МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ДОСТУПНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «МНОГОГРАННИКИ» В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

М А Г И С Т Е Р С К А Я   Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Направление подготовки магистра: 44.04.01 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математическое образование*

Студент О.И. Владимирова __________

Научный руководитель:
к.ф-м.н., проф. Е.В. Потоскуев _________

Руководитель программы: д.п.н., проф. Р.А. Утеева __________

«_____»_______ 2016 г.

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева __________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В законе «Об образовании в РФ» говорится, что школа как учреждение, осуществляющее образовательную подготовку, должна обеспечить качественный уровень освоения учащимися общего образования [19].

В настоящее время осуществляется постепенный переход на ФГОС основного общего образования. На смену ориентации общества, главным образом, на развитие техники и технологий, на широкую информатизацию всех сфер жизни общества приходит эра нового, личностного образования.

В соответствии с ФГОС основного общего образования современное образование должно быть ориентированно на становление выпускника, умеющего учиться, осознающего важность образования и самообразования для жизни и деятельности, способного применять полученные знания на практике.

Математика в отличие от большинства других преподаваемых в школе дисциплин имеет предметом своего изучения не непосредственно вещи, составляющие окружающий нас внешний мир, а количественные отношения и пространственные формы, свойственные этим вещам. Этой особенностью математической науки в первую очередь объясняются те хорошо известные методические трудности, которые неизбежно встают перед преподавателем математики и которых почти не знают преподаватели других наук.

Обеспечение доступности качественного общего образования является одним из приоритетных направлений развития образовательной системы России. В связи с этим остается актуальной и проблема обеспечения доступности обучения на современном уровне. С одной стороны, принцип доступности обучения вытекает из требований, выработанных многовековой практикой обучения, с другой стороны – из закономерностей возрастного развития учащихся, организации и осуществления дидактического процесса в соответствии с уровнем их развития [19].

Проблему доступности в обучении впервые поставил Я. А. Коменский, который и выдвинул важный дидактический принцип - принцип доступности - и предложил такое решение проблемы, которое во многом не потеряло значения и сегодня. Сформулированные им правила доступности: от легкого к трудному, от известного к неизвестному, от простого к сложному, от близкого к далекому - стали педагогическими аксиомами [1].

Вопрос о доступности обучения нашло отражение в трудах К. Д. Ушинского. Пути достижения доступного уровня обучения он видел прежде всего в работе учителя, а не только в разработке содержания, структуры учебного материала [57].

Н. А. Константинов говорит, что доступность обусловлена также уровнем подготовки учащихся, т. е. запасом знаний и умений, необходимых для усвоения нового материала; объёмом программ и соотношением программного материала и количества времени, отведенного на его изучение.

В учебнике «Дидактика» под редакцией И. Н. Казанцева подчеркнута мысль, что для осуществления принципа доступности обучения нужно опираться на наивысшую границу умственных возможностей учащихся в данный момент с целью постоянного её повышения [13].

Н. А. Сорокин считает, что принцип доступности предполагает соответствие содержания, характера, методов, форм и объёма учебного материала уровню подготовки учащихся, их возрастным особенностям и развитию их познавательных способностей. При этом автор отмечает, что возрастные границы в развитии познавательных сил учащихся условны и подвижны, поэтому доступность обучения зависит от возрастных возможностей учащихся, понимаемых диалектически.

С. П. Баранов считает, что «доступность усвоения знаний, формирования умений и навыков означает их связь с уровнем развития школьников, с их личным опытом, с теми знаниями, умениями и навыками, которыми владеет ученик. Если такие связи установить не удается, то знания считаются недоступными» [5]. Им же рассмотрены главные факторы, влияющие на степень доступности: связь содержания новых знаний с имеющимися; новое содержание может включать привычные для ученика, непривычные или вовсе не знакомые рассуждения, доказательства, формы и операции мышления; усвоение знаний зависит от интересов, склонностей ученика, сформированности навыков учебного труда; доступность содержания обучения всегда связывается с его необходимостью для умственного, нравственного и физического развития школьников.

Изменения в представлениях о структуре принципа доступности происходят в 1970-е гг.

В работах М. А. Данилова и М. Н. Скаткина принцип доступности понимается как мера посильной трудности [14].

В. И. Загвязинский [18] под принципом доступности понимает меру трудности, преодолеваемой с помощью педагога в процессе рационально организованной деятельности в «зоне ближайшего развития ученика».

П. Н. Пидкасистый подчеркивает, что доступность вытекает из требований учёта особенностей развития учащихся, анализа материала с точки зрения их возможностей и такой организации обучения, чтобы они не испытывали интеллектуальных, моральных, физических перегрузок. «Доступность не понимается педагогами как учение без трудностей, так как учебная работа должна требовать от учащихся определенных усилий в достижении поставленных целей. Однако эти трудности должны не подрывать, а развивать силы ученика и способствовать повышению результатов знаний» [30].

Ю.М. Колягин указывает, что *реализация принципа доступности* предполагает выполнение следующих условий - дидактических правил: а) следовать в обучении от простого к сложному; б) от легкого к трудному; в) от известного к неизвестному. При этом необходимо учитывать и то, что принцип доступности предполагает обучение на достаточно высоком уровне трудности. Однако это можно достигнуть лишь при наилучшем сочетании индивидуальных и коллективных форм познавательной деятельности школьников в обучении. Отсюда следует, что строгое соблюдение в обучении принципа систематичности и последовательности предопределяет успешную реализацию принципа доступности [27].

Характерной особенностью развития общеобразовательной школы на современном этапе является повышение научного уровня образования, происходящее одновременно с открытием многочисленных профилированных школ и классов, созданием учебных заведений нового типа (гимназий, лицеев, колледжей и т. п.). Принцип доступности в обучении привлекает к себе особое внимание также в связи с проблемой индивидуального подхода к учащимся. Поэтому в современных условиях проблема доступности обучения как адекватного отражения в сознании каждого учащегося содержания преподаваемого материала является актуальной [33].

В 1980-е гг. в педагогической теории происходит пересмотр традиционных принципов.

В. В. Давыдов предлагает заменить принцип доступности принципом развивающего обучения [12].

В. В. Заволока называет принцип доступности принципом единства доступного и недоступного в обучении. По его мнению, такое определение принципа более точно отражает сущность понятия «доступность», его диалектическую природу.

В период с 1990 по 2001 г. исследователи в основном характеризуют принцип доступности как самостоятельный принцип. Одни из них полагают, что этот принцип требует, чтобы обучение строилось на уровне реальных учебных возможностей школьников, чтобы учащиеся не испытывали интеллектуальных, физических, моральных перегрузок, отрицательно сказывающихся на их физическом и психическом здоровье. Другие считают, что в основе принципа доступности лежит закон тезауруса (лат. *tesa-urus* - сокровище): доступным для ребенка является то, что соответствует уровню его мышления, объёму накопленных им знаний, умений, способов мышления. Согласно третьей точке зрения, принцип доступности представляет собой меру трудности [15].

Анализируя выше изложенное, можно сделать вывод, что сущность принципа доступности в современной педагогике осталась неизменной.

Таким образом, обобщая представленный исторический обзор развития понятия «принципа доступности», мною выделены следующие существенные признаки этого принципа.

Принцип доступности:

а) является критерием при отборе учебного материала;

б) отражает соответствие содержания, методов, форм, средств, объема учебного материала возрастным особенностям учащихся;

в) требует учета уровня учебной подготовки учащихся;

г) направлен на преодоление обучаемым познавательных затруднений;

д) определяет меру посильной трудности в освоении содержания образования.

На современном этапе доступность обучения представляет собой комплексную проблему, исследованием которой заняты специалисты многих отраслей науки. Гигиенисты и физиологи изучают утомляемость учащихся на уроках разных учебных предметов, в разные дни недели, дают гигиеническую оценку учебных пособий, школьных зданий, решают другие важные вопросы, относящиеся к физическому состоянию школьников. Психологи исследуют психические возможности обучающихся, закономерности их учения. Психологами много сделано для раскрытия характера трудностей мышления, трудностей запоминания, возникающих в процессе учения. Изучены трудности овладения знаниями и умениями, которые испытывают школьники различных возрастных групп; показаны пути преодоления трудностей, условия, позволяющие сделать трудный материал доступным [15].

По мнению И.В. Шадриной: «принцип доступности обучения состоит в том, что математическое знание становится доступным школьнику в результате его дидактической реорганизации, которая, сохраняя содержание изучаемого знания, адаптирует его к познавательным возможностям ребенка. Доступное обучение формирует первоначальные, не развитые в теоретическом отношении представления, образующие основу для системного научного знания. Оно осуществляется в процессе перевода математического знания на доступный ученику язык. Доступное обучение приближает научные знания к сознанию ученика посредством их упрощения [60].

Проблема в том, что в обучении математике возможны упрощения, искажающие объективное содержание изучаемого знания, вопреки необходимости воспроизвести в сознании ученика объективное научное знание и способы научного мышления, в той мере, в какой это достижимо на каждом конкретном отрезке обучения.

Вопрос о содержании учебного материала по математике методистами обсуждается постоянно. Ю.М. Колягиным были заложены основы теории, в которой проблема применения задач в обучении школьников математике решается исходя из теоретической сущности самих задач (их информационной структуры) в контексте системного подхода. Далее эту теорию развил В.И. Крупич, рассмотрев понятие внутренней структуры задачи [3].

По мнению Г.И. Саранцева, математические задачи – основное средство формирования знаний, умений и навыков учащихся, развития школьников, средство организации учебной деятельности. Вследствие этого эффективность учебно-воспитательного процесса во многом зависит от выбора задач, от способов организации деятельности учащихся по их применению, т.е. методики решения задач [49].

В работах И.Ф. Шарыгина [61], Е.В. Потоскуева [42], И.М. Смирновой[54] описываются проблемы обучения геометрии через задачи, типологии задач, рассмотрены общие и частные приемы решения задач, отражающие важность использования задач в учебном процессе. Акцент делается на опорные и ключевые задачи.

Геометрия – один из важнейших компонентов математического образования, необходимый для приобретения знаний о пространстве и практически значимых умений, формирования языка описания объектов окружающего мира, развития пространственного мышления, математической культуры, для эстетического воспитания учащихся.

Отметим, что в настоящее время учеными, авторами школьных и вузовских учебников геометрии, учителями-практиками разработаны УМК по геометрии, соответствующие ФГОС. *Авторами этих учебников являются : И.М. Смирнова, В.А. Смирнов; Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич; И.Ф. Шарыгин; Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др.*.

Анализ ранее выполненных диссертационных работ, посвященных вопросам изучения многогранников:

- Обучение решению стереометрических задач с учетом взаимосвязи образного и логического компонентов мышления (на примере задач на подвижные сечения многогранников), О.В. Шереметьева, 1997, [64];

- Реализация деятельностного подхода в процессе формирования пространственного мышления учащихся при обучении построению сечений многогранников, А.Р. Черняева, 2004,[58];

- Элективные курсы по геометрии в условиях профильного обучения математике в старших классах, Е.А. Ермолаев, 2010,[16].

Реализации принципа доступности в обучении за последние 6 лет были посвящены следующие диссертационные работы:

- Доступность учебного материала как фактор совершенствования умственного развития школьников, И.В. Ионова, 1999,[21];

- О реализации принципа доступности в процессе обучения, Н.И. Блохина, 2010, [7];

- Сущность и особенности реализации принципа доступности обучения школьников, Л.В. Басова, 2012, [6].

Таким образом, можно сделать вывод, что методическая разработка и систематизация задач по обучению геометрии востребованы на практике; имеется опыт их проектирования и реализации в условиях профильного обучения математике. Однако, *в них принцип доступности в углубленном курсе геометрии старшей общеобразовательной школы не отражен*.

Анализ научно-методической литературы по теме реализации принципа доступности в обучении геометрии в классах с углубленным изучением математики в общеобразовательной школе позволил выявить ряд проблем:

- роль, место, основные цели реализации принципа доступности при обучении решению задач по геометрии;

- основные требования к содержанию принципа доступности при обучении геометрии;

- условия эффективной реализации принципа доступности при обучении геометрии.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена *необходимостью*:

1) перехода к базовому и профильному обучению математике в общеобразовательной школе (сдача ЕГЭ на базовом и профильном уровнях);

2) преемственности базового и профильного уровней по геометрии ;

3) предоставления права выбора учащимся уровня изучения геометрии, опираясь на реализацию принципа доступности при обучении решению задач.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** роль, место, основные цели реализации принципа доступности при обучении решению задач по геометрии; основные требования, которым должно удовлетворять содержание принципа доступности; условия эффективной реализации принципа доступности.

Объектом исследования является процесс углубленного обучения геометрии в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: реализация принципа доступности при обучении решению геометрических задач в условиях углубленного обучения геометрии в старших классах (на примере темы «Многогранники») по УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Цель исследования заключается в выявлении теоретических основ проектирования принципа доступности при решении геометрических задач и разработке методики их реализации в условиях углубленного обучения геометрии учащихся старших классов общеобразовательной школы по УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что, если принцип доступности при обучении *геометрии* будет приоритетным и содержательным компонентом методической системы, то он будет способствовать достижению целей углубленного обучения и обеспечит преемственность с базовым и профильным уровнями по геометрии.

Задачи исследования:

1. Уточнить роль, место и цели принципа доступности при обучении решению задач по геометрии как составной части углубленного обучения математике в старших классах.

2. Разработать задачный материал по теме «Многогранники» по принципу «от простого к сложному».

3. Представить теоретическую модель принципа доступности (многообразие способов решения) при решении задач по геометрии и выявить условия ее успешной реализации на практике.

4. Определить методические аспекты реализации принципа доступности при обучении решению геометрических задач в классах с углубленным изучением геометрии на примере темы «Расстояния и углы в многогранниках».

5. Проверить экспериментально эффективность выделенных методических аспектов реализации принципа доступности при обучении решению геометрических задач в классах с углубленным изучением геометрии.

Для решения поставленных задач будут применяться следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; анкетирование школьников, и учителей; эксперимент по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

9 семестр (2014/15 уч.г.): Анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных и вузовских учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы); подборка теоретического и практического материала по теме: «Расстояния и многогранники в задачах».

10 (А) семестр (2014/15 уч.г.): Определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации; подборка теоретического и практического материала по теме: «Углы и многогранники в задачах».

11(В) семестр (2015/16 уч.г.): Определение методических аспектов реализации принципа доступности в обучении решению геометрических задач. Подборка теоретического и практического материала по теме: «Куб в координатах».

12(С) семестр (2015/16 уч.г.): Оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Научная новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем предложена методика реализации принципа доступности при обучении решению геометрических задач по теме «Многогранники» с применением на уроках технологии ключевых и опорных задач; разработан элективный курс «Многогранники в задачах», содержание которого позволяет самостоятельно ориентироваться не только в поиске решения проблемных ситуаций, но и переносить приобретенные знания, умения и навыки к поисково-исследовательской деятельности в работе над задачами .

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

− рассмотрены теоретические основы проектирования принципа доступности при решении геометрических задач;

− уточнены роль, место и цели принципа доступности при обучении решению задач по геометрии как составной части углубленного обучения математике в старших классах;

– разработан задачный материал по теме «Многогранники» по принципу «от простого к сложному»;

– разработан элективный курс «Многогранники в задачах», в котором значительное место отведено решению задач, отвечающих требованиям ЕГЭ и повышенной сложности.

Практическая значимость результатов исследования определяется тем, что в нем выделены методические аспекты реализации принципа доступности при обучении решению задач по теме «Многогранники» в углубленном курсе геометрии старшей общеобразовательной школы. Представленные в диссертации материалы и методические рекомендации могут быть использованы на практике учителями математики.

Достоверность полученных результатов **и обоснованность** выводов, обусловлены использованием данных теории и методики обучения математике; анализом педагогической практики и личного опыта работы; сочетанием теоретических и практических методов исследования, а также экспериментальной проверкой.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Сущность и особенности реализации принципа доступности при обучении решению геометрических задач.

2. Типы учебных заданий, способствующие реализации принципа доступности при обучении решению геометрических задач.

3. Методические аспекты реализации принципа доступности на примере изучения тем «Расстояния в многогранниках», «Углы в многогранниках».

4. Результаты педагогического эксперимента.

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на научно–методических семинарах преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ(декабрь 2014г., июнь 2015г., декабрь 2015г., май 2016г.); на III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева, ноябрь 2014г.); научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (апрель 2015 г., апрель 2016 г.); на Всероссийской научно-практической конференции «Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи» (Майкоп, октябрь 2015г.).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций осуществлена в период педагогической и научно-исследовательской практик, а также в период работы учителем математики на базе школы № 70 г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в 2-х публикациях.

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы (62 наименования).

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИНЦИПА ДОСТУПНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ В СТАРШЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

§ 1. Понятие принципа доступности обучения

Принципы обучения – это основные положения, определяющие содержание, организационные формы и методы учебного процесса в соответствии с его общими целями и закономерностями (Википедия).

Принцип обучения – это исходные, основополагающие положения, определяющие деятельность учителя и характер познавательной деятельности ученика (С. П. Баранов) [5].

Принцип обучения направляет деятельность педагогов, реализуя нормативную функцию дидактики (В. В. Краевский, М. Н. Скаткин)[14].

Одним из принципов дидактики является *принцип доступности.*

С точки зрения педагогики:

Известны *классические правила*, относящиеся к практической *реализации принципа доступности*, сформулированные еще Я.А. Коменским: от легкого к трудному, от известного к неизвестному, от простого к сложному[1].

И.П. Подласый отмечает, что теория и практика современного обучения расширяют перечень обязательных для реализации правил доступного обучения. Доступность обучения определяется:

- возрастными особенностями школьников и зависит от их индивидуальных особенностей, от организации учебного процесса, от применяемых учителем методов обучения, и взаимосвязана с условиями протекания процесса обучения;

- его предысторией; чем выше уровень умственного развития школьников и больше имеющийся у них запас представлений и понятий, тем успешнее они могут продвинуться вперед при получении новых знаний [32].

Не стоит забывать наставления Я.А. Коменского: *все, подлежащее изучению, должно быть распределено сообразно ступеням возраста так, чтобы предполагалось для изучения только то, что доступно восприятию в каждом возрасте.*

По Л.С. Выготскому *принцип доступности* обучения при достаточном уровне его трудности требует учета в его организации реальных возможностей обучаемых, отказа от интеллектуальных и эмоциональных перегрузок, отрицательно складывающихся на их физическом и психическом здоровье. Реализация этого принципа связана и с учетом уровня развития познавательной сферы обучаемых.

Рассматриваемый принцип доступности предполагает построение учебного процесса таким образом, чтобы у учащихся появлялось желание преодолеть трудности и пережить радость успеха, достижения. Это помогает им снять повышенную тревожность и неуверенность в успехе при решении учебных задач.

Принцип доступности заключается в необходимости соответствия содержания, методов и форм обучения возрастным особенностям обучающихся, уровню их развития. Однако доступность не должна подменяться «легкостью», обучение не может обойтись без напряжения умственных сил учащихся [11].

Не надо забывать и о том, что высокий уровень развития достигается на пределе возможностей. Поэтому процесс обучения должен быть трудным, но посильным для учащихся.

Доступность обучения, прежде всего, определяется возрастными особенностями учащихся, но необходимо учитывать и другие факторы. Если учащихся вооружить более рациональными приемами работы по усвоению знаний, то это расширит их познавательные возможности, а значит, сделает доступным более сложный учебный материал.

Доступность определяется многими факторами: соблюдением принципов дидактики, тщательным отбором содержания, использованием более эффективной системы его изучения, более рациональных методов работы, мастерством самого обучающего и т.п.

В начале XX в. обучение в нашей стране начиналось с 9–10 лет, потом с 8 лет, а с 1944 г. стали обучать с 7 лет, в настоящее время официально обучение в России начинается с 6 лет. И это не означает что «опускалось» само содержание обучения, изменился характер обучения. И сегодня некоторые знания, формируемые в недалеком прошлом у школьников 12–13-летнего возраста, легко усваиваются 8–9-летними детьми.

Если первоначальная ступень российского школьного обучения ориентировалась прежде всего на формирование навыков чтения, письма, счета, то сегодня младшим школьникам даются и теоретические сведения о некоторых явлениях, что способствует развитию у них мышления.

Б.А. Голуб подчеркивает, что доступность учебного материала нельзя отождествлять с его сложностью. Он может быть трудным для одного ученика и совсем не трудным для другого. Поэтому доступность должна определяться уровнем подготовки ученика, его умственными и физическими возможностями.

Как правило, принцип доступности нарушается по трем основным причинам:

1. Учебный материал недоступен учащимся по своей глубине (большое количество абстрактных рассуждений, непонятных формул, математических расчетов и т.п.) и они не могут понять сущности изучаемого материала;

2. Материал недоступен по объему, в этом случае учащиеся не всегда успевают «переварить» соответствующее количество материала и усваивают его довольно поверхностно.

3. Материал недоступен для учащихся ввиду физического перенапряжения. В данном случае имеется в виду не просто усталость школьников, а именно перенапряжение в процессе выполнения непривычно большой физической нагрузки (в домашних условиях, в спортивных секциях и т.п.).

Правила принципа доступности в обучении:

1. Одним из главных правил является необходимость совпадения темпа сообщения информации учителем и скорости усвоения этой информации учащимися. Очень часто возникает вопрос: учитель должен говорить быстро или медленно? На него нельзя дать однозначного ответа. Скорость информации, сообщаемой учителем, должна учитывать особенности возраста, подготовленности и общего развития учащихся.
2. В процессе обучения необходимо ориентировать учащихся**,** прежде всего**,** на понимание изучаемого материала, а не на его запоминание. Традиционный репродуктивный (объяснительно-иллюстративный) процесс обучения ориентирует именно на запоминание, на повторение информации, данной учителем. Поэтому необходимо ставить учащихся в проблемные ситуации, предложить им, например, задачу практического содержания, для решения которой надо использовать на практике знания, данные учителем, а не просто повторить их.
3. Необходимо соблюдать и такие принципы дидактики, как «от простого к сложному», «от близкого к далекому», «от легкого к трудному», «от известного к неизвестному» и т. п. При этом, следует помнить об относительности этих принципов[11].

С точки зрения методики:

В процессе реализации *принципа научности* учитель должен соблюдать также принцип доступности, чтобы содержание, формы и методы обучения учитывали реальные возможности учащихся. Данный принцип предполагает учет возрастных особенностей учащихся. Он лежит в основе составления учебных планов и программ: объем и содержание учебного материала должны быть по силам учащимся, соответствовать уровню их умственного развития и имеющемуся запасу знаний, умений и навыков [28].

Ю.М. Колягин указывает, что *реализация принципа доступности* предполагает выполнение следующих условий - дидактических правил: а) следовать в обучении от простого к сложному; б) от легкого к трудному; в) от известного к неизвестному. При этом необходимо учитывать и то, что принцип доступности предполагает обучение на достаточно высоком уровне трудности. Однако это можно достигнуть лишь при наилучшем сочетании индивидуальных и коллективных форм познавательной деятельности школьников в обучении. Отсюда следует, что строгое соблюдение в обучении принципа систематичности и последовательности предопределяет успешную реализацию принципа доступности.

Принцип доступности в обучении привлекает к себе особое внимание также в связи с проблемой индивидуального подхода к учащимся в условиях массового обучения. Говоря о доступности в обучении математике, не следует понимать этот принцип как требование максимально облегчить для школьников процесс овладения ими знаниями и умениями. Речь идет о том, что обучение математике не должно быть настолько трудным, чтобы стать непосильным для учащихся данного возраста, не подорвать их веру в свои силы и возможности. При соблюдении принципа доступности регулируется уровень сложности учебного материала, определяется выбор методических подходов изложения его на уроке и правильная дозировка домашних заданий. Слишком упрощенное содержание обучения снижает его развивающие и воспитательные возможности. Поэтому рекомендуется, чтобы содержание заданий для учащихся находилось в "зоне их ближайшего развития"[27].

С точки зрения психологии:

- *Принцип доступности* - то же, что принцип посильности. Дидактический принцип, который означает учет возрастных различий и особенностей обучаемых при отборе материала с тем, чтобы изучаемый материал по содержанию и объему был посилен учащемуся …[2].
- *Принцип доступности* — содержание и способы взаимодействия в педагогическом процессе должны быть понятными и посильными для учащихся … [52].

Необходимость соотносить требования общества к образованию подрастающего поколения с возможностями учащихся, с условиями их обучения и воспитания настоятельно возникает через определенные промежутки времени. Каждый раз при этом на первый план выдвигается дидактическая проблема доступности обучения, которая требует своего решения как в педагогической теории, так и в школьной практике.

В настоящее время актуальность этой проблемы обусловлена, прежде всего, задачами совершенствования содержания образования: "уточнить перечень и объем материала изучаемых предметов, устранить перегрузку учебных программ и учебников, освободив их от излишне усложненного, второстепенного материала; предельно четко изложить основные идеи и понятия учебных дисциплин, обеспечить необходимое отражение в них новых достижений науки и практики".

Однако создание учебных программ и учебников, соответствующих реальным возможностям учащихся, требует, прежде всего, правильного и точного определения содержания понятия "принцип доступности обучения".

В учебной педагогической литературе данный принцип, как правило, означает: учебный материал должен соответствовать возрастным и психофизическим возможностям учащихся, т.е. материал должен быть дидактически обоснован, о силу чего он может быть полноценно усвоен детьми. Подобный подход к рассмотрению сущности дидактического принципа доступности имеет большое теоретическое и практическое значение, поскольку позволяет снять перегрузку учащихся, облегчить усвоение основ наук не в ущерб глубине и фундаментальности получаемого образования. (Н.Ш. Гамкрелидзе, 1998г.)

§ 2. Реализация принципа доступности в обучении геометрии в теме «Многогранники» авторами школьных учебников

Первые упоминания о многогранниках известны еще за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них – пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233 м и высота которой достигает 146,5 м. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса – немой трактат по геометрии.

Люди выражают заинтересованность к правильным многоугольникам и многогранникам в течение всей своей сознательной деятельности – от трехлетнего ребенка, играющего деревянными кубиками, до зрелого математика. Некоторые из правильных и полуправильных многогранников встречаются в природе в виде кристаллов, другие – в виде вирусов, которые можно рассмотреть с помощью электронного микроскопа.

Тема «Многогранники» - одна из основных в традиционном курсе школьной геометрии. Изучение параллельных и перпендикулярных прямых и плоскостей, двугранных углов - все это начала стереометрии, пропедевтика к исследованию ее более содержательных объектов – главным образом, тел и поверхностей.

При изучениии всего курса стереометрии центральная роль многогранников определяется прежде всего тем, что многие результаты, относящиеся к другим телам, получаются исходя из соответствующих результатов для многогранников. Достаточно вспомнить определение объемов тел и площадей поверхностей путем предельного перехода от многогранников.

Изучению геометрии многогранников в школьном курсе геометрии необходимо значительное количество часов с целью развития пространственных представлений и того соединения живого пространственного воображения со строгой логикой, которое составляет сущность геометрии. Уже доказательства несложных свойств многогранников требуют соединения пространственного воображения и логического мышления, при этом могут потребоваться и арифметические вычисления. Даже такой простой факт, как пересечение диагоналей параллелепипеда в одной точке, требует определенного воображения, чтобы его «увидеть» наглядно, и нуждается в строгом доказательстве.

Более того, использование многогранников с самого начала изучения стереометрии служит различным дидактическим целям. Например, на моделях или изображениях многогранников удобно демонстрировать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, комментируя применение признаков их параллельности и перпендикулярности. Иллюстрация первых теорем стереометрии также на конкретных моделях с многогранниками способствует осознанному восприятию геометрического материала, что повышает интерес учащихся к предмету.

Также одной из основных задач обучения геометрии является развитие у учащихся абстрактного мышления. Этой цели в значительной мере способствует применение наглядных моделей, призентаций с изображением многогранников, причем, это может служить мотивацией для самостоятельного изготовления учениками наглядных пособий. В процессе изготовления моделей многогранников, кроме теоретических знаний и навыков, ученики закрепляют сформировавшиеся новые понятия при помощи чертежа и фактического решения задач на построение. При самостоятельном изготовлении моделей образ создается по частям, в силу этого с данными моделями можно производить различные конструктивные комбинации. При таком конструировании познаются и прочно закрепляются в памяти учащихся многие, наиболее важные, для данной фигуры свойства.

Выделяют два основных способа введения понятия многогранника в школьном курсе стереометрии:

1) многогранник как поверхность;
2) многогранник как тело.

Чаще используется второй путь.

Дать строгое определение понятию многогранника в школе трудно, так как в определение входят такие понятия как поверхность, ограниченность, внутренние точки и др. Такая попытка была сделана в книге В.М. Клопского, З.А. Скопеца, М.И. Ягодовского «Геометрия 9-10» [24], но было очень сложно, так как определение вводилось в несколько шагов, было много вспомогательных понятий.

К примеру, *в учебнике «Геометрия 10-11» Атанасяна Л.С.* [4] раздел «Многогранники» изучается в 10 классе после прохождения параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. На тему «Многогранники» уделено 14 часов (таб. 1).

Таблица 1

Параграф и пункты учебника	Содержание	Количество часов
Глава III	**Многогранники**	**14**
§1	**Понятие многогранника. Призма.**	**3**
27	Понятие многогранника	
28	Геометрическое тело	
29	Теорема Эйлера	
30	Призма	
31	Пространственная теорема Пифагора	
§2	**Пирамида.**	**4**
32	Пирамида	
33	Правильная пирамида	
34	Усеченная пирамида	
§3	**Правильные многогранники.**	**5**
35	Симметрия в пространстве	
36	Понятие правильного многогранника	
37	Элементы симметрии правильных многогранников	
	Контрольная работа Зачет	2

По словам автора: «*Многогранник* – это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело». «Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани». Дальше вводится понятие геометрического тела, ограниченной фигуры, изучаются призмы и пирамиды с нахождением площадей боковой и полных поверхностей. Понятием *правильного многогранника* - выпуклый многогранник, в котором все его грани равные правильные многоугольники, и в каждой его вершине сходится одно и тоже число ребер, и задачами на правильные многогранники изучение данного раздела стереометрии заканчивается.

В учебнике «Геометрия 10-11» Смирновой И.М. [55,56] на тему «Многогранники» отведено 19 часов (таб. 2):

Таблица 2

Параграф учебника	Содержание	Количество часов
24	Многогранные углы	3
25	Выпуклые многогранники	2
26	Теорема Эйлера	3
27	Правильные многогранники	3
28	Полуправильные многогранники	2
29	Звездчатые многогранники	2
30	Кристаллы – природные многогранники	2
	Контрольная работа	2

Раздел «Многогранники» изучается в конце 10 классе. Введение понятия «многогранника» опирается на определение многогранных углов. Многогранный угол называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок. По словам автора: «*Многогранник называется выпуклым*, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок. *Выпуклый многогранник* называется *правильным,* если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Само определение многогранника дается сразу после аксиом стереометрии: «многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников называемых гранями многогранника».

В учебнике «Геометрия 10-11» Шарыгина И.Ф. [62] тема «Многогранники» изучается в 10 классе и отводится на нее 14 ч (таб. 3).

Таблица 3

Параграф и	Содержание	Количество

пункты учебника		часов
§2	**Многогранники**	**14**
2.1	Изображение многоугольников и многогранников	1
2.2	Построения на изображениях	2
2.3	Выпуклые многогранники	1
2.4	Многогранные углы	2
2.5	Правильная пирамида	4
2.6	Призма, параллелепипед	4

Автор не дает строгое определение многогранника, а говорит, что под многогранником будем понимать ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников, называемых гранями многогранника.

Тема многогранники изучается после изучения темы «Прямые и плоскости в пространстве», где рассматриваются вопросы о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, измерении углов между ними.

В учебнике «Геометрия 10-11» Потоскуева Е.В., Л.И.Звавича [35, 36, 45]

данная тема изучается в 11 классе (таб. 4, 5).

Таблица 4

Параграф и пункты учебника	Содержание	Количество часов
§2	Многогранники	8
§3	Призма и параллелепипед	6
§4	Трехгранные и многогранные углы	6
§5	Пирамида	8
§6	Правильные многогранники	6

Таблица 5

Раздел 2: Многогранники - 37 ч			
1	Выпуклая, связная, ограниченная геометрическая фигура. Геометрическое тело, его внутренность и поверхность	1	**знать:**

2	Многогранник и его элементы. Эйлерова характеристика многогранника. Теорема Декарта – Эйлера для выпуклого многогранника Понятие о развертке многогранника. Свойства выпуклых многогранников	1	Эйлерову характеристику многогранника, формулы площади боковой поверхности и формулы объема многогранников **уметь:** находить площадь боковой поверхности многогранника и вычислять объемы тел
3	Понятие объема тела. Свойства объемов тел. Равновеликие и равносоставленные тела. Объем прямоугольного параллелепипеда	2	
4	Определение призмы и ее элементов. Прямая и наклонная призмы Правильная призма. Объем прямой и наклонной призм.	2	**знать:** определение призмы и ее элементов, формулы площади боковой поверхности и формулы объема призмы **уметь:** находить площадь боковой поверхности и объем призмы, строить сечения призмы различными методами
5	Параллелепипед Куб. свойства диагоналей параллелепипеда. Свойство прямоугольного параллелепипеда. Объем параллелепипеда Построение сечений призм и параллелепипедов различными методами	3	
6	Контрольная работа № 2 «Многогранники. Призма и параллелепипед».	2	
7	Понятие о многогранном угле. Многогранные углы при вершинах многогранников. Трехгранный угол	2	**знать:** определение трехгранного угла, теорему о плоских углах трехгранного угла, теорему о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла **уметь:** применять теорему синусов и теорему косинусов трехгранного угла
8	Теорема о плоских углах трехгранного угла	1	
9	Теорема о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла	1	
10	Теорема синусов и теорема косинусов трехгранного угла	2	
11	Определение пирамиды и ее элементов	1	**знать:** определение пирамиды, частные случаи пирамид, формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей и формулу объема пирамиды **уметь:**
12	Формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей пирамиды	2	
13	Правильная пирамида и ее свойства. Апофема правильной пирамиды.	1	

14	Формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей правильной пирамиды	2	вычислять площади боковой и полной поверхностей и объем пирамиды
15	Контрольная работа № 3 «Пирамида»	2	
16	Усеченная пирамида. Формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей правильной усеченной пирамиды	1	
17	Объем усеченной пирамиды и формулы его вычисления	1	
18	Тетраэдр. Отношение объемов двух тетраэдров, имеющих равные трехгранные углы.	2	**знать:** виды, элементы и свойства правильных многогранников. Формулы для вычисления площадей поверхности правильных многогранников и формулы объемов **уметь:** вычислять площади поверхностей и объем правильных многогранников
19	Виды, элементы и свойства правильных многогранников	2	
20	Вычисление площадей поверхности правильных многогранников	2	
21	Вычисление объемов правильных многогранников	2	
22	Контрольная работа № 4 «Правильные многогранники»	2	

Геометрическое тело – это связная замкнутая фигура, т.е. фигура в пространстве, обладающая следующими свойствами: 1) у нее есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить линией, которая целиком состоит из внутренних точек; 2) фигура содержит свою границу, и эта граница совпадает с границей множества всех внутренних точек фигуры.

Авторы учебника вводят строгое определение: «Многогранник – геометрическое тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников».

Заметим, что в УМК-10 этих авторов изучение геометрии прямых и плоскостей ведется с использованием таких многогранников, как правильный тетраэдр, куб, правильная шестиугольная призма. Такое изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве с использованием моделей указанных многогранников методически оправдано тем, что учащиеся пропедевтически знакомятся со свойствами куба, правильного тетраэдра и других многогранников до серьезного и детального изучения их свойств в 11 классе.

Анализируя педагогическую, психологическую, методическую и учебную литературу, можно отметить, что основным компонентом дидактического принципа обучения – доступности, является последовательное изложение (самостоятельное изучение) учебной информации «от простого к сложному», учитывая уже имеющие знания каждого ученика индивидуально.

Важны формы преподавания учебного материала, изложение которого требует систематизации, последовательности и доступности в объяснении.

Выводы по первой главе

Таким образом, обобщая представленный исторический обзор развития понятия «принципа доступности», мною выделены следующие существенные признаки этого принципа.

Принцип доступности:

а) является критерием при отборе учебного материала;

б) учитывает уровень имеющихся знаний у учащихся;

в) требует соответствия содержания, методов, форм, средств, объема учебного материала возрастным особенностям учащихся;

г) придерживается принципа «от простого к сложному»;

д) направлен на преодоление у учеников познавательных затруднений;

е) определяет меру посильной трудности в освоении содержания образования.

Глава 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПА ДОСТУПНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «МНОГОГРАННИКИ» В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Методические аспекты реализации принципа доступности при решении позиционных задач в теме «Многогранники»

Одной из самых важных задач преподавания геометрии в школе является формирование и развитие у учащихся пространственных представлений, а также способности и умения производить операции над пространственными объектами. Слабое развитие пространственных представлений дает о себе знать уже в школе, затрудняя изучение ряда школьных предметов, а в деятельности взрослого человека оно иногда оказывается причиной многих неудач.

Н.Ф. Четверухин в методическом пособии «Стереометрические задачи на проекционном чертеже» отметил: «способность видеть геометрию вокруг себя есть ценнейшее качество, которое должно быть всемерно поддержано и развито. Оно приводит к образованию абстрактных понятий геометрических фигур» [59].

В большинстве стереометрических задач наибольшую трудность представляет начальный этап решения – изображение искомого элемента.

Позиционными (аффинными) называются *задачи*, в которых определяется взаимное положение точек, прямых и плоскостей изображенных фигур.

По мнению Е.В. Потоскуева: «нахождение расстояний в пространстве – важнейшая часть стереометрии, на которой основываются все метрические вопросы пространственной геометрии, в том числе – нахождение углов, площадей и объемов. Поэтому учащиеся должны научиться «видеть в пространстве» расстояния от точки до прямой и до плоскости, верно изображать на рисунке перпендикуляр из точки на прямую или на плоскость, находить расстояния между фигурами. При этом умение «видеть» и вычислять расстояния от точки до фигуры (прямой, плоскости и др.) является фундаментом для успешного изучения всей метрической стереометрии» [47].

Чтобы решить одну из важнейших задач стереометрии – развить у учеников пространственное мышление, нужно уделить особое внимание позиционным задачам в различных темах. Преимущество позиционных задач заключается в том, что, строя на чертеже искомые элементы и производя необходимые операции, мы прививаем ученикам графическую культуру, что является залогом решения геометрических задач. С другой стороны, иллюстрируя наглядное пространственное представление изучаемых геометрических образов, мы учим учеников логическому и пространственному мышлению, основанному на теоретических знаниях. Поэтому, по мнению Е.В. Потоскуева, «умение «видеть» и вычислять» стоят именно в таком порядке, сначала «увидеть», а потом уже вычислять, в этом и заключается принцип доступности при обучении решению задач [34].

Проанализируем профильные школьные учебники по геометрии 10 класса на наличие в них позиционных задач по теме «Расстояния в многогранниках». Для этого необходимо рассмотреть ряд задач, представленных в учебниках разных авторов.

Учебник И.М. Смирновой [55, 56]: двухуровневый: с учетом параграфов со звездочкой он соответствует профильному уровню, без их учета – базовому. Помимо традиционных задач, содержатся нестандартные и исследовательские задачи. В учебнике используются следующие обозначения (○ - устная задача, * - задачи повышенной трудности). Приведем примеры задач из темы «Многогранники»:

(3, [56]) (устно) Чему равно расстояние между параллельными гранями к кубе? *Ответ:* длине ребра куба.

(2, [56]). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние между вершиной A_1 и: а) ребром CD; б) диагональю BD; в) диагональю AC_1. *Ответ:* а) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(4, [56]) (устно) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние: а) от вершины A_1 до плоскости ABC; б) от вершины A до плоскости BB_1D_1. *Ответ:* а) a; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(7, [55]). Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите расстояние между его скрещивающимися ребрами. *Ответ:* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(8, [55]). В правильной треугольной призме со стороной основания a и боковым ребром b найдите расстояния между скрещивающимися ребрами. *Ответ:* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, b.

(9, [55]). Для куба $A\ldots D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися прямыми: а) AD и A_1C_1; б) AC_1 и DD_1; в) AD и A_1B_1; г) AC и B_1D_1; д) AC и DD_1; е) AC_1 и BD. *Ответ*: а) a; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) a; г) a; д) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

(6, [56]). В прямой четырехугольной призме, в основании которой – ромб со стороной a и острым углом φ, найдите расстояние между его скрещивающимися ребрами. *Ответ:* $a\cdot \sin\varphi$.

Проанализировав данные задачи, можно проследить реализацию принципа доступности «от простого к сложному», но позиционных задач по данной теме нет.

Учебник Л.С. Атанасяна и др. [4]. Задачи повышенной сложности выделены *. Приведем примеры задач из темы «Многогранники»:

(193, [4]). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $D_1B=d$, $AC=m$, $AB=n$. Найдите расстояние между: а) прямой A_1C и плоскостью ABC? б) плоскостями ABB_1 и DCC_1; в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1.

Ответ: а) $\sqrt{d^2-m^2}$; б) $\sqrt{m^2-n^2}$; в) $\frac{n\sqrt{m^2-n^2}}{m}$.

(194, [4]). Ребро куба равно *a*. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими: а) диагональ куба и ребро куба; б) диагональ куба и диагональ грани куба. *Ответ:* а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

(292, [4]). В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 6 см, боковое ребро равно 8 см. Найдите расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы. *Ответ:* 4,8 см.

Анализируя задачи из учебника, автор которого Л.С. Атанасян, принцип «от простого к сложному» выполняется, но нет позиционных задач.

Учебник И.Ф. Шарыгина [63] двухуровневый. В учебнике * отмечены параграфы для углубленной подготовки, важные задачи отмечены буквой (в), полезные - буквой (п), трудные – буквой (т).

Приведем примеры задач из темы «Многогранники»:

(1, [63]). Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M – середина BB_1. Найдите расстояние между следующими прямыми: а) AB_1 и D_1B; б) AB_1 и CM; в) A_1B и DM; д) AC_1 и DM. В каждом случае укажите, в каком отношении общий перпендикуляр к указанным прямым делит соответствующий отрезок. *Ответ:* а) $\frac{1}{\sqrt{6}}$,1:1 и 1:2; б) $\frac{1}{3}$; 7:2(от вершины A), основание перпендикуляра находится на продолжении CM за точку M на расстоянии, равном $\frac{1}{9}$CM; в) $\frac{1}{3}$; 2:7 (от вершины A), 8:1 (от вершины C); г) $\frac{1}{3}$; 4:1 (от вершины A), 8:1 (от вершины D); д) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; 11:15 (от вершины A), 6:7 (от вершины D).

И в учебнике И.Ф. Шарыгина нет позиционных задач по теме « Многогранники».

Авторы учебников [37,38,39,40,43] *Е. В. Потоскуев и Л. И. Звавич* в своих методических рекомендациях констатируют, что трудности, возникающие на первых уроках стереометрии в 10 классе, успешно преодолеваются, если изучение теоретического материала начал стереометрии сопровождается моделями и изображениями различных многогранников и последующими дополнительными построениями на этих изображениях. При этом решаемые задачи обладают конкретностью, содержательностью и конструктивностью.

Если изображена пирамида или призма неизвестной формы, то возможно решение лишь задач аффинного (позиционного) характера, то есть задач, в которых определяется взаимное положение точек, прямых и плоскостей изображенных фигур.

Решение же стереометрических задач на определение расстояний и углов (задач метрического характера) становится возможным лишь на метрически определенном чертеже. Метрическая определенность (метризация) чертежа (рисунка) обеспечивается изображением на этом чертеже (рисунке) многогранника *заданной формы*, которая достигается заданием длин ребер и величин углов в данном многограннике. Критерием метризации изображения неплоской фигуры является следующая теорема: *Если в параллельной проекции дано изображение тетраэдра, форма которого известна, то изображение метризовано*[47].

Вследствие того, что правильный тетраэдр, куб, правильная пирамида или правильная призма с заданными длинами ребер и величинами углов являются многогранниками известной формы, их использование способствует эффективному «вхождению в метрическую стереометрию» в 10 классе. Соблюдая принцип «от простого - к сложному» и придерживаясь динамики: воображение - изображение - доказательство - вычисление - оформление решения, учащийся постоянно выработает привычку и умение осознанно, с мотивированной аргументацией доказывать теоремы и решать любого уровня сложности задачи на нахождение расстояний и углов, определение других метрических характеристик заданных фигур [40].

Во всех позиционных задачах вопрос может быть сформулирован следующим образом: «Определите взаимное расположение (положение)….», «Опустите перпендикуляр….» и т.д.

Рассмотрим решение нескольких подобных задач.

Задача 1 [41]**.** Точка Н – середина ребра РВ правильного тетраэдра РАВС (рис. 1).

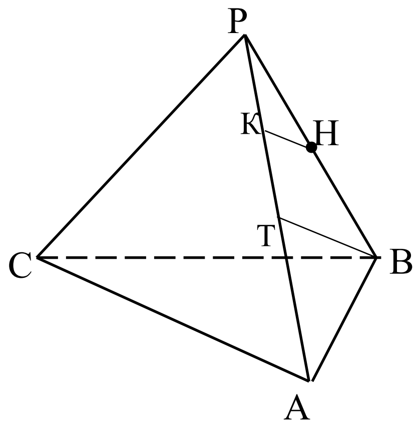


Рис. 1

Опустите перпендикуляры из точки Н на прямые: а) АР; б) ВС; в) АВ; г) СР. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $2\sqrt{3}$.

Решение. Разберем подробно задачу а). Проведем в равностороннем Δ АВР медиану ВТ, которая является и высотой Δ АВР (свойство равностороннего треугольника). Имеем: ВТ$\perp$ АР. Через точку Н $\in$ ВР проведем прямую, параллельную ВТ. Получили: НК $\parallel$ВТ, НК $\perp$АР (следствие: если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой). Через точки В и Н $\angle$ТРВ проведены параллельные прямые. Так как на стороне ВР: ВН = РН, то на основании теореме Фалеса точка К – середина ТР, КН – искомый перпендикуляр.

Так как ВТ – медиана равностороннего Δ АВР со стороной $2\sqrt{3}$, то ВТ $= \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3$.

КН –средняя линия Δ ВРТ $\Rightarrow$ КН$=\frac{1}{2}\cdot$ВТ$= \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Аналогично решаются остальные задачи. *Ответ:* а)1,5; б)1,5; в)1,5; г)1,5.

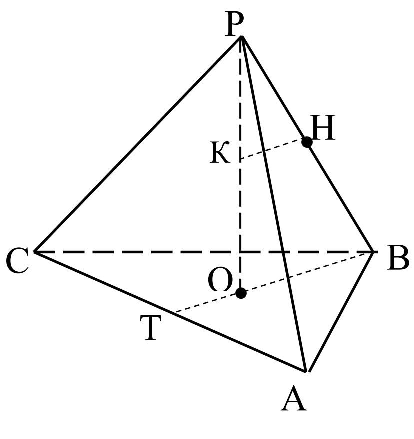


Рис. 2

Задача 2 [41]. Точка Н – середина ребра РВ правильного тетраэдра РАВС (рис.2). Опустите перпендикуляры из точки Н: а) на прямую АС; б) на высоту РО тетраэдра, О $\in (ABC)$. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $2\sqrt{2}$.

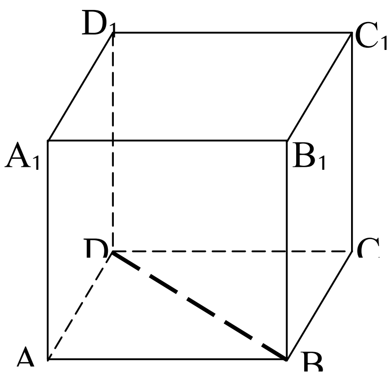
Решение: б) Так как дан правильный тетраэдр PABC, то точка O- основание высоты PO, является центроидом равностороннего Δ ABC. Имеем: PO $\perp$(ABC) $\Rightarrow$ PO$\perp$ OB. Проведем через точку H$\in$BP прямую, параллельную OB. Получили: точка K$\in$OP, HK $\parallel$OB, HK$\perp$OP (следствие: если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой). Через точки B и H $\angle$OPB проведены параллельные прямые. Так как на стороне BP: BH = PH, то на основании теореме Фалеса точка K – середина OP. KH – искомый перпендикуляр.

Так как точка O – центроид равностороннего Δ ABC со стороной $2\sqrt{2}$, BT – медиана, то OB = $\frac{2}{3}\cdot BT = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

KH – средняя линия (точки K и H – середины сторон OP и BP) Δ OBP. Значит, KH = $\frac{1}{2}\cdot$ OB = $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: а) 2; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Затем ученикам можно предложить задачи для самостоятельного решения.

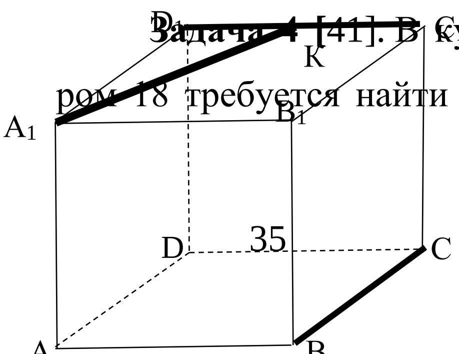


Задача 3 [41]. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3) найдите расстояние до прямой BD от вершин: а) B_1; б) A; в) A_1; г) C_1, если ребро куба равно 6.

Ответ: а) 6; б) $3\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{6}$; г) $3\sqrt{6}$.

Рис. 3

Задача 4 [41]. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 18 требуется найти расстояние между прямы-



ми: а) ВС и D_1C_1; б) ВС и A_1K (рис.4), где К – середина D_1C_1.

Ответ: а) 18; б) 18.

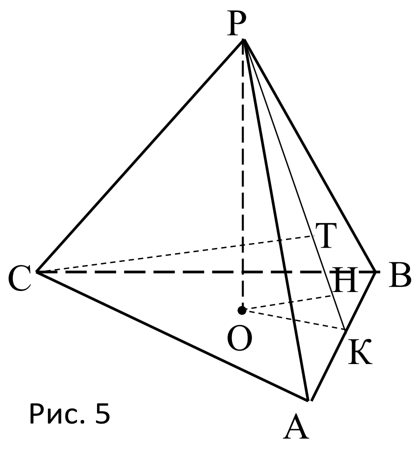


Рис. 5

Задача 5 [41]. Точка О–центр грани АВС правильного тетраэдра РАВС(рис. 5). Опустите из точки О перпендикуляры на грани: а) РАВ; б) РВС; в) РАС и найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $3\sqrt{6}$.

Решение: а). РАВС – правильный тетраэдр, поэтому основание высоты, опущенной из вершины С на (АВР), является центроидом равностороннего Δ АВР, точка Т.

Имеем: СТ $\perp$(АВР), точки: С, О и Т принадлежат (ОСР). Проведем из точки О прямую, параллельную СТ. Получили: ОН $\perp$(АВР) $\Rightarrow$ ОН $\perp$ РК, Н $\in$РК, где РК – медиана Δ АВР. Значит, РК= $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Из условия, что точка О–центр грани АВС $\Rightarrow$ ОК = $\frac{1}{3}\cdot$РК = $\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольном Δ РОК на основании теоремы Пифагора РО = $\sqrt{PK^2-OK^2} = \sqrt{(\frac{9\sqrt{2}}{2})^2-(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2} = 6$.

ОН = $\frac{OP\cdot OK}{PK} = \frac{6\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = 2$ – как высота, проведенная из вершины прямого угла с гипотенузе.

Аналогично решаются другие задачи.

Ответ: а) 2; б) 2; в) 2.

Следующую задачу можно предложить продвинутым ученикам для самостоятельного решения.

Задача 6 [41]. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 6), все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

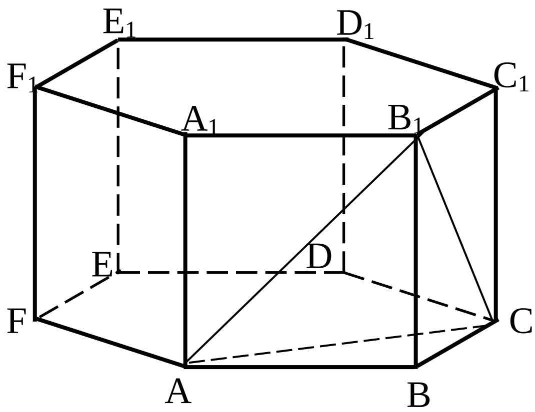


Рис. 6

Решая позиционные задачи, ученики приобретают навыки «видеть» искомый элемент, строить его, аргументируя свои действия теоретическими знаниями стереометрии. Решение позиционных задач – необходимый элемент в реализации принципа доступности при обучении геометрии.

Анализируя современные школьные учебники и пособия, можно наблюдать градацию учебного материала на базовый и профильный уровни; необходимые и трудные задачи. Все это способствует реализации принципа доступности в обучении предмета.

§ 2. Методические аспекты реализации принципа доступности при изучении темы «Расстояния в многогранниках» в задачах

1) Расстояние от точки до прямой.

Так как тема «Многогранники» по УМК-10-11кл. Е.В. Потоскуева Л.И. Звавича изучается в 11 классе, то целесообразно данную тему начать с повторения теоретического материала 10 класса.

Расстоянием от данной точки М до данной прямой *a,* не проходящей через точку *М*, называется длина перпендикуляра, опущенного из точки *М* на прямую *a*. Расстояние от точки М до прямой *a* будем символически обозначать: ρ(М;*a*) (рис.7).

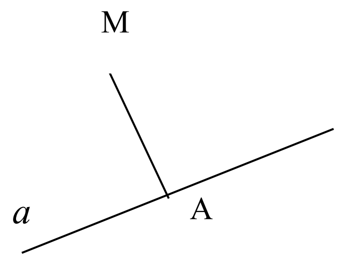


Рис.7

Для нахождения расстояния от точки М, не лежащей в плоскости α (рис.8), до прямой *a,* лежащей в этой плоскости, проводят перпендикуляр МР из точки М на плоскость α (Р $\in$ α), |МР| =h= ρ(М;α). При этом, если точка Р принадлежит прямой *a*, то ρ(М;*a*) = ρ(М;α) = |МР| = h. Если точка Р не принадлежит прямой *a* (рис.9), то из точки Р проводят в плоскости α перпендикуляр РК к прямой *a*, К$\in a$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах МК $\perp$ *a,* поэтому ρ(М; *a*) = |МК| $=\sqrt{МР^2 + РК^2}$[43].

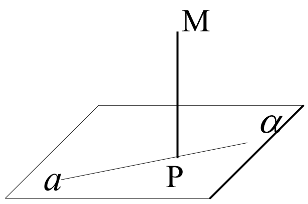


Рис.8

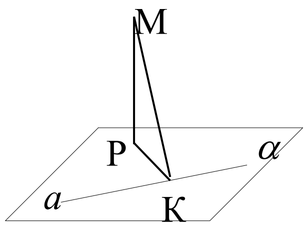


Рис.9

При решении задач на нахождение расстояния от точки до прямой, учащиеся должны знать, что:

— существует единственная прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная данной прямой;

— существует единственная прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная данной плоскости;

— отрезок прямой, перпендикулярной данной плоскости, один конец которого принадлежит этой плоскости (*основание перпендикуляра*), а другой – данная точка, называется *перпендикуляром, проведенным из данной точки на данную плоскость;*

— всякий отрезок, который соединяет данную точку с точкой на плоскости и не является перпендикуляром к этой плоскости, называется *наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости.* Конец этого отрезка, принадлежащий плоскости, называется *основанием наклонной;*

— отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных к плоскости из одной точки, называется *ортогональной проекцией наклонной на эту плоскость;*

— если из одной точки, не принадлежащей плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонная, то длина наклонной больше длины перпендикуляра;

— длина проекции наклонной меньше длины самой наклонной;

— длины наклонных, проведенных из одной точки, не принадлежащей плоскости, равны тогда и только тогда, когда равны длины их проекций;

— если из одной точки, не принадлежащей плоскости, проведены две наклонные к этой плоскости, то большей наклонной соответствует большая проекция;

— *если прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то данная прямая перпендикулярна и самой наклонной* (теорема о трех перпендикулярах);

— *если на плоскости проведена прямая перпендикулярно наклонной, то эта прямая перпендикулярна проекции наклонной* (теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах).

Также необходимо решить ряд пропедевтических задач на доказательство и основные теоремы стереометрии. Рассмотрим решение следующих задач.

Задача 7 (№ 3.036, [36]). Точка O- центроид правильного треугольника ABC; OP-прямая, перпендикулярная плоскости ABC; M-произвольная точка прямой OP (M $\neq$ O). Докажите, что: а) расстояния от точки M до вершин треугольника ABC равны; б) расстояния от точки M до сторон треугольника ABC равны.

Решение. Точка O является центром вписанной и описанной окружностей для ΔABC (рис. 10).

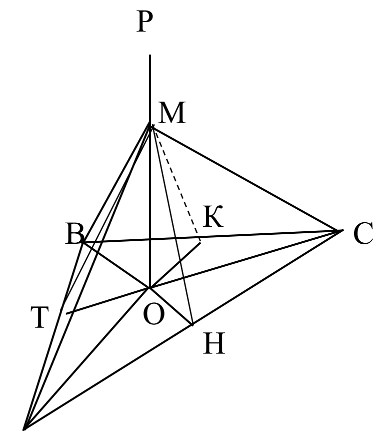


Рис.10

а) Имеем: M$\in$ PO$\perp$(ABC) и (M $\neq$ O) $\Rightarrow$ MO является перпендикуляром к плоскости ABC, где точка O – основание этого перпендикуляра $\Rightarrow$ OA, OB, OC являются соответственно проекциями наклонных MA, MB, MC на (ABC). Так как OA=OB=OC (как радиусы описанной окружности около равностороннего Δ ABC), то MA=MB=MC (как наклонные, имеющие равные проекции).

б) Имеем: M$\in$ PO$\perp$(ABC) и (M $\neq$ O) $\Rightarrow$ MO$\perp$(ABC). По условию Δ ABC – равносторонний $\Rightarrow$ AB=BC=AC. Из доказанного выше (пункт а)) MA=MB=MC.

Значит, Δ AMB = Δ AMC = Δ BMC. В равных треугольниках высоты, проведенные из точки M, равны. Следовательно, MT=MK=MH и являются расстояниями от точки M до сторон Δ ABC, что и требовалось доказать.

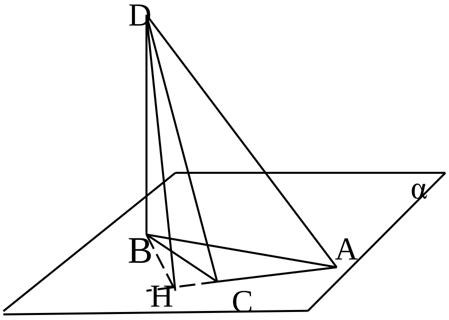


Рис.11

Задача 8. В треугольнике ABC AC = BC = =10 см, $\angle ABC = 30^o$, BD $\perp$ (ABC), BD = 5см. Найти расстояние от точки D до прямой AC (рис.11).

Решение. Имеем: AC = BC $\Rightarrow$ Δ ABC – равнобедренный; $\angle ABC = 30^o \Rightarrow \angle BCA = 180^o - 2 \cdot 30^o = 120^o$, следовательно, Δ ABC – тупоугольный, значит, основание высоты, опущенной из вершины B на AC, лежит на продолжении стороны АС. Построим ВН $\perp$ АС. Так как BD$\perp$ (АВС) и ВН$\subset$(АВС), то BD $\perp$ ВН (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости), а значит, ВН-проекция наклонной DH на плоскость α. Получили: BD $\perp$ (АВС), АС$\subset$(АВС), ВН$\subset$(АВС), ВН $\perp$ АС$\Rightarrow$ DH $\perp$ АС (по теореме о трех перпендикулярах). Значит, DH является искомым расстоянием от точки D до прямой АС.

В прямоугольном ΔBCH: $\angle$BCH=60° (как смежный с $\angle$ BCA =120°). Найдем сторону ВН: ВН= ВС $\cdot$ sin60° = 10 $\cdot$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $5\sqrt{3}$см. Тогда в прямоугольном ΔDBH по теореме Пифагора получаем: DH $=\sqrt{BD^2+BH^2}=\sqrt{5^2+(5\sqrt{3})^2}$ = 10 (см).

Ответ: 10см.

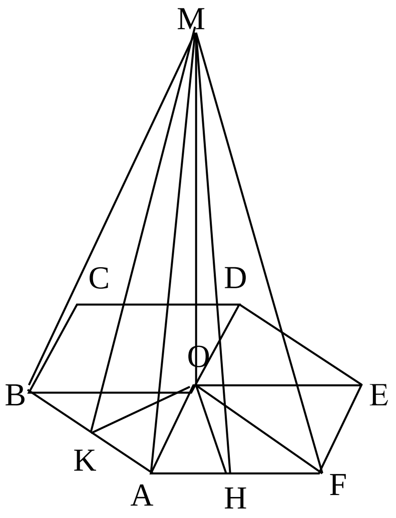


Рис.12

Задача 9 (№ 3.033, [36]). Расстояние от точки М до плоскости правильного шестиугольника со стороной 8 равно 8. Найдите расстояния от точки М до сторон шестиугольника, если она равноудалена от каждой из них.

Решение. Пусть ABCDEF – данный правильный шестиугольник, в котором АВ = 8; МО$\perp$(АВС), О$\in$(АВС), МО = 8.

Если МК $\perp$ АВ и МН $\perp$ AF (рис.12), то МК = ρ(М;АВ), МН =ρ(M;AF), при этом из ρ(М;АВ)= ρ(M;AF) следует МК = МН. Тогда: ОК $\perp$ АВ, ОН $\perp$ AF (по теореме о трёх перпендикулярах), ОК = ОН (как проекции равных наклонных). Это означает, что точка О равноудалена от сторон АВ и AF данного шестиугольника ABCDEF.

Аналогично можно доказать, что точка О равноудалена от всех сторон этого шестиугольника, поэтому эта точка является его центром. Кроме того, Δ АОВ – правильный со стороной, равной 8, и ОК $\perp$ АВ, следовательно, ОК

– медиана этого треугольника, откуда: ОК = $\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{2}$ = $4\sqrt{3}$. А так как точка О равноудалена от всех сторон этого шестиугольника ABCDEF, то точка М также равноудалена от этих сторон (по свойству наклонных, имеющих равные проекции). Найдем расстояние от точки М до прямой АВ.

В прямоугольном Δ МОК по теореме Пифагора находим: МК = $=\sqrt{OK^2+OM^2}$ = $\sqrt{(4\sqrt{3})^2+8^2}$ = $\sqrt{112}$ = $4\sqrt{7}$. На таком же расстоянии удалена точка М от всех остальных сторон шестиугольника ABCDEF.

Ответ: $4\sqrt{7}$.

Задача 10 [9]. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.13). Найти расстояние от точки до прямой (данные в таблице), где О и O_1 – точки пересечения диагоналей оснований (таб. 6): Таблица 6

Точка и прямая	Искомый отрезок	Расстояние между точкой и прямой
а) B и AD	AB	1
б) B и B_1C_1	BB_1	1
в) B и AC	BO	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
г) B и A_1C_1	BO_1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
д) A_1 и BD	A_1O	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
е) D и B_1C_1	DC_1	$\sqrt{2}$
ж) D и A_1B_1	DA_1	$\sqrt{2}$
з) D и B_1D_1	DD_1	1

Решение. в) Пусть О – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD, значит, BO ⊥ AC (свойство диагоналей квадрата) ⇒ ρ(B;AC) = BO. Δ ABC - равнобедренный (AB=BC), следовательно, BO - высота и медиана (свойство равнобедренного треугольника), а так как в квадрате со стороной равной

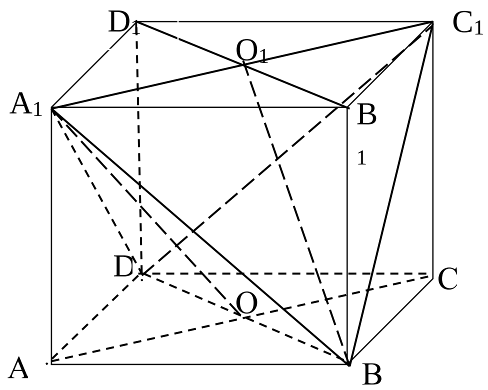


Рис.13

1, диагонали равны $\sqrt{2}$, то BO = $\frac{1}{2}\cdot$BD= = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

г) Пусть O_1 – точка пересечения диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$, тогда A_1O_1 = C_1O_1 (свойство диагоналей квадрата).

Δ A_1BC_1 - равносторонний (стороны являются диагоналями равных квадратов) со стороной $A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1{}^2 + .B_1C_1{}^2}$ = $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. BO_1-медиана и высота Δ A_1BC_1, следовательно, $\rho(B;A_1C_1) = BO_1$. Зная, что медиана равностороннего треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, получаем: $BO_1 = \frac{A_1B\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

д) Пусть O – центр квадрата ABCD, тогда DO = OB (свойство диагоналей квадрата).

Имеем: Δ DA_1B – равносторонний, так как стороны являются диагоналями граней куба. Следовательно, A_1O является медианой и высотой Δ DA_1B, тогда $\rho(A_1;BD) = OA_1$. В прямоугольном Δ ABA_1 находим: A_1B $= \sqrt{AB^2 + AA_1{}^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Зная, что медиана равностороннего треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, получаем: $OA_1 = \frac{A_1B\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

е) В кубе ребро $DD_1 \perp (A_1B_1C_1)$, $D_1C_1 \subset (A_1B_1C_1)$, следовательно, D_1C_1 является проекцией наклонной DC_1 на $(A_1B_1C_1)$. Так как $D_1C_1 \perp B_1C_1$, то по теореме о трех перпендикулярах $DC_1 \perp B_1C_1$, т.е. $\rho(D;B_1C_1) = DC_1$. В прямоугольном Δ DCC_1 по теореме Пифагора: $DC_1 = \sqrt{2}$ (как диагональ единичного квадрата).

ж) В кубе ребро $DD_1 \perp (A_1B_1C_1)$, $D_1A_1 \subset (A_1B_1C_1)$, следовательно, D_1A_1 является проекцией наклонной DA_1 на $(A_1B_1C_1)$. Так как $DA_1 \perp B_1A_1$, то $\rho(D;B_1A_1) = DA_1$. В прямоугольном Δ DAA_1 по теореме Пифагора: DA_1 $= \sqrt{AD^2 + AA_1{}^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

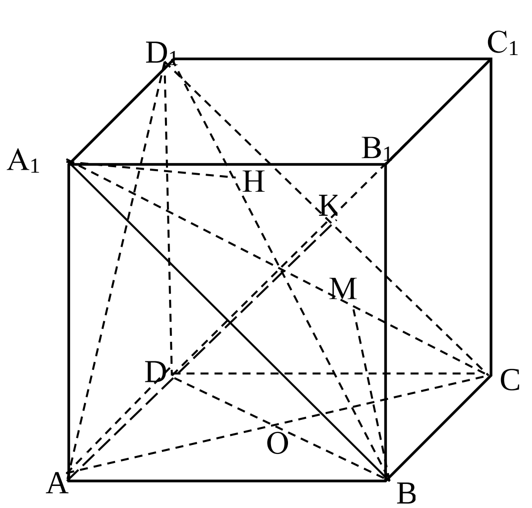


Рис.14

Задача 11 [9]. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти расстояние: а) от точки A до прямой CD_1; б) от точки B до прямой A_1C; в) от точки A_1 до прямой D_1B.

Решение. а) Проведем диагонали граней куба: AD_1, D_1C и AC (рис.14), получили равносторонний $\Delta\ ACD_1$ (сторонами являются диагонали равных квадратов). Пусть $K = DC_1 \cap CD_1$, тогда AK – высота и медиана равностороннего треугольника ACD_1, проведенная из вершины A, значит, $\rho\ (A;\ D_1C) = AK$. В прямоугольном $\Delta\ ABC$ по теореме Пифагора: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, тогда, медиана равностороннего $\Delta\ ACD_1$: $AK = \dfrac{AC \cdot \sqrt{3}}{2} = = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

б) $\rho(B; A_1C) = BM$, $M \in A_1C$, где BM – высота $\Delta\ A_1BC$, проведенная из вершины B к стороне A_1C. AB является проекцией наклонной A_1B на (ABC), $AB \perp BC$ (смежные стороны квадрата), значит, по теореме о трех перпендикулярах и $A_1B \perp BC$, следовательно $\Delta\ A_1BC$ – прямоугольный с прямым углом CBA_1.

BM – высота прямоугольного треугольника $\Delta\ A_1BC$, выходящая из прямого угла, откуда $BM = \dfrac{BC \cdot A_1B}{A_1C} = \dfrac{BC \cdot A_1B}{\sqrt{BC^2 + A_1B^2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

в) Имеем: A_1B_1 является проекцией наклонной A_1B на $(A_1B_1C_1)$.

$A_1B_1 \perp A_1D_1$ (смежные стороны квадрата), значит, по теореме о трех перпендикулярах $A_1B \perp A_1D_1$.

Проведем из прямого угла прямоугольного $\Delta\ D_1A_1B$ высоту A_1H, где $H \in BD_1$. Тогда, $\rho(A_1;\ D_1B) = A_1H$. Откуда

$A_1H = \dfrac{A_1D_1 \cdot A_1B}{D_1B} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 12 (ЕГЭ 2012г, [47]). Дана правильная шестиугольная призма $ABC\ldots F_1$ с

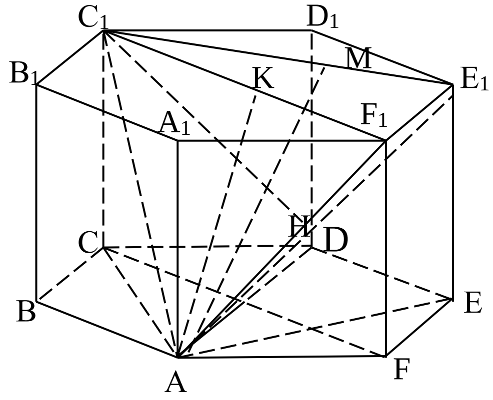


Рис.15

ребром, равным 1. Найти расстояния: а) от точки A до прямой C_1F_1; б) от точки A до прямой C_1E_1.

Решение. Пусть дана правильная шестиугольная призма (рис.15) с ребром, равным 1.

а) Построим $\Delta\ AC_1F_1$ и проведем в нем высоту AK $\Rightarrow$ $\rho(A;\ C_1F_1)$ = AK. Найдем сторону AC равнобедренного Δ ABC ($\angle B=120^\circ$, в правильном шестиугольнике $\alpha = \dfrac{180^\circ\cdot(6-2)}{6} = 120^\circ$) по теореме косинусов:

$$AC=\sqrt{BC^2+AB^2-2\cdot BC\cdot AB\cdot\cos B} = \sqrt{1^2+1^2+2\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

В прямоугольном $\Delta\ C_1CA$ по теореме Пифагора находим:

$AC_1 = \sqrt{CC_1{}^2+AC^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. В прямоугольном $\Delta\ AF_1F$: $AF_1 = \sqrt{2}$ (как диагональ единичного квадрата).

Имеем: $C_1F_1 = 2\cdot AB = 2$ (как диаметр описанной окружности около правильного шестиугольника со стороной 1).

Получили: $\Delta\ AC_1F_1$ – равнобедренный.

Пусть точка H – середина стороны AF_1, тогда $AH = \dfrac{1}{2}\cdot AF_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В прямоугольном $\Delta\ AC_1H$ по теореме Пифагора:

$$C_1H = \sqrt{AC_1{}^2-AH^2} = \sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

$S_{\Delta AC_1F_1} = \dfrac{1}{2}\cdot AF_1\cdot C_1H = \dfrac{1}{2}\cdot C_1F_1\cdot AK = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, откуда $AK = \dfrac{AF_1\cdot C_1H}{C_1F_1} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ $\Rightarrow$

$\rho(A;\ C_1F_1) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

б) Пусть $AM \perp C_1E_1$ в $\Delta\ AC_1E_1$, тогда $\rho(A;\ C_1E_1) = AM$. Найдем длины сторон $\Delta\ AC_1E_1$. В $\Delta\ AC_1C$ $AC_1 = 2$ (смотри п. а)). В Δ AEF по теореме косинусов $AE = \sqrt{AF^2+FE^2-2\cdot AF\cdot FE\cdot\cos\angle AFE}$ $\Rightarrow$ $AE = \sqrt{1^2+1^2+2\cdot1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Из прямоугольного ΔAE_1E по теореме Пифагора $AE_1 = \sqrt{AE^2+EE_1{}^2} = \sqrt{3+1}$

= 2. В равнобедренном Δ $C_1D_1E_1$ по теореме косинусов C_1E_1 = $\sqrt{C_1D_1{}^2 + D_1E_1{}^2 - 2\cdot C_1D_1\cdot D_1E_1\cdot\cos\angle D_1}$ = $\sqrt{1^2+1^2+2\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$. Получили, что ΔAC_1E_1 - равнобедренный, где $AC_1 = AE_1 = 2$. Значит, точка M – середина стороны C_1E_1.

В прямоугольном ΔAME_1 на основании теоремы Пифагора: AM^2 = $AE_1{}^2 - ME_1{}^2 = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow$ $AM = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \rho(A;\,C_1E_1) = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Задача 13 (№ 3.075, [36]). В пирамиде MABC точка M одинаково удалена от всех сторон треугольника ABC, у которого AB=13см, BC =15см, AC =14см. Высота пирамиды равна 3см. Найти расстояние от точки M до сторон треугольника.

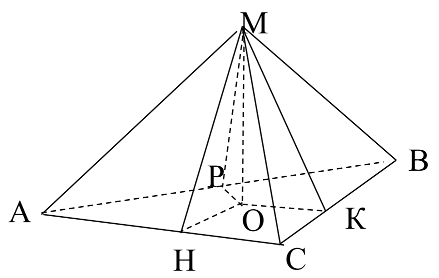


Рис. 16

Решение. Пусть MO – высота пирамиды (рис.16), $O \in (ABC) \Rightarrow MO \perp (ABC)$. Обозначим: MH, MK, MP – высоты боковых граней этой пирамиды, а точки H, K, P лежат соответственно на сторонах основания AC, BC, AB, значит, MH, MK, MP являются наклонными к (ABC). Так как вершина пирамиды одинаково удалена от всех сторон основания, то MH=MK=MP $\Rightarrow$ OH=OK=OP (как проекции равных наклонных). По теореме о трех перпендикулярах имеем: $OH \perp AC$, $OK \perp BC$, $OP \perp AB$ (MH, MK, MP – высоты боковых граней), откуда: OH=OK=OP = r, где r- радиус окружности, вписанной в Δ ABC. Зная стороны Δ ABC, по формуле Герона найдем площадь треугольника: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$, где p = $\frac{AB+BC+AC}{2}$ = $\frac{13+15+14}{2}$ = $\frac{42}{2}$ = 21см. Тогда $S_{ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)} = \sqrt{21\cdot8\cdot6\cdot7} = 7\cdot3\cdot4$ = 84см². С другой стороны $S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow$ r = $\frac{S_{ABC}}{p}$ = $\frac{84}{21}$ = 4см. По условию МО = 3см, тогда, в прямоугольном Δ МОН по теореме Пифагора имеем:

МН = $\sqrt{OM^2 + OH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$ = 5см. Значит, ρ(М; АВ) = ρ(М; ВС) = ρ(М; АС) = 5(см).

Ответ: 5см.

2) Расстояние от точки до плоскости.

Для нахождения расстояния от точки М, не лежащей в плоскости α, до этой плоскости, проводят перпендикуляр МР из точки М на плоскость α (Р $\in \alpha$), |МР| = h = ρ(М; α) (рис. 17).

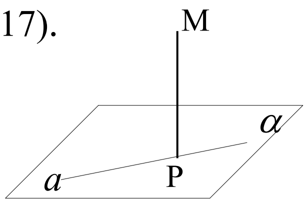


Рис.17

При решении задач на нахождение расстояния от точки до плоскости, учащиеся должны знать, что:

— прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости;
— *если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости* (признак перпендикулярности прямой и плоскости);
— *если каждая из двух пересекающихся прямых одной плоскости параллельна другой плоскости, то данные плоскости параллельны* (признак параллельности плоскостей);
— через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну;
— если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости;

— *если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны* (признак перпендикулярности двух плоскостей);

— если в плоскости есть хоть одна прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны;

— если плоскость перпендикулярна прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, то эта плоскость перпендикулярна каждой из данных плоскостей.

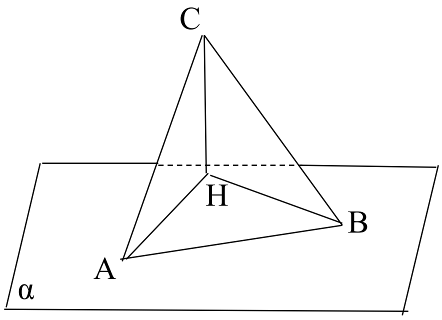


Рис. 18

Перед решением задач на нахождение расстояний от точки до плоскости полезно разобрать несколько пропедевтических задач.

Задача 14 (№ 3.071, [36]). Сторона AB, равная 8, правильного треугольника ABC лежит в плоскости α, а длины проекций двух других его сторон на эту плоскость равны $2\sqrt{7}$. Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

Решение. Имеем: AB = BC = AC = 8, AB $\subset \alpha$, C$\notin \alpha$ (рис.18). Пусть CH $\perp \alpha$, H $\in \alpha$, H$\notin$AB, тогда AH и BH –проекции наклонных AC и BC на α.

По условию задачи AH = BH = $2\sqrt{7}$. В прямоугольном Δ ACH на основании теоремы Пифагора: CH = $\sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{36} = 6$. Так как C$\notin \alpha$ и CH $\perp$ α, то |CH| = ρ(C;α) = 6.

Ответ: 6.

Задача 15 (№ 3.072, [36]). Плоскость α содержит катет АС равнобедренного прямоугольного треугольника АВС ($\angle C = 90°$) и не перпендикулярна катету ВС. Найдите длину проекции гипотенузы АВ на плоскость α, если известно, что длина катета ВС равна b, а расстояние от вершины В до плоскости α равно a.

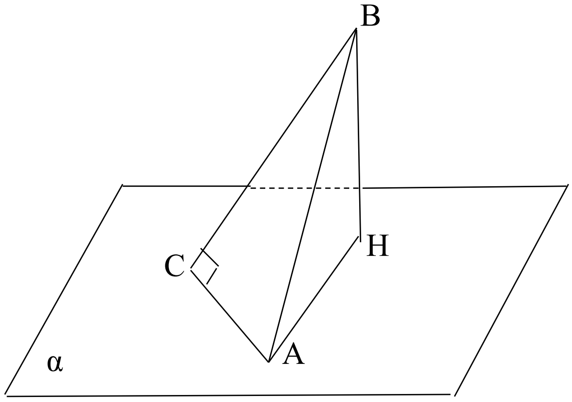


Рис. 19

Решение. Имеем: равнобедренный прямоугольный Δ АВС, где АС = ВС = b, АС $\subset \alpha$, В$\notin \alpha$ (рис.19). Опустим перпендикуляр ВН на плоскость α, Н $\in \alpha$, Н$\neq$С $\Rightarrow$ ВН $\perp$ АН (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). АН является проекцией наклонной АВ на плоскость α. Расстояние от вершины В до плоскости α равно длине перпендикуляра ВН = a. В прямоугольном Δ АВС по теореме Пифагора находим: АВ = $\sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{b^2+b^2} = b\sqrt{2}$. В прямоугольном Δ АВН на основании теоремы Пифагора: АН = $\sqrt{AB^2-BH^2} = \sqrt{(b\sqrt{2})^2-a^2} = \sqrt{2b^2-a^2}$.

Ответ: $\sqrt{2b^2-a^2}$.

Задача 16 [10]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 12. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BC_1D.

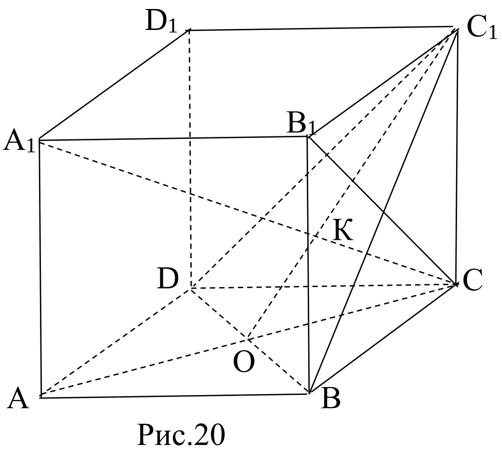


Рис.20

Решение: Плоскость BC_1D (рис. 20) представляет собой равносторонний треугольник, сторонами которого являются диагонали равных квадратов - граней куба. Обозначим: O = AC∩BD, проведем медиану C_1O в Δ BC_1D.

Диагональ АС является проекцией наклонной A_1C на (АВС), АС $\perp$ BD (как диагонали квадрата ABCD), значит, $A_1C \perp$ BD по теореме о трех перпендикулярах. Диагональ B_1C является проекцией наклонной A_1C на (BCC_1), $B_1C \perp BC_1$ (как диагонали квадрата B_1BCC_1), значит, $A_1C \perp BC_1$ по теореме о трех перпендикулярах.

Имеем: $A_1C \perp BD$; $A_1C \perp BC_1$ и BC_1 и BD - пересекающиеся прямые (BC_1D). Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1C \perp (BC_1D)$.

Пусть $K = A_1C \cap (BC_1D)$. Так как $(BC_1D) \cap (ACC_1) = C_1O$, то $K = C_1O \cap A_1C$. $K \in A_1C \Rightarrow \rho(A_1; (BC_1D)) = A_1K$, где $A_1K = A_1C - CK$.

Так как $CK \perp (BC_1D)$, то CK – высота прямоугольного $\Delta\ OC_1C$. Тогда по теореме Пифагора: $OC_1 = \sqrt{CO^2 + CC_1^{\ 2}} = \sqrt{72+144} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$, а высота $\Delta\ OC_1C$: $CK = \dfrac{CO \cdot CC_1}{OC_1} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 12}{6\sqrt{6}} = 4\sqrt{3}$.

В прямоугольном $\Delta\ ABC$ по теореме Пифагора: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{144+144} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2} \Rightarrow CO = \dfrac{1}{2} \cdot AC = 6\sqrt{2}$. Диагональ куба $A_1C = \sqrt{AB^2 + BC^2 + AA_1^{\ 2}} = \sqrt{12^2 + 12^2 + 12^2} = 12\sqrt{3}$.

Следовательно, $A_1K = 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}$.

Решая задачи на расстояния , мы получили важное свойство куба: *диагональ куба перпендикулярна плоскости правильного треугольника, вершинами которого являются концы трех ребер, имеющих с данной диагональю общую вершину* [40].

Данную задачу можно использовать как опорную и полученное свойство куба использовать при решении других задач. Идею наборов «опорных задач» предлагает Е.В. Потоскуев: «острота проблемы аргументации при решении геометрических задач может быть уменьшена, если разумно использовать «опорные» задачи на построение, доказательство и вычисление; необходимо выработать умения решать «опорные» задачи планиметрии и стереометрии, увеличивая их «банк». Достаточно один раз доказать некоторый «опорный» факт и пользоваться им при решении другой задачи» [40].

Задача 17 (№ 3.147, [36]). Точки P, Q, R – середины ребер соответственно AB, AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*. Постройте сечение куба плоскостью PQR и найдите расстояние от вершины C_1 до секущей плоскости.

Построение:

1. PQ – сторона сечения;

2. $M = PQ \cap BC$;

3. $L = MR \cap BB_1$; PL, LR – стороны сечения;

4. $(BCC_1) \parallel (ADD_1) \Rightarrow LR \parallel QN$, QN – сторона сечения;

5. NR – сторона сечения;

6. QNRLP – искомое сечение (рис.21).

Решение. Имеем: Q и P – середины ребер соответственно AD, AB куба, значит PQ – средняя линия Δ ABD $\Rightarrow PQ \parallel BD$. Так как $BD \perp AC$ (свойство диагоналей квадрата), то $PQ \perp AC$. Пусть $K = PQ \cap AC$, тогда KC – проекция наклонной RK на (ABC). По теореме о трех перпендикулярах $PQ \perp RK$. Получили, что PQ перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости ACC_1 $\Rightarrow (PQR) \perp (ACC_1)$, значит перпендикуляр от точки C_1 до плоскости

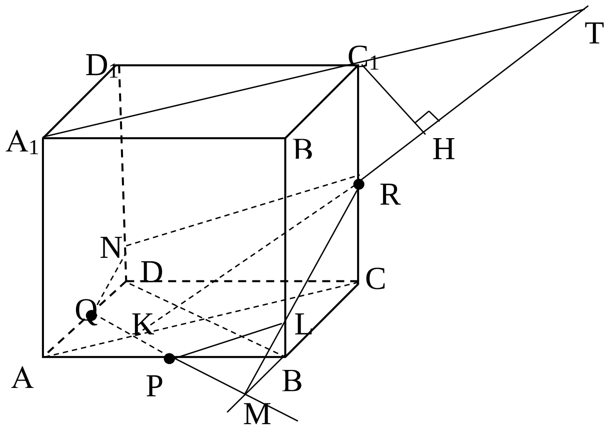


Рис.21

сечения лежит в плоскости ACC_1. Пусть $T = KR \cap A_1C_1$, опустим высоту из точки C_1 на прямую KT, тогда $C_1H = \rho(C_1;(PQR))$. Прямоугольные треугольники KCR и TC_1R равны как вертикальные (R – середина ребра) $\Rightarrow C_1T = KC$, $RT = KR$.

В прямоугольном Δ ABC, по теореме Пифагора: AC = $\sqrt{AB^2+BC^2}$ = $\sqrt{a^2+a^2}$ $\Rightarrow$ AC = $a\sqrt{2}$. Так как PQ –средняя линия Δ ABD, то из подобия треугольников APQ и ABD с k = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ AK = $\frac{1}{4}\cdot AC$ = $\frac{1}{4}\cdot a\sqrt{2}$ = $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

KC = C_1T = AC – AK = $a\sqrt{2}$ - $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ = $\frac{3\sqrt{2}a}{4}$. В прямоугольном Δ TC_1R по теореме Пифагора: TR = $\sqrt{C_1R^2+C_1T^2}$ = $\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{3\sqrt{2}a}{4})^2}$ = $\frac{a\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}$ = $\frac{a\sqrt{22}}{4}$. C_1H – высота, проведенная из прямого угла прямоугольного Δ TC_1R, поэтому C_1H = $\frac{C_1R\cdot C_1T}{RT}$ = $\frac{\frac{a}{2}\cdot a\cdot\frac{3}{4}\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{22}}{4}}$ = $\frac{3a\sqrt{11}}{22}$. Значит, ρ(C_1;(PQR)) = $\frac{3a\sqrt{11}}{22}$.

Ответ: $\frac{3a\sqrt{11}}{22}$.

Решая задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости, учащиеся должны понимать, что искомый перпендикуляр должен лежать в плоскости, перпендикулярной данной плоскости.

Задача 18 (ЕГЭ 2012г, [48]). Дан куб с ребром 1. Найти расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

Решение. Пусть точка M – середина отрезка BC_1 (рис.22), тогда нужно найти ρ(M; (AB_1D_1)). Через точку M проведем плоскость α ∥ (AB_1D_1). Так как AB_1∥ DC_1 и B_1D_1 ∥ BD, то по признаку параллельности плоскостей (AB_1D_1) ∥ (BC_1D) $=\alpha$. Значит, ρ(M; (AB_1D_1)) = ρ((BC_1D); (AB_1D_1)).

Чтобы найти расстояние между параллельными плоскостями, построим плоскость, перпендикулярную этим плоскостям и проведем в ней общий

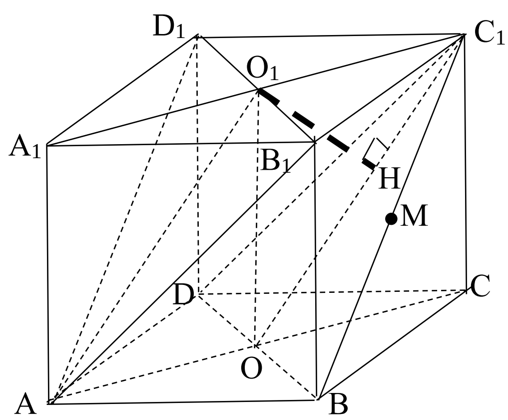


Рис. 22

перпендикуляр для параллельных плоскостей.

BD $\perp$ AC (как диагонали квадрата), BD $\perp$ OO_1 ($OO_1 \perp (ABC)$), BD $\subset$ (BC_1D), значит, по признаку перпендикулярности двух плоскостей (ACC_1) $\perp$ (BC_1D) и (ACC_1) $\perp$ (AB_1D_1). $AO_1 \parallel OC_1$, опустим перпендикуляр из точки $O_1 \in (AB_1D_1)$ на прямую $OC_1 \subset (BC_1D)$, получили, что $\rho(M; (AB_1D_1)) = O_1H$. В прямоугольном ΔO_1OC_1 по теореме Пифагора $OC_1 = \sqrt{OO_1^{\,2} + O_1C_1^{\,2}}$, в прямоугольном $\Delta A_1B_1C_1$ по теореме Пифагора $O_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^{\,2} + B_1C_1^{\,2}} =$ $\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $OC_1 = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. O_1H – высота прямоугольного ΔO_1OC_1, проведенная из прямого угла, следовательно $O_1H = \frac{OO_1 \cdot O_1C_1}{OC_1} =$

$$\frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$ Значит, $\rho(M; (AB_1D_1)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача № 19[40].В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 2, найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABC_1.

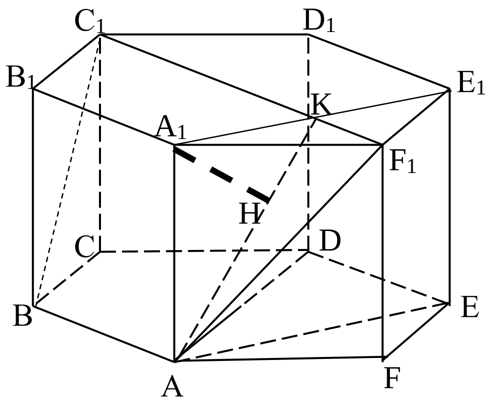


Рис. 23

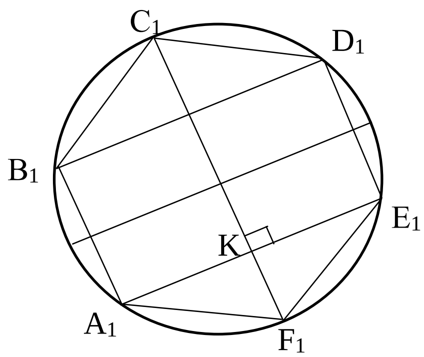


Рис. 24

Решение. Для решения задач с правильными шестиугольными призмами полезно выносить отдельно изображение ее основания – правильный шестиугольник (рис.24). Взаимное расположение диагоналей и сторон этого шестиугольника, их длины и величины углов между ними известны из планиметрии [40, с. 301].

Сечением плоскостью ABC_1 правильной шестиугольной призмы является равнобедренная трапеция ABC_1F_1 (рис.23), так как $AB \parallel C_1F_1$(почему?), а $BC_1 = AF_1$ (как диагонали равных квадратов).

Имеем: $C_1F_1 \perp A_1E_1$, $C_1F_1 \perp AA_1$ (почему?) $\Rightarrow C_1F_1 \perp (AA_1E_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $\Rightarrow$ $(AA_1E_1) \perp (ABC_1)$ по признаку перпендикулярности двух плоскостей.

Проведем $A_1H \perp (ABC_1)$. Так как $(AA_1E_1) \perp (ABC_1)$, $A_1 \in (AA_1E_1)$, то $A_1H \subset (AA_1E_1)$, при этом $H \in AK = (AA_1E_1) \cap (AA_1E_1)$. Таким образом, $A_1H=$ $=\rho(A_1;(ABC_1))$. Причем, A_1H – высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного ΔAA_1K, значит, $A_1H = \dfrac{AA_1 \cdot A_1K}{AK} = \dfrac{AA_1 \cdot A_1K}{\sqrt{A_1A^2 + A_1K^2}}$.

В равнобедренном $\Delta A_1F_1E_1$ по теореме косинусов находим:

$A_1E_1^2 = A_1F_1^2 + F_1E_1^2 - 2 \cdot A_1F_1 \cdot F_1E_1 \cdot \cos 120^\circ = 2^2+2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 12 \Rightarrow A_1E_1 =$ $=2\sqrt{3}$, значит, $A_1K = 0{,}5\ A_1E_1 = 0{,}5 \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Тогда получаем:

$$A_1H = \frac{AA_1 \cdot A_1K}{\sqrt{A_1A^2 + A_1K^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Таким образом, $\rho(A_1; (ABC_1)) = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

Задача 20 [31]**.** В основании прямой призмы лежит треугольник ABC (рис. 25), у которого AC = 3, BC = 4 и AB = 5, K- середина ребра BB_1. Расстояние между основаниями призмы равно 6. Найти расстояние от точки В до плоскости АКС.

Решение. В основании призмы лежит прямоугольный треугольник Δ АВС, в котором: $AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = AB^2$, откуда следует: $AC \perp BC$.

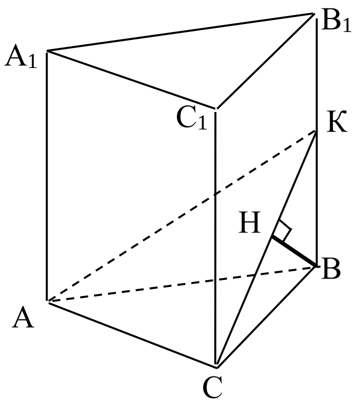


Рис. 25

Имеем: данная призма- прямая $\Rightarrow BB_1 \perp$ (АВС), $\Rightarrow BB_1 \perp BC$ (Почему?) $\Rightarrow$ ВС- проекция наклонной КС на (АВС) $\Rightarrow KC \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Так как $AC \perp BC$, $CC_1 \perp AC$ ($CC_1 \perp$ (АВС)), то $AC \perp (BCC_1)$.

Тогда, учитывая $AC \subset (AKC)$, получаем: $(BCC_1) \perp (AKC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей), поэтому перпендикуляр, проведенный из точки В на плоскость (АКС), лежит в плоскости грани BB_1C_1C, значит, основание Н этого перпендикуляра лежит на прямой $CK = (BCC_1) \cap (AKC)$.

Проведем $BH \perp KC$, тогда $\rho(B\ ; (AKC)) = BH$. В прямоугольном

Δ КВС находим: его высоту ВН: $BH = \dfrac{BC \cdot BK}{CK} = \dfrac{4 \cdot 3}{\sqrt{BC^2 + BK^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

3) Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Данная тема считается одной из наиболее сложных в изучении взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Поэтому для осознанного усвоения материала о расстоянии между двумя скрещивающимися прямыми предлагаются некоторые методические рекомендации по развитию умений учащихся, используя при решении задач различного уровня сложности принцип доступности «от простого к сложному», корректно аргументировать возникающие «геометрические картинки», что способствует развитию их логической культуры. При этом предлагаются решения одной и той же задачи различными методами: *нахождением общего перпендикуляра для скрещивающихся прямых, «методом параллельных прямой и плоскости», «методом параллельных плоскостей», «методом проектирования».*

В задачах на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми не нужно стремиться к большему количеству решенных задач с различными чертежами. Целесообразнее использовать на уроке один чертеж (в целях экономии времени) и разобрать всевозможные случаи (от простого к сложному) в выбранном многограннике. При этом акцентируется внимание на построение наглядного изображения геометрической фигуры, на последовательность логических рассуждений, на вычислительные преобразования, необходимые для получения ответа.

Особое внимание нужно обратить на выработку умения «увидеть» и «вычислить» расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Определение. *Общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых называется отрезок, имеющий концы на данных прямых и перпендикулярный к ним.

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Длина общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых равна длине общего перпендикуляра между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Желательно с учащимися решить 1-2 задачи на общий перпендикуляр не в многограннике, для постепенного восприятия изучаемого материала, реализуя принцип доступности в объяснении.

Задача 21 (№ 4.083, [36]). **.** AC – перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость BCP. Проекция наклонной AB перпендикулярна прямой CP. Найдите расстояние между прямыми AB и CP, если AC = 4, BC = 3.

Решение. AB $\subset$(ABC), CP∩(ABC) = C, C$\notin$AB (рис. 26) $\Rightarrow$ прямые AB и CP скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых).

Имеем: AC$\perp$(BCP) и AB – наклонная $\Rightarrow$ BC – проекция наклонной AB на (BCP). CP$\perp$BC (по условию), CP$\perp$AC(по определению прямой, перпендикулярной плоскости), значит, CP $\perp$ (ABC) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Опустим CH $\perp$AB $\Rightarrow$ CH – *общий перпендикуляр* двух скрещивающихся прямых AB и CP (BC-проекция CH на (ABC) $\Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах CH $\perp$ CP).

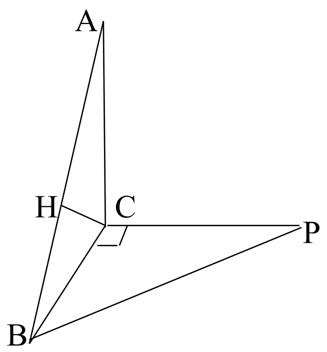


Рис. 26

В прямоугольном Δ ABC CH – высота, проведенная из прямого угла к гипотенузе $\Rightarrow$ CH = $\frac{AC \cdot BC}{AB}$

$= \frac{AC \cdot BC}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$

Ответ: 2,4.

Задача 22. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найдите расстояние между прямыми: а) AB и CC_1; б) CC_1 и B_1D_1; в) CC_1 и BD_1; г) AC и B_1D_1; д) AD_1 и DC_1; е) BD и A_1C.

Решение. а) Прямые AB и CC_1 скрещивающиеся, т.к. AB $\subset$(ABC), CC_1 $\cap$(ABC) =C $\notin$ AB. (рис. 27). Имеем: BC $\perp$ AB (почему?), BC$\perp$ CC_1 (почему?), значит ребро BC – общий перпендикуляр для прямых AB и CC_1, следовательно, ρ(AB ; CC_1) = BC = 2.

б) Прямые CC_1 и B_1D_1 скрещиваются ($B_1D_1 \subset (A_1B_1C_1)$, $CC_1 \cap (A_1B_1C_1) = C_1 \notin B_1D_1$). Проведем через прямую B_1D_1 плоскость BB_1D_1, которая параллельна CC_1 (почему?) $\Rightarrow$ $\rho(CC_1; B_1D_1) = \rho(CC_1; (BB_1D_1)) = \rho(C_1; (BB_1D_1))$. Зная, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (свойство диагоналей квадрата ABCD), и в кубе $A_1C_1 \perp CC_1$ (почему?), то $\rho(C_1; (BB_1D_1)) = C_1O_1$, где $O = A_1C_1 \cap B_1D_1$.

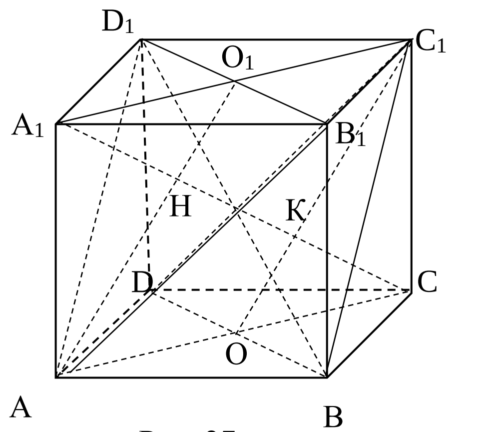


Рис. 27

В прямоугольном Δ $A_1B_1C_1$ по теореме Пифагора находим: $A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Тогда: $C_1O_1 = \frac{1}{2} \cdot A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Значит, $\rho(CC_1; B_1D_1) = \sqrt{2}$.

в) Прямые CC_1 и BD_1 скрещиваются (почему?). Проведем через прямую BD_1 плоскость (BB_1D_1), которая параллельна CC_1 (признак параллельности прямой и плоскости) $\Rightarrow$ $\rho(CC_1; BD_1) = \rho(CC_1; (BB_1D_1)) = \rho(C_1; (BB_1D_1)) = C_1O_1$ ($A_1C_1 \perp B_1D_1$ – свойство диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$).

В прямоугольном Δ $A_1B_1C_1$ по теореме Пифагора находим: $A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, откуда $C_1O_1 = \frac{1}{2} \cdot A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Значит, $\rho(CC_1; BD_1) = \sqrt{2}$.

Таким образом, при решении задачи пришли к выводу: *расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из них до плоскости, проходящей через другую прямую, параллельно первой прямой.*

г) Скрещивающиеся прямые AC и B_1D_1 лежат в параллельных плоскостях (ABC) и $(A_1B_1C_1)$, расстояние между которыми равно длине бокового ребра куба, следовательно, $\rho(AC; B_1D_1) = CC_1 = 2$.

д) Скрещивающиеся прямые AD_1 и DC_1 (почему?) соответственно лежат в параллельных плоскостях (AB_1D_1) и (BC_1D), поэтому $\rho(AD_1; DC_1) = \rho((AB_1D_1); (BC_1D))$.

Пусть $A_1C \cap (AB_1D_1) = H$, $A_1C \cap (BC_1D) = K$, тогда $\rho((AB_1D_1); (BC_1D)) = HK$ ($A_1C \perp (AB_1D_1)$, $A_1C \perp (BC_1D)$ доказано в задаче 15). Диагональ куба $A_1C = \sqrt{AB^2 + BC^2 + AA_1^{\,2}} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Так как параллельные плоскости (AB_1D_1) и (BC_1D) делят диагональ куба на три равные части (доказано в задаче 15), то $HK = \frac{1}{3} \cdot A_1C = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Значит, $\rho(AD_1; DC_1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Значит, можно сделать вывод: *расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.*

е) $A_1C \perp (BC_1D)$ (доказано в задаче 15), $A_1C \cap (BC_1D) = K$. По теореме о трех перпендикулярах $C_1O \perp BD$ (OC – проекция C_1O на (ABC), $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата $ABCD$). Получили: OK – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD и $A_1C \Rightarrow \rho(BD; A_1C) = OK$.

В равностороннем ΔBC_1D со стороной $2\sqrt{2}$ медиана $C_1O = \frac{BD\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.

Так как $A_1B = A_1C_1 = A_1D$ – диагонали равных квадратов, то $BK = DK = C_1K$ (как проекции равных наклонных), значит, точка K - центроид ΔBC_1D. Значит, $KO = \frac{1}{3} \cdot C_1O = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Существуют задачи, в которых для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми a и b, удобно использовать «*метод проектирования*».

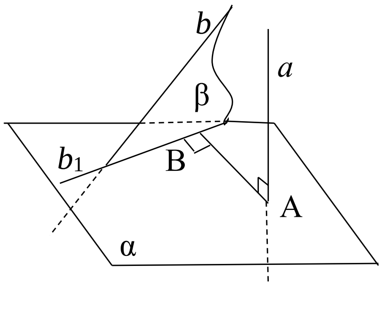


Рис. 28

Построим плоскость α, перпендикулярную прямой a, и ортогонально спроектируем прямую b на эту плоскость (рис. 28). Пусть прямая b_1 – проекция прямой b на плоскость α; β – плоскость, проектирующая прямую b на плоскость α, т.е. $b_1 = \beta \cap \alpha$.

Так как $a \perp \alpha$ и $\beta \perp \alpha$, то $a \parallel \beta$. Это означает, что если А – точка пересечения прямой a с плоскостью α, то расстояние от точки А до прямой b_1 равно расстоянию между прямой a и параллельной ей плоскостью β, содержащей прямую b, значит, равно расстоянию между данными скрещивающимися прямыми a и b: $\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$ [40].

Решим предыдущую задачу, используя этот метод.

е) $A_1C \perp (BC_1D)$ (доказано в задаче 15), $A_1C \cap (BC_1D) = K$ – проекция прямой A_1C на (BC_1D). Прямая BD лежит в плоскости BC_1D, поэтому ее проекцией на (BC_1D) является эта же прямая BD. Тогда, в соответствие с «методом проектирования», $\rho(BD; A_1C) = \rho(K; BD)$.

Так как К – центроид равностороннего $\Delta\, BC_1D$ со стороной $2\sqrt{2}$, то $K \in C_1O$, $KO \perp BD$ (почему?), следовательно, $\rho(BD; A_1C) = \rho(K; BD) = OK$. Медиана $\Delta\, BC_1D$ $C_1O = BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$, тогда $OK = \frac{1}{3} \cdot C_1O = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Получили: $\rho(BD; A_1C) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: а) 2; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) 2; д) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; е) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 23 [23]. В правильной треугольной пирамиде PABC сторона основания равна 8, а боковое ребро -16. Найти расстояние между прямыми AB и PC.

Решение. Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и PC лежит в плоскости, которая перпендикулярна прямой PC и содержит прямую AB (рис.29).

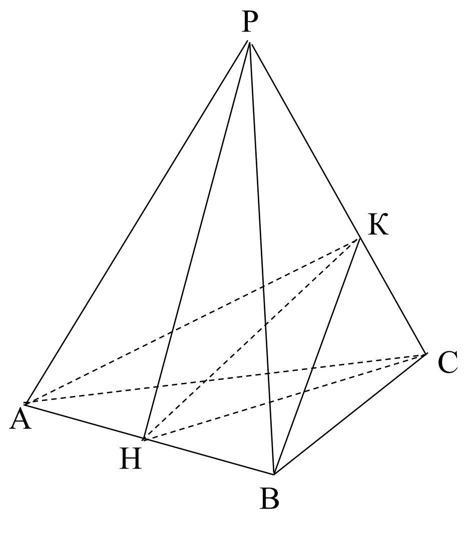


Рис. 29

Пусть H - середина ребра AB, тогда $CH \perp AB$ (Δ ABC – равносторонний), $PH \perp AB$ (Δ APB – равнобедренный). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости AB $\perp$ (PHC). Проведем HK $\perp$ PC, HK $\subset$(PHC), следовательно, HK – общий перпендикуляр для прямых AB и PC.

CH – медиана равностороннего Δ ABC, тогда медиана CH = $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Из прямоугольного Δ APH на основании теоремы Пифагора имеем: PH = $\sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{16^2 - 4^2} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15}$. Пусть $\angle PCH = \varphi$. В Δ PHC по теореме косинусов: cosφ = $\frac{PC^2 + HC^2 - PH^2}{2 \cdot PC \cdot HC} = \frac{16^2 + (4\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{15})^2}{2 \cdot 16 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Из основного тригонометрического тождества sinφ = $\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{6})^2} = = \frac{\sqrt{33}}{6}$. В прямоугольном Δ HKC: HK = HC · sinφ = $4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{33}}{6} = 2\sqrt{11}$. Следовательно, ρ(AB; PC) = $2\sqrt{11}$.

Ответ: $2\sqrt{11}$.

Задача 24 [40]. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми A_1B и C_1D (рис.30).

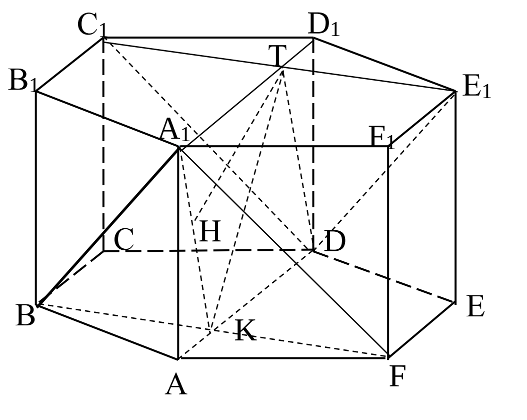


Рис. 30

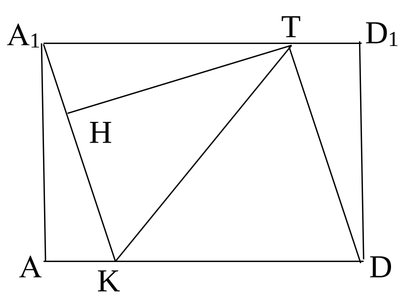


Рис. 31

Решение. Прямые A_1B и C_1D – скрещивающиеся (почему?). Имеем: BF ‖ C_1E_1 (свойство параллельных плоскостей), A_1B ‖ E_1D (свойство параллельных плоскостей), откуда по признаку параллельности двух плоскостей

$(A_1BF) \parallel (C_1DE_1)$. Тогда из $A_1B \subset (A_1BF)$, $C_1D \subset (C_1DE_1)$ следует: $\rho(A_1B;\ C_1D) = \rho((A_1BF);(C_1DE_1))$. Так как боковые грани призмы – равные квадраты и $BF = C_1E_1$, то $\Delta\ A_1BF = \Delta\ C_1DE_1$ являются равнобедренными (боковые стороны равны как диагонали равных квадратов).

Пусть $К = BF \cap AD$, $T = C_1E_1 \cap A_1D_1$, тогда $A_1К \perp BF$, $DT \perp C_1E_1$ (теорема о трех перпендикулярах). Учитывая, что $BF \perp AD$ и $BF \perp A_1A$, то по признаку перпендикулярности двух плоскостей $(ADD_1) \perp ((A_1BF) \parallel (C_1DE_1))$. Значит, $\rho(A_1B;\ C_1D) = \rho(A_1К;\ TD)$, где $A_1К \subset (A_1AD)$, $TD \subset (A_1AD)$.

В параллелограмме A_1TDK (рис.31) опустим высоту TH, тогда $\rho(A_1B;\ C_1D) = \rho((A_1BF);(C_1DE_1)) = TH$. Найдем сторону C_1E_1 равнобедренного $\Delta\ C_1D_1E_1$ по теореме косинусов, где $\angle C_1D_1E_1 = \alpha = 120^\circ$:

$$C_1E_1 = BF = \sqrt{AB^2 + AF^2 - 2 \cdot AB \cdot AF \cdot \cos\alpha} = \sqrt{1+1+2\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Так как сторона шестиугольника равна 1, то $A_1D_1 = 2$. $C_1E_1 \perp A_1D_1$, тогда в прямоугольном $\Delta\ E_1D_1T$: $E_1T = \frac{1}{2} \cdot C_1E_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. На основании теоремы Пифагора: $TD_1 = \sqrt{D_1E_1^{\,2} - E_1T^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. Учитывая, что $A_1К \parallel TD$ и $A_1К = TD$ $\Rightarrow$ $AК = TD_1 = \frac{1}{2}$, $A_1T = A_1D_1 - TD_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

В прямоугольном $\Delta\ AA_1К$ по теореме Пифагора: $A_1К = \sqrt{AA_1^{\,2} + AК^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$S_{A_1TK} = \frac{1}{2} \cdot A_1К \cdot TH$, с другой стороны $S_{A_1TK} = \frac{1}{2} \cdot A_1T \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$.
Имеем: $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot TH$, откуда $TH = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Итак, $\rho(A_1B;\ C_1D) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Решим задачу «методом проектирования». Нужно найти расстояние между прямыми A_1B и C_1D.

Пусть $T = C_1D \cap CD_1$ (рис.32). Имеем: $C_1D \perp CD_1$ (как диагонали квадрата); $C_1D \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах, так как $CD \perp AC$). Тогда $C_1D \perp (ACD_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

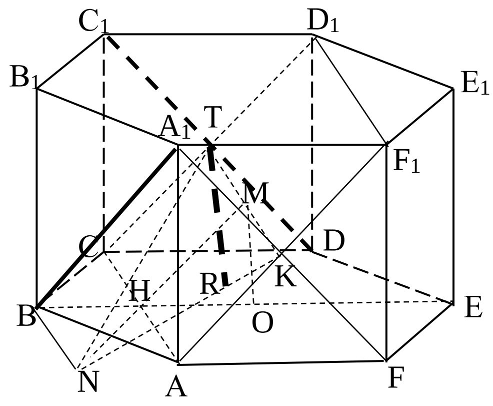


Рис. 32

Построим проекцию прямой A_1B на плоскость ACD_1: $A_1F \perp AF_1$(диагонали квадрата), $A_1F \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах) $\Rightarrow A_1F \perp (ACD_1)$. Пусть $K = A_1F \cap AF_1$, M – середина KT, H – середина AC, опустим $BN \perp HM$. Учитывая, что $BH \perp AC$, то по теореме о трех перпендикулярах $NH \perp AC \Rightarrow BN \perp AC$, значит, $BN \perp (ACD_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно, NK – проекция прямой A_1B на плоскость ACD_1. Тогда $\rho(A_1B;\ C_1D) = \rho(T;\ NK) = TR$.

$KT = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos 120^0} = \sqrt{1+1+2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{1}{2}\cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В прямоугольном Δ ABH на основании теоремы Пифагора : $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. $MH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из подобия прямоугольных треугольников BNH и MOH, имеем: $\frac{BN}{MO} = \frac{NH}{OH} = \frac{BH}{MH} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow NH = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot OH = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$MN = NH + MH = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

В прямоугольном Δ KNM по теореме Пифагора: $NK = \sqrt{MN^2 + KM^2} = \sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{18}{16} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{30}{16}} = \frac{\sqrt{30}}{4}$.

Рассмотрим Δ KNT, $S_{\Delta KNT} = \frac{1}{2} \cdot KN \cdot TR$, с другой стороны $S_{\Delta KNT} = \frac{1}{2} \cdot KT \cdot NM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$, тогда TR $= \frac{2}{KN} \cdot S_{\Delta KNT} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4}{8 \cdot \sqrt{30}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Значит, $\rho(A_1B;\ C_1D) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми в призме – это достаточно сложная задача для учащихся, где нет симметрии и свойств куба или свойств равносторонних треугольников, как в правильном тетраэдре. Поэтому данной теме необходимо уделить особое внимание, а ученикам показать, как применить имеющиеся у них знания по нахождению расстояний между скрещивающимися прямыми в правильных призмах на примере ключевых задач.

Ключевая задача – это задача, которая наиболее ярко иллюстрирует новую идею, новый метод, приём решения, или содержит новый факт, или и то, и другое вместе [19].

При использовании технологии решения ключевых задач происходит наглядное моделирование мыслительного процесса. Таким образом, реализуется возможность перехода от “школы памяти” к “школе мышления”. Пусть далеко не все ученики могут решить сложнейшую задачу, но понять предлагаемое решение и воспроизвести его этапы могут все. Учащиеся из пассивных слушателей превращаются в деятельных, активных участников образовательного процесса [50].

Ключевая задача – самостоятельная дидактическая единица, единица усвоения. Поэтому и технология работы с ключевой задачей схожа с технологией организации усвоения дидактических единиц. Но предметом усвоения здесь является не сама задача, а либо ее результат, либо общий метод рассуждений, способ решения, либо отдельный прием, использованный в решении. Фактически предметом усвоения являются умения, познавательные средства, связанные с составлением и решением задач [24].

Использование технологии ключевых задач позволяет с одной стороны, включить в работу каждого ученика, а с другой развивает системное, логическое мышление учащихся. Для мотивированных детей появляется возможность проанализировать и оценить материал в полном объёме, сравнить разные методы решения, определить границы применимости для дальнейшего использования полученных знаний при решении более сложных задач.

Решение ключевой задачи будет более эффективным, если в ней будет реализован принцип доступности «от простого к сложному», учитывая имеющие знания у учащихся. Акцент при решении ключевой задачи делаем на то, что боковые грани призмы являются прямоугольниками, а не квадратами [28].

В качестве ключевой рассмотрим следующую задачу. В данной задаче, в отличие от предыдущих, боковые грани правильной призмы не являются квадратами, в результате чего нарушается симметричность.

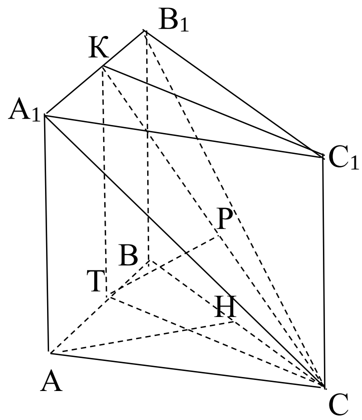


Рис. 33

Задача 25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 33) ребро основания равно 3, боковое ребро 4. Найти расстояние между прямыми: а) AA_1 и BC; б) AA_1 и B_1C; в) AB и A_1C; г) AB_1 и BC_1.

Решение. а) Проведем $AH \perp BC$, при этом H – середина BC, так как в равностороннем Δ ABC высота AH является и медианой.

Так как дана правильная призма, то $AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow$ по определению прямой, перпендикулярной плоскости $AA_1 \perp AH$.

Получили: $\begin{cases} AH \perp BC, \\ AH \perp A_1A \end{cases} \Rightarrow$ AH – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AA_1 и BC.

Как медиана равностороннего треугольника, AH = $\frac{AC\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\rho(AA_1; BC) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

б) По признаку параллельности прямой и плоскости $AA_1 \parallel (BCC_1)$, так как $AA_1 \parallel CC_1$, а $CC_1 \subset (BCC_1)$.

$B_1C \subset (BCC_1) \Rightarrow \rho(AA_1;\ B_1C) = \rho(AA_1;\ (BCC_1)) = AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$, как медиана правильного Δ ABC со стороной 3. Откуда AH = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

в) Проведем $CT \perp AB$, T- середина AB и $KT \perp AB$, K – середина $A_1B_1 \Rightarrow$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AB \perp (KTC)$.

$A_1B_1 \parallel AB$, значит, $A_1B_1 \perp (KTC)$, а KC - ортогональная проекция прямой A_1C на (KTC). Следовательно, $\rho(AB;\ A_1C) = \rho(T;\ KC)$.

Как равные медианы TC = AH = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. В прямоугольном Δ KTC по теореме Пифагора: KC = $\sqrt{KT^2+TC^2} = \sqrt{4^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{16+\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2}$.

Проведем высоту TP к гипотенузе KC прямоугольного Δ KTC. TP = $\frac{KT\cdot TC}{KC} =$

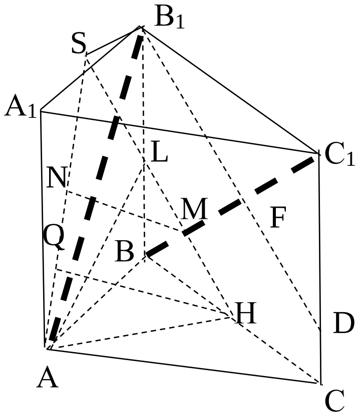


Рис. 34

$$\frac{4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{91}}{2}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{91}} = \frac{12\sqrt{273}}{91}.$$

г) Пусть $B_1D \perp BC_1$, $F = B_1D \cap BC_1$, тогда B_1F – высота прямоугольного Δ BB_1C (рис. 34). B_1F = $\frac{BB_1\cdot B_1C_1}{BC_1} = \frac{BB_1\cdot B_1C_1}{\sqrt{BB_1^{\ 2}+B_1C_1^{\ 2}}} = \frac{4\cdot 3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4\cdot 3}{5} = 2{,}4.$

Проведем $HL \parallel B_1D \Rightarrow HL \perp BC_1$, $L \in BB_1$, $M = BC_1 \cap HL$. Имеем: BC – проекция BC_1 на (ABC), $BC \perp AH \Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $BC_1 \perp AH$, а так же $BC_1 \perp HL$. Значит, $BC_1 \perp (AHL)$ и M – проекция BC_1 на (AHL).

В (B_1BC) проведем $B_1S \parallel BC_1$. Так как $BC_1 \perp (AHL)$, то по теореме о прямой перпендикулярной плоскости $B_1S \perp (AHL)$. Точки H и L лежат в (B_1BC), значит, M и S лежат в (B_1BC), причем M и $S \in HL$. Тогда AS – проекция наклонной AB_1 на (AHL) $\Rightarrow \rho(AB_1; BC_1) = \rho(M; AS)$.

Δ BMH ~ Δ C_1FB_1 (по двум углам: $\angle BMH = \angle B_1FC_1 = 90^0$, $\angle HBM = \angle B_1C_1F$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и B_1C_1 и секущей BC_1).

Из подобия Δ BMH и Δ C_1FB_1 следует: $\frac{BM}{C_1F} = \frac{MH}{B_1F} = \frac{BH}{B_1C_1}$. Следовательно, $\frac{MH}{B_1F} = \frac{BH}{B_1C_1}$, откуда MH = $\frac{B_1F \cdot BH}{B_1C_1} = \frac{2,4 \cdot 1,5}{3} = \frac{2,4}{2} = 1,2$.

В прямоугольном Δ B_1FC_1 на основании теоремы Пифагора: $FC_1 = \sqrt{B_1C_1^{\,2} - B_1F^{\,2}} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8$, тогда BM = $\frac{1}{2} \cdot FC_1 = 0,9$. $MF = B_1S = BC_1 - BM - FC_1 = 5 - 0,9 - 1,8 = 2,3$.

Δ BML ~ Δ B_1SL (по двум углам: $\angle BML = \angle LSB_1 = 90^0$, $\angle BLM = \angle B_1LS$ - как вертикальные). Из подобия Δ BML и Δ B_1SL следует: $\frac{BM}{B_1S} = \frac{BL}{B_1L} = \frac{LM}{LS}$. Пусть BL = x, а B_1L = 4-x. Тогда $\frac{BM}{B_1S} = \frac{BL}{B_1L} = \frac{0,9}{2,3} = \frac{9}{23} \Rightarrow \frac{x}{x-4} = \frac{9}{23}$; откуда BL = $\frac{9}{8}$, а $B_1L = \frac{23}{8}$.

В прямоугольном Δ LBH высота BM = $\frac{BL \cdot BH}{LH}$, откуда LH = $\frac{BL \cdot BH}{BM} = \frac{15}{8}$. Значит, LM = LH – MH = $\frac{15}{8} - 1,2 = \frac{27}{40}$. Из подобия Δ BML и Δ B_1SL следует, что $\frac{LM}{LS} = \frac{9}{23}$, значит, LS = $\frac{69}{40}$, а HS = LH + LS = $\frac{15}{8} + \frac{69}{40} = 3,6$ и $MS = B_1F = 2,4$.

Δ AHS – прямоугольный (почему?). Проведем высоту HQ из прямого угла к гипотенузе AS, тогда MN $\parallel$ HQ, где MN $\perp$ AS. Треугольники HQS и MNS прямоугольные и подобны по двум углам, следовательно, $\frac{NM}{QH} = \frac{SM}{SH}$.

В прямоугольном Δ AHS по теореме Пифагора: AS $= \sqrt{AH^2 + HS^2} = \sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{18}{5})^2} = \frac{3\sqrt{219}}{10}$, откуда HQ $= \frac{AH \cdot HS}{AS} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3{,}6 \cdot 10}{2 \cdot 3\sqrt{219}} = \frac{18}{\sqrt{73}}$. Из подобия треугольников HQS и MNS следует, что NM $= \frac{QH \cdot SM}{SH} = \frac{18 \cdot 2{,}4}{\sqrt{73} \cdot 3{,}6} = \frac{12}{\sqrt{73}} = \frac{12\sqrt{73}}{73}$. Значит, $\rho(AB_1; BC_1) = \rho(M; AS) = NM = \frac{12\sqrt{73}}{73}$.

Ответ: а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{12\sqrt{273}}{91}$; г) $\frac{12\sqrt{73}}{73}$.

Следующую задачу тоже можно рассмотреть в качестве ключевой задачи.

Задача 26. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 35) ребро основания равно 3, боковое ребро 4. Найти расстояние между прямыми: а) AA_1 и BC; б) AA_1 и D_1C; в) BB_1 и AC; г) AB и A_1C; д) AB_1 и BC_1.

Решение. а) AA_1 и BC – скрещивающиеся прямые ($AA_1 \subset (ABB_1)$, $BC \cap (ABB_1) = B$, $B \notin AA_1$). Основание призмы – квадрат, значит, $AB \perp BC$. Так как призма правильная, то $AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow AA_1 \perp AB$ (почему?). Получили, что AB – общий перпендикуляр для двух скрещивающихся прямых AA_1 и BC, следовательно, $\rho(AA_1; BC) = AB = 3$.

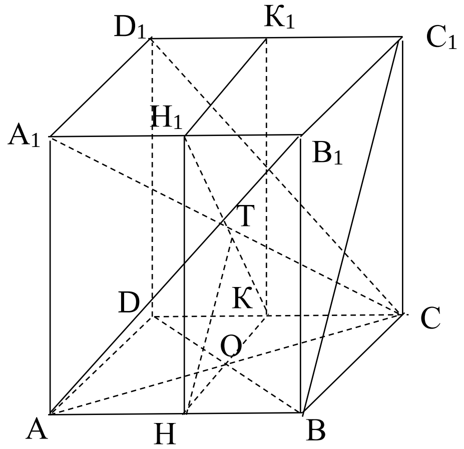


Рис. 35

б) Прямые AA_1 и D_1C – скрещивающиеся (почему?). $D_1C \subset (DCC_1)$, $AA_1 \parallel (DCC_1)$ (почему?), следовательно, $\rho(AA_1; D_1C) = \rho(AA_1; DCC_1) = AD = 3$.

в) Прямые BB_1 и AC – скрещивающиеся (почему?). $BO \perp AC$ (свойство диагоналей квадрата), $BB_1 \perp BO$ (B) $\Rightarrow$ BO – общий перпендикуляр для скрещивающихся прямых BB_1 и AC. $BO = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

г) AB и A_1C – скрещивающиеся прямые (почему?). Построим плоскость, перпендикулярную прямой AB. Пусть точки К и Н – середины ребер AB и CD соответственно, тогда $KH \perp AB$. Проведем $HH_1 \parallel AA_1$, тогда $HH_1 \perp AB$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AB \perp (HKK_1)$, где точка Н – проекция прямой AB на (HKK_1). H_1K – проекция прямой A_1C на (HKK_1) (почему?), следовательно, $\rho(AB;\ A_1C) = \rho(H;\ H_1K) = HT$, где $HT \perp H_1K$.

$\Delta\ H_1HK$ – прямоугольный ($HH_1 \perp AB$, $KH \perp AB$), а значит, по теореме Пифагора $H_1K = \sqrt{HH_1^2 + HK^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, тогда $HT = \dfrac{HH_1 \cdot HK}{H_1K} = \dfrac{4\cdot 3}{5} = 2{,}4$. Следовательно, $\rho(AB;\ A_1C) = 2{,}4$.

д) Прямые AB_1 и BC_1 – скрещивающиеся (почему?) (рис. 36).

$AB_1 \subset (AB_1D_1)$, $BC_1 \subset (BC_1D)$. По признаку параллельности двух плоскостей $(AB_1D_1) \parallel (BC_1D)$, тогда $\rho(AB_1;\ BC_1) = \rho((AB_1D_1);\ (BC_1D))$.

$AC \perp BD$ (свойство диагоналей квадрата), $CC_1 \perp BD$ ($BD \subset (ABC)$) $\Rightarrow BD \perp (ACC_1)$. Но $BD \subset (BC_1D)$, значит, по признаку перпендикулярности двух плоскостей $(BC_1D) \perp (ACC_1)$. Так как $(AB_1D_1) \parallel (BC_1D)$, то $(AB_1D_1) \perp (ACC_1)$.

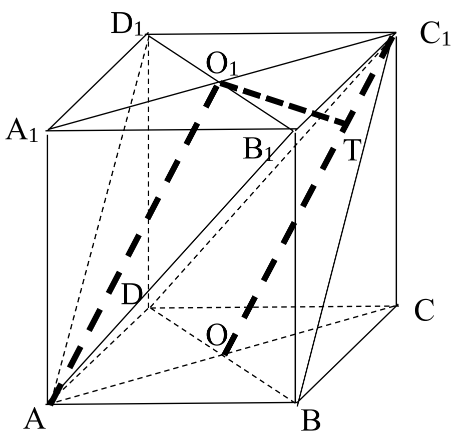


Рис. 36

(ACC_1) пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым AO_1 и OC_1, значит, $\rho((AB_1D_1);\ (BC_1D)) = \rho(AO_1;\ OC_1) = O_1T$, где $O_1T \perp OC_1$.

В прямоугольном $\Delta\ OCC_1$ по теореме Пифагора:

$$OC_1 = \sqrt{OC^2 + CC_1^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{18}{4}+16} = \sqrt{\frac{41}{2}}.$$

Четырехугольник AO_1C_1O – параллелограмм. $S_{AOC_1O_1} = AO \cdot OO_1 = O_1T \cdot OC_1$

$$\Rightarrow O_1T = \frac{AO \cdot OO_1}{OC_1} = \frac{3\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{41}} = \frac{12}{\sqrt{41}} = \frac{12\sqrt{41}}{41}.$$

Ответ: а) 3; б) 3; в) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; г) 2,4; д) $\frac{12\sqrt{41}}{41}$.

Важно «увидеть» расстояние между скрещивающимися прямыми в правильно построенном чертеже, поэтому целью реализации принципа доступности при обучении решению задач по данной теме является не только объяснение материала «от простого к сложному», но и показать учащимся многообразие методов решения.

На заключительных уроках по данной теме целесообразно обобщить и систематизировать изученный материал. На этих уроках важную роль отвести позиционным задачам – сначала «увидеть» искомый элемент, а метрическую задачу оставить на самостоятельное решение. Особый акцент сделать на ключевые задачи, опираясь на которые можно решить другие задачи.

§ 3. Методические аспекты реализации принципа доступности в задачах при изучении темы «Углы в многогранниках»

В результате изучения темы «Углы в многогранниках» на профильном уровне ученик должен достичь следующих предметных результатов:

- на моделях, изображениях куба, правильного тетраэдра, параллелепипеда, правильных пирамиды и призмы изображать, определять и вычислять углы между пересекающимися и скрещивающимися прямыми, содержащими ребра, диагонали многогранника, диагонали его граней, сопровождая каждый шаг построения и вычисления корректной аргументацией;
- на моделях и изображениях многогранников интуитивно «видеть», правильно и наглядно «строить» угол между прямой и плоскостью, логически обосновывая каждый шаг построения;
- решать задачи на построение и вычисление угла между прямой и плоскостью с использованием изображений куба, прямоугольного параллелепипеда,

правильного тетраэдра, правильной пирамиды, корректно аргументируя конструктивные и логические утверждения;

- «видеть» и правильно изображать («показывать на рисунке») линейные углы двугранных углов в данном многограннике;

- с помощью теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника находить: а) площадь основания многогранника; б) площадь сечения многогранника; в) величину двугранного угла при ребре многогранника; г) величину угла между плоскостями основания и сечения многогранника. В качестве многогранников использовать куб, правильные пирамиды;

- решать одну и ту же задачу различными методами, все рассуждения при решении задач сопровождать корректными аргументациями [46].

При изучении данной темы учащиеся должны научиться «видеть» и правильно строить, изображать и вычислять углы между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.

При решении задач на нахождение углов учащимся необходимо помнить:

— за величину угла между пересекающимися прямыми принимается величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми;

— величина угла между прямыми принадлежит промежутку [0°; 90°];

— угол между параллельными прямыми равен 0°;

— за величину угла между скрещивающимися прямыми принимается величина угла между параллельными им пересекающимися прямыми;

— углом между прямой и плоскостью называется угол между данной прямой и ее проекцией на плоскость;

— величиной двугранного угла называется величина его линейного угла;

— величина угла между плоскостями принадлежит промежутку [0°; 90°].

Особое внимание при изучении темы «Углы в многогранниках» должно быть уделено позиционным задачам (изображение угла между данными элементами), а затем метрическим задачам (вычисление искомой величины угла между данными элементами). Вместе с отработкой навыка верно и грамотно изображать искомые углы, целесообразно подбирать задачи по принципу «от простого к сложному», реализуя принцип доступности в обучении решению стереометрических задач [42,45].

Задача 27 (№ 2.034, [36]). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали AC и BD грани ABCD пересекаются в точке O. Найдите угол между прямыми: а) AD_1 и A_1C_1; б) AB и DC_1; в) AB и C_1D_1; г) AD_1 и OD_1; д) AA_1 и OD_1 (таб. 7).

Таблица 7

	Прямые	Расположение	Искомый угол
а)	AD_1 и A_1C_1	скрещивающиеся	$\angle D_1AC = 60^\circ$
б)	AB и DC_1	скрещивающиеся	$\angle B_1AB = 45^\circ$
в)	AB и C_1D_1	параллельные	0°
г)	AD_1 и OD_1	пересекающиеся	$\angle AD_1O = 30^\circ$
д)	AA_1 и OD_1	скрещивающиеся	$\angle DD_1O = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение.

а) $AD_1 \subset (ADD_1)$, $A_1C_1 \cap (ADD_1) = A_1$, $A_1 \notin AD_1 \Rightarrow$ прямые AD_1 и A_1C_1 – скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых)(рис. 37).

Так как $AC \parallel A_1C_1$, то $\angle(AD_1; A_1C_1) = \angle(AD_1; AC) = \angle D_1AC$ – искомый.

Имеем: $AD_1=D_1C=AC$ (как диагонали равных квадратов) $\Rightarrow \Delta\ AD_1C$ – равносторонний, а значит, $\angle D_1AC = \angle(AD_1; A_1C_1) = 60^\circ$.

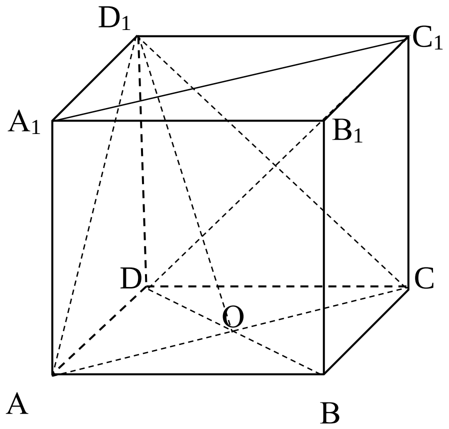


Рис.37

б) $AB \subset (ABD)$, $DC_1 \cap (ABD) = D$, $D \notin AB \Rightarrow$ прямые AB и DC_1 – скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых).

Так как $DC_1 \parallel AB_1$, то $\angle(AB; DC_1) = \angle(AB; AB_1) = \angle B_1AB$ – искомый. Имеем: AB_1 – диагональ квадрата AA_1B_1B, следовательно, $\angle B_1AB = 45^\circ$. Значит, $\angle(AB; DC_1) = 45^\circ$.

в) Имеем: $AB \parallel A_1B_1$ (противоположные стороны квадрата AA_1B_1B), $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (противоположные стороны квадрата $A_1B_1C_1D_1$). По свойству параллельности прямых $AB \parallel D_1C_1 \Rightarrow \angle(AB; D_1C_1) = 0^\circ$ (по определению угла между параллельными прямыми).

г) $AD_1 \cap OD_1 = D_1 \Rightarrow \angle(AD_1; OD_1) = \angle AD_1O$ – искомый.

Имеем: $\Delta\, AD_1C$ – равносторонний (доказано в п. а)), D_1O – медиана, биссектриса и высота $\Delta\, AD_1C$.

Значит, $\angle(AD_1; OD_1) = \angle AD_1O = \frac{1}{2}\angle AD_1O = 30^\circ$.

д) $AA_1 \subset (ADD_1)$, $OD_1 \cap (ADD_1) = D_1$, $D_1 \notin AA_1 \Rightarrow$ прямые AA_1 и OD_1 – скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых).

Имеем: $AA_1 \parallel DD_1$ (противоположные стороны квадрата AA_1D_1D), следовательно, $\angle(AA_1; OD_1) = \angle(DD_1; OD_1) = \angle DD_1O = \alpha$ – искомый.

$\Delta\, DD_1O$ – прямоугольный, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OD}{DD_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle(AA_1; OD_1) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: а) 60°; б) 45°; в) 0°; г) 30°; д) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Постепенно повышая уровень сложности, можно рассмотреть такую задачу.

Задача 28 [48]**.** Длина ребра правильного тетраэдра ABCD (рис. 38) равна 1. Найдите угол между прямыми DM и CL, где M – середина ребра BC, L – середина ребра AB.

Решение. $CL \subset (ABC)$, $DM \cap (ABC) = M$, $M \notin CL \Rightarrow$ прямые CL и DM – скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых). Построим $KM \parallel CL$, тогда $\angle(CL; DM) = \angle(KM; DM) = \angle DMK = \alpha$ – искомый. В равностороннем $\Delta\, ABC$ медиана $CL = \frac{a\sqrt{3}}{2} =$

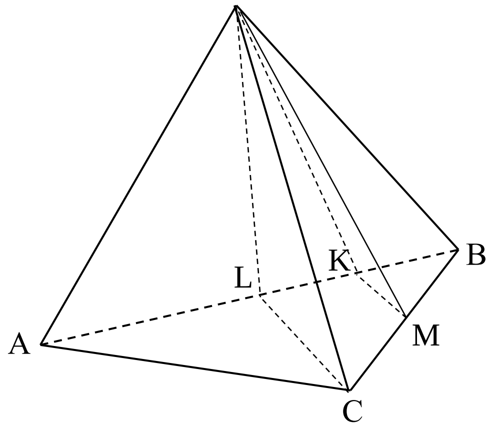


Рис. 38

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда КМ $= \frac{1}{2}$CL= $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (как средняя линия Δ BCL).

В равностороннем Δ DBC медиана DM = $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

В равностороннем Δ ABD медиана DL = $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а также медиана DL является высотой (свойство равнобедренного треугольника), следовательно Δ DLK – прямоугольный, где LK = $\frac{1}{4}$AB = $\frac{1}{4}$. Тогда по теореме Пифагора: DK $= \sqrt{DL^2 + LK^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

В Δ DKM по теореме косинусов: cosα $= \frac{DM^2 + KM^2 - DK^2}{2 \cdot DM \cdot KM} =$

$$\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 - (\frac{\sqrt{13}}{4})^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{13}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{6}.$$

Значит, $\angle$(CL; DM) = α = $\arccos\frac{1}{6}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$.

Продолжая дальше изучать тему «Углы в многогранниках» на примере метрических задач на нахождение углов между прямой и плоскостью, между плоскостями, необходимо помнить, что в каждой задаче есть моменты, в которых повторяется планиметрия. Полезно, соблюдая принцип доступности «от простого к сложному», придерживаться методически верного принципа: *изучая стереометрию, повторять планиметрию*: учитель предлагает учащимся задачи различного уровня сложности, учитывая геометрическую подготовку каждого.

Большую роль при методически правильном обучении играет пропедевтика. Перед решением стереометрических задач на нахождение углов между прямой и плоскостью, между плоскостями необходимо учеников научить «видеть» перпендикуляры, проведенные из точки на прямую, из точки на плоскость, между двумя плоскостями и т.д.

Можно с учениками разобрать такие позиционные задачи:

Задача 29 (№ 2.036, [36]). Пусть E и F – середины ребер соответственно AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Опустите перпендикуляры из вершины A_1 на следующие прямые: а) AD_1; б) D_1E; в) BD; г) EF; д) C_1D.

Задача 30 (№ 2.048, [36]). Дан правильный тетраэдр PABC. Точка К – середина ребра PB. Опустите из точки К перпендикуляры на прямые: а) AP; б) AC; в) BH, где точка H – середина ребра AC.

Задача 31 (№ 2.051, [36]). В правильной пирамиде PABC с вершиной P углы APB, BPC, APC – прямые. Точка H – середина апофемы PK грани BPC. Опустите из точки H перпендикуляры на прямые: а) CP; б) AC; в) AP.

Задача 32 (№ 4.031, [36]). Постройте линию пересечения секущей плоскости NKF с плоскостью PQM, которые заданы точками, расположенными на ребрах и в вершинах куба (рис 39,40).

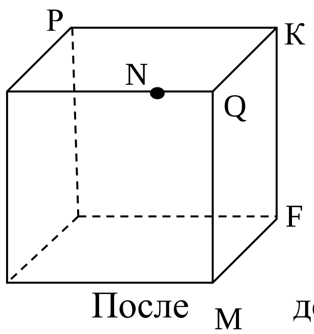


Рис. 39

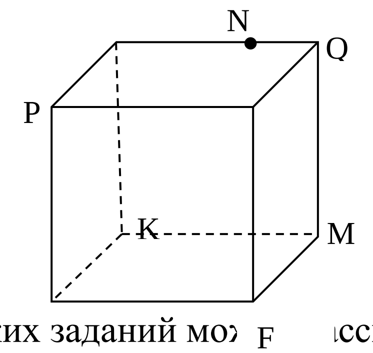


Рис. 40

После пропедевтических заданий можно рассмотреть следующие задачи на многогранники.

Задача 33 (№ 3.100, [36]). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M- середина B_1C_1, точка F – середина D_1C_1, точка К – середина DC, O – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD. Заполните таблицу (таб. 8) :

Таблица 8

	Прямая и плоскость	**Величина угла**
1	AB_1 и ABC	45°
2	AC и AA_1B	45°
3	MF и DD_1C	45°
4	MF и DD_1B	0°

5	AM и ABC	$\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{5}}{5}$
6	AC и MKF	90°
7	AK и MKF	arctg 3
8	AC_1 и BCC_1	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
9	C_1D и ACC_1	30°
10	B_1D и ACC_1	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$
11	AA_1 и AMF	$\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}$
12	DD_1 и AMF	$\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Подробно разберем задачу № 11 (рис. 41).

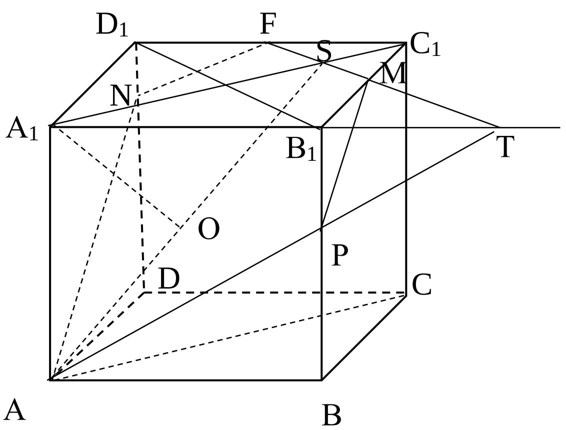


Рис. 41

Построение:

1. FM – сторона сечения;
2. $FM \cap A_1B_1 = T$;
3. $AT \cap BB_1 = P$, AP – сторона сечения;
4. $NF \parallel AP$, NF – сторона сечения;
5. PM – сторона сечения;
6. $AN \parallel PM$, AN – сторона сечения;
7. ANFMP – искомое сечение (рис.41).

Решение. Для того, чтобы найти угол между прямой и плоскостью, необходимо построить проекцию данной прямой на эту плоскость. Для этого опустим перпендикуляр из точки A_1 на (AMF). Искомый перпендикуляр принадлежит плоскости, перпендикулярной (AMF) и опускается на их общую линию пересечения.

$FM \parallel B_1D_1$ (как средняя линия $\Delta\, B_1C_1D_1$) $\Rightarrow FM \perp A_1C_1$ ($FM \parallel B_1D_1$, $B_1D_1 \perp A_1C_1$ по свойству диагоналей квадрата).

Имеем: $FM \perp A_1C_1$; $FM \perp CC_1$ ($CC_1 \perp (A_1B_1C_1)$; $FM \subset (AMF)$; $A_1C_1 \subset (ACC_1)$; $CC_1 \subset (ACC_1)$ $\Rightarrow$ $(AMF) \perp (ACC_1)$ (признак перпендикулярности двух плоскостей, где AS – прямая пересечения двух плоскостей.

Опустим $A_1O \perp AS$, значит, AO – проекция наклонной AA_1 на (AMF).

Следовательно, $\angle$(AA_1; (AMF)) = $\angle A_1AO = \alpha$. В прямоугольном Δ AA_1S: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{A_1S}{AA_1} = \dfrac{\frac{3}{4}A_1C}{a} = \dfrac{\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{a} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle$(AA_1; (AMF)) = arctg $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: arctg $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

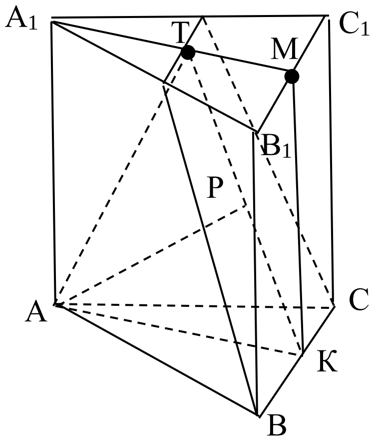


Рис.42

Задача 34 [48]. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина B_1C_1, точка T – середина A_1M, $BB_1 = a$, $AB = b$. Найдите угол между прямой AT и (BCT) (рис.42).

Решение. Плоскость BCT представляет собой равнобедренную трапецию. Углом между прямой и плоскостью является угол между прямой и проекцией этой прямой на плоскость.

Проведем AK $\perp$BC, тогда по теореме о трех перпендикулярах TK $\perp$BC. По признаку перпендикулярности двух плоскостей (BCT)$\perp$(AKT). Опустим AP$\perp$ TK, следовательно AP $\perp$(BCT). Значит, $\angle ATP = \alpha$ – искомый.

1 способ. Пусть $\beta = \angle ATA_1$, $\gamma = \angle KTM$, тогда $\alpha = 180 - \beta - \gamma$. В прямоугольном Δ AA_1T: $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{AA_1}{A_1T}$, в прямоугольном Δ TMK: $\mathrm{tg}\gamma = \dfrac{MK}{TM}$. Из равенства треугольников AA_1T и TMK (по двум катетам) следует, что $\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\gamma$.

В равностороннем Δ $A_1B_1C_1$ медиана $A_1M = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$, $A_1T = TM = \dfrac{1}{2}A_1M = \dfrac{b\sqrt{3}}{4}$. Тогда, $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\gamma = \dfrac{a}{\frac{b\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3b}$.

Получаем: $\alpha = 180^\circ - 2\mathrm{arctg}\,\dfrac{4a\sqrt{3}}{3b}$.

2 способ. Нахождение искомого угла α из Δ ATK с помощью теоремы косинусов.

Ответ: $180^\circ - 2\mathrm{arctg}\,\dfrac{4a\sqrt{3}}{3b}$.

Реализуя принцип доступности полезно одну и туже задачу решать несколькими способами. Также целесообразно в качестве ключевой разобрать задачу в общем виде (без числовых данных), а затем предложить ученикам решить самостоятельно подобную задачу с конкретными данными.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина B_1C_1, точка T – середина A_1M, $BB_1 = 5$, $AB = 4\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой AT и (BCT).

Решение.

1 способ. Пусть $\alpha = \angle ATP$, $\beta = \angle ATA_1$, $\gamma = \angle KTM$, тогда $\alpha = 180 - \beta - \gamma = 180 - \mathrm{arctg}\frac{5}{3} - \mathrm{arctg}\frac{5}{3} = 180 - 2\mathrm{arctg}\frac{5}{3} \Rightarrow \angle ATP = \mathrm{arctg}\ \frac{15}{8}$.

2 способ. $AP \perp TK$, TP – проекция AT на (BCT) $\Rightarrow$ $\angle ATP = \alpha$ – искомый.

В равностороннем $\Delta\ A_1B_1C_1$ медиана $A_1M = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6 \Rightarrow A_1T = 3$.

В прямоугольном $\Delta\ AA_1T$ по теореме Пифагора $AT = \sqrt{AA_1^{\ 2} + A_1T^2} = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$.

В прямоугольном Δ TMK $TK = \sqrt{34}$. Используя теорему косинусов, в Δ ATK:

$\cos\alpha = \frac{AT^2 + TK^2 - AK^2}{2\cdot AT\cdot TK} = \frac{34+34-36}{2\cdot 34} = \frac{8}{17} \Rightarrow \angle ATP = \arccos\ \frac{8}{17}$.

Ответ: $\angle ATP = \arccos\ \frac{8}{17}$.

В задачах на вычисление угла между двумя плоскостями также как и в задачах на вычисление угла между прямыми, прямой и плоскостью необходимо:

1. определить взаимное положение плоскостей:
- если плоскости перпендикулярны, то угол между плоскостями прямой;
- если плоскости параллельны, то угол между плоскостями равен нулю;
- если плоскости пересекаются, то строим линейный угол, образованный перпендикулярами, проведенными к прямой пересечения плоскостей.
2. найти величину построенного линейного угла.

Целесообразно на уроке разобрать задачу со всевозможными вариантами расположения плоскостей.

Задача 35 (№ 4.055, [36]). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M – середина ребра C_1D_1. Заполните таблицу 9:

Таблица 9

	Плоскости	**Взаимное расположение плоскостей**	**Угол между плоскостями**
1	AB_1A и D_1CD	параллельны	0°
2	$A_1B_1C_1$ и DD_1C	пересекаются	90°
3	A_1BD и B_1D_1C	параллельны	0°
4	B_1AC и ADC	пересекаются	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$
5	A_1BD и C_1DB	пересекаются	$2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	A_1BD и CC_1A	пересекаются	90°
7	AB_1C_1 и ADC	пересекаются	45°
8	A_1MA и B_1C_1C	пересекаются	arctg 0,5
9	A_1MA и BB_1D	пересекаются	$0{,}75\pi$-arctg 2
10	MA_1D и CA_1D	пересекаются	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$

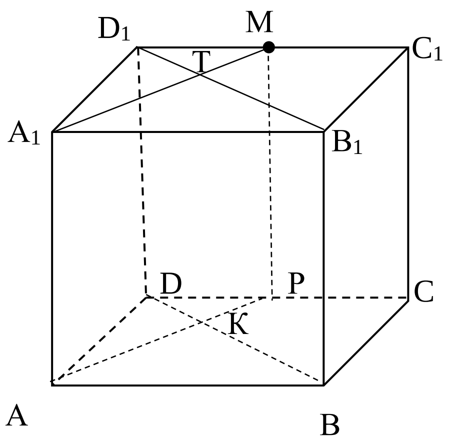


Рис. 43

Разберем подробно задачу **№ 8** (рис. 43):

Решение. $(BB_1C)\parallel(AA_1D)$ $\Rightarrow\angle((A_1MA);\ (B_1C_1C)) = \angle((A_1MA);\ (AA_1D))$.

Так как $(A_1MA)\cap(AA_1D) = AA_1$, $AD\perp AA_1$, $AP\perp AA_1$, то $\angle DAP = \alpha$ - линейный угол двугранного угла $D(AA_1)M$.

В прямоугольном Δ APD: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{DP}{AD} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = 0{,}5$. Следовательно, $\angle((A_1MA);\ (B_1C_1C)) = \operatorname{arctg} 0{,}5$.

№ 9.

Решение: Пусть $(A_1MA)\cap(BB_1D) = TK$.

Имеем: $PK\perp TK$, $DK\perp TK \Rightarrow \angle((A_1MA);\ (BB_1D)) = \angle PKD = \beta$ – линейный угол двугранного угла $B(KT)A_1$.

В прямоугольном Δ ADP: $tgP = \dfrac{AD}{DP} = 2 \Rightarrow \angle DPA = \text{arctg } 2$.

В Δ DPK: $\angle PDK = 45^\circ$(BD– биссектриса прямого угла), следовательно, $\angle PKD = = 180^\circ - 45^\circ - \text{arctg } 2 = 135^\circ - \text{arctg } 2$.

Остальные задачи можно предложить для самостоятельного решения.

§ 4. Методические аспекты реализации принципа доступности при решении задач векторно-координатным методом в теме «Многогранники»

Одним из методических аспектов реализации принципа доступности при обучении решению геометрических задач является умение решать одну и туже задачу несколькими способами (геометрическим, векторным, координатным). Этот аспект дает возможность среднему или слабому ученику решить достаточно трудную задачу векторно-координатным методом, который не требует умения «видеть» искомый элемент, необходимы знания конкретных формул.

Для получения навыка использовать векторно – координатный метод, полезно решать стереометрические задачи на вычисление углов и расстояний в многогранниках. Для этого учащимся нужно научиться правильно вводить декартову прямоугольную систему координат, вычислять координаты вершин многогранника в данной системе. Затем, переводя соотношения между геометрическими фигурами в векторную и координатную терминологию, используя нужные формулы, решаем данную задачу. Результат переводят из векторно-координатной формы на геометрический язык и получают нужный результат .

Чтобы найти величину угла используют алгебраические[26] и геометрические свойства скалярного произведения векторов: cosφ = $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - базисные векторы [46].

Покажем сказанное на решении следующей задачи.

Задача 36 [42]**.** В системе координат Oxyz расположен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что $A_1(1;0;0)$, $B(1;1;1)$, $D(0;0;1)$, $D_1(0;0;0)$. Постройте этот куб. Векторно-координатным методом найдите: а) угол между прямыми AC_1 и D_1B; б) синус угла между прямой BC и плоскостью (AB_1D_1); в) угол между плоскостями (AB_1C) и (ABC_1).

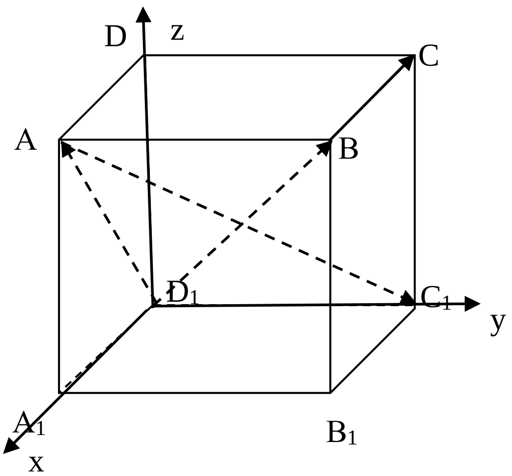


Рис. 44

Решение. Из условия задачи следует, что точка $D_1(0;0;0)$ – начало координат, точки $A_1(1;0;0)$ и $D(0;0;1)$ – единичные на осях Ox и Oz соответственно. Тогда получим: $A(1;0;1)$, $C(0;1;1)$, $B_1(1;1;0)$, $C_1(0;1;0)$.

а) Найдем угол между прямыми AC_1 и D_1B. Направляющими векторами прямых AC_1 и D_1B будем считать векторы соответственно (рис. 44) $\overrightarrow{AC_1}$ (-1;1;-1), $\overrightarrow{D_1B}$(1;1;1).

$|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$; $|\overrightarrow{D_1B}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. Пусть $\angle(AC_1; D_1B) = \beta$, тогда $\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}|}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{D_1B}|} = \frac{|-1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = \arccos\frac{1}{3}$.

б) Найдем sin φ, где $\varphi = \angle(BC; (AB_1D_1))$.

Имеем: $\overrightarrow{BC}$(-1;0;0); $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+0+0} = 1$.

Пусть $\vec{n}(a,b,c)$ – нормаль плоскости $\alpha = (AB_1D_1)$, перпендикулярный векторам$ $\overrightarrow{D_1A}$(1;0;1), $\overrightarrow{D_1B_1}$ (1;1;0).

Тогда $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{D_1A},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{D_1B_1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1A}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+c=0\\ a+b=0\end{cases} \Rightarrow a = -b = -c.$

Пусть $a=1$, тогда b = c= -1, тогда $\vec{n}$ (1;-1;-1). Значит, $|\vec{n}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$.

Составим уравнение плоскости α ($B_1 \in \alpha$): 1·(x-1)-1·(y-1)-1(z-0) = 0 $\Leftrightarrow$ x-y-z = 0,

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\vec{n}|} = \left|\frac{-1\cdot 1+0\cdot(-1)+0\cdot(-1)}{1\cdot\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

в) Найдем угол между плоскостями (AB_1C) и (ABC_1).

В качестве вектора нормали (AB_1C) примем вектор $\vec{n}(a_1;b_1;c_1)$, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{AB_1}$ (0;1;-1) и $\overrightarrow{AC}$ (-1;1;0).

Найдем координаты вектора $\vec{n}$.

$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB_1},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b_1-c_1=0\\ -a_1+b_1=0\end{cases} \Rightarrow$ $a_1=b_1=c_1$. Пусть b_1=1, тогда $\vec{n}(1;1;1)$, а значит, $|\vec{n}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$.

В качестве вектора нормали (ABC_1) примем вектор $\vec{m}(a_2;b_2;c_2)$, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{BA}$ (0;-1;0) и $\overrightarrow{BC_1}$ (-1;0;-1).

Найдем координаты вектора $\vec{m}$.

$$\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{BA},\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{BC_1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b_2=0\\ a_2=-c_2\end{cases}.$$

Пусть a_2=1, тогда $\vec{m}$(1;0;-1), а значит, $|\vec{m}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$.

φ = $\angle$((AB_1C) ;(ABC_1)) = $\angle(\vec{n};\vec{m})$.

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|} = \frac{|1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(-1)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 0.$$

Следовательно, $\vec{n}\perp\vec{m} \Rightarrow \angle$(($AB_1C$) ;($ABC_1$)) = 90°.

Ответ: а) arccos $\frac{1}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 90°.

При решении задач координатным методом необходимо уметь составлять уравнения прямых и плоскостей; знать условия коллинеарности двух векторов и компланарности трех векторов, чтобы определять взаимное расположение точек, прямых и плоскостей [40, с 342].

С помощью векторно-координатного метода можно эффективно решать многие метрические задачи стереометрии.

Разберем задачи на нахождение расстояний векторно – координатным методом, где необходимо знать формулу нахождения расстояния от точки М ($x_0;y_0;z_0$) до плоскости α.

$$\rho(\text{M}; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Задача 37 [42]**.** В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.45) найдите расстояния: а) от точки С до прямой AC_1; б) от точки С до плоскости A_1BC_1; в) между прямыми BD_1 и B_1C.

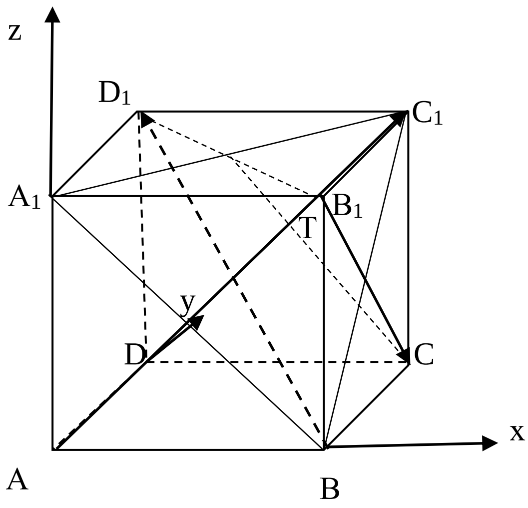


Рис.45

Решение.

Относительно введенной системы координат Oxyz (рис.45) имеем: A(0;0;0) – начало координат, точки B(1;0;0), D(0;1;0) и A_1(0;0;1) – единичные на осях Ox, Oy и Oz соответственно. Тогда получим: B_1(1;0;1), D_1(0;1;1), C(1;1;0), C_1(1;1;1).

а) Найдем расстояние от точки С до прямой AC_1 Прямая $AC_1 \perp (B_1CD_1)$ (свойство куба доказано в зад. № 16). Пусть $\beta = (B_1CD_1)$.

Составим уравнение плоскости β, проходящей через точку С (1;1;0) и перпендикулярной AC_1. Вектор $\overrightarrow{AC_1}$ (1;1;1) является направляющим для прямой AC_1 и вектором нормали для β, где $\vec{n}$ (1;1;1).

Уравнение плоскости β: 1·(x-1)+1·(y-1) +1(z-0) = 0 $\Leftrightarrow$ x+y+z-2 = 0.

Пусть T = β ∩AC_1, тогда CT = ρ(C;AC_1).

Решим систему, составленную из уравнения плоскости β и системы параметрических уравнений прямой AC_1.

$\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x=t; y=t; z=t, \end{cases}$ откуда t=$\frac{2}{3}$, значитT($\frac{2}{3}$;$\frac{2}{3}$;$\frac{2}{3}$).

Получаем CT = $\sqrt{(1-\frac{2}{3})^2+(1-\frac{2}{3})^2+(0-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Значит, ρ(C;AC$_1$)= $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

б) Найдем расстояние от точки C до плоскости A_1BC_1.

Имеем: $A_1(0;0;1)$, B(1;0;0), $C_1(1;1;1)$. Пусть α =(A_1BC_1), тогда составим уравнение плоскости α, где $A_1 \in$ α; B $\in$ α; $C_1 \in$ α.

$\begin{cases} C+D=0 \\ A+D=0 \\ A+B+C+D=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-D \\ A=-D \\ B=D, \end{cases}$ Подставляя в уравнение плоскости, получим:

-Dx+Dy-Dz+D=0, тогда α: -x+y-z+1=0

C(1;1;0) $\Rightarrow$ ρ(C; α) = $\frac{|-1\cdot1+1\cdot1+0+1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

в) Найдем ρ(BD_1; B_1C). Имеем: B(1;0;0), $D_1(0;1;1)$, $B_1(1;0;1)$, C(1;1;0).

Векторы $\overrightarrow{BD_1}$(-1;1;1) и $\overrightarrow{B_1C}$(0;1;-1) примем в качестве направляющих для прямых BD_1 и B_1C.

Пусть $\vec{n}$*(a,b,c)* – вектор нормали плоскости α, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{B_1C}$, тогда

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BD_1}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{B_1C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD_1}=0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b+c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2c \\ b=c \end{cases}$$

Пусть c=1, тогда *a=2, b=1*, следовательно $\vec{n}$(2;1;1).

Составим уравнение плоскости α, проходящей через прямую BD_1 параллельно B_1C, где B $\in$ α.

α: 2·(x-1) + 1·(y-0) + 1·(z-0) = 0 $\Leftrightarrow$ 2x + y + z – 2 = 0

Теперь находим ρ(BD_1; B_1C) = ρ(B_1; α) = $\frac{|2\cdot1+1\cdot0+1\cdot1-2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Со слов Е.В. Потоскуева: «коорддинатный метод- мощный аппарат изучения пространственной геометрии».

§ 5. Элективный курс «Многогранники в задачах»

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа элективного курса «Многогранники в задачах» предназначена для учащихся 10-11 профильных классов. Она направлена на углубление, обобщение знаний и умений учащихся по математике, а также на расширение и знакомство учащихся с одним из важнейших направлений развития современной математики – *стереометрией.* Для её реализации достаточно знаний и умений по геометрии, полученных в основной школе.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

математика является профилирующим предметом на вступительных экзаменах в вузы по широкому спектру специальностей. В старших классах углубление основного курса выполняет функции подготовки к продолжению образования и к сдаче экзамена по математике в форме ЕГЭ. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач, требующих применения высокой логической и операционной культуры, развивающих научно – теоретическое и алгоритмическое мышление учащихся.

Предметом данного элективного курса является достаточно сложный раздел школьной программы – геометрия. Как показывает практика, геометрические задачи вызывают наибольшие затруднения у учащихся при сдаче ЕГЭ по математике.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

итоги ежегодного ЕГЭ показывают, что учащиеся плохо справляются с этими заданиями или вообще не приступают к ним. Можно выделить следующие недостатки в подготовке выпускников: формальное усвоение теоретического содержания курса геометрии, неумение использовать изученный материал в ситуации, которая отличается от стандартной. Для успешного выполнения этих заданий необходимы прочные знания основных геометрических фактов и опыт в решении геометрических задач. При изучении математики в старших классах на профильном уровне необходимы систематизация знаний, полученных учащимися в основной школе, выделение общих методов и приемов решения геометрических задач, демонстрация техники решения геометрических задач, закрепление навыков решения геометрических задач. В связи с этим необходимо делать акцент не только на овладение теоретическими фактами, но и на развитие умений решать геометрические задачи разного уровня сложности и математически грамотно их записывать. Повторение геометрического материала по разделам позволяет реализовать широкие возможности для дифференцированного обучения учащихся.

Цель элективного курса состоит в формировании теоретических знаний, развития логического аппарата учащихся для дальнейшего осознанного и обоснованного решения задач.

Задачи программы элективного курса:

- формирование у учащихся верного и наглядного изображения пространственных фигур на плоскости;

- развитие пространственного воображения, умения представлять геометрический объект;

- выработка умений корректно аргументировать утверждения, возникающие по ходу решения любой геометрической задачи;

- знакомство учащихся с различными методами решения геометрических задач;

- совершенствование навыков решения задач;

- организация работы с дополнительной литературой;

- развитие мыслительных, творческих способностей учащихся;

- знакомство учащихся с элементами исследовательской деятельности.

Отличительные особенности данного элективного курса:

тематика задач, предлагаемых при изучении данного элективного курса, выходит за рамки основного курса, и уровень их сложности – повышенный.

Поскольку изучение курса геометрии дает возможность учащимся приобрести опыт дедуктивных рассуждений, учит их умению доказывать основные теоремы курса, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач, то в профильном (углубленном) обучении математики данная линия приобретает еще большую значимость в связи с расширением содержательной составляющей курса геометрии. Рассмотрение избранных теорем геометрии, выходящих за рамки основного курса, а также решение избранных задач различными методами подчеркивают красоту содержания учебного предмета, способствуют воспитанию эстетического восприятия геометрии, помогает выбирать из всех известных методов решения или доказательства наиболее рациональный.

Новизна программы состоит в том, что значительное место отведено решению задач, отвечающих требованиям ЕГЭ и повышенной сложности. Содержание данной программы представлено несколькими разделами. Особое внимание в программе уделяется умению «видеть» и находить расстояния между точками, прямыми и плоскостями в различных геометрических комбинациях. Элективный курс «Многогранники в задачах» позволяет самостоятельно ориентироваться не только в поиске решения проблемных ситуаций, но и переносить приобретенные знания, умения и навыки к поисково-исследовательской деятельности в работе над задачами.

Программа элективного курса рассчитана на 34 (1 ч. в неделю) часа.

Форма занятия: групповая и индивидуальная.

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- правильно употреблять новые термины, связанные с основными понятиями;

- знать основные аксиомы и теоремы стереометрии, признаки и свойства геометрических фигур;

- правильно анализировать условия задач;

- уметь выполнять грамотный чертеж к задаче;

- уметь исследовать поставленную задачу;

- уметь логически правильно строить свои рассуждения;

- уметь строить искомый перпендикуляр двух скрещивающих прямых;

- умения решать геометрические задачи различными методами;

- применять полученные знания при решении задач;

- использовать символический язык для записи решений геометрических задач.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

- зачеты, контрольные работы, исследовательские работы.

Данная программа может быть использована в классах с углубленным или профильным изучением математики.

УЧЕБНО - ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Таблица 10

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
I	**Обобщение курса планиметрии**	**4**	
1	Решение опорных задач планиметрии	2	Урок-лекция. Уроки-практикумы. Урок обобщения.
2	Решение задач координатно-векторным способом.	2	
II	**Расстояния и многогранники в задачах.**	**13**	
1	Нахождение расстояния от точки до прямой.	1	
2	Нахождение расстояния от точки до прямой координатным методом.	2	
3	Нахождение расстояния от точки до плоскости	1	

4	Нахождение расстояния от точки до плоскости координатным методом.	2	
5	Теорема о существовании и единственности общего перпендикуляра скрещивающихся прямых. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых	2	
6	Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.	2	
7	Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми координатным методом.	2	
8	Контрольная работа № 1	1	Урок самостоятельного решения задач.
III	**Углы и многогранники в задачах.**	**17**	
1	Нахождение угла между двумя плоскостями.	2	Урок-лекция. Уроки-практикумы. Урок обобщения.
2	Нахождение угла между двумя плоскостями координатным методом.	2	
3	Нахождение угла между прямой и плоскостью.	2	
4	Нахождение угла между прямой и плоскостью координатным методом.	2	
5	Нахождение угла между скрещивающимися прямыми.	2	
6	Нахождение угла между скрещивающимися прямыми координатным методом.	2	
7	Контрольная работа №2	1	
8	Защита проектов.	4	Учебно-исследовательская конференция

СОДЕРЖАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

Раздел 1. **Обобщение курса планиметрии(4 ч)**

1.1.Решение опорных задач планиметрии. Решение задач координатно-векторным способом.

Основная цель - вспомнить с учащимися основные свойства многоугольников, теоремы, помогающие решать задачи.

Многоугольники; основные свойства медиан, биссектрис, высот в равнобедренных, равносторонних, прямоугольных треугольниках; формулы площадей многоугольников; вписанные и описанные многоугольники и окружности; теоремы о касательной к окружности, о четырёхугольниках и окружностях; решение задач.

В результате изучения данного раздела учащиеся должны аргументировать утверждения при решении задач, правильно пользоваться определениями и свойствами фигур. Учащиеся должны знать и при необходимости использовать специальные свойства многоугольников.

Задания для самостоятельной работы:

1. Точка С – середина отрезка АВ, точка М – середина отрезка ВС, а точка В – середина отрезка АК. Сколько процентов длина отрезка КМ составляет от длины отрезка АК?

2. Отрезки А, С, К, В лежат на одной прямой, причем АВ=22, АС=11, КВ=7. Найдите наименьшую длину отрезка СК.

3. Периметр треугольника МРК равен 32. Точка Н лежит на стороне МК этого треугольника так, что сумма периметров треугольников МРН и КРН равна 44. Найдите длину отрезка РН.

4. Периметр равнобедренного треугольника АКС равен 143 см, а АК : АС = 5 : 3. Найдите все возможные значения длины отрезка АС.

5. Диагонали РН и ВС выпуклого четырехугольника ВРСН пересекаются под прямым углом. Найдите расстояние между серединами сторон РС и ВН равно 7 м.

6. Точка К лежит на основании АС равнобедренного треугольника АВС. Найдите площадь этого треугольника, если длина его боковых сторон АВ и ВС равны 11, а расстояния от точки М до этих сторон равны соответственно 3 и 7.

7. В треугольнике АВС известны длины сторон: АВ=$4\sqrt{7}$, АС=$5\sqrt{7}$; ВС=$6\sqrt{7}$. Найдите расстояние от вершины В до точки пересечения высот треугольника АВС.

8. Около окружности с радиусом 5 описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания ее боковых сторон равно 8. Найдите площадь трапеции.

Ответы: **1**. 62,5%; **2.** 4; **3.** Невозможно определить; **4.** 33 см и 39 см; **5.** 7 м; **6.** 55; **7.** 9; **8.** 125.

Литература:

1. Звавич, Л.И. Тематические тестовые задания 7-9 классы (ЕГЭ: шаг за шагом) / Л.И. Звавич, Е.В. Потоскуев // - М. : Дрофа, 2011. – 189 с.

2. Черняк, А.А. Геометрия. 7 – 11 классы (ЕГЭ: шаг за шагом) / А.А. Черняк, Ж.А. Черняк // – М.: Дрофа, 2011. – 247 с.

Раздел 2. **Расстояния и многогранники в задачах (13 ч.)**

2.1. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние от точки до плоскости. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Теоретический зачет.

Основная цель - изучить приемы нахождения расстояний между двумя точками; между точкой и фигурой; между двумя фигурами; изучить приемы нахождения этих расстояний. Формировать умения «видеть» и вычислять различные расстояния в пространстве, используя многогранники и многоугольники, расположенные в пространстве; решать задачи метрического характера на нахождение расстояний, углов, площадей, используя куб, правильную пирамиду, правильный тетраэдр, параллелепипед, корректно аргументируя каждый шаг построения изображения, доказательной и вычислительной частей решения задачи; используя геометрические места точек в пространстве, осуществлять пропедевтическую работу по подготовке учащихся к решению содержательных задач в 11 классе при изучении многогранников и фигур вращения.

В результате изучения данного раздела учащиеся должны определять расстояния: от точки до прямой и до плоскости; между двумя параллельными плоскостями; между двумя скрещивающимися прямыми; знать основные геометрические места точек в пространстве;

Задачи для самостоятельной работы:

1. Точка H – середина ребра PB правильного тетраэдра PABC. Опустите перпендикуляры из точки H: а) на прямую AC; б) на высоту PO тетраэдра, $O \in (ABC)$. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $2\sqrt{2}$. *Ответ:* а) 2; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба равно m. Найдите ребро этого куба. *Ответ:* $m\sqrt{3}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние до прямой BD от вершин: а) B_1; б) A; в) A_1; г) C_1, если ребро куба равно 6.

Ответ: а) 6; б) $3\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{6}$; г) $3\sqrt{6}$.

4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние: от вершины C до прямой AC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

5. Точка H – середина ребра PB правильного тетраэдра PABC. Опустите перпендикуляр из точки H на плоскость ABC и найдите длину этого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно $2\sqrt{6}$. *Ответ:* 2.

6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние: от точки A до плоскости C_1BD. *Ответ:* $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Контрольная работа

Вариант №1

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние до AB_1 от вершин: а) C_1; б) B; в) C, если ребро куба равно 8. *Ответ:* а) 8; б) $4\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{6}$.

2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние: 1) между вершинами A и C; 2) между вершиной A и серединой H отрезка C_1E_1. *Ответ:* 1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние до A_1BC_1 от вершин: а) B_1; б) D_1; в) D, если ребро куба равно 9. *Ответ:* а) $3\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) $6\sqrt{3}$.

4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние: от точки B до плоскости A_1EF. *Ответ:* $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

5. PABC – правильный тетраэдр с ребром, равным 22. Найдите расстояние между прямыми: AC и BP. *Ответ:* $11\sqrt{2}$.

6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми F_1Bи EF. *Ответ:*$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант №2

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние до BD_1 от вершин: а) A_1; б) D; в) C_1, если ребро куба равно 8.*Ответ:* а) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние:1) между вершинами A и C_1; 2) между вершиной A и серединой K отрезка B_1F_1. *Ответ:* 1) 2; 2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние до AB_1C от вершин: а) B; б) C_1; в) D_1, если ребро куба равно 6. *Ответ:* а) $2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $4\sqrt{3}$.

4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние: от точки B до плоскости AB_1C. *Ответ:*$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

5. $PABC$ – правильный тетраэдр с ребром, равным 22. Найдите расстояние между прямыми: AP и BC. *Ответ:* $11\sqrt{2}$.

6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми A_1B и C_1D. *Ответ:*$\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Литература:

1. Варшавский, И.К. Стереометрия на едином государственном экзамене. / И.К.Варшавский, М.Я. Гаиашвили, Ю.А. Глазков // Математика в школе – 2006. - №4 – С. 2-7.

2. Елизарова, Н.Г. О расстоянии от точки до плоскости. / Н.Г. Елизарова, Р.С. Понарядова // Математика в школе – 2009. - № 4 – С. 67 – 73.

3. Кожухов С.К. О некоторых способах вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми / С.К. Кожухов, В.К. Володин // Математика в школе – 2008. - №1. – С.15-17.

4. Потоскуев Е.В. Решение задач по стереометрии. Практикум. Подготовка к ЕГЭ. – М.: Илекса, 2012. – 108 с.

5. Смирнов В.А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 64 с.

Раздел 3. **Углы и многогранники в задачах (17 ч.)**

3.1 Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Угол между двумя плоскостями. Угол между двумя скрещивающимися прямыми. Теоретический зачет.

Основная цель - изучить способы нахождения углов между двумя прямыми; между прямой и плоскостью; между двумя плоскостями; между двумя скрещивающимися прямыми. Формировать умения «видеть» и вычислять углы в пространстве, используя многогранники и многоугольники, расположенные в пространстве; решать задачи метрического характера на нахождение расстояний, углов, площадей, используя куб, правильную пирамиду, правильный тетраэдр, параллелепипед, корректно аргументируя каждый шаг построения изображения, доказательной и вычислительной частей решения задачи.

В результате изучения данного раздела учащиеся должны вычислять углы: между двумя прямыми; между прямой и плоскостью; между двумя скрещивающимися прямыми; между двумя плоскостями.

Задачи для контрольной работы:

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ADD_1 и CDD_1.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и AB_1C_1.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BDD_1.
4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BDD_1.
5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и BDC_1.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BDA_1 и BDC_1.

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BCD_1 и ACC_1.

Литература:

1. Потоскуев Е.В. Решение задач по стереометрии. Практикум. Подготовка к ЕГЭ. – М.: Илекса, 2012. – 108 с.
2. Семёнов А.Л., Ященко И.В. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А.Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с. – (Готовимся к ЕГЭ).
3. Смирнов В.А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 64 с.

Координатный метод решения задач на нахождение расстояний и углов

Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Декартовы прямоугольные координаты точки. Формулы нахождения: расстояния между точками в координатах; точки координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, середины отрезка. Решение простейших задач стереометрии в координатах. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Нахождение угла между прямыми в пространстве. Нахождение угла между прямой и плоскостью. Нахождение угла между двумя плоскостями.

Основная цель - формировать умения учащихся с помощью уравнений прямых и плоскостей решать задачи стереометрии на нахождения расстояний и углов, используя в качестве объектов правильный тетраэдр, правильную пирамиду, куб, призму.

В результате изучения данного раздела ученик должен в координатной форме знать и понимать выражение скалярного произведения и условие перпендикулярности двух векторов; условие коллинеарности двух векторов, условие компланарности трех векторов; формулу вычисления длины вектора, а также формулу расстояния между двумя точками, деления отрезка в данном отношении. Формулу для вычисления расстояния от данной точки до данной плоскости. Формулы для нахождения углов. Уметь: находить длину вектора, расстояние между двумя точками и координаты точки, делящей данный отрезок в данном отношении; вычислять скалярное произведение двух векторов и определять, перпендикулярны ли они; вычислять расстояние: от данной точки до данной плоскости (прямой); между параллельными плоскостями; между параллельными прямой и плоскостью. Находить углы между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями. С помощью уравнений прямых и плоскостей решать метрические задачи стереометрии.

Литература:

1. Варшавский, И.К. Стереометрия на едином государственном экзамене. / И.К.Варшавский, М.Я. Гаиашвили, Ю.А. Глазков // Математика в школе – 2006. - №4 – С. 2-7.
2. Потоскуев Е.В. Решение задач по стереометрии. Практикум. Подготовка к ЕГЭ. – М.: Илекса, 2012. – 108 с.
3. Семёнов А.Л., Ященко И.В. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А.Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с. – (Готовимся к ЕГЭ).
4. Смирнов В.А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 64 с.

§ 6. Эксперимент и его результаты

Экспериментальная проверка полученных результатов, апробация методических материалов проводилась в МБУ «Школа № 70» г. Тольятти с февраля по апрель 2016 года. Эксперимент проводился в два этапа:

1. Констатирующий (февраль 2016 г.)
2. Поисковый (март –апрель 2016 г.)

На первом этапе проводился констатирующий эксперимент, *целью которого* было: а) выяснить как реализация принципа доступности при обучении решению геометрических задач отражается на результате качества обучения учащихся; б) изучение отношения учителей математики к вопросу реализации принципа доступности в обучении.

На данном этапе применялись следующие *методы исследования*: беседа с учителями и учениками, анализ опыта учителей, анкетирование.

Беседа с учениками ставила своей *целью* выяснить как реализация принципа доступности при обучении решению геометрических задач отражается на результате качества обучения учащихся

В беседе принимали участие ученики 10а, 10б, 10в классов МБУ «Школа № 70» г. Тольятти в количестве 73 человек.

Беседа с учениками дала такой результат:

1. На вопрос: «любите ли вы урок геометрии?», ответили: «да» - 34%, «нет» - 66%;
2. На вопрос: «что вам мешает любить геометрию?», ответили: «не знаю» - 20%, «не понимаю предмет» - 34%, «ничего не мешает» - 46%.
3. На вопрос: «чтобы было понятно на уроке, что необходимо изменить учителю?», ответили: «все устраивает» - 22%, «доступнее объяснять» - 32%, «увеличить количество часов по предмету» - 46%.
4. На вопрос: «чтобы было все понятно на уроке, что необходимо изменить тебе?», ответили: «не знаю» - 25%, «ничего не надо менять» - 30%, «лучше учить предмет» - 20%, «развивать пространственное мышление» - 25%.

Анализ результатов проведенного опроса показал, что 45% учащихся подтверждают слабую подготовку к предмету, ссылаясь на неразвитое пространственное мышление; 34% учащихся не понимают предмет из-за недоступного объяснения, из-за недостаточного количества часов, отведенных на геометрию; 25% учащихся все устраивает.

Анкетирование учителей ставило своей *целью* выяснить отношение учителей к вопросу реализации принципа доступности в обучении и как влияет реализация принципа доступности в обучении на качество образования.

В анкетировании участвовало 10 учителей математики МБУ «Школа № 70» г. Тольятти. Приведем результаты анкетирования.

В таблице 11 показано распределение отношения учителей к реализации принципа доступности в обучении на уроках математики:

Таблица 11

Высказывание	Степень согласия		
	никогда	иногда	всегда
В своей работе при подготовке к уроку учитываю содержание учебного материала, сопоставляя его с уровнем подготовки учащихся	0%	20%	80%
В зависимости с возрастными особенностями учащихся выбираю методы, формы, средства и объем учебного материала для проведения урока	0%	30%	70%
При обучении учащихся придерживаюсь принципа «от простого к сложному»	0%	20%	80%
Помогаю ученикам преодолеть познавательные затруднения, учитывая индивидуальные возможности ребенка	10%	40%	50%
Организую учебную деятельность школьников на уроке системно и последовательно	0%	10%	90%
Домашнюю и самостоятельную работу даю посильно и дифференцированно	20%	50%	30%
Использую в своей педагогической практике объяснение одной и той же задачи несколькими способами	30%	50%	20%

Общий педагогический стаж учителей, участвующих в анкетировании от 2-45 лет.

Анализ ответов показал, что чем больше стаж у учителя, тем он больше реализует принцип доступности в обучении у себя на уроках. Учителя математики с меньшим стажем не всегда дифференцировано подходят к обучению учеников, к составлению домашних и самостоятельных работ, не учитывают индивидуальную подготовку ребенка.

На *втором, поисковом этапе* эксперимента решались следующие задачи:

- апробация методики реализации принципа доступности при обучении решению задач по теме «Многогранники» в углубленном курсе геометрии класса старшей общеобразовательной школы;

- проверка эффективности разработанной методики на уроках геометрии.

Эксперимент проводился с учащимися 10а класса МБУ «Школа № 70» . Изучение геометрии в данном классе ведется по УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича, по программе 3 часа в неделю.

Цель эксперимента - определить как реализация принципа доступности в обучении геометрических задач отражается на качестве учеников. Для этого было проведено 4 самостоятельные работы, в 3-х из которых принцип доступности в обучении не выполнялся, а в 4- ой выполнялся.

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится: - если решены все задачи с правильной аргументацией, определением искомого элемента и получены правильные ответы.

Оценка «4» ставится: - если решены все задачи, но в одной из них допущена не грубая логическая или арифметическая ошибка, которые привели к неправильному одному из ответов.

Оценка «3» ставится: - если решена одна задача правильно; из двух решенных задач, в одной допущена грубая ошибка в аргументации.

Оценка «2» ставится: - если ни одна задача не доведена до правильного ответа.

После прохождения темы «Расстояние между скрещивающимися прямыми», с применением предложенной в диссертационной работе методики реализации принципа доступности при обучении решению задач по теме «Многогранники» в углубленном курсе геометрии, ученикам были предложены самостоятельные работы (по 2 задачи).

В 1 работе обе задачи были среднего уровня и индивидуальная подготовка учащихся не учитывалась; во 2 работе обе задачи были повышенного уровня без учета содержания учебного материала; в 3 работе были предложены опять обе задачи среднего уровня с учетом подготовки учеников; в 4 работе задачи выстроены по принципу «от простого к сложному», учитывая содержание дидактического материала и индивидуальную подготовку учеников.

Проанализируем результаты:

Оценки	% выполнения работы			
	1 самост. раб.	2 самост. раб	3 самост. раб.	4 самост. раб
«5»	0%	0%	30%	20%
«4»	30%	20%	50%	50%
«3»	50%	30%	20%	30%
«2»	20%	50%	0%	0%

Анализ результатов показал, что если при подготовке к самостоятельной работе дидактический материал выстроен по принципу «от простого к сложному», учитывая индивидуальную подготовку учеников, продумываются объем содержания учебного материала и формы проведения работы, то процент качества обучения значительно выше по сравнению с тем, когда реализация принципа доступности в одном из критериев отсутствует.

Результаты педагогического эксперимента позволили сделать следующие выводы:

1. По мнению учителей МБУ «Школа № 70» реализация принципа доступности в обучении обусловлена: содержанием учебного материала для учащихся, последовательным и систематизированным изучением его, соблюдением дидактического принципа «от простого к сложному».
2. Анализ педагогического опыта учителей МБУ «Школа № 70» показывает, что преподавание учебного материала без учета трудности темы, ее доступности, отрицательно сказывается на качестве знаний учащихся.

3. Геометрический материал, преподаваемый в старшей общеобразовательной школе в классах с углубленным изучением геометрии на высоком уровне доступен 34% учащихся.
4. Реализация принципа доступности при обучении решению геометрических задач положительно влияет на повышение качества обучения учащихся.

Выводы по второй главе

Для реализации принципа доступности при обучении решению задач по теме «Многогранники» в углубленном курсе геометрии класса старшей общеобразовательной школы предлагается:

- особое значение уделять задачам позиционного характера, придерживаясь принципа сначала «видеть», а потом вычислять;

- выстраивать объяснение по принципу «от простого к сложному», учитывая индивидуальную подготовку учеников, объем содержания учебного материала и формы преподавания;

- решать стереометрические задачи разными методами: геометрическим (синтетическим), векторным и координатным.

- проводить самостоятельные работы с учетом реализации принципа доступности в содержании дидактического материала;

- дифференцированно использовать учебный материал, мотивируя продвинутых учеников к самостоятельной и исследовательской деятельности, что благоприятно сказывается на развитии выпускника, умеющего учиться, осознающего важность образования и самообразования для жизни и деятельности, способного применять полученные знания на практике, в соответствии с ФГОС основного общего образования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Геометрия – наиболее уязвимое звено школьной математики. У многих учеников решение геометрических задач вызывает затруднение.

В отличии от алгебры геометрическую задачу нельзя решать по образцу, почти каждая задача требует «индивидуального» подхода.

Учитывая это, в результате проведенного исследования были сделаны *следующие выводы* и *получены результаты*:

1. *Принцип доступности* – один из дидактических принципов обучения, который характеризуется следующими существенными признаками:

а) является критерием при отборе учебного материала;

б) учитывает уровень имеющихся знаний у учащихся;

в) требует соответствия содержания, методов, форм, средств, объема учебного материала возрастным особенностям учащихся;

г) придерживается принципа «от простого к сложному»;

д) направлен на преодоление у учеников познавательных затруднений;

е) определяет меру посильной трудности в освоении содержания образования.

2. На уроках стереометрии с целью развития логического и пространственного мышления, соблюдая принцип доступности обучения, целесообразно

использовать: устные задачи на готовых чертежах; позиционные задачи с логической аргументацией; метрические задачи.

3. Учебный материал, выстроенный с учетом принципа доступности обучения, помогает ученикам систематизировать, анализировать и классифицировать информацию; способствует личностно-ориентированному развитию выпускника; мотивирует самостоятельно развиваться, совершенствоваться, соблюдая строгие математические суждения.

4. Подобранный с учетом принципа доступности учебный материал по геометрии, использование многообразие способов решения геометрических задач – способствуют повышению качества образования учащихся.

Литература

1. «Великая дидактика»: образовательные принципы Я.А. Коменского.
2. Азимов Э.Г., Щукин А.Н. Новый словарь методических терминов и понятий (теория и практика обучения языкам) М. : Изд-во ИКАР, 2009.
3. Аксенов А.А. Теория обучения логическому поиску решения школьных математических задач. Дис…д-ра пед.наук. Орел.: ОГУ, 2010,460 с.
4. Атанасян, Л.С. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Буту-зов, С.Б. Кадомцев и др.]. – М. : Просвещение, 2009. – 255 с. : ил.
5. Баранов С.П. Педагогика: учеб. пособие для педагог. училищ / С.П. Баранов, Л.Р. Болотина, В.А. Сластенин. – М.: Просвещение, 1987.-368с.
6. Басова Л.В. Педагогические условия реализации принципа доступности обучения младших школьников в сельской общеобразовательной школе. Дис….к-та пед. наук. Йошкор-Ола, 2012.
7. Блохина Н.И. Реализация принципа доступности в процессе обучения. Дис…работа , Тула, 2010.

8. Виситаева М.Б. Статья «Методика формирования математических способностей учащихся при изучении элементов геометрии в 5-6 классах». Диссерт. работа, Саранск -2013.

9. Владимирова О.И. Вычисление расстояний в пространстве / Владимирова О.И. // Геометрия и геометрическое образование: сборник трудов III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 27-29 ноября 2014 года / под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014.

10. Владимирова О.И. Личностно-ориентированный подход в работе с одаренными детьми на уроках геометрии / Владимирова О.И. // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи : Материалы I Всероссийской научно-практической конференции, 8-10 октября 2015г. Майкоп : Изд-во АГУ, 2015. 160 с.

11. Голуб Б.А. Основы общей дидактики / Голуб Б.А. // Учебное пособие для вузов. – М. Гуманит., изд. Центр ВЛАДОС, 1999.

12. Давыдов В.В. Развивающее обучение. М., 1992.

13. Дидактика / Пер. с нем. // Под ред. И.Н. Казанцева. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. -287 с.

14. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы совр. дидактики/ Под ред. М.Н. Скаткина. — М.: Просвещение, 1982. — 319с.

15. Дмитриев В.И., Басова Л.В. Сущность и особенности реализации принципа доступности обучения школьников // Современные проблемы науки и образования. – 2012. -№ 3.

16. Ермолаев Е.А. Статья «Элективные курсы по геометрии в условиях профильного обучения математике в старших классах» (на примере темы «Площадь. Равновеликие и равносоставленные многоугольники»). Диссерт. работа, Саранск-2010.

17. Загвязинский В.И. Методология и методика дидактического исследования / В.И. Загвязинский. – М.: Педагогика, 1982. -160 с.

18. Закон 273-ФЗ "Об образовании в РФ" 2016.

19. Иванова Т.А., Перевощикова Е.Н., Кузнецова Л.И., Григорьева Т.П. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб-ное пособие для студентов математич. специал. пед. вузов / Под ре-дакцией Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп.- Н.Новгород: НГПУ, 2009.- С. 355.

20. Ионова И.В. Доступность учебного материала как фактор совершенствования умственного развития школьников. Дис….кан-та пед.наук. Ульяновск.: УГПУ, 1999, 188 с.

21. Ишалин А.С. Диагностико-технологическое управление дидактической доступностью как основа повышения качества обучения школьников: автореф. дис…канд. пед. наук. – Йошкар – Ола, 2003. – 19 с.

22. Киселев, А. П. Элементарная геометрия: кн. для учителя / А.П. Киселев. -М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. - 287 с.

23. Клопский В.М. Геометрия: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. / В.М. Клопский, З.А. Скопец, М.И. Ягодовский / Под. ред. З.А. Скопеца. - М.: Просвещение, 1979.

24. Ковалева Г.И., Астахова Н.А., Дюмина Т.Ю. Теория и методика обучения математике: конструирование систем задач: учебное пособие. – Волгоград: Издательство ВГПУ «Перемена», 2008. – 156 с.

25. Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала анализа. - М.: Просвещение. 2008.

26. Колягин Ю.М. Актуальные проблемы развития отечественной начальной школы / Ю.М. Колягин // Начальная школа. 1994. - № 5. –С. 50-53.

27. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов математ. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В.Орлова.. – М.: Дрофа, 2007. - 320 с.

28. Мигунова Н. Ключевые задачи: ключ к прочным знаниям / Практический журнал для учителя и администрации школы. Издательство: ООО «Фолиум».- Москва, 2006.- № 9.

29. Педагогика: учебн. пособие для студентов пед. вузов и пед. колледжей / под ред. П.И. Пидкасистого. - М.: Педагогическое общество России, 2006. – 608 с.

30. Погорелов, А.В. Геометрия. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений / А.В. Погорелов. — 9-е изд. — М.: Просвещение, 2009.- 175 с.

31. Подласый И.П. Педагогика, Книга 1, 1999.

32. Полякова Л.Н. Исследование в процессе преподавания математики / Сборник: Актуальные вопросы модернизации российского образования. Материалы 22 Международной научно-практической конференции. Центр научной мысли.- 2015.- С. 44-48.

33. Потоскуев Е. В. Геометрический компонент профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом вузе. Учебно-методическое пособие. Тольятти, ТГУ, 2009.

34. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Геометрия. 11 кл. Углублённый уровень. Учебник. – М.: Дрофа, 2014.

35. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Учебник. – М.: Дрофа, 2013, 2014.

36. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Задачник. – М.: Дрофа, 2013, 2014.

37. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Геометрия. Углублённый уровень. 10 кл. Методическое пособие. – М.: Дрофа, 2014.

38. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Геометрия. 11 кл. Углублённый уровень. Задачник. – М.: Дрофа, 2014.

39. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Задачник. – М.: Дрофа, 2014.

40. Потоскуев Е.В. Геометрическая поэма : хрестоматия / Е.В. Потоскуев. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014. – 383 с. : обл.

41. Потоскуев Е.В. Дополнение к методическому пособию Г-10

42. Потоскуев Е.В. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. ФГОС / Е.В. Потоскуев. – М.: Издательство «Экзамен», 2016. – 223, [1] С. (Серия «Предпрофильная и профильная подготовка»).

43. Потоскуев, Е. В. Геометрия. 11 кл.: методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. –2-е изд., стереотип. – М.Дрофа, 2007. – 220, [4] с.: ил.

44. Потоскуев, Е. В. Геометрия. 11 кл.: учеб. для классов с углубл. и профильным изучением математики общеобразоват. учреждений / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич.–7-е изд., стереотип. – М.Дрофа, 2010. – 368, с.: ил.

45. Потоскуев, Е.В. Геометрия, 10-11 кл. Профильный уровень: программа УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича для общеобразовательных учреждений / Е.В. Потоскуев. – М.: Дрофа, 2010. – С.78.

46. Потоскуев, Е.В. Геометрия. Прямые и плоскости в координатах / Е.В. Потоскуев // Математика – Первое сентября, М. :, 2013, № 6, С.22-33.

47. Потоскуев, Е.В. Эффективные помощники «вхождения» в метрическую стереометрию / Е.В. Потоскуев // Математика – Первое сентября, М., 2010, № 22, с. 27-35, № 23, с. 13-19.

48. Решу ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам http://math.reshuege.ru/

49. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. – Саранск: Тип. «Красн. Окт.», 1999. – 208 с.

50. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие. – М.: Народное образование, 1998. – 173 с.

51. Селиванова Н.Л. Воспитание в современной школе: от теории к практике: монография. – Тверь: ООО «ИПФ Виарт», 2010.

52. Словарь – справочник по возрастной и педагогической психологии / под ред. М.В. Гамезо. – М. : Педагогическое Общество России, 2001. – 128 с.

53. Смирнов В.А. Геометрия. Стереометрия. Пособие для подготовки к ЕГЭ. / А.В. Смирнов // Под ред. А.Я. Семенова, И.В. Ященко, М. : МЦНМО, 2009, - 272 с.

54. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрические задачи с практическим содержанием. М.: МЦНМО, 2010, - 136 с.

55. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений. - М.: Мнемозина, 2003.

56. Смирнова, И.М. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – 7-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2011. – 288 с. : ил.

57. Ушинский К.Д. Изб. пед. соч.: в 2 т. / под ред. А.И. Пискунова. – М.: Педагогика, 1974. – Т.2 – 434 с.

58. Черняева А.Р. Реализация деятельностного подхода в процессе формирования пространственного мышления учащихся при обучении построению сечений многогранников, дис…,Омск, 2004;

59. Четверухин Н.Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже, Учпедгиз Министерства просвещения РСФСР, Москва, 1952г.

60. Шадрина И.В. Принципы построения системы обучения младших школьников элементам геометрии / Шадрина И.В. // Начальная школа. – 2001. № 10. С. 37-47.

61. Шарыгин И.Ф., Бузинер М.А., Гордин Р.К. и др. Информационно-поисковая система по учебным задачам // Математика в школе. – 1993. – №2.- с.33-39.

62. Шарыгин И.Ф., Шарыгин Д.И. Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия 10-11». - М.:Дрофа,2002.

63. Шарыгин, И.Ф. Геометрия.10-11кл. Учеб. для общеобразоват. учеб. зав. / И.Ф. Шарыгин М.: Дрофа, 2008.

64. Шереметьева О.В. Обучение решению стереометрических задач с учетом взаимосвязи образного и логического компонентов мышления (на примере задач на подвижные сечения многогранников), дис…, Санкт-Петербург, 1997;