МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ» В УГЛУБЛЁННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ»**

Студент М.М. Филипченкова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель к.ф.-м.н., профессор Е.В. Потоскуев ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант ст.преподаватель А.В. Прошина ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является определение методических основ обучения учащихся старших классов решению задач по теме «Прямые и плоскости» геометрическим и векторно-координатным методами, на основе учебно-методического комплекса Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы. Углублённый уровень».

Тема «Прямые и плоскости в пространстве» является значительной частью всего курса стереометрии. Знания теоретического материала и умения решать задачи на взаимное расположение прямых и плоскостей являются основными при изучении свойств геометрических фигур в стереометрии.

В данной бакалаврской работе предлагается методика изучения темы «Прямые и плоскости», когда сознательное усвоение теоретического материала сопровождается решением учащимися стереометрических задач на вычисление углов и расстояний между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями геометрическим и векторно-координатным методами.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В Главе I приведён анализ содержания программы и школьных учебников геометрии углублённого уровня по теме исследования, представлены геометрический и векторно-координатный методы решения задач на вычисление углов и расстояний между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями в пространстве.

В Главе II представлены методические аспекты по обучению решению задач по темам «Прямые в пространстве», «Прямая и плоскость в пространстве», «Плоскости в пространстве» в углублённом курсе геометрии старшей школы.

Список литературы содержит 23 наименования.

Объем работы составляет 60 страниц.

ABSTRACT

The title of the thesis is “The teaching method of solving the problems on the topic of “Straight lines and planes” in the advanced Geometry course of high school”.

The aim of the project is to give some information about methodological specifics of teaching how to solve problems on the topic of “Straight lines and planes in space”, using geometric and vector-coordinate methods.

The object of the thesis is the process of Geometry teaching in high school with advanced study of Mathematics.

The subject of the bachelor’s thesis is the teaching method of solving the problems on the topic of “Straight lines and planes in space” in the advanced Geometry course of high school.

The first chapter of the thesis presents a list of knowledge and skills that high school students should have after having completed the advanced study of the topic “Straight lines and planes in space”. We then analyze programs and textbooks on the topic under research and present geometrical and vector-coordinate methods of solving stereometric problems of the given topic.

The second chapter of the thesis gives detailed information about methodological recommendations on teaching how to solve problems of the topics “Straight lines in space”, “Straight lines and plane in space” and “Planes in space”. Much attention is given to solving problems on the calculation of distances and angles between two straight lines, a straight line and a plane, two planes in space and solving problems on determination of their relative position.

In conclusion we would like to point out that teaching Geometry forms not only special geometric knowledge of the student, but also plays a huge role in the overall development of the individual, their ability to think logically and to prove their statements in any field of knowledge.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. «Геометрия, как учебный предмет, играет огромную роль в развитии познавательной активности и любознательности, логического мышления и пространственного воображения учащегося. Изучение геометрии и обучение геометрией формируют не только специальные геометрические знания учащегося, но и играют огромную роль в общем развитии личности, ее умении логически мыслить и доказательно обосновывать истинность утверждений в любой сфере деятельности» [9, С. 149].

Тема «Прямые и плоскости», изучаемая в 10 классе, является значительной частью всего курса стереометрии. Разделы о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве изучаются сразу после освоения учащимися основных понятий и аксиом стереометрии. Знания теоретического материала и умения решать задачи на взаимное расположение прямых и плоскостей являются основными при изучении свойств геометрических фигур в пространстве. «Без знания о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве невозможно изучение свойств многогранных углов, многогранников и круглых тел» [7, с. 258]. Поэтому от того, как учащиеся усвоят тему «Прямые и плоскости», зависит дальнейшее изучение ими курса стереометрии.

Геометрические задачи являются одним их основных средств, используемых при обучении геометрии для формирования знаний, умений и навыков учащихся. Изучение темы «Прямые и плоскости в пространстве» сопровождается решением учащимися задач стереометрии в большом количестве. При этом у учащихся развивается пространственное воображение, формируются навыки изображения на плоскости фигур, расположенных в трехмерном пространстве, их верного восприятия и чтения. Опыт показывает, что геометрические задачи вызывают у учащихся затруднения. «Все трудности можно распределить на три основные группы. Первая группа трудностей связана с рисунком. Вторая группа трудностей связана с выбором необходимых теорем и формул. Третья группа трудностей – это трудности арифметического и алгебраического характера» [2].

Согласно данным, полученным из электронного ресурса ФИПИ [17], в единый государственный экзамен по математике профильного уровня во вторую часть включено задание №14 для проверки знаний и умений учащихся по теме «Прямые и плоскости в пространстве».

В Федеральном перечне учебников [18] для изучения углублённого курса геометрии на старшей ступени общего образования рекомендовано всего два учебно-методического комплекса для 10 класса, авторами которых являются А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик [1] и Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич [11], [12].

Проблема исследования: определение методических основ обучения решению задач по теме «Прямые и плоскости» в углублённом курсе геометрии старшей школы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии учащихся старших классов с углублённым изучением математики.

Предмет исследования: методика обучения решению задач по теме «Прямые и плоскости» в углублённом курсе геометрии старшей школы.

Цель исследования: определить методические основы обучения учащихся старших классов решению задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве», используя геометрический и векторно-координатный методы, на основе учебно-методического комплекса Евгения Викторовича Потоскуева и Леонида Исааковича Звавича.

Задачи исследования:

1. Проанализировать содержание программы и школьных учебников геометрии углублённого уровня по теме исследования.

2. Рассмотреть методы решения задач на вычисление углов и расстояний в пространстве.

3. Выделить методические аспекты обучения решению задач геометрии прямых в пространстве.

4. Раскрыть методические аспекты обучения решению задач геометрии прямых и плоскостей в пространстве.

5. Выделить методические аспекты обучения решению задач геометрии плоскостей в пространстве.

При решении поставленных задач были использованы следующие **методы исследования**: изучение учебно-методической литературы, анализ содержания программ и учебников геометрии углублённого уровня, самостоятельное решение задач.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения старшеклассников решению задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве» в углублённом курсе геометрии.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в нем предложена система задач стереометрии по темам «Прямые в пространстве», «Прямая и плоскость в пространстве», «Плоскости в пространстве» для учащихся старших классов с углублённым изучением математики.

Апробация результатов исследования. Основные теоретические выводы исследования были апробированы на I этапе научно-практической конференции «Студенческие дни науки в ТГУ»(г. Тольятти, апрель 2018 г., диплом за I место).

На защиту выносятся методические рекомендации обучения решению задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве» в классах с углублённым изучением геометрии на основе УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 кл. Углублённый уровень».

Бакалаврская работа включает в себя введение, две главы, заключение и список использованной литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи, и методы исследования.

В Главе I приведён анализ содержания программы и школьных учебников углублённого уровня по теме исследования, раскрыты геометрический и векторно-координатный методы решения задач на вычисление углов и расстояний между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями в пространстве.

В Главе II представлены методические аспекты по обучению решению задач по темам «Прямые в пространстве», «Прямая и плоскость в пространстве», «Плоскости в пространстве» в углублённом курсе геометрии старшей школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 23 наименований.

ГЛАВА I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ» В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

§1. Анализ содержания программы и школьных учебников геометрии по теме «Прямые и плоскости в пространстве»

В пункте 9.3 *Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) образования* [16] перечислены следующие требования к предметным результатам освоения углублённого курса геометрии:

- сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;

- сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

- владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

- сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений.

Согласно *Примерной основной общеобразовательной программе среднего общего образования* учащийся в 10-11 классах по теме «Прямые и плоскости в пространстве» научится на углублённом уровне:

- «владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;

- иметь представление о скрещивающихся прямых в пространстве и уметь находить угол и расстояние между ними;

- применять теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве при решении задач;
- уметь применять перпендикулярности прямой и плоскости при решении задач;
- владеть понятиями ортогональное проектирование, наклонные и их проекции, уметь применять теорему о трех перпендикулярах при решении задач;
- владеть понятиями расстояние между фигурами в пространстве, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых и уметь применять их при решении задач;
- владеть понятием угол между прямой и плоскостью и уметь применять его при решении задач;
- владеть понятиями двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярные плоскости и уметь применять их при решении задач;
- решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат» [15].

Из *Федерального перечня учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования* [18] для анализа содержания учебников геометрии для 10 класса углублённого уровня по теме «Прямые и плоскости в пространстве» были выбраны учебник А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика [1] и учебник Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [11].

К учебнику геометрии для 10 класса с углублённым изучением математики авторов А.Д. Александрова и др. разработано методическое пособие [8], содержащее примерное тематическое планирование материала, на изучение которого отводится 3 часа в неделю.

Материал в учебнике представлен в четырех главах, состоящих из параграфов, которые разделены на пункты. Каждая глава начинается с введения, где сформулированы задачи соответствующей главы, а завершаются подведением итогов и выделением основных результатов. После каждого параграфа расположен задачный материал, разделенный на рубрики («Доказываем», «Дополняем теорию», «Рисуем», «Находим величину» и др.). Материал рубрики «Разбираемся в решении» предназначен для того, чтобы показать движение рассуждений, приводящих к получению нужного результата.

В учебнике А.Д. Александрова §3 «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» (3ч.) относится к первой главе «Основания стереометрии». Основными результатами изучения параграфа являются: а) умение доказывать признак скрещивающихся прямых и применять его при решении задач; б) умение сводить задачи о параллельных и пересекающихся прямых к задачам планиметрии.

Глава II «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей» разделена на четыре темы: «Перпендикулярность прямой и плоскости» (8ч.), «Перпендикулярность плоскостей» (4ч.), «Параллельные плоскости» (5ч.), «Параллельность прямой и плоскости» (3ч.). На решение задач отводится 2 часа, 1 час для контрольной работы №2. Основными результатами изучения главы II являются: а) умение доказывать признак перпендикулярности прямой и плоскости и применять его для доказательства перпендикулярности конкретных прямых и плоскостей при решении задач; б) умение применять теорему о трёх перпендикулярах; в) умение доказывать перпендикулярность плоскостей, использовать её для доказательства перпендикулярности прямых при решении задач; г) умение доказывать и использовать свойства и признак параллельных плоскостей; д) умение доказывать признак параллельности прямой и плоскости, использовать его при решении задач.

Глава III «Расстояния и углы» состоит из §12 «Расстояние между фигурами» (6ч.), §14 «Углы» (8ч.). На закрепление материала из главы III и решение задач отводится 3 часа, также 1 час для контрольной работы №3. Основными результатами изучения главы III являются умение: а) вычислять расстояние от точки до плоскости, а также между скрещивающимися прямыми; б) находить углы в известных геометрических телах.

Тему «Прямые и плоскости в пространстве» подробно рассмотрим на основе учебно-методического комплекса по геометрии авторов Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 кл. Углублённый уровень».

Для работы по рассматриваемому учебному комплексу авторами разработаны рабочая программа [13] и методическое пособие для учителей [10]. Учебник [11] из данного УМК содержит теоретический материал. После каждой главы для учащихся предложены «Задания для работы с интернет - ресурсами», содержащие рекомендации для поиска дополнительной информации по изучаемой теме. Задачный материал к параграфам изложен в задачнике [12], содержащем более 1000 задач. В связи с большим количеством задач специальным значком ☺ отмечены задачи, которые наиболее необходимы для решения, также с помощью значка ⌛ выделены трудные задачи. Для удобства учащихся в конце задачника расположены формулы планиметрии, стереометрии и тригонометрии. К большинству задач даны ответы, к некоторым задачам – краткие указания к их решению. Планирование на изучение учебного материала углублённого курса геометрии рассчитано на 3 часа в неделю, всего 102 часа в 10 классе.

Для того чтобы изучить тему «Прямые и плоскости», учащимся нужно освоить материал следующих глав учебника и решить задачи из соответствующих глав задачника.

Глава 2 «Прямые в пространстве» содержит в себе два параграфа. На изучение материала второй главы и решение задач рекомендовано 8 часов, в том числе один час на выполнение контрольной работы №2. После изучения главы «Прямые в пространстве», учащиеся должны уметь на изображении многогранника находить: а) углы между различными прямыми, содержащими его ребра, диагонали; б) длины отрезков. Обосновывать решения задач. Ссылаться на изученный материал, выполнять рисунки.

Планирование изучения *главы 3 «Прямая и плоскость в пространстве»* подразумевает ее разделение на три темы: «Параллельность прямой и плоскости» (9ч.), «Перпендикулярность прямой и плоскости» (9ч.), «Угол между прямой и плоскостью» (9ч.). В завершении изучения главы 3 отводится 3 часа на повторение теории о взаимном расположении прямых и плоскостей в задачах на доказательство, построение и вычисление. По результатам изучения третьей главы учащиеся должны уметь: а) формулировать определение и признак параллельности (перпендикулярности) прямой и плоскости; б) формулировать и доказывать прямую и обратную теоремы о трех перпендикулярах, теоремы о свойствах прямых, параллельных (перпендикулярных) плоскости; в) используя многогранники, решать задачи на доказательство, построение, вычисление, применяя при этом свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Глава 4 «Плоскости в пространстве» разделена на темы: «Параллельные плоскости» (8ч.), «Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями. Перпендикулярные плоскости» (9ч.). После каждой темы предусмотрено время для проведения контрольной работы. После изучения главы учащиеся должны уметь формулировать и понимать сущность признака перпендикулярности двух плоскостей, теорем о свойствах перпендикулярности прямой и плоскости. Решать различными способами задачи на нахождение расстояний между двумя скрещивающимися прямыми, величины угла между плоскостями, используя изображения многогранников.

На изучение материала из *главы 5 «Расстояния в пространстве»* отводится 9 часов. Основным результатом освоения учащимися данной главы является умение на моделях многогранников «видеть» и вычислять расстояние между скрещивающимися прямыми, от точки до прямой и плоскости, между параллельными плоскостями.

Также в учебно-методическом комплексе рассмотрены еще две главы: «Векторный метод в пространстве» (9ч.) и «Координатный метод в пространстве» (9ч.). Эти темы важны, но в отличие от предыдущих, могут изучаться на различных уровнях углубления. Это распространяется как на теоретический, так и на задачный материал.

§2. Геометрический метод решения задач на вычисление углов и расстояний между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями в пространстве

«Решение стереометрической задачи чаще всего сводится к решению планиметрических задач» [3, с. 4]. Геометрический метод основывается на применении теорем и аксиом планиметрии и стереометрии, а также в нем используются средства алгебры и тригонометрии. Успешность решения задач стереометрии любым методом зависит не только от знания теорем и умения их применять, но и от правильного выполнения геометрических построений.

С. Ланг [21] и Дж. Смит [23] в своих работах рассматривают методы решения стереометрических задач, приводя их подробное решение. Учащиеся могут дополнительно ознакомиться с данным материалом.

«Нахождение расстояний в пространстве является важной частью стереометрии, на которой основываются все метрические вопросы пространственной геометрии. Умение «видеть» и вычислять различные расстояния, углы между прямыми и плоскостями является фундаментом для успешного изучения стереометрии. Поэтому необходимо научиться «видеть в пространстве» эти расстояния и углы, правильно изображать их на моделях многогранников» [14, С. 73].

В работе Далингера В.А. [4] рекомендуется посредством систематизации теоретического материала (группировки утверждений) обучать учащихся решению стереометрических задач.

Для успешного решения задач стереометрии на вычисление углов между двумя прямыми, двумя плоскостями, прямой и плоскостью учащимся нужно знать и понимать следующие утверждения:

– если две прямые совпадают или параллельны, то величина угла между ними считается равной 0°;

– «величина угла между пересекающимися прямыми равна величине наименьшего из углов, образованных этими прямыми» [11, с. 42];

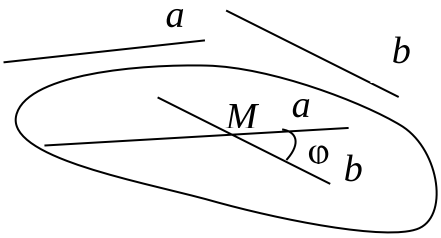


Рис. 1

– «за величину угла между двумя скрещивающимися прямыми a и b принимается величина угла между параллельными им пересекающимися в некоторой точке M прямыми a_1 и b_1, то есть $a; b = a_1; b_1 = \varphi$, где $a_1 \parallel a,\ b_1 \parallel b, a_1 \cap b_1 = M$» [11, с. 42], (Рис. 1);

– «угол между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией на эту плоскость;

– угол между плоскостью и прямой, лежащей в этой плоскости или параллельной этой плоскости, считается равным 0°;

– угол между плоскостью и прямой, перпендикулярной этой плоскости, считается равным 90°» [11, с. 59];

– «угол между параллельными и совпадающими плоскостями полагается считать равным нулю» [11, с. 78];

– «углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных при их пересечении. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла, который образован лучами, лежащими в гранях этого угла и перпендикулярными его ребру» [14, с. 102];

– угол между взаимно перпендикулярными плоскостями равен 90°.

Для успешного решения задач стереометрии на вычисление расстояний между двумя прямыми, двумя плоскостями, прямой и плоскостью учащимся нужно знать и понимать следующие утверждения:

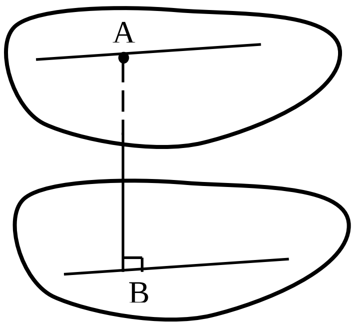


Рис. 2

– если две прямые совпадают или пересекаются, то расстояние между ними равно нулю;

– «если прямые a и b параллельны, то расстояние между ними либо равно h (если перпендикуляр, опущенный из точки A прямой a на плоскость β, пересечет прямую b (Рис.2)), либо равно $\sqrt{h^2 + m^2}$ (если этот перпендикуляр пересечет плоскость β в некоторой точке K, не принадлежащей прямой b, а удаленной от нее на расстояние m (Рис. 3))» [11, с. 100];

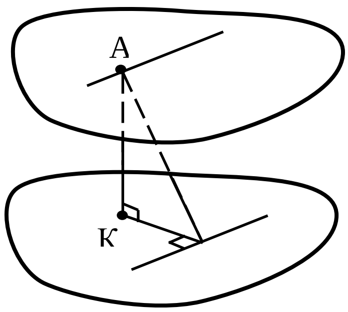


Рис. 3

– «расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра» [11, с. 84];

– расстояние между прямой и плоскостью равно нулю, если прямая пересекает плоскость или лежит в ней;

– «если прямая параллельна плоскости, то расстояние между ними равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой на данную плоскость» [9, с. 78] (Рис. 4).

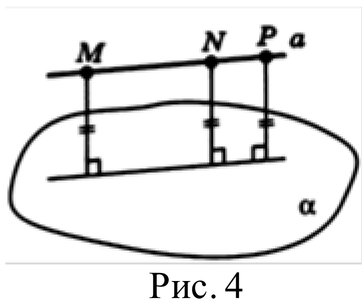


Рис. 4

– если две плоскости совпадают или пересекаются, то расстояние между ними равно нулю;

– «расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из этих плоскостей на другую» [9, с. 78].

§3. Векторно-координатный метод решения задач на вычисление расстояний в пространстве

При изучении курса стереометрии используются различные методы решения задач: кроме традиционного геометрического метода, применяются векторный и векторно-координатный методы их решения, которые связаны между собой.

Авторы в учебном пособии [7] утверждают, что при введении векторного метода для решения задач стереометрии необходимо заинтересовать учащихся, показав им эффективность его использования, при этом следует выбирать более простые задачи, чтобы не отвлекать внимание на трудности геометрического содержания. Но «следует иметь в виду, что векторный метод не является универсальным, к решению некоторых задач он не применим или малоэффективен» [7, С. 386].

По мнению Э.Г. Готмана, некоторые метрические задачи удобно решать при помощи координатного метода. Так, автор в качестве этих задач выделяет «задачи, в которых речь идёт о кубе, прямоугольном параллелепипеде или тетраэдре с прямым трёхгранным углом. Прямоугольная система координат в пространстве естественным образом связывается с этими многогранниками, при этом среди координат их вершин много нулей, что упрощает вычисления» [3, С. 50].

В зарубежной литературе [20], [22] авторы предлагают алгоритм векторно-координатного метода решения задач стереометрии.

Использование векторно-координатного метода при решении задач стереометрии упрощает их решение и позволяет обойтись без дополнительных построений, которые иногда затрудняют поиск решения даже некоторых простых задач. Применение векторов при решении задач развивает инициативу учащихся в поисках эффективных путей решения этих задач. Но при этом рекомендуется не ограничиваться применением координатного метода, а решать задачу и геометрическим методом, сравнивая при этом полученные результаты.

Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич в методическом пособии подчеркивают, «чтобы векторы стали аппаратом решения геометрических задач, необходимо, прежде всего, научить учащихся переводить условие задачи в векторную символику, затем грамотно выполнить соответствующие алгебраические операции над векторами и, наконец, полученный в векторной форме результат перевести вновь на язык элементарной геометрии» [10, С.108].

При решении векторным, векторно-координатным методом различных геометрических задач на вычисление различных расстояний, величин углов между прямыми и плоскостями в пространстве эффективным является использование скалярного произведения векторов, при этом «рабочими» являются уравнения прямой и плоскости в пространстве, поэтому учащиеся должны уметь составлять эти уравнения.

Если прямая l проходит через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то ее уравнения в канонической и параметрической форме имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=x_1+t\cdot(x_2-x_1), \\ y=y_1+t\cdot(y_2-y_1), \\ z=z_1+t\cdot(z_2-z_1), \end{cases} \quad \text{где } t\in R.$$

Если прямая l проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, параллельно вектору $\vec{p}=\{a;b;c\}$, то её уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=x_0+t\cdot a, \\ y=y_0+t\cdot b, \\ z=z_0+t\cdot c. \end{cases}, \text{ где } t\in R.$$

Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, при условии $A^2+B^2+C^2\neq 0$, в прямоугольной системе координат $Oxyz$ задает плоскость, для которой вектор $n\ (A;B;C)$ является вектором нормали.

С помощью скалярного произведения двух векторов можно находить расстояние между двумя точками, следовательно, длину отрезка. Если точки

A и B имеют координаты $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то расстояние между этими точками равно длине вектора AB и находится по формуле: $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Векторно-координатным методом можно найти (вычислить) расстояние между скрещивающимися прямыми, параллельными прямой и плоскостью, параллельными плоскостями, пользуясь формулой для вычисления расстояния от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $\alpha{:}\ Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\rho\,(M_0; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

«Расстояние между плоскостью и параллельной ей прямой равно расстоянию от любой точки этой прямой до данной плоскости.

Расстояние между параллельными плоскостями равно расстоянию от любой точки одной плоскости до другой плоскости» [11, С. 99].

Для составления общего уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ плоскости, проходящей через три неколлинеарные точки $(M_1(x_1;\ y_1;\ z_1),\ M_2(x_2;\ y_2;\ z_2),\ M_3(x_3;\ y_3;\ z_3))$, решается система уравнений:

$$\begin{cases} x_1A + y_1B + z_1C + D = 0, \\ x_2A + y_2B + z_2C + D = 0, \\ x_2A + y_2B + z_2C + D = 0. \end{cases}$$

«Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из них до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой прямой» [11, С. 102].

Чтобы векторно-координатным методом найти (вычислить) расстояние между данными скрещивающимися прямыми b и c, заданными своими уравнениями, находят координаты вектора $n\,(A; B; C)$, перпендикулярного направляющим векторам этих прямых. Далее, составляют уравнение плоскости $\alpha = (M; n)$, проходящей через точку $M \in b$ перпендикулярно вектору n, и находят расстояние до этой плоскости от точки $K \in c$. Это расстояние и является искомым.

§4. Векторно-координатный метод решения задач на вычисление углов в пространстве

Рассмотрим векторно-координатный метод для вычисления *угла между двумя прямыми в пространстве.*

Прямые a и b, которые проходят соответственно через точки $M_1\ x_1; y_1; z_1$ и $M_2\ x_2; y_2; z_2$ и имеют направляющие векторы $p_1\ a_1; a_2; a_3$ и $p_2\ b_1; b_2; b_3$, задаются параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot a_1 , \\ y = y_1 + t \cdot a_2 , \\ z = z_1 + t \cdot a_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + t \cdot b_1 , \\ y = y_2 + t \cdot b_2 , \\ z = z_2 + t \cdot b_3 . \end{cases} \qquad t \in \boldsymbol{R}.$$

Зная координаты направляющих векторов прямых, можно определить, параллельны ли прямые, используя признак: $a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$, а также перпендикулярны ли они, используя признак: $a \perp b \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Если прямые не параллельны и не перпендикулярны, то можно вычислить косинус угла между ними. Обозначим: $\varphi = \angle(a; b), \psi = \angle(p_1; p_2)$. Угол ψ между векторами изменяется в промежутке $[0^\circ; 180^\circ]$, а угол φ между прямыми – в промежутке $[0^\circ; 90^\circ]$, при этом либо $\varphi = \psi$, либо $\varphi + \psi = 180^\circ$ (Рис. 5).

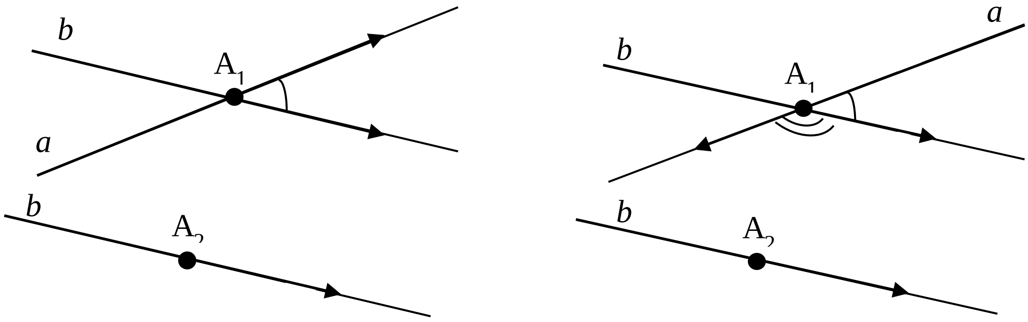


Рис. 5

Учитывая, что $\cos\varphi \geq 0$ при $\varphi \in [0°; 90°]$, получаем $\cos\varphi = \cos\psi$. Таким образом, косинус угла между прямыми можно найти по формуле:

$$\cos\varphi = \cos\psi = \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \ p_2}$$

или в координатном виде

$$\cos\varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Угол между прямой $\boldsymbol{l}$: $\begin{aligned} x &= x_0 + \boldsymbol{t} \cdot a, \\ y &= y_0 + \boldsymbol{t} \cdot b, \\ z &= z_0 + \boldsymbol{t} \cdot c, \end{aligned}$ *и плоскостью* α: $Ax + By + Cz + {}$ $+D = 0$ можно вычислить, используя угол между направляющим вектором $p\ (a; b; c)$ прямой l и вектором нормали $n\ (A; B; C)$ плоскости α (Рис. 6).

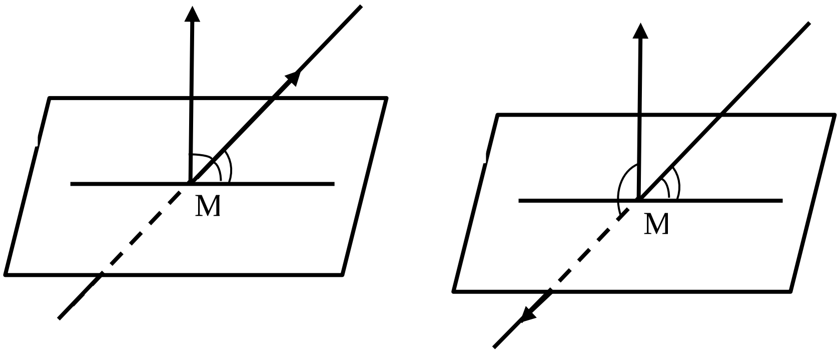


Рис. 6

Если $a{\cdot}A + b{\cdot}B + c{\cdot}C = 0$, то прямая и плоскость параллельны, а если выполняется равенство $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$, то они перпендикулярны. Если данные прямая и плоскость не параллельны и не перпендикулярны, то синус угла между ними находится по формуле:

$$\sin\angle(l; \alpha) = \sin\varphi = \cos\psi = \cos\angle(p; n) = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между плоскостями α: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и β: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ удобно связать между их нормальными векторами $n_1\ (A_1; B_1; C_1)$ и $n_2\ (A_2; B_2; C_2)$ (Рис. 7). По координатам векторов нормалей плоскостей можно определить, параллельны ли они, используя признак: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, а также перпендикулярны ли, используя признак: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$.

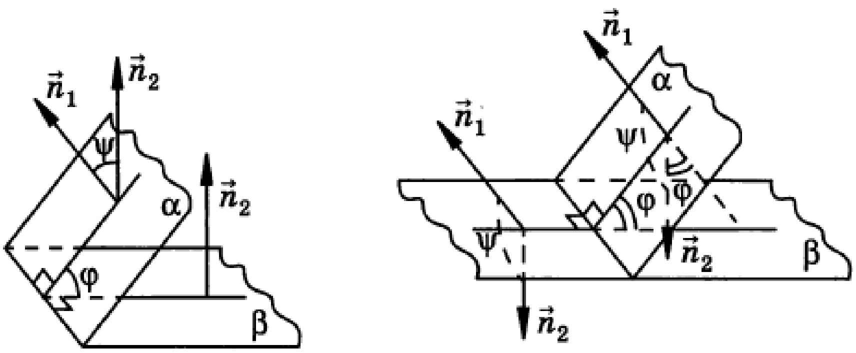


Рис. 7

Если плоскости не параллельны и не перпендикулярны, то можно вычислить косинус угла между ними по формуле:

$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \cos\angle(n_1;n_2) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 \cdot + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для решения задачи стереометрии на вычисление угла векторно-координатным методом, учащимся нужно уметь находить координаты направляющего вектора прямой и вектора нормали плоскости, а также знать вышеприведенные формулы. Для доказательства параллельности или перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей учащимся нужно знать признаки параллельности и перпендикулярности двух ненулевых векторов.

Выводы по первой главе

1. Представлен перечень знаний и умений, которыми должен обладать учащийся 10-11 классов по результатам изучения на углублённом уровне темы «Прямые и плоскости в пространстве». Приведены требования к результатам освоения углублённого курса геометрии.

2. Проведен анализ содержания учебников геометрии для 10 класса углублённого уровня по теме «Прямые и плоскости». Существуют некоторые различия в содержании учебников. Автор учебника по геометрии А.Д. Александров относит изучение темы «Углы» на более позднее время. По мнению Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича «такой «принцип» тормозит как процесс решении задач, так и дальнейшее изучение теоретического

материала» [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**, с.31]. Отличием является то, что в учебнике Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича представлены главы «Векторный метод в пространстве» и «Координатный метод в пространстве», в которых описан векторно-координатный метод и предложены задачи на вычисление расстояний и углов данным методом.

3. Определено: главной задачей изучения учащимися стереометрии является формирование у них верных представлений о пространственных геометрических образах, необходимых для решения содержательных стереометрических задач. При этом обучение стереометрии должно быть основано на соблюдении принципов наглядности, доступности, системности изложения теоретического материала в сочетании с задачным материалом, подобранным с соблюдением принципа «от простого- к сложному». Эффективным приемом в работе со стереометрическими задачами является прием работы с опорными задачами. Только после решения всех опорных задач следует переходить к более сложным задачам.

4. Для решения задач стереометрии геометрическим методом учащимся нужно обладать большим объемом знаний в планиметрии, стереометрии, а также алгебре и тригонометрии. При решении стереометрических задач на нахождение расстояний между двумя прямыми, двумя плоскостями, прямой и плоскостью векторно-координатным методом используется формула на вычисления расстояния от точки до плоскости. Для решения задачи стереометрии на вычисление углов в пространстве векторно-координатным методом, учащимся нужно уметь находить координаты направляющего вектора прямой и вектора нормали плоскости, а также знать вышеприведенные формулы. Для доказательства параллельности или перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей учащимся нужно знать признаки параллельности и перпендикулярности двух ненулевых векторов.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ» В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

§5. Методические аспекты обучения решению задач геометрии прямых в пространстве

5.1. Взаимное расположение прямых в пространстве

Прежде чем начать изучение вопроса о взаимном расположении прямых в пространстве, необходимо повторить аналогичный материал о взаимном расположении двух прямых на плоскости.

Учащиеся еще из планиметрии знают, что две различные прямые на плоскости либо имеют одну общую точку (пересекаются), либо не имеют ни одной общей точки (параллельны). При этом в планиметрии речь идет о двух прямых, которые заведомо лежат в одной плоскости. В стереометрии фигуры рассматриваются в пространстве, поэтому для взаимного расположения двух прямых возможностей больше, чем в планиметрии.

Учащимся нужно знать и понимать, что существует три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве - две данные прямые могут быть: а) параллельными; б) пересекающимися; в) скрещивающимися.

Далее подробно рассмотрим классификацию взаимного расположения двух прямых в пространстве, которая приводится в школьных учебниках.

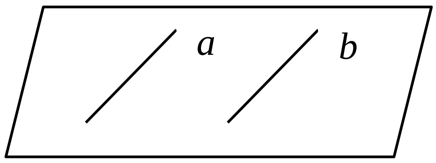


Рис. 8

«*Определение*. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются» [11, С. 22]. Параллельность прямых a и b обозначают так: $a||b$.

Параллельные прямые a и b, через которые проходит плоскость π, изображены на рисунке 8. Параллельные прямые в пространстве обладают свойствами, аналогичными их свойствам на плоскости.

«*Теорема*. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Теорема. Через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

Теорема. (признак параллельности прямых). Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны» [11, С. 36-38].

«*Определение.* Две прямые в пространстве называются пересекающимися, если они лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку» [11, С. 33].

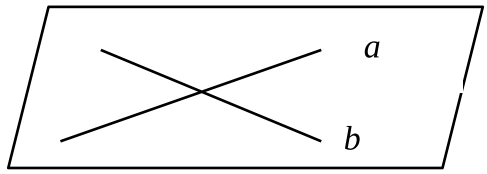


Рис. 9

Пересекающиеся прямые изображены на рисунке 9. Если прямые *a* и *b* пересекаются в точке А, то символически записывают: $a \cap b$ = А или А= $a \cap b$.

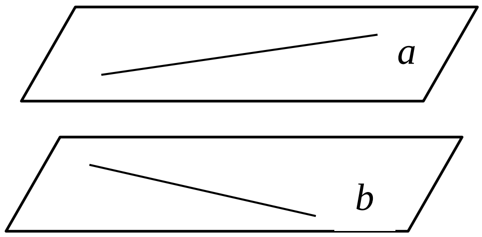


Рис. 10

«*Определение.* Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости» [11, С. 32].

На рисунке 10 показаны скрещивающиеся прямые *a* и *b*.

Для учащихся будет полезно привести реальные примеры скрещивающихся прямых. Таким примером может служить транспортные развязки (Рис. 11).

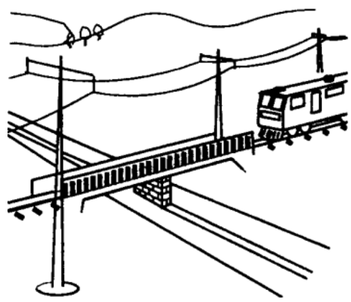


Рис. 11

Теорема. «(признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.» [11, С. 35].

Как показывает опыт, использование изображений многогранников способствует наиболее осмысленному пониманию этой теоремы.

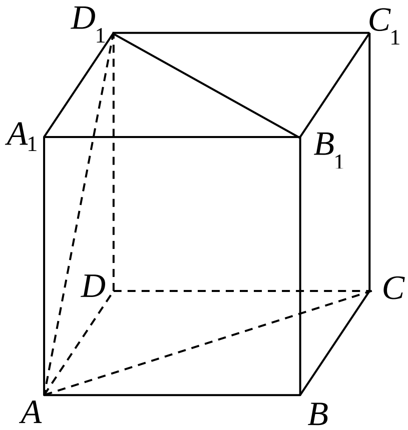


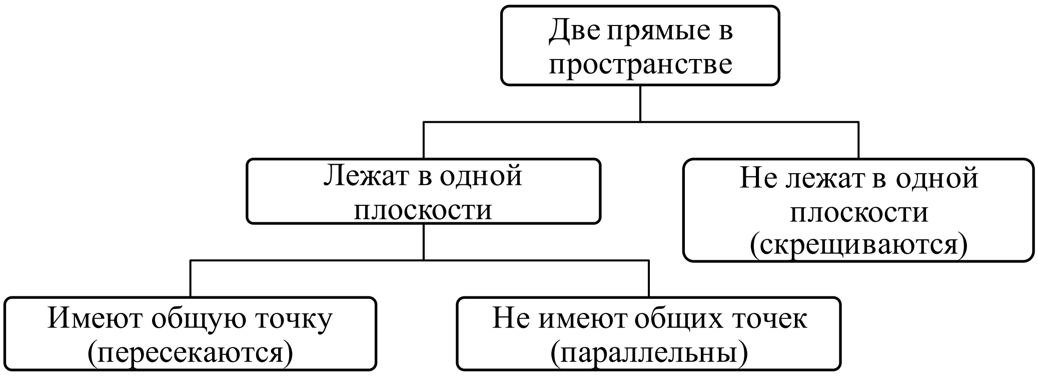
Рис. 12

Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (Рис.12). Так как прямая AD_1 лежит в (AA_1D_1), а прямая CD пересекает эту плоскость в точке D, которая не принадлежит прямой AD_1, то прямые AD_1 и CD скрещиваются. Также в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ скрещивающимися являются, например, пары прямых B_1D_1 и BC, AC и BB_1 (доказывается аналогично).

Е.А. Добрина [5] рекомендует для закрепления понимания всех возможных случаев расположения прямых в пространстве осуществлять с помощью схемы.

Схема 1

Взаимное расположение прямых в пространстве



Для лучшего усвоения и понимания теоретического материала рекомендуется рассматривать задачи на примере многогранников. Для того, чтобы учащимся избежать затруднения с изображением фигур, желательно разместить на стенах кабинета достаточное количество различных стереометрических чертежей, которые полезно обсуждать как можно чаще. Учащимся полезно узнавать дополнительную информацию о многогранниках для формирования пространственных представлений. Старшеклассникам можно предложить ознакомиться с иностранной литературой, например, К. Алсина и Р. Б. Нельсен [19] подробно описывают свойства и способы изображения пространственных фигур.

«**Задача 1.** Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. 1) Выделите в нем ребро BB_1 и назовите все рёбра куба: а) параллельные ему; б) пересекающие его; в) скрещивающиеся с ним. 2) Выделите диагональ AD_1 грани ADD_1A_1 куба и назовите диагонали других граней: а) параллельные AD_1; б) пересекающие её; в) скрещивающиеся с ней. Ответ обоснуйте» [12, № 2.002].

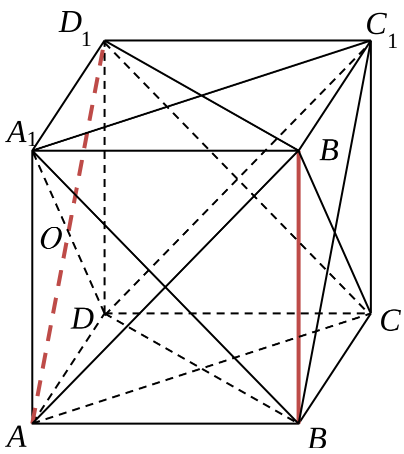


Рис. 13

Решение. 1а. $AA_1 \| BB_1$, как противоположные стороны квадрата AA_1BB_1. $CC_1 \| BB_1$, как противоположные стороны квадрата AA_1CC_1. $AA_1 \| DD_1$, как противоположные стороны квадрата AA_1DD_1, а так как $AA_1 \| BB_1$, то по признаку параллельных прямых $DD_1 \| BB_1$.

1б. $AB \cap BB_1 = B$; $BC \cap BB_1 = B$; $A_1B_1 \cap BB_1 = B_1$; $B_1C_1 \cap BB_1 = B_1$.

1в. Прямая CD пересекает плоскость BB_1C в точке C, через которую не проходит прямая $BB_1 \subset (BB_1C)$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых CD скрещивается с BB_1. Прямая C_1D_1 пересекает плоскость BB_1C в точке C_1, через которую не проходит прямая $BB_1 \subset (BB_1C)$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых C_1D_1 скрещивается с BB_1. Аналогично доказывается, что прямые AD и A_1D_1скрещиваются с прямой BB_1.

2а. Имеем: $AB \| CD$, $AB = CD$ как противоположные стороны квадрата $ABCD$; $CD \| C_1D_1$, $CD = C_1D_1$ как противоположные стороны квадрата CDD_1C_1. Тогда получаем: $AB \| C_1D_1$, $AB = C_1D_1 \Rightarrow$ четырехугольник ABC_1D_1 -параллелограмм, в котором $BC_1 \| AD_1$ (как противоположные стороны).

2б. $DA_1 \cap AD_1 = O$, $AC \cap AD_1 = A$, $B_1D_1 \cap AD_1 = D_1$, $AB_1 \cap AD_1 = A$, $CD_1 \cap AD_1 = D_1$.

2в. Прямая AD_1 пересекает плоскость ABC в точке A, через которую не проходит диагональ BD грани $ABCD$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых BD скрещивается с AD_1. Аналогично доказывается, что диагонали A_1C_1, CB_1, DC_1, BA_1 скрещиваются с AD_1.

Ответ:
1а) AA_1, CC_1, DD_1. 1б) AB, BC, A_1B_1, B_1C_1. 1в) AD, A_1D_1, CD, C_1D_1.
2а) BC_1. 2б) DA_1, AC, B_1D_1, AB_1, CD_1. 2в) A_1C_1, BD, DC_1, BA_1, CB_1.

Для закрепления умения определять взаимное расположение двух прямых в пространстве могут быть рассмотрены задачи № 2.018, № 2.027 [12].

Ю.М. Колягин считает полезным использовать «таблицы-задания, которые являются своеобразной формой исследования свойств пространственных фигур по данному их воображению» [6, С. 171]. Задачи, оформленные в таблицу и содержащие связанные друг с другом подзадачи, полезно использовать в классной работе, так как благодаря таким задачам можно увеличить количество рассмотренного задачного материала и ускорить работу класса. Задачи такого вида можно предложить учащимся в качестве упражнения для самостоятельной работы или для контроля усвоения пройденного материала.

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выполните рисунок и заполните таблицу о положении прямых в кубе.

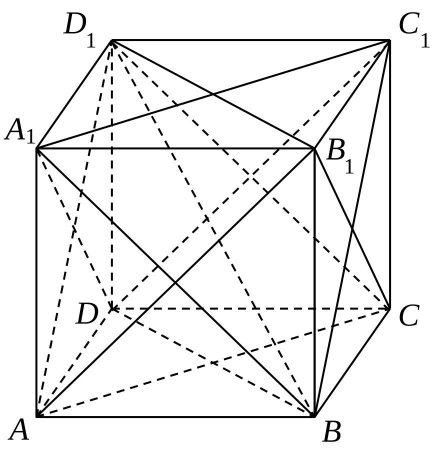


Рис. 14

Ответ:

Прямые	Взаимное положение прямых
AA_1 и CD	скрещиваются
BC_1 и AD_1	параллельны
CC_1 и CB_1	пересекаются
AC и B_1D_1	скрещиваются
DA_1 и BC	скрещиваются
BD_1 и BD	пересекаются
AB_1 и DC_1	параллельны
C_1D_1 и CD_1	пересекаются

Таким образом, после изучения темы «Взаимное расположение прямых в пространстве» обучающиеся должны знать и самостоятельно формулировать определения параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых в пространстве, на изображениях многогранников наглядно видеть различные пары прямых, распознавать различные случаи их взаимное расположение в пространстве, приводя аргументированное доказательство.

5.2. Угол между двумя прямыми в пространстве

Для того чтобы закрепить теоретический материал об углах между двумя прямыми в пространстве необходимо рассмотреть решение задач, подобранных по принципу «от простого – к сложному», и вырабатывающих навыки логического, вычислительного и графического характера.

Задача 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали AC и BD грани $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между прямыми BC_1 и OC_1 [12].

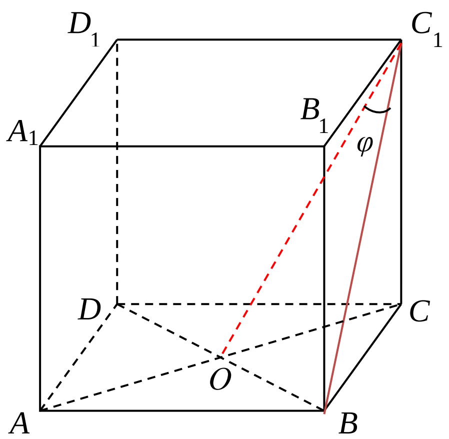


Рис. 15

Решение. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выделим прямые BC_1 и OC_1.

Обозначим: $\angle(BC_1; OC_1) = \varphi$ (Рис. 15).

Имеем: $CC_1 \perp (ABC)$, $OC \perp BD$ (как диагонали квадрата) $\Rightarrow OC_1 \perp BD$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Рассмотрим прямоугольный ΔOBC_1, в котором $OB = 0{,}5BD = 0{,}5BC_1$, ($BD{=}BC_1$, как диагонали квадрата, которые точкой пересечения делятся пополам). В прямоугольном треугольнике против катета, равного половине гипотенузы, лежит угол в 30°, поэтому $\angle(BC_1; OC_1) = \varphi = 30^\circ$.

Ответ: 30°.

Учащимся следует объяснить, что под углом между скрещивающимися прямыми понимают величину угла между параллельными им пересекающимися прямыми.

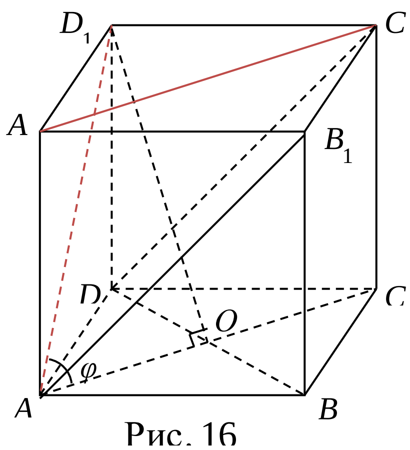


Рис. 16

Задача 3. «В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали AC и BD грани $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между прямыми: а) AD_1 и A_1C_1, б) AB и D_1C_1» [12, №2.034].

Решение. А) Обозначим: $\angle(AD_1; A_1C_1) = \varphi$. Прямая A_1C_1 пересекает плоскость AA_1D_1 в точке A_1, которая не принадлежит прямой $AD_1 \subset (AA_1D_1)$.

Тогда по признаку скрещивающихся прямых, AD_1 и A_1C_1 – скрещивающиеся. Через точку A проведем прямую AC, которая параллельна прямой A_1C_1. Тогда угол между скрещивающимися прямыми AD_1 и A_1C_1 равен углу между пересекающимися прямыми AD_1 и AC, то есть $\angle(AD_1; A_1C_1) = \angle(AD_1; AC) = \angle D_1AO = \varphi$.

Имеем: $DD_1 \perp (ABC)$, OD – ортогональная проекция наклонной OD_1 на (ABC), при этом $OD \perp AC$ (как диагонали квадрата $ABCD$) $\Rightarrow OD_1 \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Тогда $AO = 0{,}5AC = 0{,}5AD_1$, ($AD_1 = AC$, как диагонали равных квадратов). В прямоугольном $\Delta\ AD_1O$ катет AO равен половине гипотенузы AD_1, значит $\angle AD_1O = 30^\circ$. Тогда $\angle(AD_1; A_1C_1) = \angle D_1AO = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Б) Имеем: $AB \parallel DC$ (как стороны квадрата $ABCD$), $DC \parallel D_1C_1$ (как стороны квадрата DCD_1C_1) $\Rightarrow AB \parallel D_1C_1$ (по признаку параллельности прямых). Тогда $\angle(AB, C_1D_1) = 0^\circ$.

Ответ: а) 60°, б) 0°.

Задача 4. Точка E – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте угол между прямыми A_1B и B_1E, найдите его величину, если длина ребра куба равна 2.

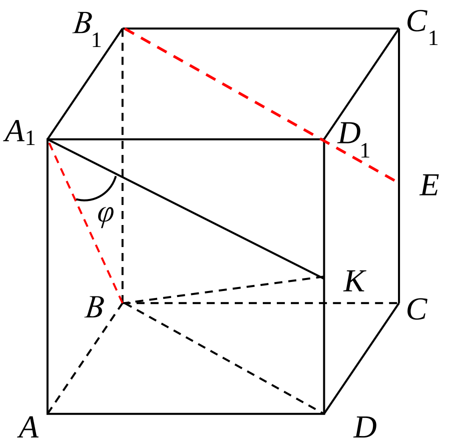


Рис.17

Решение. Пусть K - середина ребра DD_1, тогда $A_1K \parallel B_1E$ (Рис. 17).

Получаем: $\angle(A_1B, B_1E) = \angle(A_1B, A_1K) = \angle BA_1K = \varphi$.

По теореме косинусов в $\Delta\ BA_1K$ найдем $\cos\varphi = \frac{A_1B^2 + A_1K^2 - BK^2}{2\cdot A_1B\cdot A_1K}$.

По теореме Пифагора находим:

в прямоугольном ΔD_1A_1K:

$A_1K^2 = A_1D_1^2 + D_1K^2 = 2^2 + 1^2 = 5.$

в прямоугольном ΔBDK: $BK^2 = DB^2 + DK^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 = 9.$

Тогда $\cos\varphi = \frac{(2\sqrt{2})^2 + 5 - 9}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, откуда $\varphi = arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. Таким образом, получаем: $\angle(A_1B, B_1E) = arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Задача 5. [12, №7.146]. «Найдите угол между прямыми:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = -2 + t, \\ z = 1 - t. \end{cases}»$$

Решение. Данные прямые имеют направляющие векторы $p_1(-2;\,2;\,4)$ и $p_2(1;\,1;\,-1)$. Угол между данными прямыми обозначим через φ.

Находим $\cos\varphi = \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \; p_2}$:

$$\cos\varphi = \frac{|-2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 4\cdot(-1)|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2}\cdot\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Longrightarrow \varphi = arccos\,\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $arccos\,\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 6. «В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 8, найдите угол между прямыми AD_1 и DC_1» [14, с. 110, вар.17].

Решение. Введем векторный базис в пространстве: $BA = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$, при этом $a^2 = a \cdot a \cdot \cos 0° = 8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$, аналогично $b^2 = c^2 = 64$; $a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos 90° = 8 \cdot 8 \cdot 0 = 0$, аналогично $a \cdot c = c \cdot b = 0$.

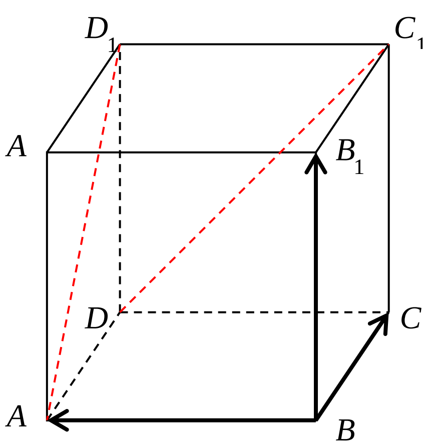


Рис. 18

Обозначим $\angle(AD_1;\, C_1D) = \varphi$. Так как угол между прямыми в пространстве принадлежит промежутку $[0°;90°]$, то косинус угла между прямыми должен быть положительным. Тогда косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между направляющими векторами:

$$\cos\varphi = |\cos\, AD_1;\, C_1D\,| = \frac{|AD_1 \cdot C_1D|}{|AD_1|\cdot|C_1D|}.$$

Имеем: $AD_1 = AA_1 + A_1D_1 = c + b$; $C_1D = C_1D_1 + D_1D = a - c$.

Тогда $\cos\varphi = \frac{|(c+b)\cdot(a-c)|}{\sqrt{(c+b)^2}\cdot\sqrt{(a-c)^2}} = \frac{|a\cdot c - c^2 + a\cdot b - c\cdot b|}{\sqrt{c^2 + 2c\cdot b + b^2}\cdot\sqrt{a^2 - 2a\cdot c + c^2}} =$

$= \frac{|0 - 64 + 0 - 0|}{\sqrt{64+0+64}\cdot\sqrt{64-0+64}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi = 60^{\circ}$. Таким образом, $\angle(AD_1;\, C_1D) = 60^{\circ}$.

Ответ: 60°.

Задача 7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ - правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 2. Вычислите величину угла между прямыми CF_1 и AB_1.

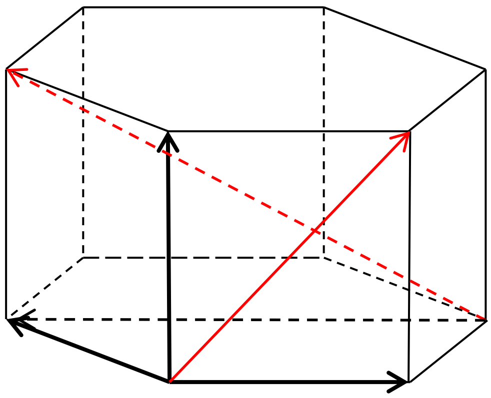


Рис. 19

Решение. Введем векторный базис в пространстве: $AB = a,\ \ AF = b,\ \ AA_1 = c$, при этом $a^2 = |a| \cdot |a| \cdot \cos 0° = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, аналогично $b^2 = c^2 = 4$;

$a \cdot c = |a| \cdot |c| \cdot \cos 90° = 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$, аналогично $c \cdot b = 0$; $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot cos 120° = -2$.

Обозначим $\angle(AB_1;\ CF_1) = \varphi$, тогда

$$\cos\varphi = |\cos(AB_1;\ CF_1)| = \frac{|AB_1 \cdot CF_1|}{|AB_1| \cdot |CF_1|}.$$

Имеем: $AB_1 = a + c$; $CF_1 = CF + FF_1 = -2a + c$.

Находим: $$\cos\varphi = \frac{|(a+c)\cdot(-2a+c)|}{\sqrt{(a+c)^2}\cdot\sqrt{(-2a+c)^2}} = \frac{|-2a^2+a\cdot c-2a\cdot c+c^2|}{\sqrt{a^2+2a\cdot c+c^2}\cdot\sqrt{4a^2-4a\cdot c+c^2}} =$$

$$= \frac{|-8+4|}{\sqrt{4+0+4}\cdot\sqrt{16-0+4}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \varphi = arccos\frac{\sqrt{10}}{10}.$$ Получаем, $\angle(AB_1; CF_1) = arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

«**Задача 8.** В системе координат *Oxyz* расположен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что $D(1; 0; 0)$, $C_1(0; 0; 1)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 0)$. Постройте куб. Векторно-координатным методом найдите угол между прямыми A_1B и AC» [14, с.141].

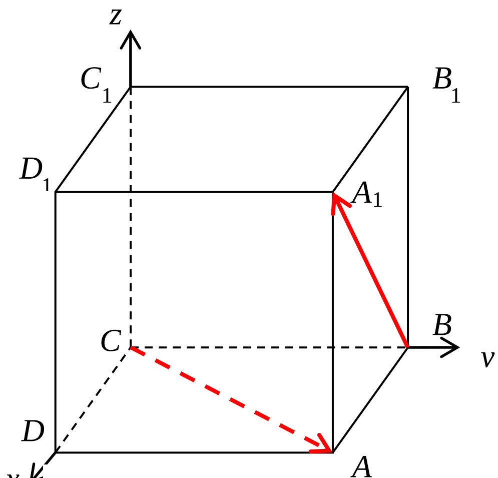


Рис.20

Решение. Построим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, как показано на рисунке 20. Точка C является началом координат и имеет координаты *(0; 0; 0)*. Находим координаты вершин: $A(1; 1; 0)$, $A_1(1; 1; 1)$.

Направляющими векторами прямых A_1B и AC будем считать соответственно векторы BA_1 и CA. Находим координаты этих векторов:

$BA_1(1-0; 1-1; 1-0) \Rightarrow BA_1(1; 0; 1)$, $CA(1-0; 1-0; 0-0) \Rightarrow CA(1; 1; 0)$.

Обозначим: $\varphi = \angle(BA_1;\ CA)$. Находим:

$$\cos\varphi = \frac{|BA_1 \cdot CA|}{|BA_1| \cdot |CA|} = \frac{|1\cdot1+0\cdot1+1\cdot0|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Таким образом, $\angle(A_1B;\ AC) = 60^\circ$.

Ответ: 60°.

Для закрепления и обобщения полученных знаний учащимся могут быть предложены задания, в которых нужно заполнить таблицу расположения прямых и величин углов между ними, например, № 2.037 и № 2.047 [12].

По окончанию изучения вопроса об углах между двумя прямыми в пространстве, учащиеся должны: а) на моделях многогранников аргументированно изображать углы между пересекающимися и скрещивающимися прямыми, находить их величину; б) решать различного уровня сложности задачи на нахождение этих углов геометрическим и векторно-координатным методами.

5.3. *Расстояние между скрещивающимися прямыми*

Вычисление расстояния между двумя скрещивающимися прямыми является одним из наиболее сложных вопросов школьного курса стереометрии.

«*Определение.* Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, имеющий концы на данных прямых и перпендикулярный к ним» [11, С. 81].

Две скрещивающие прямые имеют только один общий перпендикуляр. Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называют длину их общего перпендикуляра.

Учащимся следует объяснить, что для нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми вовсе не обязательно строить их общий перпендикуляр, бывает достаточно применить один из следующих методов.

а) Провести через скрещивающиеся прямые параллельные плоскости. Расстояние от любой точки одной из этих плоскостей до другой плоскости равно расстоянию между прямыми.

б) Провести через одну из прямых плоскость, параллельную другой прямой. Тогда расстояние от любой точки прямой до построенной плоскости равно расстоянию между скрещивающимися прямыми.

в) Провести плоскость α, перпендикулярную прямой a и пересекающую ее в некоторой точке А, затем построить прямую b_1 - ортогональную проекцию прямой b на эту плоскость. Тогда расстояние от точки А до прямой b_1 равно расстоянию между прямыми a и b.

Для успешного решения задач, в которых нужно вычислить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, учащиеся должны уметь применять три вышеперечисленных метода.

Задача 9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребра которого равны 1. Вычислите расстояние между его диагональю A_1C и скрещивающейся с ней прямой BC_1.

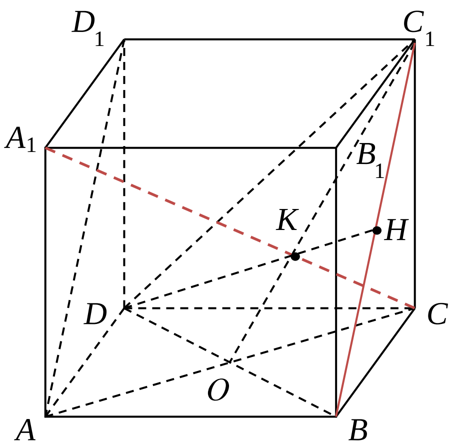


Рис. 21

Решение. Требуется найти расстояние $\rho(A_1C;\ BC_1)$. Для этого нужно «увидеть» общий перпендикуляр для прямых A_1C и BC_1. Построим плоскость BC_1D, в которой лежит прямая BC_1. Обозначим: $O = AC \cap BD$.

Прямая A_1C лежит в плоскости ACC_1, прямая OC_1 лежит в плоскостях ACC_1 и BC_1D, тогда $OC_1=(ACC_1)\cap(BC_1D)$.

Значит, $A_1C\cap OC_1=A_1C \cap (BC_1D)= K$. Построим точку $K= A_1C \cap (BC_1D)$.

Имеем: $AA_1 \perp (ABC)$, $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата $ABCD$) $\Rightarrow A_1C \perp BD$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Аналогично, $A_1B_1 \perp (BB_1C)$, $B_1C \perp C_1B$ (как диагонали квадрата BB_1CC_1) $\Rightarrow$ $A_1C \perp C_1B$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Получаем: $A_1C \perp BD$, $A_1C \perp C_1B$, $BD \cap C_1B = B$ $\Rightarrow A_1C \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Имеем: $A_1C \perp (BC_1D)$, $DH \subset (BC_1D) \Rightarrow A_1C \perp DH$. Прямая DH – медиана правильного $\triangle BC_1D \Rightarrow DH \perp BC_1$. Таким образом, прямые A_1C и BC_1 перпендикулярны прямой DH и пересекают ее в точках K и H соответственно.

Тогда отрезок KH – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых A_1C и BC_1, значит $\rho\ (A_1C;\ BC_1) = KH$.

Находим длину KH: сторона BC_1 правильного $\triangle BC_1D$ равна $\sqrt{2}$, тогда высота $DH = \frac{BC_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Так как K - точка пересечения медиан, то $KH = \frac{1}{3}DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Таким образом, $\rho(A_1C;\ BC_1) = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми используют «метод параллельных плоскостей».

Задача 10. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3.

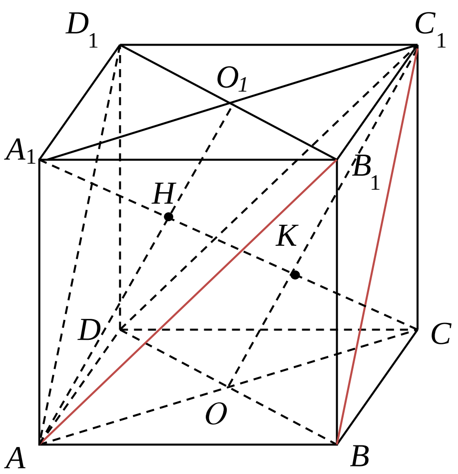


Рис. 22

Решение. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построим плоскости AB_1D_1 и BC_1D, в которых соответственно лежат прямые AB_1 и BC_1.

Так как $AB_1 \cap AD_1 = A,\ DC_1 \cap BC_1 = C_1$, $AB_1 \parallel DC_1$, $BC_1 \parallel AD_1$, то $(AB_1D_1) \parallel (BC_1D)$ (по признаку параллельности плоскостей).

Обозначим: $K = A_1C \cap (BC_1D)$, $H = A_1C \cap (AB_1D_1)$ и построим точки K и H.

Имеем: $O = AC \cap BD,\ OC_1 \subset (BC_1D)$, $OC_1 \subset (AA_1C),\ A_1C \subset (AA_1C) \Rightarrow K = A_1C \cap OC_1 = A_1C \cap (BC_1D)$.

Далее построим точку H: $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1,\ AO_1 \subset (AB_1D_1),\ AO_1 \subset (AA_1C)$, $A_1C \subset (AA_1C) \Rightarrow H = A_1C \cap OC_1 = A_1C \cap (AB_1D_1)$.

В задаче 9 было доказано, что $A_1C \perp (BC_1D)$.

Имеем: $(BC_1D) \parallel (AB_1D_1),\ A_1C \perp (BC_1D) \Rightarrow A_1C \perp (AB_1D_1)$, причем $A_1C \cap (AB_1D_1) = H,\ A_1C \cap (BC_1D) = K \Rightarrow HK = \rho\ ((AB_1D_1);\ (BC_1D))$. Так как $AB_1 \subset (AB_1D_1)$ и $BC_1 \subset (BC_1D)$, то $HK = \rho\ (AB_1;\ BC_1)$.

Так как $AO_1 \parallel OC_1$, $AO_1 = OC_1$ и $AO=OC$, то по теореме Фалеса $A_1H = HK$, $HK = KC \Longrightarrow A_1H = HK = KC$. Тогда $HK= \frac{1}{3} A_1C$. Диагональ куба A_1C равна $\sqrt{3}a$, где a – длина ребра куба.

Таким образом, получаем: $\rho\ (AB_1;\ BC_1) = HK = \frac{1}{3} A_1C = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ - правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 4. Найдите расстояние между прямыми A_1Bи B_1C.

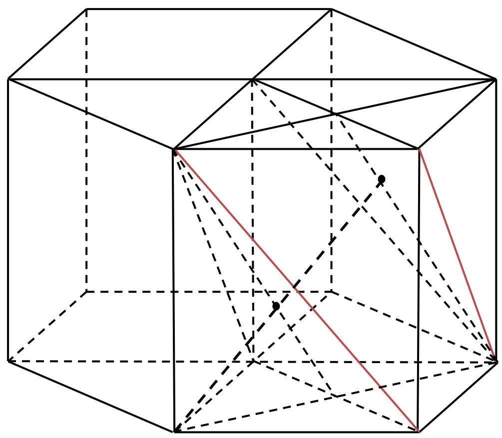


Рис. 23

Решение. Обозначим: $O = AD \cap CF$; $O_1 = A_1D_1 \cap C_1F_1$; $H = AC \cap BO$; $H = A_1C_1 \cap B_1O_1$. В прямом параллелепипеде $ABCOA_1B_1C_1O_1$, ребра которого равны 4, а его основанием является ромб $ABCO$, имеем: $A_1O \parallel B_1C$, $A_1B \parallel CO_1$, откуда $(A_1OB) \parallel (B_1O_1C)$. Тогда из $A_1B \subset (A_1OB)$ и $B_1C \subset (B_1O_1C)$ следует: $\rho\ (A_1B;\ B_1C) = \rho\ ((A_1OB);\ (B_1O_1C))$.

Боковые грани полученного параллелепипеда – равные квадраты, поэтому ΔA_1OB и ΔB_1O_1C равны и являются равнобедренными. Поэтому $A_1H \perp OB$, $CH_1 \perp B_1O_1$. Учитывая $OB \perp AC$, можем сделать вывод: $OB \perp (A_1AC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Из этого следует, что $(A_1AC) \perp (A_1OB)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). А так как, кроме того, $(A_1OB) \parallel (B_1O_1C)$, то $(A_1AC) \perp (B_1O_1C)$. Через точку A проведем прямую, которая перпендикулярна (A_1OB) и (B_1O_1C) в точках, принадлежащих прямым соответственно A_1H и CH_1. Обозначим данные точки K и T.

Тогда $\rho\ (A_1B;\ B_1C) = \rho\ ((A_1OB);\ (B_1O_1C))=KT$. Так как $A_1H \parallel CH_1$ и $AH=HC$, то $AK=KT$ (по теореме Фалеса). Таким образом, $\rho\ (A_1B;\ B_1C) = AK$.

Найдем длину *AK*. В прямоугольном ΔAA_1H с катетами $AA_1 = 4$, $AH = 4\sqrt{2}$ находим высоту *AK*: $AK = \frac{AA_1 \cdot AH}{\sqrt{AA_1^{\,2} + AH^2}} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{\sqrt{16+32}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Таким образом, $\rho\,(A_1B; B_1C) = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

При вычислении расстояния между двумя прямыми в пространстве векторно-координатным методом используется следующий факт: «*расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую, параллельно первой прямой*». Задачи такого вида сводятся к задаче о вычислении расстояния от точки до плоскости, поэтому применяется координатная формула расстояния от точки до плоскости.

«**Задача 12.** В системе координат *Oxyz* расположен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что $D(1;\ 0;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 0)$. Постройте этот куб. Координатным методом найдите расстояние между прямыми A_1C_1 и AB_1» [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**, С. 126].

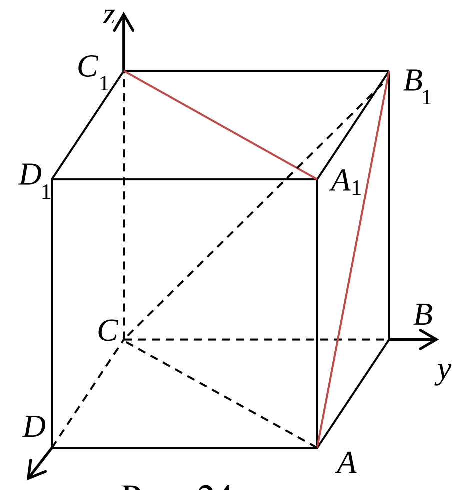


Рис. 24

Решение. Построим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (Рис. 24). Из условия следует, что $C\,(0; 0; 0)$ – начало координат. Вершины имеют координаты: $A(1;\ 1;\ 0)$, $A_1(1;\ 1;\ 1)$, $B_1(0;\ 1;\ 1)$.

Составим уравнение плоскости α, проходящей через прямую AB_1 параллельно прямой A_1C_1. Находим координаты вектора нормали $n(a; b; c)$ плоскости α, который перпендикулярен направляющим векторам $AB_1(-1; 0; 1)$ и $C_1A_1(1; 1; 0)$ прямых AB_1 и A_1C_1 соответственно:

$$\begin{matrix} n \perp AB_1, \\ n \perp C_1A_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} n \cdot AB_1 = 0, \\ n \cdot C_1A_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -1 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0, \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = c, \\ a = -b. \end{matrix}$$

Полагая $a = 1$, получаем: $c = 1$, $b = -1$. Таким образом $n(1; -1; 1)$.

Теперь можем составить уравнение плоскости α по точке $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ и вектору нормали $n(a;b;c)$: $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$

Так как плоскость α проходит через прямую AB_1, то в качестве точки $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ примем точку $A\ (1;\ 1;\ 0)$. Тогда получаем искомое уравнение этой плоскости: $1\cdot(x-1)-1\cdot(y-1)+1\cdot(z-0)=0 \Rightarrow x-y+z=0.$

Теперь находим искомое расстояние от точки C_1 до плоскости α, которое равно расстоянию между прямыми A_1C_1 и AB_1:

$$\rho\ (A_1C_1\,;\,AB_1)=\rho(C_1;\,\alpha)=\frac{|1\cdot 0-1\cdot 0+1\cdot 1+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

«**Задача 13.** Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, расположена в системе координат *Oxyz* так, что центр её основания совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты: $C(0;\,1;\,0)$, $C_1(0;1;1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $D(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$. Постройте эту призму и координатным методом найдите расстояние между прямыми B_1E и C_1B» [14, С. 130, вар.8].

Решение. В системе координат *Oxyz* имеем: $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, $E(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$.

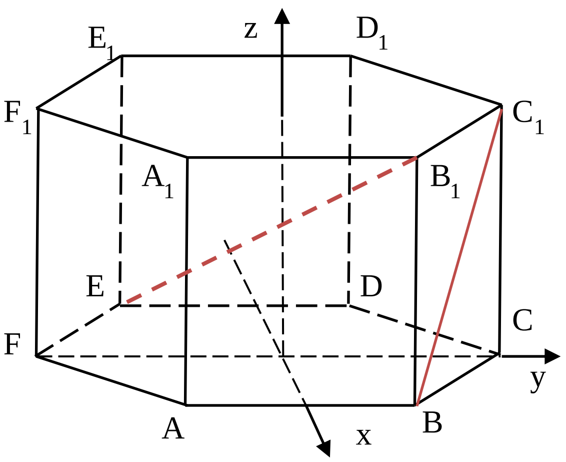


Рис. 25

Составим уравнение плоскости α, проходящей через прямую C_1B параллельно прямой B_1E. В качестве вектора нормали плоскости α примем вектор $n(a;b;c)$, перпендикулярный направляющим векторам $BC_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$ и $B_1E(-\sqrt{3};\,-1;\,-1)$ прямых соответственно C_1B и B_1E.

$$\begin{cases} n\perp BC_1,\\ n\perp B_1E\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} n\cdot BC_1=0,\\ n\cdot B_1E=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b+1\cdot c=0,\\ -\sqrt{3}\cdot a-1\cdot b-0\cdot c=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{\sqrt{3}}{9}b,\\ c=-\frac{2}{3}b.\end{cases}$$

Полагая $b = -9$, получаем: $a = \sqrt{3}$, $c = 6$. Таким образом, $n(\sqrt{3}; -9; 6)$.

Тогда плоскость α = $(C_1;\ n)$ имеет уравнение:

$$\sqrt{3}\cdot(x-0)-9\cdot(y-1)+6\cdot(z-1)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x-9y+6z+3=0.$$

Теперь находим искомое расстояние от точки B_1 до плоскости α, которое равно расстоянию между прямыми B_1E и C_1B:

$$\rho\,(B_1E;\ C_1B)=\rho(B_1;\ \alpha)=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-9\cdot\frac{1}{2}+6\cdot 1+3\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-9)^2+6^2}}=\frac{6}{\sqrt{120}}=\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

После изучения вышеизложенного материала, обучающие должны уметь формулировать определение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми, видеть расстояния между двумя прямыми и правильно изображать их на моделях многогранников, вычислять расстояние между парой скрещивающихся прямых в пространстве, используя геометрический и векторно-координатный методы.

§6. Методические аспекты обучения решению задач геометрии прямых и плоскостей в пространстве

6.1. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Существует три случая взаимного расположения прямой a и плоскости α в пространстве: а) прямая a пересекает плоскость α (Рис. 26); б) прямая a лежит в плоскости α (Рис. 27); в) прямая a и плоскость α параллельны (Рис.28).

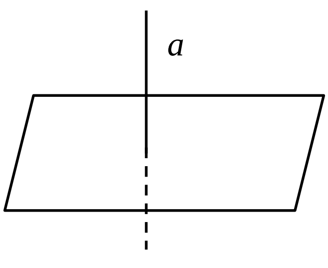


Рис. 26

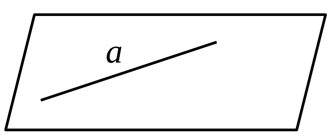


Рис. 27

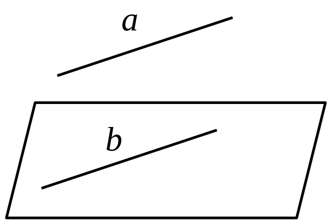


Рис. 28

«*Определение.* Прямая и плоскость, имеющие ровно одну общую точку, называются пересекающимися» [11, С. 17].

Если прямая a и плоскость β пересекаются в точке А, то записывают: $a \cap \beta$ = A или $\beta \cap a$ = A. Учащимся следует объяснить, что запись «$a \cap \beta$» не может заменить фразу «прямая a пересекает плоскость β». Запись «$a \cap \beta$» означает множество всех общих точек прямой a и плоскости β. Это множество может быть пустым, содержать одну точку или всю прямую.

«*Определение.* Прямая и плоскость, не имеющие общей точки, называются параллельными»[11, С. 45].

Если прямая a и плоскость β параллельны, то символически записывают: $a \parallel \beta$ или $\beta \parallel a$.

При решении задач стереометрии доказательство параллельности прямой и плоскости с помощью определения не приводит к нужному результату. В таких случаях используют признаки параллельности прямой и плоскости, которые учащиеся должны знать и твердо усвоить.

– «Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны.

– Плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой плоскости, параллельны» [9, С. 50].

Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич рекомендуют предлагать учащимся сначала «несложные задачи на доказательство, построение, а также задачи развивающего характера, в которых ставятся вопросы «Параллельны ли…?», «Каким может быть взаимное расположение…?», «Справедливо ли утверждение…?», «Возможно ли…?»» [10, С. 38].

«*Определение.* Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости» [11, С. 48].

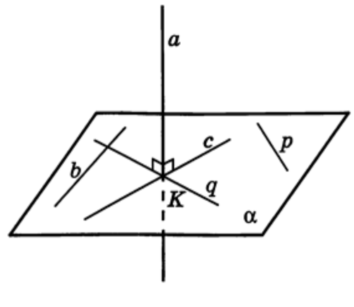


Рис. 29

Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то записывают $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$ (Рис. 29).

Для доказательства перпендикулярности прямой и плоскости применяют признак этой перпендикулярности.

«*Теорема.* (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*). Если прямая перпендикулярна каждой их двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости» [11, С. 49].

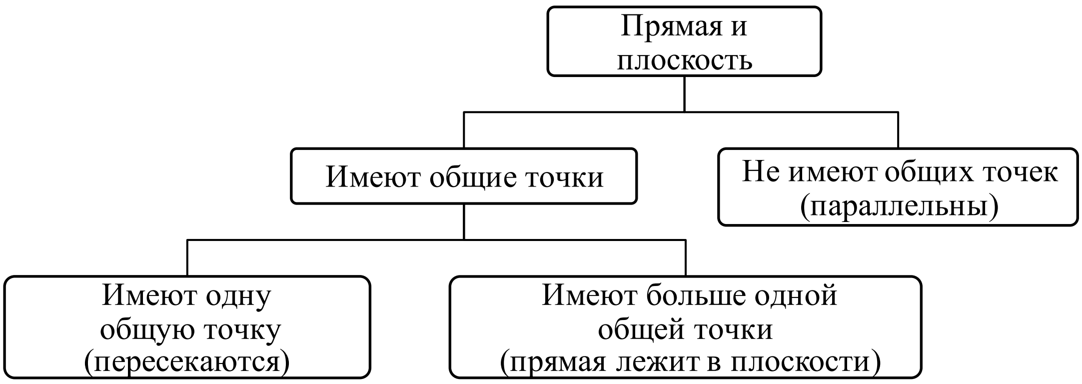
Рекомендуется подчеркнуть особую роль теоремы о трех перпендикулярах при решении ряда задач, в которых определяются перпендикулярности прямых и плоскостей, а также находятся расстояния в пространстве.

«Теорема. (*теорема о трёх перпендикулярах*). Если прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то данная прямая перпендикулярна и самой наклонной» [11, С. 57].

Можно проиллюстрировать все случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве с помощью схемы 2.

Схема 2

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве



Для закрепления вопроса о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве учащимся предлагается выполнить таблицы – задания.

Пример 2. «В тетраэдре *ABCD* точки *K, F, N* и *M* – середины рёбер соответственно *AD, BD, BC* и *AC*. Заполните таблицу, выбрав определённое вами расположение указанных прямой и плоскости: А – пересекаются, Б – параллельны, В – прямая лежит в плоскости, Г – невозможно определить» [12, №3.006].

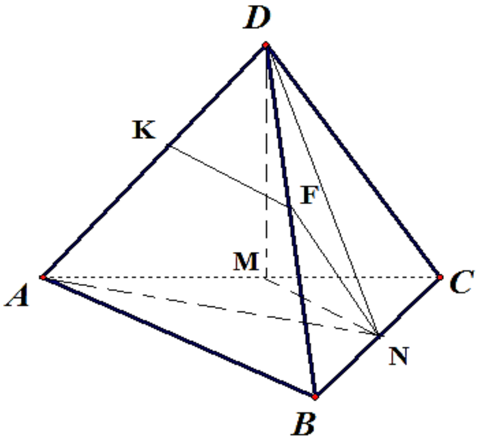


Рис. 30

Ответ:

	Прямая и плоскость	Взаимное расположение
1	*DB* и *AMN*	А
2	*MN* и *ABC*	В
3	*KC* и *DMN*	А
4	*MN* и *ABD*	Б
5	*KF* и *DMN*	Б
6	*FN* и *KMF*	В
7	*CF* и *AND*	А
8	*FN* и *DMK*	Б

В результате изучения вопроса о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве учащиеся должны уметь формулировать: а) определение параллельных прямой и плоскости; б) признак параллельности прямой и плоскости; в) определение прямой, перпендикулярной плоскости; г) признак перпендикулярности прямой и плоскости. Используя изображения многогранников, решать задачи на доказательство и вычисление, применяя свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

6.2. Угол между прямой и плоскостью в пространстве

Задачи этого раздела стереометрии играют важную роль в дальнейшем развитии пространственных представлений у учащихся, связанных с вопросами метрического характера – нахождение углов и расстояний между геометрическими фигурами и их элементами.

«*Определение.* Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией на эту плоскость» [11, С. 59].

Для вычисления величины угла удобно применить тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника.

В задачнике [12] учащимся предлагается устно выполнить задачи:

Пример 3. «Под каким углом к плоскости α следует провести отрезок *AB*, чтобы он был вдвое больше своей проекции на эту плоскость?» [12, № 3.083]. *Ответ:* 60°.

Пример 4. «Гипотенуза *AB* равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* лежит в плоскости α. Может ли катет *AC* этого треугольника образовывать с плоскостью α угол в 60°? Найдите наибольшее значение, которое может принять угол между катетом *AC* и этой плоскостью» [12, № 3.084]. *Ответ:* Нет. 45°.

Задача 14. «Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите синус угла между прямой A_1B и (BC_1D)» [14, С. 109, вар. 12].

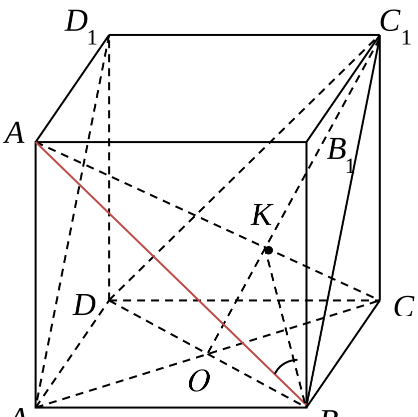


Рис. 31

Решение. Обозначим: $K=A_1C \cap (BC_1D)$ и построим точку *K*.

Имеем: $O = AC \cap BD$, $OC_1 \subset (BC_1D)$, $OC_1 \subset (AA_1C)$, $A_1C \subset (AA_1C) \Rightarrow K=A_1C \cap OC_1 = = A_1C \cap (BC_1D)$.

При решении задачи 9 было доказано, что $A_1C \perp (BC_1D)$. Имеем: $A_1C \perp (BC_1D)$, $A_1C \subset (A_1BC) \Rightarrow (A_1BC) \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей).

Прямая *BK* – ортогональная проекция прямой A_1B на (BC_1D), поэтому $\angle(A_1B;\ (BC_1D))=\angle(A_1B;\ BK)= \angle A_1BK=\varphi$.

Так как $A_1C \perp (BC_1D) \Rightarrow A_1C \perp BK$, то ΔA_1KB прямоугольный, в котором можем найти $\sin\varphi = \frac{A_1K}{A_1B}$. В прямоугольном Δ OCC_1, где $CC_1=1$, $OC=0{,}5AC=0{,}5\sqrt{2}$, находим высоту $CK= \frac{CC_1 \cdot OC}{\sqrt{CC_1^2+OC^2}} = \frac{1\cdot 0{,}5\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(0{,}5\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Известно, что диагональ куба с ребром *a* равна $a\sqrt{3}$, тогда в единичном кубе $A_1C=\sqrt{3}$. Тогда $A_1K = A_1C - CK = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. В квадрате со стороной равной 1, диагональ $A_1B = \sqrt{2}$. Находим: $\sin\varphi = \frac{A_1K}{A_1B} = \frac{2\sqrt{3}}{3} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 15. «В системе координат $Oxyz$ расположен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что C(1;0;0), B_1(0;0;1), A(0;1;0), B(0;0;0). Постройте этот куб. Векторно-координатным методом найдите синус угла между прямой BC и плоскостью AB_1D_1» [14, С. 141, вар. 7].

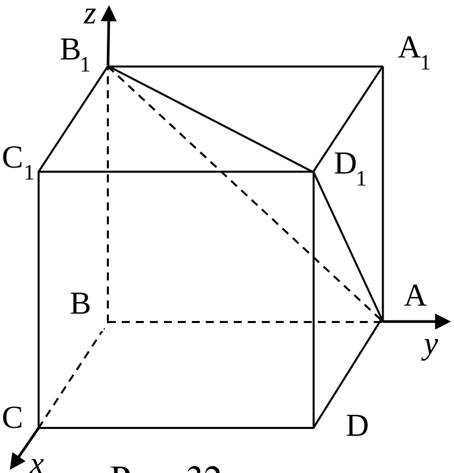


Рис. 32

Решение. Во введенной системе координат имеем: $B(0;0;0)$ - начало координат, $C(1;0;0)$, $A(0;1;0)$, $B_1(0;0;1)$, $D(1;1;0)$, $D_1(1;1;1)$, $A_1(0;1;1)$, $C_1(1;0;1)$. Обозначим: $\varphi = \angle(BC;(AB_1D_1))$.

Направляющим вектором прямой BC будем считать вектор $BC(1;0;0)$. А в качестве вектора нормали плоскости $\alpha = (AB_1D_1)$ примем вектор $n(a;b;c)$, перпендикулярный векторам $B_1A(0;1;-1)$ и $B_1D_1(1;1;0)$. Тогда:

$$\begin{matrix} n \perp B_1A, \\ n \perp B_1D_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} n \cdot B_1A = 0, \\ n \cdot B_1D_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \cdot a + 1 \cdot b + (-1) \cdot c = 0, \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = c, \\ a = -b \end{matrix}.$$

Пусть $c = 1$, тогда $b = 1$, $a = -1$. Имеем: $n(-1;1;1)$.

Теперь вычислим $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = |\cos\angle(BC;n)| = \frac{|BC \cdot n|}{|BC| \cdot |n|} = \frac{|1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 16. «Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат $Oxyz$, а вершины A, B_1 F, F_1 имеют координаты: $A(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1)$, $F(0;-1;0)$, $F_1(0;-1;1)$,. Постройте эту призму и координатным методом найдите синус угла между прямой A_1B и плоскостью BB_1C» [14, С. 141, вар. 7].

Решение. На рисунке 33 представлено расположение данной призмы относительно системы координат $Oxyz$. Обозначим: $\varphi = \angle(A_1B;(BB_1C))$.

Находим координаты точек: $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$, $C(0; 1; 0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1)$.

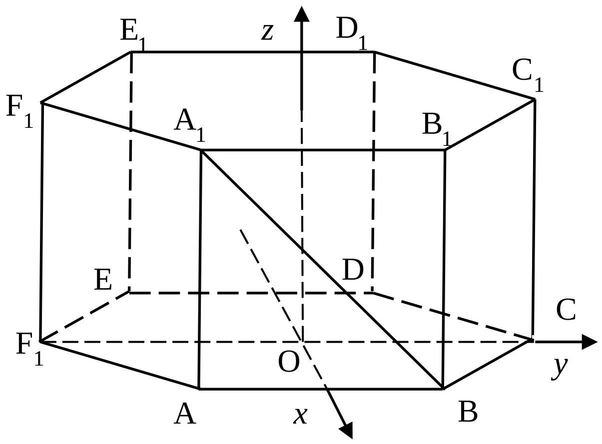


Рис. 33

Вектор $A_1B(0; 1; -1)$ является направляющим вектором для прямой A_1B.

Координаты вектора нормали $n(a; b; c)$ плоскости $\beta = (BB_1C)$ находим из условия его перпендикулярности векторам $BB_1(0; 0; 1)$ и $B_1C(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -1)$:

$$\begin{cases} n \perp BB_1, \\ n \perp B_1C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \cdot BB_1 = 0, \\ n \cdot B_1C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0, \\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}b \end{cases}.$$

Пусть $b = 3$, тогда $a = \sqrt{3}$, $c = 0$. Имеем: $n(\sqrt{3}; 3; 0)$. Теперь вычислим $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = |\cos\angle(A_1B; n)| = \frac{|A_1B \cdot n|}{|A_1B| \cdot |n|} = \frac{|0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

В результате изучения рассмотренной темы учащиеся должны формулировать определение угла между прямой и плоскостью, на моделях многогранников интуитивно «видеть» угол между прямой и плоскостью и логически обосновывать его изображение. Геометрическим и векторно-координатным методами решать задачи на построение угла между прямой и плоскостью и вычисление его величины.

6.3. Расстояние между прямой и плоскостью в пространстве

Расстояние между параллельными прямой и плоскостью считается равным длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой на данную плоскость.

«Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить ее нижнее (или верхнее) основание - правильный шестиугольник *ABCDEF* (Рис.34).

Взаимное расположение диагоналей и сторон этого шестиугольника, их длины и величины углов между ними известны из планиметрии» [9].

Используя данные факты, решим задачу на вычисление расстояния между точкой и плоскостью на модели правильной шестиугольной призмы.

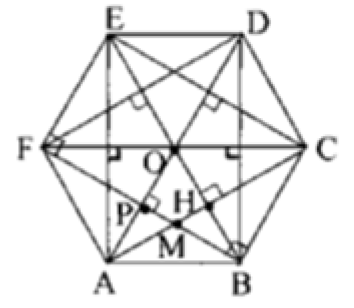


Рис. 34

Задача 17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до (BCC_1).

Решение. Так как $AD \parallel BC$, то $AD \parallel (BCC_1)$. Тогда расстояние от точки A до (BCC_1) равно расстоянию от любой точки прямой AD до (BCC_1). Для решения данной задачи удобно взять точку $K = AD \cap BF$.

На изображении правильного шестиугольника (рис. 34) видно, что $BF \perp BC$.

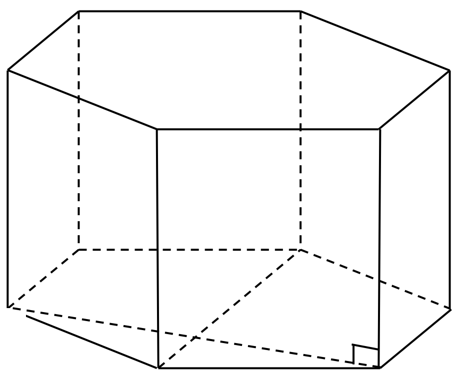


Рис. 35

Также $BF \perp BB_1$, получаем, что $BF \perp (BCC_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Поэтому $\rho(K; (BCC_1)) = BK = \frac{1}{2} BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, получаем: $\rho(A; (BCC_1)) = \rho(K; (BCC_1)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Теперь рассмотрим координатный метод решения данной задачи.

Расположим правильную шестиугольную призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ в системе координат $Oxyz$ так, как представлено на рисунке 36.

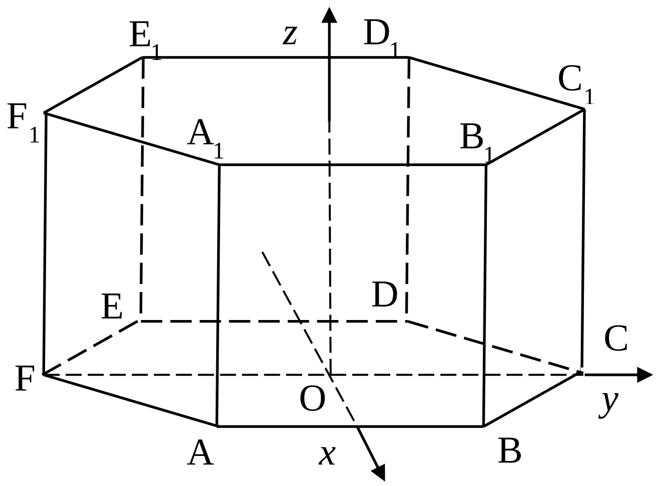


Рис. 36

Тогда вершины имеют координаты: $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $C(0;1;0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$.

Координаты вектора нормали $n(a;b;c)$ плоскости $\beta = BB_1C$ находим из условия его перпендикулярности векторам $BB_1(0;0;1)$ и $B_1C(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-1)$:

$$\begin{cases} n \perp BB_1, \\ n \perp B_1C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \cdot BB_1 = 0, \\ n \cdot B_1C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0, \\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}b \end{cases}.$$

Пусть $b = 3$, тогда $a = \sqrt{3}$, $c = 0$. Имеем: $n(\sqrt{3};3;0)$. Получаем уравнение плоскости $\beta = (C;n)$ в виде:

$$\sqrt{3}\cdot(x-0) + 3\cdot(y-1) + 0\cdot(z-0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 3y - 3 = 0.$$

Теперь находим $\rho(A;(BCC_1))$, пользуясь формулой для вычисления расстояния от точки до плоскости:

$$\rho(A;\ (BCC_1)) = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3 + 0\cdot 0 - 3\right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При решении задач на нахождение расстояния между прямой и плоскостью на изображениях многогранников учащиеся должны привыкать «видеть» эти расстояния и изображать отрезки, длины которых равны искомому расстоянию.

§7. Методические аспекты обучения решению задач геометрии плоскостей в пространстве

7.1. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Существует два взаимно исключающих случая расположения двух плоскостей в пространстве: а) имеют общую точку, такие плоскости называются пересекающимися; б) две плоскости не имеют общей точки.

«*Определение.* Две плоскости, не имеющие общей точки, называются параллельными» [11, С. 68].

Параллельность плоскостей α и β обозначают: $\alpha \parallel \beta$ или $\beta \parallel \alpha$.

«*Теорема.* (признак параллельности плоскостей). Если каждая из двух пересекающихся прямых одной плоскости параллельна другой плоскости, то данные плоскости параллельны.

Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны» [11, С. 68-69].

Выше представленные теоремы применяются для доказательства параллельности плоскостей.

Кроме того, полезным при решении задач является утверждение: «две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны». Не менее важными являются теоремы 20-25 из учебника [11, С. 70-73].

«*Определение.* Две плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°» [11, С. 79].

Если плоскости α и β перпендикулярны, то символически записывают: $\alpha \perp \beta$ или $\beta \perp \alpha$.

Учащимся следует знать, что для определения, перпендикулярны ли две плоскости, применяется признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема. (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если одна из двух пересекающихся плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Для закрепления вопроса о взаимном расположении плоскостей в пространстве учащимся предлагается выполнить таблицы – задания.

Пример 5. «В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина A_1B_1, N – середина B_1C_1, K – середина AD, P – середина CD, L – середина CC_1, O - точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Точка A_1 - середина отрезка AQ. Заполните таблицу, выбрав необходимое расположение указанных плоскостей: А – параллельны, Б – пересекаются, В – совпадают, Г – невозможно определить» [12, №4.029].

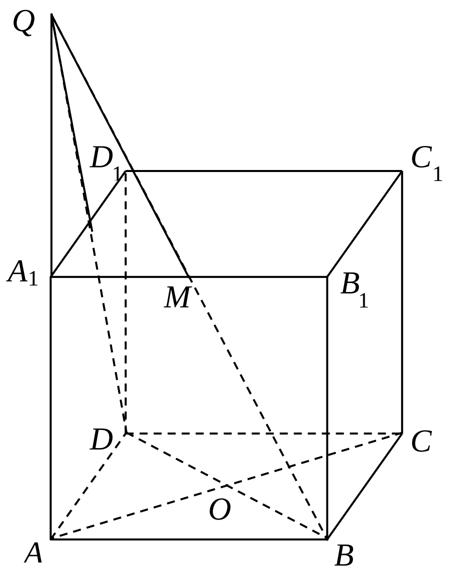


Рис. 37

Ответ:

№	Плоскости	Взаимное расположение
1	$A_1B_1C_1$ и ADC	А
2	MPK и BB_1D	Б
3	MNK и MNP	В
4	D_1KP и BMN	А
5	QBO и MKP	Б
6	QB_1D_1 и A_1DO	А
7	MNK и PLN	В
8	B_1KP и DMN	А
9	A_1DC_1 и AB_1C	А
10	QBD и MOB	В
11	A_1C_1C и MKP	Б
12	QC_1D_1 и A_1B_1D	А

После изучения темы «Взаимное расположение плоскостей» учащиеся должны знать определения параллельных и перпендикулярных плоскостей. Интуитивно «видеть» параллельные, пересекающиеся, перпендикулярные плоскости на моделях и многогранников. Также, используя изображения многогранников, решать задачи на признак параллельности двух плоскостей, на определение и признак перпендикулярных плоскостей, корректно аргументируя возникающие утверждения.

7.2. Угол между двумя плоскостями в пространстве

Рассмотрим два полупространства, образованные непараллельными плоскостями. Пересечение этих полупространств назовём *двугранным углом*.

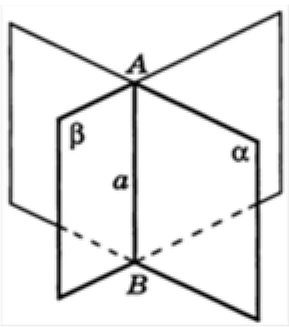


Рис. 38

Ребром двугранного угла называется прямая, по которой пересекаются плоскости, а полуплоскости этих плоскостей, образующие двугранный угол, называют *гранями двугранного угла*. Двугранный угол с гранями α, β и ребром a обозначают $\alpha a \beta$ (Рис. 38).

Например, две страницы одной книги, две соседние грани куба, - модели двугранного угла.

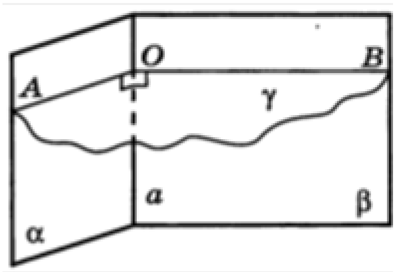


Рис. 39

Для измерения двугранного угла вводится понятие его линейного угла. Отмечают произвольную точку O на ребре a двугранного угла $\alpha a \beta$ и в гранях α и β проводят из точки O соответственно лучи OA и OB, перпендикулярные ребру (Рис. 39). Угол AOB, который образован проведёнными лучами, называется *линейным углом двугранного угла* $\alpha a \beta$.

«*Определение.* Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла» [11, С. 77].

Учащиеся должны знать, что двугранный угол может быть острым, прямым или тупым, если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой. При этом следует объяснить учащимся, что аналогично планиметрии, в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы. Справедливы и аналогичные теоремы о величинах этих углов.

При пересечении двух плоскостей образуется четыре двугранных угла с общим ребром.

«*Определение.* Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных при их пересечении» [11, С. 78].

«Для нахождения угла φ между двумя пересекающимися плоскостями α и β удобно использовать следующий факт: если плоскости α и β пересекаются по прямой a, а некоторая точка М плоскости α удалена от плоскости β на расстояние h и от прямой a – на расстояние m, то $\sin\varphi = \frac{h}{m}$» [10, С. 68].

Применяя данный факт, решим следующую задачу на примере куба.

Задача 18. «В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BC_1D и ABC» [12, №4.054(в)].

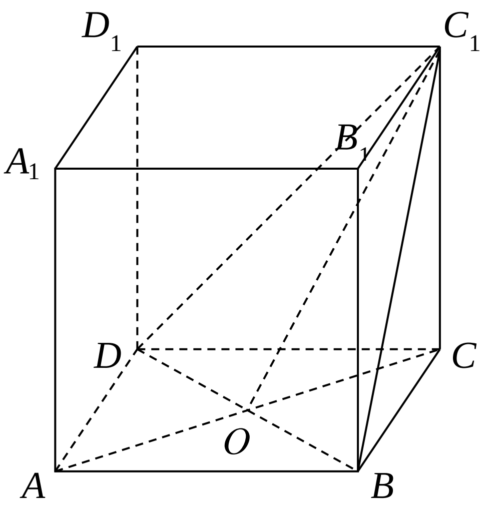


Рис. 40

Решение. Плоскости BC_1D и ABC имеют общую граничную прямую BD.

Обозначим $\angle((BC_1D); (ABC)) = \varphi$.

Имеем: $O = AC \cap BD$, $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата), следовательно $CO \perp BD$. Прямая OC – ортогональная проекция прямой OC_1 на (ABC), $OC \perp BD$ $\Longrightarrow OC_1 \perp BD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Получаем: $CO \perp BD$, $OC_1 \perp BD$ $\Longrightarrow \angle C_1OC$ - линейный угол двугранного угла между (BC_1D) и (ABC).

Таким образом, $\angle((BC_1D); (ABC)) = \angle C_1OC = \varphi$.

Найдем $\sin\varphi$. Точка $C_1 \subset (BC_1D)$ удалена от (ABC) на расстояние CC_1 и от прямой BD – на расстояние OC_1, то $\sin\varphi = \frac{CC_1}{OC_1}$.

Пусть ребра в кубе равны a, тогда в прямоугольном $\Delta\ OCC_1$ имеем: $CC_1 = a$, $OC = 0{,}5AC = 0.5a\sqrt{2}$, $OC_1 = \sqrt{{CC_1}^2 + OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Тогда $\sin\varphi = \frac{CC_1}{OC_1} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Замечание. Искомый угол можно было найти через $tg\varphi = \frac{CC_1}{OC} = a : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\sqrt{2}$.

Задача 19. «Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат $Oxyz$ так, что ентр ее основания совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, D_1 имеют координаты: $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $C\ \ 0;1;0\ \ ,$ $D(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $D_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$. Постройте эту призму и координатным методом найдите косинус угла между (A_1B_1C) и (BC_1D_1)» [14, С. 142, вар. 8].

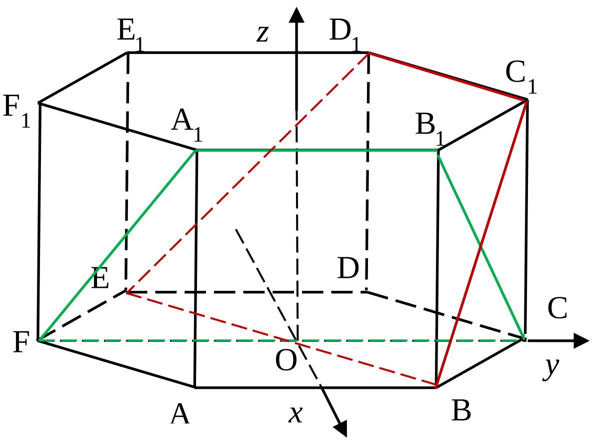


Рис. 41

Решение. Расположение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ в системе координат $Oxyz$ представлено на рисунке 44. Найдем координаты вершин: $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, $C_1(0;1;1)$.

Обозначим: $\alpha=(A_1B_1C)$, $\beta=(BC_1D_1)$, $\angle\ \alpha;\ \beta\ =\varphi$.

Косинус угла между двумя плоскостями равен модулю косинуса угла между векторами нормалей этих плоскостей.

Вектор нормали $n_1(a_1;b_1;c_1)$ плоскости $\alpha=(A_1B_1C)$ перпендикулярен векторам $B_1A_1(0;-1;0)$ и $B_1C(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-1)$. Тогда:

$$\begin{cases} n_1\perp B_1A_1,\\ n_1\perp B_1C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} n_1\cdot B_1A_1=0,\\ n_1\cdot B_1C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -b_1=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_1+\frac{1}{2}b_1-c_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b_1=0,\\ c_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1\end{cases}.$$

Пусть $a_1=2$, тогда $c_1=-\sqrt{3}$, $b_1=0$. Имеем: $n_1(2;0;-\sqrt{3})$.

Вектор нормали $n_2(a_2;b_2;c_2)$ плоскости $\beta=(BC_1D_1)$ перпендикулярен векторам $BC_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$ и $D_1C_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$. Тогда:

$$\begin{cases} n_2\perp BC_1,\\ n_2\perp D_1C_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} n_2\cdot BC_1=0,\\ n_2\cdot D_1C_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}a_2+\frac{1}{2}b_2+c_2=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_2+\frac{1}{2}b_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c_2=\sqrt{3}a_2,\\ b_2=-\sqrt{3}a_2\end{cases}.$$

Пусть $a_2=\sqrt{3}$, тогда $b_2=-3$, $c_2=3$. Имеем: $n_2(\sqrt{3};-3;3)$.

Теперь можем найти косинус угла между плоскостями:

$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \cos\angle(n_1;n_2) = \frac{2\cdot\sqrt{3} + 0\cdot(-3) + (-\sqrt{3})\cdot 3}{\sqrt{2^2+0^2+(-\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2+3^2}} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Учащимся необходимо «привыкнуть видеть» двугранные углы, образованные различными плоскостями, находить, изображать и вычислять их линейные углы наиболее простым способом.

7.3. Расстояние между двумя плоскостями в пространстве

В данном разделе представлены задачи на нахождение расстояний между двумя плоскостями. Для этого учащимся необходимо пояснить следующее утверждение:

– «*расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из этих плоскостей на другую*» [9, С. 78].

Целесообразно рассмотреть опорные задачи, в которых находятся расстояния между точками и параллельными плоскостями.

Пример 6. «Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 5. Чему равно расстояние от точки, принадлежащей одной из этих плоскостей, до второй плоскости» [12, №5.021]. *Ответ: 5.*

Пример 7. «Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 8. Точка удалена от одной из этих плоскостей на 3. На какое расстояние эта точка удалена от второй плоскости» [12, №5.023]. *Ответ: 5 или 11.*

Также по данной теме наиболее необходимыми задачами для решения являются № 5.024 - 5.027 в задачнике рассматриваемого УМК.

Исходя из вышеизложенного утверждения о расстоянии между параллельными плоскостями, рассмотрим задачу, в которой требуется найти расстояние от точки до плоскости, на примере модели правильной шестиугольной призмы.

«**Задача 20.** В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A_1 до (AC_1E_1)» [14, С. 89, вар. 7].

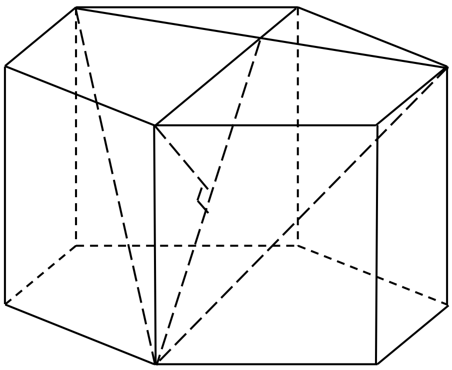


Рис. 42

Решение.

Имеем: $CE \perp AD$ (Рис. 37), $CE \perp CC_1$, $CC_1 \parallel AA_1 \Rightarrow CE \perp (ADD_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Так как $CE \parallel C_1E_1$ и $CE \perp (ADD_1)$, то $C_1E_1 \perp (ADD_1)$, откуда $(AC_1E_1) \perp (ADD_1)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей).

Обозначим: $K = A_1D_1 \cap C_1E_1 \Rightarrow (ADD_1) \cap (AC_1E_1) = AK$, а так как $(ADD_1) \perp (AC_1E_1)$ можем сделать вывод, что перпендикуляр из точки A_1 на (AC_1E_1) расположен в (ADD_1). Поэтому $\rho(A_1; (AC_1E_1)) = \rho(A_1; AK) = A_1P$.

Искомый перпендикуляр A_1P является высотой к гипотенузе в прямоугольном треугольнике $\Delta\, AA_1K$. Находим длину A_1P:

$$A_1P = \frac{AA_1 \cdot A_1K}{\sqrt{AA_1^2 + A_1K^2}} = \frac{1 \cdot 1{,}5}{\sqrt{1^2 + 1{,}5^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Теперь рассмотрим координатный метод решения данной задачи.

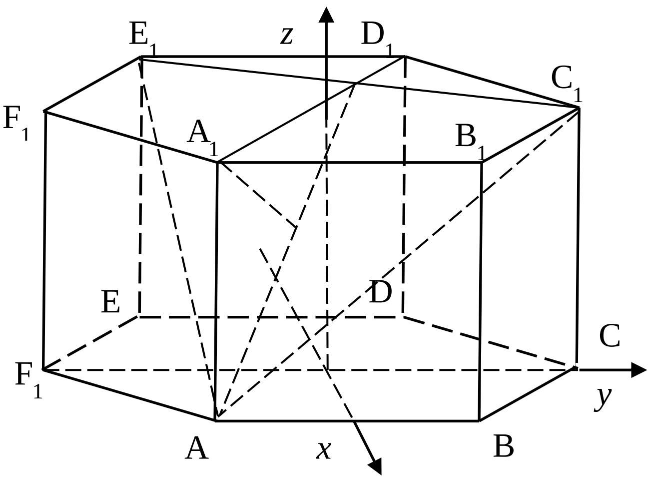


Рис. 43

Расположим правильную шестиугольную призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ в системе координат $Oxyz$ так, как представлено на рисунке 43.

Тогда вершины имеют координаты: $A(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$, $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$, $C_1(0; 1; 1)$, $E_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1)$.

Координаты вектора нормали $n(a;b;c)$ плоскости $\alpha=(AC_1E_1)$ находим из условия его перпендикулярности векторам $AE_1(-\sqrt{3};0;1)$ и $AC_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1)$:

$$\begin{cases} n\perp AE_1, \\ n\perp AC_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\cdot AE_1=0, \\ n\cdot AC_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}a+c=0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{3}{2}b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\sqrt{3}a, \\ b=-\frac{\sqrt{3}}{3}a \end{cases}.$$

Пусть $a=\sqrt{3}$, тогда $b=-1$, $c=3$. Имеем: $n(\sqrt{3};-1;3)$. Получаем уравнение плоскости $\alpha=(C_1;n)$ в виде:

$$\sqrt{3}\cdot(x-0)-1\cdot(y-1)+3\cdot(z-1)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x-y+3z-2=0.$$

Теперь находим $\rho(A_1;\ (AC_1E_1))$, пользуясь формулой для вычисления расстояния от точки до плоскости:

$$\rho(A_1;\ (AC_1E_1))=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)+1\cdot3-2\right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

При решении задач на нахождение расстояния между двумя плоскостями на изображениях многогранников учащиеся должны привыкать «видеть» эти расстояния и изображать отрезки, длины которых равны искомому расстоянию, вычислять эти расстояние геометрическим и векторно-координатным методами.

Выводы по второй главе

1. Выделены методические аспекты обучения старшеклассников решению задач по темам «Прямые в пространстве», «Прямая и плоскость в пространстве», «Плоскости в пространстве» в углублённом курсе геометрии.
2. Представлена подборка задач из учебно-методического комплекса Евгения Викторовича Потоскуева и Леонида Исааковича Звавича на определение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, на вычисление величины угла и расстояния между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Выполнен анализ содержания учебников геометрии для 10 класса углублённого уровня по теме «Прямые и плоскости в пространстве». Из Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) образования приведены требования к результатам освоения углублённого курса геометрии. Представлен перечень знаний и умений, которыми должен обладать учащийся 10-11 классов по результатам изучения на углублённом уровне темы «Прямые и плоскости в пространстве». Определено: главной задачей изучения учащимися стереометрии является формирование у них верных представлений о пространственных геометрических образах, необходимых для решения содержательных стереометрических задач. При этом обучение стереометрии должно быть основано на соблюдении принципов наглядности, доступности, системности изложения теоретического материала в сочетании с задачным материалом, подобранным с соблюдением принципа «от простого - к сложному».

2. Рассмотрены геометрический и векторно-координатный методы решения задач на вычисление углов и расстояний в пространстве. Применение векторов при решении задач развивает инициативу учащихся в поисках эффективных путей решения этих задач. Но при этом рекомендуется не ограничиваться применением координатного метода, а решать задачу и геометрическим методом, сравнивая при этом полученные результаты.

3. Выделены методические аспекты обучения решению задач геометрии прямых в пространстве. Представлена подборка задач по теме «Прямые в пространстве» в углублённом курсе геометрии.

4. Раскрыты методические аспекты обучения решению задач геометрии прямых и плоскостей в пространстве. Представлена подборка

задач по теме «Прямая и плоскость в пространстве» в углублённом курсе геометрии.

5. Выделены методические аспекты обучения решению задач геометрии плоскостей в пространстве. Представлена подборка задач по теме «Плоскости в пространстве» в углублённом курсе геометрии.

Выше перечисленные результаты позволяют сделать вывод, что поставленные задачи исследования решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс. [Текст]: учебник. /А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2017.- 272с.

2. Божина, Б.Н. К вопросу о подготовке к ЕГЭ по математике. Методы решения геометрических задач [Электронный ресурс]/ Б.Н. Божина, Е. Б. Майнагашева // Математический вестник. – 2011. - №13. – С. 293-303. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26333543 – Последнее обновление 20.04.2018.

3. Готман, Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения/ Э.Г. Готман. – М.: МЦНМО, 2006. – 160 с.

4. Далингер, В.А. Методика обучения стереометрии посредством решения задач : учеб. пособие для СПО/ В.А. Далингер. – 2-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 370с.

5. Добрина, Е.А. Некоторые методические аспекты изучения скрещивающихся прямых в школе и вузе [Электронный ресурс]/ Е.А. Добрина, Р.А. Мельников// Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. – 2015. - №36. – С. 120-128. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=23620831 - Последнее обновление 24.04.2018.

6. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.- мат. фак. пед. ин-тов / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л. Мокрушин, В. А. Оганесян и др. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.

7. Мишин, В.И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В.И. Мишин. – М. Просвещение. 1987. – 416 с.

8. Паповский, В.М. Углублённое изучение геометрии в 10 классе. Методические рекомендации к учебнику А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И.

Рыжика. [Текст]: учебное пособие для общеобразоват. организаций. / В.М. Паповский, Н.М. Пульцин. – М.: Просвещение. 2017. – 192с.

9. Потоскуев, Е.В. Геометрическая поэма [Текст]: хрестоматия / Е.В. Потоскуев. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2014. – 383с.

10. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 10 кл. [Текст]: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл.» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич – М.: Дрофа, 2014. – 224с.

11. Потоскуев, Е.В. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень [Текст]: учебник. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2016. – 224с.

12. Потоскуев, Е.В. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень [Текст]: задачник. / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2016. – 256с.

13. Потоскуев, Е.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 10-11 классы. Рабочая программа к линии УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [Текст]: учебно-методическое пособие / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. — М.: Дрофа, 2017. — 65 с.

14. Потоскуев, Е.В. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. ФГОС / Е.В. Потоскуев. – М.: Экзамен, 2016. – 223с.

15. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования. Протокол от 28 июня 2016 г. № 2/16-з.). [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/07/Primernaya-osnovnaya-obrazovatelnaya-programma-srednego-obshhego-obrazovaniya.pdf – Последнее обновление 26.01.2018.

16. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки

РФ от 17.05.2012г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/2365. – Последнее обновление 26.01.2018.

17. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/ – Последнее обновление 26.01.2018.

18. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 31.03.2014г. №253 (ред. от 05.07.2017). [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_162928/. – Последнее обновление 26.01.2018.

19. Alsina, C. A Mathematical Space Odyssey: Solid Geometry in the 21st Century/ C. Alsina, R. Nelsen. - Washington: Mathematical Association of America, 2015. — 288 p.

20. Herbst, P. International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools/ P. Herbst, U.H. Cheah, P.R. Richard, K. Jones. – Cham: Springer International Publishing AG, 2018. — 383 p.

21. Lang, S. Math!: Encounters with High School Students/ S. Lang. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. - 145 p.

22. Morris, R. Studies in mathematics education. Teaching of geometry/ R. Morris. – Paris: Unesco, 1986. – 197 p.

23. Smith, J.T. Methods of Geometry/ J.T. Smith. - New York: JOHN WILEY & SONS, 2000. — 507 p.