МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Тольяттинский государственный университет»**

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

# МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

**Б А К А Л А В Р С К А Я   Р А Б О Т А**

Направление подготовки магистра: 44.03.05 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математика и информатика*

Студент С.М. Теплов __________

Научный
Руководитель: д.п.н., доцент Н.А. Демченкова __________

**Допустить к защите**
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А.Утеева __________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Необходимость изучения множества действительных чисел в средней школе вызвана потребностями курса. Изучением множества действительных чисел завершается рассмотрение числовых систем в школьном курсе. Понятие действительного числа лежит в основе метрической геометрии и измерения геометрических величин. Без понятия действительного числа нельзя четко определить понятие предела числовой последовательности и функции. Иными словами нельзя ввести начала математического анализа.

В рабочей программе по алгебре к учебнику для 8 класса с углубленным изучением математики автора Н.Я. Виленкина [11] основной целью изучения темы «Действительные числа» является: обобщение и систематизация полученных учащимися ранее знаний о рациональных и иррациональных числах. Дополнительные цели, способствующие достижению основной цели:

- обоснование арифметических операций над действительными числами, опираясь на определение иррациональных чисел как бесконечных непериодических десятичных дробей;
- введение понятия мощности бесконечных множеств действительных чисел, понятия замкнутости числового множества относительно некоторой операции;
- введение отношения порядка на множестве действительных чисел и рассмотрение доказательства известных ранее свойств числовых неравенств;
- знакомство с понятием погрешности приближения, методом оценки погрешности, использованием приближенных формул;
- развитие навыков работы с квадратными корнями;
- приведение доказательства правил извлечения квадратного корня из произведения, дроби и степени.

В федеральном государственном образовательном стандарте общего образования [39] в требованиях к математической подготовке учащихся нет упоминания о том, что выпускник должен знать, что такое рациональное число, иррациональное или действительное число, чем они отличаются между собой, какими свойствами обладают и какие операции выполняются на множестве действительных чисел. Предусматриваются лишь знания о свойствах квадратных корней и умение преобразовывать выражения их содержащие.

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что полного обобщения понятия множества действительных чисел как числовой системы нет, что негативно влияет на дальнейшее построение курса. Поэтому необходимо разработать методику обучения темы «Действительные числа», в чем и заключается цель данной работы.

**Объектом исследования** является процесс обучения алгебре в школьном курсе математики.

**Предметом исследования** являются действительные числа в школьном курсе математики.

**Цель исследования –** разработать методику обучения действительным числам в углубленном курсе алгебры основной школы; составить систему упражнений на усвоение понятия действительного числа и систему упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа».

**Задачи исследования:**

1. Выделить основные исторические этапы развития действительных чисел.
2. Рассмотреть различные способы определения понятия действительного числа.
3. Провести аксиоматическое построение теории действительного числа.
4. Представить методическую схему изучения множества действительных чисел в школьном курсе математики.
5. Выявить методические особенности формирования понятия действительного числа в углубленном курсе алгебры основной школы.

6. Рассмотреть основные операции и свойства на множестве действительных чисел.
7. Представить основные требования и принципы к разработке систем упражнений по математике.
8. Составить систему упражнений, направленную на усвоение понятия действительного числа.
9. Составить систему упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа»

Для решения поставленных педагогических задач были использованы следующие методы исследования: анализ педагогической литературы; изучение опыта работы учителей математики по данной теме исследования; изучение школьных программ, учебников и учебных пособий.

**Практическая значимость** результатов бакалаврской работы состоит в выявлении методических особенностей введения понятия действительного числа в углубленном курсе алгебры основной школы и разработка систем упражнений, которые могут быть использованы учителями математики и студентами педагогических направлений подготовки в ходе педагогической практики.

**На защиту выносятся:**

- методика обучения понятия действительного числа;
- система упражнений на усвоение понятия действительного числа;
- система упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа».

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

**Во введении** сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

**Глава I** посвящена теоретическим основам обучения темы «Действительные числа» в углубленном курсе алгебры основной школы.В даннойглаве представлены исторические аспекты развития понятия действительного числа, рассмотрены различные способы определения действительного числа и представлено аксиоматическое построение теории действительных чисел.

**Во II главе** представлена методическая схема изучения множества действительных чисел, рассмотрены методические особенности введения понятия действительного числа в школьном курсе математики, выявлены основные операции и свойства на множестве действительных чисел. Представлена система упражнений на усвоение понятия действительного числа и система упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа».

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы содержит 44 наименования.

# ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

## §1. Из истории развития действительного числа

**Число** – это важнейшее математическое понятие. На первых этапах существования человеческого общества числа служили для примитивного счета предметов, дней, шагов. В первобытном обществе человек нуждался лишь в нескольких первых числа. С развитием цивилизации ему потребовалось изобретать все больше числа, этот процесс продолжался на протяженности многих столетий и требовал напряженного интеллектуального труда [13].

Первоначально понятие отвлеченного числа отсутствовало – число было «привязано» к тем предметам, которые пересчитывали, и в языке первобытных народов существовали различные словесные обороты для обозначения одного и того же числа разных предметов. Отвлеченное понятие **натурального числа** (т. е. числа, не связанного с пересчетом конкретных предметов) появилось и закрепилось вместе с развитием письменности и введением для обозначения чисел определенных символов [7].

Появление **дробных чисел** (положительных рациональных) было связано с необходимостью производить измерения, т. е. процедуру, в которой какая-либо величина сравнивается с другой величиной того же рода, выбираемой в качестве эталона (единицы измерения). Но так как единица измерения не всегда укладывалась целое число раз в измеряемой величине, и пренебречь этим обстоятельством в ряде случаев было нельзя, то возникла практическая потребность ввести более «мелкие» числа, нежели натуральные. Это и было источником возникновения наиболее «простых» дробей, таких, как половина, треть, четверть и т. д. [41].

В «Началах» Евклида была изложена теория отношений отрезков, учитывающая возможность их несоизмеримости. В Древней Греции умели сравнивать такие отношения по величине, производить над ними арифметические действия в геометрической форме. Хотя греки обращались с такими отношениями как с числами, они не осознали, что отношение длин несоизмеримых отрезков может рассматриваться как число [13].

**Введение отрицательных чисел** было вызвано развитием алгебры как науки, дающей общие способы решения арифметических задач независимо от их конкретного содержания и исходных числовых данных. Отрицательные числа систематически употреблялись индийскими математиками еще в VI—XI веках. В европейской науке отрицательные числа окончательно вошли в употребление лишь после работ Р. Декарта в XVII веке, давшего их геометрическое истолкование [14].

Дальнейшее расширение понятия числа произошло в XVII веке в период зарождения современной математики, когда возникла необходимость ввести четкое определение понятия числа. Такое определение было дано одним из основоположников математического анализа И. Ньютоном во «Всеобщей арифметике»**:** Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу [14].

Эта формулировка дает единое определение действительного числа, как рационального, так и иррационального.

После стало известно, что любое число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. В XVIII в. Л.Эйлер и И.Ламберт показали, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом [14].

**Множество рациональных чисел** оказывается достаточным для удовлетворения большинства практических потребностей, с помощью рациональных чисел измерения можно выполнять с любой наперед заданной степенью точности [13].

Термин «рациональное» (число) происходит от латинского слова ratio – отношение, которое в свою очередь, является переводом греческого слова «логос». **«Иррациональное» (число)** понимают как нерациональное (по-гречески «алогос» - нелогичное) [41].

Позже, в 70 годах 19 века, понятие **действительного числа** было уточнено на основе анализа понятия непрерывности Р.Дедекиндом, Г.Кантором и К.Вейерштрассом. Независимо друг от друга они создают оригинальные теории действительного числа, которые используются в настоящее время (основа этих теорий приводится во 2 параграфе данной работы). Сейчас наибольшее распространение получили аксиоматические теории действительного числа, так как этот подход наиболее ярко демонстрирует множественное соотношение (данный подход рассматривается в 3 параграфе данной работы) [14].

## § 2. Различные способы определения действительного числа

Исторически первые строгие определения действительного числа были предложены в 1872 году, в одновременно трех опубликованных работах: теория фундаментальных последовательностей Кантора, теория Вейерштрасса (в современном варианте – теория бесконечных десятичных дробей) и теория сечений в области рациональных чисел Дедекинда [4].

### 2.1. Теория фундаментальных последовательностей Кантора

Действительное число в данном подходе рассматривается как предел последовательности рациональных чисел.

**Определение:** Последовательностью рациональных чисел называется бесконечное множество рациональных чисел, обладающих свойствами:
- известно, как рациональные числа входят (и не входят) в данное множество, причем каждое такое число называется элементом последовательности;
- относительно каждого элемента можно указать, какой из них предшествует или следует, а также известен начальный элемент, у которого нет предшествующего элемента.

Чтобы последовательность рациональных чисел сходилась, на неё накладывается условие Коши. Смысл этого условия заключается в том, что члены последовательности, начиная с некоторого номера, будут лежать сколь угодно близко друг от друга [4].

**Определение:** Фундаментальной последовательностью рациональных чисел $a_1, \dots, a_n$ ...называется последовательность, обладающая свойством, что для любого положительного рационального $\varepsilon$ можно указать номер элемента этой последовательности, начиная с которого все последующие элементы будут попарно отличаться друг от друга по модулю меньше, чем на$\varepsilon$, иначе:

$$\exists m \in N: \left|a_\lambda - a_\mu\right| < \varepsilon, \lambda > m и \mu > m;\ \lambda, \mu \in N.$$

Действительное число, определяемое фундаментальной последовательностью рациональных чисел$\{a_n\}$, обозначим$[a_n]$.

Два действительных числа $\alpha = [a_n]$и$\beta = [b_n]$, определённые соответственно фундаментальными последовательностями $\{a_n\}$и$\{b_n\}$, называются равными, если $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Если даны два вещественных числа $\alpha = [a_n]$ и$\beta = [b_n]$, то их суммой и произведением называются числа, определённые соответственно суммой и произведением последовательностей$\{a_n\}$и$\{b_n\}$:

$$\alpha + \beta \overset{\text{def}}{=} [a_n + b_n] \alpha \cdot \beta \overset{\text{def}}{=} [a_n \cdot b_n].$$

Отношение порядка на множестве вещественных чисел устанавливается посредством соглашения, в соответствии с которым число $\alpha = [a_n]$ по определению больше числа $\beta = [b_n]$, т. е.$\alpha > \beta$, если

$\exists \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N a_n \geq b_n + \varepsilon$ [4].

Кантор доказал **теорему:** Существуют фундаментальные последовательности, не имеющие рационального предела.

Таким образом, существует 2 вида фундаментальных последовательностей:

- имеющие рациональный предел;
- имеющие нерациональный предел [23].

**Определение:** Действительным числом называется всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел.

## 2.2. Теория бесконечных десятичных дробей Вейерштрасса

Действительное число в данном подходе определяется как бесконечная десятичная дробь.

**Определение:** Рядом называется выражение вида $C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots$, где любое $C_i$ – рациональное число, называемое i-ым членом ряда, и где нет последнего члена (если в ряде все члены, начиная с $C_k$, равны 0, то ряд называется конечным) [4].

**Определение:** Действительным числом называется десятичный ряд вида $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$, где $a_n \in Z^+, a_i \in Z, 0 \leq a_i \leq 9$,и исключено повторение цифры 9 бесконечное множество раз.

$A_0, A_1 \dots A_n \dots -$десятичная запись числа, $A_i -$ цифры [4].

**Определение:** Заданным действительным числом называется число, у которого все цифры известны.

Была доказана **основная теорема**, характеризующая непрерывность множества действительных чисел: Если имеются два множества $R_1$и $R_2$ рациональных чисел, обладающих двумя свойствами:

- каждое число множества $R_1$ не больше каждого числа множества $R_2$;
- для любого данного действительного положительного числа $\varepsilon$ найдутся числа $q$ во множестве $R_2$ и $p$во множестве $R_1$ такие, что $q - p < \varepsilon$, то можно сконструировать действительное число$A$и при том единственное, которое не меньше каждого числа множества $R_1$ и не больше каждого числа множества $R_2$ [4].

Существует два вида действительных чисел:

1) $a_0, a_1 \dots a_k b_1 \dots b_n b_1 \dots b_n \dots = a_0, a_1 \dots a_k (b_1 \dots b_n) -$рациональное число;

2) иррациональное число, как особый вид действительных чисел, где нет периодически повторяющихся одинаковых цифр в том же порядке, что обозначается $\omega -$произвольное иррациональное число [23].

**Определение:** Числовым полем называется множество чисел, в котором над всеми числами возможны действия: сложения, вычитания, умножения, деления, причем результаты действий находятся в том же множестве.

Было доказано основное свойство $R$: Множество действительных чисел образует числовое поле [4].

### 2.3. Теория сечений на множестве рациональных чисел Дедекинда

В основе теории Дедекинда лежит понятие сечения в поле рациональных чисел.

**Определение:** Сечением $D$ в поле рациональных чисел называется разбиение всего множества $Q$ на два непустых подмножества так, что каждое число, вошедшее в первое подмножество ($R_1$), меньше каждого числа, вошедшего во второе подмножество ($R_2$). Каждое рациональное число должно войти в одно из этих подмножеств.

На множестве $Q$ существует три вида сечений:

1) в $R_1$ есть наибольшее число, в $R_2$ нет наименьшего числа;

2) в $R_1$ нет наибольшего числа, в $R_2$ есть наименьшее число;

3) в $R_1$ нет наибольшего числа, в $R_2$ нет наименьшего числа [4].

**Пример:** Произведём разбиение множества $Q$ на два подмножества следующим образом:

$R_1$ – множество всех положительных рациональных чисел $b$, квадрат которых меньше 2, все отрицательные числа и нуль;

$R_2$ – все числа $b^1$, квадрат которых больше 2.

Докажем, что $R_1$ нет наибольшего числа.

Пусть $b > 0, b \in R_1 \Rightarrow b^2 < 2$.Покажем, что можно подобрать

$n > 0, n \in Z$ такое, что $\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ и $\left(b + \frac{1}{n}\right) \in R_1$.

$$\frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - b^2 \qquad (1)$$

Если выполняется неравенство $\frac{2b}{n} + \frac{1}{n} < 2 - b^2$, т.е. существует $n$, удовлетворяющее этому неравенству, то это $n$ удовлетворяет неравенству (1). Тогда:

$$\frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - b^2 \Rightarrow n > \frac{2b+1}{2-b^2}.$$

Такое $n$существует, что доказывает, что вместе с числом $b$ нижнему классу $R_1$ принадлежит и число $\left(b + \frac{1}{n}\right)$, поэтому в $R_1$ не существует наибольшего числа. Аналогично можно доказать, что в $R_2$ нет наименьшего числа.

Таким образом, мы показали, что данное сечение принадлежит третьему виду сечений Дедекинда.

В третьем виде сечений нет пограничного числа, то есть сечение не определяет никакого рационального числа. Сечение третьего вида определяет некоторое иррациональное число [4].

**Определение:** Действительным числом называется любое из трёх видов сечений Дедекинда в поле рациональных чисел.

Наличие в$Q$сечений третьего вида говорит о том, что на координатной прямой существуют точки, которым не соответствуют никакие числа из $Q$, то есть множество $Q$ не связано, но множество действительных чисел $R$непрерывно (это следует непосредственно из определения действительных чисел) [4].

Была доказана **основная теорема** Дедекинда: Если произвести сечение в $R$, то найдется $\beta$, производящее это сечение, причем $\beta$ будет либо наибольшим в нижнем сечении, либо наименьшим в верхнем сечении. Таким образом, в$R$ существует только 2 вида сечения (заметим, что эта теорема аналогична основной теореме Вейерштрасса) [4].

Следует отметить, что в учебниках для средней школы «в чистом виде» ни одна из теорий действительного числа (Кантора, Вейерштрасса, Дедекин-

да) не реализовывались. Это связано со значительными методическими трудностями:
- трудность актуализации рассматриваемых понятий;
- необходимость привлечения понятий, выходящих за рамки обязательного курса математики;
- статичность исследуемой ситуации.

Тем не менее, эти подходы могут быть реализованы на факультативных занятиях.

## § 3. Аксиоматическое построение множества действительных чисел.

В данном параграфе мы не будем определять, что такое отдельное действительно число, а рассмотрим определение системы действительных чисел как некоторого непустого множества, в котором:
- выделены некоторые элементы;
- задаются некоторые операции;
- определяются некоторые отношения.

Такой подход к определению системы действительных чисел в современной математике принято называть **аксиоматическим** [42].

Системой R действительных чисел называется множество чисел, в котором заданы две операции: сложение и умножение, а также задано отношение линейного порядка, называемое сравнением действительных чисел по величине, причем множество R с точки зрении операций сложения и умножения подчиняются следующим аксиомам действительных чисел:

1. **Аксиомы сложения:**

$\forall x, y \in R \exists!\, u = x + y \in R$,причем выполняются следующие условия:

a) $\forall x, y \in R: x + y = y + x$ - коммутативность сложения;

b) $\forall x, y, z \in R: x + (y + z) = (x + y) + z$ - ассоциативность сложения;

c) $\exists!\, 0 \in R: x + 0 = 0 + x = x$–нейтральность нуля;

d) $\forall x \in R \exists!\, (-x) \in R: x + (-x) = 0$- симметризуемость относительно 0 [27].

2. **Аксиомы умножения:**

$\forall x, y \in R \exists! u = x \cdot y \in R$,причем выполняются следующие условия:

a) $\forall x, y \in R: x \cdot y = y \cdot x$ - коммутативность умножения;

b) $\forall x, y, z \in R: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ - ассоциативность умножения;

c) $\exists! 1 \in R: x \cdot 0 = 0 \cdot x = x$–нейтральность единицы;

d) $\forall x \in R \exists! (1/x) \in R: x \cdot (1/x) = 1$- симметризуемость относительно 1;

e) $\forall x, y, z \in R: x \cdot (y + z) = xz + yz$ - дистрибутивность умножения относительно операции сложения [27].

**3. Аксиомы порядка:**

Для некоторых действительных чисел $x, y \in R$имеет место сравнение по величине $x \leq y$, причем выполняются условия:

a) $\forall x \in R: x \leq x$;

b) $\left.\begin{matrix} x, y \in R: x \leq y \\ y \leq x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$;

c) $\left.\begin{matrix} x, y, z \in R: x \leq y \\ y \leq z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \leq y; \forall x, y \in R: x = y \vee x \leq y \vee y \leq x$- отношение сравнения по величине является линейным обычным порядком;

d) $\forall x, y \in R: x \leq y: x + z \leq y + z \forall z \in R$ - закон монотонности длясложения;

e) $x, y \in R: x \leq y: x \cdot z \leq y \cdot z \forall z (\geq 0) \in R$ - закон монотонности для умножения [27].

**Замечание:** прежде чем формулировать последнюю группу аксиом приведем необходимые для ее понимания некоторые понятия, связанные с действительными числами и опирающиеся лишь на приведенные аксиомы сложения, умножения, порядка:

$M(\neq \varnothing) \subseteq R; a, b \in R$, тогда

1) $a \leq x \forall x \in M \Leftrightarrow a \leq M$и говорят «число $a$является нижней гранью множества M»;

2) $x \leq b \forall x \in M \Leftrightarrow M \leq b$и говорят «число $b$ является верхней гранью множества M».

Множество M называется ограниченным снизу, если оно имеет хотя бы одну нижнюю грань [25].

Множество М называется ограниченным сверху, если оно имеет хотя бы одну верхнюю грань.

Если у ограниченного снизу множества М существует наибольшая нижняя грань, равная $\alpha \in R$, то ее называют точной нижней гранью $M: \alpha = inf M$.

Если у ограниченного снизу множества М существует наименьшая верхняя грань, равная $\beta \in R$, то ее называют точной верхней гранью $M: \beta = inf M$.

Если $\alpha$ и $\beta$ существуют, то$M \subseteq [\alpha, \beta]$,причем $[\alpha, \beta]$ является наименьшим отрезком, обладающим этим свойством.

**4. Аксиома о точной нижней или верхней грани:**

Всякое числовое множество, ограниченное снизу (сверху) обязательно имеет точную нижнюю (верхнюю) грань [25].

**5. Теорема (аксиома) Дедекинда:**

Пусть заданы два множества $A$ и $B$ - не пустые, не пересекающиеся и в объединении дающие множество действительных чисел:
$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = RA \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = R.$
И пусть $\forall a \in A \forall b \in B a < b \forall a \in A \forall b \in B a < b$, тогда существует такое действительное число $c$, для которого выполняется следующее условие:
$a \leq c \leq ba \leq c \leq b.$

О множествах $A$ и $B$ говорят, что они образуют Дедекиндово сечение, а число $c$ это сечение производит. Это число $c$ принадлежит либо множеству $A$, тогда в множестве $A$ есть наибольшее число, а в множестве $B$ нет наименьшего числа, либо $c$ принадлежит множеству $B$, тогда в множестве $B$ оно наименьшее, а в множестве $A$ нет наибольшего. Ясно, что число $c$, осуществляющее Дедекиндово сечение, единственно.

Теорема Дедекинда формулирует свойство полноты (или непрерывности) множества действительных чисел [27].

Итак, под множеством $R$ действительных чисел мы понимаем числовую алгебраическую систему, заданную на множестве $R$ путем введения двух чисел $-0, 1$, определения двух алгебраических операций – сложения и умножения и задания одного отношения – «$\leq$», причем эти выделенные числа и заданные операции и отношения удовлетворяют вышеуказанным аксиомам действительных чисел. В связи с тем, что множество $R$ рассматривается как некоторая алгебраическая система, обычно применяют обозначения: $R = (R; 0, 1;\ +, \cdot; \leq)$, которое подчеркивает системный взгляд на множество действительных чисел [27].

Группой называется алгебраическая система, в которой выделен один элемент и задана одна алгебраическая операция, так что эта операция ассоциативна, выделенный элемент нейтрален относительно нее и вся система симметризуема относительно нейтрального элемента с помощью заданной алгебраической операции, причем группа называется коммутативной, если групповая операция коммутативна [32].

Таким образом, множество $R$ действительных чисел является коммутативной группой относительно: 0 и операции сложения (аксиомы 1); 1 и операции умножения (аксиомы 2).

Кольцом называется алгебраическая система, в которой выделен один элемент и заданы 2 алгебраические операции, так что относительно выделенного элемента и одной кольцевой операции данная система является коммутативной группой, в которой вторая операция ассоциативна и дистрибутивна относительно первой [32].

Таким образом, множество $R$ действительных чисел является коммутативным кольцом с единицей:

- кольцо (аксиомы 1a) – 1d), 2b), 2e));
- коммутативное кольцо (аксиомы 1a) – 1d), 2a), 2b), 2e));
- коммутативное кольцо с единицей (аксиомы 1a) – 1d), 2a), 2b), 2c), 2e)).

Кольцо (группа) называется упорядоченным, если в нём (ней) кроме кольцевых (групповых) операций задан линейный обычный порядок, связанный с операциями законами монотонности.

Полем называется алгебраическая система, в которой выделены два элемента – 0 и 1 и заданы две алгебраические операции – сложения и умножения, так что: относительно 0 и операции сложения множество является коммутативной группой, в которой выделена одна и задана еще одна алгебраическая операция умножения, связанные с 0 и операцией сложения аксиомами коммутативного кольца с 1, которое симметризуемо относительно 1 с помощью операции умножения.

Полем называется упорядоченным, если в нем задан линейный обычный порядок, связанный с полевыми операциями законами монотонности.

Поле называется полным, если в нем выполняется аксиома о точной нижней или верхней грани [32].

Таким образом, система действительных чисел – это полное упорядоченное поле.

## § 4. Анализ школьных учебников по проблеме исследования

| Учебные пособия для учащихся общеобразовательных классов | | |
|---|---|---|
| **Учебник для 8 класса «Алгебра» под ред. С.А. Теляковского [28]** | **Учебное пособие для 8 класса «Алгебра» под ред. А.Н. Тихонова [2]** | **Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович [31]** |
| **Количество часов, класс тема** | | |
| 23 часа, 8 класс, Рациональные дроби и их свойства | 20 часов, 8 класс, Квадратные корни | 17 часов, 8 класс, Функция у=$\sqrt{x}$. Свойства квадратного корня |
| **Последовательность вводимых понятий** | | |
| –понятие рационального числа (периодическая дробь период);<br>– понятие иррационального числа (начиная при этом с измерения отрезков на примерах и интуитивном уровне);<br>– понятие множества действительных чисел (правила сравнения действительных | – понятие рационального числа;<br>– понятие иррационального числа (как бесконечная десятичная непериодическая дробь);<br>– понятие множества действительных чисел (арифметические действия и правила сравнения определяются так же | – квадратный корень.<br>– дается геометрическая интерпретация нового числа $y = x^2$;<br>– систематизация знаний по теме «Множество рациональных чисел»;<br>– понятие иррационального числа (как бесконечная десятичная непериодическая дробь); |

| | | |
|---|---|---|
| чисел);<br>–арифметический квадратный корень и его свойства. | как действия и правила у рациональных чисел); | – понятие множества действительных чисел (взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и координатной плоскостью, законы, правила);<br>– понятие модуля действительного числа и основные его свойства;<br>– понятие приближенного значения действительных чисел (по недостатку и избытку);<br>– понятие степени с отрицательным целым показателем и стандартный вид положительного числа; |
| **Определение понятия действительного числа (множества действительных чисел)** | | |
| Множество действительных чисел состоит из множества рациональных и множества иррациональных чисел. | Бесконечные десятичные непериодические дроби называют иррациональными числами. Рациональные и иррациональны числа образуют множество действительных чисел. | Если множество рациональных чисел дополнить множеством иррациональных чисел, то вместе они составят множество действительных чисел. |
| **Цель** | | |
| Расширить понятие числа; систематизировать сведения о рациональных числах, дать представление об иррациональном числе, сформировать представление о действительных числах. | Познакомить учащихся с понятиями иррациональных чисел и бесконечных десятичных непериодических дробей, показать, что рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. | Расширение и систематизация знаний учащихся о числах; изучение множества действительных чисел; совершенствование устной речи и вычислительных навыков. |
| **Вывод** | | |
| Дается представление о множестве действительных чисел. Ограниченность во времени и математический аппарат восьмиклассников не позволяет дать полное представление о рассматриваемом множестве. | Сведения о действительных числах содержится меньше чем в учебнике под редакцией Теляковского. Они носят промежуточный характер в теме «Квадратные корни». | Изложение ведется на доступном уровне, однако систематичность знаний и их научность нарушена. Не введены понятия арифметических операций, которыми автор активно пользуется. Не совсем ясно, каково же точное значение данного действительного числа и как его определить. |
| **Учебные пособия для учащихся школ и классов с углубленным изучением матема-** | | |

| тики | | |
|---|---|---|
| **Учебное пособие «Алгебра для 8 класса: для школ и классов с углубленным изучением математики» авторы Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло[9]** | **Учебник Н.Я.Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шеарцбурда Алгебра и математический анализ» [10]** | **Учебное пособие "Алгебра 7" (С.М. Никольский, М.К. Потапов и др.) [33]** |
| **Количество часов, класс тема** | | |
| 34 часа, 8 класс, Функция y=$\sqrt{x}$.Свойства квадратного корня | 14 часов, 10 класс, Действительные числа. | 19 часов, 7 класс, Действительные числа. |
| **Последовательность вводимых понятий** | | |
| – рациональные и иррациональные числа как длины отрезков, соизмеримых и несоизмеримых с единицей;<br>– строгое определение десятичного приближения с недостатком (избытком);<br>– дробь с периодом 9 равна дроби с периодом 0;<br>– определение действительного числа (как бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся последовательностью девяток);<br>– правила сравнения действительных чисел;<br>– определение бесконечной периодической десятичной дроби;<br>– арифметические операции над действительными числами;<br>– формулируются свойства введенных операций;<br>– понятие модуля действительного числа и его свойства;<br>– координаты точки на прямой и плоскости. | – доказательство факта, что диагональ десятичного квадрата не выражается никаким рациональным числом;<br>– приближение измерений по избытку (недостатку);<br>– определение действительного числа;<br>– понятие рационального и иррационального числа;<br>– числовые множества и операции над ними;<br>– определение суммы действительных чисел;<br>– определение положительных действительных чисел;<br>– определение чисел, обратных положительному числу;<br>– определение частного от деления одного действительного числа на другое;<br>– определение разности действительных чисел. | – понятие обыкновенной дроби;<br>– понятие конечной десятичной дроби;<br>– понятие периодической дроби;<br>– понятие бесконечной десятичной непериодической дроби;<br>– понятие действительного числа (подробно выделены правила сравнения и основные свойства);<br>– понятие модуля действительного числа.<br>– вводятся приближения чисел (с недостатком), арифметические операции как приближенное значение. |
| **Определение понятия действительного числа (множества действительных чисел)** | | |
| Положительным действительным числом $\alpha$ называют бесконечную десятичную дробь $n_0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, не оканчивающуюся последовательностью девяток. | Положительным действительным числом $\alpha$ называют бесконечную десятичную дробь $N, n_1 \dots n_k \dots$, не оканчивающуюся последовательностью девяток. | Рациональные и иррациональные числа называют действительными числами. |

| | | |
|---|---|---|
| Число $n_0$ называют целой частью числа $\alpha = n_0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, а $0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ - его дробной частью. | Число $N$ называют целой частью числа $\alpha = N, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, а $0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ - его дробной частью. | |
| | **Цель** | |
| Познакомить учащихся с понятием действительного числа, научить выполнять арифметические операции во множестве действительных чисел. | Добиться понимания учащимися необходимости введения новой числовой системы – системы действительных чисел и научить их выполнять арифметические операции в новой системе. | Систематизировать и обобщить уже известные сведения о рациональных числах, двух формах их записи – в виде обыкновенной и десятичной дроби, сформировать представление о действительном числе, как о длине отрезка и умение изображать числа на координатной оси. |
| | **Вывод** | |
| Достаточно подробно и строго рассматривается множество действительных чисел, но, на наш взгляд, в отличие от учебного пособия [33] не столь логичен. | Изложение ведется на строгом уровне. Задания и упражнения продуманы, предусматривают глубокое и четкое усвоение материала. | На соответствующем для 7 класса уровне и достаточно полно дается теория действительного числа. |

Рассмотрим введение темы «Действительные числа» в различных школьных учебниках. Начнем с учебных пособий, ранее действующих в школе, для того чтобы провести полный анализ темы и сделать соответствующие выводы.

1. **Учебное пособие авторов Е.С. Кочеткова, Е.С. Кочетковой «Алгебра и элементарные функции. Часть I» [24].**

Изложение темы «Действительные числа» начинается с рассмотрения понятия рационального числа (рассматривается историческое расширение множества натуральных чисел, затем дается определение рационального числа как обыкновенной дроби). Вводятся действия над рациональными числами (определяются основные арифметические операции и их свойства), геометрическое изображение рационального числа (на интуитивном уровне объясняется, что любому рациональному числу соответствует точка на прямой). Далее приводится способ обращения обыкновенной дроби в десятичную и наоборот, а также объясняется, почему договорились, что период любой десятичной дроби не может быть равным 9. Доказывается теорема о не существовании рационального числа, квадрат которого равен 2. Затем вводится понятие соизмеримости отрезков - доказывается теорема о том, что диагональ любого квадрата несоизмерима с его стороной и приводятся следствия из этой теоремы. На основе соизмеримости и несоизмеримости отрезков вводятся понятия иррационального числа и действительного числа (как объединение множеств рациональных и иррациональных чисел). Далее подробно изучаются действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Для начала вводится сравнение чисел: дается определение равных положительных действительных чисел, определяется большее положительное число, определяется равенство отрицательных действительных чисел через абсолютные величины. Рассматривается геометрическое изображение действительных чисел на интуитивной основе и делается вывод о том, что множество действительных чисел и множество точек числовой прямой находится во взаимно однозначном соответствии. Далее, детально на примерах и, используя теоретические положения, рассматриваются приближения действительных чисел (по избытку и недостатку) и основные арифметические операции: четкие определения сложения, умножения, вычитания (как обратной сложению), деления (как обратной умножению).

Заметим, что все упражнения, приведенные в данном учебном пособии, хорошо продуманы. Задания разделяются на те, в которых необходимо лишь воспроизвести полученные знания и непосредственно применить их, и те, в которых недостаточно применить знания, нужно иметь их на довольно высоком уровне (доказательство утверждения, вывод следствий). Примечательно, что задания рассчитаны на хорошее развитие абстрактного мышления (так называемые задания "с буквами").

Итак, в данном учебном пособии изложение темы ведется на строгой математической основе с сохранением логики изложения. Задания и упражнения удовлетворяют принципам научности, доступности, постепенно возрастающей сложности. В текст включены исторические сведения по теме.

2. **Учебное пособие авторов А.К. Колмогорова, А.М. Абрамова и др. «Алгебра и начала анализа» [20].**

Изложение темы «Действительные числа» начинается с представления рациональных чисел в виде бесконечной десятичной дроби, определяется правило сравнения десятичных дробей. Далее определяются периодические десятичные дроби, доказывается теорема о том, что каждое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью (а также приводится обратная теорема). Отметим,однако, что доказательство первой теоремы основывается на примерах, а строгое доказательство "затерялось" среди них. Дается объяснение того, что дробь, имеющая 9 периодом не получается в результате деления натурального числа m на натуральное число n(отметим, что в ранее рассмотренном учебнике [24] приводится другое объяснение этого факта). Объясняется в общих чертах, как была построена теория действительного числа. Затем определяются арифметические операции над действительными числами через приближения по избытку и недостатку. Показывается изображение чисел точками координатной прямой, а также доказывается формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной прямой. Определяется взаимно однозначное соответствие между действительными числами $x$ и изображающими их точками $M(x)$. Определяют множество R как «числовую прямую», а числа - «точки числовой прямой». Определяется также взаимно однозначное соответствие между числовой плоскостью и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Формулируют некоторые свойства множества действительных чисел (например, свойство плотности подмножества рациональных чисел в множестве действительных чисел).

Система упражнений в данном учебнике намного слабее, нежели в предыдущем учебном пособии. Здесь упражнения носят чисто вычислительный характер, причем, вычисления предполагаются элементарные.

Итак, в целом, учебник дает также довольно полное представление о действительных числах и их свойствах, что позволяет строить теорию пределов в школьном курсе.

Таким образом, в ранее действующих учебниках тема «Действительные числа» по программе рассматривалась дважды: в 7-ом классе (начальные сведения) и в 9-ом классе (более подробное изложение). По действующей же программе в 10-11-х классах сведения о действительных числах отсутствуют, поэтому авторы действующих на данный момент учебников постарались изложить все сведения в 8-ом классе (конечно же, о строгости и полноте речь уже идти не может).

3. **Учебник Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк и др. «Алгебра» 8 класса [28].**

Это один из наиболее используемых учебников для 8 класса в современной средней школе. Изложение темы начинается с введения понятия рационального числа (периодическая дробь, период). Утверждается (без какого-либо доказательства), что каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби (и наоборот). Отмечается также, что бесконечные десятичные дроби с периодом 9 считают другой записью дробей с периодом 0, и что при обращении обыкновенной дроби в десятичную не может получиться дробь с периодом 9 (без доказательства как дополнительный материал).

Далее рассматривается понятие иррационального числа (начиная при этом с измерения отрезков на примерах и интуитивном уровне). Доказывается, что среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2 (также как дополнительные сведения). Здесь же определяют множество действительных чисел как объединения множеств рациональных и иррациональных чисел. Устанавливается также правило сравнения действительных чисел. Правила арифметических действий на множестве действительных чисел не определяются. Дается лишь понятие о том, как найти приближенное значение суммы, разности, частного(существование точных значений не оговаривается). Затем определяется арифметический квадратный корень и его свойства.

Упражнения к теме в данном учебном пособии носят вычислительный характер. Присутствуют также задания на закрепление умения определять принадлежность числа некоторому числовому множеству (натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел).

Итак, данное учебное пособие дает учащимся представление о множестве действительных чисел. Конечно, ни математический аппарат восьмиклассников, ни ограниченное учебное время не позволяют дать полное представление о рассматриваемом множестве чисел (но теория дифференциального исчисления в школьном курсе математики присутствуют, а основы для нее нет).

4. **Учебное пособие для 8 класса авторов Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина и др. «Алгебра» [2].**

Рассмотрение действительных чисел начинается опять же с введения понятия рационального числа. Дается понятие того, что любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической дроби, и наоборот. Далее рассматриваются иррациональные числа как бесконечные десятичные непериодические дроби. Множество действительных чисел образуется объединением множеств рациональных и иррациональных чисел. Дается обобщение понятия числа и приводится структура множества действительных чисел **(но в данной интерпретации дробные числа не разделяются на подмножества (конечная десятичная и бесконечная периодическая)).**

Говорится также о том, что арифметические действия и правила сравнения определяются так, что свойства этих действий, а также свойства равенств и неравенств оказываются такими же, как и для рациональных чисел. Однако, арифметические действия не показываются даже на примерах (только вычисления с помощью микрокалькулятора). Примечательно, что очень мало внимания уделяется взаимно однозначному соответствию между множеством действительных чисел и координатной прямой.

Упражнения нацелены на привитие умения записывать обыкновенную дробь в виде десятичной и наоборот. Остальные задания связаны с вычислением на микрокалькуляторе.

Итак, в данном учебнике сведений о действительных числах содержится еще меньше. Они носят промежуточный характер в теме «Квадратные корни».

5. **Учебное пособие автора А.Г. Мордковича «Алгебра 8» [31].**

Тема «Действительные числа» в данном учебнике рассматривается после изучения темы «Свойства квадратного корня». Автор вводит понятие «квадратный корень из данного числа» как некоторое обозначение неизвестного числа, квадрат которого равен данному числу (причём доказывается, что нет такой дроби, квадрат которой равен числу 5), даётся геометрическая интерпретация этого нового числа (парабола $y = x^2$). Про определение таких чисел, об их свойствах речи пока не идёт. Рассмотрение данной темы начинается с систематизации знаний по теме «Множество рациональных чисел», где вводятся:

- множественные понятия и обозначения: $N, Z, Q, \in, \subset, \notin, \not\subset$;
- запись рациональных чисел в виде десятичных дробей.

Далее рассматриваются иррациональные числа, которые определяются как бесконечные десятичные непериодические дроби, показывается также(на примерах), что операции над иррациональными числами не всегда приводят к иррациональным числам.

Вводят множество действительных чисел как объединение множеств рациональных и иррациональных чисел, а также обозначения этого множества. Показывают взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и координатной прямой, законы и правила, действующие в новом множестве. Здесь же определяются правила сравнения действительных чисел (и геометрическая интерпретация этих правил).

Далее очень подробно и обстоятельно изучают понятие модуля действительного числа и основные его свойства. После этого на примерах определяют приближённые значения действительных чисел (по недостатку и избытку), округление чисел, абсолютную погрешность.

Здесь же определяется степень с отрицательным целым показателем и стандартный вид положительного числа (не совсем понятно, какое отношение имеют эти понятия к понятию действительного числа). Заметим, что в данном учебном пособии изложение ведётся на доступном уровне. Однако систематичность знаний и их научность нарушена. Не введены понятия арифметических операций, которыми автор активно пользуется. Не совсем ясно, каково же точное значение данного действительного числа, как его определить (может сложиться ложное впечатление, что точного значения действительного числа не существует). Далее рассмотрим учебные пособия для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики (для 8 и 10 классов).

6. **Учебное пособие авторов Н.Я Виленкина, Г.С. Сурвилло и др. «Алгебра для 8 класса: для школ и классов с углубленным изучением математики» [9].**

Изложение темы «Действительные числа» начинается с обоснования того, что не каждый отрезок имеет длину, являющуюся рациональным числом. При этом делается вывод, что длина отрезка либо выражается конечной десятичной дробью, либо не может быть выражена конечной десятичной дробью. Рациональные и иррациональные числа как длины отрезков, соизмеримых и несоизмеримых с единичным. Дается строгое определение десятичного приближения с недостатком (избытком). Доказывается, что дробь с периодом 9 равна дроби с периодом 0. После этого определяется действительное число как бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся последовательностью (бесконечной) девяток. Важно, что в данном учебном пособии есть оговорка, что бесконечная десятичная дробь не само число, запись действительного числа. Утверждается, что для любого положительного действительного числа найдется отрезок, длина которого выражается этим числом. Определяется также отрицательное действительное число. Формулируется правило сравнения действительных чисел. Далее дается определение бесконечной периодической десятичной дроби, доказывается, что рациональные числа выражаются периодическими десятичными дробями.

Затем вводятся арифметические операции над действительными числами (заметим, что приводятся некоторые геометрические утверждения, опирающиеся на определения арифметических операций).

Формулируются свойства введенных операций. Вводится понятие модуля действительного числа (и его свойства). Далее выводят правило обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные. Затем вводятся координаты точки на прямой и на плоскости (взаимно однозначное соответствие множества действительных точек и точек прямой).

Упражнения данного пособия разнообразны (хотя их и не много). Присутствуют задачи на доказательство, и вычислительные задания, и упражнения начеткое понимание определений и свойств.

Итак, данный учебник достаточно подробно и строго рассматривает множество действительных чисел, но, на наш взгляд, в отличие от учебного пособия [29]не столь логичен.

7. **Учебник Н.Я. Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шеарцбурда «Алгебра и математический анализ» [10].**

Изложение темы начинается с доказательства того факта, что длина диагонали десятичного квадрата не выражается никаким рациональным числом. Далее говорится, что при измерении отрезков возможно 2 случая:

– длина измеряемого отрезка выражается конечной десятичной дробью;
– длина измеряемого отрезка не может быть выражена конечной десятичной дробью.

Затем рассматривается приближение измерений по избытку (недостатку). Объясняется, почему в определении десятичных чисел оговаривается, что число не должно оканчиваться последовательностью девяток. После этого дается определение действительного числа. Затем вводят понятия рационального и иррационального чисел, доказывают, что рациональные числа выражаются периодическими дробями. Затем изучаются вопросы, касающиеся числовых множеств, операций над ними, вводится понятие разделяющего числа числовых множеств. После изучения этих понятий даются определения:

– суммы действительных чисел;
– положительных действительных чисел;
– чисел, обратных положительному числу $X$ (через разделяющее число);
– частного от деления одного действительного числа на другое (через произведение на обратное);
– разности действительных чисел.

Показываются свойства отношения порядка, определяется модуль действительного числа и его свойства, способ перевода периодических десятичных дробей в обыкновенные.

Упражнения, подобранные в пособии направлены, в большинстве своем, на доказательство некоторых утверждений. Естественно, есть вычислительные и логические задачи, решаются прикладные задачи. Итак, в данном учебном пособии изложение ведется на строгом уровне. Задания и упражнения продуманы, предусматривают глубокое и четкое усвоение материала.

**8. Учебное пособие авторов С.М. Никольского, М.К. Потапова и др. «Алгебра 7» [33].**

В этом учебнике рациональные числа даются отдельным блоком, где рассматриваются такие вопросы, как:
– обыкновенные дроби;
– конечные десятичные дроби;
– разложение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь;
– периодическая дробь;
– периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби;
– десятичное разложение обыкновенной дроби;
– десятичное разложение рациональных чисел.

В каждом из пунктов подробно, на примерах разбирается тема, всё необходимое выделено. Далее рассматриваются действительные числа. Начинается изложение темы иррациональных чисел (интуитивно понимаем, что существуют бесконечные десятичные непериодические дроби). Затем даётся понятие действительного числа (в абстрактной форме - «буквами»), противоположного ему числа, а также модуля действительного числа. Правила сравнения действительных чисел выделены особо. Также особо выделены основные свойства рассматриваемого множества (естественно, без доказательства, но подробно объясняется, что каждое свойство обозначает и как его применять).

Затем вводятся приближения чисел (с недостатком), а также арифметические операции как приближённое значение. После этого рассматривается длина отрезка и координатная ось (устанавливается соответствие между координатной прямой и действительными числами). Итак, в данном учебном пособии на соответствующем для 7 класса уровне и достаточно полно дается теория действительного числа.

В заключение настоящего параграфа заметим, что пропедевтика понятия бесконечной десятичной дроби в школьном курсе математики практически отсутствует: например, в учебниках Виленкина Н.Я. и Нурк Э.Р. задания подобраны так, что результат от деления чисел всегда конечен (а если бесконечен, значит «не делится»). Учитель должен проводить работу по пропедевтике, чтобы учащиеся в дальнейшем лучше понимали рассматриваемое понятие действительного числа.

## § 5. Из опыта обучения понятию действительного числа.

В данном параграфе мы будем рассматривать опыт работы учителей и методистов при обучении теме «Действительные числа».

В статье «Методические акценты в преподавании темы «Действительные числа» на профильном уровне» Т.В. Ульянова рассматривает особенности введения понятия действительного числа, приводит классификацию задач на свойства делимости, выделяет условные типы задач на сравнение действительных чисел, а так же рассматривает основные методические проблемы преподавания темы и предлагает пути их решения [38].

В работе Е.М. Вечтомова, В.В. Чермных и Д.В. Широкова«Методика изучения систем действительных чисел» авторы рассматривают методику введения и изучения теории действительного числа с помощью порядкового подхода, приводят определения, основные свойства и аксиомы связанные с действительными числами. Кроме того предлагают методы построения системы R, такие как:

а) метод сечений;

б) метод фундаментальных последовательностей;

в) метод бесконечных десятичных дробей.

По мнению авторов статьи, метод сечений достаточно наглядный, но при доказательствах, в частности свойств операция сложения и умножения, более трудоемкий в сравнении с методом фундаментальных последовательностей. Второй подход предполагает повторение начал математического анализа, но в тоже время он развивает алгебраический метод конструирования числовых систем. Метод бесконечных десятичных дробей доступен для учащихся, но при строгом обосновании свойств арифметических операций весьма громоздок.

Такие построения действительных чисел возможно лишь в классах с углубленным изучением математики или на факультативном занятии, так как они предполагают высокую степень развития абстрактного мышления.

Также авторами представлен список вопрос и заданий, способствующий закреплению основных определений и понятий, состоящий из 79 упражнений, которые включают в себя различные формы подачи учащимся условия задачи [8].

В работе В.А. Гусева «Действительные числа», посвященной задачам и упражнениям, автор рассматривает задания, способствующие обобщить и систематизировать методы сравнения действительных чисел, записанных в виде дробей, корней, логарифмов и тригонометрических функций. Сначала представлены методы сравнения вещественных чисел, такие как:

- сравнение действительных чисел по определению;
- сравнение двух десятичных дробей путем сравнения разрядных единиц, входящих в запись числа;

- сравнение двух положительных чисел путем сравнения из отношения с единицей;
- сравнение чисел посредством сравнения их степеней;
- сравнение данных чисел с промежуточным числом;
- метод введения функций;
- использование неравенств Коши.

После описания методов и разбора примеров, авторами представлены задания, с различными формулировками условия, для самостоятельного решения [17].

В статье «Изучение действительных чисел» Г. Глейзер приводит обзорную лекцию по теме «Действительные числа». В своей работе автор описывает введение понятия действительного числа и причины расширения множества рациональных чисел. Так же в лекции указаны некоторые теоремы (без доказательств), помогающие решению задач по исследуемой теме. В конце статьи представлена таблица со всеми видами числовых промежутков, которые часто используются в математическом анализе, а также перечень упражнений на закрепление изучаемых определений и понятий [15].

В работе «Новые доказательства иррациональности чисел $\sqrt{2}u\sqrt{3}$ или о том, как последние цифры числа помогают решать задачи», Штейнгарц Л.А. рассматривает новые доказательства иррациональности чисел. Новый подход начинается как и традиционное доказательство (с помощью метода от противного, доказываем что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$), но с момента, когда мы приходим к равенству $m^2 = 2n^2$, мы начинаем рассматривать последнюю цифру числа $m^2$, а не говорим о четности обеих частей равенства. В итоге выясняем, что последняя цифра числа $m^2$ и $2n^2$ может быть равна только 0. Но в этом случае каждое из чисел делиться на 5, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Проделав несколько раз доказательство подобным образом, автор предлагает задачи для самостоятельного решения [44].

Учитель математики И.С. Бабикова, в своей статье «Изучение темы «Числовые множества и понятие действительного числа», предлагает планирование одного из вариантов изучения данной темы. В данном планировании представлены цели, основное содержание учебного материала, оборудование и основные источники информации, а также представлен выбор метода обучения и структура изучения темы. Автор считает, что традиционный подход «имеет ряд недостатков»:

– преобладание словесных методов изложения, способствующие рассеиванию внимания и невозможности его акцентирования на сущности учебного материала;
– большой объем материала, требующий запоминания;
– недостаток дифференцированных заданий и др.

Именно для преодоления этих недостатков в качестве ведущих методов обучения автором были выбраны: информационно-развивающий и проблемно-поисковый. Эти методы ориентированы на обучение не готовым заданиям или алгоритмам действия, а деятельности по самостоятельному приобретению знаний, анализу информации и применению умений в практической деятельности.

Указанная И.С. Бабиковой технология наиболее подходит для профильного уровня обучения. Основным ее достоинством является высокий уровень мотивационной компоненты, реализуемый через самостоятельный поиск решений, через межпредметную интеграцию и практическую направленность задач[5].

В разработанном учителями математики Н.Н. Григорьевой и В.А. Трифановой конспекте по алгебре для учащихся 8-ых классов на тему «Действительные числа» представлена презентация, которую можно использовать на уроке с помощью интерактивной доски. Информация представлена в сжатом объеме, но довольно интересно и красочно. Например, на одном из слайдов с названием «Пифагор и его страшная тайна», рассказывается о том, что открытие иррациональных чисел приписывают пифагорцам. Они считали, что иррациональные числа нарушают гармонию мира, поэтому поклялись, держать свое открытие в тайне. Тот, кто нарушит клятву, должен был умереть. Ученик Пифагора Гиппас не сдержал клятву, и боги его покарали, корабль, на котором плыл Гиппас, потерпел кораблекрушение во время бури, ниспосланной богами.

В конспекте представлено 9 этапов урока, подробно описан ход занятия и прикреплена презентация, состоящая из 12 слайдов. Урок заканчивается стихотворением В.Я. Брюсова «Числа», посвященное вдохновенным мечтателям, которые с помощью царственных чисел совершают великие открытия [16].

## Выводы по первой главе

На основании рассмотренных теоретических основ по теме исследования можно сделать следующие выводы по первой главе:

1. Исторически сложились три способа определения понятия действительного числа, предложенные одновременно Кантором, Вейерштрассом и Дедекиндом. Тем не менее, в учебниках для средней школы «в чистом виде» ни одна из теорий действительного числа, предложенных данными авторами, не реализовались. Это связано с такими методическими трудностями как: трудность актуализации рассматриваемых понятий; необходимость привлечения понятий, выходящих за рамки школьной программы; статичность исследуемой ситуации. Стоит отметить, что данные подходы могут быть реализованы на факультативных занятиях.

2. Рассмотрено определение системы действительных чисел как некоторого непустого множества, в котором выделены некоторые элементы, задаются некоторые операции и определяются некоторые отношения, можно сказать что:

- множество действительных чисел является коммутативной группой относительно: 0 и операции сложения; 1 и операции умножения.
- множество действительных чисел является коммутативным кольцом с единицей.
- система действительных чисел является полным упорядоченным полем.

3. Представлен анализ школьных учебников, на основе которого можно сделать вывод, что в учебных пособиях для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики понятие действительного числа рассматривается более подробно. Изложение ведется на строгом уровне, задания и упражнения продуманы и предусматривают глубокое и четкое усвоение материала. Более емким определением является определение, представленное в учебнике Н.Я. Виленкина, Г.С. Сурвилло, Алгебра для 8 класса: для школ и классов с углубленным изучением математики: Положительным действи-

тельным числом $\alpha$ называют бесконечную десятичную дробь $n_0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, не оканчивающуюся последовательностью девяток. Число $n_0$ называют целой частью числа$\alpha = n_0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, а $0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ - его дробной частью.

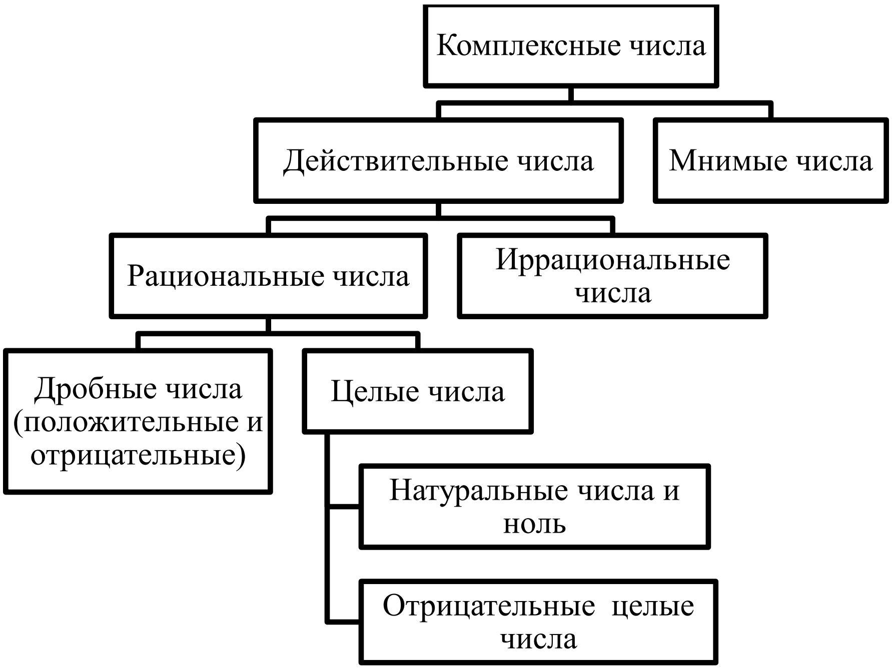
4. Стоит отметить, что пропедевтика понятия бесконечной десятичной дроби в школьном курсе математики практически отсутствует, поэтому учитель должен проводить работу по пропедевтике, чтобы учащиеся в дальнейшем лучше понимали рассматриваемое понятие действительного числа.

# ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ «ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ» В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

## § 6. Методическая схема изучения множества действительных чисел

Начнем рассмотрение данного параграфа с методической схемы изучения числовых систем, как таковых. В школьном курсе математики числовые множества изучают по схеме:

«Схема изучения числовых множеств» [30]. **Схема 1**




Изучение различных чисел ведется исходя из логической и исторической потребности: расширение множества связано с невозможностью выполнения некоторой операции [30].

Столяр А.А. предлагает следующую последовательность расширения числовых множеств:

«Схема расширения числовых множеств» [37]. **Схема 2**

При расширении числового множества соблюдают следующие требования:

1. Расширенное множество $P'$ должно содержать исходное расширяемое множество $P$ как одно из своих подмножеств.
2. Операции и отношения расширяемого множества $P$ определены также и для расширенного множества $P'$, причем их смысл в $P'$ должен совпадать со смыслом, который они имели в$P$ до его расширения.
3. В$P'$должна быть выполнима операция, которая невыполнима (или не всегда выполнима в $P$).
4. Расширение $P'$ должно быть минимальным из всевозможных расширений $P$, удовлетворяющих требованиям 1-3[37].

Изучение **натуральных** чисел основано на наглядности. Учащиеся должны твердо усвоить, что любое натуральное число может быть изображено точкой на координатном луче, но не всякой точке на этом луче отвечает натуральное число. Этот последний факт готовит учащихся к пониманию необходимости введения новых чисел. Учащиеся знакомятся с одним из свойств множества натуральных чисел – бесконечностью. При изучении законов арифметических действий, для избегания формализма необходимо отметить их теоретическое значение. В частности, коммутативный и ассоциативный законы умножения целесообразно связать с геометрическим материалом (вычислением площадей прямоугольников, объёмом прямоугольных параллелепипедов).

Первое расширение понятия числа – введение дробных чисел. Пропедевтика обыкновенных дробей сводится к ознакомлению учащихся с такими вопросами, как **доля единицы**, изображение дробей на координатном луче, правильные и неправильные дроби, основное свойство дробей, представление натурального числа в виде дроби [21].

**Десятичная дробь** рассматривается как частный случай обыкновенной дроби, как способ записи дробей со знаменателем вида $10^n$. Учащиеся должны иметь навыки чтения и записи десятичных дробей, умение записывать с помощью запятой числа вида$\frac{m}{10^n}$, где$m \in N$. Сравнение дробей основано на основном свойстве обыкновенной дроби и позволяет установить важное свойство десятичных дробей, состоящее в возможности приписывания и отбрасывания нулей справа. Изучение умножения и деления десятичных дробей начинается со случая умножения и деления дроби на натуральное число. На конкретных примерах учащиеся убеждаются в том, что и для этих чисел смысл операции сохраняется [21].

Следующее расширение понятия числа – знакомство учащихся с **отрицательными и целыми числами**. С методической стороны введение отрицательных чисел особых затруднений не представляет, т.к. дети часто встречаются в жизни. Наибольшую трудность в их изучении представляет обоснование действии над ними.

Введение понятия отрицательного числа требует дать определение: Модуля(мотивировать это можно на конкретной задаче) как расстояние от точки, изображающей это число, до начальной точки. На основании такой геометрической интерпретации поясняется свойство модуля – он не может быть отрицательным, иначе говоря, модуль числа – есть число неотрицательное [21].

Сравнение положительных и отрицательных чисел иллюстрируется конкретными примерами и с помощью геометрических образов, что позволяет подготовить учащихся к введению соответствующих определений.

В школьном курсе определение действия обычно даётся в виде правила. Относительно операции сложения целых чисел, отдельно определяется сложение чисел с разными знаками и сложение отрицательных чисел. Для того чтобы учащихся подвести к определению действия сложения используются конкретные задачи на сложение чисел с помощью координатной прямой.

Умножение положительных и отрицательных чисел представляет наибольшую трудность. Правило знаков, которое даётся в школе, является по существу, своеобразной трактовкой определения операции умножения положительных и отрицательных чисел, а утверждения, которые на самом деле представляют собой определение новых понятий, не могут быть доказаны [21].

Существует два пути истолкования правила знаков:

1. Предварительно рассматривается ряд задач, решение которых требует проводить вычисления по формуле вида $a \cdot b$ ( $a > 0, b > 0; a < 0, b > 0,; a > 0, b < 0; a < 0, b < 0$). Недочёт метода в том, что:у учащихся создаётся впечатление того, что проводится доказательство правила умножения; допущена логическая ошибка, ибо формула$a \cdot b$верна для$a > 0, b > 0$;

2. Догматический способ введения умножения, предполагающий формирование правила умножения, которое затем поясняется на примерах и убеждает учащихся в целесообразности введенного определения [37].

Все числа, с которыми учащиеся ознакомились, составляют новое множество **рациональных чисел**.

Нет другого раздела школьного курса математики, который усваивался бы с таким трудом, как раздел, посвященный переходу от множества чисел рациональных к множеству чисел действительных. Обойтись без иррациональных чисел в курсе элементарной математики нельзя, но ни одна из существующих теорий действительных чисел по своей сложности не может быть полностью изучена в средней школе. В девятилетней школе стараются избежать вопросов, связанных с непрерывностью и бесконечностью, хотя полностью достичь этого нельзя [1].

В современной методической литературе для средней школы действительные числа вводятся **по схеме:**

1. Решается уравнение $x^2 - 2 = 0$.Это ведет к необходимости доказательства **теоремы:** Не существует ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равнялся бы числу 2.
2. Ставится задача отыскания числа, квадрат которого был бы близок к числу 2.
3. Рассматриваются геометрические задачи на:

- отыскание длины диагонали квадрата со стороной 1;
- отыскание абсциссы точки графика $y = x^2$, ордината которой равна 2.

4. Ставится проблема измерения отрезков, соизмеримости и несоизмеримости отрезков, десятичных приближений длины отрезков.
5. Вводятся понятия бесконечных периодических и непериодических дробей.
6. Устанавливается правило обращения обыкновенных дробей в бесконечную периодическую дробь и обратно.
7. Вводится понятие иррационального числа.
8. Вводится множество действительных чисел.
9. Устанавливаются правила сравнения действительных чисел.
10. Рассматриваются операции над действительными числами [30].

## § 7. Методические особенности введения понятия действительного числа в школьном курсе математики

В школьном курсе математики изучение действительных числе начинается с обобщения понятия рациональных чисел и действий над ними, затем это множество расширяется до множества иррациональных чисел, затем – до множества действительных чисел. Это может быть сделано следующим образом:

**1. Рациональные числа и действия над ними:**

- определение рационального числа как дроби вида $\frac{a}{b}$ $(a, b \in Z, b \neq 0)$;
- определение равенства рациональных чисел

$(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, a, c \in Z, b, d \in N)$;

- определение основных арифметических операций:

сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$;

произведения $\frac{ad \cdot bc}{bd} = \frac{mk}{nl}$;

- свойства основных арифметических операций:

1) переместительный закон: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$;

2) сочетательный закон: $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{e}{f}$и

$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)=(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d})\cdot\frac{e}{f}$;

3) распределительный закон: $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$ ;

4) $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$;

5) $\frac{a}{b}\cdot 0=0$ ;

- определяются обратные арифметические операции сложению и умножению – вычитание и деление:

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=x \Leftrightarrow \frac{a}{b}=x+\frac{c}{d}$;

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=x \Leftrightarrow \frac{a}{b}=x\cdot\frac{c}{d}, \frac{c}{d}\neq 0$;

- определяется, как геометрически можно изобразить рациональное число;
- устанавливается связь между обыкновенной дробью и десятичной дробью (конечной и бесконечной периодической) – вводятся правила перехода от одних дробей к другим [1].

**2. Иррациональные числа и действия над ними:**

- в $Q$ выполнима операция умножения $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\in Q$ ;
- существует ли рациональное число, квадрат которого равен 2?
- определяется соизмеримость и несоизмеримость отрезков (геометрическое введение множества иррациональных чисел);
- дается определение иррациональных чисел как бесконечных десятичных непериодических дробей [1].

Далее утверждается, что множество $R$ действительных чисел является объединением множеств рациональных и иррациональных чисел.

**3. Действительные числа и действия над ними:**

В школе вполне доступным является такое изложение теории действительного числа, которое основано на геометрическом материале. Действительное положительное число может быть рассмотрено как длина отрезка прямой с помощью **аксиомы**: Для любого отрезка при произвольно выбранной единице длины существует число, выражающее меру этого отрезка, и для любого числа, представленного конечной или бесконечной десятичной дробью существует отрезок, для которого это число служит мерой длины; если измеряемый отрезок соизмерим с отрезком единицы, то его мера длины выражается рациональным числом, если – несоизмеримым, то иррациональным числом, причем это число в результате процесса десятичного измерения представляется непериодической десятичной дробью.

В соответствии с этим сумма двух действительных положительных чисел определяется как сумма длин отрезков, а произведение – как площадь прямоугольников, построенных на этих отрезках.

Однако, чаще всего действительные числа отождествляются с бесконечными десятичными дробями (периодическими – Q, непериодическими – I). В соответствии с этим дается определение равных действительных чисел (аналогично равенству десятичных дробей).

Операции сложения и умножения определяются с помощью десятичного приближения по избытку и недостатку, а операции вычитания и деления как обратные операции к операциям сложения и умножения.

Свойства операций действительных чисел не вводятся, отмечается лишь, что они аналогичны соответствующим свойствам рациональных чисел. Помимо этого, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек на координатной прямой [36].

Рассмотрим понятие действительного числа (а также понятие иррационального числа) более подробно. Начнем поэтапно согласно методической схеме введения понятия действительного числа [30].

1. **Этап.** Перед введением понятия иррационального числа необходимо повторить:

- что такое рациональное число;
- какие операции выполняются во множестве рациональных чисел;
- как рациональные числа изображаются на числовой прямой;

- как сравниваются рациональные числа;
- как записать рациональное число, записанное в виде обыкновенной дроби, в виде бесконечной десятичной дроби (и наоборот).

Для этого можно предложить учащимся следующие вопросы и задания:

**Задание 1:** Какие основные законы выполняются во множестве рациональных чисел?

**Задание 2:** Изобразите точками прямой следующие рациональные числа:

5; -4; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$;3,1.

**Задание 3:** Данные периодические десятичные дроби обратить в обыкновенные: 0,(44); 4,(63); – 2,001(7).

**Задание 4:** Сравните числа: -2 и – 2,001(7); 1,(56) и 1,56; 4,555…и 4,(5).

**Задание 5:** Почему оговаривают, что бесконечные периодические десятичные дроби не могут иметь периодом число 9?

При делении «уголком» mна nполучается:

$$10(10a-9b)-9b=10a-9b$$

$$100a-90b=10a$$

$$90a=90b$$

$a=b$. Этого не может быть [24].

2. **Этап.** Во множестве рациональных чисел всегда выполнимо действие умножения. В частности определено произведение: $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$ (квадрат числа). Таким образом, если некоторое число является рациональным, то его квадрат также рациональное (причем положительное) число [24].

Построим обратную задачу: Всякое ли положительное число является квадратом некоторого числа?

Сформулируем эту задачу на языке алгебраических уравнений. Дано уравнение $x^2=a$, где $a-$ некоторое положительное рациональное число, $x-$ неизвестное. Задаемся вопросом, всегда ли это уравнение имеет рациональные корни. Проверить это можно доказав следующую теорему.

**Теорема:** Не существует рационального числа, квадрат которого равен двум.

**Доказательство:** Докажем эту теорему методом «от противного». Пусть существует рациональное число $\frac{a}{b}$, квадрат которого равен 2, т.е. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Положим, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима, так как, если имеются одинаковые множители, то дробь можно сократить так, что она станет несократимой.

Тогда $a^2 = 2b^2$. Поскольку $2b^2$ —четно, то и $a^2$ —четно, тогда $a$ —четно.

Запишем $a = 2k (k \in Z),$ поэтому $4k^2 = 2b^2 \to b^2 = 2k^2 \to b -$ четно. Выходит, что дробь $\frac{a}{b}$ можно сократить, а это противоречит тому, что данная дробь несократима.

Таким образом, при извлечении квадратного корня из числа 2 получается бесконечная десятичная дробь, которая не может быть периодической (иначе число $\sqrt{2}$рациональное) [25].

3. **Этап.** Рассмотрим геометрическую задачу: Чему равна диагональ квадрата, стороной которого служит единичный отрезок?

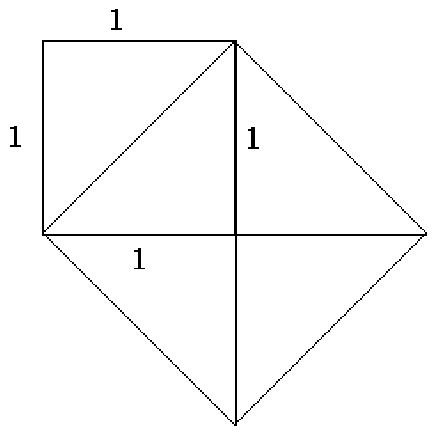


Рис.1

Построим на диагонали новый квадрат. Очевидно, что площадь нового квадрата в два раза больше площади единичного квадрата, поэтому она равна двум. Тогда диагональ единичного квадрата (или сторона квадрата с площадью 2) равна $\sqrt{2}$.

Итак, получаем, что существуют несоизмеримые отрезки (т.е. не существует отрезка, укладывающегося целое число раз в заданном отрезке)[25].

**Теорема:** Диагональ любого квадрата несоизмерима с его стороной. Из этой теоремы следует два важных вывода:

- Если отрезок длины $a$ соизмерим с единицей длины $e$, то найдется отрезок $b$, который в отрезке $a$ укладывается ровно $m$ раз, а в отрезке $e - n$раз. Тогда $n$ –ая часть отрезка $e$ должна укладываться в $a$ ровно $m$ раз, поэтому длина отрезка $a$ выражается рациональным числом $\frac{m}{n}$.
- Если отрезок длины $a$ несоизмерим с единицей длины $e$, то его длина не выражается никаким рациональным числом.

4. **Этап.** Пусть $CD$ несоизмерим с отрезком $AB$. Будем откладывать отрезок $AB$на отрезке $CD$, начиная от точки $C$.


После двух откладываний получается остаток $C'D < AB$, тогда естественно считать, что длина отрезка $CD$ приближенно выражается числом 2. Разделим $AB$ на 10 равных частей и одну такую часть будем откладывать на $C'D$, начиная от $C'$. Получается остаток $C''D < 0{,}1AB$, причем $C'C''$ состоит из пяти десятых долей отрезка $AB$, т.е длина $CD$ приближенно выражается числом 2,5 и так далее. Описанный процесс можно продолжать неограниченное количество раз (если бы он оборвался, то длина $CD$ выражалась бы точно, тогда некоторая $n -$ ая доля $AB$ укладывалась бы в $ABn$ раз, а в $CD - AB \cdot n$раз, это противоречит тому, что отрезки $AB$и$CD$ несоизмеримы). Естественно считать, что длина отрезка $CD$ выражается бесконечной непериодической дробью. Таким образом, если некоторый отрезок несоизмерим с единицей длины, то его длина записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби [25].

5. **Этап.** При измерении отрезков и решении уравнения вида $x^2 = a$ возникает необходимость расширить множество рациональных чисел путем присоединения к нему положительных бесконечных непериодических дробей. А с учетом потребностей алгебры (выполнение действия вычитания) це-

лесообразно ввести в рассмотрение и отрицательные бесконечные непериодические дроби.

Числа, которые нельзя представить в виде бесконечных периодических дробей, называются иррациональными. Примеры иррациональных чисел:

– $\sqrt{2}, \sqrt{3}$;

– $0{,}2020020002\ldots, e$;

– $\pi = 3{,}1415926535\ldots$

Все рациональные и иррациональные числа, взятые вместе, образуют множество действительных чисел. Полезно обратить внимание учащихся, что любое рациональное (иррациональное) число является действительным, а вот обратное утверждение будет ложным. При объяснении темы нужно подчеркнуть, что действительное число не является бесконечной десятичной дробью, это лишь его запись [25].

## § 8. Основные операции и свойства на множестве действительных чисел

В данном параграфе рассмотрим основные операции и свойства на множестве действительных чисел:

1) **Сравнение действительных чисел**

**Определение:** Два положительных действительных числа называются равными, если все соответственные десятичные знаки их одинаковы (исключаем из рассмотрения бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9).

Если одно из чисел содержит знак, не совпадающий с соответственным знаком другого числа, то числа называются неравными.

Например, $5{,}6389\ldots \neq 3{,}6389\ldots$; $0{,}146\ldots \neq 0{,}148\ldots$ .

Пусть числа $\alpha$ и $\beta$ не равны между собой. Тогда большим считается то из них, у которого первый из неравных знаков больше.

Например, $37{,}1269\ldots > 37{,}0394\ldots$ ; $110{,}0057\ldots > 110{,}0049\ldots$ ; $0{,}3333\ldots > 0{,}3332\ldots$ .

**Определение:** Два отрицательных действительных числа $\alpha$ и $\beta$ называются равными, если равны их абсолютные значения: $|\alpha| = |\beta|$.
Если же $|\alpha| \neq |\beta|$, то отрицательные числа $\alpha$ и $\beta$ называются неравными. Например, $-5{,}6389\ldots \neq -3{,}6389\ldots$; $-0{,}146\ldots \neq -0{,}147\ldots$ .

**Определение:** Из двух отрицательных чисел большим считается то, абсолютная величина которого меньше.
Например, $-37{,}1269\ldots < -37{,}0394\ldots$, так как $37{,}1269\ldots > 37{,}0394\ldots$ .

**Определение:** Любое положительное действительное число больше любого отрицательного числа и числа 0, а число 0, в свою очередь, больше любого отрицательного числа [24].

**2) Геометрическое изображение действительных чисел**

Геометрически действительные числа, так же как и рациональные числа, изображаются точками прямой.

Пусть $l$ - произвольная прямая, а $O$ – некоторая ее точка. Каждому положительному действительному числу $\alpha$ поставим в соответствие точку $A$, лежащую справа от $O$ на расстоянии в $\alpha$ единиц длины.

Если, например, $\alpha = 2{,}1356\ldots$ , то

$$2 < \alpha < 3$$

$$2{,}1 < \alpha < 2{,}2$$

$$2{,}13 < \alpha < 2{,}14$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Очевидно, что точка $A$ в этом случае должна находиться на прямой $l$ правее точек, соответствующих числам: 2; 2,1; 2,12; …, но левее точек, соответствующих числам: 3; 2,2; 2,14; … .

Можно показать, что эти условия определяют на прямой $l$ единственную точку $A$, которую мы и рассматриваем как геометрический образ действительного числа $\alpha = 2{,}1356\ldots$ .

Аналогично каждому отрицательному действительному числу $\beta$ поставим в соответствие точку $B$, лежащую слева от $O$ на расстоянии $|\beta|$ единиц длины. Наконец, числу «нуль» поставим в соответствие точку $O$.

**Определение:** Каждому действительному числу $\alpha$ можно поставить в соответствие некоторую вполне определенную точку прямой $l$. Эта точка будет располагаться от начальной точки $O$ на расстоянии в $|\alpha|$ единиц длины и находиться справа от $O$, если $\alpha > 0$, и слева от $O$, если $\alpha < 0$. Очевидно, что при этом двум неравным действительным числам будут соответствовать две различные точки прямой $l$.

Таким образом, множество всех действительных чисел и множество всех точек числовой прямой находятся во взаимно однозначном соответствии [24].

**3) Десятичные приближения действительных чисел**

Пусть $\alpha$ есть некоторое положительное действительное число, представленное в виде бесконечной дроби.

Десятичные приближения числа $\alpha$ с **недостатком** определяются как числа, которые получаются в результате последовательного отбрасывания всех его цифр, стоящих после запятой, начиная с первой цифры, потом со второй, затем с третьей и т. д.

Например, для числа $\sqrt{2} = 1{,}41421$ ... такими приближениями будут: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; … .

Если последнюю цифру каждого из десятичных приближений числа $\alpha$ увеличить на 1, то мы получим последовательные десятичные приближения числа $\alpha$ с **избытком**.

Например, для числа $\sqrt{2}$ такими приближениями будут: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; … .

Аналогичным образом определяются десятичные приближения и для произвольных отрицательных действительных чисел. Отметим, что для числа 0 каждое из таких приближений равно нулю.

Очевидно, что число $\alpha$ больше любого своего десятичного приближения с недостатком, но меньше любого своего десятичного приближения с избытком.

Таким образом, с каждым действительным числом $\alpha$ можно связать две бесконечные последовательности чисел:

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \dots;$$

$$\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3, \alpha''_4, \dots$$

Первая последовательность состоит из десятичных приближений числа $\alpha$ с недостатком, а вторая –из десятичных приближений числа $\alpha$ с избытком. При этом $\alpha'_1 < \alpha < \alpha''_1$; $\alpha'_2 < \alpha < \alpha''_2$; $\alpha'_3 < \alpha < \alpha''_3$; $\alpha'_4 < \alpha < \alpha''_4$ и т. д. Отметим, что каждое из десятичных приближений числа $\alpha$ является рациональным числом, хотя само число $\alpha$ может быть и иррациональным [24].

**4) Сложение действительных чисел**

**Определение:** Если числа $\alpha$ и $\beta$ рациональны, то сумма их находится по правилу сложения рациональных чисел. Если же хотя бы одно из них иррационально, то сумма $\alpha + \beta$ называется такое действительное число, которое больше всех сумм соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, но меньше всех сумм соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.

Например, рассмотрим числа $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$. Представим их в виде бесконечных десятичных дробей:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333 \dots;$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421 \dots$$

Теперь сложим соответственные десятичные приближения данных чисел с недостатком:

$$0 + 1 = 1$$

$$0{,}3 + 1{,}4 = 1{,}7$$

$$0{,}33 + 1{,}41 = 1{,}74$$

$$0,333 + 1,414 = 1,747$$

$$0,3333 + 1,4142 = 1,7475$$

… … … … … … … … … … … … … ….

Затем сложим соответственные десятичные приближения данных чисел с избытком:

$$1 + 2 = 3$$

$$0,4 + 1,5 = 1,9$$

$$0,34 + 1,42 = 1,76$$

$$0,334 + 1,415 = 1,749$$

$$0,3334 + 1,4143 = 1,7477$$

… … … … … … … … … … … … … ….

Обозначим буквой $\gamma$ сумму чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$, тогда:

$$1 < \gamma < 3$$

$$1,7 < \gamma < 1,9$$

$$1,74 < \gamma < 1,76$$

$$1,747 < \gamma < 1,749$$

$$1,7475 < \gamma < 1,7477$$

… … … … … … … … … … … … … ….

Очевидно, что $\gamma = 1,7475 \ldots$ .

Действие сложения подчиняется следующим двум законам:

1) коммутативному закону: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2) ассоциативному закону: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ .

Доказательство этих законов опирается на коммутативный и ассоциативный законы сложения рациональных чисел [24].

**5) Умножение действительных чисел**

**Определение:** Если числа $\alpha$ и $\beta$ рациональны, то произведение их находиться по правилу умножения рациональных чисел. Если хотя бы одно из чисел $\alpha$ и $\beta$ иррационально и оба они положительны, то произведением их называется такое действительное число, которое больше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, но меньше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.

Например, найдем произведение двух действительных чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$. Представим эти числа в виде бесконечных десятичных дробей:
$\frac{1}{3} = 0{,}33333\dots$ и $\sqrt{2} = 1{,}41421\dots$ .

Перемножим соответственные десятичные приближения данных чисел с недостатком:

$$0 \cdot 1 = 0$$
$$0{,}3 \cdot 1{,}4 = 0{,}42$$
$$0{,}33 \cdot 1{,}41 = 0{,}4653$$
$$0{,}333 \cdot 1{,}414 = 0{,}470862$$
$$0{,}3333 \cdot 1{,}4142 = 0{,}47135286$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

Затем перемножим соответственные десятичные приближения данных чисел с избытком:

$$1 \cdot 2 = 2$$
$$0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}6$$
$$0{,}34 \cdot 1{,}42 = 0{,}4828$$
$$0{,}334 \cdot 1{,}415 = 0{,}47261$$
$$0{,}3334 \cdot 1{,}4143 = 0{,}47152762$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

Обозначим буквой $\gamma$ произведение чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{2}$, тогда:

$$0 < \gamma < 2$$
$$0{,}42 < \gamma < 0{,}6$$
$$0{,}4653 < \gamma < 0{,}4828$$
$$0{,}470862 < \gamma < 0{,}47261$$
$$0{,}47135286 < \gamma < 0{,}47152762$$

Очевидно, что $\gamma = 0{,}4713 \dots$ .

**Определение:** Если оба числа $\alpha$ и $\beta$ отрицательны, то $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Например, $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} = 0{,}4713 \dots$ .

**Определение:** Если одно из чисел $\alpha$ и $\beta$ является положительным, а другое отрицательным, то$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|)$.

Например, $\frac{1}{3} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) = -(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2)} = -0{,}4713 \dots$ .

**Определение:** Наконец, если хотя бы одно из чисел $\alpha$ и $\beta$ равно нулю, то $\alpha \cdot \beta = 0$ .

Например, $\sqrt{2} \cdot 0 = 0;\ 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0.$

Действие умножения подчиняется следующим законам:

1) коммутативному: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ ;
2) ассоциативному: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ ;
3) дистрибутивному относительно сложения: $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ [24].

**6) Вычитание действительных чисел**

Операция вычитания определяется как обратная операция по отношению к действию сложения.

**Определение:** Разностью $\alpha - \beta$ двух действительных чисел $\alpha$ и $\beta$ называется такое число $\gamma$, которое в сумме с $\beta$ дает$\alpha$. Другими словами, разность определяется как корень уравнения: $\beta + x = \alpha$.

**Определение:** Для любых действительных чисел $\alpha$ и $\beta$ разность $\alpha - \beta$ существует и определена однозначно.

Покажем, например, как может быть найдено приближенное значение разности $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$ .

Заменив в этом выражении число $\sqrt{2}$ его любым десятичным приближение с недостатком (1; 1,4; 1,41; 1,414; …), а число $\frac{1}{3}$ – его любым десятичным приближением с избытком (1; 0,4; 0,34; 0,334…), мы получим, очевидно, приближенное значение разности $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$ с недостатком. Наоборот, если в выражении $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ число $\sqrt{2}$ заменить его любым десятичным приближением с избытком (2; 1,5; 1,42; 1,415; …), а число $\frac{1}{3}$ – его любым десятичным приближением с недостатком (0; 0,3; 0,33; 0,333; …), то полученная разность будет, очевидно, представлять собой приближенное значение $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ с избытком. В частности,

$$1{,}41-0{,}34<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}42-0{,}33,$$

$$1{,}07<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}09.$$

Отсюда получаем, что с точностью до 0,01: $\sqrt{2}-\frac{1}{3}\approx 1{,}08.$

Заметим, что ни на каком шаге мы не можем получить точного значения этой разности [24].

**7) Деление действительных чисел**

Операция деления определяется как обратная операция по отношению к действию умножения.

**Определение:** Частным $\alpha:\beta$ от деления действительного числа $\alpha$ на действительное число $\beta$ называется такое число $\gamma$, которое при умножении на $\beta$дает$\alpha$. Другими словами, частное определяется как корень уравнения: $\beta\cdot x=\alpha$ .

Если $\beta\neq 0$ , то уравнение $\beta\cdot x=\alpha$ имеет и притом единственный корень. Если же $\beta=0$ , то это уравнение либо вообще не имеет корней (при $\alpha\neq 0$), либо имеет бесконечно много корней (при $\alpha=0$); в последнем случае любое число является корнем данного уравнения.

**Определение:** Если $\beta\neq 0$ , то частное $\alpha:\beta$ существует и определенно однозначно; при $\beta=0$ частное $\alpha:\beta$ не определенно.

Например, найдем приближенное значение частного $\alpha:\beta$, если $\alpha=1{,}532\ldots$ , а $\beta=2{,}037\ldots$ .

Если в выражении $\alpha:\beta$, заменить число $\alpha$ его любым десятичным приближением с недостатком (1; 1,5; 1,53; 1,532; …), а число $\beta-$ его любым десятичным приближением с избытком (3; 2,1; 2,04; 2,038; …), то полученное частное будет, очевидно, представлять собой приближенно значение $\alpha : \beta$ с недостатком. Наоборот, если в выражении $\alpha : \beta$ число $\alpha$ его любым десятичным приближением с избытком (2; 1,6; 1,54; 1,533;…), а число $\beta -$ его любым десятичным приближением с недостатком (2; 2,0; 2,03; 2,037;…), то полученное частное будет служить, очевидно, приближенным значением $\alpha : \beta$ с избытком. В частности,

$$1{,}532 : 2{,}038 < \alpha : \beta < 1{,}533 : 2{,}037,$$

$$0{,}7516 < \alpha : \beta < 0{,}7526.$$

Это дает по меньше мере два верных десятичных знака (после запятой) частного: $\alpha : \beta = 0{,}75$ ...[24].

## §9.Требования к системе упражнений по математике

Существуют различные требования к системам задач[12, 22, 26 и др.]. Так, в учебном пособии «Теоретические основы обучения решению школьных математических задач» В.И. Крупича [26] выделены общие требования к системам школьных математических задач:

1) система задач должна состоять из конкретных учебных задач, направленных на достижение обобщенной цели учебной деятельности;
2) система задач должна обладать свойством структурной полноты(принципа целостности);
3) система задач должна содержать учебные цели по формированию у учащихся теоретических знаний и способов действия на каждом этапе процесса решения задачи;
4) система задач должна включать учебные цели по осуществлению действий самоконтроля и самооценки;
5) система задач должна обеспечить на основе их систематизации постепенное нарастание сложности задач на основе развития их структуры.

В.А. Байдак в работе «Теория и методика обучения математики» [6] обобщая требования, выделенные в работах Ю.М. Колягина [22], Г.И. Саранцева [35], Н.Г. Рыженко [34], сформулировал общие требования, предъявляемые к системам школьных задач:

1) задачи должны быть подчинены единой цели – способствовать усвоению знаний и умений не ниже заданных в государственном образовательном стандарте;
2) система задач должна строится с учетом возрастных психологических особенностей учащихся и быть рассчитана на разных учеников, допускать возможность проявления учащимися своей индивидуальности;
3) необходимо разнообразие задач за счет варьирования по разным параметрам (числовым данным, сюжетам) и с учетом разных уровней подготовки учащихся для развития познавательной самостоятельности;
4) система задач должна способствовать организации элементарной исследовательской и творческой деятельности учащихся;
5) система задач должна учитывать требования к структуре, сложности и трудности задач и их решений, к их содержанию и повторяемости;
6) система задач должна быть полной (в ней должны содержаться, по крайней мере, по одной задаче из каждого класса эквивалентности).

Л.М. Фридман определяет систему упражнений и задач, как совокупность математических упражнений и задач, каждый компонент которой необходим, а все вместе они достаточны для сформированности у учащегося умения решать задачи того или иного вида. Данные системы должны удовлетворять следующим требованиям [41]:

1) Принцип однотипности.

Совокупность упражнений одного и того же типа называют однотипной системой упражнений. Для формирования прочных навыков в решении того или иного типа задач однотипные упражнения необходимы. В то же время они приводят к механическому, неосознанному решению, к ошибкам. Из-за этого диалектического противоречия наблюдаются противоположные методические подходы относительно реализации принципа однотипности упражнений. Чтобы обеспечить на уроках устойчивое внимание всех учащихся и сформировать у них прочные умения и навыки, необходимо непременно сохранить однотипность системы упражнений, а для нейтрализации её отрицательных последствий одновременно использовать другие принципы.

2) Принцип непрерывного повторения.

В однотипную систему упражнений по новой теме с первого момента её изучения нужно включать задачи из предшествующих разделов. Цель их включения – устранение отрицательного влияния однотипности системы упражнений и осуществление систематического, непрерывного повторения изученного материала. При реализации принципа непрерывного повторения нужно учитывать следующие условия:

а) последовательность упражнений в системе определяется не столько автором задачника, сколько учителем;

б) большинство задач в системе должно быть по новой теме;

в) из пройденных тем желательно подбирать такие упражнения, которые по отдельным внешним признакам сходны с упражнениями новой темы.

3) Принцип наличия контрпримера.

Контрпримером, исходя из дидактических соображений, называют любую задачу, которая помогает выявить, а значит, и устранить имеющиеся у учащихся ошибочные ассоциации. Отношение одной и той же задачи к контрпримеру или нет является относительным. В роли контрпримеров могут выступать задачи с неполными или противоречивыми условиями и любые другие упражнения, провоцирующие учащихся на ошибку. На основе контрпримеров можно создавать на уроках игровые ситуации: мы именно провоцируем, а учащиеся догадываются, что это своего рода игра. При включении контрпримера в систему упражнений и задач нужно учитывать, что:

а) контрпримеры решаются в классе под наблюдением учителя;

б) ошибки сразу анализируются;

в) нежелательно включать контрпримеры в домашнее задание;

г) контпримеры используются не сами по себе – они лишь изредка включаются в систему упражнений.

4) Принцип полноты.

Система упражнений и задач называется полной, если совокупность её задач и способы их решения не способствуют формированию ошибочных ассоциаций и позволяют учащимся глубоко усваивать все необходимые вопросы изучаемой темы. Часто принцип полноты нарушается из-за медленного темпа работы на уроке или при сокращении числа часов. Основой для реализации принципа полноты в системе упражнений и задач является их типизация(классификация).

5) Принцип сравнения.

Под принципом сравнения понимают чередование упражнений на прямые и обратные операции и любых других задач, когда желательно показать их взаимосвязь, сходство и различия. Принцип сравнения удобно использовать при одновременном изучении некоторых тем: сложение и вычитания дробей, умножение и деления чисел с разными знаками, решения задач на нахождение дроби от числа и числа по величине его дроби и т.д. Однако принцип сравнения не является всеобщим: существуют темы, для которых применение принципа сравнения не целесообразно.

Л.А. Виноградова в учебном пособии «Методика преподавания математики в средней школе» [12] выделяет следующие принципы отбора и составления систем упражнений:

1. Принцип систематичности.

Исходя из этого принципа, все упражнения можно разделить на три вида: упражнения на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного; упражнения, связывающие новый факт с ранее изученным, позволяющие рассматривать новый факт как элемент других систем; упражнения на систематизацию изученного материала.

2. Принцип последовательности.

Этот принцип лежит в основе составления программ, написания учебников. При составлении и поборе систем упражнений он проявляется в том, что упражнения располагаются в порядке возрастания сложности: от менее сложного к более сложному, от менее трудного к более трудного, от более известного к менее известному.

3. Принцип прочности.

Принцип проявляется в наличии однотипных упражнений. При подборе или составлении данных упражнений необходимо руководствоваться закономерностью появления неверных ассоциаций. Она состоит в том, что если в процессе обучения выполняются три условия: учащийся выполняет задания одного типа; некоторые несущественные особенности заданий неизменно повторяются; учащийся может получить верный ответ и в том случае, когда не осознает эту особенность, то степень осознания этой особенности снижается.

4. Принцип сознательности.

Суть данного принципа заключается в том, чтобы помочь учащемуся сознательно усвоить материал, чтобы научить ученика, особенно не очень способного к математической деятельности. Для этого учителю необходимо представить себе умственное действие, которому он хочет научить ученика в полном объеме, без пропусков каких-либо операций, т.к. пропуски отрицательно сказываются на сознательном восприятии умственных действий.

Все перечисленные требования и принципы построения системы упражнений и задач помогают усиливать глубину понимания изучаемого материала и воспитывать учащихся как интеллектуально развивающихся личностей.

## § 10. Система упражнений, направленная на усвоения понятия действительного числа

В результате анализа различных учебных пособий остановимся на следующих требованиях к системам задач по теме «Действительные числа»:принцип систематичности, принцип, последовательности, принцип прочности и принцип сознательности [12].

В данном параграфе рассматривается система упражнений, составленная в виде теста, которая включает в себя две части: часть А с заданиями базового уровня и часть В с заданиями повышенного уровня.

Первая часть состоит из 28 заданий, которые разбиты на следующие группы:

– задания на усвоение понятия действительного числа;
– задания на сравнения действительных чисел;
– задания на усвоение понятия квадратного корня из неотрицательного числа;
– задания на свойства квадратных корней;
– задания на преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня.

Вторая часть состоит из 11 заданий, которые разбиты на две группы:

– задания на преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня;
– задания, решаемые по формуле $\sqrt{x^2} = |x|$.

**Часть А**

**Понятие о действительном числе**

**1.** Какое из чисел $\sqrt{0,036}$, $\sqrt{0,36}$, $\sqrt{36\cdot 10^{-6}}$, $\sqrt{3600}$ является иррациональным [3]?

1) $\sqrt{0,036}$ 2) $\sqrt{0,36}$ 3) $\sqrt{36\cdot 10^{-6}}$ 4) $\sqrt{3600}$

**2.** Какое из чисел $\sqrt{14,4}$, $\sqrt{0,144}$, $\sqrt{144\cdot 10^{-4}}$, $\sqrt{1440}$ является рациональным [3]?

1) $\sqrt{14,4}$ 2) $\sqrt{0,144}$ 3) $\sqrt{144\cdot 10^{-4}}$ 4) $\sqrt{1440}$

**3.** Среди чисел $\sqrt{\frac{9}{25}}$, $\sqrt{0,64}$, $\sqrt{289}$, $\sqrt{1,6}$, $\sqrt{361}$, $\sqrt{0,09}$, $\sqrt{0,144}$ найдите иррациональное [3].

1) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ 2) $\sqrt{0{,}64}$ 3) $\sqrt{289}$ 4) $\sqrt{1{,}6}$

5) $\sqrt{0{,}09}$ 6) $\sqrt{361}$ 7) $\sqrt{0{,}144}$ 8) все числа рациональны.

**4.** Укажите рациональное число среди данных $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$; $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$[3].

1) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ 2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

3) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ 4) нет рационального числа

**5.** Укажите рациональное число среди данных $\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$; $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$ [3].

1) $\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ 2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$ 3) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$ 4) нет рационального числа

**Ответы:**

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4,7 | 3 | 2 |

## Сравнение действительных чисел

**1.** Расположите в порядке возрастания числа $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$ и 6 [19].

Ответ: ____________ .

**2.** Расположите числа $7\sqrt{3}$; $8\sqrt{2}$; $4\sqrt{7}$; $5\sqrt{6}$ в порядке убывания [19].

Ответ: ____________ .

**3.** Найдите сумму целых чисел, между которыми заключено число $3\sqrt{3}$ [19].

1) 23 2) 17 3) 19 4) 11

**4.** Какому промежутку принадлежит число $\sqrt{6}$ [19]?

1) $(-\infty; 2)$ 2) $[2; 2{,}5)$ 3) $[2{,}5; 3)$ 4) $[3; +\infty)$

**Ответы:**

| **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|
| $2\sqrt{6}$; 6; $3\sqrt{5}$ | $5\sqrt{6}$; $7\sqrt{3}$; $8\sqrt{2}$; $4\sqrt{7}$ | 4 | 2 |

## Понятие квадратного корня из неотрицательного числа

**1.** Найдите значение выражения $\frac{\left(13\sqrt{5}\right)^2}{65}$ [3].

Ответ: ______ .

**2.** Вычислите:

1) $\left(4\sqrt{11}\right)^2$;   2) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$;   3) $\sqrt{7+\sqrt{81}}$;   4) $\frac{1}{5}\cdot\sqrt{900}$ [3].

**Ответы:**

| **1** | **2** | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 176 | 1,25 | 4 | 6 |

## Свойства квадратных корней

**1.** Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{324}{2^2\cdot 9}}$ [3].

Ответ: ______ .

**2.** Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{2^8\cdot 9}{576}}$ [3].

Ответ: ______ .

**3.** Вычислите $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{160}}$ [3].

Ответ: ______ .

**4.** Вычислите $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$ [3].

Ответ: ______ .

**5.** Найдите значение выражения $\frac{20\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{84}}$ [3].

Ответ: ______ .

**Ответы:**

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2,5 | 0,2 | 10 |

## Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня

**1.** Внесите множитель под знак корня $-3a\sqrt{4a}$ [19].

**2.**Внесите множитель под знак корня $5a^2\sqrt{3a}$ [19].

**3.** Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{18a^5}$ [19].

**4.**Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{-27a^6}$ [19].

**5.** Упростите выражение $2\sqrt{5}-\sqrt{45}+\sqrt{3}$ [19].

**6.** Упростите выражение $2\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{3}$ [19].

**7.** Упростите выражение $\sqrt{12a}+\sqrt{48a}-\sqrt{147a}$ [19].

**8.** Упростите выражение $\sqrt{80x}-\sqrt{180x}+\sqrt{245x}$ [19].

**9.**Найдите значение выражения $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ при$a=-\sqrt{6}$ [19].

**10.**Найдите значение выражения $\frac{250}{x^5\sqrt{10}}$ при x= $\sqrt{10}$ [19].

**11.**Вычислите $\left(-5\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\frac{21}{25}}$ [19].

**12.**Вычислите $\sqrt{5\frac{1}{16}}-\left(0{,}2\sqrt{10}\right)^2$ [19].

**Ответы:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\sqrt{4a^3}$ | $\sqrt{75a^5}$ | $3a^2\sqrt{2a}$ | $3a^3\sqrt{-3}$ | $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ | $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ |
| **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
| $-\sqrt{3a}$ | $5\sqrt{5a}$ | -3 | 0,25 | 77,2 | 1,85 |

## Часть В

## Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня

**1.** Найдите значение выражения $\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ [18].

Ответ: ______ .

**2.** Найдите значение выражения $\sqrt{7-\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7+\sqrt{24}}$ [18].

Ответ: ______ .

**3.** Вычислите $\sqrt{113^2-112^2}+\left(\sqrt{7}-6\right)\cdot\left(\sqrt{7}+6\right)$ [18].

Ответ: ______ .

**4.** Вычислите $\dfrac{\sqrt{244^2-240^2}}{\left(\sqrt{5}-4\right)\left(\sqrt{5}+4\right)}$ [18].

Ответ: ______ .

**5.** Сравните значения выражений $\sqrt{192}$ и $\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}-\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$ [18].

Ответ: ______ .

**6.** Сравните значения выражений $\sqrt{198}$ и $\dfrac{1}{5\sqrt{2}-7}-\dfrac{1}{5\sqrt{2}+7}$ [18].

Ответ: ______ .

**7.** Упростите числовое выражение $2\sqrt{27\sqrt{\dfrac{1}{9}}}$ [18].

Ответ: ______ .

**8.** Упростите числовое выражение $\dfrac{26}{13\sqrt{2\sqrt{4}}}$ [18].

Ответ: ______ .

**Ответы:**

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | -14 | -4 | равно | больше | 6 | 1 |

**Формула** $\sqrt{x^2}=|x|$

**1.** Найдите значение выражения $\sqrt{\left(5-\sqrt{23}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{23}\right)^2}$ [18].

Ответ: ______ .

**2.** Найдите значение выражения $\sqrt{\left(6-\sqrt{41}\right)^2}+\sqrt{\left(7-\sqrt{41}\right)^2}$ [18].

Ответ: ______ .

**3.** Найдите значение выражения $\sqrt{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)^2}+3\sqrt{2}$ [18].

Ответ: ______ .

**Ответы:**

| **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $2\sqrt{5}$ |

## §11. Система упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа

В данной системе упражнений использованы требования, предложенные В.А. Байдаком[6], описанные в девятом параграфе данной работы. В ходе анализа кодификатора требований к уровню подготовки обучающихся к ОГЭ и кодификатору элементов содержания для проведения ОГЭ по математике были выделены два задания, связанные с понятием действительного числа. Задания находятся в первой части экзаменационной работы в модуле «Алгебра» [44].

<table>
<tr><th colspan="2">Задание 1: Числа и вычисления</th></tr>
<tr><td colspan="2">Требования, проверяемые заданиями:<br>- выполнять, сочетая устные и письменные приёмы, арифметические действия с рациональными числами, сравнивать действительные числа; находить в несложных случаях значения степеней с целыми показателями и корней; вычислять значения числовых выражений; переходить от одной формы записи чисел к другой;<br>- округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел с недостатком и с избытком, выполнять прикидку результата вычислений, оценку числовых выражений;<br>- изображать числа точками на координатной прямой.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Элементы содержания, проверяемые заданиями</td><td>Квадратный корень из числа. Нахождение приближенного значения корня</td></tr>
<tr><td>Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>десятичные дроби</td></tr>
<tr><td>Сравнение действительных чисел</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Задание 2: Алгебраические выражения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Требования, проверяемые заданиями:<br>- составлять буквенные выражения и формулы по условиям задач, находить значения буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;<br>- выполнять основные действия со степенями с целыми показателями, с многочленами и алгебраическими дробями;<br>- выполнять тождественные преобразования рациональных выражений;<br>- применять свойства арифметических квадратных корней для преобразования числовых выражений, содержащих квадратные корни.</td></tr>
<tr><td rowspan="3" align="center">Элементы содержания, проверяемые заданиями</td><td>Алгебраическая дробь. Сокращение дробей</td></tr>
<tr><td>Рациональные выражения и их преобразования</td></tr>
<tr><td>Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях</td></tr>
</table>

## 1. Числа и вычисления

**Пример 1:** Сколько целых чисел расположено между числами $-\sqrt{80}$и$-\sqrt{8}$ [29]?

Решение:

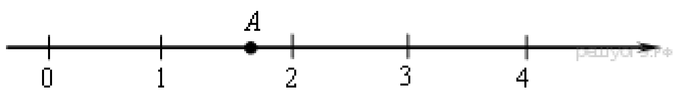
1) $-\sqrt{80} > -9$

2) $-\sqrt{8} > -3$

3) тогда получаем: $-8, -7, -6, -5, -4, -3$

Ответ: 6.

**Пример 2:** Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой $A$ [29]?




1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{11}$.

Решение:

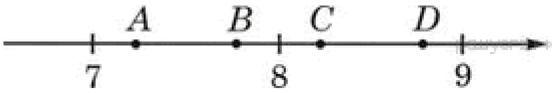
Возведем в квадрат числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$:

$(\sqrt{2})^2 = 2$; $(\sqrt{3})^2 = 3$; $(\sqrt{7})^2 = 7$; $(\sqrt{11})^2 = 11$.

Число $A^2$ лежит между числами $1^2 = 1$ и $2^2 = 4$ и ближе к числу $2^2$. Поэтому точкой $A$ отмечено число $\sqrt{3}$.

Ответ: 2.

**Пример 3:** Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$. Какая это точка [29]?




1) точка A; 2) точка B; 3) точка C; 4) точка D.

Решение:

Возведем в квадрат числа $\sqrt{77}, 7, 8, 9$:

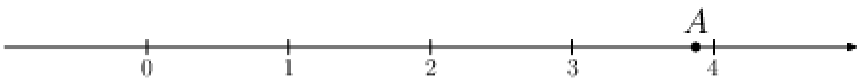
$\left(\sqrt{77}\right)^2 = 77; 7^2 = 49; 8^2 = 64; 9^2 = 81.$

Число 77 лежит между числами 64 и 81 и находится ближе к числу 81, поэтому $\sqrt{77}$ соответствует точке $D$.

Ответ: 4.

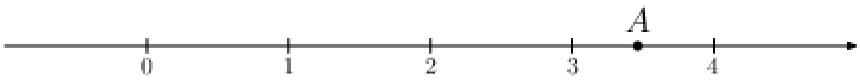
**Задания:**

1) Сколько целых чисел расположено между числами $\sqrt{33}$и$\sqrt{3}$?
2) Сколько целых чисел расположено между числами $-\sqrt{60}$и$\sqrt{20}$?
3) Сколько целых чисел расположено между числами $-\sqrt{92}$и $-\sqrt{29}$?
4) Сколько целых чисел расположено между числами $-\sqrt{24}$и$\sqrt{32}$?
5) Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой $A$?



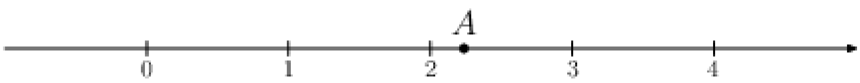

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{15}$.

6) Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой $A$?



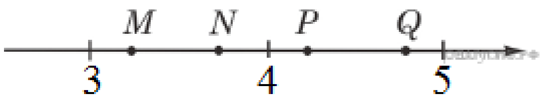

1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{13}$.

7) Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой $A$?



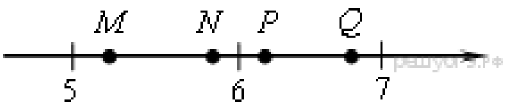
1) $\sqrt{5}$;   2) $\sqrt{8}$;   3) $\sqrt{11}$;   4) $\sqrt{13}$.

8) Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{14}$. Какая это точка?



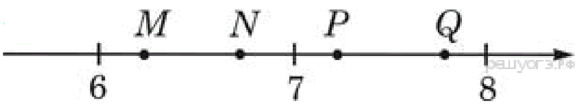

1) точка M;   2) точка N;   3) точка P;   4) точка Q.

9) Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{37}$. Какая это точка?




1) точка M;   2) точка N;   3) точка P;   4) точка Q.

10) Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{45}$. Какая это точка?




1) точка M;   2) точка N;   3) точка P;   4) точка Q.

## 2. Алгебраические выражения

**Пример 1:** Укажите наибольшее из следующих чисел [29]:

1) $\sqrt{18}$;   2) $2\sqrt{6}$;   3) 5;   4) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

Решение: Возведем в квадрат числа $\sqrt{18}$; $2\sqrt{6}$; 5; $\sqrt{5}+\sqrt{6}$:

$(\sqrt{18})^2 = 18$; $\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 24$; $5^2 = 25$; $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2 = 11 + 2\sqrt{30}$.

Поскольку $\sqrt{30} < 6, 2\sqrt{30} < 12$, имеем: $11 + 2\sqrt{30} < 23$. Таким образом наибольшее число 5.

Ответ: 3.

**Пример 2:** Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{30}; 3\sqrt{3};\ 5{,}5$ [29].

1) $\sqrt{30}; 3\sqrt{3};\ 5{,}5$;   2) $5{,}5; 3\sqrt{3}; \sqrt{30}$;

3) $3\sqrt{3};\ 5{,}5;\ \sqrt{30}$;   4) $3\sqrt{3}; \sqrt{30}; 5{,}5$.

Решение: Возведем каждое из чисел в квадрат

$$\left(\sqrt{30}\right)^2 = 30; \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27; (5{,}5)^2 = 30{,}25.$$

Сравним квадраты заданных чисел: $\left(3\sqrt{3}\right)^2 < \left(\sqrt{30}\right)^2 < (5{,}5)^2$.

Следовательно, $3\sqrt{3}; \sqrt{30}; 5{,}5$.

Ответ: 4.

**Пример 3:**Найдите значение выражения $\frac{\left(2\sqrt{6}\right)^2}{36}$ [29].

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $2$; 4) $4$.

Решение: Последовательно получаем:

$$\frac{\left(2\sqrt{6}\right)^2}{36} = \frac{2^2\left(\sqrt{6}\right)^2}{36} = \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ответ: 1.

**Задания:**

1) Укажите наибольшее из следующих чисел:

1) $\sqrt{35}$; 2) $2\sqrt{7}$; 3) $6$; 4) $\sqrt{6} + \sqrt{7}$.

2) Укажите наименьшее из следующих чисел:

1) $\sqrt{19}$; 2) $3\sqrt{7}$; 3) $6$; 4) $2\sqrt{7} + \sqrt{8}$.

3) Укажите наибольшее из следующих чисел:

1) $\sqrt{15}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $3$; 4) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

4) Укажите наименьшее из следующих чисел:

1) $\sqrt{22}$; 2) $2\sqrt{6}$; 3) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 4) $\frac{\sqrt{111}}{\sqrt{3}}$.

5) Расположите в порядке возрастания числа $2\sqrt{5}; 5\sqrt{2};\ 6$.

1) $2\sqrt{5}; 5\sqrt{2}; 6$; 2) $6; 2\sqrt{5}; 5\sqrt{2}$;

3) $5\sqrt{2}; 6; 2\sqrt{5}$;4) $2\sqrt{5}; 5; 5\sqrt{2}$.

6) Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{91}; 9{,}5;\ 2\sqrt{23}$.

1) $9{,}5; \sqrt{91}; 2\sqrt{23}$; 2) $2\sqrt{23}; \sqrt{91}; 9{,}5$;

3) $9{,}5; 2\sqrt{23}; \sqrt{91}$; 4) $\sqrt{91}; 9{,}5; 2\sqrt{23}$.

7) Расположите в порядке возрастания числа $2\sqrt{5}; \sqrt{19};\ 4{,}5$.

1) $2\sqrt{5}; \sqrt{19}; 4{,}5$; 2) $\sqrt{19}; 4{,}5; 2\sqrt{5}$;

3) $\sqrt{19}$; $2\sqrt{5}$; 4,5;  4) 4,5; $2\sqrt{5}$; $\sqrt{19}$.

8) Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{10}$; $2\sqrt{2}$; 3,5.

1) $2\sqrt{2}$; 3,5; $\sqrt{10}$;  2) 3,5; $\sqrt{10}$; $2\sqrt{2}$;

3) $2\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; 3,5;  4) $\sqrt{10}$; $2\sqrt{2}$; 3,5.

9) Найдите значение выражения $\frac{36}{(2\sqrt{6})^2}$.

1) $\frac{3}{2}$;  2) 3;  3) $\frac{1}{2}$;  4) $\frac{1}{4}$.

10) Найдите значение выражения $\frac{(4\sqrt{3})^2}{48}$.

1) $\frac{1}{4}$;  2) 27;  3) $\frac{27}{4}$;  4) 1.

11) Найдите значение выражения $\frac{(6\sqrt{3})^2}{30}$.

1) $\frac{3}{5}$;  2) $\frac{81}{5}$;  3) $\frac{18}{5}$;  4) $\frac{486}{5}$.

12) Найдите значение выражения $\frac{(4\sqrt{6})^2}{84}$.

1) $\frac{432}{7}$;  2) $\frac{8}{7}$;  3) $\frac{1728}{7}$;  4) $\frac{2}{7}$.

## Выводы по второй главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1. Представлена схема и требования к расширению числовых множеств, а так же методическая схема изучения множества действительных чисел. Изучив методическую схему введения понятия действительного числа, можно сделать вывод, что в школьном курсе математики изучение данного понятия начинается с обобщения понятия рациональных чисел и действий над ними, затем множество расширяют до множества иррациональных чисел, а потом происходит расширение до множества действительных чисел. Причем материал может излагаться как на основе геометрического материала (длины отрезка прямой), так и отождествляться с бесконечными десятичными дробями.

2. Рассмотрены основные методические особенности введения понятия действительного числа. Выделены основные этапы определения множества действительных чисел, согласно методической схеме, представленной в шестом параграфе данной работы. Сделаны выводы о том, что при объяснении данной темы, стоит обратить внимание учащихся на то, что любое рациональное (иррациональное) число является действительным, а вот обратное утверждение будет ложным, а также что нужно подчеркнуть, что действительное число не является бесконечной десятичной дробью, это лишь его запись.

3. Выделены основные операции и свойства на множестве действительных чисел:

- сравнение действительных чисел;
- геометрическое изображение действительных чисел;
- десятичные приближения действительных чисел;
- сложение действительных чисел;
- умножение действительных чисел;

– вычитание действительных чисел;

– деление действительных чисел.

4. Представлена система упражнений в виде теста, направленная на усвоение понятия действительного числа, которая состоит из двух частей. В первой части поободраны задания базового уровня, во второй части задания повышенного уровня. В общей сложности система включает в себя 39 заданий, которые направлены на: усвоение понятия действительного числа; сравнение действительных чисел; усвоение понятия квадратного корня из неотрицательного числа; свойства квадратных корней; преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня; формулу $\sqrt{x^2} = |x|$.

5. Предложена система упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся девятых классов по теме «Действительные числа». Система состоит из двух частей, каждая часть представляет собой набор упражнений, которые включают в себя подробно разобранные примеры и задания для самостоятельного решения.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

1. Исторически сложились три способа определения понятия действительного числа, предложенные одновременно Кантором, Вейерштрассом и Дедекиндом, но в учебниках для средней школы ни один из этих способов не реализовался из-за трудности актуализации рассматриваемых понятий и необходимости привлечения понятий, выходящих за рамки школьной программы.

2. Рассмотрено аксиоматическое определение действительных чисел, в результате чего можно сделать вывод, что система действительных чисел является полным упорядоченным полем.

3. Представлен анализ школьных учебников, основываясь на который можно сделать вывод, что в учебных пособиях для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики, понятие действительного числа рассматривается более подробно.

4. Сделан вывод о том, что пропедевтика понятия бесконечной десятичной дроби в школьном курсе математики практически отсутствует, поэтому учитель должен проводить работу по пропедевтике, чтобы учащиеся в дальнейшем лучше понимали рассматриваемое понятие действительного числа.

5. Представлена схема и требования к расширению числовых множеств, а так же методическая схема изучения множества действительных чисел.

6. Рассмотрены основные методические особенности введения понятия действительного числа. Выделены основные этапы определения множества действительных чисел, согласно методической схеме, представленной в шестом параграфе данной работы.

7. Выделены основные операции и свойства на множестве действительных чисел.

8. Предложена разработанная система упражнений, направленная на усвоение понятия действительного числа.

9. Представлена разработанная система упражнений для подготовки учащихся девятых классов к общему государственному экзамену по теме «Действительные числа».

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.Д. Математика, ее содержание, методы и значение [Текст]/ Под ред. Александрова А.Д., Колмогорова А.Н., Лаврентьева М.А. – М.: Изд. Академии наук СССР, 1956. – т.3 – 336 с.

2. Алимов, Ш.А. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы [Текст]/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; Под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Просвещение, 2012. – 255 с.

3. Алфутова, А.Б. Алгебра и теория чисел для математических школ [Текст]/ А.Б. Алфутова, А.В. Устинов. – М.: МЦНМО, 2003. – 70 с.

4. Андронов, И.К. Математика действительных и комплексных чисел [Текст]/ И.К.Андронов. – М.: Просвещение, 1975. – 158 с.

5. Бабикова И.С. Изучение темы «Числовые множества и понятие действительного числа»/ И.С. Бабикова. – URL:http://festival.1september.ru/articles/583085/(дата обращения 28.02.2016).

6. Байдак В.А. Теория и методика обучения математики: Учебное пособие [Текст] / В.А. Байдак. – М.: Флинта, 2011. – 264 с.

7. Бронштейн, К.А. Справочник по математике [Текст]/ И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 720 с.

8. Вечтомов, Е.М. Методика изучения систем действительных чисел [Текст] / Е.М. Вечтомов, В.В. Чермных, Д.В. Широков // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета.– 2012. – № 2-3. – С. 57-62.

9. Виленкин, Н.Я. Алгебра для 8 класса: для школ и классов с углубленным изучением математики [Текст]/ Н.Я. Виленкин, Г.С.Сурвиллои др. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.

10. Виленкин, Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 класс. Углубленное изучение [Текст]/ Н.Я.Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шеарцбурда. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.

11. Виленкин Н.Я. Рабочая программа по алгебре 8 класс для школ с углубленным изучением математики УМК Н.Я. Виленкин. – URL: http://gymnasia35.ru/upload/dokumenty/programmy_obuchenija/matematika/8_ugl

ublennyj_matematika_vilenkin_n.ja._atanasjan_l.s..pdf (дата обращения 27.11.2015).

12. Виноградова Л.А. Методика преподавания математики в средней школе: Учебное пособие [Текст] / Л.А. Виноградова. – М.: Феникс, 2005. – 252 с.

13. Глейзер, Г.И. История математики в школе. VII-VIIIкл. [Текст]/ Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.

14. Глейзер, Г.И. История математики в школе. IX-Xкл. [Текст]/ Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.

15. Глейзер Г. Изучение действительных чисел. Лекция 3 [Текст] / Г.Глейзер // Еженедельное приложение к газете «Первое сентября». – 1995. – №3 (96). – С. 15-16.

16. Григорьева Н.Н. Урок алгебры по теме «Действительные числа» / Н.Н. Григорьева, В.А. Трифанова. – URL: http://festival.1september.ru/articles/661213/ (15.02.2016).

17. Гусев, В.А. Обзорная лекция по теме «Действительные числа» [Текст] / В.А. Гусев, Н.Б. Гусева, Г.В. Сычева // Научно-практический журнал «Математика для школьников». – 2009. – №3. – С. 11-19.

18. Задачи по математике: алгебра и начала анализа [Текст]/ М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой. – М.: Высшая школа, 2004. – 296 с.

19. Ключникова Е.М., Рабочая тетрадь по алгебре. 8 класс. К учебнику А.Г. Мордковича [Текст] / Е.М. Ключникова, И.В. Комиссарова. – М: Мнемозина, 2013. – 112 с.

20. Колмогоров А. Н., Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10-11 классов средней школы [Текст]/ А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. – М: Просвещение, 2011.- 384 с.

21. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]/ Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1999. – 462 с.

22. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике: Учебное пособие [Текст] / Ю.М. Колягин – М.: Просвещение, 1977. – 113 с.

23. Кононюк А.Е. Обобщенная теория моделирования: Книга 2: Числа: количественные оценки параметров модели[Текст] / А.Е. Кононюк. – Киев: Образование Украины, 2012.– 548 с.

24. Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции: Учебное пособие для 9 кл. средней школы [Текст]/ Под ред. О. Н. Головина. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1969. – 352 с.

25. Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции: Учебное пособие для 10 кл. средней школы [Текст]/ Под ред. О. Н. Головина. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1967. – 288 с.

26. Крупич В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач [Текст] / В.И. Крупич. – М: Прометей, 1995. – 165 с.

27. Ларин, С.В. Числовые системы [Текст]/ С.В. Ларин. – М.: Академия, 2001. – 160 с.

28. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений [Текст]/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; Под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2016. – 287 с.

29. Математика. Все задания части 1 «Закрытый сегмент» ГИА 3000 задач с ответами [Текст]: Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Экзамен, 2013. – 400 с.

30. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов[Текст]/ Под ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 415 с.

31. Мордкович А.Г. Алгебра-8. Учебник [Текст]/ А.Г. Мордкович. Т.Н. Мишустина, А.Л. Александрова – М.: Мнемозина, 2015. – 214 с.

32. Нечаев, В.И. Числовые системы [Текст]/ В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975 – 199 с.

33. Никольский С.М. Алгебра. 7 [Текст]/ С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

34. Рыженко Н. Г., Болотюк Л. А. Сборник уровневых дифференцированных задач по алгебре. 8–9 классы [Текст] / Н.Г. Рыженко, Л.А. Болотюк. – Санкт-Петербург: ЛИСС, 2004. – 84 с.

35. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учебное пособие [Текст] / Г.И Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 223 с.

36. Стойлова, Л.П. Основы начального курса математики [Текст]/ Л.П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – 319 с.

37. Столяр, А.А. Логические проблемы преподавания математики [Текст]/ А.А. Столяр. – Минск: Высшая школа, 1965. – 254 с.

38. Ульянова, Т.В. Методические акценты в преподавании темы «Действительные числа» на профильном уровне [Текст] / Т.В. Ульянова // Омский научный вестник. – 2011. – №4 (99). С. 202-204.

39. Федеральный государственный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки Российской Федерации. – М.: Просвещение, 2010. – 50 с.URL:http://минобрнауки.рф/документы/543 (дата обращения 14.11.2015).

40. Федеральный институт педагогических измерений. – URL: http://fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory(дата обращения 07.12.2015).

41. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: Учебное пособие [Текст] / Л.М. Фридман. – М.:Едиториал УРСС, 2005. – 248 с.

42. Фролов, И.Т. Философский словарь [Текст]/ Под ред. И.Т. Фролова. - 4-е изд. – М.: Политиздат, 1981. – 445 с.

43. Цыпкин, А.Г. Справочник по математике для средних учебных заведений [Текст]/ А.Г. Цыпкин. – М.: Наука, 1983. – 480 с.

44. Штейнгарц Л.А. Новые доказательства иррациональности чисел $\sqrt{2}$и$\sqrt{3}$ или о том, как последние цифры числа помогают решать задачи [Текст] / Л.А. Штейнгарц // Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе». – 2012. – №9. С. 62-66.