единицы»

Доказательство.

Взяв произвольный острый угол α, напишем тождество и прологарифмируем его (хотя бы по основанию 10) получим:

$$lg\cos\alpha = lg\cos\alpha. \qquad (1)$$

Заменим равенство (1) неравенством, увеличивая вдвое левую его часть:

$$2lg\cos\alpha > lg\cos\alpha, \quad \text{или} \quad lg\cos^2\alpha > lg\cos\alpha.$$

(2)

Принимая во внимание, что при основании, большем 1, большему числу соответствует больший логарифм, и обратно, из неравенства (2) выводим, что

$$\cos^2\alpha > \cos\alpha.$$

Разделив обе части последнего неравенства на положительное число $\cos\alpha$, получим неравенство того же смысла:

$$\cos\alpha > 1,$$

И придем к противоречию с определением косинуса острого угла как отношения прилежащего катета к гипотенузе.

№ 11 [27]. *Найдите ошибку, обоснуйте решение (рис.27):*

«На рисунке(2) изображен график функции $\mathbf{y = \sqrt{x - 3}}$».

№12 [27]. *Найдите ошибку, обоснуйте решение (рис.28):*

«На рисунке(2) изображен график функции $\mathbf{y = \sqrt{\boldsymbol{x}} - 1}$».

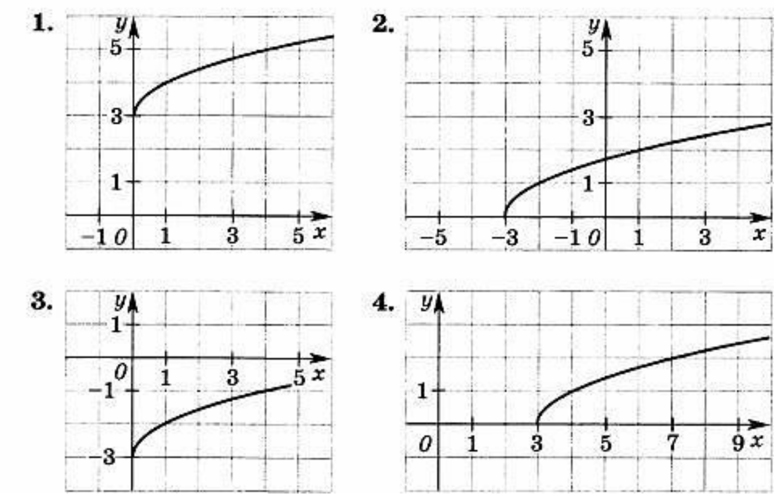


Рис.27

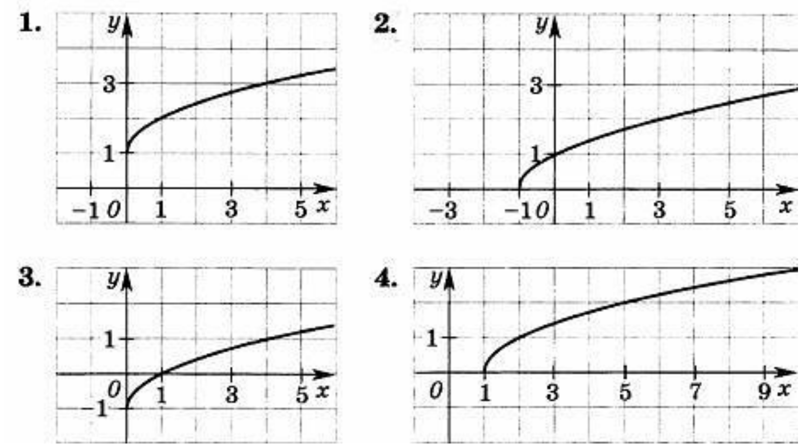


Рис.28

№13 [20]. *Найдите ошибку в рассуждениях:*

«Формула косинуса двойного угла»

Доказательство.

Общеизвестно, что тригонометрические формулы верны для любого угла.

Рассмотрим формулу: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Преобразуем её:
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = -(\sin^2\alpha - \cos\alpha\cos\alpha)$. Но $-(\sin^2\alpha - \cos\alpha\cos\alpha) = -[\sin^2\alpha + \cos\alpha \cdot (-\cos\alpha)]$.

Пользуясь тем свойством, что $-\cos\alpha = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Следовательно,

$\cos 2\alpha = -[\sin^2 \alpha + \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha)] = -(\sin^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha) =$
$-(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$, по основному тригонометрическому тождеству имеем:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, тогда $\cos 2\alpha = -1$, зная, что $\cos 180^\circ = -1$, получим:

$\cos 2\alpha = \cos 180^\circ$, откуда $2\alpha = 180^\circ$ или $\alpha = 90^\circ$.

Таким образом, $\boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ верна только для $\boldsymbol{\alpha = 90^\circ}$, или в общем виде для углов: $\boldsymbol{\alpha = 90^\circ + 2\pi k, k \epsilon Z}$.

№14 [20]. *Найдите ошибку в рассуждениях:*

«Любое число является отрицательным»

Известно, что $(+A)^2 = (-A)^2$, следовательно $lg(+A)^2 = lg(-A)^2$ или $2lg(+A) = 2lg(-A)$. Разделим обе части равенства на 2, получим:

$$lg(+A) = lg(-A)$$

Осуществим переход от логарифмов к числам:

$$10^{+\mathrm{A}} = 10^{-\mathrm{A}}.$$

Поскольку при равных степенях двух равных величин, показатели равны, имеем $(+\boldsymbol{A}) = (-\boldsymbol{A})$**.**

Эти упражнения направлено на внимательное, осознанное рассмотрение в некоторых случаях чертежа к задаче, в других доказательства рассуждения. Нахождение ошибок в заданиях способствует формированию осознанности, так как тщательный разбор заданий снижает вероятность допустить ошибку в своих рассуждениях.

5.2. Задачи и упражнения на приведение контрпримеров

№1. *Найдите верные утверждения, если утверждение неверно, приведите контрпримеры (рис.29):*

1) Коллинеарными векторами называются векторы, которые лежат на параллельных прямых;

Контрпример: *$\vec{a}$ коллиенарен $\vec{b}$*

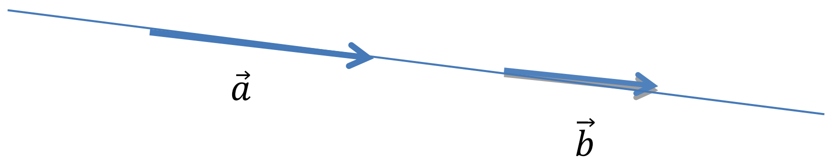


Рис. 29,a

2) Вектор – это прямая, для которой указано какая из ее граничных точек является началом, а какая – концом

Контрпример:

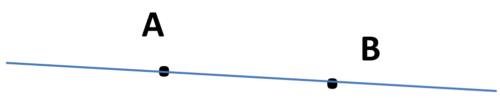


Рис.29,b

3) Если при умножении вектора на число, множитель λ- отрицательный, то вектор меняет направление на противоположное.

4) Векторы $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ называются ортогональными, если $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$.

5) *Чтобы определить длину вектора, необходимо из координат начала вычесть координаты конца (рис.30):*

Контрпример: $A(2;1), B(-2;3)$, *тогда*

$$\overrightarrow{AB}(2-(-2);1-3), \overrightarrow{AB}(4;-2), \text{тогда } \overrightarrow{AB}(4\vec{\imath};-2\vec{\jmath})$$

6) Если $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, то расстояние между точками A и B, можно найти по формуле: $|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

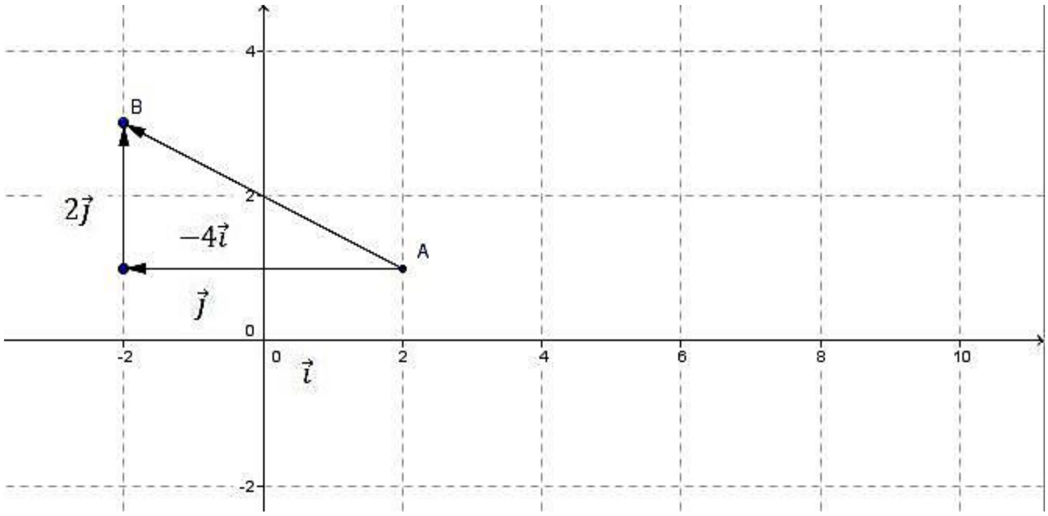
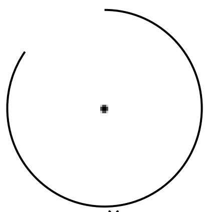


Рис.30

№2 [31, С.20]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, доказывающий ошибочность следующего определения понятия (таблица 3):*

Таблица 3

Определение	Контрпример
Окружностью называется плоская кривая, точки которой одинаково удалены от одной точки, лежащей в этой плоскости, называемой центром окружности	 Все точки указанной плоской линии удалены от центра окружности на одно и то же расстояние, но линия окружностью не является. В определении не указан существенный признак «все».

№3 [31, С.21]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, доказывающий ошибочность следующего определения понятия (таблица 4):*

Таблица 4

Определение	Контрпример
Прямоугольником называется четырехугольник, у которого диагонали равны.	

№4 [31,С.21]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, доказывающий ошибочность следующего определения понятия (таблица 5):*

Таблица 5

Определение	Контрпример
Если углы $\angle AOB, \angle BOC$ имеют общую сторону, то всегда $\angle AOC$ является их суммой	

№5 [31, С.21]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 6):*

Таблица 6

Определение	Контрпример
Высоты треугольника пересекаются в одной точке	

№6 [31, С.74]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 7):*

Таблица 7

Определение	Контрпример
Любой четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, является ромбом	

№7 [1, С.10]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 8):*

Таблица 8

Определение	Контрпример
Любая прямая, проведенная через точку пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника, делит его на две равновеликие части	

№8. [1, С.11]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 9):*

Таблица 9

Определение	Контрпример
Через точку пересечения диагоналей произвольной трапеции можно провести прямую так, чтобы разделить трапецию на две равновеликие части	

№9 [33, С.76]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 10):*

Таблица 10

Определение	Контрпример
Возможны такие значения a, b и c при которых парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает прямую $y = 2$ в двух точках, а прямую $y = 1$ в одной точке	

№10 [33, С.25]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 11):*

Таблица 11

Определение	Контрпример
Является ли функция $y = x^2 + x^4$, заданная на отрезке [-2;3] четной	

№11 [33, С.26]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 12):*

Таблица 12

Определение	Контрпример
Является ли функция $F(x) = \frac{1}{x}$ первообразной для функции $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ на промежутке [-8;7]	

№12 [32, С.76]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 13):*

Таблица 13

Определение	Контрпример
Подберите такие значения *x* и *y*, для которых верно равенство $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$, и скажите, сколько можно подобрать пар таких значений *x* и у.	

№13 [33, С.66]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 14):*

Таблица 14

Определение	Контрпример
Решением уравнения $\sqrt{x - x^2} = -2$, являются числа $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.	

№14 [1, С.12]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 15):*

Таблица 15

Определение	Контрпример
Два поселка *А* и *В* расположены на одном берегу реки. Почтальон должен доставить телеграмму из *А* в *В* и вернуться обратно. Он может пойти пешком либо плыть туда и обратно на лодке. Скорость лодки в стоячей воде и скорость, с которой почтальон идет по березу одинаковы. Верно ли, что почтальону следует пойти пешком, чтобы преодолеть путь за наименьшее время?	

Используя этот прием решения развивающих задач, учитель сначала сам может привести контрпример, а учащиеся должны правильно сформулировать, раскрыть суть контрпримера.

В выполнении данного упражнения большую роль играет интуиция, поскольку открытие нового знания невозможно без участия интуиции, так и озарение во время творческого процесса невозможно без «узнавания».

5.3. Задачи и упражнения, включающие элементы исследования

А) по дисциплине «Алгебра и

начала математического анализа»

№1 [33, С.45]. При любых ли значениях переменной х выражение $\sqrt{\frac{-(x-1)^2}{x^2+1}}$не имеет смысла?

№2 [31, С.44]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 16):*

Таблица 16

Определение	Контрпример
Можно найти такие пары чисел, разность которых равна их произведению.	

№3 [31, С.52].*«Может ли фигура с бесконечной площадью дать при вращении тело с конечным объемом?» (рис.31).*

Рассмотрим фигуру, ограниченную гиперболой $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$**,** осью *Ox* и прямой *x=1, x≥1,* которая вращается вокруг оси Ox (рис.31)

Площадь полученной фигуры вычислим с помощью интеграла:

$$S = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln x \Big|_{1}^{x} = \lim_{x \to +\infty} (\ln x - \ln 1) = +\infty.$$

Значит, площадь фигуры бесконечна.

Вычислим объем тела, полученного вращением этой фигуры с бесконечной площадью.

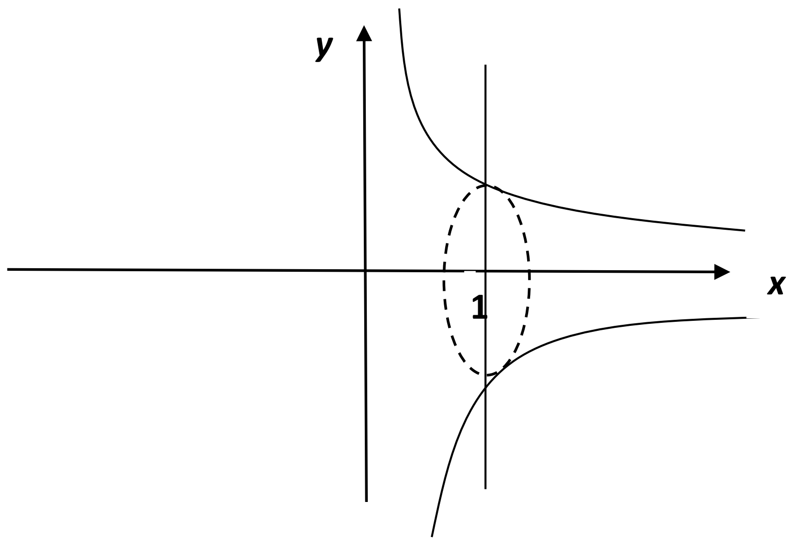


Рис.31

$$V = \int_1^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{\pi dx}{x^2} =$$

$$= \pi \lim_{x \to +\infty} \int_1^{+\infty} x^{-2} dx =$$

$$= \pi \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^x \right) = \pi \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) = \pi(0 + 1) = \pi.$$

Итак, фигура с бесконечной площадью может иметь конечный объем.

№4 [31, С.53]. *«Может ли фигура бесконечной протяженности иметь конечную площадь» (рис.32).*

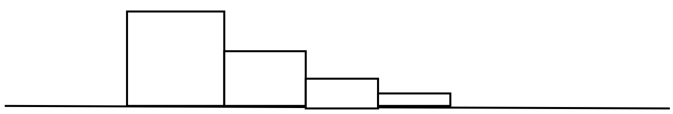


Рис.32

Эта ступенчатая фигура имеет площадь*:*

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Очевидно, ее площадь является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, первый член которой равен 1, знаменатель $\frac{1}{2}$. По формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем:

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

№5 [35, С.83]. *Решить уравнение:*

$$|x+3| - a|x-1| = 4.$$

Для решения этого уравнения составим таблицу зависимости корней уравнения от значений параметра (табл. 17):

Таблица 17

Случай	$\boldsymbol{x \leq -3}$		$\boldsymbol{-3 \leq x \leq 1}$		$\boldsymbol{x > 1}$	
Знак $\boldsymbol{x+3}$	-					
Знак $\boldsymbol{x-1}$	-					
Анализ случая			$x+3-a(1-x)=4,\quad (a$ $1)x = a+1$			
Значение параметра						
Поиск корней						
Дополнительный поиск						

Ответ: (-1;1).

№6 [1, С.153] *Найдите все значения параметра* $\boldsymbol{a}$ *при котором уравнение* $\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x} = a$ *имеет единственное решение.*

Ответ: $\boldsymbol{a = 2\sqrt{3}}$**.**

№7 [1, С.156]*Сколько решений имеет уравнение* $1 - \frac{x^2}{2} = cos\, x.$

Ответ: $x = 0.$

№8 [35, С.98]. *Определить число решений уравнения* $|x^2 - 2x - 3| = a$ *в зависимости от параметра* a.

№9 [35, С.108]. *При каких значениях параметра* a *система имеет три различных решения:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{y^2 + 2(x-2)y + (x-4)(2x-x) = 0,} \\ \boldsymbol{y = a(x-4).} \end{cases}$$

Б) по дисциплине «Геометрия»

№10 [26]. *Пусть A, B и C – углы некоторого треугольника. Докажите, что имеет место равенство (рис.33):*

$cos\, A + cos\, B + cos\, C \le \frac{3}{2}$.

Решение. Это неравенство докажем векторным методом. Возьмем любую точку M внутри треугольника *ABC*, например центр вписанной окружности, опустим из этой точки перпендикуляры на стороны треугольника и отложим на каждом из перпендикуляров единичные векторы $\vec{m}$,$\vec{n}$,$\vec{p}$ (рис. 33).

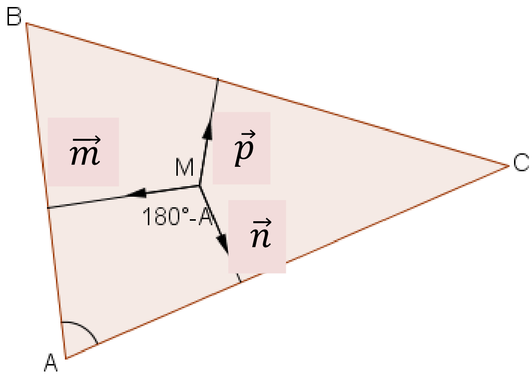


Рис.33

Легко видеть, что углы между этими векторами дополняют до 180° соответствующие углы треугольника *ABC*. Если, например, угол между $\vec{m}$, и $\vec{n}$ равен $180^{\circ} - A$, то $\vec{m}{\cdot}\vec{n} = -\cos A$. Теперь сложим эти векторы и возведем в квадрат. Имеем

$0 \le (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p})^2 = \vec{m}^2 + \vec{n}^2 + \vec{p}^2 + 2\vec{m}\cdot\vec{n} + 2\vec{m}\cdot\vec{p} + 2\vec{n}\cdot\vec{p} = 3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C$.

Отсюда и следует требуемое равенство.

№11 [78]. *Докажите, что уравнение* $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ *задает окружность. Найдите координаты центра и радиус окружности.*

Решение. Заметим, что $x^2 + 2x$ можно записать в виде $(x + 1)^2 - 1$, а $y^2 - 4y$ в виде $(y - 2)^2 - 4$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим: $(x+1)^2-1+(y-2)^2-4=0$ или $(x+1)^2+(y-2)^2=9$. Это уравнение задает окружность с центром в точке с координатами (*-1;2*) и радиусом *3*.

№12 [23, с.168]. *В трапеции ABCD отрезки BC и AD являются ее основаниями; BC=9,5, AD=20, AB=5, CD=8,5. Найти ее площадь координатным методом.*

Решение. Для нахождения площади необходимо найти только высоту, расположим трапецию *ABCD* относительно прямоугольной системы координат так, как показано на рис. 34.

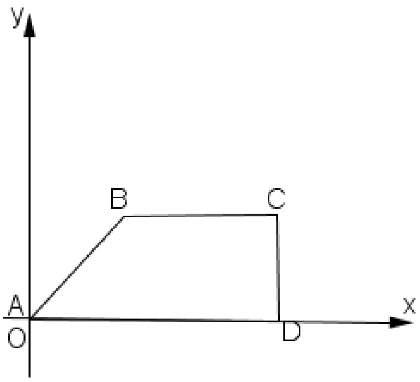


Рис. 34

Тогда *A (0;0), D (20;0), B (x,y), C(x+9,5;y).* По условию задачи, применяя формулу, для вычисления расстояния между точками, получим:

$AB^2=(x-0)^2+(y-0)^2=25;$ (1)

$CD^2=(x+9{,}5-20)^2+(y-0)^2=72{,}25.$ (2)

В результате упрощений система уравнений (1), (2) принимает вид:

$x^2+y^2=25;$ (3)

$(x-10{,}5)^2+y^2=72{,}25.$ (4)

После почленного вычитания уравнения (3) из уравнения (4) имеем:

$(x-10{,}5)^2-x^2=47{,}25.$

Отсюда $x = 3$, так как трапеция *ABCD* расположена в верхней полуплоскости (рис.10), то $y = 4$, то есть высота трапеции *ABCD* равна 4.

Итак, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (20 + 9{,}5) \cdot 4 = 59$.

№13 [35]. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (таблица 18):*

Табл.18

Определение	Контрпример
Не существует четырехугольной пирамиды, у которой две противоположные грани перпендикулярные основанию	

№14 [78]. *Для пространственных векторов* $\vec{a}, \vec{b}$ *справедливо равенство* $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$. *Доказать, что* $\vec{a} \perp \vec{b}$.

№15 [78]. *Докажите, что треугольник с вершинами* $A(0; 1; -2), B(1; 2; -5); C(-4; -3; 2)$ *тупоугольный. Вычислить косинус тупого угла.*

№16 [78]. Составить уравнения окружностей, касающихся прямых.

$$y = 0, y = 4, x + y + 1 = 0.$$

Ответ: $\left(x + 3 - 2\sqrt{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 4$; $\left(x + 3 + 2\sqrt{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

№17 [78]. *Составить уравнения касательных, проведенных к окружности* $x^2 + y^2 - 9 = 0$ *из точки* $M(5; 0)$.

Ответ: $3x - 4y - 15 = 0; 3x + 4y - 15 = 0$.

№18 [78]. *В системе координат* $Oxyz$ *заданы координаты трех точек:* $A(2; 1; 1); B(-1; 0; 2); C(1; -1; 1)$. *Доказать, что они не лежат на одной прямой, и найти координаты такой точки* D, *что четырехугольник* $ABCD$ *является параллелограммом. Найти площадь параллелограмма.*

Решение. Если бы точки A, B и C лежали на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$, и $\overrightarrow{AC}$ были бы коллинеарные, но $\overrightarrow{AB}\{-3; -1; 1\}$; $\overrightarrow{BC}\{2; -1; -1\}$ и

$\overrightarrow{AC}\{-1;-2;0\}$, пропорциональность координат отсутствует, поэтому точки $A, B,$ и C не лежат на одной прямой.

Пусть $D(x;y;z)$ – четвертая вершина параллелограмма. Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны (можно взять другую пару равных векторов), тогда $\{x-2;y-1;z-1\} = \{2;-1;-1\}$, тогда

$$\boldsymbol{x = 4; y = 0; z = 0} \text{ и } \overrightarrow{AD}\{2;-1;-1\}.$$

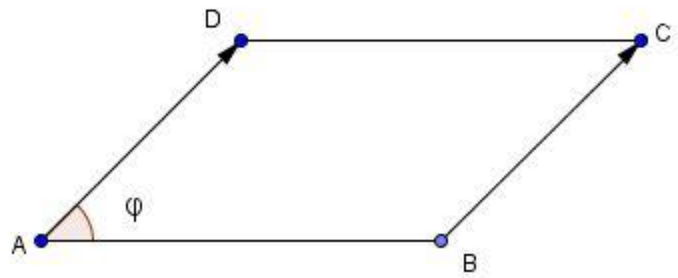


Рис. 35

Если $\varphi -$ угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB},$ тогда (рис.35)

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|} = \frac{-6+1-1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{6}{11}},$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{6}{11}} = \sqrt{\frac{5}{11}} \text{ и } S_{ABCD} = AB\cdot AD\cdot\sin\varphi = \sqrt{11}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{30}.$$

№19 [90]. *Рассмотрим пятиугольник ABCDE; M, K, N и L соответственно середины сторон BC, CD, DE и EA. Докажите, что отрезок, соединяющий середины MN и KL, параллелен AB и равен* $\frac{1}{4}AB$.

Решение. Заметим, что для любых точек O, P и Q имеет место равенство $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$, где $T -$ середина PQ (рис.36).

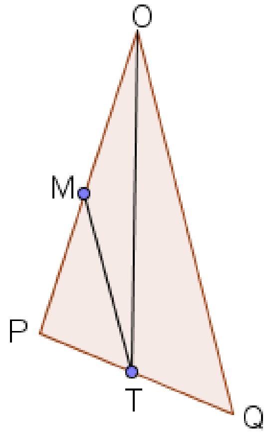
Исходя из этого, имеем (рис.37):

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}), \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}), \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}), \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$

Если F и G – середины MN и KL, то

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right), \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right).$$

Таким образом, $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\ AB.$



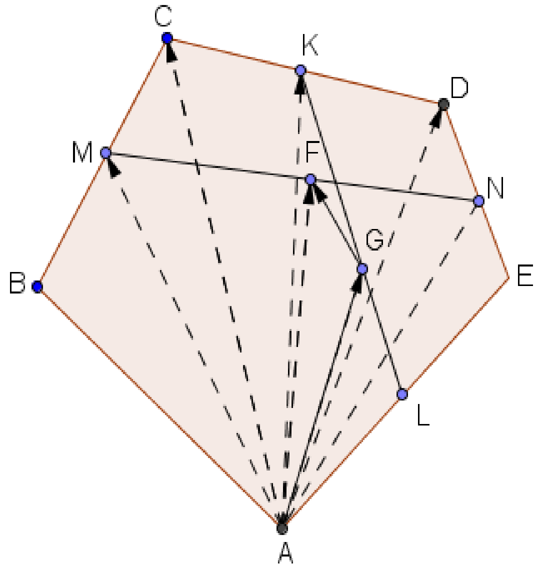


Рис.36 **Рис. 37**

Особенность этих задач состоит в том, что их решение построено не на традиционном геометрическом методе, а с помощью векторного метода или метода координат. Данные задачи также формируют осознанность знаний, так как применение векторного метода и метода координат является нестандартным подходом, развивающим пространственное и логическое мышление.

Для решения данных задач необходимо анализировать, рассуждать, находить взаимосвязи, как геометрических понятий, так и алгебраических формул и законов**.**

§6. Результаты констатирующего этапа эксперимента

6.1. Организация педагогического эксперимента

В процессе опытно-экспериментального исследования контролировалась такая характеристика обучаемых, как осознанность знаний учащихся.

Учитывая неоднозначность подходов в психолого-педагогической и методической литературе к определению понятия «осознанность», воспользуемся подходом, изложенным в педагогической энциклопедии, в соответствии с которым осознанность трактуется как *«осмысленность, насыщенность конкретным содержанием, четким представлением и пониманием изучаемых предметов явлений их закономерностей».* В данном контексте осознанность выражается не только в умение называть и описывать, но где надо, и *объяснять изучаемые факты, указывать их связи и отношения, обосновывать усваиваемые положения, делать выводы из них».* [64, С.119].

Проведение констатирующего этапа эксперимента проводилось на базе общеобразовательной школы №953, школьных отделений №3 и №4 города Москвы. Общей сложностью было охвачено около 60 человек.

Цель констатирующего эксперимента состояла в определении уровня осознанности знаний учащихся в процессе решения развивающих задач.

Методика проведения эксперимента предполагала:

а) применение развивающих задач по математике, направленных на формирование осознанных знаний учащихся;

б) сравнение полученных результатов уровня осознанности знаний у учащихся экспериментальных классов с уровнем осознанности знаний у учащихся контрольных классов.

Задачи эксперимента:

– внедрение развивающих задач по математике, направленных на формирование осознанных знаний учащихся, в процесс преподавания в 10-11 классах;

– сравнение полученных результатов по экспериментальным и контрольным классам.

Методы исследования: беседы с учащимися, анкетирование среди учителей, наблюдение за процессом решения учащихся развивающих задач по математике, проведение контрольной работы, обработка результатов контрольной работы (применялся расчет, коэффициента усвоения учебного материала).

Участники опытно-экспериментальной работы были выбраны:

- для *экспериментального* класса – 10А школы №953(ШО-4).
- для *контрольного* класса – 10Б школы №953(ШО-3).

6.2. Содержание констатирующего эксперимента и его результаты

Во время констатирующего эксперимента работы были проведены беседы с учителями, им было предложено анкетирование с целью выяснения таких вопросов, как использование развивающих задач на уроках математики, влияние развивающих задач на осознанность знаний учащихся. Структуру, содержание вопросов анкеты отражает таблица 19.

В результате проведения анкетирования были сделаны выводы, что большинство учителей не выделяют понятие *осознанности*, как понятие наиболее значимое в процессе обучения математике, развивающие задачи воспринимаются ими в основном как творческие задачи. Мнения учителей разделились в вопросе *«Согласитесь ли вы с тем, что осознанность – качество, формирующееся в процессе решения развивающих задач?»,* но однозначным было понимание необходимости использования развивающих задач на уроках математики.

Виды развивающих задач, предложенные в анкете, учителя используют частично, например, задачи на доказательство, рассматриваются всеми учителями в процессе закрепления теоремы, следствия и т.д., однако, задачи, на приведение примеров и контрпримеров не пользуются спросом среди опрошенных учителей.

Таблица 19

Анкета

№	**Вопросы**	**Скорее «нет», чем «да»**	**Скорее «да», чем «нет»**	**«Да»**
1	Считаете ли вы, что *развивающие* задачи – это задачи повышенного уровня сложности?			
2	Можно ли считать, *развивающие* задачи по математике творческими задачами?			
3	Какие знания вы считаете осознанными? *(Ответ напишите ниже, под вопросом)*	-	-	-
4	По вашему мнению, влияют ли *развивающие* задачи по математике на осознанность знаний учащихся?			
5	Согласитесь ли вы с тем, что осознанность – качество, формирующееся в процессе решения развивающих задач?			
6	Можно ли утверждать, что обучение доказательству теорем и утверждений приведет к повышению осознанности знаний?			
7	Используете ли вы на уроках задачи на доказательство, приведение примеров и контрпримеров?			
8	Используете ли вы на уроках задачи и упражнения на отыскание ошибок в рассуждении, чертеже и т.д.			
9	Используете ли вы на уроках задачи и упражнения, включающие элементы исследования?			
10	Какие виды развивающих задач вы используете на уроках математики, кроме перечисленных? *(Ответ напишите ниже, под вопросом)*	-	-	-

Еще в меньшем объеме учителя используют задачи, на отыскание ошибок, особенно ошибок в рассуждениях. Учащимся в ходе эксперимента были предложены три диагностирующие контрольные работы, в каждой из которых были подобраны задачи одного вида. То есть в одной работе оценивалось умение видеть, находить ошибки, допущенные в рассуждениях или условии задач, в другой – умение приводить контпримеры, а в третьей – исследовательские умения и навыки. Задачи, используемые в констатирующем эксперименте, приучают учащихся к осознанной рефлексии мыслительной деятельности, поскольку задачи, с заведомо допущенными ошибками вызывают интерес, привлекают внимание школьников, причем тщательное рассмотрение этих задач должно привести к уменьшению ошибок в своих рассуждениях, задачи двух других видов пробуждают интуицию, творческие способности, что способствует формированию осознанности знаний. В их содержание включены задачи вышеуказанные в §5.

Контрольная работа №1

(задачи на отыскание ошибок)

№1. *Проверьте, верно ли изображен вектор $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ (верные рисунки, отмечены* «+» (рис. 37), обоснуйте свой ответ:

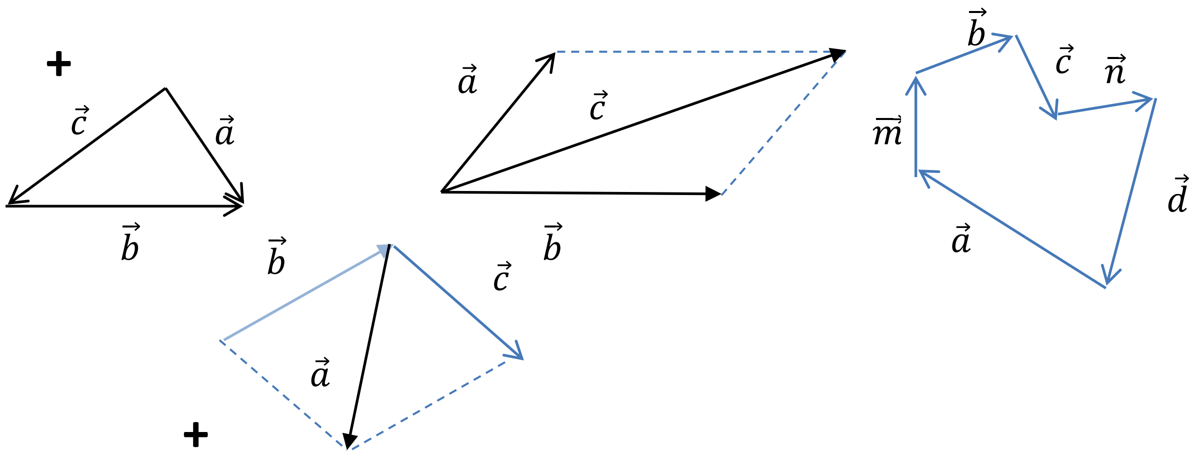


Рис.37

№2. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором вектор $\overrightarrow{A_1B}$, равен вектору $\overrightarrow{AB_1}$, (рис. 38). Проверьте справедливость этого утверждения, обоснуйте свой ответ.*

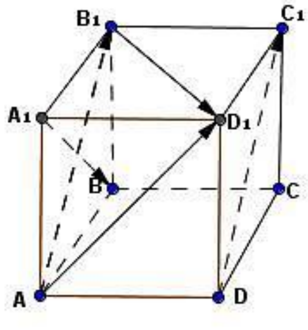


Рис. 38

№3. *Найдите ошибку в рассуждениях:*

«Во всяком прямоугольном треугольнике катет больше гипотенузы».

Доказательство.

Пусть дан треугольник ABC. Требуется доказать, что катет AC больше гипотенузы BC (рис.39).

Для прямоугольного треугольника можно записать: $AB^2 - BC^2 = (AB + BC)(AB - BC)$;

Преобразуем правую часть равенства:

$AB^2 - BC^2 = -(AB + BC)(BC - AB)$;

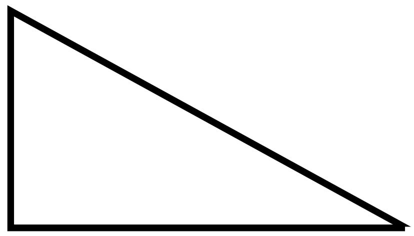


Рис.39

Разложим в левой части равенства разность квадратов:

$(BC + AC)(BC - AC) = -(BC + AC)(AC - BC)$.

$$(AB - BC)(BC + AB) = -(AB + BC)(BC - AB).$$

Разделим оба члена последнего равенства на $-(AB + BC)(AB - BC)$:

$\frac{AB-BC}{-(AB-BC)} = \frac{BC-AB}{AB-BC}$.

В левой части пропорции $AB - BC > -(AB - BC)$, так как положительная величина всегда больше отрицательной. Значит, $BC - AB > AB - BC$.

Переносим BC в левую часть неравенства, а AB – в правую: $BC + BC > AB + AB$ или $2BC > 2AB$ или $BC > AB$, т.е. **в прямоугольном треугольнике катет больше гипотенузы.**

№4. *Найдите ошибку, обоснуйте решение (рис.40):*

«На рисунке(2) изображен график функции $y = \sqrt{x-3}$».

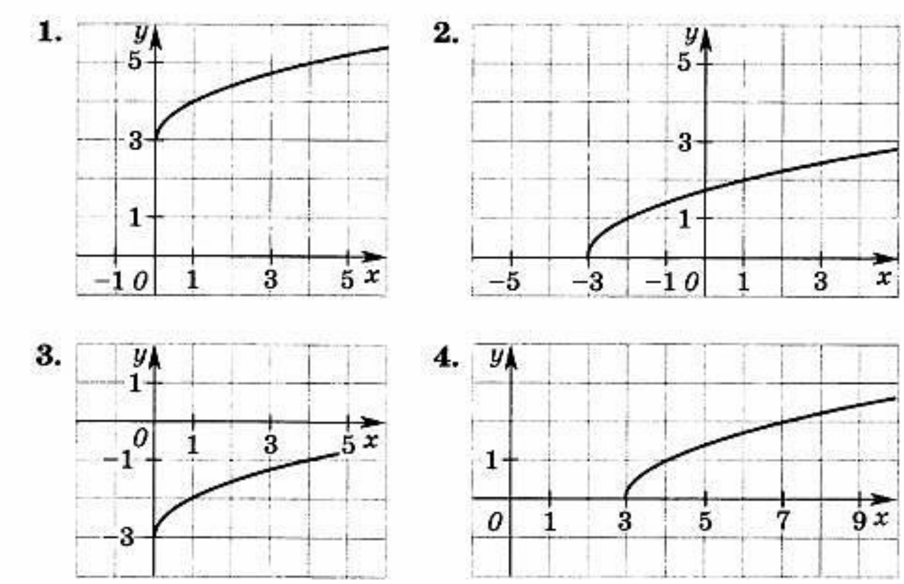


Рис.40

№5. *Найдите ошибку в рассуждениях:*

«Формула косинуса двойного угла».

Доказательство.

Общеизвестно, что тригонометрические формулы верны для любого угла.

Рассмотрим формулу: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Преобразуем её: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = -(\sin^2\alpha - \cos\alpha\cos\alpha)$. Но $-(\sin^2\alpha - \cos\alpha\cos\alpha) = -[\sin^2\alpha + \cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)]$.

Пользуясь тем свойством, что $-\cos\alpha = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Следовательно,

$$\cos 2\alpha = -[\sin^2\alpha + \cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)] =$$

$-(\sin^2\alpha + \cos\alpha\cdot\cos\alpha) = -(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$,

По основному тригонометрическому тождеству имеем:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, тогда $\cos 2\alpha = -1$, зная, что $\cos 180^\circ = -1$, получим: $\cos 2\alpha = \cos 180^\circ$, откуда $2\alpha = 180^\circ$ или $\alpha = 90^\circ$.

Контрольная работа №2

(задачи на приведение контрпримеров)

№1. *Найдите верные утверждения, если утверждение неверно, приведите контрпримеры:*

1) Коллинеарными векторами называются векторы, которые лежат на параллельных прямых;

2) Вектор – это прямая, для которой указано какая из ее граничных точек является началом, а какая – концом;

3) Если при умножении вектора на число, множитель λ- отрицательный, то вектор меняет направление на противоположное.

4) Векторы $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ называются ортогональными, если $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$.

5) Чтобы определить длину вектора, необходимо из координат начала вычесть координаты конца;

6) Если $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1; \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2; \mathrm{y}_2)$, то расстояние между точками А и В, можно найти по формуле: $|\mathrm{AB}| = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}$.

№2. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (табл.20):*

Таблица20

Определение	**Контрпример**
Через точку пересечения диагоналей произвольной трапеции можно провести прямую так, чтобы разделить трапецию на две равновеликие части.	

№3. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (табл.21):*

Таблица 21

Определение	**Контрпример**
Функция $y = x^2 + x^4$, заданная на отрезке [-2;3] является четной	

№4. *Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость (табл.22):*

Таблица 22

Определение	Контрпример
Подберите такие значения x и y, для которых верно равенство $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$, и скажите, сколько можно подобрать пар таких значений x и y.	

Контрольная работа №3

(задачи, с элементами исследования)

№1. *«Может ли фигура бесконечной протяженности иметь конечную площадь» (рис.41).*

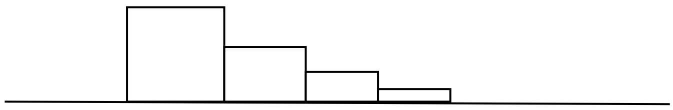


Рис.41

№2. *Определить число решений уравнения* $|x^2 - 2x - 3| = a$ *в зависимости от параметра* a.

№3. *Докажите, что треугольник с вершинами* $A(0;1;-2), B(1;2;-5); C(-4;-3;2)$ *тупоугольный. Вычислить косинус тупого угла.*

Исследование проводилось в 2015-2016 учебном году. Общей сложностью было опрошено около 60 человек - учащихся и учителей.

Методы обработки результатов контрольной работы. Для обработки результатов контрольной работы мы применяли расчет, коэффициента усвоения учебного материала, описанного Гусевым [30].

Результаты этапа эксперимента.

Приведем теперь результаты первой, второй и третьей контрольной работ соответственно в таблицах 23,24,25.

Таблица 23

Номер задания	**Ответили верно**		**Ответили неверно**		**Не приступили к заданию**	
	10А	**10Б**	**10А**	**10Б**	**10А**	**10Б**
1.	82%	74%	18%	26%	–	4%
2.	85%	76%	15%	18%	–	6%
3.	37%	27%	48%	58%	15%	15%
4.	88%	84%	10%	14%	2%	6%
5.	55%	42%	30%	48%	15%	16%

Таблица 24

Номер задания	**Ответили верно**		**Ответили неверно**		**Не приступили к заданию**	
	10А	**10Б**	**10А**	**10Б**	**10А**	**10Б**
1.	60%	56%	30%	38%	10%	6%
2.	26%	18%	54%	63%	20%	19%
3.	55%	47%	38%	45%	8%	8%
4.	61%	57%	28%	36%	11%	7%

Таблица 25

Номер задания	**Ответили верно**		**Ответили неверно**		**Не приступили к заданию**	
	10А	**10Б**	**10А**	**10Б**	**10А**	**10Б**
1.	27%	20%	63%	68%	10%	12%
2.	56%	48%	31%	36%	14%	13%
3.	56%	45%	38%	36%	6%	19%

Анализ приведенных результатов показал, что из всех предложенных задач, хуже всего учащиеся справились с поиском ошибок в рассуждениях, в задаче на приведение контпримеров учащиеся рассмотрели некоторые случаи, но не привели полного решения. В задаче на опровержение утверждения о том, что «*Функция* $y = x^2 + x^4$*, заданная на отрезке [-2;3] является четной*» учащиеся учитывали только одно условие четной функции, что привело к неверному результату. В исследовательской задаче не воспользовались фактом «*Площадь фигуры является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, и ее площадь находится по формуле суммы членов бесконечно убывающей прогрессии*».

Для более глубокой оценки знаний и умений учащихся при использовании трех контрольных работ был применен расчет, коэффициента усвоения учебного материала. Для его определения все вопросы контрольных работ были пронумерованы следующим образом:

1,2,…,5 КР №1;

6,…,9 КР №2;

10,…,12 КР №3.

Правильное решение и ответ в задаче оценивалось баллом «1», неправильный «0». Тогда коэффициент усвоения учебного материала (***К***), равен:

$$\boldsymbol{K} = \frac{\text{Сумма верных ответов}}{\text{Общее число вопросов}}.$$

При ***К***, равном от *0,90 до 0,80* (или от 90% до 80% правильных ответов), оценка – «5»; при ***К*** от *0,80 до 0,60* (или от 80% до 60%), оценка – «4»; при ***К*** от *0,60 до 0,50* (от 60% до 50%), оценка – «3»; наконец, при ***К*** ниже *0,50* (50%) – оценка «2». В нашем случае получились следующие результаты (табл. 26):

Таблица 26

Оценка	**Количество учеников, получивших данную оценку**	
	10 «А»	**10 «Б»**
«5»	14%	8%
«4»	36%	19%
«3»	18%	36%
«2»	32%	37%

Таким образом, анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод о том, что знания учащихся преимущественно формальные, главным образом из-за отсутствия в процессе обучения развивающих задач, их отсутствие подтвердило анкетирование учителей. Поэтому использование учителями развивающих задач по математике необходимо, для формирования осознанных, качественных знаний учащихся, для успешной сдачи экзаменов и дальнейшей профессиональной деятельности.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ II

Проведенный анализ результатов сдачи учащимися единого государственного экзамена (ЕГЭ) показывает, что у учащихся преобладают «формальные» знания по математике, одной из причин которых может являться «натаскивание» на решение задач ЕГЭ. В нашем исследовании предпринята попытка выделить затруднения, которые возникают у школьников в результате недостаточного осмысления имеющихся знаний.

Опираясь на выделенные недостаточно осознанные знания учащихся, нами были разработаны наборы развивающих задач в соответствии с типом заданий. В них вошли: задачи на отыскание ошибок в рассуждениях, задачи на приведение примеров и контрпримеров, задачи с элементами исследования.

В процессе выполнения диагностических контрольных работ было выявлено, что подавляющая часть школьников не умеют применять имеющиеся знания в нестандартных условиях, соответственно их знания являются «формальными», то есть некачественными, неосознанными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования были решены следующие задачи:

– анализ психолого-педагогической и методической литературы позволил выявить различные точки зрения к понятиям «осознанность знаний», «развивающее обучение» и «развивающие задачи». Обобщив различные мнения дидактов, мы раскрыли содержание данных понятий в соответствии с темой исследования.

– для выявления критериев и требований к задачам, направленных на формирование осознанных знаний учащихся, были рассмотрены имеющиеся идеи и принципы составления такого вида задач. Опираясь на них, мы выделили три вида развивающих задач, которые были положены в основу составления наборов задач.

– на основе результатов единого государственного экзамена по математике, начиная с 2011 г. по 2015 г. мы обнаружили недостаточно осознанные знания учащихся во всех разделах математики, главной причиной которых установили *«формализм»* в знаниях учащихся, преобладание традиционных способов обучения над развивающими принципами.

– в связи с установленными причинами формирования у учащихся неосознанных знаний, нами были составлены наборы задач, направленные на преодоление *«формализма»* в знаниях. Развивающие задачи, составляющие данные наборы способны развивать у учащихся такие способности как, рефлексия, интуиция, способности к творческим решениям.

– констатирующий этап эксперимента показал, что разработанные наборы задач позволяют определить распространенные недостаточно осознанные знания учащихся. Также в результате эксперимента было установлено, что учителя, не уделяют особенного внимания «осознанности». Развивающие задачи, предложенные в исследовании, частично и не регулярно используются при обучении математике.

Таким образом, гипотеза, выдвинутая нами в начале работы, может иметь право на существование, поскольку результаты эксперимента, проведенного в школе, по нашему мнению, отражают именно традиционные методы обучения, нерегулярное использование задач, развивающего характера, игнорирование принципов развивающего обучения. Мы считаем, что включение их в учебный процесс необходимо, потому, как развивающие задачи в большей степени направлены на *осмысление и переосмысление изучаемого материала, развитие творческих способностей и самостоятельный поиск решения задачи, применение имеющихся знаний в незнакомой ситуации,* играющих важную роль при сдаче экзаменов, дальнейшей профессиональной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Актершев С.П.** Задачи на максимум и минимум: [метод перебора при задан. Ограничениях, применение неравенств для поиска экстремума, максимум и минимум в геометр. задачах, задачи с параметром] / С.П. Актершев. – СПб: БХВ-Петербург, 2005: ППП Тип. Наука. -188 с.: ил.

2. **Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты**: материалы III Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 2-3 ноября 2015 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т В.П. Астафьева. – Красноярск, 2015. – 208 с.

3. **Антонов А.В.** Психология изобретательского творчества. – Из-во Киевского ГУ, «Виша школа». – 1978. – 176 с.

4. **Алгебра (поурочные планы) для 10 класса** / Сост. Т. Л. Афанасьева, Л. А. Тапилина. – Волгоград: Учитель, 1998. – 153 с.

5. **Алгебра, 8 класс:** учеб. для общеобразоват. учреждений и школ с углубл. изучением математики / [Н. Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др.]; под ред. Н.Я. Виленкина – 9-е изд. дораб. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил.

6. **Алгебра, 9 класс: метод. рекомендации к учеб. К. С. Муравина, Г. К. Муравина, Г. В. Дорофеева «Алгебра. 9 класс»** / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2004. – 144с.: ил.

7. **Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций** / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.: ил.

8. **Андрончев И.К., Соловова Н.В., Иванушкина С.А., Дмитриев Д.С.** Сравнительный и корреляционный анализ входного тестирования по математике и физике в Самарском государственном университете // Вестник Самарского государственного университета. 2015. - №2 (124). – с.9-20.

9. **Ахметов Н.**С. Химия. Пробный учебник для 8 класса средних общеобразовательных заведений. – М.: Просвещение, 1994. – 192 с.

10. **Байдак В.А.** Методика преподавания функций в средней школе: Учеб. пособие / В.А. Байдак – Омск: ОмПИ, 1977.

11. **Балл Г.А.** Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект: - М.: Педагогика, 1990. -184 с.

12. **Барболин М.П.** Методологические основы развивающего обучения. – М.: Высш. шк., 1991. – 232 с.

13. **Белокур Н.Ф**. К вопросу о структуре качества знаний. – Челябинск, 1976. – 107 с.

14. **Беспалько В.П.** Элементы теории управления процессом обучения. – М.: Знание, 1971. – 71 с.

15. **Богачева М.Н., Васенькина Н.А.** Анализ результатов выполнения отдельных заданий участниками ЕГЭ по математике (Ростовская область)

16. **Богомолова Н.В.** Экспериментальные творческие задачи как средство повышения у учащихся осознанности знаний по химии : Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – М., 1997.

17. **Богоявленский Д.Н.** Психология усвоения знаний / Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская. – М: Изд-во АПН РСФСР, 1959.

18. **Бордовская Н.В., Реан А.А.** Педагогика: Учебное пособие. – СПб: Питер, 2007. – 304 с.: ил. – (Серия «Учебное пособие»).

19. **Бордовская Н.В., Реан А.А.** Педагогика: Учебное пособие. – СПб: Питер, 2011. – 304 с.: ил.

20. **Брадис В.М.** Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1949. – 472 с.

21. **Брадис В.М., Минковский В.Л., Харчева А.К.** Ошибки в математических рассуждениях: Пособие для учителей. 3-е изд. – М.: Просвещение, 1967. – 191 с.: ил.

22. **Буяновер А.Б.** Методика обучения школьников осознанному устранению ошибок : Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – М., 1992.

23. **Василевский А.Б.** Методы решения геометрических задач. – Мн.: Выш. шк., 1969. – 232 с.

24. **Гаврилова Н.Ф.** Поурочные разработки по геометрии: 8 класс. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ВАКО, 2010. – 368 с. – (В помощь школьному учителю).

25. **Гаврилова Н.Ф.** Поурочные разработки по геометрии: 9класс. –М.: ВАКО, 2004. – 320 с. – (В помощь школьному учителю).

26. **Геометрия. 7-9 классы**: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.: ил.

27. **Готовимся к ЕГЭ. Алгебра и начала анализа. 10 класс. Итоговое тестирование в формате экзамена.** / авт.-сост. О.В. Большакова. – Ярославль: Академия развития, 2011. – 64 с.: ил. – (Экзамен в новой форме).

28. **Груденов Я.И.** Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

29. **Грязнова В.Ю.** Предупреждение учебно-познавательных затруднений учащихся основной школы: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – СПб, 2007.

30. **Гусев В.А., Смирнова И.М.** Магистерская диссертация по методике преподавания математики: Методические рекомендации. – М.: Прометей, 1996. – 107 с.

31. **Далингер В.А.** Критическое мышление учащихся и его развитие средствами примеров и контрпримеров по математике: учебно-методическое пособие – Омск: Изд-во ГОУ ОмГПУ, 2009. – 33 с.: ил.

32. **Далингер В.А.** Методика обучения учащихся доказательству математических предложений: кН. Для учителя / В.А. Далингер. – М.: Просвещение, 2006. – 256 с.: ил. – 9Библиотека учителя).

33. **Далингер В.А.** Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 80 с.: ил.

34. **Далингер В.А., Кальт Е.А., Филоненко Л.А., Шатова Н.Д.** Развивающее обучение математике: состояние, проблемы, перспективы: Монография / Под ред. Проф. В.А. Далингера. – Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2007. – 378 с.: ил.

35. **Далингер В.А., Толпекина Н.В.** Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004. – 263с.: ил.

36. **Данилов М.А., Есипов Б.П.** Дидактика / под общ. ред. Б.П. Есипова. – М.: изд-во Акад. Пед. Наук РСФСР, 1957. – 518 с.

37. **Дорофеев Г.В.** Математика для каждого - М.: Аякс, 1999. – 292 с.

38. **Журавлев Б.В.** Логическое развитие учащихся: Методическое пособие для учителей с приложением примерных упражнений по курсу математики. – Ленинград, 1946. – 34 с.: ил.

39. **Зильберберг Н.И.** Приобщение к математическому творчеству. – Уфа.: Башкирское книжное издательство, 1988. – 96 с.

40. **Иванов А.П.** Развивающая математика с тестами для 9-10 классов: Учеб. Пособие. 3-е изд. перераб. и доп. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2000. – 260 с.: ил.

41. **Изучение геометрии в 7–9 классах. Пособие для учителей** / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др.]. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.: ил.

42. **Истомина Н.Б.** Уроки математики: 5-6 классы. Содержание курса. Планирование уроков. Методические рекомендации: пособие для учителей. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2007. -224 с.

43. **Качество знаний учащихся и пути его совершенствования.** / Под ред. М.Н. Скаткина, В.В. Краевского, М.: Педагогика, 1978. – 208 с.: ил. (Науч.-исслед. ин-т общей педагогики Академии пед. наук СССР).

44. **Кительников И.В.** Анализ результатов ЕГЭ по математике в Алтайском крае в системе обеспечения качества обучения математике // Фундаментальные исследования. – 2014. - №11. - с. 2510.

45. **Климова О.А.** Использование принципов развивающего обучения при обучении школьников математике [Электронный ресурс] / Открытый урок: обучение, воспитание, развитие, социализация. – 2015. – Режим доступа: https://open-lesson.net/3272/

46. **Колмогоров А.Н.** О профессии математика. – М.: Советская наука, 1954. - 32 с.

47. **Колягин Ю.М.** Задачи в обучении математике. Обучение математике через задачи и обучению решения задач. Часть I,II. - М.: Просвещение, 1977. – 144с.

48. **Кострикина Н. П.** Задачи повышенной трудности в курсе математики 5-6 классов: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1991.

49. **Крыговская А.С.** Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии // Математика в школе. – 1966. - №6.

50. **Курдюмова Н.А.** Методические функции примеров и контрпримеров в обучении математике: Автореф. дис…на соиск. уч. Степ. канд. пед. наук. – М:1990. – 21 с.

51. **Лернер И.Я.** Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика. 1981 г. – 186 с.

52. **Лернер И.**Я. Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? – М.: Знание, 1978. – 47 с.

53. **Мелекесов Г.А.** Методика изучения числовых систем в курсах математики IV-V классов и алгебры VI-VII классов средней школы: Учеб. пособие по спецкурсу для студентов физ.-мат. факультетов / Г.А. Мелекесов. – Куйбышев: КГПИ, 1984.

54. **Методика преподавания математики в средней школе: общая методика.** Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В.А.

Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. – 2-е изд., пере-раб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

55. **Миракова Т.Н.** Развивающие задачи на уроках математики в V-VIII классах: пособие для учителя. – Львов: Журнал «Квантор», 1991.– 95 с.

56. **Мирошин В.В.** Алгебра и начала анализа. 11 класс. 180 диагностичеких вариантов / В.В. Мирошин. – М.: Национальное образование, 2012. – 192 с.:ил. – (ЕГЭ. Экспресс-диагностика).

57. **Мордкович А.Г.** Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 239 с.: ил.

58. **Мордкович А.Г.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 191 с.: ил.

59. **Мордкович А.Г.** О некоторых проблемах школьного математического образования // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты. Материалы I Всероссийской научно-методической конференции – Красноярск, 14-15 ноября 2013 г. – с. 706-722.

60. **Нешков К.И., Семушин А.Д.** Функции задач в обучении // Математика в школе. – 1971. - №3. – с.4.

61. **Нурк Э.Р.** Математика: 6 класс.: учеб. Для общеобразоват. Учеб. Заведений / Э.Р. Нурк, А.Э. Тельгмаа. – М.: Дрофа, 1996.

62. **О повышении эффективности урока** (Метод. Рекомендации для учителей) / АПН СССР, НИИ общ. педагогики; [Сост. М.Н. Скаткин, И.Я. Лернер]. – М.: НИИОП, 1986.- 47 с.

63. **Педагогика:** Учеб. пособие для школьных пед. училищ / Под ред. проф. д-ра пед. наук Б.П. Есипова. – М: Просвещение, 1967. – 414 с.

64. **Педагогическая энциклопедия.** // Под ред. Каирова И.А. в 4-х томах. – т. 2. – М.: Советская энциклопедия, 1966.

65. **Петерсон Л.Г**. Дидактические принципы развивающего обучения. «Школа 2000…» Математика для каждого: технология, дидактика, мониторинг // Под ред. Г.В. Дорофеева, И.Д. Чечель. – М.: УМЦ «Школа 2000…», 2002. – Вып. 4. – 272 с.

66. **Пойа Д.** Как решать задачу (перевод с английского): Пособие для учителей / под ред. Ю. М. Гайдука – М.: Просвещение, 1959. – 208 с.

67. **Пойа Д.** Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – М: Наука, 1975.

68. **Пойа Дж.** Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 464 с.

69. **Пойа Дж.** Математическое открытие. – М.: Наука, 1970. – 456 с.

70. **Покровский В.П.** Учебные приемы развития геометрического воображения учащихся при изучении пропедевтического курса геометрии в средней школе // Межвузовский сборник научных трудов. – Владимир: Изд-во Владимирского пединститута, 1989.

71. **Программы для общеобразоват. школ, гимназий, лицеев: Математика. 5-11 кл.** / Сост. Г. М. Кузнецова, Н. Г. Миндюк. – 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2002. – 320 с.

72. **Разумовская В.**Г. Развитие творческих способностей учащихся. // Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1975 г. – 272 с.

73. **Родионов М.А.** Развивающий потенциал математических задач и возможности его актуализации учебном процессе.: учеб. пособие / М.А. Родионов, Е.В. Марина; М-во образования и науки Российской Федерации, Пензенский гос. пед. ун-т им. В.Г. Белинского, Пенза: Изд-во ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2010 – 231 с.: ил.

74. **Рубинштейн С.Л.** Проблемы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – М.: Педагогика, 1957.

75. **Самсонов П.И.** Анализ ошибок выпусников по ЕГЭ-2012 по математике I часть // Математике в школе. – 2012. - №8. – С. 14-21.

76. **Саранцев Г.И.** Общая методика преподавания математики: Учеб. Пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. – Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 1999. – 208 с.

77. **Саранцев Г.И.** Упражнения в обучении математике. М.: Просвещение, 1995. – 240 с.: ил. (Б-ка учителя математики).

78. **Севрюков П.Ф.** Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии: учебное пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. - М.: Илекса; НИИ Школьных технологий; Ставрополь: Сервисшкола, 2008. – 164 с. – (Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»).

79. **Севрюков П.Ф.** Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009. – 212 с.

80. **Скаткин М.**Н. Совершенствование процесса обучения. – М: Педагогика, 1971. – 205 с.

81. **Смыкалова Е.В.** Задачи с развивающими функциями как средство обеспечения преемственности в обучении математике между начальной и основной школой: Диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – СПб. - 2004.

82. **Собкин В.С., Адамчук Д.В., Баранова Е.В., Маркина О.С., Ткаченко О.В**. Учитель о влиянии ЕГЭ на качество школьного образования // Сб. «Социокультурные проблемы современного образования». Под ред. В.С. Собкина. – М.: Федеральное государственное научное учреждение «Институт социологии образования» РАО, - 2009. – с. 179-214.

83. **Соловьев А.Н., Бурухина Т.Ф.** Анализ уровня подготовки абитуриентов по математике // Ученые записки, №7(2). - 2009. с.68

84. **Столяр А.**А. Педагогика математики / А.А. Столяр. – Минск: Вышейшая школа, 1982.

85. **Троякова Г.А.** Результаты и проблемы единого государственного экзамена по математике профильного уровня в республике Тыва // Вестник. Педагогические науки. – 2015. - №4. – с. 71-78.

86. **Федеральный государственный образовательный стандарт** среднего (полного) общего образования. Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. − №413.

87. **Фридман Л. М., Турецкий Е. Н.** Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с., ил.

88. **Шапиро И.М.** Мотивационная функция задач в обучении математике [Электронный ресурс] / Сибирский межвузовский журнал. Педагог. - №4. – 1998. - Режим доступа: http://www.altspu.ru/Res/Journal/pedagog/pedagog_4/articl_12.html

89. **Шарова А.Н.** Повышение уровня осознанности знаний по информатике учащихся классов филологического профиля : Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – Екатеринбург, 2009.

90. **Шарыгин И.Ф.** Геометрия. 7-9 кл.: учеб. Для общеобразоват. учреждений / И. Ф. Шарыгин. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2010. – 367, [1] с.

91. **Шевченко Н.И., Егорова Л.В.** Причины снижения качества математического образования // Проблемы и перспективы развития образования в России. –Новосибирск:». - 2013. - №19. – с.188-191.

92. **Шепелева Ю.В.** Алгебра и начала математического анализа. Тематические тесты. 10 класс: базовый и профил. Уровни / Ю.В. Шепелева. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 111 с.: ил.

93. **Шамова Т.И., Давыденко Т.М.** Управление процессом формирования системы качеств знаний учащихся: методическое пособие. – М.: Изд-во Прометей МГПИ им. В.И. Ленина, 1990.

94. **Якиманская И.С.** Восприятие и понимание учащимися чертежа и условия задачи в процессе ее решения: Применение знаний в учебной практике школьника / И.С. Якиманская. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1961.