МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математическое образование»
(направленность (профиль))

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент А.А. Гавришко ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)
Научный руководитель Н.А. Демченкова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель программы д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________2018 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)
«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
Глава I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ 11
§1. Понятие объема в школьном курсе геометрии 11
§2. Основные цели и задачи обучения теме «Объемы геометрических тел» . 17
§3. Основные требования к знаниям, умениям, навыкам по теме «Объемы геометрических тел» 20
§4. Анализ содержания теоретического материала темы «Объемы геометрических тел» в учебниках разных авторов 25
§5. Анализ содержания задачного материала темы «Объемы геометрических тел» в учебниках разных авторов 34
§6. Анализ диссертационных исследований и опыта работы учителей по теме «Объемы геометрических тел» 39
Выводы по первой главе 45
Глава II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ 47
§7. Система задач по теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы 47
§8. Методические рекомендации обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы 60
§9. Методический проект по теме «Объем пирамиды» 74
§10.Описание и результаты педагогического эксперимента 95
Выводы по второй главе 98
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 100
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 102
Приложение 1 111
Приложение 2 117

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Начальные сведения о свойствах геометрических тел относятся ко времени зарождения геометрии как математической науки. Еще за тысячи лет до наших времен земледельцы пытались узнать, хотя бы приблизительно, объем собранного урожая, размеры куч зерна и размеры тех емкостей, где зерно хранили. Математика Древнего Востока (Вавилония, Египет) располагала рядом правил для вычисления объемов тел. Среди формул объема были и неточные, дававшие слишком заметную процентную ошибку в пределах употребляемых линейных размеров тела. В «Началах» Евклида и в сочинениях Архимеда имеются правила для вычисления объемов многогранников и некоторых круглых тел (цилиндра, конуса, шара) [83].

«При изучении объемов геометрических тел задача развития пространственных представлений учащихся решается наиболее ярко, ее рассмотрению может быть уделено больше внимания, так как геометрические тела дают особенно богатый материал для развития пространственных представлений, для соединения пространственного воображения с доказательством, которое составляет сущность геометрии» [13].

Требования к предметным результатам освоения курса математики ФГОС среднего (полного) общего образования отражают, среди прочих, следующие (применительно к теме нашего исследования):

– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать реальные процессы и явления;

– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;

– сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применять изученные свойства геометрических фигур и формулы для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием [71].

Перечисленные выше требования к предметным результатам освоения курса математики ФГОС среднего (полного) общего образования находят свое отражение при изучении учащимися темы «Объемы геометрических тел».

«Изучение программного материала по теме «Объемы геометрических тел» дает возможность учащимся: получить представление о широте применения геометрии в различных областях человеческой деятельности; познакомиться с некоторыми фактами истории геометрии; усвоить систематизированные сведения о пространственных телах; научиться проводить аналогию плоских и пространственных конфигураций; видеть общность и различие свойств аналогичных структур на плоскости и в пространстве; использовать планиметрические сведения для описания и исследования пространственных фигур; научиться иллюстрировать и моделировать проекционным чертежом пространственные формы; решать позиционные задачи (в частности, задачи на сечения) на проекционном чертеже; решать задачи на нахождение площадей поверхностей и объемов тел, на вычисление линейных и угловых элементов пространственных конфигураций; решать задачи на доказательство; овладеть приемами, часто применяемыми для решения стереометрических задач на вычисление и доказательство» [13].

«Уровень обязательной подготовки учащихся по теме «Объемы геометрических тел» включает в себя следующие требованиями:

– уметь распознавать на моделях и по описанию основные пространственные тела, указывать их основные элементы, узнавать их в окружающих предметах;

– уметь показывать условие стереометрической задачи на рисунке, на пространственной модели;

– уметь вычислять значения площадей, применять полученные формулы;

– уметь решать задачи на вычисление с использованием изученных свойств и формул» [13].

Анализ научно-методической литературы по данной теме позволил выявить ряд малоисследованных проблем: каким основным требованиям должно удовлетворять содержание уроков по геометрии при изучении объемов; каковы условия эффективной реализации преподавания геометрии по данной теме; каким должны быть соотношения между базовыми и профильными курсами?

Анализ диссертационных исследований позволил выявить следующие малоизученные аспекты: проблему организации уроков по изучению объемов геометрических тел (В.А. Черезова, 2008г.); проблему реализации принципа укрупнения дидактических единиц при изучении площадей и объемов геометрических фигур (Ш.С. Гаджиагаев, 2006г.); проблему изучения геометрических величин в курсе планиметрии (Ш. Мусаввиров, 2009г.); особенности обучения элементам геометрии (Е.С. Семеняченко, 2010г.).

«Содержание материала по теме «Объемы геометрических тел» включает в себя:

– объем прямоугольного параллелепипеда;

– объемы прямой и наклонной призмы;

– объемы прямой и наклонной пирамиды;

– объемы цилиндра и конуса;

– объем шара, шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора» [13].

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в области изучения объемов накоплен определенный опыт, получены результаты, имеющие теоретическое и практическое значение. Очень много работ связаны с методической системой обучения геометрии, но, к сожалению совсем недостаточно работ, связанных именно с геометрическими величинами, и именно с объемом геометрических тел.

Выявляется **противоречие** между потребностями практики в целесообразно организованном процессе обучения школьников теме «Объемы геометрических тел», обеспечивающим формирование пространственного мышления учащихся, и недостаточной научно-методической разработанностью данной проблемы. Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** поиск методических особенностей обучения теме «Объемы геометрических тел» в общеобразовательной школе.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в разработке методических рекомендаций обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что обучение объемам геометрических тел в курсе геометрии общеобразовательной школы будет более эффективным, если: формировать понятие объема на наглядно-интуитивном уровне с привлечением жизненного опыта учащихся; целенаправленно работать по данной теме, вырабатывая навыки решения основных типов задач; систематически обращаться к задачам на объемы геометрических тел при изучении геометрии на уроках и в процессе реализации элективного курса [13].

Исходя из цели исследования и выдвинутой гипотезы, на основе анализа научной, учебно-методической и математической литературы были определены задачи исследования.

Задачи исследования:

1. Выделить различные подходы к определению понятия объема в школьном курсе геометрии.
2. Выделить основные цели и задачи обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы.
3. Рассмотреть основные требования к знаниям, умениям, навыкам по теме «Объемы геометрических тел».
4. Рассмотреть методические аспекты изучения теоретического материала темы «Объемы геометрических тел».
5. Рассмотреть методические аспекты изучения задачного материала темы «Объемы геометрических тел» в учебниках разных авторов.
6. Проанализировать диссертационные работы и опыт работы учителей по теме исследования.
7. Разработать системы задач по теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы.
8. Составить методические рекомендации обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы.
9. Разработать методический проект и элективный курс по теме «Объем пирамиды».
10. Провести педагогический эксперимент.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** «анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики» [1].

Основные этапы исследования:

1 семестр (2016/17 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме;

2 семестр (2016/17уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации;

3 семестр (2017/18 уч.г.): разработка методики обучения теме «Объем пирамиды» учащихся 11-х классов общеобразовательной школы в рамках лекционно-семинарского метода;

4 семестр (2017/18 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Теоретическая значимость магистерской работы заключается в предоставлении теоретического материала по теме исследования.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны:

– методические рекомендации обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии в общеобразовательной школы;

– система задач для изучения данной темы;

– методический проект изучения темы «Объем пирамиды» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы.
2. Системы задач по теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы.
3. Методический проект изучения темы «Объем пирамиды» в курсе геометрии общеобразовательной школы в рамках лекционно-семинарского метода.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на: VIII международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию Карла Фридриха Гаусса), г. Тольятти, (апрель 2017); первом этапе научной студенческой конференции «Дни науки» института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г. Тольятти, апрель 2017 г., апрель 2018г.); международной заочной научно-практической конференции студентов и молодых ученых «Математика и современность», г. Луганск, ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко" (30 октября–10 ноября 2017г.); международной научно-практической конференции «Современное математическое образование: опыт, проблемы, перспективы», посвященной 80-летнему юбилею доктора педагогических наук, профессора К.Г. Кожабаева, Казахстан, Кокшетау, (8-9 июня 2018г.).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период педагогической и преддипломной практик на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а также в период производственной практики на базе МБУ «Школа №59» г.о. Тольятти и работы в нем в качестве действующего учителя математики.

Основные положения и результаты диссертационного исследования отражены в следующих **публикациях:**

1. Гавришко А.А. Изучение темы «Объемы геометрических тел» в общеобразовательной школе /А.А. Гавришко // Математика и современность: материалы Международной заочной научно-практической конференции студентов и молодых ученых (30 октября – 10 ноября, 2017 г.). – Луганск: Книта, 2018. – С. 132-134.

2. Гавришко А.А. Различные подходы к понятию объема геометрических тел в средней школе / Н.А. Демченкова, А.А. Гавришко // Современное математическое образование: опыт, проблемы, перспективы:

материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 80-летнему юбилею доктора педагогических наук, профессора К.Г. Кожабаева, Казахстан, Кокшетау, 2018. – С. 424-428.

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы (84 наименований) и Приложений.

Объем работы составляет 122 страницы.

Глава I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие объема в школьном курсе геометрии

Требования к предметным результатам освоения курса математики Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования, среди прочих, должны отражать:

– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;

– распознавание на чертежах, моделях и в реальном мире геометрических фигур;

– применение изученных свойств геометрических фигур для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием [71].

Перечисленные выше требования к предметным результатам освоения курса геометрии Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования находят свое отражение при изучении учащимися темы «Объемы геометрических тел».

«Я думаю, что никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг – геометрия». «Эти слова, сказанные великим французским архитектором Ле Корбюзье в начале XX века, очень точно характеризуют и время настоящее. Постоянно высказываются различные суждения по поводу преподавания геометрии и ее места в системе школьного образования. Геометрия в школе – не только математическая дисциплина, но и один из важнейших компонентов общечеловеческой культуры. Наблюдения многих учителей и специалистов-психологов показали, что при неверном обучении геометрии способность учащихся оперировать геометрическими образами и синтезировать геометрические знания может в дальнейшем не только не развиваться, но даже резко ослабевать. Поэтому одной из основных задач преподавания геометрии является задача планомерного, систематического развития геометрического, образного мышления, восприятие геометрии не только как школьного предмета, но и как феномена человеческой культуры» [14].

Прочное усвоение математических знаний (в том числе и геометрических) невозможно без целенаправленного развития мышления. Поэтому развитие мышления учащихся – одна из основных задач школьного обучения. «В психологии мышление определяется как процесс опосредованного и обобщенного познания (отражения) окружающего мира. Сущность его в отражении общих и существенных свойств предметов и явлений, в том числе и таких свойств, которые не воспринимаются непосредственно; существенных отношений и закономерных связей между предметами и явлениями» [35].

«Различают три основных вида мышления: предметно-действенное, наглядно-образное и абстрактное. Предметно-действенное мышление – вид мышления, связанный с практическими действиями над предметами. Наглядно-образное мышление – вид мышления, который опирается на восприятие или представления. Абстрактное мышление – мышление понятиями, лишенными непосредственной наглядности, мышление присущее восприятию и представлениям» [34].

В процессе изучения геометрии активно совершенствуется мышление ученика. «Содержание и логика изучаемых в школе предметов, изменение характера и форм учебной деятельности формируют и развивают у него способность активно, самостоятельно мыслить, рассуждать, сравнивать, делать глубокие обобщения и выводы. Основная особенность мыслительной деятельности ученика – возрастающая с каждым годом способность к абстрактному мышлению, изменение соотношения между конкретно-образным и абстрактным мышлением в пользу последнего. Конкретно-образные компоненты мышления не исчезают, а сохраняются и развиваются, продолжая играть существенную роль в общей структуре мышления (например, развивается способность к конкретизации, иллюстрированию, раскрытию содержания понятия в конкретных образах и представлениях)» [35].

Известно, что в процессе обучения математике абстрактное мышление может проявляться:

– «в явном виде, например, рассматривая понятие геометрического тела мы явно отвлекаемся от всех свойств реальных тел, кроме формы, размеров и положения в пространстве;

– в неявном виде, например, при счете предметов конкретного множества мы неявно отвлекаемся от свойств каждого отдельного предмета полагая, что все предметы одинаковы» [14].

Среди видов абстрактного мышления можно выделить логическое и пространственно-схематическое. «Логическое мышление характеризуется умением выводить следствия из данных предпосылок, умением вычленять частные случаи, обобщать полученные выводы» [32]. «Пространственно-схематическое мышление характеризуется умением мысленно конструировать пространственные образы или схематические конструкции изучаемых объектов и выполнять над ними операции, соответствующие тем, которые должны выполняться над самими объектами» [14].

«Определение объемов геометрических тел относится к глубокой древности. Это связано с практической деятельностью людей. Можно сказать, что объем – это часть пространства, занимаемая телом. Точнее, объем – некоторая физическая, а именно геометрическая величина, характеризующая свойство геометрического тела, связанное с тем, что оно трехмерно или занимает часть пространства» [14]. В учебнике А.В. Погорелова [48] на примере заполнения нескольких сосудов жидкостью, сформулировано определение объема, в котором говорится, что «…объем всего сосуда равен сумме объемов его частей. За единицу объема принимается объем куба, ребро которого равно единице длины (мм, см, дм, м)…» [48]. Естественно, такие определения понятия объема геометрического тела даются на строгом математическом языке. Данное понятие формирует пространственно-схематическое мышление [14].

«В курсе средней школы учащиеся знакомятся с общей задачей нахождения объемов многогранников и некоторых других фигур. Практика преподавания выявила некоторые трудности усвоения этого материала учащимися, к тому же характер его изложения не вполне увязан с общей практической направленностью пропедевтического курса стереометрии» [14].

«Рассмотрим различные подходы к определению понятия объема геометрического тела в школьных учебниках. Выделяем три подхода.

В пропедевтическом курсе математики 5-6 классов понятие объема фигуры употребляется по существу как первичное, неопределяемое. У школьников формируется убежденность в том, что окружающие их физические тела имеют определенный объем, это убеждение по интуиции переносится и на геометрические тела. По отношению к кубу и прямоугольному параллелепипеду предлагаются формулы, которые иллюстрируются с помощью разбиения данной фигуры на единичные кубы. Такое разбиение можно условно считать первым в школьном курсе подходом к определению понятия объема; число единичных кубов, составляющих прямоугольный параллелепипед, в данном случае куб, принимается за числовое значение объема. Это первый подход к понятию объема» [14].

Второй подход. «Понятие объема вводится аксиоматически: …объем– положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами: равные тела имеют равные объемы; если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей; объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице…» [30]. Такой подход к определению понятия объема геометрического тела реализован в учебниках [2] и [48]. И перед понятием объема проговаривается аналогия с понятием площади. При этом желательно подчеркнуть, что речь идет о самих величинах, а не о числовых значениях. Геометрические величины существуют независимо от числовых значений, их можно сравнивать, и не вычислив соответствующих числовых значений: большей фигуре соответствует большая величина. Этот подход формирует наглядно-образное мышление.

Третий подход. Понятие вводится конструктивно. «Считается, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов. За единицу измерения объемов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром один сантиметр называют кубическим сантиметром…» [30]. Теперь к объему можно поставить в соответствие действительное число, выражающее значение величины в выбранных единицах измерения. При конструктивном определении объема фактически используются свойства действительных чисел и приведенные выше аксиомы геометрических величин. Само составление кубической сетки возможно только, если введена единица измерения, известно свойство аддитивности – производится сложение объемов кубиков, сравнение величин (монотонность, следствие из аксиом). Такой подход реализован в учебнике [16]. Отличие также состоит в том, что аксиомы, сформулированные в учебнике [48], в учебнике [16] представлены как признаки и свойства. Этот подход формирует наглядно-образное мышление с элементами абстрактного.

Более подробно остановимся на описании первого подхода, реализуемого в пропедевтическом курсе математики 5-6 классов.

На уроках, отводимых на изучение данного материала, требуется сообщить довольно много новых терминов: прямоугольный параллелепипед, вершины, ребра и грани прямоугольного параллелепипеда, противоположные грани, поверхность прямоугольного параллелепипеда, длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда. Поэтому важно позаботиться об оснащении этих уроков необходимыми наглядными пособиями. В процессе изложения понадобятся каркасная (проволочная), сплошная (деревянная, металлическая или пластмассовая) модели прямоугольного параллелепипеда, развертка поверхности прямоугольного параллелепипеда. Необходимы также соответствующие модели куба. Сплошная модель дает правильное представление обо всем множестве точек, образующем эту фигуру. Без каркасной модели трудно освоить такие понятия, как, ребро и вершина прямоугольного параллелепипеда. Модель прямоугольного параллелепипеда из бумаги или картона, которую можно «развернуть» на плоскости, поможет составить более отчетливое представление о поверхности прямоугольного параллелепипеда. Применение моделей облегчит учащимся первый серьезный «выход» в пространство. Эта чувственная опора создает условия для понимания взаимного расположения в пространстве вершин, ребер и граней прямоугольного параллелепипеда [81].

С понятием объема учащиеся 5-6 классов встречаются впервые. Обычно ознакомление связывается с выводом правила вычисления объема прямоугольного параллелепипеда. Рассматриваемый материал преследует цель создания некоторых общих представлений об объеме, формирование предметно-действенного мышления с элементами наглядно-образного. В упражнениях рассматриваются различные фигуры, составленные из одинаковых кубиков [80].

После изучения единиц площади учащиеся легко запомнят наименования и обозначения единиц объема. Здесь, так же как и при изучении площади, полезно показать учащимся кубы, объемы которых соответственно равны 1 $см^3$, 1 $дм^3$ и 1 $м^3$. Для демонстрации куба с объемом 1 $м^3$ можно использовать трехгранный угол классной комнаты и три метровые линейки или планки.

При выполнении упражнений учащиеся знакомятся с приемом, который применяется при нахождении объема прямоугольного параллелепипеда: прямоугольный параллелепипед разбивается на горизонтальные слои, подсчитывается число кубов в одном слое и результат умножается на число слоев. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что число горизонтальных слоев зависит от высоты прямоугольного параллелепипеда, а число кубических сантиметров в каждом слое – от его длины и ширины.

Для усвоения понятия прямоугольного параллелепипеда полезно провести следующую лабораторную работу на тему «Объем прямоугольного параллелепипеда». Следует отметить, что лабораторные работы в 5-6 классах являются началом исследовательской деятельности учащихся. Исследовательская деятельность – форма творческой деятельности, продуктом которой является новое знание, новые методы получения нового знания или новые методы исследования объекта. Под исследовательской деятельностью мы будем понимать всякую деятельность, которая направлена на получение нового знания и которая осуществляется без использования алгоритмов и различного рода алгоритмических предписаний. Формирование элементов исследовательской деятельности способствует овладению математической культурой, и, как следствие, повышению уровня математического развития учащихся [26].

§2. Основные цели и задачи обучения теме «Объемы геометрических тел»

Конкретизация целей на уровне реального учебного процесса иллюстрируется на примере конструирования предметных и метапредматных текущих результатов обучения курсу геометрии на планируемом и на реализуемом уровнях. Метапредматные и предметные результаты достигаются при усвоении главных целей учебного процесса общеобразовательного курса геометрии, к которым принадлежат: предписания, основные учебные задачи, теоретические задачи, изложение теорем и их доказательств, понятия и их определения. Постоянную взаимосвязь предметных и метапредметных результатов разъясняется в познавательных и регулятивных универсальных учебных действий (УУД). Познавательные действия, представляют собой, умственные действия, составляют психологическую основу процесса решения предметных, в частности, геометрических (теоретических) задач. Таким образом, предметные результаты включают в себя систему дающих знаний и систему, выполняемых предметных действий с предметными знаниями, в основе которых и будут познавательные УУД. При использовании регулятивных действий освоенных познавательных УУД содействуют развитию регулятивных УУД и считается важным обстоятельством благополучности выполнения учебных и геометрических задач [8]. Неразрывная связь познавательных УУД с предметными результатами обучения теме «Объемы геометрических тел» подтверждается соответствующим содержанием ФГОС общего (полного) общего образования.

В результате планируемые результаты обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы при использовании всех этапов УПД, а именно – применение интеллектуальных умений и знаний при решении геометрических и учебных задач; оценка и контроль полученных знаний; их коррекция; применение учебной информации и становление учебно-познавательной деятельности при изучении изучаемого материала формулируются как «цели-ориентиры» [8].

Цели обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии в познавательной области, представленные в таблице (Таблица 1), необходимы учителю и учащимся для организации целеполагания и планирования УПД на мотивационно-ориентационном этапе.

Таблица 1

Цели обучения темы «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии

Цели-ориентиры	**Учебные задачи**	**Средства для достижении целей**
1. «Приобретение учебной информации и формирование УУД при изучении: а) понятий (многогранник, объем); б) теорем (выведении формул объема геометрических тел); в) типов задач» [8].	а) оформлять схему определения понятия с использованием данного материала; б) оформлять план доказательства; находить и выделять базис доказательст -ва теорем и выполнять доказательства; в) уметь оформлять решение задач одного или разных типов, составлять план их решения с помощью подсказки или самостоятельно.	а) способы и приемы формиро-вания схемы опре-деления изучаемо-го понятия; б) способы и прие-мы нахождения доказательства; в) карточки-источники.

Продолжение таблицы 1

2. «Контроль усвоения теоретических знаний при работе: а) с геометрическими понятиями; б) с теоремами; в) с типами и классами задач (регулятивные УУД)» [8].	а) формулировать определение понятия; подводить объект под понимания; приводить контрпримеры; выводить следствия из условия принадлежности объекта данному пониманию; воспроизводить схему взаимосвязи понятий; б) выполнять доказательство, используя модель; заполнять пропуски в доказательстве; в) называть основу доказательства; г) воссоздать доказательство.	карточки-схемы решения задач всех типов, рассматриваемых в изучаемой теме.
3. «Применение знаний и интеллектуальных умений при решении геометрических и учебных задач (познавательные и регулятивные УУД)» [8].	«а) научиться решать задачи своего уровня сложности и пробовать другие уровни сложности; б) составлять задачи: по требованию, по неполному условию и требованию, по условию без требования; аналогичные, обратные задачи и решать, используя помощь готовые чертежи; в) подготовить сообщение по теме и выступить с ним; г) предложить контрольную работу для решения товарищу и проверить решение» [8].	«а) учебник, словарь, схемы, алгоритмы, классификации; б) схемы-карточки доказательств теорем; образцы записи предшествующих доказательств теорем; в) образцы-схемы записей решения задач» [8].
4. «Формирование коммуникативных УУД через: включение в групповую работу; взаимопомощь; организацию взаимоконтроля и взаимопроверки на все этапах УПД»[8]..	а) оценивать результаты товарищей по выполненным заданиям тех уровней, которые понимают с обоснованием; б) оказывать помощь товарищам при выполнении работы ниже уровнем.	«приемы контроля усвоения понятия, доказательства теоремы, решения задачи; рецензирования» [8].
5. «Формирование организационных умений: целеполагание, планирование, реализация плана, саморегуляция УПД (познавательные, регулятивные УУД)» [8].	«а) пояснять и знать цели своей учебной деятельности по изучаемой теме; б) выбирать задачи по пройденной теме и решать их; в) осуществлять самопроверку с помощью преподавателя; г) составлять проверочную работу для своего уровня усвоения; д) оценивать свою итоговую деятельность по данным объективным критериям; по собственным критериям, сравнивая их с объективными критериями; е) делать выводы о дальнейших действиях» [8].	выбор приемов рефлексии для достижения целей; рецензирования и исправления собственной учебно-познавательной деятельности.

В таблице описаны пять основных целей-ориентиров, в соответствии с которыми определены свои учебные задачи и средства, необходимые для реализации данных целей. Цели обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии в общеобразовательной школе определяются ее ролью в развитии общества в целом и формировании личности каждого отдельного человека.

Критерием успешной работы учителя должно служить качество математической подготовки учащихся, которое зависит от выполнение поставленных образовательных и воспитательных задач, от использования какого-то метода, приема, формы или средства [82].

§3. Основные требования к знаниям, умениям, навыкам по теме «Объемы геометрических тел»

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Минобрнауки от 17 мая 2012 г. №413) [71], изучение математики в основной школе направлено на развитие мышления, на активизацию мыслительной деятельности учащихся. В частности, среди всех математических дисциплин в этом плане геометрия занимает особое место. Обучение геометрии предполагается не только овладение математическими понятиями, но и умениями рассуждать, доказывать свои выводы. Также ФГОС устанавливает требования к предметным и метапредметным результатам освоения учащимися курса геометрии и требования к системе оценивания, которые должны ориентировать образовательный процесс на реализацию и достижение планируемых результатов.

Определены требования к планируемым результатам в условиях критериального оценивания;

– представлены конкретизация целей на различных уровнях школьного математического образования;

– разработаны схемы конструирования планируемых и реализуемых предметных и метапредметных результатов обучения геометрии.

Перечень умений, необходимых для достижения планируемых результатов, связан с познавательными и регулятивными универсальными учебными действиями. Критерием оценки является овладение системой учебно-познавательных действий с изучаемым учебным материалом.

На примере учебника по геометрии автора Л.С. Атанасяна [16] рассмотрим основные требования к знаниям, умениям, навыкам приобретаемым учащимися при изучении темы «Объемы геометрических тел». Программа 10 класса рассмотрена в таблице 2.

Таблица 2

Требования к уровню подготовки по программе 10 класса по геометрии

Тема	Требования к уровню подготовки
Перпендикулярность прямых и плоскостей. Цель: систематическое изучение свойств пространственных тел. Задачи: изучить понятие и свойства перпендикулярности в пространстве. Требования к уровню подготовки: Знания: понятие перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве. Умения: применять полученные знания при решении стереометрических задач.	
Прямоугольный параллелепипед, куб.	«Знать: определение прямоугольного параллелепипеда, куба, свойства прямоугольного параллелепипеда, куба. Уметь: применять свойства прямоугольного параллелепипеда при нахождении его диагоналей» [53].
Решение задач на свойства прямоугольного параллелепипеда.	Знать: основные свойства параллельного проектирования прямой, отрезка, параллельных отрезков. Уметь: строить параллельную проекцию на плоскости отрезка треугольника, параллелограмма, трапеции.
Многогранники. Цель: систематическое изучение свойств пространственных тел. Задачи: изучить понятие и свойства многогранников. Требования к уровню подготовки: Знания: названия многогранников, свойства многогранников и формулы для вычисления площадей поверхностей многогранников. Умения: различать многогранники, называть ребра, вершины, основания, применять полученные знания при решении стереометрических задач.	
Понятие многогранника.	«Иметь представление о многограннике. Знать: элементы многогранника: вершины, ребра, грани» [53].
Призма.	«Иметь представление о призме как о пространственной фигуре. Знать: формулу площади полной поверхности прямой призмы. Уметь: изображать призму, выполнять чертежи по условию задачи» [53].

Продолжение таблицы 2

Призма. Площадь боковой и полной поверхности призмы.	«Уметь: находить площадь боковой и полной поверхности прямой призмы, основание которой – треугольник» [53].
Решение задач на нахождение площади полной и боковой поверхности призмы.	«Знать: определение правильной призмы. Уметь: изображать правильную призму на чертежах, строить ее сечение; находить полную и боковую поверхности правильной n-угольной призмы, при n=3,4,6» [53].
Пирамида.	«Знать: определение пирамиды, ее элементов. Уметь: изображать пирамиду на чертежах; строить сечение плоскостью, параллельной основанию и сечение, проходящее через вершину и диагональ основания» [53].
Правильная пирамида.	«Знать: определение правильной пирамиды. Уметь: решать задачи на нахождение апофемы, бокового ребра, площади основания правильной пирамиды» [53].
Решение задач на нахождение площади полной и боковой поверхности пирамиды.	«Знать: элементы пирамиды, виды пирамид. Уметь: использовать при решении задач планиметрические факты, вычислять площадь полной поверхности правильной пирамиды» [53].
Усеченная пирамида. Площади поверхности усеченной пирамиды.	«Знать: определение усеченной пирамиды, ее элементов. Уметь: изображать пирамиду на чертежах, находить площади поверхностей усеченной пирамиды» [53].
Понятие правильного многогранника.	«Иметь представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр). Уметь: распознавать на чертежах и моделях правильные многогранники» [53].

Программа 11 класса рассмотрена в таблице 3.

Таблица 3

Требования к уровню подготовки по программе 11 класса по геометрии

Тема	Требования к уровню подготовки
Цилиндр, конус и шар. Цель: систематическое изучение основных видов тел вращения. Задачи: изучить понятие тел вращения Требования к уровню подготовки: Знания: названия тел вращения, формулы для вычисления площадей поверхностей тел вращения. Умения: различать тела вращения, называть элементы геометрических тел, применять полученные знания при решении стереометрических задач.	
Понятие цилиндра. Площадь поверхности цилиндра.	Знать: определение цилиндра, его элементов, цилиндрическая поверхность. Уметь: применять формулы площади полной поверхности цилиндра при решении задач.
Решение задач на нахождение площади поверхности цилиндра.	Знать: определение цилиндра, его элементов, цилиндрическая поверхность. Уметь: изображать и распознавать на чертежах; применять формулы к решению задач на вычисление и доказательство.

Понятие конуса.	Знать: определение конуса и его элементов, прямой конус, коническая поверхность. Уметь: применять формулы площади полной поверхности конуса при решении задач.
Усеченный конус. Площадь поверхности конуса.	Знать: определение полного и усеченного конуса. Уметь: применять формулы площади полной поверхности полного и усеченного конуса при решении задач.
Решение задач на нахождение площади поверхности конуса.	Знать: определение полного и усеченного конуса, их элементов, коническая поверхность. Уметь: изображать и распознавать на чертежах полный и усеченный конус; применять формулы к решению задач на вычисление и доказательство.
Понятие сферы и шара. Уравнение сферы.	Знать: определение сферы и шара; уравнение сферы; взаимное расположение сферы и плоскости. Уметь: решать типовые задачи; применять формулы для решения простейших задач на составление уравнения сферы.
Площадь сферы.	Знать: определение сферы, шара, площадь сферы. Уметь: применять формулу площади сферы для решения геометрических задач.
Решение задач на тела вращения.	Знать: определения тел вращения; формулы площади поверхностей тел вращения. Уметь: изображать и распознавать на чертежах основные тела вращения; применять формулы площади поверхности тел вращения к решению задач на вычисление и доказательство
Объемы тел. Цель: систематическое изучение объемов геометрических тел. Задачи: изучить формулы объемов тел, выработать навык решения типовых задач на применение формул объема геометрических тел. Требования к уровню подготовки: Знания: формулы для нахождения объемов геометрических тел, в том числе с помощью определенного интеграла. Умения: изображать и распознавать на чертежах геометрические тела, применять полученные знания при решении задач, оформлять задания.	
Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда.	Иметь представления о понятии объема и прямоугольного параллелепипеда. Знать: понятие объема, свойства объемов; формулы вычисления объема прямоугольного параллелепипеда. Уметь: находить объем прямоугольного параллелепипеда; использовать свойства объемов тел при решении геометрических задач; применять формулу объема прямоугольного параллелепипеда.
Объем прямой призмы.	Иметь представления о понятии объема и прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник. Знать: формулы вычисления объема прямоугольной призмы. Уметь: изображать и распознавать на чертежах призму; находить объем прямой призмы; использовать свойства объемов при решении задач.
Объем цилиндра.	Иметь представления о понятии объема и цилиндра. Знать: формулы вычисления объема цилиндра. Уметь: изображать и распознавать на чертежах цилиндр; находить объем цилиндра; использовать свойства объемов при решении задач.

Продолжение таблицы 3

Вычисление объемов тел с помощью интеграла.	«Знать: возможность и целесообразность применения определенного интеграла для вычисления объемов геометрических тел. Уметь: применять при вычислении объема геометрических тел определенный интеграл» [53].
Объем наклонной призмы.	«Знать: формулу объема наклонной призмы Уметь: находить объем наклонной призмы; выводить формулу объема наклонной призмы с помощью интеграла» [53].
Объем пирамиды.	Иметь представления об основной формуле объемов геометрических тел. «Знать: формулы объема пирамиды, у которой вершина проецируется в центр вписанной или описанной около основания окружности; усеченной пирамиды. Уметь: выводить формулу объема пирамиды с использованием основной формулы объемов тел.; применять данную формулу при решении задач» [53].
Объем конуса.	Знать: формулы объема конуса и усеченного конуса. Уметь: применять формулу объема конуса с помощью определенного интеграла при решении стереометрических задач.
Объем шара.	Знать: формулу нахождения объема шара. Уметь: применять формулу объема шара для решения геометрических задач.
Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.	Знать: формулы для вычисления объемов частей шара; формулу для вычисления площади поверхности шара. Уметь: решать задачи на нахождение объемов в комбинации тел применяя формулы объемов шара и его частей.

Из представленных выше таблиц (программа 10-11 класса геометрии по учебнику авторов Л.С. Атанасяна) можно сделать вывод:

Цели учащегося – изучить объемы тел и получить последовательную систему математических знаний, необходимых для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне. Для этого необходимо:

– *иметь представление:* о понятии объема многогранника и тел вращения; формулах вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, объема прямой и наклонной призмы, объема цилиндра, пирамиды и конуса, объема шара и его частей, площади сферы;

– *овладеть умением:* применять формулы объема прямоугольного параллелепипеда, объема прямой и наклонной призмы, объема цилиндра, пирамиды и конуса, объема шара и его частей, площади сферы при решении задач на вычисление; проводить доказательные рассуждения в ходе решения стереометрических задач; находить объемы тел с использованием определенного интеграла.

Цели учителя – создать условия учащимся:

– *для формирования представлений*: объема многогранника и тела вращения, о формулах вычисления объемов всех изученных геометрических тел;

– *для формирования умений*: применять формулы объемов геометрических тел к решению задач на вычисление и доказательства;

– *для овладения навыками*: применять формулу объемов геометрических тел к решению задач на доказательство, находить объем геометрических тел с использованием определенного интеграла.

§4. Анализ содержания теоретического материала темы «Объемы геометрических тел» в учебниках разных авторов

Рассмотрим таблицу 4, в которой представлены учебники по геометрии для учащихся 10-11 классов разных авторов (Л.С. Атанасяна и др. [16], А.В. Погорелова [48], И.Ф. Шарыгина [73] и И.М. Смирновой [62]) с целью анализа материала по теме исследования «Методика обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы».

Таблица 4

Содержание темы «Объемы геометрических тел» в учебниках разных авторов

Л.С. Атанасян и др.	А.В. Погорелов	И.Ф. Шарыгин	И.М. Смирнова
1. Определение понятия многогранника (геометрического тела)			
«Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело, называется многогранной поверхностью или многогранником…» [16].	«Геометрическое тело - часть пространства, занятая физическим телом и ограниченная поверхностью. Многогранник – это тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников…» [48].	«Многогранник - ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников…» [73].	«Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников…» [62].

Продолжение таблицы 4

Раздел «Многогранники»			
Количество часов			
14	17	20	15
Последовательность рассматриваемого материала			
понятие многогранника; понятие геометрического тела; теорема Эйлера; выпуклые многогранники; призма, прямая и наклонная призма, правильная призма.	«двугранный и многогранный углы; линейный угол двугранного угла; многогранники; сечения многогранников; призма, прямая и правильная призмы; параллелепипед» [48].	«изображения многоугольников и многогранников; построения на изображениях; выпуклые многогранники; многогранные углы» [73].	многогранные углы и их свойства; выпуклые и невыпуклые многогранники; теорема Эйлера; правильные многогранники; многогранники и тела вращения.
«параллелепипед; пирамида, треугольная пирамида, правильная пирамида, усеченная пирамида; понятие симметрии в пространстве; сечения многогранников, построение сечений; правильные многогранники».	«пирамида, усеченная пирамида, правильная пирамида; правильные многогранники» [48].	«правильная пирамида; призма, параллелепипед» [73].	объемы и площади поверхностей.
Раздел «Тела вращения»			
Количество часов			
16	14	10	25
Последовательность рассматриваемого материала			
«понятие цилиндра; площадь поверхности цилиндра; понятие конуса; площадь поверхности конуса; усеченный конус; сфера и шар, уравнение сферы; взаимное расположение сферы и плоскости; касательная плоскость к сфере; площадь поверх-ности сферы» [16].	«тела вращения: цилиндр, конус, шар; сечения тел вращения; касательная плоскость к шару; вписанные и описанные многогранники; понятие тела и его поверхности в геометрии».	«понятие тела вращения; тела вращения; касание круглых тел с плоскостью, с прямой и между собой; вписанные и описанные многогранники».	«сфера и шар; взаимное расположение сферы и плоскости; касательная плоскость; многогранники, вписанные в сферу, многогранники, описанные около сферы; цилиндр, конус; поворот, фигуры вращения; вписанные и описанные цилиндры;

Продолжение таблицы 4

			симметрия пространственных фигур; движение пространства, виды движений; элементы симметрии многогранников и круглых тел; примеры симметрии в окружающем мире».
2. Введение понятия объема			
«Каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранный единицы измерения объемов…» [16].	«Величина ограниченного тела характеризует его объем…». [48].	«Объем – это положительная величина, численное значение которой обладает свойствами: 1. объемы равных тел равны; 2. если тело разделено на две части, то его объем равен сумме объемов его частей (свойство аддитивности объема); 3. если задана единица длины, то объем куба, ребро которого равно этой единице, равен одной кубической единице…» [73].	«Объем – это величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа» [62]. Объем – это «…число V, показывающее сколько раз единица измерения объема и ее части укладываются в данной фигуре». Это число может быть натуральным, рациональным и даже иррациональным…» [62].
Раздел «Объемы»			
Количество часов			
17	27	24	20
Последовательность рассматриваемого материала			
«понятие объема тела; отношение объемов подобных тел; формулы объема куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра;	«понятие объема; объем прямоугольного параллелепипеда; объем наклонного параллелепипеда; объем призмы; равновеликие тела;	«понятие объема; объем прямоугольного параллелепипеда, призмы; принцип подобия; объем пирамиды; вычисления объемов	«объём и его свойства; принцип Кавальери; формулы объёма параллелепипеда, призмы, пирамиды; формулы объёма цилиндра, конуса,

Продолжение таблицы 4

формулы объема пирамиды и конуса; формулы площади поверхностей цилиндра и конуса; формулы объема шара и площади сферы».	объем пирамиды, усеченной пирамиды; объем подобных тел; объем цилиндра, конуса, усеченного конуса; объем шара, шарового сегмента и сектора; площадь боковой поверхности конуса, площадь сферы».	многогранников; объем цилиндра, конуса; принцип Кавальери и объем шара; площадь поверхности цилиндра, конуса и сферы; площадь поверхности сферического пояса».	шара и его частей; отношение объёмов подобных тел; площадь поверхности многогранника; формулы площади поверхности цилиндра, конуса, шара и его частей».

После представленной таблицы рассмотрим данную тему в различных учебниках более подробно.

1. *Геометрия 11 – 10 классы/ Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцева, З.Г. Позняк, Л.С. Киселева [16].*

Прежде изучение объема геометрического тела, следует изучить, что такое геометрическое тело, многогранник. Авторы данного учебника раздел «Многогранники» предлагают изучить в 10 классе, на который отводится 14 часов. Основная цель – так как учащиеся уже знают многогранники: тетраэдр и параллелепипед, в данном разделе они должны расширить эти понятия. Многогранник обуславливается «…как поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело, которое тоже называют многогранником» [16]. А также учащиеся знакомятся с основными видами многогранников (призма, пирамида, усеченная пирамида), с формулой Эйлера для выпуклых многогранников, с правильными многогранниками и элементами их симметрии. В связи с этими данными устанавливается само понятие геометрического тела, с целью чего вводится еще несколько новых понятий – это, граничная точка фигуры, внутренняя точка и т. д. Главная цель введения понятия – это понимание наглядного представления о многогранниках и совсем не обязательно для всех учащихся усвоение их. Помимо представленной формулы Эйлера в данном разделе содержится еще один из вариантов пространственной теоремы Пифагора, на примере тетраэдра, у которого все плоские углы при одной вершине – прямые. В основе доказательства лежит вывод формулы через формулу площади прямоугольной проекции многоугольника, которая предварительно выводится.

В продолжение темы многогранников изучается раздел «Тела вращения», этот раздел представлен в 11 классе. На данный раздел отводится 16 часов. Основная цель учащихся получить знания о систематических сведениях об основных телах и поверхностях вращения – цилиндре, конусе, сфере, шаре. Изучение круглых тел (цилиндра, конуса, шара) и их поверхностей заканчивает ознакомление обучающихся с главными (основными) пространственными телами. Вводятся понятия цилиндрической и конической поверхностей, цилиндра, конуса, усеченного конуса. На наглядном примере, с помощью разверток находятся площади боковых поверхностей многогранников и круглых тел, выводятся соответствующие формулы. Далее рассматриваются и вводятся «определения сферы и шара, уравнение сферы» [16] и с его помощью изучается пункт «о взаимном расположении сферы и плоскости» [16]. «Площадь сферы определяется как предел последовательности площадей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани» [16]. В задачах рассматриваются разнообразные комбинации геометрических тел, в частности, описанные и вписанные призмы и пирамиды. В изучаемом разделе рассматриваются и такие еще вопросы, как взаимном расположении сферы и прямой, сечение цилиндрической и конической поверхностей различными плоскостями.

На раздел «Объемы тел и площади их поверхностей» у данных авторов отводится 17 часов. Основная цель подразумевает введение понятия объема многогранника и круглых тел выведение формул для нахождения объемов основных геометрических тел, изученных в курсе геометрии. Понятие объема тела вводится аналогично понятию площади плоской фигуры. Рассматриваются основные свойства и элементы геометрических тел и на их основе выводится формула объема прямоугольного параллелепипеда, а затем прямой призмы и цилиндра. Формулы объемов других круглых тел выводятся с помощью неопределенного интеграла. Формула объема шара используется для вывода формулы площади сферы.

2. *Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. /А.В. Погорелов./ «Просвещение». Москва. 2004 [48].*

Автор данного пособия предлагает изучение многогранников в начале 11 класса. На раздел «Многогранники» отводит 17 часов. Основная цель — познакомить учащихся с основными видами геометрических тел и их элементами. «На материале, связанном с изучением пространственных геометрических тел, повторяются и систематизируются знания учащихся о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, об измерении расстояний и углов в пространстве» [53]. Также в процессе решения геометрических задач, в том числе и задач на доказательства, построение сечений и соответствующих чертежей развиваются пространственные представления учащихся. Практическая направленность курса заключается в большом количестве решения разных типов и классов геометрических задач.

Следующий раздел «Тела вращения» изучается 14 часов. Основная цель — представить круглые тела и рассмотреть их свойства и элементы. Практическая направленность данного курса заключается в том, что большое количество задач представлены «…на вычисление длин, углов и площадей плоских фигур. В ходе их решения повторяются и систематизируются сведения, известные учащимся из курсов планиметрии и стереометрии 10 класса — решение треугольников, вычисление длин окружностей и т. д.» [53], что позволяет вспомнить и повторить пройденный материал. При решении вычислительных задач следует поддерживать достаточно высокий уровень обоснованности выводов.

В сравнении с предыдущим коллективом авторов, данный автор разбивает раздел «Объемы» на два радела, а именно «Объемы многогранников» (отводится 10 часов) и «Объемы и поверхности тел вращения» (17 часов).

Основная цель раздела «Объемы многогранников» заключается в том, что на основе вычислении объема геометрических тел в ходе решения практических задач происходит изучение многогранников и тел вращения. В основе понятия объема и его свойств формируются «…наглядные представления и жизненный опыт учащихся. При выводе формул объемов прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, цилиндра и конуса широко привлекаются приближенные вычисления и интуитивные представления учащихся о предельном переходе. Вывод формулы объема шара проводится с использованием интеграла. С помощью выводов формулы объема наклонного параллелепипеда и общей формулы объемов круглых тел выводятся формулы объема призмы и объема шара соответственно» [53]. Практическая направленность в данном разделе представлена в виде вычислительных, разного вида задач на применение изучаемых формул объема.

Основная цель раздела ««Объемы и поверхности тел вращения»— завершить систематическое изучение тел вращения в процессе решения задач на вычисление площадей их поверхностей. Понятие площади поверхности вводится с опорой на наглядные представления учащихся, а затем получает строгое определение. Практическая направленность курса определяется большим количеством задач прикладного характера, что играет существенную роль в организации дифференцированной работы с учащимися. В ходе решения геометрических и несложных практических задач от учащихся требуется умение непосредственно применять изученные формулы. При решении вычислительных задач следует поддерживать достаточно высокий уровень обоснованности выводов» [53].

3. *Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10-11 классы: учебник / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2013. – 236 [73].*

В данном учебнике разделы «Многогранники» и «Тела вращения» изучаются в 10 классе, отводится 20 и 10 часов соответственно.

В результате изучении раздела «Многогранники» учащиеся должны «…формулировать понятия пирамиды, призмы, параллелепипеда и их элементов; знать их свойства; формулировать понятие боковой и полной поверхности призмы; уметь выполнять чертеж куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, прямых и плоскостей, параллельных и перпендикулярных ребрам и граням данного многогранника; строить сечения многогранников; на изображениях многогранников выделять их невидимые элементы штриховыми линиями; определять и вычислять углы между ребрами и гранями, линейные углы двугранных углов между гранями; научиться применять формулы площади боковой и полной поверхностей призмы и параллелепипеда, пирамиды при решении практических задач» [50].

При изучении следующего раздела «Тела вращения» предполагается, что ученики должны знать понятия цилиндра вращения и конуса вращения, их элементов (основания, высоты, оси, образующей, радиуса основания); перпендикулярного сечения; формулировать понятия сферы и шара, их радиуса и диаметра; уметь изображать вписанные и описанные многогранники и тела вращения.

Дальнейшее изучение многогранников переходит в 11 класс и начинается с раздела «Объемы многогранников» - 10 часов и «Объемы и поверхности круглых тел» - 14 часов. Изучив данные разделы, автор предполагает знания об объеме; вывод формул объема прямоугольного параллелепипеда, призмы, пирамиды; обращает внимание на подобие при вычислении объемов многогранников; предлагает задачи на свойства объемов геометрических тел. Далее идет изучение объема цилиндра, конуса и шара, а так же в данных разделах предлагается изучение площади поверхностей круглых тел.

4. *Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 кл.: учебн. для общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). – М.: Мнемозина. 2015. [62].*

Данное пособие позволяет углубить знания учащихся по геометрии, в нем расширен материал о многогранниках.

Авторы данного пособия на раздел «Многогранники» уделяют всего 7 часов, но в последующем повторении идет продолжении темы «Многогранники» (еще 8 часов). «Цель изучения данного раздела – понимать и формулировать определение многогранных углов, выпуклого многогранника и невыпуклого многогранника, различать их на моделях и чертежах; формулировать определение правильного многогранника; различать их на моделях и чертежах; применять теорему Эйлера для нахождения числа вершин, рёбер и граней многогранников» [53]. Этот раздел завершает изучение геометрии в 10 классе.

Раздел «Круглые тела» начинается в 11 классе и планируется на него очень большое количество времени, а именно 25 часов. После изучения данного раздела авторы подразумевают то, что учащиеся будут «…уметь формулировать и воспроизводить определения цилиндра, конуса и их элементы, а также сферы и шара; различать цилиндры, конусы, сферы и шар на моделях и чертежах с помощью наглядного представления, определять их элементы; выполнять чертежи цилиндра, конуса, сферы и шара; решать задачи на нахождение элементов многогранников и тел вращения; формулировать определение касательной прямой и касательной плоскости к сфере, вписанной и описанной сферы; формулировать определения движения и равенства фигур в пространстве, центральной, осевой и зеркальной симметрий; приводить примеры равных пространственных фигур; указывать элементы симметрии многогранников и тел вращения; приводить примеры симметричных объектов в окружающем мире» [53].

На раздел «Объем и площадь поверхностей» отводится 20 часов. Входят такие параграфы, как: «определение объема, представление объема интегралом, объемы некоторых тел – цилиндра (призмы), конуса (пирамиды), шара; площадь поверхности, площадь сферы, площадь поверхности цилиндра и конуса» [53]. Цель изучения раздела - понимание понятия объёма, формулирование его свойств; решение задач на нахождение объёмов и площадей поверхностей многогранников и круглых тел.

Из анализа учебников можно сделать вывод, что тема «Объемы» во всех анализируемых учебных пособиях рассматривается в 11 классе. Основная цель изучаемой темы «Объем» - «…продолжить систематическое изучение многогранников и тел вращения в ходе решения задач на нахождения их объемов. Каждый авторский коллектив вносит в содержание своих учебников что-то новое, отличающее их от других» [53]. Отличается последовательностью вводимого материала. Так, например авторы учебника Л.С. Атанасян и др. и И.М. Смирнова, В.А. Смирнов рассматривают данную тему в одном разделе, предлагая изучение объема многогранников и круглых тел вместе, авторы А.В. Погорелов и И.Ф. Шарыгин разбивают изучение темы «Объемы» на два раздела, а именно на раздел «Объемы многогранников» и на раздел «Объемы круглых тел», при этом дают такой же развернутый материал, как и другие авторы.

§5. Анализ содержания задачного материала темы «Объемы геометрических тел» в учебниках разных авторов

Анализируя задания на нахождения объемов геометрических тел можно прийти к выводу, что равноценность и равнозначность предлагаемых задач разными авторами учебников, методических рекомендаций не может идти и речь. Все дело в том, что задачи на нахождение объемов геометрических тел проверяют уровень развития пространственных представлений о многогранниках, круглых тел и их комбинаций [84]. Для успешного выполнения задач требуется знание основных формул, умение проводить дополнительные построения на изображениях пространственных фигур, работать с формулами, выполнять арифметические действия и преобразования числовых выражений.

Был сделан анализ задач по учебнику Л.С. Атанасяна [16] и представлен в таблице 5. Стереометрические задачи, приведенные в учебнике можно разделить по уровню сложности на две категории: базовый уровень сложности, задачи повышенного уровня сложности (разделены по степени сложности) и дополнительные задачи.

Таблица 5

Типы задач по уровню сложности

Типы задач	**Базовый уровень сложности** (I)	**Повышенный уровень сложности**		**Дополнительные задачи**
		* (II)	** (II)	
Задачи на вычисление многогранников, тел вращения		673, 674, 675	812	
Задачи на вычисление объема параллелепипеда	648, 649, 652, 653,	654, 655, 656, 657		725, 726, 727, 728, 729
Задачи на вычисление объема прямой призмы	658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665			730, 732, 736
Задачи на вычисление объема цилиндра	666, 669		809	745, 756
Задачи на вычисление объема наклонной призмы	676, 677, 678, 679, 683	680, 681		735
Задачи на вычисление объема пирамиды	684, 685, 686, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 695, 696	687, 694	807	737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 754
Задачи на вычисление объема усеченной пирамиды	697	698, 699, 700		744
Задачи на вычисление объема конуса	701, 702, 703, 704, 705, 707			747, 748, 749, 751
Задачи на вычисление объема усеченного конуса	708, 709			
Задачи на вычисление объема шара	710			755, 757, 758, 759, 760
Задачи на вычисление объема шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора	715, 719	717, 718, 720, 721		
Задачи на повторение	764, 765, 766, 767			
Задачи на отношение объемов двух подобных тел	671, 672, 716		802, 805, 811	750, 753, 762
Задачи на доказательство	693, 724	682	784, 803, 806, 808	733, 734, 746
Задачи на сравнение	711			
Задачи на комбинации геометрических тел	712		810	748, 749, 751, 754, 755, 756, 757, 758, 759

I тип. *Задачи на вычисление многогранников, тел вращения.*

Задача 673. «Сечение тела, изображенного на рисунке 189, плоскостью, перпендикулярной к оси *Ox* и проходящей через точку с абсциссой *x*, является квадратом, сторона которого равна $\frac{1}{x}$. Найдите объем этого тела.» ([16], с.171).

II тип. *Задачи на вычисление объема параллелепипеда.*

Задача 652. «Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 13$ см, *BD* = 12 см и $BC_1 = 11$ см.» ([16], с.161).

III тип. *Задачи на вычисление объема прямой призмы.*

Задача 661. «Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если *AB* = *BC*, $\angle ABC = \alpha$, диагональ A_1C равна *l* и составляет с плоскостью основания угол β.» ([16], с.164).

IV тип. *Задачи на вычисление объема цилиндра.*

Задача 669. «Площадь основания цилиндра равна *Q*, а площадь его осевого сечения равна *S*. Найдите объем цилиндра.» ([16], с.165).

V тип. *Задачи на вычисление объема наклонной призмы.*

*Задача 677. «*Найдите объем наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если *AB* = *BC* = *CA* = *a*, ABB_1A_1 - ромб, $AB_1 < BA_1$, $AB_1 = b$, двугранный угол с ребром *AB* прямой..» ([16], с.171).

VI тип. *Задачи на вычисление объема пирамиды.*

Задача 685. «Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.» ([16], с.172).

VII тип. *Задачи на вычисление объема усеченной пирамиды.*

Задача 697. «Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны *a* и *0,5a*, апофема боковой грани равна *a*. Найдите объем усеченной пирамиды.» ([16], с.173).

VIII тип. *Задачи на вычисление объема конуса.*

Задача 704. «Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объем конуса, если его высота равна *H*.» ([16], с.173).

IX тип. *Задачи на вычисление объема усеченного конуса.*

Задача 708. «Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 м. Найдите объем усеченного конуса.» ([16], с.173).

X тип. *Задачи на вычисление объема шара.*

Задача 710. «Пусть V – объем шара радиуса R, а S – площадь его поверхности. Найдите S и V, если R = 4 см.» ([16], с.177).

XI тип. *Задачи на вычисление объема шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.*

Задача 717. «Найдите объем шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.» ([16], с.177).

XII тип. *Задачи на повторение.*

Задача 765. «В правильной четырехугольной пирамиде *MABCD* сторона *AB* основания равна $6\sqrt{2}$ см, а боковое ребро *MA* равно 12 см. Найдите: а) площадь боковой поверхности пирамиды; б) объем пирамиды; в) угол наклона боковой грани к плоскости основания; г) угол между боковым ребром и плоскостью основания.» ([16], с.182).

XIII тип. *Задачи на отношение объемов двух подобных тел.*

Задача 671. «В цилиндр вписана правильная n–угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$; д) n = произвольное целое число.» ([16], с.165).

XIV тип. *Задачи на доказательство.*

Задача 693. «Докажите, что если в пирамиду можно вписать шар, то объем V пирамиды можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} S \cdot r$, где S – площадь полной поверхности пирамиды, а r – радиус вписанного в пирамиду шара.» ([16], с.172).

XV тип. *Задачи на сравнение.*

Задача 711. «Диаметр Луны составляет (приблизительно) четвертую часть диаметра Земли. Сравните объемы Луны и Земли, считая их шарами.» ([16], с.177).

XVI тип. *Задачи на комбинации геометрических тел.*

Задача 751. «Найдите объем конуса, если радиус его основания равен 6 дм, а радиус вписанной в конус сферы равен 3 дм.» ([16], с.181).

В учебнике Л.С. Атанасяна представлен разнообразный задачный материал, направленный на закрепление основных формул объема геометрических тел и формирование всех необходимых умений и навыков. В соответствии с ожидаемыми результатами обучения, решение задач каждого уровня сложности должно быть хорошо отработано в классе со всеми учащимися. Для формирования умений задач может быть недостаточно, в этом случае нужно будет их дополнить.

В методическом пособии для учителя Е.В. Потоскуева (по учебнику Е.В. Потоскуева, Л. И. Звавича [50,51]) представлено и разобрано большое количество задач повышенного уровня на нахождение объемов геометрических тел. В задачнике [52] этих же авторов (к учебнику геометрия 11 класс [49]) дан огромный перечень разного вида задач, начиная с самых простых (основных) и заканчивая повышенным уровнем сложности.

В учебнике автора А.В. Погорелова [48] практическая направленность курса определяется большим количеством задач прикладного характера. Авторы И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [62] акцент делают на прикладную направленность предлагая различные типы и виды задач по теме «Объемы геометрических тел».

На основе проведенного анализа, можно сделать вывод, что задачный материал, представленный в учебниках геометрии основной школы – довольно многообразен. Задачный материал всех рассмотренных учебников соответствует теоретическому материалу.

§6. Анализ диссертационных исследований и опыта работы учителей по теме «Объемы геометрических тел»

Рассмотрим несколько диссертаций близких нашей теме с целью анализа изложения материала по теме «Методика обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы».

Таблица 6

Содержание диссертационных исследований по данной теме

Ф.И.О. автора	Название диссертации	Год	Проблема исследования	Цель исследования	Предмет исследования
Гаджиагаев Ш.С.	«Реализация принципа укрупнения дидактических единиц при изучении площадей и объемов геометрических фигур в основной школе как средства систематизации материала и повышения качества знаний учащихся» [15].	2006	«Проблема исследования состоит в выявлении возможностей изучения площадей и объемов геометриических фигур в основной школе на основе реалиизации УДЕ, на более раннем этапе по сравнению с традиционной методикой» [15].	«Цель исследования - обоснование целесообразности более раннего изучения площадей и объемов геометрических фигур на основе реализации принципа УДЕ, направленного на систематизацию этого материала и повышение качества знаний учащихся, а также разработка соответствующей системы упражнений и методики ее реализации» [15].	«Предмет исследования - процесс формирования знаний по теме «Площадь и объем» на основе реализации принципа УДЕ в основной школе» [15].
Горшкова А.В.	«Использование информационных технологий при изучении свойств круглых тел в условиях дифференцированного обучения геометрии в средней школе» [22].	2003	«Проблема исследования: связанна с внедрением информационной технологии в процесс обучения школьной геометрии в условиях дифференцированного обучения» [22].	Цель - теоретическое обоснование и создание программно-методического обеспечения для изучения свойств круглых тел в условиях дифференцированного подхода к их изучению.	Предмет исследования: методика изучения свойств круглых тел с применением информационных технологий в условиях дифференцированного обучения.
Крайнева Л.Б.	«Методика проведения спецкурса по геометрии для старшеклассников в условиях личностно-	2007	«Научная проблема диссертации состоит в том, чтобы с позиций современной науки исследовать психоло-	«Целью исследования является создание научно-обоснованного специального курса по геометрии «Правильные	«Предметом исследования служат содержание, методы и формы проведения спецкурса по геомет-

	ориентированного обучения» [33].		го-педагогические и методические закономерности постановки специальных курсов по геометрии для учащихся старших классов в условиях личностно-ориентированного обучения» [33].	многогранники», реализующего личностно-ориентированный подход к обучению» [33].	рии по теме «Правильные многогранники» в старших классах средней школы» [33].
Мехтиев М.Г.	«Методика обучения геометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы с использованием компьютера» [40].	2002	«Проблема: выявление теоретико-методических основ обучения геометрии старшеклассников общеобразовательных школ с использованием информационных технологий» [40].	«Целью настоящего исследования является разработка обобщенных схем работы компьютерных обучающих программ на различных уроках и отдельных этапах урока; на основе использования обобщенных схем обоснование методов и приёмов создания компьютерных обучающих программ и их использования» [40].	«Предметом исследования является процесс изучения курса геометрии в 10-11 классах средней школы с использованием компьютерных обучающих программ» [40].
Мусаввиров Ш.	Методика изучения геометрических величин в курсе планиметрии	2009	«Проблема - необходимость в коррекции преподавания математики относительно изучения понятия величины и её измерений, доступного для понимания учащихся» [42].	«Цель исследования заключается в разработке доступной для школьников и корректной в научном отношении методики изучения геометрических величин в курсе математики 7 - 9 -х классов» [42].	Предметом исследования является система методических приемов, методов и средств, применяемых с целью лучшего усвоения учащимися геометрических величин и их измерений при изучении математики.

Продолжение таблицы 6

Овчинникова Е.Е.	Использование метода площадей и объемов при решении школьных геометрических задач	2002	Проблема исследования состоит в совершенствовании методической системы обучения геометрии на основе введения в школьный курс методов решения задач.	Цель исследования состоит в разработке методики обучения учащихся методу площадей и объемов.	Предмет исследования: метод площадей и объемов, применяемый при решении геометрических задач.

Ш.С. Гаджиагаев в работе «Реализация принципа укрупнения дидактических единиц при изучении площадей и объемов геометрических фигур в основной школе как средства систематизации материала и повышения качества знаний учащихся» (2006г.) [15] формулирует проблему исследования: «…выявление возможностей изучения площадей и объемов геометрических фигур в основной школе на основе реализации УДЕ на более раннем этапе по сравнению с традиционной методикой. Цель исследования – обоснование целесообразности более раннего изучения площадей и объемов геометрических фигур на основе реализации принципа УДЕ, направленного на систематизацию этого материала и повышение качества знаний учащихся, а также разработка соответствующей системы упражнений и методики ее реализации» [15].

Также Ш. Мусаввиров в своей работе рассматривает «…проблему исследования, связанную с геометрическими величинами, а именно необходимость в коррекции преподавания математики относительно изучения понятия величины и её измерений, доступного для понимания учащихся…» [42]. Цель его исследования заключается в разработке доступной для школьников и корректной в научном отношении методики изучения геометрических величин в курсе математики 7 - 9 -х классов. По итогу работы автор разработал свою методику единого подхода к изучению геометрических величин в геометрии и дал рекомендации учителям.

А.В. Горшкова рассматривает применение информационных технологий при изучении свойств круглых тел в условиях дифференцированного обучения геометрии в средней школе (2003 г.) [22]. Автор формулирует цель как создание программно-методического обеспечения для изучения свойств круглых тел в условиях дифференцированного подхода к их изучению.

Л.Б. Крайнева предлагает методику проведения спецкурса по геометрии для старшеклассников в условиях личностно-ориентированного обучения (2007г.) [33]. «Научная проблема диссертации состоит в том, чтобы с позиций современной науки исследовать психолого-педагогические и методические закономерности постановки специальных курсов по геометрии для учащихся старших классов в условиях личностно-ориентированного обучения. Целью исследования является создание научно-обоснованного специального курса по геометрии, реализующего личностно-ориентированный подход к обучению» [33]. Е.Е. Овчинникова предлагает использовать метод площадей и объемов при решении школьных геометрических задач (2002г.) [45]. Проблема исследования состоит в совершенствовании методической системы обучения геометрии на основе введения в школьный курс методов решения задач. Цель исследования состоит в разработке методики обучения учащихся методу площадей и объемов. Предмет исследования: метод площадей и объемов, применяемый при решении геометрических задач [14].

Анализ педагогического опыта включает в себя: анализ педагогических целей, задач; анализ содержания и методов обучения; анализ деятельности учителя; анализ деятельности учащихся.

Существуют разные формы представления педагогического опыта – это может быть презентация на тему изучения, статья, методическое портфолио, мастер-класс, открытый урок, семинар-практикум, творческий отчет, выставка, реферат, различные конкурсы педагогического мастерства.

В любом случае, логика представления должна включать в себя цели, задачи, анализ содержания деятельности учителя и учащихся.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [78] предложено большое количество конспектов к урокам по теме исследования. Конспекты уроков разработаны под различные учебники по геометрии разных авторов, но значительную часть составляют разработки по учебнику авторов Л.С. Атанасян и др. В каждом конспекте учитель указывает цели, задачи данного урока и представляет пошаговую разработку метода обучения темы. Например, учитель математики Е.Л. Кузнецова предлагает конспект к уроку по геометрии на тему «Объемы тела. Решение занимательных задач» 11 класс вместе с презентацией. В данном конспекте учитель предлагает учащимся ряд задач, которые могут показаться легкими, но именно с подобными задачами им приходиться встречаться в жизни, на экзамене по математике.

На сайте «Информ урок» [76] не менее интересны и содержательны, представлены презентации к урокам по данной теме. Решение задач по стереометрии, а именной по теме исследования для учащихся воспринимается сложно. Времени мало не то, что на решение задач, но и на объяснение нового материала. Поэтому учителя предлагают и разрабатывают презентации. Н.А. Лавренцева учитель математики и информатики города Воронежа предлагает презентацию по геометрии по теме «Объемы тел». В данной презентации перечислены основные свойства и формулы объемов тел, сопровожденные чертежами. Упомянутую презентацию можно использовать как таблицы при объяснении нового материала или при обобщении темы. Хорошим подспорьем при решении задач может оказаться содержание презентации, используя его как справочник.

На сайте учителя математики И.А. Шатиловой [79] представлен материал для изучения геометрии 11 класса по темам. К каждой теме разработаны поучительные презентации и предложены тесты. Также можно на данном сайте посмотреть рабочие программы по геометрии, методические пособия, тесты по ЕГЭ.

В статье Г.П. Бевз «Прикладная направленность темы «Тела вращения» [6] рассматривается прикладная направленность последнего курса геометрии. Автор статьи предлагает рассмотреть небольшое количество задач на основе прикладной направленности, советует предложить учащимся в процессе изучения данной темы решить их.

В статье А.А. Каюповой «Анализ учебных программ и подходов к изложению теоретического материала по теме «Объемы тел» в школьных учебниках геометрии 10-11 классов» [29] проведен анализ рабочих программ и учебников по геометрии 11 класса, который позволил сделать вывод о необходимости разработки методики обучения разделу «Объем тел», основанный на общем подходе к выводу формул объемов. Автор статьи анализирует учебники следующих авторов: И.М. Смирнова, А.Д. Александров, Л.С. Атанасян, И.Ф. Шарыгин и рассматривает подходы к изложению теоретического материала «Объем тел». По-мнению автора статьи, «… учебный материал по выводу формул для вычисления объемов в учебнике автора Л.С. Атанасяна труден для восприятия учащимися, особенно учитывая их разный уровень восприятия информации и подготовленности по предмету…».

В статье Ю.М. Горшковой [23] предложены задачи на вычисления объема многогранника, рассмотрен алгоритм вычисления объема и сделан вывод о том, что «… данный подход к вычислению объема многогранников по их комбинаторному строению и заданным длинам ребер полезно использовать на уроках в школьном курсе при изучении стереометрии…».

Проанализировав материалы, представленные в помощь учителям математики, а именно по геометрии по теме «Объемы геометрических тел» можно сказать, что его достаточно много и он достаточно разнообразен, учителя всеми возможными способами делятся своим опытом. Каждый учитель может найти под свою программу любой материал, будет это рабочая программа, либо разработка уроков, презентация и т. д. и взять из него то, что именно поможет в изучении рассматриваемой темы.

Выводы по первой главе

Рассмотрим основные выводы по теме исследования, полученные в первой главе.

1. В работе рассмотрены различные подходы к определению понятия объема геометрического тела в школьных учебниках геометрии. Было выделено три подхода: разбиение на единичные кубы; понятие вводится аксиоматически; понятие вводится конструктивно.

2. Описаны основные цели обучения теме «Объемы геометрических тел». Выделены цели-ориентиры, в нашем случае их пять: приобретение учебной информации УУД при изучении понятий, теорем, типовых задач; контроль усвоения теоретических знаний по теме исследования; применение знаний и интеллектуальных умений при решении геометрических и учебных задач; формирование коммуникативных УУД и формирование организационных умений. В соответствии к каждой цели определены свои учебные задачи и средства, необходимые для реализации данных целей.

3. Определены основные требования к знаниям, умениям, навыкам по теме «Объем геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

4. В работе проведен анализ содержания теоретического материала темы «Объемы геометрических тел» в учебниках разных авторов. Были проанализированы учебники для общеобразовательной школы базового уровня: Л.С. Атанасян и др.,[16] А.В. Погорелов [48], И.Ф. Шарыгин [73] и И.М. Смирнова [62].

5. Анализируя задания на нахождения объемов геометрических тел можно прийти к выводу, что равноценность и равнозначность предлагаемых задач разными авторами учебников, методических рекомендаций не может

идти и речь. Нами были рассмотрены типы задач по учебнику геометрии 10-11 класса автора Л.С. Атанасяна [16].

6. Проанализировав материалы, представленные в помощь учителям математики, а именно по теме «Объемы геометрических тел» можно сказать, что его достаточно много и он достаточно разнообразен, учителя всеми возможными способами делятся своим опытом.

Глава II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§7. Система задач по теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы

Система задач, предлагаемая в данной работе, удовлетворяет следующим требованиям.

1. Система задач охватывает все основные типы по теме «Объемы геометрических тел».

2. Система задач направлена на формирование умения применять тот или иной способ решения в разных ситуациях.

3. Система задач содержит достаточное число заданий для усвоения основных формул для вычисления объемов геометрических тел.

4. Система задач содержит задания по возрастанию трудности (т.е. от простого к сложному). Данный материал может быть использован при подготовки к ЕГЭ.

5. Система задач содержит задачи, разнообразные по форме, содержанию и способу решения.

Для составления данной системы задач использовались следующие учебники, методические пособия, задачники по геометрии для общеобразовательных учреждений следующих авторов: Л.С. Атанасяна, Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича, И.М. Смирновой и В.А. Смирнова и материалы сайты «Решу ЕГЭ».

Отметим, что тема «Объемы геометрических тел» включает в себя такие подтемы: «объем прямоугольного параллелепипеда; объем параллелепипеда и объем призмы; объем пирамиды; объем усеченной пирамиды; объем цилиндра; объем конуса; объем усеченного конуса; объем шара; объем шарового сегмента и сектора» [53]. В связи с этим разработаем системы задач по каждой из указанных подтем.

Система задач на тему «Объем прямоугольного параллелепипеда»:

Задача 1. [77] «Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда».

Ответ: 48.

Задача 2. [77] «Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру».

Формула для вычисления объема: $V = Sh$, **где** S **− площадь грани, а** h **− высота перпендикулярного к ней ребра**.

Ответ: 8.

Задача 3. [77] «Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объем параллелепипеда».

«Решение: Длина диагонали параллелепипеда равна

$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{20 + a_3^2}$.

Длина третьего ребра тогда $a_3 = \sqrt{d^2 - 20} = 4$. Получим, что объем параллелепипеда $V = a_1 a_2 a_3 = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$» [77].

Ответ: 32.

Задача 4. [16] «В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ B_1D составляет с плоскостью основания угол в 45º, а двугранный угол A_1B_1BD равен 60º. Найдите объем параллелепипеда, если диагональ основания равна 12 см».

Ответ: $432\sqrt{3}$ см³.

Отметим, что нами представлены задачи (1-4) по теме «Объем прямоугольного параллелепипеда», относящиеся к таким типам, как задачи на вычисления. По данной теме большую часть задач относятся к данному типу.

Система задач на тему «Объем параллелепипеда и объем призмы»:

Задача 5. [77] «Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$».

Ответ: 4,5.

Задача 6. [51] «Прямая призма описана около шара радиуса 4 см. Периметр основания призмы равен 42 см. Найдите объем и площадь поверхности призмы».

Ответ: 672 см^3, 504 см^2.

Задача 7. [51] «В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная призма. Радиус, проведенный к одной из вершин основания призмы, образует с плоскостью боковой грани угол в 30º. Найдите объем призмы».

«Решение: Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - вписанная в данный шар с центром K правильная призма. Это означает, что $K \in BD_1, BD_1 = 2R$ и в прямоугольном ΔBC_1D_1 ($\angle C_1BD_1 = 30°$) имеем: $C_1D_1 = \frac{1}{2}BD_1 = R, BC_1 = BD_1 \cdot \cos 30° = R\sqrt{3}$. Тогда в прямоугольном ΔBC_1C находим $CC_1 = \sqrt{C_1B^2 - BC^2} = R\sqrt{2}$, значит, объем призмы равен $BC^2 \cdot C_1C = R^2 \cdot R\sqrt{2} = R^3\sqrt{2}$» [51].

Ответ: $R^3\sqrt{2}$.

Задача 8. [51] «Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной 25 см и меньшей диагональю 30 см. Диагональное сечение, проходящее через большие диагонали оснований, перпендикулярно основаниям, а меньшая диагональ этого сечения равна 37 см. Найдите объем параллелепипеда, если боковое ребро равно 13 см».

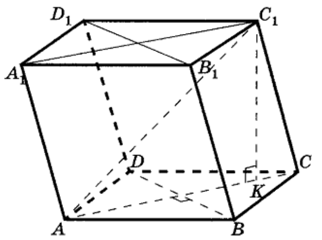
Решение: [51] «Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - данный параллелепипед, в котором $AB = 25, BD = 30, BB_1 = 13$; плоскость сечения ACC_1A_1 перпендикулярна плоскости ABC и $AC_1 = 37$.

Находим $S_{\text{осн}} = 2S_{\Delta ABD} = 2\sqrt{40 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 10} = 600$.

Так как $ACC_1 \perp (ABC)$, то высота C_1K параллелепипеда расположена в ACC_1 и $K \in AC$. В ромбе $ABCD$ находим $AC^2 = 4AB^2 - BD^2 = 4 \cdot 625 -$

$900 = 1600$, откуда $AC = 40$. Тогда $S_{\Delta ACC_1} = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 32} = 240$, поэтому $C_1K = \frac{2S_{\Delta ACC_1}}{AC} = \frac{2 \cdot 240}{40} = 12$. Тогда объем параллелепипеда равен $S_{\text{осн}} \cdot C_1K = 600 \cdot 12 = 7200$ (см^3)».

Ответ: 7200 см^3.



Задача 9. [16] «Докажите, что объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и пересекающей их».

Отметим, что нами представлены задачи (5-9) по теме «Объем параллелепипеда и объем призмы», относящиеся к таким типам, как задачи на вычисления – это №5, 7 и 8. Задача №6 относиться к такому типу решения с помощью метода комбинации тел; задача № 9 – на доказательство.

Система задач на тему «Объем пирамиды»:

Задача 10. [51] «Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 15 дм, а большее основание 24 дм. Высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание. Найдите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 300 дм^2».

Решение: «Высота PO пирамиды $PABCD$ проходит через центр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию $ABCD$, то все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью ее основания равные двугранные углы (обозначим $\varphi = \angle OKP = \angle OMP = \angle OHP$); точка O – основание высоты PO пирамиды – является серединой отрезка HM, соединяющего середины оснований трапеции, при этом точка O является вершиной прямого угла треугольника AOD.

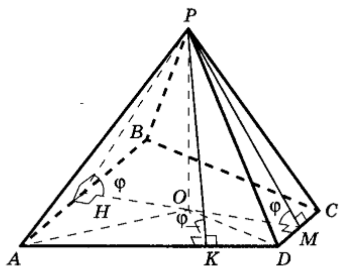
Если *H, M* и *K* – точки касания вписанной в трапецию *ABCD* окружности, то $AK = AH = \frac{1}{2}AB = 12$, значит, $KD = dm = 15 - 12 = 3$, т. е. $CD = 6$.

В прямоугольном треугольнике *AOD* находим: $OK = \sqrt{AK \cdot KD} = \sqrt{12 \cdot 3} = 6$. Значит, высота *MH* трапеции равна *2OK=12,* а ее площадь равна $\frac{CD+AB}{2} \cdot MH = \frac{6+24}{2} \cdot 12 = 180$.

Так как боковые грани пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью ее основания и проектируются в треугольники *AOB, BOC, COD* и *DOA*, составляющие это основание, то $S_{осн} = S_{бок} \cdot \cos\varphi$, т.е. $\cos\varphi = \frac{180}{300} = \frac{3}{5}$, значит, $tg\varphi = \frac{4}{3}$.

Так как *OM = OK = 6*, то *OP = OM · tg* φ = *6* · $\frac{4}{3}$ = *8*. Тогда объем пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 8 = 480$ дм^3 » [51].

Ответ: 480 дм^3.



Задача 11. [77] «В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD = 12, AB = 5, AA_1 = 8$. Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M - точка на ребре AA_1, причем $AM = 5$».

Задача 12. [51] «Две грани треугольной пирамиды – равносторонние треугольники, плоскости которых перпендикулярны. Найдите объем пирамиды, если длина ее наибольшего ребра равна 1».

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{36}$.

Задача 13. [51] «Найдите объем тетраэдра, если одно из его ребер равно $2\sqrt{3}$, а каждое из остальных пяти ребер равно 4».

Замечание. Сначала строится треугольник *ABC*, после чего на перпендикуляре к плоскости *ABC*, проведенном через середину медианы *AK* треугольника *ABC*, выбирается вершина *P* тетраэдра.

Ответ: $4\ \overline{3}$.

Задача 14. [51] «В тетраэдре *MABC* через точки *K* на ребре *MA (MK : KA = 3 : 4)*, *T* на ребре *MB (MT = TB)* и *E* на ребре *MC (ME = 0,2MC)* проведено сечение *KTE*. Объем тетраэдра *MKTE* равен 3м^3. Найдите объем пятигранника *KTEABC*».

Решение: [51] «Обозначим объемы тетраэдров *MABC*, *MKTE* и пятигранника *KTEABC* соответственно V, V_1 и V_2. Тогда имеем: $\frac{V}{V_1} = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{MK \cdot MT \cdot ME} = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{\frac{3}{7}MA \cdot \frac{1}{2}MB \cdot \frac{1}{5}MC} = \frac{70}{3}$ **или** $\frac{V}{3} = \frac{70}{3}$, **откуда** $V = 70$, **значит,** $V_2 = V$-$V_1 = 70 - 3 = 67$ (м^3)».

Ответ: 67 м^3.

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Объем пирамиды», которые (№10, 12, 13 и 14) относятся к пииту задач на вычисления, задача под № 11 решается с помощью метода дополнительного построения и метода подобия (на основании подобия треугольников.

Система задач на тему «Объем усеченной пирамиды»:

Задача 15. [16] «Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны *a* и *0*,5*a*, апофема боковой грани равна *a*. Найдите объем усеченной пирамиды».

Ответ: $\frac{7\ \overline{47}a^3}{192}$.

Задача 16. [16] «Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 24 дм и 18 дм. Каждое боковое ребро равно 25 дм. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной плоскости основания и делящей боковое ребро пополам. Найдите объем полученной усеченной пирамиды».

Ответ: 1260 дм^3.

Задача 17. [16] «В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 4 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, равна 15 $см^2$. Найдите объем усеченной пирамиды».

Ответ: $38\sqrt{2}$ $см^3$.

Задача 18. [52] «Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, диагональ которой 11 см, боковое ребро 9 см и разность между сторонами оснований равна 8 см».

Ответ: $289\frac{1}{3}$ $см^3$.

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Объем усеченной пирамиды». Задачи под № 15, 17 и 18 относятся к типу решения – на вычисление, а задачу № 16 можно отнести к методу подобия.

Система задач на тему «Объем цилиндра»:

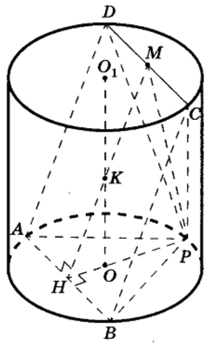
Задача 19. [51] «Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно a, описан цилиндр так, что все вершины пирамиды находятся на окружностях оснований цилиндра. Найдите объем и площадь боковой поверхности цилиндра».

Решение: [51] «Пусть вершина P данной пирамиды $PABCD$ лежит на окружности нижнего основания описанного около этой пирамиды цилиндра, центрами оснований которого служат точки O и O_1.

Так как каждое ребро пирамиды равно a, то в правильном ΔABP находим: $PH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, значит, $OH = \frac{1}{3}PH = \frac{a\sqrt{3}}{6}, OP = \frac{2}{3}PH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда радиус R основания цилиндра равен OP, т.е. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Если точки H и M – середины противоположных сторон соответственно AB и CD квадрата $ABCD$ (основания данной пирамиды), то $MH = a$, причем середина K отрезка HM является серединой высоты OO_1 цилиндра. А так как плоскость MPH перпендикулярна плоскости основания цилиндра и проходит через центр O его основания, то высота OO_1 цилиндра лежит в этой плоскости, и $OO_1 = 2OK$. Находим OK.

В прямоугольном ΔHOK имеем $OK = \sqrt{HK^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Поэтому $OO_1 = 2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Тогда площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi \cdot R \cdot OO_1 = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$, а его объем равен $\pi \cdot R^2 \cdot OO_1 = \pi \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$».



Ответ: $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$.

Задача 20. [77] «Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой».

Решение: [77] «Обозначим площадь и высоту второй кружки за S_2 и V_2. Тогда объем первой кружки равен: $V_1 = S_1H_1 = \pi {R_1}^2 H_1 = \pi(\frac{2}{3}R_2)^2 2H_2 = \frac{8}{9}V_2$».

Тогда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{9}{8} = 1{,}125$.

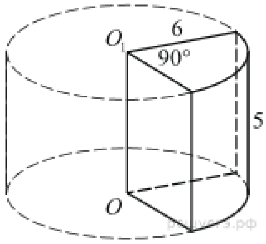
Ответ: 1,125.

Задача 21. [77] «Высота бака цилиндрической формы равна 20 см, а площадь его основания 150 см^2. Чему равен объем этого бака (в литрах)? В одном литре 1000 см^3».

Ответ: 3.

Задача 22. [77] «Найдите объем *V* части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите *V/π*».

Решение: [77] «Объем данной части цилиндра равен $\frac{90°}{360°}V_{цил} = \frac{1}{4}V_{цил} = \frac{1}{4}\pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 \cdot 5 = 45\pi$».



Ответ: 45.

Отметим, что нами представлены задачи (19-22) по теме «Объем цилиндра», относящиеся к таким типам, как задачи на вычисления, а именно № 21 и 22. Задача № 19 относится к методу комбинации тел, а № 20 – задача на сравнение объемов.

Система задач на тему «Объем конуса»:

Задача 23. [16] «Пусть *h, r и V* соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите объем, если высота равна 3 см, а радиус основания 1,5 см».

Формула для вычисления объема: $V = \frac{1}{3}Sh$, где S – площадь основания конуса, h – высота.

Ответ: $2{,}25\pi$ см^3.

Задача 24. [16] «Найдите объем конуса, если площадь его основания равна Q, а площадь боковой поверхности равна P».

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi Q(P^2-Q^2)}}{3\pi}$.

Задача 25. [52] «Докажите, что объем конуса равен одной шестой произведения площади осевого сечения на длину окружности основания».

Задача 26. [52] «Найдите объем и площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 см вокруг прямой, проходящей через вершину меньшего угла треугольника параллельно меньшей его стороне».

Ответ: $1{,}6\pi$ дм^3, $13{,}2\pi$ дм^2.

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Объем конуса». Задачи по данной теме относятся к типу на вычисление - № 23 и 26, задача под № 24 – относится к методу введения вспомогательного элемента и задача № 25 – на доказательство.

Система задач на тему «Объем усеченного конуса»:

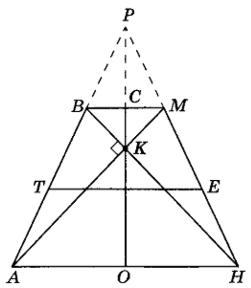
Задача 27. [51] «В усеченном конусе проведены диагонали всех осевых сечений. Диагонали каждого осевого сечения взаимно перпендикулярны, равны d и делят друг друга в отношении 1 : 3. Найдите объем усеченного конуса».

Решение: [51] «Пусть равнобедренная трапеция *ABMH* с взаимно перпендикулярными диагоналями *AM* и *BH* является осевым сечением данного усеченного конуса, причем *BK:KH=MK:AK=1:3, где K=AM∩BH.*

Если точки *O* и *C* – центры соответственно нижнего и верхнего оснований усеченного конуса, причем $KM = \frac{1}{4}d, KH = \frac{3}{4}d$, то в равнобедренных прямоугольных треугольниках *CKM* и *OKH* имеем соответственно $CK = CM = \frac{KM}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{8}$ и $OK = OH = \frac{KH}{\sqrt{2}} = \frac{3d\sqrt{2}}{8}$.

Таким образом, радиусы *R и r* нижнего и верхнего оснований данного конуса равны соответственно: $R = \frac{3d\sqrt{2}}{8}, r = \frac{d\sqrt{2}}{8}$.

Тогда находим объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3}\pi \cdot OC \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot (CK + OK)(R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\left(\frac{3d\sqrt{2}}{8}\right)^2 + \frac{3d\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{26d^2}{64} = \frac{13\pi d^3\sqrt{2}}{192}$».



Ответ: $\frac{13\pi d^3\sqrt{2}}{192}$.

Задача 28. [52] «Радиусы оснований усеченного конуса R и r (R>r), образующая наклонена к плоскости основания под углом в 45°. Найдите объем».

Ответ: $\frac{\pi}{3}(R^3 - r^3)$.

Задача 29. [52] «Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 21 см, а его образующая 30 см. Плоскость, параллельная основаниям, делит боковую поверхность конуса на равновеликие части. Найдите отношение объемов полученных усеченных конусов».

Указание: рассмотреть площадь боковой поверхности исходного конуса как сумму площадей полученных, далее выразить новый радиус через образующую верхнего конуса, подставив в равенство двух площадей найти значение образующей, далее находим средний радиус и высоты полученных конусов.

Ответ: 62 : 109.

Отметим, что нами представлены такие типы задачи по теме «Объем усеченного конуса»: №27 – используется метод дополнительного построения, № 28 – на вычисление, а при решении задачи № 29 используется метод площадей – на сравнение объемов.

Система задач на тему «Объем шара»:

Задача 30. [51] «В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2 см. Найдите объем шара, если каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол α».

Решение: [51] «Пусть пирамида $PABC$ с основанием ABC (AB – **гипотенуза** ΔABC) вписана в шар с центром O радиуса R.

Из условия задачи следует, что основание H высоты PH пирамиды является серединой гипотенузы AB и служит центром окружности, описанной около ΔABC. А так как эта окружность является пересечением поверхности шара и плоскости ABC, то ее центр – точка H – принадлежит прямой, проходящей через центр O сферы перпендикулярно плоскости ABC.

Это означает, что плоскость грани PAB пирамиды проходит через центр O сферы и пересекает сферу по окружности R. Треугольник PAB вписан в эту окружность и $O \in PH$.

Пусть PK – диаметр окружности (рис), тогда в прямоугольном ΔAPK имеем: $AP^2 = PK \cdot PH$, **откуда** $PK = \frac{AP^2}{PH}$.

Длины AP и PH найдем в прямоугольном ΔAPH $\angle PAH = \alpha$ $: AP = \frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}, PH = AH \cdot tg\alpha = 1 \cdot tg\alpha = tg\alpha$. Тогда $PK = 2R = \frac{\frac{1}{cos^2\alpha}}{tg\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$, значит, объем шара равен $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{8}{sin^3 2\alpha} = \frac{4\pi}{3sin^3 2\alpha}$».

Ответ: $\frac{4\pi}{3sin^3 2\alpha}$.

Задача 31. [52] «Прямая треугольная призма, стороны основания которой равны 29 см, 35 см и 48 см, описана около шара. Найдите объемы шара и призмы».

Ответ: 972π см^3.

Задача 32. [52] «В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Расстояние от центра шара до стороны основания пирамиды равно $\sqrt{5}$ дм, а до бокового ребра - $\sqrt{3}$ дм. Найдите объем и площадь поверхности шара».

Ответ: 36π см^3.

Задача 33. [52] «Найдите отношение объемов шара радиуса R и равностороннего цилиндра, радиус основания которого равен радиусу шара».

Ответ: 2:3.

Задача 34. [52] «Около шара описаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус. Докажите, что объем цилиндра есть средняя пропорциональная величина между объемами шара и конуса».

Отметим, что нами представлены типы задач по теме «Объем шара», такие как на вычисление при использовании метода комбинации тел. (№30-34). Задача № 33 – на сравнение объемов.

Система задач на тему «Объем шарового сегмента и сектора»:

Задача 35. [16] «Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 5 м и высотой 60 см?».

Формула для вычисления объема: $V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3} h)$.

Ответ: $\frac{942}{125}\pi$ м^3.

Задача 36. [62] «Шар радиуса 10 см пересечен плоскостью, проходящей на расстоянии 4 см от центра шара. Найдите объем отсеченного шарового сегмента».

Ответ: 288π см^3.

Задача 37. [62] «Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его сегмента равен 60 см, а радиус шара – 75 см?».

Формула для вычисления объема: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

Ответ: 112500π см^3.

Задача 38. [16] «Круговой сектор с углом 30º и радиусом R вращается вокруг одного из ограничивающих его радиусов. Найдите объем получившегося шарового сектора».

Ответ: $\frac{2-\sqrt{3}}{3} + R^3$.

Отметим, что нами представлены задачи (35-38) по теме «Объем шарового сегмента и сектора», относящиеся к таким типам, как задачи на вычисления.

Из проведенного анализа задачного материала, представленного в разных учебниках, мы можем сделать вывод: большая часть задач являются задачами на вычисление, очень много задач – на комбинации тел, небольшая часть задач относятся к задачам на доказательство, дополнительные построения, введение вспомогательного элемента. Так же есть задачи на сравнение объемов и задачи, которые решаются с помощью метода объемов.

§8. Методические рекомендации обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы

В настоящем параграфе мы рассмотрим основные вопросы по методике обучения теме «Объемы геометрических тел» включенные в курс геометрии общеобразовательной школы.

В курсе геометрии понятие объема «…определяется как некоторое положительное число, которое ставится в соответствие каждому геометрическому телу, причем выполняются следующие условия: 1) равным многогранникам соответствуют равные числа (иначе, равные многогранники имеют равные объемы); 2) если данный многогранник составлен из нескольких частей, то число, ему соответствующее, равно сумме чисел, соответствующих каждой его части (иначе, объем многогранника, состоящего из нескольких частей, равен сумме объемов этих частей); 3) некоторому определенному многограннику соответствует число 1 (объем некоторого многогранника принимается за единицу)» [7]. В теории доказывается возможность выполнения этих положений.

При изучении объемов геометрических тел, у учащихся и учителя есть возможность пользоваться наглядным представлением об объеме с помощью заготовок. «Могут быть сформулированы общие положения об объемах, которые также принимаются учащимися как очевидные. В процессе изучения продолжается работа по дальнейшему развитию пространственных представлений и пространственного воображения учащихся. Широкие возможности для развития пространственных представлений открываются при использовании, как ранее было сказано, различных наглядных пособий. Работа по изготовлению наглядных пособий с учащимися должна была проведена в начале изучения темы «Многогранники» под руководством учителя» [7]. Эта работа требует определенных знаний и достаточно развитого пространственного воображения. Но и злоупотреблять демонстрацией наглядных пособий не следует, потому что этим избавляет учеников от необходимости напрягать, упражнять воображение и в результате мешает его развитию.

На данный момент представлен большой ряд разнообразных наглядных пособий, и учитель вправе выбирать, какое пособие ему удобнее. Могут быть использоваться выпускаемые наборы многогранников, сделанные из дерева, каркасные модели. Они несут разные дидактические функции. Все они будут полезны на уроках геометрии. Набор деревянных тел демонстративен, дает необходимое представление о форме, они могут служить объектами для определения объемов.

При планировании темы «Объемы геометрических тел» «следует предварительно ее разбить на логически законченные части: это поможет учителю правильно организовать повторение; проводить систематически учет и контроль знаний учащихся; своевременно приготовить средства наглядности; сгруппировать умения и навыки в соответствии с указаниями программы; заблаговременно подобрать соответствующие задачи и упорядочить их; подготовить тематику и содержание самостоятельных и контрольных работ, а также другие дидактические материалы» [7].

Тема «Объемы геометрических тел» изучается в 11 классе и отводится на изучение этой темы 15-19 часов (в зависимости от учебника). Тема разбивается на следующие подтемы:

1. Объем прямоугольного параллелепипеда (2 часа).
2. Объем призмы (2 часа).
3. Объем пирамиды и объем усеченной пирамиды (3 часа).
4. Контрольная работа №1. (1 час).
5. Объем цилиндра (2 часа).
6. Объем конуса и объем усеченного конуса (3 часа).
7. Объем шара и его частей (3 часа).
8. Контрольная работа №2. (1 час).

В итоге изучения разделов 1-3 и 5-7 провести контрольные работы. Самостоятельные работы проводятся по всем разделам темы (Приложение 1).

Предварительно, прежде, чем приступить к изучению темы «Объемы геометрических тел», следует повторить определение многогранника, его частей и свойств; формулы площадей. Такую работу можно провести в виде теста.

1. Объем прямоугольного параллелепипеда (2 часа).

*Цель: «*обобщить знания учащихся о свойствах площадей и объемов; доказать формулу объема прямоугольного параллелепипеда; формировать умение применять их при решении задач; проверить знания, навыки и умения при изучении темы «Объем прямоугольного параллелепипеда»» [53].

Тест (Приложение 1).

Надо заметить, что изучение данной темы начинается с введения понятия объема. В разных учебных пособиях по геометрии представлены различные подходы к введению этого понятия, которые были рассмотрены нами в §1. Подходя к рассмотрению темы «Объемы геометрических тел», надлежит разъяснить учащимся, что значит измерить объем тела. Учащимися должно быть твердо усвоено, что измерить объем тела – значит сравнить его с другим телом, объем которого принят за единицу; вместе с тем они должны знать, что за единицу измерения объема геометрического тела принимается куб, ребро которого равно какой-нибудь единице длины. Также должно быть разъяснено учащимся, что объемом тела называется число, указывающее, сколько раз принята единица объема или ее часть содержится в данном теле.

После повторения перечисленного материала следует указать учащимся, что формула объема прямоугольного параллелепипеда, которую они изучали в начальной школе, должна быть выведена при помощи цепи логических рассуждений. Доказывается теорема: *объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений*. Должны быть рассмотрены три случая: измерения (при одной и той же единице) ребер a, b и c прямоугольного параллелепипеда 1) целые числа; 2) дробные числа; 3) иррациональные числа.

1. Пусть ребра прямоугольного параллелепипеда выражены целыми числами a, b и c. Сечениями, параллельными и перпендикулярными к плоскостям оснований прямоугольного параллелепипеда, последний разбивается сначала на a слоев, толщиной в единицу линейной меры, затем каждый из a слоев на b брусков, ширина и высота которых равна единице линейной меры, и, наконец, каждый брусок – на c кубов, каждое ребро которых равно единице длины. Таким образом, находят, что $V = a \cdot b \cdot c$ куб.ед.

2. Затем рассматривается вычисление объема прямоугольного параллелепипеда, ребра которого выражены дробными числами. Указывается, что в данном случае нужно привести дроби, выражающие измерения прямоугольного параллелепипеда, к общему знаменателю, предположим, к знаменателю q, и разбить параллелепипедом приемом, указанным выше, на кубы, каждое ребро которых равно $\frac{1}{q}$ единицы длины.

Если ребра параллелепипеда $a = \frac{a_1}{q}, b = \frac{b_1}{q}, c = \frac{c_1}{q}$, то $V = a_1 b_1 c_1 = aq \cdot bq \cdot cq$ (куб.ед. с ребром, равным $\frac{1}{q}$) = $a \cdot b \cdot c \quad q^3$ **(куб. ед. с ребром, равным** $\frac{1}{q}$**)** = $a \cdot b \cdot c$ (куб.ед. с ребром, равным 1), так как в кубе с ребром, равным 1, куб с ребром, равным $\frac{1}{q}$, содержится q^3 раз (на основании первого случая).

3. Наконец, «…вычисляется объем прямоугольного параллелепипеда, если одно, два или все три его ребра несоизмеримы с единицей, т.е. их мерой являются иррациональные числа (таких приемов несколько).

Нужно отметить, что данный способ вывода формулы объема прямоугольного параллелепипеда не рекомендуется предлагать в систематическом курсе стереометрии с вычислением объема параллелепипеда, с ним можно ознакомить учащихся при повторении курсе стереометрии или на внеурочной деятельности» [7].

Следует обратить внимание, что формула объема прямоугольного параллелепипеда $V = a \cdot b \cdot c$ иначе записывается так: $V = S \cdot h, где\ S$ –площадь основания, h – высота параллелепипеда. Такая форма записи более соответствует последующим формулам для вычисления объемов тел. Дать учащимся еще одну формулу для вычисления объема куба $V = a^3$, где a – длина его ребра.

После рассмотрения теоремы об объеме прямоугольного параллелепипеда целесообразно решить задачи на нахождения объема данного многогранника.

В конце второго часа предложить учащимся сделать самостоятельную работу. Работа может рассчитываться на 15-20 минут.

2. Объем призмы (2 часа).

*Цель: «*рассмотреть объем призмы, вывести формулу для объема наклонной призмы; рассмотреть вопрос об отношении объемов; научить учащихся применять формулы при решении задач; проверить знания, навыки и умения при изучении темы «Объем призмы»» [53].

Перед изучением темы «Объем призмы» рассматриваются такие темы как: определение призмы, виды призм, боковая и полная поверхности призмы.

Сначала доказывается теорема на вычисление объема призмы – «*объем призмы равен произведению площади основания на высоту» [16].* Нахождение данной формулы мы рассматривали при вычисления объема прямоугольного параллелепипеда и при доказательстве вычисления формулы объема призмы не вызывает сложности в понимании.

Вывод формулы объема наклонной призмы не представляет затруднений, он достаточно подробно разобран в любом из учебников по геометрии.

«Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения призматического тела на боковое ребро» [16].

Желательно остановиться на нахождении отношения объемов призм и рассмотреть случаи, когда призмы имеют: 1) неравновеликие основания и неравные высоты; 2) равновеликие основания, но неравные высоты и 3) равные высоты, но неравновеликие основания.

Кроме того, следует найти и отношение объемов подобных призм.

Пусть V_1 и V_2 - объемы двух призм, Q_1 и Q_2,h_1 и h_2 - соответствующие им основания и высоты. Находи отношение их объемов: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1 h_1}{Q_2 h_2}$.

Если $Q_1 = Q_2$ или $h_1 = h_2$, то $\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2}$ **или** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$.

Понятно, что учащиеся должны уметь дать надлежащую формулировку написанных равенств.

Для дополнительных или внеурочных уроков можно предложить рассмотреть вывод формулы для усеченной призмы (под усеченной призмой имеют в виду призму, основания которой не параллельны): «*объем усеченной треугольной призмы равен сумме объемов трех пирамид, общее основание которых – одно из оснований треугольной призмы, а вершины – три вершины другого основания призмы»*.

После рассмотрения теоремы об объеме призмы и об объеме наклонной призмы целесообразно решить задачи на нахождения объемов данных многогранников.

В конце второго часа предложить учащимся сделать самостоятельную работу. Работа может рассчитываться на 15-20 минут.

3. Объем пирамиды и объем усеченной пирамиды (3 часа).

Цель: «рассмотреть формулу для объема треугольной пирамиды, ознакомиться с ее обоснованиями; вывести формулу для объема произвольной пирамиды и усеченной пирамиды; рассмотреть вопрос об отношении объемов; формировать умение применять формулы объема пирамид при решении задач; формировать умение применять свойства подобных тел при решении задач; закрепить и проверить знания, навыки и умения учащихся в применении свойств пирамид и формул их объемов» [53].

К вычислению объема пирамиды можно подойти различными путями. Обычный вывод формулы объема пирамиды распадается на три части: 1) установление леммы: «*треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики*; 2) установление теоремы: *«объем треугольной пирамиды равен произведению площади основания пирамиды на одну треть ее высоты»*; 3) установление, что *«объем любой пирамиды равен произведению площади ее основания на одну треть ее высоты»» [49].*

Доказательство приведенной выше леммы распадается на две части:

1. доказывается, что объем пирамиды, площадь основания которой Q и высота h, есть общий предел суммы объемов входящих и выходящих призм, соответствующим образом построенных;

2. устанавливается на основе уже доказанной первой части леммы равновеликость пирамид, основания которых равновелики и высоты которых равны.

На основании рассмотренной леммы выводится затем формула объема треугольной пирамиды через сравнение ее объема с объемом треугольной призмы, основание которой равно основанию пирамиды и высота которой равна высоте пирамиды. Традиционным способом треугольная призма разбивается на три равновеликие пирамиды, так что $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}Qh$.

Когда доказано, что «объем треугольной пирамиды равен произведению одной трети площади ее основания на высоту пирамиды» [16], нетрудно уже установить объем любой пирамиды разбивкой ее диагональным сечениями на треугольные пирамиды и последующим суммированием их объемов.

Следует рассмотреть отношение объемов пирамид. Даны две пирамиды, объемы которых V_1 и V_2. Пусть $V_1 = \frac{1}{3}Q_1h_1$ и $V_2 = \frac{1}{3}Q_2h_2$, тогда $\frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1h_1}{Q_2h_2}$. Если $Q_1 = Q_2$ **или** $h_1 = h_2$, то соответственно $\frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$ **или** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2}$.

После рассмотрения теоремы объема пирамиды целесообразно решить задачи на нахождения объема данного многогранника.

Вывод объема усеченной пирамиды может быть выполнен двумя способами: один из них – аналитический, другой – геометрический. При аналитическом методе объема усеченной пирамиды вычисляется, как разность объемов двух полных пирамид. Данный вывод приводится в любом учебнике по геометрии. Геометрический метод – сложнее, требует для проработки больше времени, его можно вывести на внеурочной деятельности или на дополнительных занятиях. В свою очередь, геометрическое доказательство данной теоремы не только содействует расширению пространственных представлений учащихся, но и показывает им, как геометрически получается формула объема усеченной пирамиды, и кроме того, позволяет провести параллель между понятиями о равновеликих телах – телах, равных по объему и о равновеликих фигурах – фигурах, равных по площади.

Далее следует рассмотреть еще отношение объемов двух усеченных пирамид: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{h_1(Q_1+q_1+\sqrt{Q_1q_1})}{h_2(Q_2+q_2+\sqrt{Q_2q_2})}$. В том случае, когда усеченные пирамиды подобны, имеем: $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{h_1^2}{h_2^2}=\frac{l_1^2}{l_2^2}=\frac{q_1}{q_2}$.

После рассмотрения теоремы об объеме усеченной пирамиды целесообразно решить задачи на нахождения объема данного многогранника.

В конце третьего часа предложить учащимся сделать самостоятельную работу. Работа может рассчитываться на 15-20 минут.

4. Контрольная работа №1. (1 час).

Цель: «проверить и закрепить знания, умения и навыки учащихся в применении формул для вычисления объемов параллелепипеда, призмы и пирамиды» [53].

5. Объем цилиндра (2 часа).

Цель: вывести формулу для нахождения объема цилиндра; показать применение данной формулы при решении задач; закрепить навыки и умения применения формулы объема цилиндра при самостоятельном решении задач.

Перед изучением темы «Объем цилиндра» отводятся некоторое количество часов на изучение понятия об образовании цилиндрической поверхности и цилиндра. Учащиеся должны знать определение цилиндра; понятия отдельных элементов и линий цилиндра; виды цилиндров; рассмотреть сечения прямого кругового цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям оснований и перпендикулярными к оси цилиндра, дающие в сечении круги; сечения, параллельные оси и перпендикулярные к плоскостям оснований, дающие в сечении прямоугольники. Разумеется, учащиеся должны научиться строить чертежи цилиндра и его сечений, а также развертки боковой и полной поверхности цилиндра; уметь находить площадь поверхности цилиндра.

К задаче вычисления объема цилиндра могут подходы различной строгости. Объем прямого кругового и вообще любого цилиндра может быть вычислен по теореме Кавальери, а также как предел объемов вписанных и описанных призм при неограниченном увеличении числа сторон и их оснований. Соответствующие указания и доказательства даны в учебниках по геометрии разных авторов.

Весьма полезно при рассмотрении прямого кругового цилиндра как тела вращения сравнить между собой объемы цилиндров, полученных вращением прямоугольника со сторонами a и b вокруг той или другой его стороны $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi b^2 a}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}$. Следует указать учащимся, что: *объемы подобных цилиндров относятся, как кубы их радиусов или кубы высот или кубы диаметров.*

В связи с рассмотрением цилиндра могут быть затронуты на внеурочных занятиях вопросы, связанные с эллипсом, винтовой линией и другие.

Для закрепления пройденного следует уделить внимание решению комбинированных задач для нахождения объема цилиндра.

В конце второго часа предложить учащимся сделать самостоятельную работу. Работа может рассчитываться на 15-20 минут.

6. Объем конуса и объем усеченного конуса (3 часа).

Цель: вывести формулу для объема конуса; ознакомиться с формулой для объема усеченного конуса и общей формулой для объема тел вращения; продолжить формировать навыки и умения применения формул объема при решении задач; рассмотреть решение задач на нахождение объемов тел вращения; проверить знания, навыки и умения при изучении темы «Объем конуса и объем усеченного конуса».

Приступая к изучению темы «Объем конуса и объем усеченного конуса» учащиеся должны были узнать - понятие об образовании конической поверхности и конуса; рассмотреть различные сечения конуса; познакомиться с развертками конуса, которые используются для вычисления поверхности прямого кругового конуса; свойства параллельных сечений; усеченный конус.

Формулу для вычисления объема конуса можно вывести одним из двух предложенных ниже приемов. На практике наиболее распространен следующий прием: «*объем конуса принимается за предел объема правильной вписанной в конус или описанной* n*-угольной пирамиды при неограниченном удвоении числа ее граней*».

Так, если объем пирамиды $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} Q_n H$, где Q_n - площадь основания и H – высота пирамиды, то при неограниченном удвоении числа n граней пирамиды V и Q_n, а следовательно, и $\frac{1}{3} Q_n H$ - переменные величины; переменные V и $\frac{1}{3} Q_n H$ равны при всех своих изменениях, а потому равны и их пределы, т.е. $\lim_{n\to\infty} V_{\text{пир}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{3} Q_n H)$, откуда $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} K H$, где K – площадь круга, или $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ (куб.ед.).

Понятно, что такой прием не строг с научной точки зрения, более строгим будет этот прием, если будет показано, что «*объем конуса есть общий предел правильных вписанных и описанных одновременно пирамид при неограниченном удвоении числа их граней*».

Обозначив объемы вписанной и описанной пирамид соответственно через $V_{\text{в.п.}}$ **и** $V_{\text{о.п.}}$, площади их оснований через $Q_{\text{в.п.}}$ **и** $Q_{\text{о.п.}}$ и общую их высоту через H, имеем:

$V_{\text{о.п.}} = \frac{1}{3} Q_{\text{о.п.}} H$ **и** $V_{\text{в.п.}} = \frac{1}{3} Q_{\text{в.п.}} H$ и $V_{\text{о.п.}} - V_{\text{в.п.}} = \frac{1}{3} Q_{\text{о.п.}} H - \frac{1}{3} Q_{\text{в.п.}} H = \frac{1}{3} H (Q_{\text{о.п.}} - Q_{\text{в.п.}})$, следовательно, $V_{\text{о.п.}} - V_{\text{в.п.}}$ при $n \to \infty$ есть бесконечно малая величина, при данном условии $Q_{\text{о.п.}} - Q_{\text{в.п.}}$ есть бесконечно малая и произведение постоянной $\frac{1}{3} H$ на бесконечно малую есть величина бесконечно малая. Итак, $V_{\text{о.п.}} - V_{\text{в.п.}} = \textbf{беск. мал. при}\, n \to \infty$.

С другой стороны, V конуса заключается между $V_{\text{о.п.}}$ **и** $V_{\text{в.п.}}$, $V_{\text{в.п.}} < V_{\text{к}} < V_{\text{о.п.}}$, а потому на основании теоремы: если постоянная величина ($V_{\text{к}}$) заключается между двумя переменными ($V_{\text{о.п.}}$ **и** $V_{\text{в.п.}}$), разность между которыми бесконечно мала, то постоянная есть предел той и другой переменной:

$\lim_{n\to\infty} V_{\text{в.п.}} = V_{\text{к}} = \lim_{n\to\infty} V_{\text{о.п.}}$.

Далее следует приведенное выше заключение:

$V_{\text{кон}} = lim \frac{1}{3} Q_n H = lim \frac{1}{3} H \cdot lim Q_n = \frac{1}{3} KH = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$

Итак, «*объем конуса равен одной трети площади его основания, умноженной на высоту конуса*».

Второй прием основан на теореме Кавальери; вывод соответствующей формулы дан в учебниках геометрии разных авторов. Следует подчеркнуть, что на основании теоремы Кавальери объем любого конуса выражается так же, как и объем конуса.

Само собой разумеется, что достаточно ограничиться показом учащимся какого-либо одного вывода. Другой вывод возможно предложить учащимся на внеурочной деятельности или дополнительных занятиях.

После решения нескольких примеров на применение формулы объема конуса следует дать учащимся доказать, что:

1) объемы двух конусов с равными высотами относятся, как квадраты их радиусов, а объемы конусов с равными основаниями относятся, как их высоты;

2) Объемы подобных конусов относятся как кубы их высот или кубы их радиусов, или как кубы их образующих, или как кубы любых сходственных отрезков.

Подобными называются прямые круговые конусы, если их осевые сечения подобны.

Формулу объема усеченного конуса наиболее целесообразно вывести, рассматривая усеченный конус, как разность двух конусов.

Учащиеся должны самостоятельно доказать, что объемы двух подобных усеченных конусов (а это такие, у которых осевые сечения – подобные трапеции) относятся как кубы их радиусов или кубы их высот, или кубы их образующих, или вообще кубы двух любых сходственных отрезков.

Далее учащимся предлагается закрепление изученного материала при решении задач на нахождение объемов данных круглых тел.

В конце третьего часа предложить учащимся сделать самостоятельную работу. Работа может рассчитываться на 15-20 минут.

7. Объем шара и его частей (3 часа).

Цель: рассмотреть вывод формулы объема шара; ввести понятия шарового сегмента и сектора; вывести формулы для объемов шарового сегмента и сектора; показать их применение при решении задач; рассмотреть задачи на комбинацию тел; проверить умения и навыки учащихся в виде математического диктанта.

Шару в средней школе обычно уделяется недостаточно внимания, а между тем изучение его весьма существенно для решения значительного числа практических задач. Для того, чтобы приступить к изучению темы «Объем шара и его частей» учащимся должны уделить достаточное число часов на детальное ознакомление с шаром. Учащиеся должны узнать определение шаровой и сферической поверхности, их элементов, части шара и шаровой поверхности; изображение шара (сферы). Особо следует рассмотреть сечения шара плоскостью, вывод формулы для вычисления площади поверхности шара.

Нахождение объема шара будем находить геометрическим методом, он не совсем строгий – заключается в следующем: представим себе шар покрытым густой сетью меридианов и параллелей, которая разбивает поверхность шара на большое число частей, каждая из которых представляет собой криволинейный четырехугольник или треугольник. Если соединить вершины одного из четырехугольников или треугольников с центром шара и провести через каждую пару радиусов шара плоскость, то получится четырехугольная или треугольная пирамида с вершиной в центре шара, основанием которой служит криволинейный четырехугольник или треугольник. При неограниченном увеличении числа n четырехугольников, на которые разбивается поверхность шара, можно принять эти четырехугольники за плоские четырехугольники, и тогда объем такой «пирамиды» равен $\frac{1}{3}S_1R$, где S_1 - площадь основания пирамиды и R - радиус шара – ее высота. Понятно, что сумма объемов всех пирамид представляет собой объем шара, а сумма площадей всех четырехугольников и треугольников составляет поверхность шара, а потому объем шара равен поверхности шара $4\pi R^2$, умноженной на $\frac{1}{3}R$.

Обозначив объем шара через $V_{ш}$, находим:

$V_{ш} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3$(куб.ед.).

Если заменить R через $\frac{D}{2}$, где D – диаметр шара, получим:

$V_{ш} = \frac{1}{6}\pi D^3$ (куб.ед.)

Тем же приемом находится и объем шарового сектора:

$V_{ш.сект} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где R – радиус шара, которому принадлежит сектор и h – высота сектора.

Формула $V_ш = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{4}{3}\pi R^3$ – «*объем шара равен его поверхности, умноженной на одну треть шара*».

Можно рассмотреть пример некоторых особенностей при выводе объема шара, что объемы, получаемые вращением вписанных в круг и описанных около него правильных многоугольников, имеют общий предел.

Данный вывод формулы объема шара удобен тем, что он аналогичен выводу формулы поверхности те: конуса, усеченного конуса и цилиндра; он позволяет более просто вычислить объем шарового слоя; вспомогательная теорема может быть самостоятельно использована при решении задач.

Можно воспользоваться приемом вычисления объема шара основан на теореме Кавальери.

Если находить объем шара и шарового сегмента по теореме Кавальери, то объем шарового сектора нужно рассматривать как сумму объемов двух тел, из которых он может быть составлен: конуса и дополняющего его шарового сегмента.

Объем шарового сегмента можно рассматривать как разность между объемом соответствующего шарового сектора и объемом конуса:

$V_{ш.сегм.} = V_{ш.сект} - V_{кон} = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 \ R - h \ = \frac{1}{3}\pi \ 2R^2 h - r^2 \ R - h$, но $r^2 = h(2R - h)$, а потому $V_{ш.сегм} = \frac{1}{3}\pi \ 2R^2 h - h \ 2R - h \ \ R - h \ = \frac{1}{3}\pi h \ 2R^2 - 2R^2 + Rh + 2Rh - h^2 \ = \frac{1}{3}\pi h \ 3Rh - h^2 \ = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$.

Формула может быть преобразована так, чтобы в нее входил радиус основания сегмента. Вывод ее может быть предоставлен самим учащимся. Из равенства $2R - h \ h = r^2$ или $2Rh - h^2 = r^2$ получаем: $R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$.

Формула $V_{ш.сегм} = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$ преобразуется так: $\pi h^2 \ \frac{h^2 + r^2}{2h} - \frac{h}{3} \ = \frac{\pi h^2}{6h} \ 3h^2 + 3r^2 - 2h^2 \ = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r^2 h}{2}$.

Необходимо, чтобы учащиеся, анализируя формулу, усмотрели, что объем шарового сегмента равен сумме объема шара диаметра h и половины объема цилиндра, основание которого равно основанию шарового сегмента, а высота – высоте сегмента. Аналогично ранее полученная формула позволяет считать объем шарового сегмента равным объему цилиндра, у которого радиус основания равен высоте h сегмента, а высота – радиусу шара, уменьшенному на одну треть высоты сегмента.

Такого рода истолкование формулы способствует лучшему запоминанию самой формулы и приучает учащихся сопоставлять величину объемов отдельных тел, что особенно ценно при решении задач на построение с помощью алгебраического анализа. Желательно при этом дать и наглядное представление такого рода истолкованию.

После каждой выведенной формулы целесообразно разобрать опорные задачи, а после всех выведенных и представленных учащимся форму нахождения объема шара и его частей предложить закрепить изученный материал с помощью решения задач по данной теме.

В конце третьего часа предложить учащимся математический диктант. Работа может рассчитываться на 10-15 минут.

8. Контрольная работа №2. (1 час).

Цель: «…проверить знания, умения и навыки учащихся при решении задач на нахождение объемов тел вращения» [53].

Критерии оценивая и ответы представлены в Приложение 1.

§9. Методический проект по теме «Объем пирамиды»

Аннотация методического проекта по теме «Объем пирамиды»:

Требования к предметным результатам освоения курса математики Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования, среди прочих, отражают:

– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;

– распознавание на чертежах, моделях и в реальном мире геометрических фигур;

– применение изученных свойств геометрических фигур для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием [71].

Перечисленные требования к предметным результатам освоения курса геометрии Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования находят свое отражение при изучении учащимися темы «Объемы геометрических тел».

Выбор темы «Объем пирамиды» актуален тем, что он разработан в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике. В проекте определена последовательность изучения темы «Объем пирамиды» в рамках стандарта; пути формирования знаний, умений, навыков по данной теме, необходимые для применения этих знаний в практической деятельности, и для изучения смежных дисциплин.

Основная цель изучения темы обусловлена следующими причинами:

– тема предусмотрена программой общего (среднего) образования [53];

– учебный материал, рассматриваемый в данной теме, может использоваться для подготовки учащихся к сдаче итоговой государственной аттестации.

Цель данного проекта: спроектировать изучение темы «Объем пирамиды» в рамках лекционно-семинарского метода.

Основные задачи проекта:

– выделить основные цели и задачи изучения темы «Объем пирамиды»;

– дать характеристику уровня требований к знаниям, умениям, навыкам учащихся по данной теме;

– выполнить методический анализ теоретического и практического содержания выбранной темы;

– обосновать выбор профиля для реализации темы проекта;

– обосновать выбор основного учебника для выбранного профиля;

– выполнить анализ практического опыта учителей по теме «Объем пирамиды»;

– обосновать целесообразность использования лекционно-семинарского метода для реализации темы на практике;

– спроектировать изучения темы «Объем пирамиды» в рамках лекционно-семинарского метода.

Новизна проекта состоит в том, что в нем использована технология лекционно-семинарского метода при изучении темы «Объем пирамиды».

Практическая значимость проекта: представленная методическая разработка может быть использована учителем математики на практике в старших классах общеобразовательной школы.

Основные цели и задачи изучения темы «Объем пирамиды»:

Цель: научить выводить формулу объема пирамиды с использованием утверждения о равновеликих телах; сформировать навык нахождения объема пирамиды; выработать навык решения типовых задач на применение формулы объема пирамиды.

Задачи:

Предметные:

– создать условия для формирования представлений о пирамидах;

– обеспечить усвоение учащимися знаний об элементах пирамиды, развитие познавательного интереса через творческую активность;

– обеспечить исследовательскую деятельность на основе умения делать обобщения по данным, полученным в результате исследования;

– развить эмоционально-положительное отношение к изучению математики, пространственное воображение;

– воспитать волевые качества, настойчивость, целеустремлённость.

Метапредметные:

– познавательные: развивать умение самостоятельно строить речевое высказывание в устной форме; производить сравнение и классификацию предметов; делать обобщение; искать и выделять необходимую информацию;

– коммуникативные: формировать способность точного употребления слов в речи;

– регулятивные: самостоятельно выделять и формулировать цель своей дальнейшей работы; формулировать проблему, самостоятельно создавать алгоритм деятельности при решении проблемы поискового характера; контролировать и оценивать результаты собственной деятельности;

– личностные: иметь представления о ценности и уникальности пирамид, формировать учебно-познавательные мотивы и учебно-познавательный интерес к материалу.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в проекте по теме «Объем пирамиды» способствует развитию пространственных представлений учащихся, освоению способов вычисления объема пирамиды и дальнейшее развитие логического мышления учащихся; является дополнительной возможностью подготовиться к государственной итоговой аттестации по материалам и в форме ЕГЭ.

Характеристика уровня требований к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Объем пирамиды»:

В стандарте по математике (профильный уровень) прописано, что учащиеся должны [71]:

знать / понимать [71]:

– «значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

– возможности геометрического языка как средства описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;

– универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;

– различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;

– роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знания и для практики» [71].

Уметь [71]:

– «соотносить плоские геометрические фигуры и трехмерные объекты с их описаниями, чертежами, изображениями; различать и анализировать взаимное расположение фигур;

– изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи;

– решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;

– проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса;

– вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, объемы и площади поверхностей пространственных тел и их простейших комбинаций» [71].

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

– «исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;

– вычисления длин, площадей и объемов реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства» [71].

В результате изучения темы «Объем пирамиды» ученик должен:

Иметь представление: о понятии объема геометрического тела.

Знать:

– формулы для нахождения объема пирамиды и площадей многоугольников;

– определение отношения объемов подобных тел;

– формулировку и доказательство теоремы на вычисление объема пирамиды.

Уметь:

– изображать в параллельной проекции пирамиду, правильную пирамиду (правильный тетраэдр);

– определять на чертежах и моделях пирамиды: виды, элементы, свойства;

– строить изображения пирамиды, правильной пирамиды;

– применять полученные знания при решении задач на нахождение объема пирамиды, оформлять задания.

Владеть: полученными знаниями; математической лексикой, орфографией; пользоваться математической символикой.

Иметь опыт (навыки): вычисления объема пирамиды.

Методический анализ теоретического и практического содержания по теме «Объем пирамиды»:

Методический анализ темы.

Базовые знания:

- понятие многогранника;
- площадь, свойства площадей, знание формул для нахождения площадей;
- понятие равновеликих тел;

– понятие пирамиды, виды;

– элементы пирамиды;

– свойства пирамиды;

– единицы объема.

Новые знания:

– лемма о равновеликих пирамидах;

– метод подобия для объемов;

– основная формула для вычисления объема пирамиды.

Теоретический материал.

Введение понятия объема представляется каждым авторским коллективом по-разному.

В *учебнике И.Ф. Шарыгина, объем* – «…это положительная величина, численное значение которой обладает свойствами: 1. объемы равных тел равны; 2. если тело разделено на две части, то его объем равен сумме объемов его частей (свойство аддитивности объема); 3. если задана единица длины, то объем куба, ребро которого равно этой единице, равен одной кубической единице» [73]. Понятие вводится аксиоматически.

В *учебнике Л.С. Атанасяна, объем* – «…каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранный единицы измерения объемов…» [16]. Понятие вводится конструктивно.

В *учебнике А.В. Погорелова* [48] *объем* – «…величина ограниченного тела характеризует его объем…». Понятие вводится аксиоматически.

В *учебнике И.М. Смирновой* [62] *объем* – «…это величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа; число V, показывающее сколько раз единица измерения объема и ее части укладываются в данной фигуре; это число может быть натуральным, рациональным и даже иррациональным…». Понятие вводится конструктивно.

В *учебнике Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича* [49] *объем* – «…задача измерения объемов тел состоит в том, чтобы при выбранной единице измерения каждому телу поставить в соответствие определенное положительное число, называемое объемом тела…». Понятие вводится конструктивно.

Теперь целесообразно рассмотреть вывод формулы объема пирамиды каждым авторским коллективом.

В *учебнике И.Ф. Шарыгина* [73] вывод формулы объема пирамиды получается из принципа подобия многогранника. Прежде чем получить формулу объема пирамиды автор рассматривает принцип подобия. В данном параграфе представлено определение подобных многогранников, утверждение для подобных многогранников: «Плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает от нее подобную ей пирамиду». И уже после формулировки определения коэффициента рассматривается принцип подобия для объемов: «Отношение объемов двух подобных многогранников равно кубу коэффициенты подобия». В конце п.5.5. «Объем пирамиды» представлены задачи, вопросы и задания по теме данного пункта. Задания дифференцированные и отмеченные буквами (в - важные, п - полезные, т - трудные).

В *учебнике Л.С. Атанасяна* «…рассматривается способ вычисления объема пирамиды, основанный на понятии интеграла. В §3 «Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса» все формулы объема выводятся с помощью определенного интеграла, понятие которого известно из курса алгебры и начал анализа» [23]. Выводится общая формула для вычисления объема тела с помощью интеграла, которую авторы называют «…основной формулой для вычисления объемов тел». Пользуясь этой формулой вычисляют объем пирамиды, сначала для треугольной пирамиды, а затем – для произвольной пирамиды. После доказательств выше указанных формул приводится следствие об объеме усеченной пирамиды. В конце всего параграфа представлена практическая часть в виде достаточно разнообразных задач.

В *учебнике А.В. Погорелова* [48] формулу объема пирамиды рассматривается с помощью предварительного утверждения о равновеликих телах. На примере треугольных пирамид доказывается утверждение о равновеликих телах, на основании чего выводится формула объема сначала треугольной пирамиды, а потом и произвольной пирамиды. На примере задачи рассматривается формула объема усеченной пирамиды. В конце всего §7 «Объемы многогранников» приводятся контрольные вопросы и задачи с указанием пунктов параграфа.

В *учебнике И.М. Смирновой* [62] изучение объемов обобщается и систематизируется материал планиметрии о площадях плоских фигур. При выводе формулы объема пирамиды используется принцип Кавальери. С помощью этого метода выводятся формулы объема пространственных фигур, а именно формула объема пирамид, без использования предела и интеграла, сокращает количество основных теорем и формул, делает доказательства более наглядными и доступными. Практическая направленность этой темы определяется большим количеством разнообразных задач на вычисление объемов, отмечены задачи с углубленным изучением.

В *учебнике Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича* [49] тема «Объем пирамиды» рассматривается во второй главе «Многогранники». Прежде чем выводить формулу объема пирамиды, авторы предлагают доказать лемму о равновеликих пирамидах. После этого представляют доказательство теоремы об объеме пирамиды. В данном доказательстве рассматривается треугольная пирамида и на основании равновеликих пирамид выводится формула объема пирамиды. Далее авторы доказывают теорему о вычислении n-угольной пирамиды на основании свойства 2 объемов.

Обоснование выбора математического профиля для реализации темы «Объем пирамиды»:

Методический проект по теме «Объем пирамиды» предназначен для математического профиля. Математический профиль ориентирован на повышение качества образования, на создание наиболее благоприятных условий обучения для учащихся, имеющих склонности к изучению точных наук. В классах с углубленным изучением математики (математический профиль), изучение геометрии отличается не только углублением и расширением теоретического материала, но и методически грамотной подборкой решаемых задач, как в количественном соотношении, так и в качественном.

Выбор математического профиля мотивирован тем, что задачи на вычисление объема пирамиды встречаются в заданиях ЕГЭ. Именно поэтому, в данный проект включены задания по теме «Объем пирамиды» повышенного уровня, необходимые для учащихся математического профиля.

Обоснование выбора основного учебника для математического профиля:

Основным учебником математики для математического профиля выбран учебник Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [49], так как в данном учебнике достаточно полно и логично описан материал по теме «Объем пирамиды».

Рассматриваемая в данном проекте тема относится ко второй главе «Многогранники». Тема вводится в параграфе §14 «Пирамида», в котором рассматриваются: определение пирамиды и ее элементов; некоторые виды пирамид; правильная пирамида; площади боковой и полной поверхностей пирамиды; свойства параллельных сечений пирамиды; усеченная пирамида; объем пирамиды; об объеме тетраэдра; объем усеченной пирамиды.

В учебной программе отмечается, что в результате изучения темы учащиеся должны:

- понимать *понятие объема*;
- формулировать *свойства объема*;
- решать задачи на нахождение *объема пирамиды*.

Для профильного уровня изучения темы «Объем пирамиды» (по программе) отводится 3 часа, в течение которых рассматриваются: лемма о равновеликих треугольных пирамидах с равновеликими основаниями и равными высотами; доказательство теоремы на вычисление формулы объема треугольной пирамиды с помощью утверждения о равновеликих телах; доказательство теоремы для вычисления объема n-угольной пирамиды.

Таким образом, выбор учебника Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [49] «Геометрия 11 класс для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики» обоснован *следующими причинами*:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном учреждении, имеющем государственную аккредитацию, и реализующем образовательные программы общего образования;

– в учебнике реализован принцип преемственности с изучением планиметрии, сохранены основные разделы систематического курса стереометрии старших классов;

– структура учебника следующая: все содержание разделено на небольшие пункты; большое внимание уделено наглядности – изображению пространственных фигур, различным способам их моделирования; имеются соответствующие рисунки, чертежи, модели, иллюстрации, компьютерная графика;

– в задачнике [52] к данному учебнику *представлены* следующие типы задач на формирование понятия объема пирамиды: задачи на актуализацию знаний и умений, необходимых при формирования данного понятия; задачи на использование терминологии, связанной с понятием «Объем пирамиды»; задачи на установление свойств понятия; задачи на применение понятия;

– в учебнике и задачнике наиболее полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Объем пирамиды»;

– учебник предоставляет учителю широкие возможности по развитию пространственных представлений учащихся, развитию их пространственного воображения;

– учебник вместе с задачником представляют собой объединение теоретического материала и задачного материала, развивающее теоретический материал, иллюстрирующее его применение, обеспечивающее усвоение методов использования теории при решении задач, формирование необходимых умений и навыков, закрепление, проверку и самопроверку усвоения знаний и умений.

Анализ практического опыта учителей по теме «Объем пирамиды», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

В данном пункте проведем анализ практического опыта учителей по теме «Объем пирамиды», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

В статье Ю.М. Горшковой [23] рассматривается задача вычисления объема многогранника по его комбинаторному строению и длинам ребер с применением компьютерных технологий. Автором предложен «…алгоритм вычисления объема многогранника, основанный на разбиении многогранника на тетраэдры и суммировании объемов тетраэдров. Составленная в статье формула (программа) предлагает вычислить объем любой произвольной четырехугольной пирамиды с любым набором длин ребер, что обычным способом вычисления без компьютерных технологий оказалось бы весьма трудоемким и сложным» [23].

Применение интерактивной геометрической среды «*Живая математика»* представлено в статье А.Д. Черкасовой и Н.А. Прядковой «Компьютерный самоконтроль при решении задач на вычисление объемов тел» [72]. Авторы предлагают вариант организации самоконтроля при решении задач на вычисление объема конуса.

В.М. Имайкина [27] описывает экспериментальный курс по теме «Длина, площадь и объем геометрических тел».

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [78] представлены лекции по темам «Вычисление объемов геометрических тел с помощью определенного интеграла».

На данном сайте имеется большое количество конспектов уроков по теме «Объем пирамиды» по учебнику Л.С. Атанасяна [16], представлен конспект урока-практикума по теме «Решение задач на нахождение объема пирамиды» по учебнику авторов Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [49], презентации к урокам по теме «Объем пирамиды».

На сайте «Решу ЕГЭ» [77] можно найти материал для подготовки ЕГЭ по математике. В разделах 13 и 16 «Объем составного многогранника» и «Пирамида» по теме проекта рассмотрены ряд заданий и аналогичные им:

Задача 1. [77] «Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите объём этой детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах».

Задача 2. [77] «Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCA_1$».

Таким образом, анализ вышеуказанных статей свидетельствует о накопленном опыте и наличии методических рекомендаций по изучению темы «Объем пирамиды».

Обоснование целесообразности использования технологии в рамках лекционно-семинарского метода для реализации темы «Объем пирамиды» на практике:

По-мнению авторов учебника ([39], С.250) *лекционно-семинарский метод* – это «… система обучения, которая предусматривает организацию учебного процесса с использованием различных форм учебных занятий. Среди них можно выделить следующие: вводное занятие, лекция, практические занятия, семинарские занятия, теоретический зачет, зачет по практикуму, консультации, контрольная работа. Формы учебных занятий отличаются по содержанию и видам учебной деятельности».

При работе в старших классах наиболее оптимальной системой организации учебной деятельности является лекционно-семинарский метод. Применение в общеобразовательной школе элементов данного метода уместно и целесообразно, так как оно даёт учащимся возможность легко адаптироваться к обучению в высших учебных заведениях.

Лекционно-семинарский метод обучения темы «Объем пирамиды» будет состоять из:

– изучения нового материала (урок-лекция);
– закрепление (урок-практикум);
– контроль знаний (урок-зачет).

Из всего выше сказанного, можно сделать вывод, что лекционно-семинарский метод – это «…системный дидактический комплекс, включающий оптимальные формы, методы и средства, обеспечивающие интенсификацию самостоятельной работы деятельности учащихся в процессе их обучения и развития. Таким образом, лекция, практикум, зачет в единстве и взаимосвязи реализуют задачи обучения и развития. Применение данного метода позволяет быстрыми темпами, качественно, на уровне осмысления изучить большие блоки учебного материала. Лекционно-семинарский метод позволяет включить в процесс обучения большой объем самостоятельных работ с различными источниками…».

На наш взгляд, лекционно-семинарский метод поможет учащимся в полном размере изучить тему «Объем пирамиды». С помощью данного метода сформируем теоретический аппарат по теме; научим применять полученные знания в практике решения задач; проверим знания, умения, навыки по изученной теме.

Лекционный метод изложения материала, который мы будем использовать на первом уроке, предусматривает формирование определенных умений: слушать, выделять главное.

Система предлагаемых заданий на уроке-практикуме, урок второй, должна: способствовать расширению и углублению математических знаний по теме; включать задачи межпредметного и прикладного характера; обеспечить уровневую дифференциацию.

И урок-зачет, третий, в виде письменной работы с целью проверки теоретических и практических знаний учащихся.

При изучении темы «Объем пирамиды» должны присутствовать четкость и логичность действий, активность – это все лежит в основе лекционно-семинарского метода. Учебный материал авторов Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [49] по данной теме излагается доступно, конкретно и выразительно, что способствует применению данного метода.

Проектирование изучения темы «Объем пирамиды» в рамках лекционно-семинарского метода:

Для разработки уроков при изучении темы «Объем пирамиды» будем использовать учебник авторов Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [49]. Тема изучается в 11 классе и рассчитана на 3 часа, включает в себя:

– урок-лекция;
– урок-практикум;
– урок-зачет.

Урок №1.

Тема урока: «Объем пирамиды».

Тип урока: урок открытия новых знаний.

Вид урока: урок-лекция.

Цели: рассмотреть теорему об объеме пирамиды; доказать ее возможными способами; выработать навыки решения типовых задач на применение формулы объема пирамиды; продолжить работу по формированию логического и пространственного мышления.

План лекции:

1. Ознакомление учащихся с темой и планом урока.

2. Актуализация знаний на повторение:

– теоретический опрос: определение многогранного угла; определение пирамиды и ее элементов; виды пирамид (пирамиды, одна или несколько граней, которых перпендикулярны плоскости основания); понятие правильной пирамиды, ее свойства («…все боковые ребра равны, а все боковые грани – равные равнобедренные треугольники; все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, а все боковые грани – равные двугранные углы) и признаки (пирамида, в основании которой правильный многоугольник, является правильной, если: а) все ее боковые ребра равны; б) все ее боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; в) все ее боковые грани – равные треугольники…»); формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей пирамиды;

– формулировка теоремы «…о свойствах параллельных сечений пирамид: если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то: 1) боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части; 2) в сечении получается многоугольник, подобный основанию; 3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины». [49].

3. Формирование новых знаний:

– «Для решения задач с объемами тетраэдров полезно знать следующие их свойства: 1) Объемы тетраэдров с равными основаниями относятся как длины их высот, опущенных на эти основания; 2) Объемы тетраэдров с равными высотами относятся как площади их оснований; 3) Объемы тетраэдров, имеющих равные трехгранные углы, относятся как произведения длин ребер, образующих эти углы». [51].

– Лемма (с доказательством): «Две треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики». [49].

– Теорема (с доказательством): «Объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту». [49].

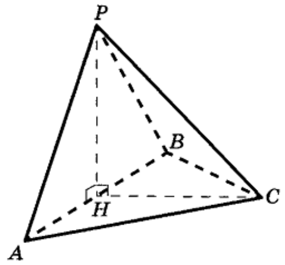
4. Обсуждение факта, что объем любой пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H, где\ S_{осн.} - площадь\ основания, H - высота\ пирамиды.$$

5. Применение полученных знаний: показать пример решения задачи на вычисление объема пирамиды (задача из учебника Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс. Задачник» № 2.293).

Задача 2.293. «Две грани треугольной пирамиды – равносторонние треугольники, плоскости которых перпендикулярны. Найдите объем пирамиды, если длина ее наибольшего ребра равна 1.» [52].

Решение. Пусть треугольники *ABP* и *ABC* – правильные со стороной a и $PH \perp (ABC)$, где точка H – середина *AB*.



Так как $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BH = \frac{a}{2}$ и $\frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a}{2}$, то наибольшим ребром тетраэдра *PABC* является ребро *PC*, то есть именно *PC = 1*. Тогда в равнобедренном прямоугольном треугольнике *CPH* катет *PH* равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому сторона *AB* правильного треугольника *APB* равна $\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Значит, $S_{\Delta ABC} = (\frac{\sqrt{6}}{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{36}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{36}$.

6. Обобщение и систематизация изученного материала.

7. Формирование домашнего задания.

Оборудование для лекции: компьютер, проектор, интерактивная доска, презентация, модели пирамид.

Учебник: Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич Геометрия. 11 класс [49], Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич Геометрия. 11 класс. Задачник [52].

Урок №2.

Тема урока: «Объем пирамиды».

Тип урока: закрепление.

Вид урока: урок-практикум.

Цели: формировать навык вычисления объема пирамиды; расширить знания, умения, навыки по теме «Объем пирамиды»; делать обобщение; искать и выделять необходимую информацию.

План урока:

1. Ознакомление учащихся с целями и планом урока.

2. Актуализация опорных знаний: формула для вычисления объема пирамиды.

3. Формирование умений и навыков нахождения объема пирамиды с помощью практикума по решению задач.

4. Формирование домашнего задания.

5. Итоги урока.

Оборудование для урока: мел, доска, модели различных пирамид, карточки с задачами.

Учебник: Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич Геометрия. 11 класс. Задачник. [52].

Актуализация опорных знаний: на данном этапе происходит устная работа всего класса, в которой предлагаются следующие задания из учебника Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс. Задачник» № 2.279, 2.280, 2.286 [52].

Практикум по решение задач:

1. Учащиеся решают задачи на доске предложенные из учебника Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс. Задачник» № 2.278, 2.288, 2.291 [52].

2. Предлагается работа в группах смешанного состава по 4 человек. Каждой группе выдается карточка с четырьмя задачами (для каждой группы задачи одинаковые). Каждый участник группы решает одну из предложенных задач и параллельно разбирается в решении трех остальных задач (не исключен вариант, что все задачи учащиеся в группе решают совместно). Проверка наиболее простых задач осуществляется только с

фиксированием промежуточных результатов. Задачи, вызвавшие больше всего затруднений, представляются одним из учащихся группы с раскрытием поиска решения или с записью всего решения.

Карточка с задачами для групп (решение и ответы в приложении 2):

Задача №1. «Две грани треугольной пирамиды – равносторонние треугольники, плоскости которых перпендикуляры. Найдите объем пирамиды, если длина ее наибольшего ребра равна 2» [62].

Задача №2. «В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем» [77].

Задача №3. «Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60º. Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды» [16].

Задача №4. «Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды» [77].

Урок №3.

Тема урока: «Объем пирамиды».

Тип урока: контроль знаний.

Вид урока: урок-зачет.

Цели: обобщить и систематизировать знания учащихся по теме «Объем пирамиды»; проверить знания, умения и навыки.

План урока:

1. Ознакомление учащихся с целями и планом урока.
2. Выполнение письменной работы.
3. Итоги урока.

Оборудование для урока: карточки с теоретическими и практическими заданиями.

Проверочная работа (решение и ответы в приложении 2):

Вариант 1.

Вопросы:

1. Определения:

1) Определение пирамиды и ее элементов.

2) Виды пирамид.

3) Свойства параллельных сечений пирамиды.

2. Теорема:

1) Сформулировать и доказать лемму о равновеликих пирамидах.

Задачи:

Задача №1. «Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды» [52].

Задача №2. «В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер *AD* = *12*, *AB* = *5*, $AA_1 = 8$. Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если *M* – точка на ребре AA_1, причем *AM* = 5» [52].

Вариант 2.

Вопросы:

1. Определения:

1) Определение многогранного угла.

2) Тетраэдр и его свойства.

3) Определение правильной пирамиды, ее свойства и признаки.

2. Теорема:

1) Сформулировать и доказать теорему объема пирамиды.

Задачи:

Задача №1. «Правильные треугольники *ABC* и *ABM* лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 10\sqrt{3}$. Точка *P* – середина *AM*, а точка *T* делит отрезок *BM* так, что *BT* : *TM* = *3* : *1*. Вычислите объем пирамиды *MPTC*» [52].

Задача №2. «В основании пирамиды лежит ромб со стороной 15 см, каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности 3 $дм^2$» [52].

Организация контроля:

Контроль должен быть достаточно разнообразен и полон, охватывать все этапы обучения темы «Объем пирамиды». Проверочная работа проводиться в конце третьего урока и должна показать уровень усвоения данной темы. Работа выполняется в письменной форме, самостоятельно и состоит из трех пунктов: определения, теоремы и задачи на вычисления объема пирамиды. Во всех задачах применяется основная формула вычисления объема пирамиды. Время выполнения задания – 40 минут, количество вариантов – 2.

Определения – за каждое правильно выполненное задание (верный ответ) ставится 1 балл, за неверный ответ – 0 баллов.

Теорема: 0 баллов - учащийся не приступал к заданию или выполнил все неверно;

1 балл – учащийся сформулировал теорему, но в доказательстве есть ошибки;

2 балла – верная формулировка и доказательство теоремы.

За каждую задачу можно получить от 0 до 3 баллов:

0 баллов – учащийся не приступал к решению задачи или сделано все неверно;

1 балл – была попытка выполнения задания, но учащийся запутался в решении;

2 балла – ход решения верный, но есть либо ошибка в вычислении, либо неверные ссылки на утверждения;

3 балла – задача решена с пояснениями верно.

По результатам выполнения работы выставляется отметка:

«5» - 10-11 баллов,

«4» - 7-9 баллов,

«3» - 4-6 баллов,

«2» - меньше 4 баллов.

§10.Описание и результаты педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент проводился на базе МБУ «Школа №59» г.о. Тольятти, в период прохождения производственной практики (с 23 января по 19 февраля 2017 года). В эксперименте участвовало 30 учеников 11-го класса, которые учатся по программе для общеобразовательных классов по учебному пособию Л.С. Атанасяна.

Целью констатирующего этапа эксперимента являлось выявление у учащихся умения решать задачи по теме «Объем параллелепипеда», а также умения применять различные методы и приемы решения данных задач. Учащимся была предложена контрольная работа №1, в которой представлены следующие *типы задач*:

– на вычисление объема параллелепипеда (задача №1-2);

– задача с практическим содержанием (задача №3);

– на доказательство (задача №4).

Контрольная работа №1.

1 вариант

Задача 1. «Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 2 : 3 : 4. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{29}$. Найдите его объем» [17].

Задача 2. «Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с углом 30^{o}. Расстояние от бокового ребра, проходящего через вершину прямого угла, до противолежащей боковой грани равно боковому ребру и равно 6. Найдите объем призмы» [17].

Задача 3. «Сколько коробок в форме прямоугольного параллелепипеда размерами 30х40х50 (см) можно поместить в кузов машины размерами 2х3х1,5 (м)?» [63].

Задача 4. «Сторона основания правильной треугольной призмы равна a. Диагональ боковой грани образует с другой боковой гранью угол 45^{o}.

Докажите, что объем этой призмы равен $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$, а площадь полной поверхности $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{6})$» [18].

II вариант

Задача 1. «Стороны оснований и диагональ прямоугольного параллелепипеда относятся как 1 : 2 : 3. Длина бокового ребра равна 4. Найдите объем параллелепипеда» [17].

Задача 2. «В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Диагональ большей боковой грани равна 12 и составляет с плоскостью основания угол в 45º. Найдите объем призмы» [17].

Задача 3. «Размеры кирпича 25x12x6,5 (см). Найдите вес одного кирпича в граммах, если объемный вес кирпича равен 1700 кг/$м^3$» [63].

Задача 4. «Диагональ боковой грани равна *d* и образует с другой боковой гранью угол 30º. Докажите, что объем этой призмы равен $\frac{d^3\sqrt{2}}{12}$, а площадь полной поверхности $\frac{d^2\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{24})}{6}$» [18].

Приведем результаты данной контрольной работы (Таблица 7).

Таблица 7

Результаты контрольной работы на тему «Объем прямоугольного параллелепипеда»

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступили к заданию
1.	70% (21)	30% (9)	0% (0)
2.	63% (19)	33% (10)	4% (1)
3.	50% (15)	33% (10)	17% (5)
4.	30% (9)	47% (14)	23% (7)

После результатов контрольной работы можно сделать вывод: задачи на вычисление объема параллелепипеда отлично решили 70% (63%) учащихся, приступали к решению задания №1 все, к заданию №2 не приступил один учащийся, и были допущены ошибки у 30% (33%) учащихся. Так же следует отметить, что задачи с практическим содержанием умеют решать лишь 50% учащихся, достаточно большое количество учащихся не приступали к решению этого задания. Мы видим, что большие затруднения у учащихся связаны с задачами на доказательство. Выполнили верно лишь 30%, а 23% учащихся вообще не приступали к данному заданию.

В результате были выявлены следующие виды ошибок у учащихся.

Задание 1		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не верно записано условие
5	1	3
Задание 2		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не верно записано условие
2	3	5
Задание 3		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не верно записано условие
6	3	1
Задание 4		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не верно записано условие
9	-	5

Для более глубокой оценки знаний и умений учащихся на данном этапе эксперимента был применен расчет коэффициента усвоения учебного материала.

За каждую задачу можно получить от 0 до 3 баллов:

0 баллов – учащийся не приступал к решению задачи или сделано все неверно;

1 балл – была попытка выполнения задания, но учащийся не предоставил подробного объяснения или не верно записано условие;

2 балла – ход решения верный, но есть либо ошибка в вычислении;

3 балла – задача решена с пояснениями верно.

Тогда коэффициент усвоения учебного материала, назовем его К, равен:

$$К = \frac{Сумма \ \ верных \ \ ответов}{12 \ \ (общее \ \ количество \ \ баллов)}.$$

При К, равном от 1,00 до 0,90 (или от 100% до 90% правильных ответов), оценка – «5»; при К от 0,80 до 0,70 (или от 80% до 70%), оценка – «4»; при К от 0,60 до 0,50 (от 60% до 50%), оценка – «3»; наконец, при К ниже 0,50 (50%) – оценка «2». В нашем случае получились следующие результаты (Таблица 8):

Таблица 8

Результаты контрольной работы №1

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	18% (5)
«4»	51% (15)
«3»	26% (8)
«2»	5% (2)

Анализ контрольной работы позволил сделать вывод: что процентное соотношение количества учащихся, справившихся с заданиями, больше 50%, это говорит о том, что данный материал был качественно и своевременно отработан с учащимися. Можно сказать, что учащиеся умеют решать задачи на нахождение объема параллелепипеда, но испытывают небольшие затруднения с задачами на доказательство.

Выводы по второй главе

В результате исследования методических основ обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы можно сделать следующие выводы:

1. С целью развития теоретических знаний и применения этих знаний при решении задач недостаточно работы с одной математической задачей. Нужна определенная система математических задач, обеспечивающая усвоение учебного материала. В данной работе разработана система задач по каждому разделу темы «Объемы геометрических тел».

2. В работе рассмотрены основные вопросы по методике обучения теме «Объемы геометрических тел», включенные в курс геометрии общеобразовательной школы.

3. В работе представлен методический проект по теме «Объем пирамиды». В рамках проекта спроектировано изучение данной темы в рамках лекционно-семинарского метода.

4. Представленные результаты проведенного констатирующего этапа эксперимент (цель данного этапа - выявление у учащихся умения решать задачи по теме «Объем параллелепипеда»), показали, что умения применять различные методы и приемы решения математических задач у учащихся требуют дополнительной методической проработки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данного исследования получены следующие результаты:

1. В работе были выделены различные подходы к определению понятия «объем» в школьном курсе геометрии на примере различных учебных пособий.

2. Выделены основные цели и задачи обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы в рамках ФГОС среднего (полного) общего образования.

3. Рассмотрены и определены основные требования к знаниям, умениям, навыкам по теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы на основании ФГОС среднего (полного) общего образования.

4. В работе рассмотрены методические аспекты изучения теоретического материала темы исследования, представленные в учебниках геометрии разных авторов для учащихся 10-11 классов.

5. Сделан развернутый анализ задачного материала по теме «Объемы геометрических тел» по учебнику геометрии Л.С. Атанасяна и представлена типология задач с примерами, распределенные по уровням сложности.

6. Проанализированы диссертационные работы, опыт работы учителей по теме исследования.

7. С целью развития теоретических знаний и применения этих знаний при решении задач, составлена система задач по теме «Объемы геометрических тел» включающая в себя такие подтемы, как: объем прямоугольного параллелепипеда; объем параллелепипеда и объем призмы; объем пирамиды; объем усеченной пирамиды; объем цилиндра; объем конуса; объем усеченного конуса; объем шара; объем шарового сегмента и сектора.

8. В работе рассмотрены основные вопросы по методике обучения теме «Объемы геометрических тел», включенные в курс геометрии общеобразовательной школы и составлены методические рекомендации по данной теме.

9. Разработан методический проект по теме «Объем пирамиды» в рамках лекционно-семинарского метода.

10. Проведен констатирующий этап педагогического эксперимента с целью выявления у учащихся умений решать задачи по теме «Объем параллелепипеда», а также умений применять различные методы, способы, приемы при решения данных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов А.А. Теория обучения логическому поиску решения школьных математических задач: дис. докт. пед. наук: 13.00.02 / Аксенов Андрей Александрович – М., 2010. – 462 с.

2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. Геометрия. 10-11 классы, учеб. для общеобразоват. учреждений. - М. : 2013. - 176 с.

3. Александров, А. Д. О геометрии // Математика в школе. – 1980. – №3. – С. 56-58.

4. Афанасьева Т.Л., Купорова Т.И. Геометрия. 10 класс: поурочные планы по учебнику А.В. Погорелова – Волгоград: Учитель, 1998.–108 с.

5. Бабанский Ю.К. Педагогика. Учебн. пособие. М.: Просвещение. 1983г.– 608 с.

6. Бевз Г.П. Прикладная направленность темы «Тела вращения» // Математика в школе. – 1985. № 5. – С. 27-29.

7. Бескин Н.М. Методика геометрии / Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР. – Москва, 1947. – 216с.

8. Боженкова Л.И. Методика формирования УУД при обучении геометрии. – М.: БИНОМ, 2013. – 189с.

9. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В. Об учебно-методическом комплекте «Геометрия» // Математика в школе. – 2013. №7. – С. 23-32.

10. Бутузов В.Ф., Прасолов В.В. Об учебно-методическом комплекте «Геометрия» // Математика в школе. – 2015, № 3.– С. 19-28.

11. Винберг Э.Б. О концепции учебника геометрии А.В. Погорелова / В сб. Математическое просвещение. – Третья серия. вып. 19. – 2015.– 79с.

12. Виленкин, Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный

уровень) / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд – М. : Мнемозина, 2014. – 312с. : ил.

13. Гавришко А.А. Изучение темы «Объемы геометрических тел» в общеобразовательной школе /А.А. Гавришко // Математика и современность: материалы Международной заочной научно-практической конференции студентов и молодых ученых (30 октября – 10 ноября, 2017 г.). – Луганск: Книта, 2018. – С. 132-134.

14. Гавришко А.А. Различные подходы к понятию объема геометрических тел в средней школе / Демченкова, А.А. Гавришко // Материалы международной научно-практической конференции «Современное математическое образование: опыт, проблемы, перспективы», посвященной 80-летнему юбилею доктора педагогических наук, профессора К.Г. Кожабаева, Казахстан, Кокшетау, (8-9 июня 2018г.). – С. 424-428.

15. Гаджиагаев Ш.С. Реализация принципа укрупнения дидактических единиц при изучении площадей и объемов геометрических фигур в основной школе как средства систематизации материала и повышения качества знаний учащихся. Автореферат. Махачкала – 2006.

16. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.– 22-е изд. – М. : Просвещение, 2013. – 255 с.

17. Геометрия. Дидактические материалы. 11 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / Б.Г. Зив. – 14-е изд. – М. : Просвещение, 201. – 128 с.

18. Геометрия. Дидактические материалы. 10-11 классы: пособие для общеобразоват. организаций / Л.П. Евстафьева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 2-е изд., с доп. – М. : Просвещение, 2014. – 94 с.

19. Геометрия. 11 класс. Самостоятельные и контрольные работы. Ершова А.П. Голобородько В.В. учебн. пособие. – изд. : Илекса. – 2013. – 208 с.

20. Геометрия. 11 класс. Готовимся к ЕГЭ. Литвиненко В.Н. учебн. пособие. изд.: Просвещение., 2012. – 176 с.

21. Горбачева Н.В. Метод аналогии как средство развития творческого мышления учащихся при обучении их элементам сферической геометрии: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Горбачева Наталья Владимировна. – М., 2001. – 213 с.

22. Горшкова А.В. Использование информационных технологий при изучении свойств круглых тел в условиях дифференцированного обучения геометрии в средней школе: дисс…канд. пед. наук. – Орел: Орловский гос. университет.– 2003.– 198с.

23. Горшкова Ю.М. О задачах вычисления объёмов многогранников с данным комбинаторным строением и длинами рёбер в курсе геометрии//Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2009. – №13 (17). – С. 58-65.

24. Гусев В.А., Орлов В.В., Панчищина В.А. и др., Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / под ред. Гусева В.А. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 368 с.

25. Дворянинов С.В. Геометрические задачи с практическим содержанием // Математика в школе, 2013. – №8.– С.43-45.

26. Демченкова Н.А. Проблемное обучение математике как средство реализации исследовательской деятельности в вузе // Социальная политика и социология. – 2009, №7. – С.90-95.

27. Имайкина В.М. О теме «Длина, площадь, объем» в старших классах гуманитарного профиля // Матем. обр., 2014. – выпуск 4(72). – С. 16-28.

28. Калинин А.Ю., Терёшин Д.А. Геометрия. Профильный уровень. Учебник. 10-11 классы. // Изд.: МЦНМО, 2011. – 640 с.

29. Каюпова А.А. Анализ учебных программ и подходов к изложению теоретического материала по теме «Объем тел» в школьных учебниках геометрии 10-11 классов // Актуальные проблемы современного образования.– 2015. № 2 (19).– С. 110-114.

30. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала математического анализа: учеб для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др. – М. : Просвещение, 2008. – 384с. : ил.

31. Колоскова М.Е. О курсе геометрии в школе имени А.Н. Колмогорова // Ярославский педагогический вестник – 2012, №2 – том III (Естественные науки).– С. 3-40.

32. Колягин Ю.М., Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособ. для студ. физико-матем. фак.пед. инст. – М. : Просвещение, 1975. – 464 с.

33. Крайнева Л.Д. Методика проведения спецкурса по геометрии для старшеклассников в условиях личностно-ориентированного обучения. Диссертация. Москва, 2007.– 217с.

34. Крутецкий В.А. Психология: Учеб. для уч. пед. училищ. – М. : Просвещение, 1986. – 336 с.

35. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения.- М.: Педагогика, 1981.– 267с.

36. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е.И.Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф, Кириченко и др. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с.: ил.

37. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений: кн. для учителя / В.А. Далингер. – М. : Просвещение, 2006. – 256 с.

38. Методология и методика преподавания естественно научных дисциплин в современных условиях: Материалы межрегиональной научно-практической конференции 26 марта 2016 г. /Под общей редакцией А.Ф. Пономарева, Н.Д. Александрова. - Бирск: Бирский филиал Баш.гос. ун-та, 2016. - 224 с.

39. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум : учеб. пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. – М. : Дрофа, 2007. – 320 с.

40. Мехтиев М.Г. Методика обучения геометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы с использованием компьютера. Автореферат. Москва – 2002.– 22с.

41. Митенева С.Ф. Методические рекомендации по отбору задач в курсе математики средней школы // Наука и образование: новое время. – №1, 2015.

42. Мусаввиров Ш. Методика изучения геометрических величин в курсе планиметрии. Автореферат, 2009.– 20с.

43. Немов Р.С. Психология: Учеб. для студентов высш. пед. учеб. заведений:– М.: Гуманит. изд. центр Владос, 1997. – 688 с.

44. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология научного исследования. Учеб. пособие. – М.: Либроком. – 280 с.

45. Овчинникова Е.Е. Использование метода площадей и объемов при решении школьных геометрических задач. Диссертация. Москва – 2002.– 199с.

46. Педагогический словарь / М.: Изд. АПН РСФСР, 1961. –Т. 1. – 368 с.

47. Перельман Я.И. Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным? // Математика в школе, 2016. № 1. С. 25–30.

48. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобр. учреждений. – М.: «Просвещение», 2004.– 398с.

49. Потоскуев Е. В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики.– М.: Дрофа, 2012.– 234с.

50. Потоскуев, Е.В. Геометрия 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 10 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник. – М. : Дрофа, 2004. – 224 с.

51. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И., Шляпочник Л. Я. Геометрия. 11 кл.: Методическое пособие к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия. 11 класс». — М.: Дрофа, 2010.– 213с.

52. Потоскуев Е. В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2009.– 256с.

53. Примерные программы среднего (полного) общего образования: математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 10-11 классы / Е.А. Седова, С.В. Пчелинцев, Т.М. Мищенко и др.; под общ.ред. М.В. Рыжакова. – М.: Вентана-Граф, 2012. – 136 с.

54. Рихтер Т.В. Формирование познавательной самостоятельности учащихся общеобразовательных школ при обучении стереометрии. Диссертация. Пермь – 2008.– 191с.

55. Рахымбек Д., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Айтбаева Н.Ж. Методика обучения решению геометрических задач на доказательство различными способами // Международный журнал экспериментального образования – 2013. – № 4-2. – С. 48-53.

56. Саакян С.М., Бутузов В.Ф. 10-11 классы. Изучение геометрии. Книга для учителя. Издательство: Просвещение. – 2010. – 248 с.

57. Сабитов Д.И., Сабитов И.Х. Многочлены объема для некоторых многогранников в пространствах постоянной кривизны // Моделирование и анализ информационных систем. – Т.19, №6. –2012.

58. Садовников Н.В. Предмет теории и методики обучения математике как научной области // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2012. – №28.– С.1012-1019.

59. Садовников Н.В. Основные компоненты содержания школьного курса математики как основа разработки методики обучения математике в средней школе // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс, 2015.– Т. 3.– № 6 (28). – С. 132-135.

60. Саранцев Г. И. Цели обучения математике в средней школе в современных условиях // Математика в школе. – 1991. – №6. – С. 38-44.

61. Ситкин Е.Л. Принцип Кавальери в вычислении объемов и теорема о покрытии круга// Сибирский педагогический журнал, 2011.– №3.– С.180-186.

62. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 кл.: учебн. для общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). – М.: Мнемозина, 2015.– 234с.

63. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрические задачи с практическим содержанием. — М.: МЦНМО, 2010.– 187с.

64. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Устные упражнения по геометрии. 10—11 классы. — М.: Мнемозина, 2010.– 123с.

65. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Четырехмерная геометрия. — М.: МЦНМО, 2010.– 183с.

66. Справочник в таблицах. Геометрия. 7-11 классы. Изд.: Айрис-Пресс, 2014.– 24 с.

67. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: Издательство Московского университета, 1975. – 343 с.

68. Терешин Д.А. Профильное обучение стереометрии как основа подготовки учащихся старших классов к профессиональной математической деятельности // Труды МФТИ. – 2012. – Том 4, №4.

69. Тихомиров В.М. От «Начал» Евклида до «Оснований геометрии» Гильберта и «Геометрии» Колмогорова // Математика в школе. – 2015. – № 1; Фрактал. – 2015. – № 1.

70. Тумашева О.В. Формирование метапредметных умений при обучении математике: проблемы и пути решения // Математика в школе. – 2016. № 4. – С. 35–38.

71. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Минобрнауки от 17 мая 2012 г. №413) : https://минобрнауки.рф

72. Черкасова А.Д., Прядкова Н.А. Компьютерный самоконтроль при решении задач на вычисление объемов тел. // Информационные технологии в математике и математическом образовании материалы VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева, 2015.– С. 122-124

73. Шарыгин И.Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10-11 классы : учебник / И.Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2013. – 236с.

74. Шарыгин И.Ф. Рассуждения о концепции школьной геометрии. – М.: МЦНМО, 2000. – 56 с.

75. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.

76. https://infourok.ru/prezentaciya_po_geometrii_na_temu_obyemy_tel_11_klass-413004.htm // сайт «Информ урок»

77. https://ege.sdamgia.ru/ : сайт «Решу ЕГЭ»

78. http://открытыйурок.рф/ : сайт «Открытый урок. 1 Сентября»

79. https://sites.google.com/site/mathshatilova/for_students/11-class/geometria-dla-11-klassov : сайт учителя математики Шатиловой И.А.

80. Biggest Little Polyhedron—New Solutions in Combinatorial Geometry. May 20, 2015 — Ed Pegg Jr, Editor, Wolfram Demonstrations Project (1447 символов с пробелами), http://blog.wolfram.com/2015/05/20/biggest-little-polyhedronnew-solutions-in-combinatorial-geometry/

81. Geometry of the Moment Map for Representations of Quivers, May 2011, William Srawley-Boevey, Comporitio Mathematica 126: 257–293 (18287 символов с пробелами), http://www.cambridge.org/core/

82. Launching Mathematical 10 with 700+ New Functions and a Crazy Amount of R&D, July 9, 2014 — Stephen Wolfram (2958 символов с пробелами), http://blog.wolfram.com/2014/07/09/launching-mathematica-10-with-700-new-functions-and-a-crazy-amount-of-rd/

83. ProofWithoutWords: How Did Archimedes Sum Squares in the Sand?, 2016, K. Kamin, Mathematical Association of America (579 символов с пробелами), http://www.jstor.org

84. Some geometric inequalities for the Holmes-Thompson definitions of volume and surface area in Murkowski spaces, 13 January, 2004, C.P. Niculescu,

Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics (9830 символов с пробелами), http://jipam.vu.edu.au/

Приложение 1

Тест:

1. Назовите многогранник, имеющий наименьшее число граней. Сколько у него вершин, ребер?

2. Может ли гранью пятигранника быть: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник?

3. В шестигранннике $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$ - прямоугольники, а четыре остальные грани – трапеции. Периметр *ABCD* равен 20, а площадь равна 25. Одна из диагоналей прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ в 2 раза больше одной из его сторон. Является ли данный шестигранник усеченной пирамидой: а) да; б) нет; в) не обязательно; г) такого шестигранника не существует?

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через точку B_1 и середины ребер *AD* и *DC,* разбивающее куб на два многогранника, один из которых содержит вершину *B*. Определите Г+В+Р, где Г – число граней этого многогранника, В – число его вершин, Р – число его ребер: а) 26; б) 24; в) 28; г) 31.

5. Сумма количества граней и количества ребер призмы равна 998. Найдите количество ее вершин: а) 500; б) 498; в) 502; г) в условии мало данных.

6. Сколько диагоналей можно провести в кубе: а) 2; б) 4; в) 8; г) 16?

7. Ребро куба равно a. Найдите площадь его диагонального сечения: а) a^2; б) $2a^2$; в) $a^2\sqrt{2}$; г) $2a^2\sqrt{2}$?

8. Сколько окружностей большого круга можно провести через точку, принадлежащую сфере: а) 1; б) 2; в) 4; г) бесконечно много?

9. Шар радиуса 3,4 см пересечен плоскостью на расстоянии 1,6 см от центра. Найдите площадь сечения: а) 11,56 $см^2$; б) 5π $см^2$; в) 9π $см^2$; г) 256 $см^2$?

10. Прямоугольная трапеция *ABCD* с прямыми углами *A* и *B* вращается вокруг прямой, проходящей через вершину острого угла и параллельной

меньшей боковой стороне. Какая фигура получиться при вращении меньшего основания *BC*: а) круг; б) отрезок; в) две концентрические окружности; г) кольцо?

Самостоятельная работа №1:

Задача 1. «Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2,5 см, 5 см и 5см. Найдите ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного параллелепипеда».

Задача 2. «Диагонали трех неравных граней прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 5, 4 и $\overline{23}$. Найдите объем параллелепипеда».

Самостоятельная работа №2:

Задача 1. «Стороны основания наклонной треугольной призмы равны 1,7 дм, 2,8 дм и 3,9 дм. Одна из вершин верхнего основания удалена от каждой стороны нижнего основания на 1,3 дм. Найдите объем призмы».

Задача 2. «Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через сторону основания, равную a, и противоположную ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Площадь сечения равна Q. Найдите объем призмы».

Самостоятельная работа №3:

Задача 1. «Все двугранные углы при ребрах основания треугольной пирамиды равны 60º. Длины ребер одной из боковых граней равны 10, 26 и 4 $\overline{29}$, причем большее из них является гипотенузой прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найдите объем пирамиды».

Задача 2. «В правильной усеченной четырехугольной пирамиде точка пересечения диагоналей является вершиной двух четырехугольных пирамид, основаниями которых служат верхнее и нижнее основания данной усеченной пирамиды. Объемы этих пирамид равны $V_{\mathbf{1}}$ и V_2. Найдите объем усеченной пирамиды».

Самостоятельная работа №4:

Задача 1. «В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен *2a*, а прилежащий угол равен 60º. Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол 45º. Найдите объем цилиндра».

Задача 2. «Площадь полной поверхности цилиндра равна 320π $см^2$, а площадь осевого сечения 192 $см^2$. Найдите объем цилиндра».

Самостоятельная работа №5:

Задача 1. «Высота конуса разделена в отношении 3 : 4 : 3, и через точки деления проведены сечения, параллельные основанию. Объем части конуса, заключенной между плоскостями сечения, равен V. Найдите объем конуса».

Задача 2. «В усеченном конусе точка пересечения диагоналей осевого сечения является вершиной двух конусов, основаниями которых служат верхнее и нижнее основания данного усеченного конуса. Объемы этих конусов равны V_1 и V_2. Найдите объем усеченного конуса».

Самостоятельная работа №6 (математический диктант):

1. Вычислите объем шара, если его радиус равен 6 см.

2. Вычислите диаметр шара, если его объем равен 36π.

3. Объем шара равен $\frac{256\pi}{3}$. Найдите площадь и длину окружности большого круга.

4. В цилиндр вписан шар радиуса 1. Найдите отношение объема цилиндра к объему шара.

5. Для вычисления объема шара ученик предложил свою формулу $V = 2\int_0^R \pi\left(R^2 - x^2\right)dx$. Какие он должен дать пояснения, подтверждающие правильность этой формулы?

Контрольная работа №1:

В-1.

Задача 1. «Основанием прямого параллелепипеда является ромб, диагонали которого относятся как 5 : 2. Зная, что диагонали параллелепипеда равны 17 дм и 10 дм найдите его объем».

Задача 2. «В наклонном параллелепипеде две боковые грани имеют площади $S_1 и\, S_2$, их общее ребро равно a, и они образуют между собой двугранный угол 150º. Найдите объем параллелепипеда».

Задача 3. «В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3 см, а прилежащий к нему острый угол равен 30º. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60º. Найдите объем пирамиды».

В-2.

Задача 1. «Основанием прямого параллелепипеда является ромб, диагонали которого равны 1 дм и 7 дм. Зная, что диагонали параллелепипеда относятся как 13 : 17, найдите его объем».

Задача 2. «В наклонном параллелепипеде основание и боковая грань являются прямоугольниками, и их площади равны 20 $см^2$ и 24 $см^2$ соответственно. Угол между их плоскостями равен 30º. Еще одна грань параллелепипеда имеет площадь 15 $см^2$. Найдите объем параллелепипеда».

Задача 3. «Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом 30º. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите объем пирамиды».

Контрольная работа №2:

Задача 1. «Два конуса имеют общую высоту h. Углы при вершинах их осевых сечений равны α и β. Найдите объем их общей части».

Задача 2. «Из прямоугольника *ABCD* со сторонами *AB = 6* и *BC = 10* вырезаны сектор – четверть круга с радиусом *AB* и треугольник *MCD* *(MC=MD=5)*. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения».

Задача 3. «Около шара, радиус которого равен *R*, описан конус. Найдите образующую, при которой объем конуса будет наименьшим?»

В-2

Задача 1. «Два конуса имеют общее основание. Расстояние между их вершинами равно d, а углы при вершинах их осевых сечений равны α и β.

Найдите объем тела, состоящего из всех точек, которые принадлежат хотя бы одному из данных конусов».

Задача 2. «Из полукруга диаметром *AB (AB = 8)* вырезана вписанная в него трапеция с основанием *AB* и тремя другими равными сторонами. Полученная фигура вращается вокруг прямой *AB*. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения».

Задача 3. «В конус вписан шар. Для какого значения угла при вершине осевого сечения конуса отношение объема шара к объему конуса является наибольшим? Найдите это отношение».

Критерии оценивая:

Контрольная работа: за каждую задачу можно получить от 0 до 3 баллов:

0 баллов – учащийся к задаче не приступал или сделано все неверно;

1 балл – была попытка выполнения задания, но учащийся запутался в решении;

2 балла – ход решения верный, но есть либо вычислительная ошибка, либо неверные ссылки на утверждения, либо неточен чертеж;

3 балла – задача решена верно, с краткими, но достаточными пояснениями.

Тогда: отметка «5» - 8-9 баллов, «4» - 5-7 баллов, «3» - 3-4 балла и «2» - меньше 3 баллов.

Ответы:

Тест: 1. тетраэдр. 2. а) да; б) нет; в) нет. 3. б. 4. а. 5. б. 6. б. 7. в. 8. г. 9. в. 10. а.

Самостоятельная работа №1: 1. 5 см. 2. $12\sqrt{7}$.

Самостоятельная работа №2: 1. 2520 $см^3$. 2. $\frac{Q^2}{2a}\sin 2\beta$.

Самостоятельная работа №3: 1. $160\sqrt{3}$. 2. $(\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2})(\sqrt[3]{V_1^2}+\sqrt[3]{V_1V_2}+\sqrt[3]{V_2^2})$.

Самостоятельная работа №4: 1. $16\pi a^3$. 2. 768π $см^3$.

Самостоятельная работа №5: 1. $\frac{250}{79}$. 2. $(\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2})(\sqrt[3]{V_1^2}+\sqrt[3]{V_1V_2}+\sqrt[3]{V_2^2})$.

Самостоятельная работа №6 (мат. диктант): 1. $288\pi = 904{,}32$. 2. 6. 3. 16π. 8π. 4. 1,5.

Контрольная работа №1: В-1: 1. 360 $дм^3$. 2. $\frac{S_1 S_2}{2a}$. 3. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $см^3$.

В-2: 1. 8,4 $дм^3$. 2. 60 $см^3$. 3. $\frac{800\sqrt{3}}{13}$ $см^3$.

Контрольная работа №2: В-1: 1) возможны два варианта: 1. $\frac{1}{3}\pi h^3 tg^2\frac{\varphi}{2}$, где $\varphi = \min(\alpha;\beta)$; 2. $\frac{1}{3}\pi h^2\left(\frac{tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}\right)^2$. 2) 248π; 396π. 3) $3R\sqrt{2}$.

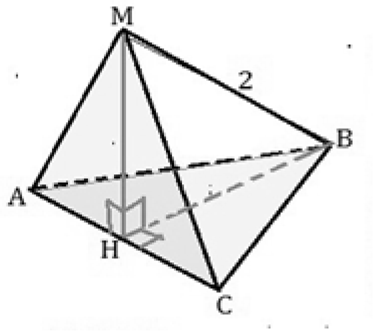
В-2: 1) возможны два варианта: 1. $\frac{1}{3}\pi d^3\left(\frac{tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}\right)^2$. 2. $\frac{1}{3}\pi d^3 tg^2\frac{\gamma}{2}\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\varphi}{2}}\right)^3$, где $\varphi = \min(\alpha;\beta)$, $\gamma = \max(\alpha;\beta)$. 2) $\frac{64\pi}{3}$; $32\pi\sqrt{3}+64\pi$. 3) $2\arcsin\frac{1}{3}$.

Приложение 2

Карточка с задачами для групп (урок №2):

Задача №1. «Две грани треугольной пирамиды – равносторонние треугольники, плоскости которых перпендикуляры. Найдите объем пирамиды, если длина ее наибольшего ребра равна 2».

Решение:



«Грани MAC и ABC – правильные треугольники, они равны, взаимно перпендикулярны. Ребро MB – наибольшее, значит $MB = 2$. Из этого следует, что ребра $MA = MC = AB = AC = BC$.

$MH \perp BH$ – высоты граней MAC и ABC. Прямоугольный ΔMHB – равнобедренный, значит $\angle HMB = \angle HBM = 45^o$. Тогда $MH = BH = MB \cdot \sin 45°$ $= 1 \cdot \frac{\overline{2}}{2} = \frac{\overline{2}}{2}$.

Находим $AB = \frac{BH}{\sin 60°} = \frac{\overline{2}}{2} : \frac{\overline{3}}{2} = \frac{2\,\overline{2}}{2\,\overline{3}} = \frac{\overline{2}}{\overline{3}}$. Теперь можно найти объем пирамиды: $V = \frac{1}{3}Sh$.

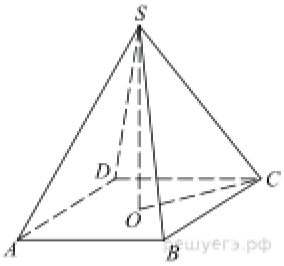
$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{2}}{\overline{3}} \cdot \frac{\overline{2}}{2} = \frac{1}{2\,\overline{3}} = \frac{\overline{3}}{6}$.

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{3}}{6} \cdot \frac{\overline{2}}{2} = \frac{\overline{6}}{36}$».

Ответ: $\frac{\overline{6}}{36}$.

Задача №2. «В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем».

Решение:



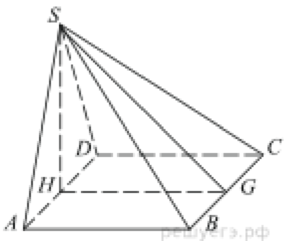
«В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Пусть его центр – точка O, по теореме Пифагора находим $OC = \sqrt{SC^2 - SO^2} = 8$, тогда длина диагонали основания равна 16. Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей, поэтому она равна 128. Следовательно, для объема пирамиды имеем:

$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 128 \cdot 6 = 256$».

Ответ: 256.

Задача №3. «Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60º. Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды».

Решение:



«Поскольку боковые грани *SAB*, *SDC*, *SBC* наклонены к основанию под углом 60º, углы *A* и *D* в треугольнике *ASD* и угол *G* в треугольнике *SGH* равны 60º.

Поэтому треугольник *ASD* – равносторонний, а его сторона связана с высотой формулой $AD = \frac{2}{\sqrt{3}}SH$, откуда $AD = 4\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника *SGH* находим:

$HG = SH \cdot ctg\angle SGH = 6 \cdot ctg 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

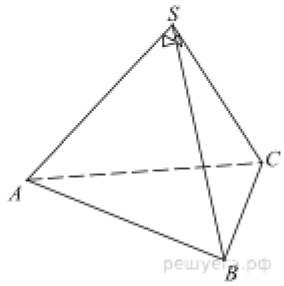
Поскольку *ABCD* – прямоугольник, его площадь равна произведению сторон и равна 24. Осталось найти объем пирамиды:

$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48$».

Ответ: 48.

Задача №4. «Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды».

Решение:



«Удобно считать треугольник ASB основанием пирамиды, тогда отрезок SC будет являться её высотой. Заметим, что

$S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$.

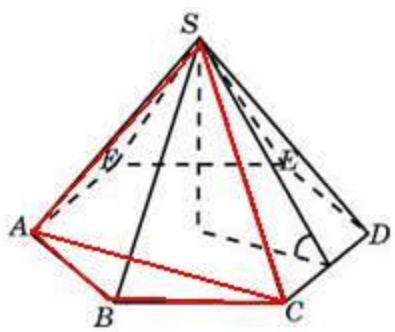
Поскольку $SC = 3$, далее имеем: $V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} S_{ASB} \cdot SC = 4{,}5$».

Ответ: 4,5.

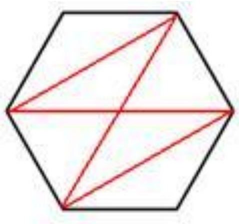
Проверочная работа (урок №3):

Задача №1. «Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды».

Решение:



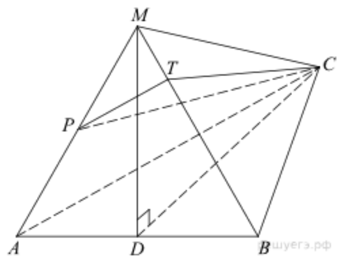
«Объем пирамиды $SABC$ равен $V_1 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$. Можно заметить, что площадь основания S_{ABC} в 6 раз меньше площади основания правильного шестиугольника, то есть $S_{ABCDEF} = 6 S_{ABC}$.



Объем пирамиды $SABCDEF$ можно записать формулой $V_2 = \frac{1}{3} S_{ABCDEF} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 S_{ABC} \cdot h = 6V_1$, то есть объем шестиугольной пирамиды в 6 раз больше объема треугольной пирамиды и равен 6».

Задача №2. «Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 10\sqrt{3}$. Точка P – середина AM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 3 : 1$. Вычислите объем пирамиды $MPTC$».

Решение:



«Проведем высоту CD треугольника ABC. В тоже время CD – высота пирамиды $MPTC$, опущенная из вершины C на плоскость основания MPT.

$CD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 15$. $\frac{MP}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{MT}{MB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{MPT}}{S_{MAB}} = \frac{MP \cdot MT}{MA \cdot MB} = \frac{1}{8}$.

Площадь треугольника MPT составляет $\frac{1}{8} S_{AMB}$. Следовательно,

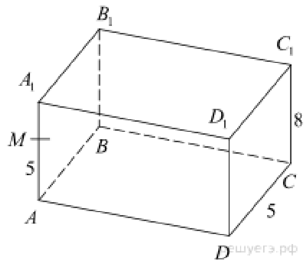
$S_{MPT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{32} = \frac{300\sqrt{3}}{32} = \frac{75\sqrt{3}}{8}$.

Найдем объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{MPT} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{75\sqrt{3}}{8} \cdot 15 = \frac{375\sqrt{3}}{8}$».

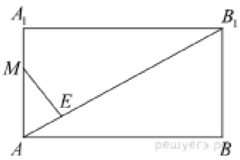
Ответ: $\frac{375\sqrt{3}}{8}$.

Задача №3. «В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD = 12$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M – точка на ребре AA_1, причем $AM = 5$».

Решение:



«Заметим, что $V_{MB_1C_1D} = \frac{1}{3} S_{B_1C_1D} \cdot h_M$. Площадь прямоугольного треугольника, лежащего в основании, равна половине произведения катетов: $S_{B_1C_1D} = 6\sqrt{89}$.Основание пирамиды лежит в плоскости AB_1C_1D, поэтому высотой пирамиды будет являться перпендикуляр, опущенный из точки M на эту плоскость. Опустим перпендикуляр ME на прямую AB_1. Поскольку $ME \perp AB_1$ и $ME \perp AD$ (в силу того, что $AD \perp (AA_1B_1B)$), отрезок ME является высотой пирамиды: $ME = h_M$.



Треугольник AME подобен треугольнику ABB_1, значит, $ME = \frac{AM \cdot AB}{AB_1} = \frac{25}{\sqrt{89}}$, $V_{MB_1C_1D} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{89} \cdot \frac{25}{\sqrt{89}} = 50$».

Ответ: 50.

Задача №4. «В основании пирамиды лежит ромб со стороной 15 см, каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол в 45º. Найдите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности 3 $дм^2$».

Решение.

«Основание пирамиды *TABCD* - *ABCD* – ромб, значит *AD*=*AB*=*BC*=*CD*=*15*, т.О – центр вписанной окружности, проводим перпендикуляр *OH* на *AD* в точку касания, значит *OH* – радиус, *TO* – высота пирамиды.

Проведем апофему *TH*, тогда угол *THO*=*45º*, $S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot TH$, отсюда находим $TH = \frac{300 см^2}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15} = 10$ см.

Прямоугольный треугольник THO – равнобедренный: $\angle HTO = 90° - \angle THO = 90° - 45° = 45°$, $OH = TO = \sqrt{\frac{TH^2}{2}} = 5\sqrt{2}$ см.

Тогда $S_{ABCD} = 2 \cdot AD \cdot OH = 2 \cdot 15 \cdot 5\sqrt{2} = 150\sqrt{2}$ см^2, отсюда можем найти объем пирамиды

$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot TO = \frac{1}{3} \cdot 150\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 500$ см$^3 = 0{,}5$ дм^3».

Ответ: $0{,}5$ дм^3.