МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Тольяттинский государственный университет»**

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

# ЭСТЕТИЧЕСКОЕ ВОСПИТАНИЕ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

**М А Г И С Т Е Р С К А Я   Д И С С Е Р Т А Ц И Я**

Направление подготовки магистра: 44.04.01 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математическое образование*

Студент А.И. Астафьева ___________

Научный
Руководитель: к.п.н., доцент кафедры алгебры и геометрии И.В. Антонова ___________

Руководитель программы: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»_______ 2016 г.

**Допустить к защите**
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** Проводимая Министерством образования и науки Российской Федерации реформа школы дала толчок для развития и кардинального изменения в структуре, содержании и в концептуальных образовательных основах. Концепция долгосрочного социально − экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года о развитии системы общего образования предусматривает индивидуализацию, ориентацию на практические навыки и фундаментальные умения, развитие профессионального образования и формирование, в рамках обучения, гармонично развитой, нравственно ориентированной, осознающей важность самообразования и образование, личности [35].

В процессе формирования гармонически развитой личности школьника важное место занимает эстетическое воспитание. Роль математики как учебного предмета трудно переоценить в эстетическом воспитании учащихся, потенциал математики в этом плане огромен. Математика богата красивыми формулами, доказательствами, рисунками и чертежами. Формирование ценностной ориентации личности в ее стремлении к прекрасному через овладение ею действительностью при помощи геометрического материала, развитие творческих способностей учащихся и формирование их познавательного интереса, вырабатывание положительного опыта [25, С. 88].

*В педагогике* эстетическому воспитанию учащихся посвящены исследования: Ю.К. Бабанского, Г.П. Бурса, В.А. Разумного, И.Ф. Харламова.

*В теории и методике обучения математики* вопросы эстетического воспитания учащихся на уроках математики отражены в исследованиях В.Г. Болтянского, В.Л. Минковского, Н.А. Рощиной, Г.И. Саранцева, Н.И. Фирстовой и др.

Анализ ранее выполненных *диссертационных работ*, посвященных *проблеме эстетического воспитания учащихся*, показал, что они были рассмотрены в аспекте:

- основных *требований к содержанию задач*, направленных на формирование эстетического вкуса учащихся; автором сформулированы методические рекомендации, связанные с понятием формирования эстетического вкуса учащихся в процессе решения планиметрических задач; выделены три основных уровня формирования и развития эстетического вкуса учащихся в процессе решения планиметрических задач; разработана система задач, направленных на формирование и развитие эстетического вкуса учащихся при обучении геометрии в основной школе; разработаны и экспериментально проверены практические рекомендации по формированиюи развитию эстетического вкуса учащихся при решении планиметрических задач (Н. Л. Рощина [63], 1998);

- *источников эстетической привлекательности математического объекта* (факта, теоремы, задачи, способа рассуждения); автором разработана методика формирования математических понятий и изучения теорем в контексте развития эстетической воспитанности учащихся, а также перечень эстетически привлекательных задач (О. В. Черник [74], 2003).

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречиями между*: требованиями, предъявляемыми к обязательным результатам освоения программы среднего (полного) общего образования по математике, и фактическим состоянием методики эстетического воспитания учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

Необходимость разрешения этого противоречия определяет актуальность **проблемы диссертационного исследования:** обоснование и разработка методики эстетического воспитания учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе, ориентированной на качественное усвоение ими знаний и умений согласно ФГОС.

**Объект исследования**: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

**Предмет исследования:** методика эстетического воспитания учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

**Целью исследования** является определение и теоретическое обоснование предлагаемой методики эстетического воспитания учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе, направленной на достижение учащимися обязательных результатов освоения программы среднего (полного) общего образования по математике.

**Задачи исследования:**

1) изучить понятие эстетического воспитания учащихся и его задачи при обучении математике;

2) рассмотреть понятие красоты в математике;

3) раскрыть уровни красоты математического объекта;

4) выявить методические особенности формирования эстетического вкуса у учащихся при решении математических задач в общеобразовательной школе;

5) разработать программу элективного курса «Математика и эстетика» как средства формирования эстетического вкуса у учащихся в общеобразовательной школе;

6) раскрыть технологию урока одной задачи как одну из форм организации обучения математике по эстетическому воспитанию учащихся общеобразовательной школы на примере темы «Тригонометрические уравнения».

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ психолого-педагогической и методической литературы, анализ программы, основных действующих учебников и учебных пособий по математике для средней общеобразовательной школы, изучение опыта работы учителей.

**Основные этапы исследования:**

*9 семестр* (2014/15 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы);

*10 (А) семестр* (2014/15 уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации;

*11(В) семестр* (2015/16 уч.г.): описание технологии урока одной задачи как одной из форм организации эстетического воспитания учащихся общеобразовательной школы на примере темы «Тригонометрические уравнения»; разработка элективного курса «Математика и эстетика»;

*12(С) семестр* (2015/16 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, формулирование выводов.

**Новизна** проведенного исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика эстетического воспитания учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

**Теоретическая значимость исследования** состоит в том, что в нем изучено понятие эстетического воспитания и его задачи; рассмотрено понятие красоты в математике; раскрыты уровни красоты математического объекта; выявлены методические особенности формирования эстетического вкуса у учащихся при решении математических задач в общеобразовательной школе.

**Практическую значимость** результатов исследования составляют разработанные методические материалы:

- программа элективного курса «Математика и эстетика», направленная на эстетическое воспитание учащихся в общеобразовательной школе;

- методический проект изучения темы «Тригонометрические уравнения» по технологии урока одной задачи.

Данные материалы могут быть использованы учителями математики, а также студентами педагогических направлений подготовки при прохождении практики.

**Достоверность и обоснованность** результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обусловлены использованием данных теории и методики обучения математике, анализом педагогической практики и личным опытом работы, сочетанием теоретических и практических методов исследования.

**На защиту** выносятся следующие положения:

1. Содержание работы учителя математики по эстетическому воспитанию учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе определяется соответствующими *математическими задачами*; методика эстетического воспитания учащихся при решении задач связана с поиском их «изящных решений»; красотой вывода решения; оригинальными путями, способами, методами и приемами их решения; эстетическими возможностями каждого этапа решения задач.

2. Специально разработанный элективный курс для учащихся общеобразовательной школы способствует повышению их эстетического воспитания при обучении математике.

3. Технология урока одной задачи (на примере темы «Тригонометрические уравнения»), как одна из форм организации обучения математике, способствует эстетическому воспитанию учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

**На защиту также выносятся программа и методическое обеспечение** элективного курса «Математика и эстетика» для учащихся общеобразовательной школы.

**Апробация результатов исследования** осуществлена путём выступлений на научно-методических семинарах преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ (декабрь 2014, июнь 2015, декабрь 2015, май 2016); научной студенческой конференции

«Дни науки в ТГУ» (апрель 2015, апрель 2016);VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (ТГУ, апрель 2015).

Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях:

1. Астафьева А.И. Об эстетическом воспитании учащихся на уроках математики в общеобразовательной школе/ А.И. Астафьева, И.В. Антонова // Математика и математическое образование: сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2015. – С. 104-107.

2. Астафьева А.И. Эстетическое воспитание учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе / А.И. Астафьева, А.В. Антонова// Вестник магистратуры. - 2016. - №7(58) (в печати).

**Структура диссертации:** введение, две главы, заключение, список литературы (78 наименований).

# ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЭСТЕТИЧЕСКОГО ВОСПИТАНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

## §1.Понятие и задачи эстетического воспитания в обучении математике

В процессе формирования гармонически развитой личности важное место занимает *эстетическое воспитание* учащихся.

В различной *педагогической литературе* эстетическое воспитание рассматривают как *систему мер* для выработки у человека *хороших художественных вкусов*, способности правильно и по достоинству судить о прекрасном в искусстве.

Так, педагог Г.П. Бурса отмечает, что *эстетическое воспитание* в общеобразовательной школе – это *привитие учащимся хороших вкусов, правильных понятий, взглядов и суждений* в области музыки, живописи, литературы и т.д. [62, С. 14].

В словаре по педагогике Г.М. Коджаспировой, А.Ю. Коджаспирова указано, что эстетическое воспитание - это выработка и совершенствование в человеке способностей воспринимать, правильно понимать, ценить и создавать прекрасное в жизни и искусстве, активно участвовать в творчестве, созидании по законам красоты [32, С. 43].

Кроме этого, И.Ф. Харламов подчеркивает, что эстетическое воспитание органически связано с термином «эстетика», обозначающим науку о прекрасном. Само слово эстетика происходит от греческого aisthesis, что в переводе на русский язык означает ощущение, чувство. Поэтому в общем плане эстетическое воспитание обозначает процесс формирования чувств в области прекрасного [72, С. 435].

*В теории и методике обучения математике* под *эстетическим воспитанием* учащихся понимают *формирование системы знаний и навыков, относящихся ко всем искусствам, всем формам проявления* *прекрасного в окружающей нас действительности* и приобретенных как в процессе обучения, так и во внешкольной деятельности [43, С. 38].

Н.И. Фирстова подчеркивает, что эстетическое воспитание следует рассматривать как *составную часть всестороннего развития личности*. Через эстетическое воспитание можно осуществлять расширение и углубление знаний и представлений школьников о реальной действительности, формирование их взглядов [71, С. 141].

О.В. Черник под эстетическим воспитанием учащихся в процессе обучения математике понимает *совокупность ее возможностей и ресурсов*, которые могут быть реализованы как средства эстетического развития личности [73, С.125].

*В педагогикеэстетическая культура школьника* включает в себя определенную *степень эстетического развития чувств*, *сознания*, *поведения и деятельности* школьника, а именно:

1) эмоционально-чувственную отзывчивость на прекрасное и безобразное, возвышенное и низменное, героическое и пошлое, комическое и трагическое в искусстве, в жизни, в природе, в быту, в труде, в поведении и деятельности, а также способность управлять своими чувствами;

2) знание и понимание сущности эстетического в искусстве и окружающей действительности, художественную грамотность, правильные представления, суждения и убеждения, связанные с эстетическим восприятием произведений искусства и явлений жизни;

3) наличие эстетического идеала и способности на его основе верно оценивать произведения искусства, идейно-эмоциональный отклик на эти произведения;

4) овладение культурным наследием прошлого, отношение к современному искусству и чуткость к прогрессивным тенденциям в развитии искусства;

5) степень развития творческих способностей, интерес и стремление к эстетическому освоению мира;

6) мера причастности к художественному творчеству, практическое участие в создании прекрасного в жизни;

7) потребность и умение строить жизнь «по законам красоты» и утверждать идеалы красоты в отношениях с людьми, в труде и общественной деятельности.

Ю.К. Бабанский отмечает, что названные компоненты эстетической культуры вместе с тем выступают в качестве *критериев эстетической воспитанности учащихся*. Они определяют задачи и содержание эстетического воспитания школьников [55, С. 443].

И.Ф. Харламов подчеркивает, что эстетическое воспитание учащихся осуществляется с помощью искусства. Поэтому его содержание должно охватывать изучение и приобщение учащихся к различным видам искусства - к литературе, музыке, изобразительному искусству.

Автор отмечает, что важной стороной содержания эстетического воспитания является его *направленность на личностное развитие учащихся*, поэтому прежде всего, необходимо формировать у них *эстетические потребности* в области искусства, стремление к постижению художественных ценностей общества.

И.Ф. Харламов считает, что важнейшим элементом *содержания эстетического воспитания* является *развитие у учащихся художественных восприятий*. Эти восприятия должны охватывать широкую область эстетических явлений. Необходимо *учить учащихся воспринимать прекрасное* не только в литературе, изобразительном искусстве музыке, но и в природе, а также в окружающей жизни.

Автор также отмечает, что существенным *компонентом эстетического воспитания* является *овладение учащимися знаниями*, связанными *с пониманием искусства* и *умением рассуждения* (взгляды) по вопросам *художественного отражения действительности*.

Большое место в содержании эстетического воспитания занимает *формирование* у учащихся *высоких художественных вкусов*, связанных с восприятием и переживанием прекрасного. Нужно научить учащихся чувствовать красоту, проявлять художественную взыскательность, а также эстетическую требовательность к культуре поведения.

По мнению И.Ф. Харламова, важным содержательным компонентом эстетического воспитания является приобщение учащихся к художественному творчеству [72, С. 436].

Вместе с этим, Ю.К. Бабанский отмечает, что*в философии* В.П. Шестаков, справедливо подчеркнувший в своей книге «Проблемы эстетического воспитания» крайнюю односторонность сведения эстетического воспитания к специальной области обучения детей искусству, раскрыл и традиционность этой тенденции в педагогической науке [55, С. 443].

Таким образом, под эстетическим воспитанием учащихся в процессе обучения математике будем понимать *совокупность ее возможностей и ресурсов*, которые могут быть реализованы как средства эстетического развития личности.

## §2. Понятие красоты в математике

Г.И. Саранцев отмечает, что о красоте математики написано немало. Авторы видят красоту математики в:

- гармонии чисел и форм;
- геометрической выразительности;
- стройности математических формул;
- изяществе математических доказательств;
- порядке;
- богатстве приложений;
- универсальности математических методов.

Поэтому математику наряду с искусством, считают важнейшим средством приобщения школьников к красоте, формирования у них эстетического вкуса. Так, У.У. Сойер, говоря о значимости математической теории, в качестве одного из ее показателей называет красоту, стройность, «столь привлекательную для ума».

По мнению Г.И. Саранцева, особенность математики заключается не только в том, что в ней, как в искусстве, заложен огромный *эстетический потенциал*, но и в том, что *математическая деятельность* подчиняется *законам красоты*.

Так, Д. фон Нейман отмечал, что математика, как и искусство, движима почти исключительно эстетическими мотивами.

Ж. Адамар утверждал, что ученый, видя структурно несовершенную, несимметричную, «кривобокую» математическую конструкцию, начинает испытывать потребность в активной деятельности по ее гармоничному дополнению.

Г.И. Саранцев подчеркивает, что сходство между эстетическим восприятием действительности в математике и искусстве обусловлено не только важностью в нем эстетических мотивов. Оно заключено в тождественности внутренних структур восприятия [65, С. 5].

В статье А.В. Волошинова «Союз математики и эстетики» [19] отмечается, что такое сходство было подмечено также и Пифагором. Он открыл закон консонансов. Согласно античной традиции, сам Пифагор установил, что две струны издают благозвучное гармоническое созвучие (консонанс) лишь в случае, когда их длины относятся как целые числа первой четверки 1:2 (октава), 2:3 (квинта) и 3:4 (кварта). Закон консонансов впервые облекал в математическую форму физическое явление – звучание струны. Он впервые указывал на существование числовых закономерностей в природе.

Автор подчеркивает, что вторым математико-эстетическим открытием Пифагора является нахождение золотых пропорций в пентаграмме. Прямых свидетельств о том, что пифагорейцы открыли золотые пропорции в пентаграмме, нет. Однако косвенных указаний достаточно.

Во-первых, пифагорейцы боготворили пентаграмму и выбрали ее в качестве символа приветствия, пожелания здравствования и тайного опознавательного знака. Во-вторых, пентаграмма обладает всеми видами «древних средних», известных пифагорейцам, - это арифметическое, геометрическое и гармоническое среднее - и есть основания считать, что пифагорейцы знали это. В-третьих, - и это самое главное - любые два соседних отрезка пентаграммы относятся в золотой пропорции или, как говорили греки, в крайнем и среднем отношениях.

Рассмотрение в пентаграмме любой пары подобных треугольников с отношением сходственных сторон

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

приводит к квадратному уравнению $x^2 = a(a-x)$, которое пифагорейцы легко решали методом «приложения площадей». Решение последнего уравнения и дает $x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} = a\varphi,\ \varphi = 0{,}61833989...$ или число φ, которое сегодня называется коэффициентом золотого сечения [19, С. 65].

Г.И. Саранцев отмечает, что термин «золотое сечение» пользуется особым вниманием у многих авторов. Сам термин «золотое сечение» ввел Леонардо да Винчи. Он обозначает деление отрезка, при котором одна его часть во столько же раз больше другой, во сколько сама она меньше целого.

«Золотое сечение» используется в живописи, скульптуре, при возведении храмов.

Расчеты различных произведений искусства (памятников, храмов и т.д.) показали, что большая часть классических сооружений подчинена отношениям золотого сечения.

Исследователями установлено, что закону золотого сечения подчиняются пропорции Великих пирамид – первого чуда света. Оказалось, что площадь основания пирамиды Хеопса так относится к сумме площадей ее боковых граней, как последняя – к полной площади поверхности пирамиды, то есть сумме площадей боковых граней и основания. Данный вывод помог разрешить многолетние дискуссии по вопросу времени сооружения пирамид и выявлению их автора. Египтологи и искусствоведы склонны считать, что комплекс в Гизе – единый архитектурный ансамбль, автором которого является Хемиун.

С помощью этой «божественной пропорции» выявлены связи между музыкой и архитектурой. Оказалось, что и в архитектуре, и в музыке большое значение придается пропорциям, близким к «золотому сечению». К числу других отношений, создающих привлекательность объекту, относят 1:$\sqrt{2}$ , 1:$\sqrt{3}$[69, С .6].

Кроме того, в своей статье А. Д. Бендукиндзеговорит, что точка *C* производит золотое сечение отрезка *AB*, если

*AC:AB=CB:AC* (1).

Итак, золотое сечение – это такое деление целого на две неравные части, при котором большая часть так относится к целому, как меньшая – к большей. В геометрии золотое сечение называется также делением отрезка в крайнем и среднем отношении.

Если длину отрезка *AB* обозначить через *a, а* длину отрезка *AC* – через *x,* то длина отрезка *CB*будет *a-x* и пропорция (1) примет следующий вид:

$x: a = (a - x): x$(2).

Из этой пропорции видно, что при золотом сечении длина большего отрезка есть среднее геометрическое, или, как часто говорят, среднее пропорциональное длин всего отрезка и его меньшей части:

$$x = \sqrt{a(a - x)}.$$

Легко сообразить, что верно и обратное: если отрезок разбит на два неравных отрезка так, что длина большего отрезка есть геометрическое длин всего отрезка и его меньшей части, то мы имеем золотое сечение данного отрезка.

Геометрическое золотое сечение отрезка *AB* можно построить следующим образом: в точке В восставляем перпендикуляр к АВ и на нем откладываем *BD=0,5AB;* далее, соединив точки *A*и*D,* откладываем *DE=BD*и, наконец,*AC*=*AE*. Точка *C*является искомой - она производит золотое сечение отрезка *AB*. *В* самом деле, заметим, что по теореме Пифагора

$$(AE + ED)^2 = AB^2 + BD^2$$

и по построению $AE = AC, ED = BD = 0{,}5AB$.

Из этих равенств следует, что

$AC^2 + AC \cdot AB = AB^2$,

а отсюда уже легко получается равенство (1).

Решая уравнение (2) относительно *x,* мы находим что

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a \approx 0{,}62a.$$

Значит, $a - x \approx 0{,}38a.$ Таким образом, части золотого сечения составляют приблизительно 62% и 38% всего отрезка [8, С. 22].

Кроме того, построение стихов «Слова о полку Игореве» также подчиняется математическим законам. Основу данного произведения составляет круговая композиция, причем отношение числа стихов во всех трех частях произведения (их 804) к числу стихов в первой и последней части (256), равно 3,14, то есть числу, близкому к числу $\pi$ [65, С .6].

В статье В.Л. Минковского «Об элементах эстетического воспитания на уроках математики» [45] указано, что немецкий ученый Г. Фехнер с целью изучения эстетических вкусов в отношении сочетания размеров смежных сторон прямоугольника проделал простой, но любопытный опыт.

Из одинакового материала было вырезано десять изопериметрических прямоугольников со следующими отношениям сторон:

1) 1:1=1 2) 6:5=1,2 3)5:4=1,25 4) 4:3=1,(3) 5) 29:20=1,45 6) 3:2=1,5 7) 34:21≈1,62 8)23:13≈1,77 9) 2:1=2 10) 5:2=2,5.

Каждому из участников эксперимента было предложено указать прямоугольник, который его наиболее удовлетворяет в эстетическом отношении.

Результаты опыта показали, что наиболее привлекательными оказались прямоугольник 7) или близкие к нему. У этих прямоугольников длина большей стороны оказывается весьма близкой к числу, которое является средним пропорциональным между полупериметром прямоугольника и длиной его меньшей стороны. Так, например, для прямоугольника 7) имеем такие отношения:

$$\frac{p}{a} = \frac{55}{34} \approx 1{,}618; \frac{a}{h} = \frac{34}{21} \approx 1{,}619.$$

По мнению автора, опыт Г. Фехнера явился подтверждением замеченного еще в древности, что прямоугольник со сторонами, равными или близкими частям отрезка, разделенного в крайнем и среднем отношении, наиболее приятен для глаза [45, С. 27].

Г.И. Саранцев отмечает, что эти примеры свидетельствуют не только о связи математики, живописи, языка, музыки, но и о том, что гармония, стройность, соразмерность являются атрибутом самой природы. Подкреплением этому утверждению является мнение астрономов о том, что Великие пирамиды математически выражают закономерности Вселенной.

В красоте объектов проявляется их свойство, существующее независимо от сознания. *Чувство красоты* трактуется автором как *продукт отражения в человеческом сознании реально существующих эстетических свойств окружающего мира*. Психологическую основу данной трактовки видят в интуитивном влечении психики человека к изяществу и гармонии, постигаемым чувствами. Отсюда автор выводит *методические рекомендации по формированию эстетического вкуса школьников*, основу которых составляет созерцание фотографий архитектурных памятников, рисунков различных конструкций, структура которых подчиняется закону «золотых» чисел, продукции художников и т.д.

Г.И. Саранцев подчеркивает, что в математике заключен большой эстетический потенциал, позволяющий использовать ее в качестве средства эстетического воспитания, познания красоты. С другой стороны, эстетические факторы играют большую роль в развитии самой математической науки, а поэтому им следует отвести значительную роль и в обучении математике школьников. Однако последнее может быть эффективно реализовано в том случае, если будем знать ответ на вопрос: что понимать под красотой?

Г.И. Саранцев приводит разные точки зрения на содержание *понятия красоты*.

В философии указано, что чувство красоты есть продукт отражения в сознании эстетических свойств окружающего мира. Данная трактовка, подчеркивает автор, обусловливает вопрос: в каких формах красота представлена вокруг нас? В ее контексте этот вопрос остается без ответа. Сторонники другой точки зрения считают, что красота – это продукт ума, свободной мысли.

Так, И. Кант полагал, что красота есть целесообразность без цели. Она выражает способность человека мыслить природу по законам свободы. Такому пониманию красоты вряд ли можно найти конкретное приложение в обучении. Многих мыслителей привлекала проблема красоты человеческого лица. Некоторым из них красота представлялась даром богов, особенно женская красота, воспеваемая в поэзии, литературе, живописи. Другие пытались объяснить природу красоты лица биологической целесообразностью, приспособленностью к природным условиям. Такая версия выдвигает ряд вопросов: каким образом, воспринимая лицо, мы определяем степень его приспособленности к условиям существования? Как измерить его биологическую полноценность?

Н.Г. Чернышевский, оценивая привлекательность лица, исходил так же из идеи целесообразности, но не биологической, а социально утилитарной. Заметим, что мнения людей о красоте лица были порой даже противоположны: формы лица, которые считались эталоном красоты у одного народа, другим народам казались чуть ли не уродливыми [65, С. 8].

Г.И. Саранцев, Е.Ю. Миганова отмечают, что наиболее правдоподобная гипотеза о природе красоты была выдвинута Р.Х. Шакуровым, по мнению которого, красивы те черты лица, которые при зрительном восприятии укладываются в их обобщенный образ – в стереотипный усредненный стандарт, сформировавшейся у человека в ходе общения с другими людьми. Сказанное отражает красоты форм.

Как утверждает Р.Х. Шакуров, другими *составляющими красоты* являются ее эмоционально-экспрессивная сторона, ассоциативно-эмоциональный компонент, оригинальность [44, С. 31].

Таким образом, красота математики выражается в: гармонии чисел и форм; геометрической выразительности; стройности математических формул; изяществе математических доказательств; порядке; богатстве приложений; универсальности математических методов.

## §3. Уровни привлекательности математического объекта

По мнению Г.И. Саранцева, понимание красоты можно распространить и на математические объекты.

Автор утверждает, что наиболее привлекательным для школьника будет тот *объект*, восприятие которого соответствует *сформировавшемуся у него образу*. Этот вывод подтверждается практикой. Известно, например, что у учащегося из предложенной им для решения совокупности геометрических задач выбирают те, в условии которых используются фигуры, наиболее распространенные в школьном курсе геометрии. Причем особое внимание школьники уделяют тем задачам, при решении которых им приходится использовать *методы эстетической эвристики*, например достраивание фигуры до квадрата.

Попытку раскрыть *содержание эстетической привлекательности математического объекта* предпринимали и математики. Так, Э.Т. Белл данное содержание описывает совокупностью следующих *характеристик:*

- *универсальность использования* в различных разделах математики, как правило, изначально совсем неочевидных;

- *продуктивность или возможность побудительного влияния* на дальнейшее продвижение в данной области *на основе абстракции и обобщения*;

- *максимальная емкость охвата объекта* рассматриваемого типа.

Г.И Саранцев указывает, что некоторыми исследователями перечисленные *характеристики* дополняются *новыми*:

- *глубокий контраст между уровнями сложности выводимого факта и используемых при этом аппаратных средств*, достигаемых за счет использования тех или иных эвристических процедур;

- *четко выраженная упорядоченность, гармония целого и частей, как чувственной* (например, через идею симметрии), так и *интеллектуальной* (например, через осознание стройности математических доказательств).

В качестве примера математического объекта, удовлетворяющего указанным критериям, Э.Т. Белл приводит *задачу построения правильных многоугольников*, решенную К. Гауссом в конце 18 века. Данная задача явилась результатом органического синтеза алгебры, геометрии, теории чисел и послужила в прошлом стимулом для многих алгебраических исследований, а ее внешняя простота, ярко выраженная симметричность, безукоризненная стройность решения побудили исследователей математического творчества называть эту задачу «настоящим произведением искусства» и « математической поэмой» [65, С. 9].

По мнению В.Г. Болтянского, *красота математического объекта* может быть выражена посредством *изоморфизма между объектом и его наглядной моделью, простотой модели и неожиданностью ее появления*. Это утверждение можно подкрепить формулой «математической эстетики» из его статьи «Математическая культура и эстетика»:

*Красота = наглядность + неожиданность =*

*= изоморфизм + простота + неожиданность.*

Автор подчеркивает, что изоморфизм предполагает правильные, неискаженные отражения основных свойств и явления в его наглядном представлении. Мера красоты тем выше, чем меньше мера сложности объекта или чем проще наглядная модель исследуемого объекта. Сложность исследуемого объекта (простота его наглядной модели) обусловлена соответствием этого объекта сложившемуся в сознании ребенка его образу [11, С. 40].

Наиболее четко *характеристика эстетической привлекательности математического объекта*, как отмечают Е.Ю. Миганова и Г.И. Саранцев, дана Г. Биркгофом:

$$M = \frac{O}{C}, \text{ где}$$

М – мера красоты, О – мера порядка, С – мера усилий, затрачиваемых для понимания сущности объекта.

Е.Ю. Миганова отмечает, что в случае затраты минимума усилий, (а это возможно, когда восприятие укладывается в обобщенный его образ), мера красоты возрастает причем степень возрастания пропорциональна росту меры порядка. Отсюда следует, что *для ученика красивым математическими объектами* будут те, восприятие которых сопряжено с наименьшими усилиями со стороны этого ученика [44, С. 32].

*Эстетическая мера объекта* будет увеличиваться с упорядочиванием его структуры, что осуществляется в процессе преобразования исследуемого объекта. Сказанное объясняет привлекательность симметричных объектов.

*Эстетическая мощь симметрии* была «угадана» путем сердца еще в эпоху неолита, но путем мысли человечество пришло к принципу симметрии только в 20 в. Именно в 20 в. стало отчетливо понятно, что принцип симметрии лежит в основе всего мироздания [18, С. 65].

В.Л. Минковский отмечает, что вопросы симметрии имеют исключительно широкие возможности для осуществления эстетического воспитания учащихся.

Автор говорит, что мало кому из современных учащихся не довелось в школьном возрасте испытать пленяющее очарование незатейливой с виду игрушки - калейдоскопа. Многие из них не удержались и заглянули в ее тайники. Но секрет очарования оказывался до обидности простым: несколько разноцветных стеклянных обломков, лишенных особой приятности, перекатывались на небольшом участке треугольной формы, ограниченной тройкой зеркальных пластинок.

Дошкольнику трудно, конечно, осознать, что все удовольствие, доставляемое этим, довольно примитивным оптическим прибором, в том, что разноцветные стекляшки между зеркалами образуют в них путем отражения симметричные узоры и сочетания, красота которых исключительно в безукоризненной симметрии нехитрых рисунков. Эти яркие детские впечатления далеко не всегда в должной мере используются педагогами в целях повышения качества обучения.

В связи с *изучением различных видов симметрии* естественно знакомить учащихся с ее богатейшими проявлениями в природе, использовании ее законов в архитектуре и декоративно-прикладном искусстве. Исключительное богатство геометрических форм весьма характерно для орнаментов (так называемые геометрические орнаменты) [44, С. 28] .

Г.И. Саранцев отмечает, что *симметрия* является самой впечатляющей *формой порядка*, понимается и как гармония отдельных составляющих системы математических знаний.

Автор указывает, что выразителем гармонии системы математических знаний выступает и *логика математических выводов*. Способность к логическим рассуждениям формируется в процессе наблюдения человека за собой и другими людьми как за мыслящими существами. Таким образом, логика тоже есть продукт наблюдения, но только не за реально ощутимыми объектами, а за речевыми конструкциями, стандартами, которые выстраивает человек в процессе его общения с другими людьми.

Г.И. Саранцев подчеркивает, что на важность *мерыпорядка* в *проявлении эстетического чувства* обращают внимание многие математики.

Так, А. Пуанкаре математические характеристики, которым приписывают свойства красоты и изящества, видит в элементах, гармонически расположенных таким образом, что ум без усилий может им охватывать целиком, угадывая детали. Эта гармония служит одновременно удовлетворением наших эстетических чувств и помощью для ума, она его поддерживает и ею он руководствуется.

Усилению эстетичности математических объектов будут способствовать:

а) возможность продвижения в их исследовании на основе аналогии и обобщения;

б) богатство приложений результатов исследования как в математике, так и в смежных дисциплинах;

в) оригинальность суждений, формулируемых в процессе исследования.

Привлекательными будут оригинальные доказательства, способы решения задач, самостоятельно открытые учащимися теоремы, самостоятельно сформулированные задачи и т.д.

Таким образом, *эстетическим потенциалом*, основанным на идее симметрии, обладает большой объем даже школьного учебного материала, который естественно должен быть использован при разработке методики обучения математике.

В содержании понятия *простоты* некоторые исследователи выделяют такие *признаки*, как *немногочисленность* и *общность исходных гипотез,* возможность актуализации (при выдвижении этих гипотез) привычных образных представлений, а также наиболее прямой и естественный ход обоснования гипотез. В связи со сказанным заметим, что вряд ли, для ученика, приступающего к изучению систематического курса геометрии, будут привлекательными задачи, при решении которых используется «метод от противного». Такие задачи встречаются уже на первых страницах учебника геометрии для 7 класса. Аналогичная ситуация возникает тогда, когда ученику начальной школы предлагают решить текстовую задачу с помощью уравнения [65, С. 11].

В.М. Волькенштейн к критериям эстетической привлекательности математических объектов относит сведение их *сложности к простоте*.

Под *простотой* автор понимает нахождение минимальной программы, наиболее общей и универсальной закономерности для данного круга явлений.

В.М. Волькенштейн утверждает, что нахождение и есть главный *эстетически значимый момент в научном познании*. Автор представляет эстетику науки так же своего рода минимальной программой – простой формулой:

$$\text{Эстетическая значимость} = \frac{\text{Наблюдаемая сложность}}{\text{Минимальная программа}}$$

Числитель и знаменатель дроби выражены в битах – единицах количества информации. Минимизация программы означает отсечение избыточной информации, характеризующей наблюдаемую сложность [21, С. 15].

Г.И. Саранцев отмечает, что некоторые математики утверждают, что *простота*, как эстетического качество, предполагает наличие в числе его характеристик неожиданности, выражающейся в контрасте между очевидностью и естественностью утверждений и трудностью их обоснования. Многие простые и общие теоремы высшей арифметики естественно возникают из простейших вычислений, однако при их доказательстве часто встречаются большие трудности. Такая особенность, по мнению К. Гаусса, придает высшей арифметике неотразимое очарование, сделавшее ее любимой наукой величайших математиков.

В качестве эстетической привлекательности автор отмечает и *обратный контраст между громоздкостью, сложностью условия задачи и простым изящным ее решением*. Наконец, в качестве еще одной формы контраста называют несовпадение полученного решения с предполагаемым. Когда после длинных выкладок приходим к какому-нибудь поразительному по простоте результату, - замечает А. Пуанкаре, - мы до тех пор не чувствуем себя удовлетворенными, пока не покажем, что мы могли бы предвидеть, если не весь результат в целом, то, по крайней мере, его наиболее характерные черты.

По мнению Г.И. Саранцева, перечисленные *характеристики красоты математического объекта* соотносятся, как легко заметить, либо с его внешней стороной, либо с внутренней, реализующейся в его исследовании. Это было подмечено еще А. Пуанкаре, который выделял в числе эстетических факторов, заложенных в математическом содержании, красоты качества или видимых свойств, характеризующую мимолетностью впечатлений и более глубокую постигаемую только чистым разумом *красоту интеллектуальную*. Последняя не только создает почву, «остов для игры видимых красот, ласкающих наши чувства», но и «дает удовлетворение сама по себе».

С повышением уровня математической подготовки школьников усиливается *влияние эстетических мотивов* на осуществление поисковой деятельности, расширяется круг эстетических факторов и их выбора в различных конкретных ситуациях, что способствует более высокому пониманию математической красоты, которое соотносится с творческой математической деятельностью, с изящностью рассуждений, с различными способами решения задачи. Как отмечал А. Пуанкаре, чувство изящного есть чувство эстетического удовлетворения, обусловленное взаимным приспособлением между математическим объектом и потребностями нашего ума. В силу такого именно приспособления данный объект становится как бы собственностью нашего ума и может служить орудием в дальнейшем познании [65, С. 13].

М.Я. Антоновский отмечает, что *простота восприятия моделей* входит в *содержание понятия красоты математического объекта*. Автор пишет, что простота восприятия модели изменяется по экспоненциальному закону. Экспоненциальный характер зависимости отражает, в частности, тот очевидный факт, что понятия, которыми автор постоянно оперирует, с течением времени становятся более простыми для восприятия.

М.Я. Антоновский рекомендует при построении модели в качестве элементов следует стремиться использовать такие понятия, которые вследствие их многократного и длительного применения являются для учащихся привычными, установившимися и поэтому простыми для восприятия [7, С. 68].

По мнению Г.И. Саранцева, *содержание понятия красоты математических объектов* составляется следующими *признаками:*

-соответствие математического объекта его стандартному, стереотипному образу;

- порядок, логическая строгость;

- простота;

- универсальность использования этого объекта в различных разделах математики;

- оригинальность, неожиданность.

Автор отмечает, что *простота* воплощается в немногочисленности и общности исходных гипотез, возможности актуализации при выдвижении этих гипотез привычных образных представлений, наиболее прямом и естественном ходе обоснования гипотез. Неожиданность выражается в контрасте между очевидностью и естественностью формулировок и трудностью их доказательства, обратном контрасте, несовпадении полученного результата с предполагаемым. Основной *формой порядка* является симметрия в широком смысле.

Эффективность модели красоты математического объекта, представленной Г.И. Саранцевым, подтверждается и работами, исследующими оценку сложности систем и простоты восприятия их моделей.

В *эстетическом восприятии математического объекта* Г.И. Саранцев выделяет *три уровня*:

1) уровень восприятия основан только на *совпадении предъявляемых объектов с их образцами*, сформированными у школьников;

2) уровень восприятия обусловлен тем, что *предъявляемый объект не полностью соответствует своему образу*, однако его «доведение» до образа как бы подсказывается структурой этого объекта (достроить фигуру; построить фигуру, дополнить часть до целого и т.д.);

3) уровень, на котором *восприятие объекта смещается на его внутреннюю структуру* [65, С. 15].

Таким образом, содержание понятия красоты математических объектов составляется такими *признаками*, как: соответствие математического объекта его стандартному, стереотипному образу; порядок, логическая строгость; простота; универсальность использования этого объекта в различных разделах математики; оригинальность, неожиданность. Причем, простота восприятия объекта зависит от его сложности: чем сложнее система, тем она труднее воспринимается, а поэтому является и менее привлекательной. *Эстетическое восприятие математического объекта* основывается на определенных *уровнях их привлекательности*.

## ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

1. Изучено понятие эстетического воспитания и его задачи. Установлено, что под эстетическим воспитанием учащихся в процессе обучения математике будем понимать *совокупность ее возможностей и ресурсов*, которые могут быть реализованы как средства эстетического развития личности.

2. Рассмотрено понятие красоты в математике. Изучив различные подходы к понятию красоты в математике, выявлено, что красота в математике выражается в: гармонии чисел и форм; геометрической выразительности; стройности математических формул; изяществе математических доказательств; порядке; богатстве приложений; универсальности математических методов.

3. Раскрыты уровни красоты математического объекта. Определено, что существует три уровня привлекательности математического объекта, где предъявляемый объект: 1) привлекателен тем, что совпадает с образом, сформированным у школьников; 2) не полностью соответствует своему образу, но может быть легко до него дополнен; 3) предполагает рассмотрение его внутренней структуры, то есть привлекательность заключена в поиске различных способов решения задачи, выделение среди них наиболее оригинального.

## ГЛАВАII . МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЭСТЕТИЧЕСКОГО ВОСПИТАНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙШКОЛЕ

### §4. Эстетика в процессе решения математической задачи

В.Л. Минковский в статье «Об элементах эстетического воспитания на уроках математики» отмечает, что поиски изящных решений задач относятся к глубокой древности.

Понятие «изящное решение» задачи, «красивый» вывод и т.д. являются в математике общепринятыми. Выдающийся советский математик Н.Г. Чеботарев, желая подчеркнуть мысль относительно общезначимости этих понятий, указывает на отсутствие в среде математиков «споров об изяществе».

В.Л. Минковскийподчеркивает что, к сожалению, довольно распространенным является мнение, что удовлетворение от изящного решения задачи и красоты вывода может испытать только ученый, только узкий специалист определенной отрасли знаний. Между тем опыт показывает, что восприятие эстетической стороны решения задачи доступно почти каждому ученику, если только в преподавании математики поощряются поиски самостоятельных путей и приемов рационального решения.

По мнению автора, существенную роль в выработке понимания красоты решения играет демонстрация учителем оригинальных путей решения доступных для учащихся задач. Так, например, ученикам пятого класса доставляет подлинное эстетическое удовольствие выразительный рассказ учителя о том, как маленький Карл Гаусс почти моментально подсчитал сумму ста первых членов натурального ряда чисел.

Подобные сообщения весьма активизируют класс. У учащихся появляется настойчивое желание испытать собственную смекалку в отыскании эффектного решения нестандартной задачи, как например, в вычислении суммы нескольких дробей вида $\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 20}$ без приведения их к общему знаменателю.

«Красота в математике, - утверждал Н.Г. Чеботарев, - идет рука об руку с целесообразностью: мы редко называем изящными рассуждения, не приводящие к законченной цели или более длинные, чем это представляется необходимым».

Изящное решение задачи обычно достигается сочетанием оригинальности приема решения с простотой и ясностью самого решения.

Крупный математик Герман Минковский очень высоко ценил владение «искусством соединять с минимумом слепых формул максимум зрячих мыслей».

Проявления такого искусства встречаются и в работах школьников. Весьма ярким примером для иллюстрации этой мысли может служить решение сравнительно сложной задачи девочкой – шестиклассницей из г. Орджоникидзе, обнародованное Б.А. Кордемским.

**Задача 1**. *Найти прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, а площадь численно равна периметру.*

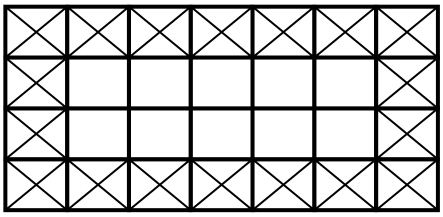

Рис. 1.

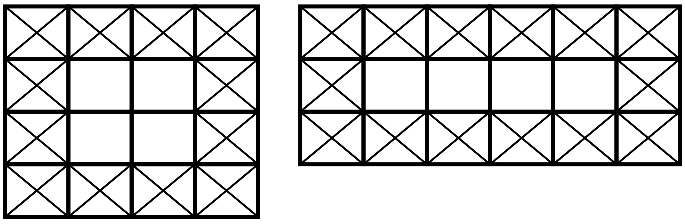

Рис. 2.

**Решение.** Искомый прямоугольник состоит из единичных квадратов (клеток). Выделив «каемку» шириной в одну клетку, прилегающую к сторонам прямоугольника (Рис. 1), замечаем, что нельзя установить взаимно однозначное соответствие между клетками каемки и линейными единицами контура. Этого нельзя сделать потому, что в контуре всегда на 4 единицы больше. Приняв во внимание условие задачи, заключаем, что оставшаяся «сердцевина» должна содержать 4 клетки, а 4 клетки можно расположить прямоугольником только двумя способами: 2·2 и 4·1.Окаймляя их клетками, получаем те два решения (Рис. 2), которые имеет задача.

Полноценное восприятие учениками эстетической стороны решения задач - могучее средство повышения интересов учащихся к изучению математики [45, С. 27].

Г.И. Саранцев отмечает что, решение конкретных задач иллюстрируют огромную их роль в эстетическом развитии школьника, а также значение эстетических мотивов в решении задачи.

Автор рассматривает *эстетические возможности каждого этапа решения задачи.*

Суть *первого этапа* заключается в анализе задачной ситуации, выделении объектов и отношений между ними, конструировании словесных и графических моделей задачи, обладает высокой эстетической значимостью.

Это относится, прежде всего, к задачам, условия которых содержат объекты и отношения, совпадающие с их образцами, сформированными у школьников, либо имеющие небольшую рассогласованность с образами. Данная рассогласованность актуализирует потребность учащихся ликвидировать ее.

Примером такой задачи может служить приведенная выше задача о квадрате и вписанном в него недостроенном кресте. Привлекательность задачи усиливает простота и ясность ее графической модели.

В качестве примера Г.И. Саранцев приводит следующую задачу.

**Задача 2.** *Прямые AC, BD и m являются осями симметрии четырехугольника ABCD. Каково взаимное расположение прямойт и сторон четырехугольника? Имеет ли он другие оси симметрии?*

Автор подчеркивает, что *эстетически привлекательны задачи,* формулировкам которых свойственна большая информативность. Примером является задача об окружности девяти точек треугольника, которая объединяет общей закономерностью почти все замечательные точки треугольника: середины сторон треугольника, середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами треугольника и середину отрезка, концами которого являются точка пересечения высот и центр описанной окружности.

*Эстетический компонент задачи* выделяется выявлением противоречивости математической ситуации, отраженной в ней, имеющимся представлением о данной ситуации. Г.И. Саранцев приводит в пример следующую задачу.

**Задача 3.** *В каждый из двух треугольников со сторонами 17, 25 и 26 и 17, 25 и 28 вписана окружность. Радиус какой из этих окружностей больше?*

Верный ответ, утверждающий, что вписанные окружности имеют одинаковые радиусы, противоречит привычным представлениям. Эстетичность в данном случае усилена возможностью установления неожиданных связей.

*Эстетическую привлекательность заданной* задачной ситуации придает отраженный в ней *аспект математики*, представляющий ее как *инструмент познания законов гармонии объективного мира*. Здесь идет речь о связи математики с живописью, архитектурой, музыкой, литературой на базе понятий симметрии, пропорции, перспективы, «золотого сечения», логарифмов и т. д.

Г.И. Саранцев отмечает, что много интересного материала о познании законов гармонии в окружающем мире можно найти в книгах А.И. Азевича, А.В. Волошина, В. Варги, а также в книге Д. Пидоу «Геометрия и искусство» ( М., 1979).

По мнению автора, к эстетически привлекательным можно отнести также *задачи, формулировки которых противоречат интуитивным представлениям о той или иной математической ситуации*.

**Задача 4**. *На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники DAB и BCE ( углы A и C –*

*прямые). Докажите, что положение точки М – середины отрезка DE не зависит от положения вершины В.*

*Эстетичность первого этапа решения задачи* заключается так же в рисунке, который моделирует данную задачную ситуацию. *Привлекательность* может быть обусловлена как *соответствием фигур*, изображенных на рисунке их *стереотипным образам*, так и *сочетанием простоты* отдельных элементов со сложностью получившейся фигуры.

В качестве примера Г.И. Саранцев предлагает рассмотреть Рис. 3 к **задаче 5**: *«Середины каждой из сторон квадрата соединены с двумя противоположными вершинами. Найти отношение площади получившегося восьмиугольника к площади квадрата»* [65, С. 120].

Эту же задачу в качестве примера рассматривает и О.В. Черник в своей работе «Эстетический аспект процесса решения математической задачи».

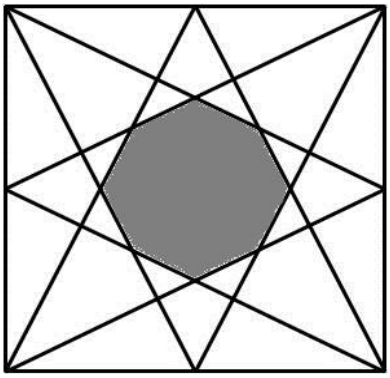

Рис.3.

Автор пишет, что по мнению Г.И. Саранцева на *втором этапе,* этапе составления плана решения эстетический компонент математики может быть реализован в процессе выполнение таких действий, как:

- переосмысление объектов и отношений между ними с точки зрения других понятий, в результате чего появляется возможность установления неожиданных связей, что и сопровождается «переживанием прекрасного» которое, по словам В. Гейзенберга, «почти отождествляется с переживаниями понятой или хотя бы угадываемой взаимосвязью»

- перевод содержания задачи на язык специальной теории и наоборот, что связано с построением модели, изоморфной задаче. Согласно формуле математической эстетики, данной В.Г. Болтянским, модель можно считать эстетически привлекательной, если она является достаточно простой, неожиданной и наглядной [75, С. 38].

Г.И. Саранцев подчеркивает, что эстетика восприятия может быть усилена посредством таких компонентов красоты, как сведения сложности к простоте, визуализация объекта, выяснения связей между его компонентами.

**Задача 6**. *Вершина A квадрата ABCD расположена в центре квадрата MNPQ , а сторона AB пересекается со стороной MN в такой К, что МК* $=\frac{1}{3}$*MN. Найдите площадь общей части двух квадратов, если MN=1* (Рис.4) [65, С. 123].

Этот же пример рассматривает и О.В. Черник.

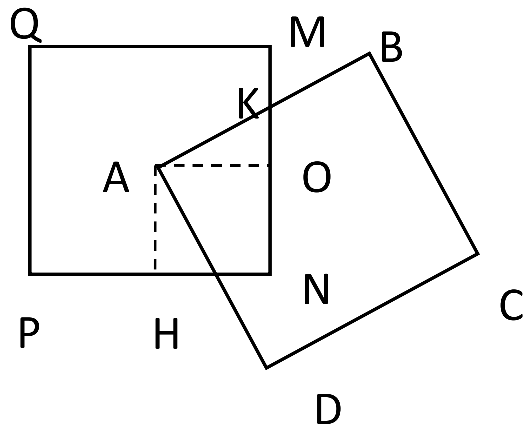


Рис.4.

Автор пишет, что если применить при решении данной задачи поворот треугольника АКО на $90^0$, то легко доказать равновеликость четырех-угольникаAKNF квадрату AONH, то есть площадь общей части квадрата равна $\frac{1}{4}$ .

По мнениюГ.И. Саранцева, в отдельных случаях при составлении плана решения задачи может оказать существенную помощь метод аналогии, эстетическая значимость которого обусловлена тем, что в нем проявляется единство математики как признак гармонии ее частей. Автор подчеркивает, что при реализации *третьего этапа*, связанного с осуществлением плана решения задач, эстетический элемент состоит в удовольствии, приходящим от красоты логических ходов, от того, как идеально «подогнаны» друг к другу логические ходы, как неотвратимо они ведут к поставленной цели, как идеально все связано и уравновешенно.

О.В. Черник указывает, что идет речь о полной логической обоснованности, и доказательстве каждого шага в решении задачи, как высшей форме эстетического совершенства в математике, но следует заметить что красоту логических построений существование которой не вызывает сомнений у профессиональных математиков, способен оценить не каждый учащейся, поэтому, чтобы «усилить» эстетическую значимость данного этапа в решении задачи следует соразмерно сочетать логические и образные (наглядные) факторы [75, С. 39].

Г.И. Саранцев подчеркивает, что большая роль в решении задачи принадлежит эвристикам, многие из которых имеют эстетическое происхождение. В частности, к таким эвристикам относится прием достраивания фигуры, широко используемый в решении задачи. Особую привлекательность этому приему придает использование симметрии, которая, как известно, выражает эстетическую категорию порядка.

**Задача 7**. *Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей.*

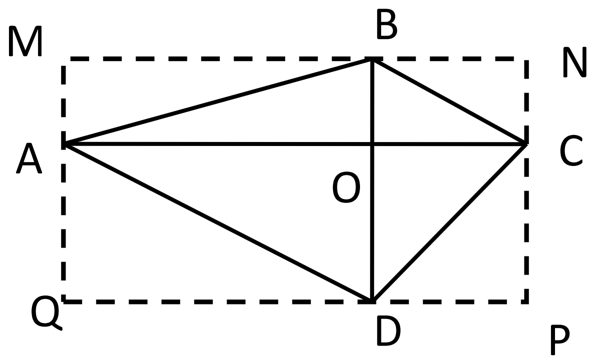


Рис. 5.

Достраивая данный четырехугольник ABCD (Рис. 5) до прямоугольникаMNPQ со сторонами $d_1$ и $d_2$, видим, что площадь полученного прямоугольника в два раза превышает искомую площадь четырехугольника.

В поиске способа решения задачи иногда существенную помощь может оказать аналогия,эстетическая значимость которой обусловлена проявлением в ней математического знания. Роль аналогии в изучении математики показана автором на примере задач 8 – 9.

**Задача 8.** *В круге проведены два радиуса. Построить хорду, делящуюся этими радиусами на три равные части (Рис 6).*

**Задача 9.** *Вершина A параллелограмма ABCD соединена с серединами сторон BC и CD. Доказать что эти прямые, пересекаясь с диагональю BD, делят ее на три равные части (Рис.7).*

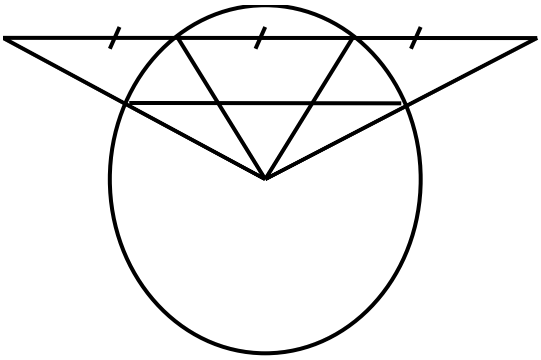

Рис. 6.

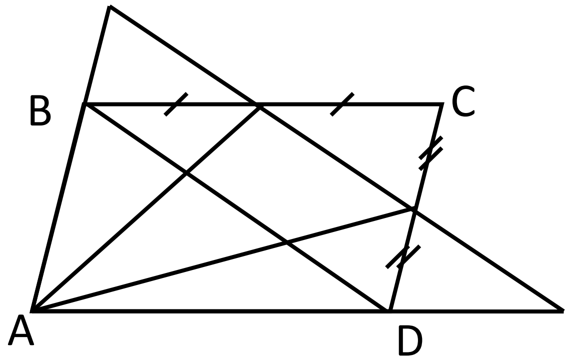


Рис. 7.

Аналогия этих задач заключается в схожести требований. Эта аналогия приводит к одному способу их решения – методу гомотетии. Рис. 6 и 7 разъясняют решения данных задач.

По мнению Г.И. Саранцева, наиболее богатые возможности для раскрытия эстетического потенциала математики, развития эстетического вкуса учащихся имеет четвертый этап решения задачи, который Д. Пойа называл его «взглядом назад». Однако его содержание не ограничивается лишь изучением решения, выделением идеи обоснования, обсуждением теоретической базы, поиском других способов решения, сравнением их, выявлением наиболее простого, неожиданного, а, значит, и более изящного.

Этот этап является хорошим полигоном для исследования задачной ситуации, конструирования новых задач: задач – обобщений, задач – аналогов, задач – конкретизаций, задач, решаемых тем же способом, что и основная, укрупнения задач и т.д. В результате деятельности на этом этапе математическая ситуация, рассматриваемая в задаче, представляется во всем многообразии связей, во всей полноте, чем и вызывает эстетическое отношение к себе. Роль рассматриваемого этапа решения задачи в эстетическом воспитании школьника, в формировании его исследовательской культуры автор иллюстрирует на следующей задаче.

**Задача 10**. *На стороне AD параллелограмма ABC D отмечены точки К и L так, что AК=КL=LD, а на стороне C D – точки E, M, F, причем*

*CE = EM=MF=FD. Отрезки СК и BF пересекаются в точке P. Найти отношение* $\frac{BP}{PF}$*.(Рис. 8).*

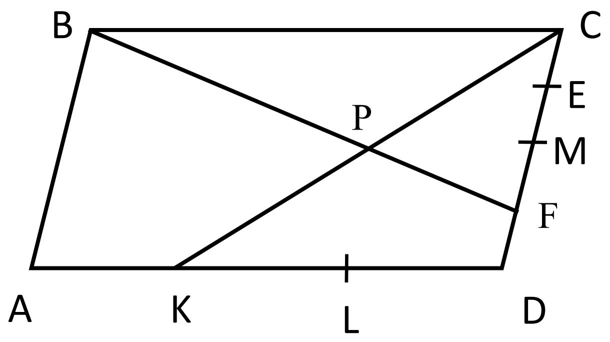


Рис. 8.

Рисунок, моделирующий данную задачную ситуацию, достаточно прост, поэтому он привлечет внимание школьников. Однако возникший интерес у большинства из них угасает после более детального ознакомления с условием и требованием задачи.В условии отсутствуют какие – либо числовые данные, а требуется отыскать отношение длин отрезков. У некоторых учащихся данное требование вызывает ассоциацию с теоремой о пересечении прямых пучков параллельных прямых. Эта ассоциация, в свою очередь, может оживить эстетический мотив, направленный на рассмотрение частного случая.

Итак, пусть Рис. 9 изображает задачную ситуацию по отношению к прямоугольнику, причем для большей простоты отрезки на сторонах прямоугольника равны (рисунок лучше выполнить на клетчатой бумаге). Ответ очевиден: данное отношение равно двум. Частный случай поможет увидеть секущую, которая и будет определять пучок параллельных прямых, пересекающих параллелограмм. В качестве такой секущей является прямаяLM (Рис. 10).

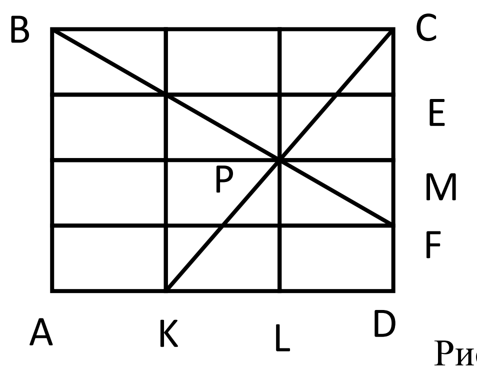


Рис. 9.

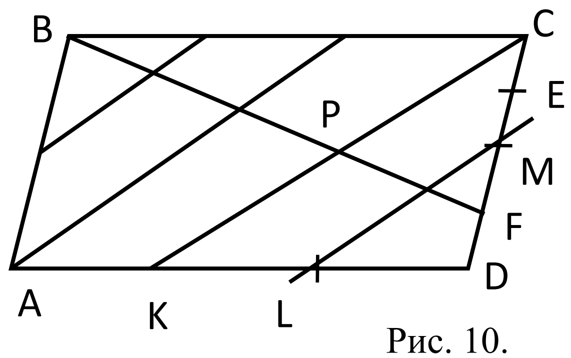


Рис. 10.

Простота модели задачной ситуации, оригинальность способа решения, неожиданность, возможность дальнейшего исследования задачной ситуации делают эту задачу красивой. Ее решение удовлетворяет всем уровням эстетической привлекательности.

По мнению Г.И. Саранцева дальнейшее исследование задачи возможно в направлении выяснения отношения отрезков КР и РС, Рис. 9 обнажает эту зависимость: отрезки КР и РС равны.

В задаче 11 автор показывает такой способ решения задач, в котором интересен не только технический прием упрощения, но и в котором иллюстрируется сущность математического метода познания, заключающегося в использовании последовательности абстракций, приводящей к наиболее простой и продуктивной структуре исследуемого явления. В этом способе заключается его эстетическая ценность.

**Задача 11**. Вычислите с точностью до 0,001:

$$\left(\frac{1-2\cdot(17{,}3)^3}{1+(17{,}3)^3}\right)^3+\left(\frac{17{,}3\cdot(2-(17{,}3)^3)}{1+(17{,}3)^3}\right)^3+(17{,}3)^3.$$

Данная задача из-за громоздкости выражения вряд ли будет привлекательна для учащихся. Однако более внимательное рассмотрение заданного выражения вызовет у некоторых школьников интерес, обусловленный повторяемостью в выражении одного и того же структурного элемента 17,3. Этот вывод побуждает учеников трансформировать данное арифметическое выражение в алгебраическое:

$$\left(\frac{1-2a^3}{1+a^3}\right)^3+\left(\frac{a\cdot(2-a^3)}{1+a^3}\right)^3+a^3.$$

Полученное выражение является более эстетичным, Г.И. Саранцев предлагает исследовать его и замечает, что образующим элементом данной структуры является выражение $(\text{а})^3$. Обозначив его буквой $b$ , внесем соответствующие изменения в полученное выражение, которое примет вид :

$$\left(\frac{1-2b}{1+b}\right)^3+b\cdot\left(\frac{2-b}{1+b}\right)^3+b.$$

Упрощая выражение, находим, что оно тождественно равно 1. Значит, значение данного выражения является число 1.

Кроме того, автор подчеркивает, что идея, показанная на задаче 10 может быть реализована при решении уравнений и исследования функций, что показывает при решении следующей задачи.

**Задача 12**. Решите уравнение:

$$\frac{x-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}+\frac{x-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}{x-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{x-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}.$$

Положив $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=a$ и $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=b$, приходим к уравнению более общего вида:

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}.$$

Изучая структуру полученного уравнения, замечаем, что $\frac{x-a}{b}=\frac{\frac{1}{b}}{x-a}$ и $\frac{x-b}{a}=\frac{\frac{1}{a}}{x-b}$. Учитывая сказанное, полученное уравнение преобразуем к уравнению

$U+V=\frac{1}{U}+\frac{1}{V}$, где $U=\frac{x-a}{b}$ и $V=\frac{x-b}{a}$.

Последнее уравнение приводимо к уравнению $\left(1-\frac{1}{UV}\right)(U+V)=0$, корнями которого являются числа:0, $a+b$ ,$\frac{a^2+b^2}{a+b}$. Подставив значения $a$ и $b$, получаем, что числа 0, $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})}^2+\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})}^2}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}$ - корни данного уравнения.

Ответ может сгладить привлекательность процесса решения уравнения и вызвать чувство разочарования в данном уравнении. Тем не менее громоздкость ответа и его «симметричность» подталкивают к продолжению исследования.

Опять-таки попробуем подойти к преобразованию полученных выражений с более общих позиций. Замечаем, что $(a+b)^3=a^3+b^3+$

$3ab(a+b)$. Из данного тождества следует, что $a+b$ - корень уравнения $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$.

При $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ и$b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}a^3 + b^3 = 4$ и $ab = -1$ . Следовательно, $a+b$ – корень уравнения $x^3 = 4 - 3x$ . Функция $y = x^3$ возрастающая, а функция $y = 4 - 3x$ убывающая, значит, уравнение $x^3 = 4 - 3x$ имеет не более одного корня. Так как $x = 1$ - корень данного уравнения, то $a+b=1$. Тогда $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2-2ab}{a+b} = \frac{1+2}{1} = 3$. Таким образом, корнями данного уравнения являются 0, 1, 3.

Автор подчеркивает, что с полученным окончательным ответом ассоциируются только чувства восторга и восхищения.

Кроме того, Г.И. Саранцев рассматривает вопрос систематизации задач в зависимости от уровня эстетической потребности и понятия красивой задачи.

Как было отмечено выше, каждому уровню эстетической сформированности автор ставит в соответствие тип задач, в процессе решения которых обеспечивается формирование данного уровня:

1) задачи, условия которых реализуют наглядную выразительность; 2) задачи, условия которых *представимы такими моделями, которые можно упростить;*

3) задачи, решаемые *различными способами, задачи с неожиданным решением.*

Приведем некоторые примеры алгебраических задач, направленных на эстетическое воспитание учащихся.

**Задача 1.** Представить одночлен $24x^6y^9$ в виде произведения двух многочленов (А.Г. Мордкович, 7 класс, [47, С. 42]).

**Решение:**

**1 способ:** $24x^6y^9 = 24x^2y^2 \cdot x^4y^7$ **2 способ:** $24x^6y^9 = 6x^3y^4 \cdot 2x^3y^5$

**3 способ:** $24x^6y^9 = -3xy^3 \cdot (-8x^5y^6)$ **4 способ:** $24x^6y^9 = 48x^2y^7 \cdot \frac{1}{2}x^4y^2$

*Условие задачи интересно* учащимся, потому что имдается возможность придумать свой вариант произведения двух многочленов. Решение задачи *просто*. Одночлен можно представить ни одним способом, а значит, *задание имеет множество решений. «Изюминкой» в решении является то, что:* а) положительное число можно представить как произведение двух отрицательных; б) целое число можно представить в виде произведения целого числа и дроби.

**Задача 2.**Впишите пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество $20ac + 8bc + 6ab + \cdots = (3a + 4c)(\cdots + \cdots)$ (Г.К. Муравин, 7 класс, [50, С. 234]).

**Решение.** В левой части необходимо сгруппировать слагаемые так, чтобы можно было вынести за скобки множители$3a$ и $4c$.

$20ac + 8bc + 6ab + \cdots = (20ac + 8bc) + (6ab + \cdots) = 4c(5a + 2b) +$

$+3a(2b + \cdots)$. Значит, на месте пропуска должно стоять выражение $5a$.

$4c(5a + 2b) + 3a(2b + 5a) = (5a + 2b)(4c + 3a)$.

Осталось выяснить, какое слагаемое должно стоять на месте пропуска в левой части исходного выражения.

$20ac + 8bc + 6ab + \cdots = (5a + 2b)(4c + 3a)$

$(5a + 2b)(4c + 3a) = 20ac + 15a^2 + 8bc + 6ab$.

Сравнивая выражения $20ac + 15a^2 + 8bc + 6ab$ и $20ac + 8bc + 6ab + \cdots$ приходим к выводу, что на месте пропуска слагаемого должно стоять выражение $15a^2$.

**Ответ:** $20ac + 8bc + 6ab + 15a^2 = (3a + 4c)(5a + 2b)$.

*Условие задачи интересно* учащимся, так как задание не обычное. Решение задачи на первый взгляд не очевидно, но при нахождении первого шага последующие действия вытекают из него, что является *«изюминкой»данной задачи*.

**Задание 3.** Решите уравнение: $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) = 5$ (Н.Я. Виленкин, 9 класс, [2, С. 207]).

**Решение.** При решении уравнения используем метод замены переменных:$x^2+3x+1=t$, тогда $x^2+3x-3=x^2+3x+1-4=t-4$.

$$t(t-4)=5;\ t^2-4t=5; t^2-4t-5=0;$$

$\begin{cases} t_1+t_2=4 \\ t_1\cdot t_2=-5 \end{cases}$, $t_1=5,\ \ t_2=-1$

Вернемся к замене:

**1)** $x^2+3x+1=5;\ x^2+3x-4=0;$

$\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_1\cdot x_2=-4 \end{cases}$, $x_1=-4,\ x_2=1$

**2**) $x^2+3x+1=-1;x^2+3x+2=0$

$\begin{cases} x_3+x_4=-3 \\ x_3\cdot x_4=2 \end{cases}$, $x_3=-1,\ \ x_4=-2$

**Ответ:**$x_1=-4, x_2=1, x_3=-1,\ \ x_4=-2.$

*«Изюминка» данного задания* заключается в том, что при громоздком и трудоемком на первый взгляд решении (раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых, решение уравнения 4-ой степени), наиболее простым, а следовательно и красивым является решение уравнения с помощью метода замены переменной.

**Задача 4.** Решите уравнение: $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-\frac{5}{2}$ (Н.Я. Виленкин, 9 класс, [2, С. 207]).

**Решение.** При решении уравнения используем метод замены переменных:$\frac{x^2+1}{x}=t$, тогда $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{t}$, $t\neq 0$, $x\neq 0$.

$$t+\frac{1}{t}=-\frac{5}{2};\ t+\frac{1}{t}+\frac{5}{2}=0;$$

$$\frac{2t^2+2+5t}{2t}=02t^2+5t+2=0,$$

$$t_1=-\frac{1}{2}, t_2=-2$$

Вернемся к замене: **1)**$\frac{x^2+1}{x}=-\frac{1}{2};\frac{x^2+1}{x}+\frac{1}{2}=0$

$\frac{2x^2+2+x}{2x}=0;\ 2x^2+x+2=0$

$D=1-4\cdot 2\cdot 2=-15<0$. Действительных корней нет.

**2)** $\frac{x^2+1}{x} = -2; \frac{x^2+1}{x} + 2 = 0;$

$\frac{x^2+1+2x}{x} = 0;\ x^2 + 2x + 1 = 0, x = -1.$

**Ответ:**$x = -1.$

*Спецификой данногозадания* является то, что из всех способов решений необходимо выбрать наиболее рациональный. Именно этот способ наиболее эстетичен.

**Задача 5.** Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + xy = 1080 \\ x + y = 40 \end{cases}$ А.Г. Мордкович, 8 класс, [58, С. 162]).

**Решение: 1 способ:**

$\begin{cases} x = 40 - y \\ (40 - y)^2 + (40 - y)y = 1080 \end{cases}; \begin{cases} x = 40 - y \\ 1600 - 80y + y^2 + 40y - y^2 = 1080 \end{cases};$

$\begin{cases} x = 40 - y \\ 1600 - 40y = 1080 \end{cases}; \begin{cases} x = 40 - y \\ 1600 - 40y = 1080 \end{cases}; \begin{cases} x = 40 - y \\ -40y = -520 \end{cases}; \begin{cases} x = 40 - y \\ y = 13 \end{cases};$

$\begin{cases} x = 40 - y \\ y = 13 \end{cases}; \begin{cases} y = 13 \\ x = 40 - 13 \end{cases}; \begin{cases} y = 13 \\ x = 27 \end{cases}.$

**2 способ:**

$\begin{cases} x(x + y) = 1080 \\ x + y = 40 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 40 \\ 40x = 1080 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 40 \\ x = 27 \end{cases}; \begin{cases} x = 27 \\ y = 40 - x \end{cases}; \begin{cases} x = 27 \\ y = 13 \end{cases}.$

Задание имеет *несколько способов решения*, причем второй предлагаемый способ является наиболее *рациональным* (при внимательном рассмотрение системы, можно заметить, что при вынесении $x$ за скобку в первом уравнении, получаем множитель произведения, который имеет числовое значение.Останется только вместо выражения $(x + y)$ подставить значение и выразить переменную $x$).

**Задача 6.** Найти значение дроби $\frac{9x^2-3xy}{12xy-4y^2}$ при $x = 0{,}5, y = 0{,}25$ (А.Г. Мордкович, 8 класс, [58, С. 27]).

**Решение.**$\frac{9x^2-3xy}{12xy-4y^2} = \frac{3x(3x-y)}{4y(3x-y)} = \frac{3x}{4y} = \frac{3\cdot 0{,}5}{4\cdot 0{,}25} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5$

**Ответ:** 1,5.

*«Изюминка» данного решения* заключается в том, что учащийся должен найти наиболее лаконичное и изящное способ решения данной задачи, что будет представлять эстетическую ценность.

**Задача7.** Найтиошибкувдоказательстве: (Ю.Н. Макарычев, 8 класс, [4, С. 214]).

$16-36=25-45;\ 16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4};$

$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2;$

$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2;\ 4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2};\ 4=5.$

**Решение.** Для нахождения ошибки необходимо проанализировать каждое действие и определить, верно ли оно.

$16-36=25-45;\ 16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4};$

$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2;$

$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$ ; Далее происходит процедура извлечения корня. Существует тождество $\sqrt{a^2}=|a|$. Упростим выражения:

$\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(5-\frac{9}{2}\right)^2};\ \left|4-\frac{9}{2}\right|=\left|5-\frac{9}{2}\right|$. Раскрываем модуль, получаем:

$\frac{9}{2}-4=5-\frac{9}{2};\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Ошибка найдена.

*Необычность* задания заключается в его формулировке, что должно привлечь внимание учащихся. Необходимо последовательно применять полученные ранее знания. Учащиеся стремятся исправить ошибку, для того, чтобы решение *выглядело гармонично*.

**Задача 8.** Найдите обыкновенную дробь со знаменателем 21, заключенную между дробями $\frac{5}{14}$и $\frac{5}{12}$ (Ю. Н. Макарычев, 8 класс, [4, С. 214]).

**Решение.** Найдем наименьший общее кратное для 14, 12 и 21. Таким числом является 84. То есть, получаем $\frac{30}{84}<\frac{x}{84}<\frac{35}{84}$. Таким образом, $30<x<35$.

В задании необходимо найти дробь со знаменателем 21, то есть 84:4. Значит в дроби $\frac{x}{84}$ в числителе, вместо неизвестной $x$ должно стоять такое число из промежутка (30; 35), чтобы оно делилось на 4. Это число 32. Получаем $\frac{32}{84} = \frac{8}{21}$ .

**Ответ:**$\frac{5}{14} < \frac{8}{21} < \frac{5}{12}$.

Задачи данного типа встречаются не часто, что может привлечь внимание учащихся. Решение стимулирует логическое мышление. Кажущееся на первый взгляд сложное решение, оказывается на самом деле легким.

Г.И. Саранцев приводит свои примеры задач, которые помогают раскрывать эстетических потенциал математики.

1. На основании равнобедренного прямоугольного треугольника вне его построен квадрат. Доказать, что луч с началом в вершине треугольника, проходящий через центр квадрата, является биссектрисой прямого угла равнобедренного треугольника.

2. На гипотенузе прямоугольного треугольника вне его построен квадрат. Доказать, что луч с началом в вершине треугольника, проходящий

центр квадрата, является биссектрисой прямого угла равнобедренного треугольника.

3. Две смежные вершины квадрата лежат на перпендикулярных прямых, пересекающих в точке P. Доказать, что луч с началом в точке P, проходящий через центр квадрата, делит угол между перпендикулярными пополам.

*Задача 1* относится к первому типу обсуждаемых задач, *задачу 2* можно отнести ко второму типу, а *задача 3* иллюстрирует третий тип задач. Автор подчеркивает, что в ранее рассмотренных задачах так же можно выделить задачи перечисленных типов.

На основе вышесказанного, Г.И. Саранцев приходит к выводу о том, что задача, решение которой способствует воспитанию склонности школьников к использованию аналогии, обобщения, наглядной выразительности математических образов, унификации и разнообразным приложениям тех или иных математических факторов и закономерностей, всестороннему анализу изучаемых ситуаций, минимально возможной субъективной сложности, требуемой для достижения того или иного результата, поиску различных способов решения задачи и выбору из них наиболее изящного, полной логической обоснованности и доказательности, склонности к поиску различных моделей рассматриваемых ситуаций, общности исходных гипотез, различных приложений изучаемых объектов, считается красивой.

Автор подчеркивает, что определение красивой задачи ориентировано на учащихся с хорошо развитым эстетическим вкусом. Для учащихся основной школы красивой будет задача, условие и требование которой состоят из объектов и отношений между ними, соответствующих их образам, сложившимся у учащихся, направление поиска способа решения задачи обусловлено эстетическими мотивами и среди различных способов решения присутствует неожиданное или оригинальное решение.

Кроме того, Г.И. Саранцев отмечает, что представление о красивой задаче не является неизменным. Даже для одного и того же ученика одна и та же задача может быть как красивой, так и не являться таковой.

Задача, красивая для ученика 7 класса в начале учебного года, может казаться некрасивой в его конце. Все зависит от объекта геометрических представлений школьников, от сформированности у них образов математических объектов, стандартов логических рассуждений, от соответствия предъявляемых объектов их образам и стандартам. Учителю важно знать, на каком уровне эстетической привлекательности находиться каждый его ученик. Владея такой информацией, учитель с помощью специально подобранных или скорректированных им задач может целенаправленно формировать эстетический вкус школьника, управлять с помощью эстетических мотивов их учебной деятельностью.

Проходя все этапы решения задачи, по мнению автора, учащийся задействует все приобретенные ранее знания и умения, переводит их на новый, более качественный уровень. Задача учителя заключается лишь в правильной оценке эстетического воспитания каждого учащегося, и подборе задания, максимально соответствующего цели стимулирования жажды познания.

Формируя и развивая эстетический вкус обучающихся при решении «красивых» планиметрических задач, учитель помогает школьникам более полно воспринять красоту математики вообще, старается повысить их математическую и общую культуру [65, С. 131].

Приведем некоторые примеры планиметрических задач, которые направлены на формирование *эстетического вкуса у учащихся*.

**Задача 1.** В трапеции ABCD с основание AB и CD сумма оснований равна b, а диагональ AC равна a, $\angle ACB = \alpha$. Найдите площадь трапеции ( Л.С Атанасян, 8 класс, [24, С.156]).

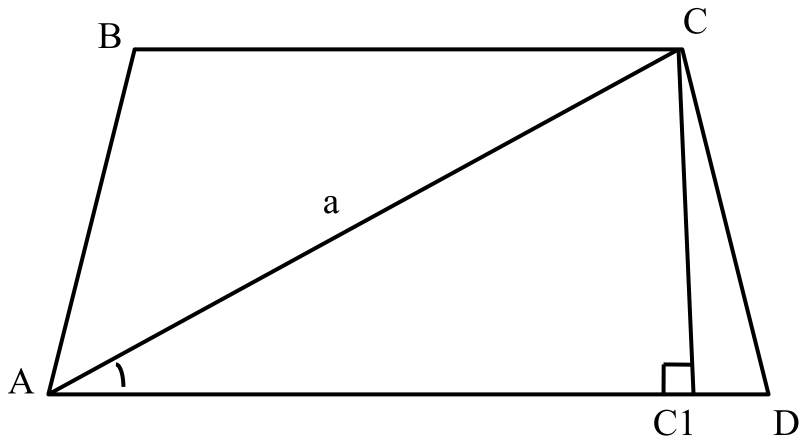


Рис. 11.

**Дано:**

$ABCD$ – трапеция

$AB+CD=b$

$AC=a$

$\angle ACB = \alpha$

**Найти:**

$S_{ABCD}$.

**Решение:**

1. Проведем высоту $ABCD$ и обозначим ее $CC_1$.

2. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + BC) \cdot CC_1$

3. Рассмотрим $\Delta AC_1C$: $\angle C_1 = 90^0$, : $\angle CAC_1 = \alpha$, AC=a, то есть, $CC_1 = a\sin\alpha$;

4. *BC+AD=b,* следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\text{absin}\,\alpha$.;

**Ответ:**$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\text{absin}\,\alpha$.

*Условие задачи* будет *интересно* учащимся, так как им предлагается найти новый способ выведения площади трапеции. *Чертеж* к данной задаче довольно прост и тем самым *красив*. При этом задача содержит дополнительно построение, что является *«изюминкой» в решении*. *Устанавливается интересный факт*, что можно найти площадь трапеции, если известны сумма ее оснований, длина диагонали, и угол между диагональю и основанием трапеции.

**Задача 2.** Два квадрата со стороной а имеют общую вершину, причем сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов ( Л.С Атанасян, 8 класс, [24, С .132]).

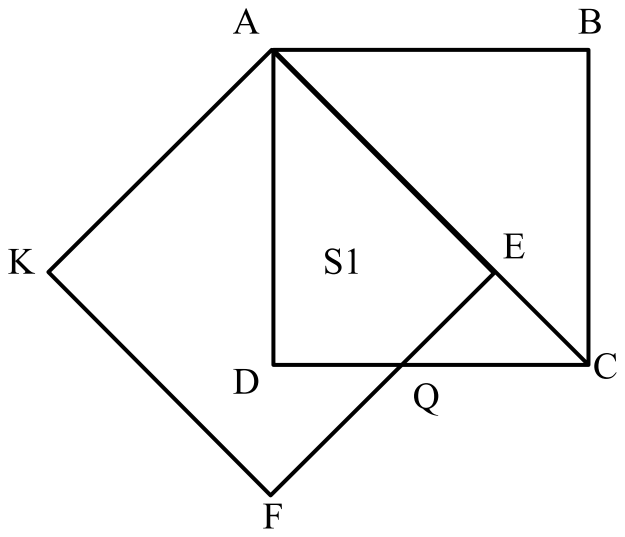


Рис. 12.

**Дано:**

$ABCD, AEFK$– квадраты;

*AB=AE=a;*

**Найти:**

$S_1$.

**Решение:**

1. Рассмотрим $\Delta ABC$: Проведем в нем диагональ $AC$.$AC^2 = AB^2 + BC^2 =$

$= 2a^2$, т.е. AC=a$\sqrt{2}$;

2. *EC=AC-AE=*$a\sqrt{2} - a$;

3. $S_{ECQ} = \frac{1}{2}EC \cdot EQ$, но *EC=EQ,* следовательно, $S_{ECQ} = \frac{1}{2}(EC)^2$;

$$S_{ECQ} = \frac{1}{2}a^2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = \frac{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)a^2}{2};$$

$S_1 = S_{ACD} - S_{ECQ} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{(3-2\sqrt{2})a^2}{2} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a^2 + \sqrt{2}a^2 = \sqrt{2}a^2 - a^2 =$
$= a^2(\sqrt{2}$-1).

**Ответ:** $S_1 = a^2(\sqrt{2}$-1).

*Условие является интересным* для учащихся, так как они зрительно не могут представить получившуюся фигуру. *Чертеж* к заданию симметричен, а следовательно *«красив». Решение наглядно и просто*.

**Задача 3.** Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями а и b( Л.С Атанасян, 8 класс, [24, С .182]).

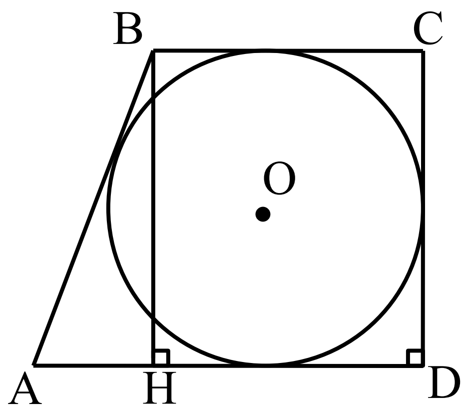

Рис. 13.

**Дано:**

*ABCD* – трапеция

$\angle D = 90^0$

*BC*$=a$

*AD*$=b$

**Найти:**

*CD*.

**Решение:**

1. Опустим высоту *BH*. *BH=CD;*

Рассмотрим $\Delta ABH$:$\angle H = 90^0$, *AH=b-a*. Так как *ABCD*– описанная трапеция, то *AB+CD=AD+BC=a+b*. Значит, *AB+BH=a+b.*

2. Обозначим *BH=x*, следовательно*, AB=(a+b)-x;* $BH^2 = AB^2 - AH^2$.

$x^2 = (a+b)^2 - 2x(a+b) + x^2 - (b-a)^2$

$x^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2x(a+b) + x^2 - b^2 + 2ab - a^2$

$2x(a+b) = 2ab, x = \frac{ab}{(a+b)}$; *BH=CD=*$\frac{ab}{(a+b)}$.

**Ответ:***CD=*$\frac{ab}{(a+b)}$.

*Условие задачи интересно* тем, что учащимся предлагается установить новый факт. Для решения задачи требуется дополнительное построение, необходимо ввести неизвестную переменную, что является *«изюминками»* данного *задания.* Ответ к задаче *устанавливает интересный факт*: нахождение радиуса вписанной окружности в прямоугольную трапецию.

**Задача 4.** Докажите, что площадь ромба равна половине произведения диагоналей ( А.В. Погорелов, 8 класс, [58, С .227]).

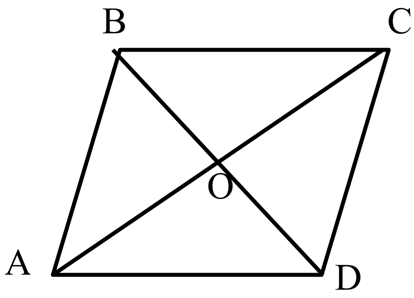


Рис. 14.

**Дано:**

*ABCD*- ромб

*AC и BD*– диагонали

**Доказать:**

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

**Доказательство.**

По свойству площади ромба имеем: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot$ $\cdot DO = \frac{1}{2}AC(BO + DO) = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

*Рисунок* симметричен и поэтому «*красив». Условие задачи пробуждает интерес* у учащихся к нахождению способа доказательства. *Решение задачи наглядно и просто*. *Устанавливается новый факт*: нахождение площади ромба по его диагоналям.

**Задача 5.** Зигзаг диагоналей разделил правильный девятиугольник на треугольники. Какая часть площади больше: белая или закрашенная(9 класс, [29, С. 35])?

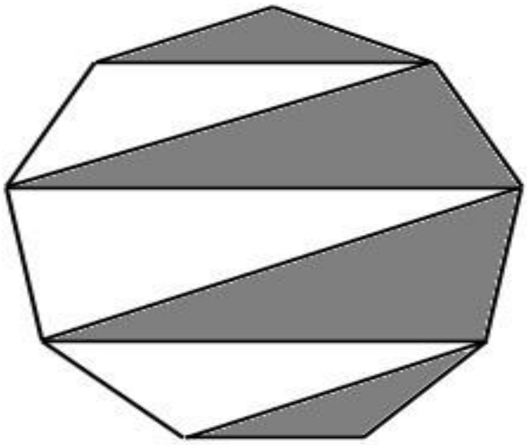

Рис. 15.

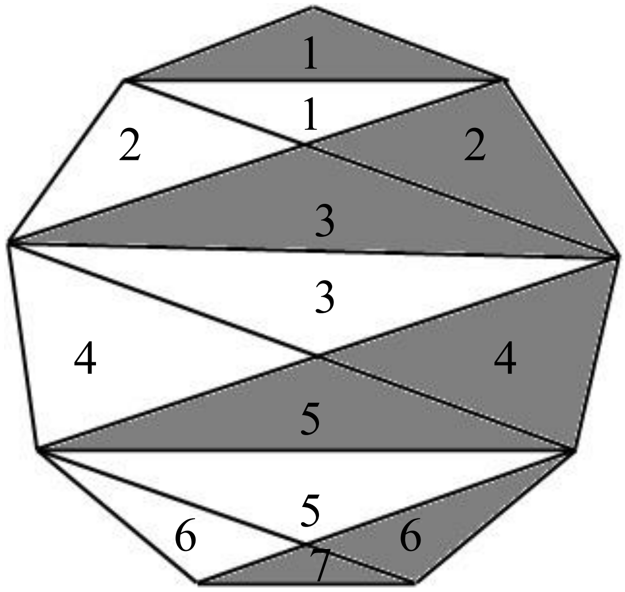


Рис. 16.

**Решение:**

Проведем в девятиугольнике еще несколько диагоналей. Девятиугольник разбился на 13 треугольников. На рисунке образовалось много треугольников. Расставим номера треугольников, причем одинаковым номером отметим равные треугольники разных цветов. Треугольники разбились на пары, а треугольнику под номером 7, который оказался закрашенным, пары не хватило. Значит, закрашенная часть площади девятиугольника больше его незакрашенной части.

**Ответ:** Площадь у закрашенной части девятиугольника больше.

Девятиугольник является симметричной фигурой, а значит, его *рисунок* будет *привлекателен для учащихся. Условие задачи интересно для учащихся*, так как с первого взгляда нельзя дать точный ответ. С первого взгляда может показаться, что площади являются равными, но при детальном разборе задачи, *ответ является неожиданным*. Для решения вопроса задачи, необходимо провести дополнительные диагонали, что и будет являться *«изюминкой» данной задачи*.

**Задача 6.** Дан острый угол$A$, вершина которого недоступна (находится за пределами чертежа). Постройте биссектрису данного угла [37, С. 125]. (8 класс)

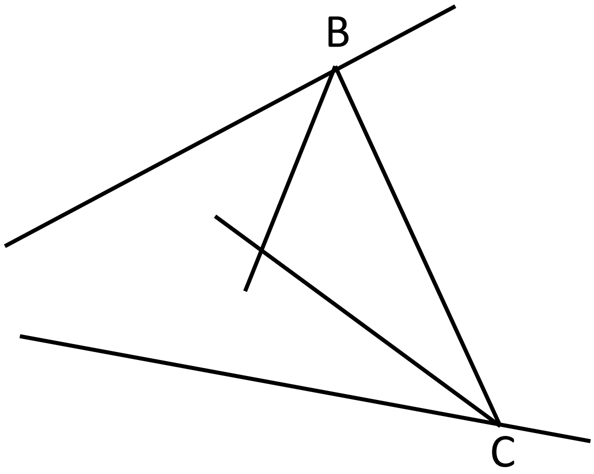


Рис. 17.

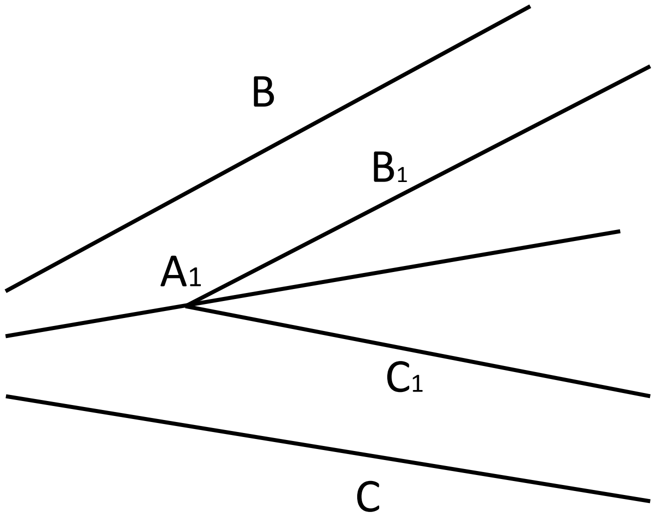


Рис. 18.

**1 способ:** опирается на тот факт, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Взяв две произвольные точки$B$ и $C$ на сторонах данного угла, получим треугольник $ABC$ (с одной недоступной вершиной), две биссектрисы которого можно построить. Точка пересечения этих биссектрис лежит на искомой биссектрисе. Аналогично можно найти и вторую точку (Рис. 17).

**2 способ:** Во 2 способе используется свойство углов с соответственно параллельными сторонами: проведя на равных расстояниях от сторон данного угла прямые$A_1B_1$ и $A_1C_1$, параллельные соответственно сторонам $AB$ и $AC$, так чтобы точка их пересечения лежала внутри угла, получим угол $B_1A_1C_1$, равный данному. Очевидно, что биссектриса угла$B_1A_1C_1$ лежит на искомой биссектрисе угла $BAC$ (Рис.18).

*Условие интересно* неочевидностью, на первый взгляд, решения. *Рисунок «красив*» своей неординарностью, то есть недоступностью вершины. «*Изюминка» в решении* заключается в том, что при построение чертежа, необходимо придумать способ построения биссектрисы для угла с удаленной вершиной. Задача *имеет как минимум два способа решения.*

**Задача 7.** Разделите крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три многоугольника, равных по площади и периметр (9 класс, [37, С. 86]).

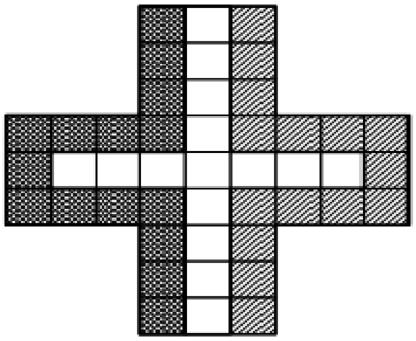

Рис. 19.

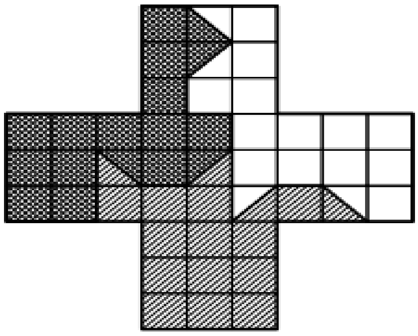

Рис. 20.

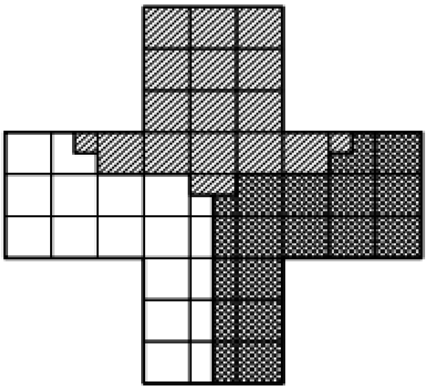

Рис. 21.

Изначальный *рисунок* симметричен, поэтому его можно считать *«красивым». Условие задачи пробуждает любопытство*: учащимся интересно, как же можно разделить данный крест? *Задача устанавливает неожиданный факт*: во втором и в третьем случае деление производится не только по периметру квадрата, но и внутри него. *Задача имеет несколько способов* разделения креста на многоугольники.

**Задача 8.** Доказать, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне (А.В. Погорелов, 8 класс, [58, С .227]).

**1 способ:**

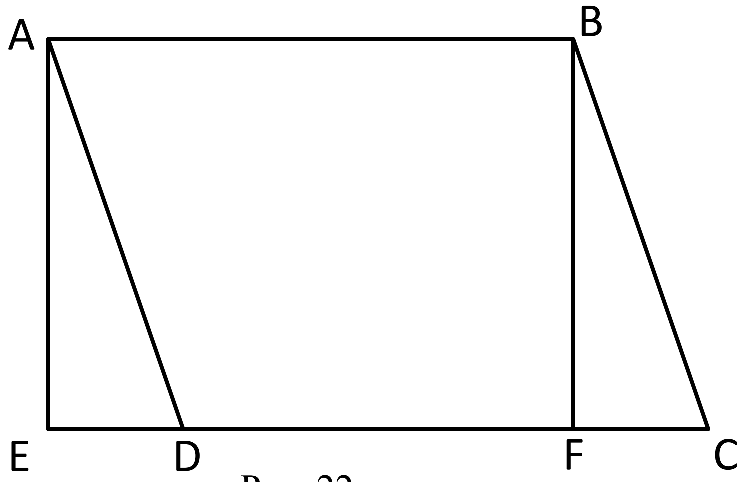

Рис. 22.

**Дано**:

ABCD - параллелограмм

**Доказать:**

$S_{ABCD} = AB \cdot BF$

**Доказательство.**

Опустим перпендикуляр AE из вершины$A$ прямую $CD$.

$S_{ABCE} = S_{ABCD} + S_{ADE}$ . Опустим перпендикуляр BF из вершины B на прямуюCD. Тогда $S_{ABCE} = S_{ABFE} + S_{BCF}$. Прямоугольные треугольники AED и BFC равны, а значит, имеют равные площади. Отсюда следует, что $S_{ABCD} = AB \cdot BF$.

**2 способ:**

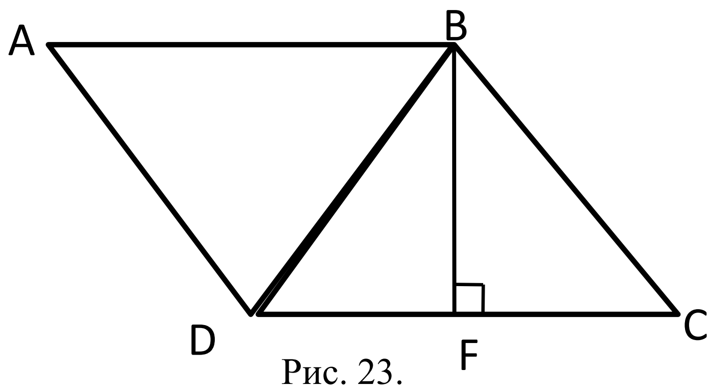

Рис. 23.

**Дано**:

ABCD - параллелограмм

**Доказать:**

$S_{ABCD} = AB \cdot BF$

**Доказательство.**

Проведем диагональ BD, которая разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 2S_{BCD}$ . $S_{BCD} = \frac{1}{2}DC * BH$ . Так как ABCD параллелограмм, то DC=AB. $S_{BCD} = \frac{1}{2}AB \cdot BH$.

*«Красота» чертежей* к задаче заключается в том, что они просты и понятны. Задача *решается как минимум двумя способами.* Для каждого способа решения, необходима своя *«изюминка»,* то есть свое дополнительное построение. *Устанавливается новый факт*: формула площади параллелограмма.

**Задача 9.** Доказать, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту (Л.С. Атанасян, 8 класс, [24, С. 123].

**1 способ:**

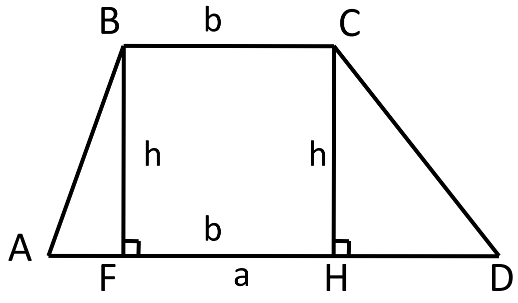


Рис. 24.

**Дано:**

*ABCD* – трапеция

*BC=b*, *AD=a*

*BF=CH=h*

**Доказать:**

$S_{ABCD} = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$

**Доказательство.**

$S_{ABCD} = S_{BCHF} + S_{ABF} + S_{CHD}$. Обозначим AF за x, тогда $S_{ABCD} = b \cdot h + \frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}h(a-b-x) =$

$=h\left(b + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}x\right) = h\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)h.$

**2 способ:**

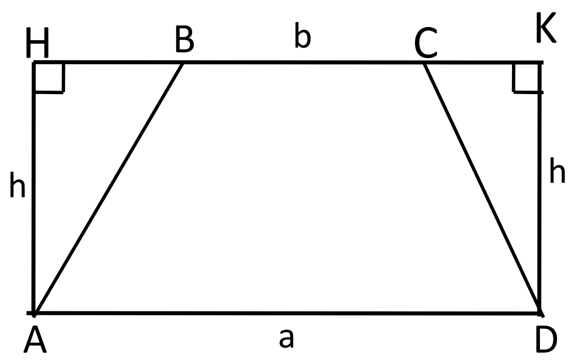


Рис. 25.

**Дано:**

ABCD – трапеция

BC=b, AD=a, h-высота

**Доказать:**

$S_{ABCD} = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$

**Доказательство.**

$S_{ABCD} = S_{AHKD} - S_{AHB} - S_{CKD}$.

Обозначим *HB* за *x*, тогда$S_{ABCD} = ah - \frac{1}{2}hx - \frac{1}{2}h(a-b-x) =$

$h\left(a - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}x\right) = h\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)h.$

*Чертежи* к задаче симметричны, а значит *«красивы»*. Задача *имеет несколько способов решения*. Для каждого способа решения нужно делать свое дополнительное построение, что является *«изюминкой» данной задачи*.

*Задача устанавливает новый факт*: площадь трапеции.

**Задача 10.** Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенуз (А.В. Погорелов, 8 класс, [58, С. 226].

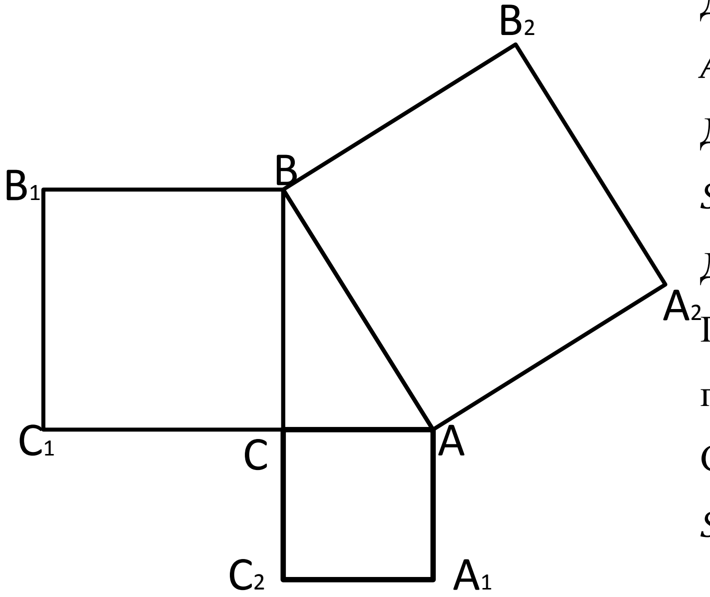


Рис. 26.

**Дано:**

*ABC* – прямоуг. треугольник

**Доказать:**

$S_{ABB_2A_2}=S_{BCC_1B_1}+S_{ACC_2A_1}$

**Доказательство.**

Примем катет $AC=b$, $BC=a$, а гипотенуза $AB=c$. Следовательно, $S_{ABB_2A_2}=c^2$, $S_{BCC_1B_1}=b^2$, $S_{ACC_2A_1}=a^2$. По теореме Пифагора получаем: $c^2=b^2+a^2$ и, следовательно, $S_{ABB_2A_2}=S_{BCC_1B_1}+S_{ACC_2A_1}$.

*Рисунок «красив»* необычностью. *Решение задачи наглядно и просто*. *Задача устанавливает интересный факт*: сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Исходя из всего вышесказанного, можно сделать вывод, что задачи 1 - 10 можно назвать «красивыми», а значит, при их решении будет осуществляться эстетическое воспитание учащихся.

Таким образом, математическая задача способствует формированию и развитию эстетического вкуса учеников в том случае, если она отвечает определенным требованиям: 1) условие задачи должно быть интересно школьнику, если задача геометрическая, то чертеж должен быть "красивым"; 2) задача должна устанавливать интересный факт, порой неожиданный; 3) в решение задачи обязательно нужно спрятать "изюминку", чтобы оно было наглядно и удивительно просто; 4) желательно, чтобы было несколько способов решения задачи.

## §5. Элективный курс «Математика и эстетика» как средство формирования эстетического вкуса учащихся в общеобразовательной школе

Согласно Концепции долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года[36]развитие системы общего образования предусматривает индивидуализацию, ориентацию на практические навыки и фундаментальные умения, развитие системы профессионального образования. Вместе с этим, модель общеобразовательного учреждения с профильным обучением на старшей ступени дает возможность разнообразных комбинаций учебных предметов, что и обеспечивает гибкую систему профильного обучения, которая включает такой тип учебных предметов, как элективные курсы. Элективные курсы являются обязательными для посещения по выбору учащихся и входят в состав профиля обучения; реализуются за счет школьного компонента учебного плана; некоторые из них призваны «поддерживать» изучение основных профильных предметов на заданном профильным стандартом уровне.

Мир вокруг нас бесконечно сложен, многообразен и прекрасен. Для того чтобы учащиеся могли воспринимать эту красоту, они должны быть знакомы с простейшими элементами красоты. Элективный курс «Математика и эстетика» оказывает непрерывное воздействие на эстетическое чувство, волю, эмоции, мораль и интеллект учащихся.

Для её реализации достаточно знаний и умений по математике, полученных в основной школе.

*Актуальность* предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1.Ликвидировать кажущееся отсутствие между математикой и эстетикой;

2. Показать учащимся связь математики с природой;

3.Доказать присутствие математики в реальной жизни.

*Педагогическая целесообразность* предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

-эстетическое воспитание является одним из важнейших звеньев в воспитании личности и моральных качеств человека;

-гармонично развитая личность, умеющая видеть прекрасное, сама будет стремиться создавать прекрасное;

-эстетически воспитанная личность будет созидательно пользоваться результатами чужих трудов;

*Цель и задачи программы элективного курса:*

- формирование у учащихся убеждения неразделимости между математикой, как наукой, искусством и красотой;

- развитие мыслительных, творческих и исследовательских способностей учащихся;

- воспитание желания создавать красоту посредством математических действий.

*Отличительной особенностью данного элективного курса является*то, что сухая, на первый взгляд, наука, несет в себе огромный эстетический потенциал и при правильной подаче материала может побудить личность обучающегося к творчеству.

*Новизна* программы состоит в том, что она объединяет в сознании учащихся такие отрасли как математика, естествознание, искусство.

Программа элективного курса рассчитана для учащихся 10 класса, 34 часа (1 ч. в неделю).

*Ожидаемые результаты и способы определения их результативности*

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- правильно употреблять новые термины;
- знать свойства золотого сечения;
- краткую историю и вклад ученых в создание прекрасного;
- усвоить взаимосвязь между математикой и искусством;
- уметь исследовать заданные им темы.

*Основными формами проведения итогов* реализации данной образовательной программы являются следующие:урок-лекция;урок-семинар;урок-конференция.

Данная программа может быть использована, как в общеобразовательных, так и в классах с углубленным или профильным изучением математики.

Учебно-тематическое планирование элективного курса (ЭК) «Математика и эстетика» представим ниже в виде Таблицы 1.

Приведем *содержания* каждого из разделов *данного* элективного курса.

*Раздел 1. Математика и искусство (6 ч)*

1.1. Эстетика и искусство.

*Основная цель* – донести до учащихся мысль о неразрывности искусства и эстетики.

Искусство – это отношение человека к действительности в его высшей форме. Даль разъяснял понятие искусства как знание, мастерство, требующее большого вкуса. В других языках искусство ассоциируется с широким кругом человеческих знаний, умений и практического опыта.

**Таблица 1**

**Учебно-тематическое планирование содержания ЭК «Математика и эстетика»**

| № | Содержание темы | Кол-во часов |
|---|---|---|
| **I** | **МАТЕМАТИКА И ИСКУССТВО** | **6** |
| 1 | Эстетика и искусство | 1 |
| 2 | Математика и живопись. Леонардо Да Винчи - творец | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| | прекрасного | |
| 3 | Математика и музыка | 2 |
| **II** | **СИММЕТРИЯ** | **11** |
| 1 | Симметрия на плоскости | 1 |
| 2 | Математика и архитектура. Симметрия в архитектуре | 2 |
| 3 | Симметрия живой природы | 2 |
| 4 | Симметрия неживой природы | 2 |
| 5 | Симметрия в пространстве | 2 |
| 6 | Правильные многогранники | 2 |
| **III** | **ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ – ГАРМОНИЧЕСКАЯ ПРОПОРЦИЯ** | **17** |
| 1 | Золотое сечение. История золотого сечения. | 2 |
| 2 | Свойства золотого сечения | 1 |
| 3 | Математика и скульптура. Золотое сечение в скульптуре | 1 |
| 4 | Математика и поэзия. | |
| 5 | Золотое сечение в природе. Принципы формообразования в природе. | 3 |
| 6 | Золотой треугольник | 2 |
| 7 | Золотой прямоугольник | 2 |
| 9 | Защита проектов | 3 |
| 10 | Обобщающий урок | 1 |

1.2. Связь математики с живописью. Влияние Леонардо Да Винчи на развитие живописи. Перспектива линейная, Возрождения, обратная перспектива живописи.

*Основная цель* – познакомиться с существованием теории живописной перспективы, теорией математической красоты и эстетики линий.

Еще Леонардо Да Винчи отметил, что «тончайшее исследование и изобретение, основанное на изучении математики, которое силою линий заставляло казаться отдаленным то, что близко, и большим то, что невелико». Эту теорию живописи поддерживали многие художники Италии, и именно в их работах зародилась теория перспективы в живописи. А в эпоху Возрождения появилась идея некой математической формулы красоты. Человек всегда стремился к прекрасному, поэтому его привлекает эстетика геометрической формы.

1.3. Связь математики и музыки. Пифагорейское учение о числе. Пифагорейская теория музыки.

*Основная цель* – познакомить учащихся с теорией музыки, с понятием гармонической пропорции.

Пифагор первым проявил математический интерес к музыке. Так, например, он просчитал, что отношение длины струн является непрерывной математической пропорцией. Колебания синусоиды в математики соответствуют гармоническому колебанию воздуха, что и является музыкальным звуком.

*Раздел 2. Симметрия (11 ч)*

2.1. Симметрия. Фундаментальные понятия симметрии.

*Основная цель* – вспомнить понятие симметрии.

Симметрия произошло от греческого слова, и означает «соразмерность». Но в современном мире в это слово вкладывают иное значение, такое как, преобразование плоскости. В математике в данное время существует несколько видов симметрии на плоскости: зеркальная симметрия, осевая симметрия, центральная симметрия, скользящая симметрия.

2.2. Математика и архитектура. Симметрия в архитектуре.

*Основная цель* – показать красоту симметрии в архитектуре.

Часто геометрию называют грамматикой архитектора. Все шедевры архитектуры созданы по законам геометрии. Например, пирамиду Хеопса называют «прямым трактатом по геометрии». Основная красота архитектуры в ее симметрии.

2.3. Симметрия живой природы.

*Основная цель* – показать взаимосвязь математики и живой природы.

Человеческому глазу всегда были приятны симметричные, красивые линии. В живой природе часто преобладает симметричный рисунок, например, крылья бабочки. Часто цветы тоже имеют симметрию, поэтому они так притягивают человеческий взор.

2.4. Симметрия неживой природы.

*Основная цель* - показать взаимосвязь математики и неживой природы.

Так же как и в живой природе, в неживой природе встречается симметрия. Если рассмотреть маленький кристалл замерзшей воды – снежинку в микроскоп, то мы заметим что все они обладают симметрией, независимо от разнообразия форм. Опять же, отметим, что и в неживой природе встречается «золотая спираль». Именно так закручивается ураган.

2.5. Симметрия в пространстве.

*Основная цель* – Вспомнить понятие симметрии в пространстве.

Мы уже говорили о симметрии на плоскости, теперь перейдем к понятию симметрии в пространстве.так же, как и на плоскости, симметрия в пространстве – преобразование пространства. К изученным видам симметрии, в данном пункте еще и добавится симметрия вращения.

2.6. Правильные многогранники. Виды правильных многогранников.

*Основная цель* - Познакомить учащихся с типом выпуклых многогранников – правильными многогранниками.

На протяжении всей жизни человека встречаются многогранники. Это и кубики, которыми играет ребенок, и пчелиные соты, и вирусы, и кристаллы. Но, при всем этом, ученые считают, что правильных многогранников вызывающе мало, но именно к ним человек проявляет повышенное внимание. Именно они являются наиболее красивыми.

*Раздел 3.Золотое сечение – Гармоническая пропорция (17 ч)*

3.1. Золотое сечение. История золотого сечения. Числа Фибоначчи.

*Основная цель* - ввести понятие золотого сечения. Изучить его свойства.

Золотое сечение встречалось еще в античной литературе. Точно не известно кто и когда ввел данное понятие, но многие связывают появление это термина именно с Леонардо Да Винчи. Так же отмечается, что самым первым, кто употребил данное понятие, был Мартин Ом в своей книге «Чистая элементарная математика». С золотым сечением так же очень тесто связанны числа Фибоначчи.

3.2. Свойства золотого сечения.

*Основная цель* – изучить некоторые свойства золотого сечения.

Свойства золотого сечения стали изучаться очень давно. Среди них были как и вымышленные, так и настоящие свойства. Здесь представлены свойства золотого сечения, наиболее часто встречающиеся.

3.3. Математика и скульптура. Золотое сечение в скульптуре.

*Основная цель* – установить взаимосвязь золотого сечения и скульптуры.

В скульптуре большую роль играет соблюдение пропорций. А соотношение пропорций человеческого тела связывают с "золотым сечением". Знатоки утверждают, что именно его соблюдение делает скульптуры эстетически притягательными.

3.4.Математика и поэзия. Омар Хайям. От поэзии к математике.

*Основная цель* - показать взаимосвязь математики и поэзии.

При построении своих произведений А. С. Пушкин использовал "золотое сечение" Именно в местах "золотого сечения " происходят самые кульминационные события. Во многих самых ярких произведениях прослеживается применение математических законов, что делает их более звучными, емкими.

В памяти предков Омар Хайям остался не только поэтом, но и замечательным математиком. Возможно, именно использование математических законов делает его поэзию такой яркой и запоминающейся.

3.5. Золотое сечение в природе. Принципы формообразования в природе

*Основная цель* – установить связь между золотым сечением и живой природой.

Из исследований следует, что растения тоже подчиняются золотому сечению. Например, расположение листьев на распространенных комнатных растениях, можно сделать следующие выводы: между каждыми двумя парами листьев (А и С) третья расположена в месте золотого сечения (точка В)». То есть и здесь есть подчинение " божественной пропорции".

Природа имеет тенденцию к спиральности. Такую спираль называют «золотой». Именно так плетет паутину паук. На многих деревьях листья тоже располагаются спиралевидно, так же расположены цветы и семена подсолнечника, чешуйки ананаса. Гете называл спираль «кривой жизни».

3.7. Золотой треугольник.

*Основная цель* – познакомить учащихся с понятием золотой треугольник.

3.8. Золотой прямоугольник.

*Основная цель* – познакомить учащихся с понятием золотой прямоугольник.

*Список литературы для учителя:*[1; 5; 6; 8-10; 13-16; 19; 20; 22; 23; 26; 28; 30; 33; 34; 36; 39; 41-43; 46; 53; 54; 57; 61; 66- 70; 77].

*Список литературы для учащихся:*[1; 8; 9; 14; 15; 19; 22; 26; 28; 38-41; 46; 53; 56; 57; 59; 60; 61; 66; 67; 78].

Отметим, что в начале изучения программы элективного курса учащимся выдаются ***темы исследовательских работ***; защита проектов по данным темам проходит в рамках учебно-исследовательской конференции школьников. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся.

Предлагаемые ниже темы исследовательских работ могут быть использованы учащимися при выполнении индивидуальных или групповых проектов или в качестве индивидуальных научно-исследовательских работ.

**Тема 1. Золотое сечение в окружающей среде.**

*План работы:*

1. Понятие золотого сечения.
2. Геометрическое определение золотого сечения.
3. Исследование присутствия золотого сечения в окружающей среде.

*Рекомендуемая литература:*

1. Азевич А. Двадцать уроков гармонии - М.: Школа-Пресс, 1998. – 160 с.
2. Васютинский Н. А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990. – 238 с.

3. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения \\ Перевод с английского Данилова Ю.А., под редакцией Смородинского Я.А. - Москва: Мир, 1971 – 511 с.

4. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979. – 332 с.

**Тема 2. Последовательность Фибоначчи и ее использование.**

*План работы:*

1. История возникновения.
2. Определение последовательности Фибоначчи.
3. Использование последовательности Фибоначчи.

*Рекомендуемая литература:*

1. Бендукидзе А. Д. Золотое сечение// Квант. - 1973. - №8. – С. 22-27.
2. Васютинский Н. А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990. – 238 с.
3. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1964. – 420 с.
4. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979. – 332 с.
5. Маркушевич А. И. Возрастные последовательности. - М.: Наука, 1975. – 47 с.

**Тема 3. Свойства правильных многогранников.**

*План работы:*

1. Понятие правильных многогранников.
2. Свойства правильных многогранников.

*Рекомендованная литература:*

1. Березин В. Н. Правильные многогранники/ /Квант. - 1973. - №5. - С. 26-28.
2. Литвиненко В. Н. Многогранники. Задачи и решения:- М.: «Вита-Пресс», 1995. – 192 с.
3. Матиясевич Ю. Модели многогранников// Квант. - 1978. - №1. - С. 8-17.

4. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Что такое «Полуправильный многогранник» // Учебно-методическая газета «Математика».- 2007 . - №16 - С. 23-26.

5. Смирнова И. М. В мире многогранников: Кн. Для учащихся.- М.: Просвещение, 1995. - 143 с.

**Тема 4. Сечения правильных многогранников.**

*План работы:*

1. История начертательной геометрии.
2. Методы построения сечений.
3. Задачи на построение.

*Рекомендуемая литература:*

1. Вагутен В. Н. Правильные многогранники и повороты//Квант. 1989. - №10 .- С.46-51.
2. Демьянов В. П. Геометрия и Марсельеза. М.: Познание, 1986.- с.25.
3. Монж Г. Начертательная геометрия./ Комментарии и редакция Д.И. Каргина. - М.: Изд-во АН СССР, 1974 .- 291 с.
4. Начертательная геометрия. //Под ред. Н.Ф. Четверухина.- М.: Высшая школа, 1963. – 420 с.
5. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2008. – 223 с.
6. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2008. – 256 с.
7. Потоскуев Е.В. Изображение пространственных фигур на плоскости. Построение сечений многогранников. Учебное пособие для студентов физико-математического факультета педвуза. — Тольятти: ТГУ, 2004.

**Тема 5. Эти удивительные орнаменты и паркеты.**

*План работы:*

1. Линейные орнаменты и паркеты.

2. Построение орнаментов и паркетов.

3. Уравнение орнаментов.

*Рекомендуемая литература:*

1. Болтянский В. Г. Паркет из четырехугольников// Квант. - 1989.- №11.- С. 56-60.

2. Бржозовский М. И. Уравнения орнаментов// Квант. – 1972 – №7 – С.14–19.

3. Земляков А. Орнаменты.// Квант. – 1973. – №3 – С. 20-27.

4. Несколько орнаментов по мотивам Эшера// Квант. – 1991. – №2. – С. 45.

5. Колмогоров А. Н. Паркеты из правильных многоугольников// Квант.- 1970. - №3. - С. 24-27.

**Тема 6. Пифагор и его школа. Учения Пифагорейцев.**

*План работы:*

1. Пифагор.

2. Школа пифагорейцев.

3. Учение о пропорциях.

*Рекомендуемая литература:*

1. Волошинов А.В. Математика и искусство. – М.: Просвещение, 2000. – 335 с.

2. Жмудь Л.Я. Пифагор и его школа, - Наука, 1990. – 193 с.

3. Лосев А. Ф. Миф, число, сущность. - М.: 1994. - 920 с.

4. Перепелицин М.Л. Философский камень, - 1990. – 208 с.

5. Шуре Э. ВеликиеПосвещенные, 1 том, перевод Е. Писаревой. - Калуга: 1914. – 174 с.

Таким образом, эстетическое воспитание учащихся может осуществляться не только в рамках уроков математики, а также и вне их, например, входе специально разработанных элективных курсов.

## §6. Технология урока одной задачи как одна из форм организации обучения математике по эстетическому воспитанию учащихся общеобразовательной школы на примере темы « Тригонометрические уравнения»

*6.1. Анализ программы и школьных учебников.*

При проведении *методического анализа темы* выделеные следующие *базовые знания:*

- понятие арккосинуса, общий вывод о решении уравнения $cost = a$;
- понятие арксинуса, общий вывод о решении уравнения $sint = a$;
- понятие арктангенса, общий вывод о решении уравнения $tgx = a$;
- понятие арккотангенса, общий вывод о решении уравнения $ctgx = a$;
- формулы приведения;
- понятие тригонометрических уравнений;
- методы решений тригонометрических уравнений;
- понятие однородных тригонометрических уравнений;
- алгоритм решения однородного уравнения второй степени.

Нестандартные методы решения тригонометрических уравнений являются *рассматриваемыми сведениями* данной темы.

Содержание теоретического материала темы «Тригонометрические уравнения» по разным учебникам алгебры и начал анализа для учащихся 10-х классов представим ниже в виде Таблицы 2.

Как видно из Таблицы 2, в учебнике Г.К. Муравина [52] наиболее полно и доступно изложен материал по теме «Тригонометрические уравнения». В нем даются не только самые основные методы решения тригонометрических уравнений, но и дополнительно *метод введения вспомогательного угла.*

Основным учебником алгебры и начал анализа для математического профиля выбран ***учебник***Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [52].

Рассматриваемая в данном проекте тема относится к 4 главе «Тригонометрические функции и их свойства». Тема вводится после параграфа §25 «Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование», в котором рассматривается *формула перехода от суммы косинусов к их произведению*.

Таблица 2

| ***Автор*** | ***Определение тригонометрического уравнения*** | ***Виды тригонометрических уравнений*** | ***Основные методы решений*** |
|---|---|---|---|
| А.Г. Мордкович [51] | Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. | - простейшие тригонометрические уравнения;<br>- однородные тригонометрические уравнения первой степени;<br>- однородные тригонометрические уравнения второй степени | - метод введения новой переменной;<br>- метод разложения на множители;<br>- метод решения однородных тригонометрических уравнений |
| Ш.А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. [3] | Не приводится | - уравнения, сводящиеся к квадратным;<br>- уравнения $a sinx + b cosx = c$;<br>- уравнения, решаемые разложением левой части на множители. | - метод решения уравнений, сводящихся к квадратным;<br>- метод решения уравнений вида $a sinx + b cosx = c$;<br>- метод разложения левой части на множители. |
| Г.К. Муравин, О. В. Муравина [55] | Не приводится | - уравнения, сводящиеся к квадратным;<br>- однородные тригонометрические уравнения первой степени;<br>- однородные тригонометрические уравнения второй степени; | - метод введения новой переменной;<br>- метод разложения левой части на множители;<br>- метод решения однородного тригонометрического уравнения первой степени;<br>- метод решения однородного тригонометрического уравнения второй степени;<br>- метод введения вспомогательного угла. |

В авторской программе [51] отмечается, что в результате изучения темы учащиеся должны:

– решать *тригонометрические уравнения* изученных видов;

– доказывать, что *уравнения не имеют корней*;

– находить *корни на промежутке*;

– находить *наибольший и наименьший корень*;

– решать *уравнение с параметром* аналитически и графически с применением компьютерных программ.

*Для профильного уровня* на тему «Решение тригонометрических уравнений» по данной программе отводится 6 часов, в течение которых рассматриваются *виды тригонометрических уравнений* и *способы их решения*.

Таким образом, выбор учебника Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [52] обоснован *следующими причинами*:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждений;

– в учебнике наиболее полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Тригонометрические уравнения»;

– учебник удовлетворяет требованиям, предъявляемым федеральными государственными стандартами второго поколения к общему образованию.

### *6.2. Проектирование темы «Тригонометрические уравнения» в рамках технологии урока одной задачи.*

В процессе обучения математике задачи выполняют разные функции. Велика роль задач в формировании умений и практических навыков у учащихся. Также они служат средством усвоения понятий и методов.

Г.И. Ковалева в книге [31] говорит, что в педагогической и методической литературе общепринятым является мнение, что *решение задач разными способами* является эффективным педагогическим *приемом*, поскольку способствует повышению уровня математических знаний и умений учащихся, развитию их исследовательских способностей, пробуждает творческую фантазию и интерес к изучению математики.

Однако, если данный прием применять бессистемно и неорганизованно, решая каждый раз, когда это возможно, задачи разными способами, то это может привести и к обратному результату: потере у учащихся интереса к изучаемому, неосознанности выполняемых ими действий, бесполезной трате времени. Перед тем как предложить учащимся какую-либо задачу, учитель должен досконально изучить ее сам: установить возможные связи с другими задачами, отыскать различные способы решения и выявить целесообразность рассмотрения этих способов для конкретной педагогической ситуации.

Автор выделяет основные *цели решения одной задачи разными способами* или методами:

1. Выявление межпредметных связей: алгебра – геометрия; тригонометрия – геометрия и др.

2. Обобщение и систематизация полученных знаний, установление взаимосвязей между различными теоретическими фактами.

3. Выявление сущности определенных методов, их отличительных черт, достоинств и недостатков при применении к конкретным классам задач.

4. Вооружение учащихся различными методами решения задач с целью обретения ими уверенности в своих силах, возможности в случае затруднения перейти к другому приему решения.

5. Демонстрация рациональности, эффективности и изящества одних и нерациональности и порою ошибочности других способов.

6. Показ учащимся одного из приемов самоконтроля.

Г.И. Саранцев отмечает, что для организации урока одной задачи подходит не любая задача, а только такая, решение которой может быть выполнено различными способами (векторным, методом геометрических преобразований, алгебраическим, традиционно геометрическим и т.д.).

Опорой *в поисках способов решения* задачи должны стать *различные эвристики*. Задачная ситуация должна позволять на ее основе широко использовать методы научного познания для составления новых задач [64, С. 195].

Автор в [65] выделяет *задачи*, при решении которых эффективно использовать технологию урока одной задачи.

Отметим, что в рамках данного урока можно эффективно реализовать *проблемный подход* в обучении математике.

На основе технологии урока одной задачи было разработано три урока по теме «Тригонометрические уравнения»

**Урок 1.***Урок обобщения и систематизации знаний.*

***Цель урока:*** обобщить, систематизировать и сформировать прочные знания и умения по данной теме, используя задания разного уровня сложности; организовать деятельность обучающихся по распознаванию и решению ключевых задач.

***Задачи:***

- проверить степень усвоения темы; умение распознавать и применять знания всех приемов решения тригонометрических уравнений.

- развивать умение объяснять, аргументировать свое решение, убедительно и обосновано доказывать свою точку зрения; умение строить аналогии, обобщать и систематизировать;

- воспитывать ответственность и трудолюбие; коммуникативность и толерантность; уважительное отношение друг к другу.

***Структура урока:***

1. Организационный момент – 2 мин.
2. Повторение материала - 7 мин.
3. Закрепление пройденного материала (работа у доски) – 33 мин.
4. Домашнее задание – 1 мин.
5. Итог урока – 2 мин.

## Ход урока

**1. Организационный момент**

Сообщение темы, цели и плана урока.

**2. Повторение материала**

*Вопросы к классу:*

1. Какие уравнения называют тригонометрическими?

*Тригонометрическими уравнениями* обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций.

2. Какие тригонометрические уравнения называются простейшими?

*Простейшие тригонометрические уравнения* – это уравнения вида: $\cos\varphi = a, \sin\varphi = a, tg\ \varphi = a, ctg\ \varphi = a.$

3. Каковы формулы для решения простейших тригонометрических уравнения в общем виде?

$\sin\varphi = a, |a| \leq 1, \varphi = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n\epsilon Z;$

$\cos\varphi = a, \qquad |a| \leq 1, \varphi = \pm \arccos a + 2\pi n, n\epsilon Z;$

$tg\ \varphi = a, \varphi = arctg\ a + \pi n, n\epsilon Z;$

$ctg\varphi = a, \varphi = \ arcctga + \pi n, n\epsilon Z.$

4. Какие *частные случаи* решения тригонометрических уравнений вы знаете?

$\sin\varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z;$

$\sin\varphi = -1, \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z;$

$\sin\varphi = 0, \varphi = \pi n, n\epsilon Z;$

$\cos\varphi = 1, \varphi = 2\pi n, n\epsilon Z;$

$\cos\varphi = -1, \varphi = \pi(2n+1), n\epsilon Z;$

$\cos\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z.$

**3. Закрепление пройденного материала (работа у доски)**

На примерах, вспомним, какие основные *методы решения* уравнений нам известны.

**Задание 1**. Решить уравнение: $2cos^2x - 3\cos x + 1 = 0$[42, С. 383].

- Какой метод решения тригонометрического уравнения будем использовать?

- *Метод введения новой переменной*.

Решение:

$2cos^2x - 3\cos x + 1 = 0;$

$\cos x = t, |t| \leq 1;$

$2t^2 - 3t + 1 = 0;$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1;$

$t_1 = \dfrac{3+1}{4} = 1, t_2 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2};$

$\cos x = 1, x_1 = 2\pi n, n\epsilon Z;$

$\cos x = \dfrac{1}{2}, x_2 = \pm \arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi k, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z;$

Ответ: $x_1 = 2\pi n, x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, k, n\epsilon Z;$

**Задание 2.** Решить уравнение: $\cos x + 3\sin x\cos x = 0$ [12, С. 17].

- Какой метод решения тригонометрического уравнения будем использовать?

- *Метод разложения левой части на множители*.

$\cos x + 3\sin x\cos x = 0;$

$\cos x(1 + 3\sin x) = 0;$

$\cos x = 0$ или $1 + 3\sin x = 0;$

$x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z,$ $3\sin x = -1;$

$\sin x = -\frac{1}{3};$

$x_2 = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, k\epsilon Z;$

$x_2 = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z.$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k, n\epsilon Z.$

**Задание 3**. Решить уравнение: $\sin x - 2\cos x = 0$.

- Какой метод решения тригонометрического уравнения будем использовать?

- *Метод решения однородного уравнения первой степени*.

$\sin x - 2\cos x = 0$. Разделим обе части уравнения $\cos x \neq 0$.

$\frac{\sin x}{\cos x} - 2\frac{\cos x}{\cos x} = 0;$

$tg\ x - 2 = 0;$

$tg\ x = 2;$

$x = arctg2 + \pi n, n\epsilon Z.$

Ответ:$x = arctg2 + \pi n, n\epsilon Z.$

**Задание 4.** Решить уравнение: $2cos^2x + 5\sin x - 4 = 0.$

- Какой метод решения тригонометрического уравнения будем использовать?

- *Метод введения новой переменной*, но для начала, преобразуем выражение.

$2cos^2x + 5\sin x - 4 = 0\,;$

Представим $cos^2x = 1 - \sin x^2\,;$

$2(1 - \sin x^2) + 5\sin x - 4 = 0;$

$2 - 2\sin x^2 + 5\sin x - 4 = 0;$

$-2\sin x^2 + 5\sin x - 2 = 0;$

$\sin x = t\,, |t| \leq 1;$

$-2t^2 + 5t - 2 = 0;$

$D = 5^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-2) = 9$

$t_1 = -1, \qquad t_2 = \frac{7}{2}$(не удовлетворяет условию);

$\sin x = -1\,;$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

**Задание 5.** Решить уравнение: $5sin^2x - 3\sin x\cos x - 2\,cos^2x - 3 = 0.$

$5sin^2x - 3\sin x\cos x - 2\,cos^2x - 3 = 0;$

$5sin^2x - 3\sin x\cos x - 2\,cos^2x - 3(sin^2x + cos^2x) = 0;$

$5sin^2x - 3\sin x\cos x - 2\,cos^2x - 3sin^2x - 3cos^2x = 0;$

$2sin^2x - 3\sin x\cos x - 5cos^2x = 0;$

- Какой метод решения тригонометрического уравнения будем использовать?

- *Метод решения  однородного уравнения второй степени*.

Разделим обе части уравнения на $cos^2x \neq 0$;

$$2\frac{sin^2x}{cos^2x} - 3\frac{\sin x \cos x}{cos^2x} - 5\frac{cos^2x}{cos^2x} = 0;$$

$2tg^2x - 3tgx - 5 = 0;$

$tgx = t;$

$2t^2 - 3t - 5 = 0;$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49;$

$$t_1 = \frac{3+7}{4} = 2{,}5, \quad t_2 = \frac{3-7}{4} = -1;$$

$tgx = 2{,}5, x_1 = arctg2{,}5 + \pi n, n\epsilon Z;$

$$tgx = -1, x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z;$$

Ответ:$x_1 = arctg2{,}5 + \pi n, x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k, n\epsilon Z.$

**Задание 6.** Решить уравнение *методом введения вспомогательного угла* (метод Ибн-Юниса) $2\sin x - 3\cos x = 0{,}5$ [27, С. 57].

$2\sin x - 3\cos x = 0{,}5;$

$$2\sin x - 3\cos x = \frac{1}{2};$$

Разделим на $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13};$

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos x = \frac{1}{2\sqrt{13}};$$

Так как $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1$, то примем $\frac{2}{\sqrt{13}} = \cos\varphi, \frac{3}{\sqrt{13}} = \sin\varphi;$

Теперь уравнение пример вид:

$$\cos\varphi \sin x - \sin\varphi \cos x = \frac{1}{2\sqrt{13}};$$

$$\sin(x - \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{13}};$$

$x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2\sqrt{13}} + \varphi + \pi k, k\epsilon Z,$ где$\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}.$

Ответ:$x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2\sqrt{13}} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} + \pi k, k\epsilon Z.$

**Задание 7**. Решить уравнение $2\sin 2x + 3tgx = 5$ с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

При решении не следует забывать, что при использовании этих формул область определения уравнения сужается на множество $\frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$ . Поэтому, выбрав данный способ решения, следует проверить, не являются ли числа из множества$\frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$, корнями уравнения.

$2\sin 2x + 3tgx = 5;$

Областью определения уравнения являются все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

$\frac{4tgx}{1+tg^2x} + 3tgx - 5 = 0;$
$3tg^3x - 5tg^2x + 7tgx - 5 = 0;$
$tgx = t;$
$3t^3 - 5t^2 + 7t - 5 = 0;$
$(t-1)(3t^2 - 2t + 5) = 0;$
$t - 1 = 0$ или $3t^2 - 2t + 5 = 0$
$t = 1$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -54$
$tgx = 1;$ Уравнение не имеет действительных решений.

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$

Заметим, что в данном случае нет надобности проверять, не являются ли числа из множества$\frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$, корнями уравнения, поскольку эти числа не входят в область определения уравнения.

Ответ:$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

**4. Домашнее задание**

Решить уравнения

а) $2cos^2x + 3cosx + 1 = 0$; б) $(\sin x - 0{,}5)(sinx + 1) = 0$;

в) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; г) $3\sin x = 2cos^2 x$;

д) $\sin 2x + tgx = 0$.

**5. Итог урока**

Какие методы решения тригонометрических уравнений мы вспомнили?

-метод замены переменной;

- метод разложения левой части на множители;

- метод использования универсальной тригонометрической постановки;

-метод введения вспомогательного угла;

-метод решения однородных уравнений.

Всем спасибо за урок. До встречи.

## Урок 2. *Комбинированный урок* (*урок одной задачи*).

***Цель урока:*** показать нестандартные методы решения тригонометрических уравнений.

***Задачи:***

- проверить степень усвоения темы; умение применять знание всех приемов решения тригонометрических уравнений;
- развивать умение объяснять, аргументировать свое решение, убедительно и обосновано доказывать свою точку зрения; умение строить аналогии, обобщать и систематизировать;
- воспитывать ответственность и трудолюбие; коммуникативность и толерантность; уважительное отношение друг к другу.

**Структура урока:**

1. Организационный момент – 2 мин.
2. Работа в группах – 40 мин.
3. Домашнее задание – 1 мин.
4. Итог урока – 2 мин.

### Ход урока

**1. Организационный момент**

Сообщение темы, цели и плана урока.

**2. Работа в группах**

Класс делится на 7 групп (примерно по 3 человека) и получает задания на карточках, обсуждает и решает уравнение $\sin x + \cos x = 1$ заданным способом. На некоторых карточках даны указания по тому способу решения, который предлагает учитель. Далее один представитель группы выносит свой метод решения на доску, остальные учащиеся внимательно слушают объяснения, затем оформляют решение в тетрадь. Учащиеся учатся объяснять своё решение грамотным математическим языком; учатся работать с аудиторией.

**1 группа. Введение вспомогательного угла ( метод Ибн-Юниса).**

$\sin x + \cos x = 1;$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Получим:

$\frac{1}{\sqrt{2}} sinx + \frac{1}{\sqrt{2}} cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}.;$

*Обозначим* $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos x,$

Зная, что $cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, запишем наше уравнение в другом виде:

$cos\frac{\pi}{4} sinx + sin\frac{\pi}{4} cosx = \frac{\sqrt{2}}{2};$

$\sin (x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n$, $n \in Z$, т.е.

$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

*Ответ*: $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

**2 группа. Введение выражений для $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$ по формулам: $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$. (универсальная тригонометрическая подстановка).**

При обращении к $tg\frac{x}{2}$, нужно не забыть, что $cos\frac{x}{2} = 0$, то есть

$$x \neq \pi + 2\pi n, n\epsilon Z.$$

$\sin x + \cos x = 1;$

$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1;$

Отсюда $2tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2}$;

$2tg\frac{x}{2} - 2tg^2\frac{x}{2} = 0;$

$2tg\frac{x}{2}\left(1 - tg\frac{x}{2}\right) = 0;$

$tg\frac{x}{2} = 0$ или $\quad 1 - tg\frac{x}{2}$=0;

$\frac{x}{2} = \pi n, n\epsilon Z, tg\frac{x}{2}$=1;

$x_1 = 2\pi n, n\epsilon Z, \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z;$

$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Ответ:$x_1 = 2\pi n, n\epsilon Z, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

**3 группа. Сведение к одному уравнению.**

*Указание:* выразить $\sin x, \cos x$ и 1 через половинный аргумент, пользуясь формулами $\sin 2x = 2\sin x cos\, x$, $\cos 2x = cos^2x - sin^2x$, $cos^2x + sin^2x$=1.

$\sin x + \cos x = 1;$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2};$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2sin^2\frac{x}{2} = 0;$

Разделим все на $2cos^2\frac{x}{2} \neq 0$;

$2tg\frac{x}{2} - 2tg^2\frac{x}{2} = 0;$

$2tg\frac{x}{2}\left(1 - tg\frac{x}{2}\right) = 0;$

$tg\frac{x}{2} = 0$ или $\quad 1 - tg\frac{x}{2}$=0;

$\frac{x}{2} = \pi n, n\epsilon Z, tg\frac{x}{2}$=1;

$x_1 = 2\pi n, n\epsilon Z, \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z;$

$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Ответ:$x_1 = 2\pi n, n\epsilon Z, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

## 4 группа. Преобразование суммы в произведение.

*Указание:* выразить $cosx$ через $sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

$\sin x+\cos x=1;$

$\sin x+sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1;$

Зная, что $\sin x+siny=2\sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$ запишем:

$2sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=1;$

$2\sin\frac{\pi}{4}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1;$

$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1;$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};$

$x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi n, n\epsilon Z;$

$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\epsilon Z;$

$x_1=2\pi n, n\epsilon Z$

$x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z;$

Ответ:$x_1=2\pi n, x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k, n, k\epsilon Z.$

## 5 группа. Применение формулы $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

*Указание:* заменить $\sin x+\cos x$ на $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\sqrt{2}\sin\left(\mathrm{x}+\frac{\pi}{4}\right)=1;$

Разделим все на $\sqrt{2}$.

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};$

$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi n, n\epsilon Z;$

$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z;$

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon Z.$$

Ответ:$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon Z.$

### 6 группа. Возведение обоих частей уравнения в квадрат.

*Указание*: возвести обе части уравнения в квадрат. Не забыть про отбор решений.

$\sin x + \cos x = 1;$

$(\sin x + \cos x)^2 = 1;$

$sin^2 x + 2\sin x cosx + cos^2 x = 1;$

$2\sin x cosx + 1 = 1;$

$2\sin x cosx = 0;$

$\sin x = 0$ или $cosx = 0;$

$x_1 = \pi n, n \epsilon Z, x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \epsilon Z.$

Данный способ требует отбора решений.

Из серии чисел $x_1 = \pi n$ решением будет серия $x_1 = 2\pi n, n \epsilon Z.$

Из серии чисел $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k,$. решением будет серия $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \epsilon Z.$

Ответ:$x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \epsilon Z.$

### 7 группа. Графический способ.

*Указание:* построить график $\sin x = 1 - \cos x.$

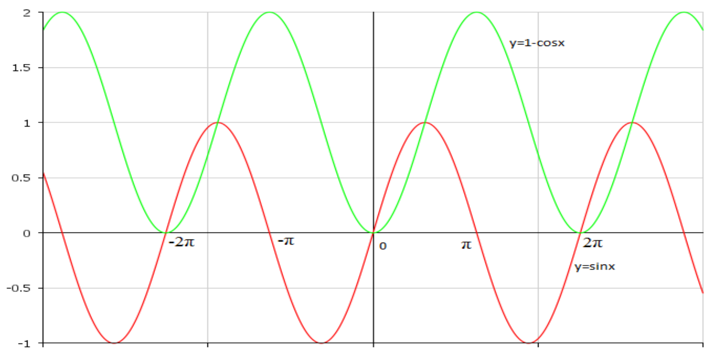


Рис.27.

Ответ:$x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \epsilon Z.$

**3. Домашнее задание.** Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 2$ несколькими способами (4-5 любых).

**4. Итог урока.** Какие новые способы решения тригонометрических уравнений вы узнали?

- возведение обеих частей уравнения в квадрат;
- графический способ;
- с помощью применения формулы $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
- с помощью преобразования суммы в произведение.

Всем спасибо за урок. До встречи.

## **Урок 3.** *Контрольная работа.*

***Цель урока:*** проверить знания и умения учащихся по теме.

***Задачи:***

- проверить степень усвоения темы; умение применять знания всех приемов решения тригонометрических уравнений.

- воспитывать ответственность и трудолюбие; коммуникативность и толерантность; уважительное отношение друг к другу.

**Структура урока:**

1. Организационный момент – 2 мин.
2. Контрольная работа – 41 мин.
3. Итог урока – 2 мин.

### Ход урока

**1. Организационный момент**

Сообщение темы, цели и плана урока.

**2. Контрольная работа**

*1 вариант*

Решить уравнения известными способами:

*1.* $2sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$;

*2.* $\sin 2x + \cos 2x = 0$;

*3.* $3\sin x - 4\cos x = 5$;

*2 вариант*

Решить уравнения известными способами:

*1.* $2cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$;

*2.* $2\sin x - 3\cos x = 0$;

*3.* $5\sin x - 4\cos x = 4$;

| | |
|---|---|
| $4.\ \sin 3x + \sin x = \sin 2x;$ | $4.\ \cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0;$ |
| $5. sin^2 x + sin^2 2x + sin^2 3x = 1{,}5;$ | $5. 2sin^2 x + \cos 4x - 2 = 0;$ |
| $6. \sin 2x + tgx = 2.$ | $6.\ \sin 2x + tgx = 0.$ |

**3. Итог урока**

Ответы на контрольную работу:

*1 вариант:*

$1. x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2kn, n\epsilon Z.$

$2.\ x = arctg\frac{3}{2} + k\pi, k\epsilon Z.$

$3.\ x = 2arctg3 + 2\pi n, n\epsilon Z.$

$4.\ x_1 = \frac{\pi n}{2}, x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k\epsilon Z$

$5. x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n, k\epsilon Z.$

$6.\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$

*2 вариант:*

$1.\ x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{6}, x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + n\frac{\pi}{3}, k, n\epsilon Z.$

$2.\ x = (4k-1)\frac{\pi}{8}, k\epsilon Z.$

$3.\ x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, x_2 = 2arctg0{,}8 + 2\pi n, n, k\epsilon Z.$

$4.\ x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, x_2 = \frac{\pi k}{5}, k, n\epsilon Z.$

$5.\ x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi n, n\epsilon Z.$

$6.\ x = \pi k, k\epsilon Z.$

**Критерии оценивания.**

За каждое верно выполненное задание дается по 1 баллу.

**Шкала перевода суммы баллов за выполнение контрольной работы в пятибальную оценку**

| **Оценка по 5-ти бальной шкале** | **«2»** | **«3»** | **«4»** | **«5»** |
|---|---|---|---|---|
| **Количество баллов** | **0-3** | **4** | **5** | **6** |

Таким образом, эстетическое воспитание учащихся может осуществляться посредством применения технологии урока одной задачи на примере темы «Тригонометрические уравнения».

## ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1. Установлено, что математическая задача будет способствовать формированию и развитию эстетического вкуса учеников в том случае, если она отвечает определенным требованиям:

1) условие задачи должно быть интересно школьнику, если задача геометрическая, то чертеж должен быть "красивым";

2) задача должна устанавливать интересный факт, порой неожиданный;

3) в решение задачи обязательно нужно спрятать "изюминку", чтобы оно было наглядно и удивительно просто;

4) желательно, чтобы было несколько способов решения задачи.

2. Выявлены методические особенности формирования эстетического вкуса у учащихся при решении математических задач в общеобразовательной школе:

1) поощрение поиска самостоятельных путей и приемов рационального решения;

2) демонстрация учителем оригинальных путей решения доступных для учащихся задач;

3) применять прием достраивания фигуры, использовать красоту симметрии, которая, как известно, выражает эстетическую категорию порядка.

3. Разработаны методические материалы:

1) элективный курс «Математика и эстетика», способствующий формированию эстетического вкуса у учащихся общеобразовательной школы;

2) технология урока одной задачи как одна из форм организации обучения математике в общеобразовательной школе, направленная на

формирование эстетического вкуса учащихся на примере темы «Тригонометрические уравнения».

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, полученные в работе, позволяют сделать следующие выводы:

1. Изучено *понятие эстетического воспитания* и его задачи при обучении математике. Установлено, что под эстетическим воспитанием учащихся в процессе обучения математике мы понимаем *совокупность еевозможностей и ресурсов*, которые могут быть реализованы как средства эстетического развития личности.

2. Рассмотрено *понятие красоты* в математике. Изучив различные подходы к понятию красоты в математике, выявлено, что красота в математике выражается в: гармонии чисел и форм; геометрической выразительности; стройности математических формул; изяществе математических доказательств; порядке; богатстве приложений; универсальности математических методов.

3. Раскрыты *уровни красоты математического объекта*. Определено, что существует три уровня привлекательности математического объекта, где предъявляемый объект: а) привлекателен тем, что совпадает с образом, сформированным у школьников; б) не полностью соответствует своему образу, но может быть легко до него дополнен; в) предполагает рассмотрение его внутренней структуры, то есть привлекательность заключена в поиске различных способов решения задачи, выделение среди них наиболее оригинального.

4. Выделены требования, предъявляемые к математической задаче, способствующей формированию эстетического вкуса у учащихся в общеобразовательной школе: а) условие задачи должно быть интересно школьнику, если задача геометрическая, то чертеж должен быть "красивым"; б) задача должна устанавливать интересный факт, порой неожиданный; в) в решение задачи обязательно нужно спрятать "изюминку", чтобы оно было наглядно и удивительно просто; г) желательно, чтобы было несколько способов решения задачи.

5. Выявлены методические особенности формирования эстетического вкуса у учащихся при решении математических задач в общеобразовательной школе: поощрение поиска самостоятельных путей и приемов рационального решения;демонстрация учителем оригинальных путей решения доступных для учащихся задач;применение приемов достраивания фигуры, использование красоты симметрии при решении некоторых задач, которая, выражает эстетическую категорию порядка.

6. Разработана программа элективного курса «Математика и эстетика», способствующего формированию эстетического вкуса у учащихся общеобразовательной школы.

7. Раскрыта технология урока одной задачи как одна из форм эстетического воспитания учащихся общеобразовательной школы на примере темы «Тригонометрические уравнения».

## ЛИТЕРАТУРА


1. Азевич А. Двадцать уроков гармонии - М., Школа-Пресс, 1998. – 160 с.

2. Алгебра для 9 класса: Учеб.пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики/ Н. Я. Виленкин, Г. С. Сурвилло, А. С. Симонов, А. И. Кудрявцев; Под ред. Н. Я. Виленкина. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1998. – 384 с.

3. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.]. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 384 с.: ил.

4. Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; Под ред. С.А.Теляковского. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 1998. – 239 с.

5. Александрова Н. В. Математические термины: Справочник. – М.: Высшая школа, 1978. – 192 с.

6. Аленов М. М., Евангулова О.С., Лифшиц Л.И. Русское искусство X – начала XX века. – М., 1989. – 480 с.

7. Антоновский М.Я. Простота восприятия – важнейшая часть понятия наглядности// Математика в школе. – 1971. - №4. – С. 64-68.

8. Бендукидзе А. Д. Золотое сечение// Квант. - 1973. - №8. – С. 22-27.

9. Березин В. Н. Правильные многогранники/ /Квант. - 1973. - №5. - С. 26-28.

10. Болтянский В. Г. Паркет из четырехугольников// Квант. - 1989.- №11.- С. 56-60.

11. Болтянский В.Г. Математическая культура и эстетика// Математика в школе. - 1982. - №2. – С. 40-43.

12. Бородуля И. Т. Тригонометрические уравнения и неравенства: Кн. для учителя. – М.: Просвещение. 1989. – 239 с.

13. Бржозовский М. И. Уравнения орнаментов// Квант. – 1972 – №7 – С.14–19.

14. Вагутен В. Н. Правильные многогранники и повороты//Квант. 1989. -№10 .- С.46-51.

15. Васютинский Н. А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990. – 238 с.

16. Вейль Г. Симметрия. - М.: Наука, 1968. – 192 с.

17. Волошинов А. В. Союз математики и эстетики// Математика в школе. – 2006. - №7. – С. 62-67.

18. Волошинов А. В. Союз математики и эстетики// Математика в школе. – 2006. - №8. – С.65- 70.

19. Волошинов А.В. Математика и искусство. – М.: Просвещение, 2000. – 335 с.

20. Волошинов А.В. Пифагор: Союз истины, добра и красоты. - М.: Просвещение,1993. – 224 с.

21. Волькенштейн М. Красота науки// Наука и жизнь. – 1988. - № 9. - С. 15-19.

22. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1964. – 420 с.

23. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения \\ Перевод с английского Данилова Ю.А., под редакцией Смородинского Я.А. - Москва: Мир, 1971 – 511 с.

24. Геометрия: Учебн. для 7- 9 кл. сред. шк./Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 3-е изд., - М.: Просвещение, 1992. – 335 с.

25. Горшков А.А. Эстетическое воспитание учащихся на уроках математики//Ярославский педагогический вестник. – 2002.- №2. – С. 88-91.

26. Демьянов В. П. Геометрия и Марсельеза. - М.: Познание, 1986.- 254 с.

27. Ершова, А.П. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10-11 классов: Учеб. Пособие / А.П. Ершова, В.В. Голобородько – М.: Илекса. – 2002. –176 с.

28. Жмудь Л.Я. Пифагор и его школа, - Наука, 1990. – 193 с.

29. Задачи по математике//Квант. 1996. - №3. – С. 35.

30. Земляков А. Орнаменты.// Квант. – 1973. – №3 – С. 20-27.

31. Ковалева Г. И., Астахова Н. А., Дюмина Т. Ю. Теория и методика обучения математике: конструирование систем задач: учеб. Пособие. – Волгоград: Изд-во ВГПУ «Перемена», 2008. – 156 с.

32. Коджаспирова Г.М., Коджаспиров А.Ю. Словарь по педагогике. – М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. – 448 с.

33. Кокстер Г.С. Введение в геометрию. М., 1966. - 648 с.

34. Колмогоров А. Н. Паркеты из правильных многоугольников// Квант. -1970. - №3. - С. 24-27.

35. Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 г. //Правительство Российской Федерации. – Распоряжение от 17 ноября 2008 г. N 1662-р. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_82134 (дата обращения 25.05.2015).

36. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М., 1967. - 560 с.

37. Леман И. Увлекательная математика. Перев. с нем. – М.: Знание. – 1985. – 272 с.

38. Литвиненко В. Н. Многогранники. Задачи и решения:- М.: «Вита-Пресс», 1995. – 192 с.

39. Лосев А. Ф. Миф, число, сущность. - М.: 1994. - 920 с.

40. Маркушевич А. И. Возрастные последовательности. - М.: Наука, 1975. – 47 с.

41. Матиясевич Ю. Модели многогранников// Квант. - 1978. - №1. - С. 8-17.

42. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Тригонометрия: Задачник к школьному курсу. – М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр – S, 1998. – 656 с.

43. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для студентов физ.- мат. фак. пед. ин-ов /

/Колягин Ю. М., Оганесян В. А., Саннинский В. Я., Луканкин Г. Л. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

44. Миганова Е. Ю. Красивая задача// Гуманитаризация математического образования в школе т вузе: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 2. – Саранск: Поволжск. отд. РАО, МГПИ им. М. Е. Евсевьева, СВМО, 2002.- С.31-36.

45. Минковский В.Л. Об элементах эстетического воспитания на уроках математики//Математика в школе. – 1963. - №4. – С. 23-30.

46. Монж Г. Начертательная геометрия./ Комментарии и редакция Д.И. Каргина. - М.: Изд-во АН СССР, 1974 .- 291 с.

47. Мордкович А. Г. и др. Алгебра. 7 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская. – 4-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2001. – 160 с.

58. Мордкович А. Г. и др. Алгебра. 8 кл.: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская. – 5-е изд., испр. – М.:Мнемозина, 2003. – 239 с.

49. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 399 с. :ил.

50. Муравин Г. К. Алгебра. 7 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 7-е изд., дораб. – М. : Дрофа, 2009. – 286 с.

51. Муравин Г. К. Программа курса математики для 5-11 классов общеобразовательных учреждений/ Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2007. – 158 с.

52. Муравин, Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 318с.

53. Начертательная геометрия. //Под ред. Н.Ф. Четверухина.- М.: Высшая школа, 1963. – 420 с.

54. Несколько орнаментов по мотивам Эшера// Квант. – 1991. – №2. – С. 45.

55. Педагогика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов/ Под ред. Ю.К. Бабанского. – М.: Просвещение, 1983. – 608 с.

56. Перепелицин М. Л. Философский камень, - 1990. – 208 с.

57. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979. – 332 с.

58. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1995. – 383с.

59. Потоскуев Е.В. Изображение пространственных фигур на плоскости. Построение сечений многогранников. Учебное пособие для студентов физико-математического факультета педвуза. — Тольятти: ТГУ, 2004.

60. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2008. – 256 с.

61. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2008. – 223 с.

62. Разумный В.А. Эстетическое воспитание: Сущность. Формы. Методы. – М.: издательство «Мысль», 1969. – 81 с.

63. Рощина Н. Л. Формирование эстетического вкуса учащихся в процессе решения планиметрических задач: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02: Москва, 1998. – 152 с.

64. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб. посо-бие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. – Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 1999. – 208 с.

65. Саранцев Г.И. Эстетическая мотивация в обучении математике. – ПО РАО, Мордов. пед. ин-т. – Саранск, 2003. – 136 с.

66. Смирнова И М.., Смирнов В. А. Что такое «Полуправильный многогранник» // Учебно-методическая газета «Математика».- 2007 . - №16 - с. 23-26

67. Смирнова И. М. В мире многогранников: Кн. Для учащихся.- М.: Просвещение, 1995. - 143 с.

68. Смолина Н.И. Традиции симметрии в архитектуре. – М.: Стройиздат, 1990. – 345 с.

69. Тарасов Л.В. Этот удивительно симметричный мир: Пособие для учащихся. - М.: Просвещение, 1982 . – 176 с.

70. ФГОС основного общего образования // Электронный ресурс URL: http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2588

71. Фирстова Н. И. Введение элементов эстетического воспитания в контекст школьных учебников по математике//Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика: Материалы Всероссийской научной конференции. Саранск, 18-20 сентября 2002 г. Часть 1/ Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2002. – С. 141-143.

72. Харламов И. Ф. Педагогика: Учеб.пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 576 с.

73. Черник О.В. К вопросу об эстетическом потенциале математики//Традиции гуманизации и гуманитаризации математического образования: тезисы докладов Международной конференции, посвященной памяти Г.В.Дорофеева – М.:ГОУ Педагогическая академия, 2010. – С. 125-126.

74. Черник О. В. Развитие эстетической воспитанности учащихся при обучении математике: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02: Киров, 2003. – 160 с.

75. Черник О.В. Эстетический аспект процесса решения математической задачи// Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика: материалы Всероссийской научной конференции. Саранск, 18-20 сентября 2002 г. Часть 1/Мордовский гос. пед. ин-т. – Саранск, 2002. – С. 37 – 41.

76. Чикунова О. И. Тригонометрические уравнения//Успехи современного естествознания. – 2010. – №2. – С.131-133.

77. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. – М.: Стройиздат, 1990. – 345 с.

78. Шуре Э. Великие Посвещенные, 1 том, перевод Е. Писаревой. - Калуга: 1914. – 174 с.