МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ТЕМЕ «АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	Е.А.Лихачева (И.О. Фамилия)	______________ (личная подпись)
Руководитель	д.п.н., профессор, Р.А. Утеева (И.О. Фамилия)	______________ (личная подпись)
Консультант	ст.преподаватель А.В. Прошина (И.О. Фамилия)	______________ (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»____________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Цель бакалаврской работы - выявить методические особенности задач повышенной трудности по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в курсе математики основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения решению задач повышенной трудности по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе математики основной школы. Рассматривается понятие «задача повышенной трудности по математике». Представлена история развития понятия арифметической и геометрической прогрессий. Проанализировано содержание теоретического материала по данной теме в учебниках алгебры основной школы. Проведен анализ типовых задач в учебниках алгебры основной школы, подобраны задачи на прогрессии в олимпиадных заданиях для обучающихся общеобразовательной школы.

Глава II содержит методические основы обучения решению задач повышенной трудности по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе математики основной школы. Выделены основные цели обучения теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе алгебры основной школы. Представлена подборка задач повышенной трудности на прогрессии для обучающихся основной школы. Приведены методические рекомендации по обучению решения задач на прогрессии и по обучению решений олимпиадных задач на прогрессии в курсе алгебры основной школы.

В заключении приведены основные выводы и результаты проведенного исследования. *Список литературы* содержит 35 наименований. Общий объем работы – 66 страниц, в том числе приложения – 7 страниц.

ABSTRACT

The title of the thesis is “The teaching method how to solve advanced Algebra problems on the topic of "Arithmetic and geometric progression" in secondary school”.

The purpose of the bachelor's thesis is to identify methodological specifics of the advanced Mathematics problems on the subject of “Arithmetic and geometric progressions” in the Mathematics course in secondary school.

The thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion and a list of references.

The introduction defines the main characteristics of the study: the problem, the purpose, the objectives, the object, the subject and the methods of research.

Chapter I is devoted to the theoretical basics of solving advanced Algebra problems on the topic of “Arithmetic and geometric progression” in secondary school. The concept of “advanced problem in Mathematics” is considered. The history of the concept of arithmetic and geometric progressions development is presented. The content of theoretical material on this topic in Algebra textbooks of secondary school is analyzed. The analysis of typical problems in Algebra textbooks of secondary school is carried out. The Algebra Olympiad tasks on progression for students of secondary school are considered.

Chapter II contains the methodological grounds of teaching how to solve advanced Algebra problems on the topic of “Arithmetic and geometric progression” in secondary school. The main goals of teaching the topic “Arithmetic and geometric progression” in the Algebra course in secondary school are highlighted. The system of advanced problems on progressions for secondary school students is considered. Methodological recommendations on how to teach progression problems solving and the Algebra Olympiad progression problems solving in secondary school are given.

The conclusion contains the summary and the results of the study.

References include 35 items.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Математика - составная часть человеческой культуры, важная компонента для развития личности. В результате изучения обучающимся предметной области «Математика» развивается логическое мышление, получается представление о математических моделях; учащийся овладевает умением применять математические знания при решении различных учебных задач, развивает математическую интуицию [27].

Тема «Арифметическая и геометрическая прогрессия» - одна из традиционных тем школьного курса алгебры 9 класса. Обычно на эту тему дается от 16 до 30 часов, зависит от количества часов в неделю и автора учебника.

В Программе по математике [4, с. 16] отмечается, что основанная цель обучения - дать учащимся представление об арифметической и геометрической прогрессиях как числовых последовательностях особого вида.

В результате изучения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессия» обучающиеся на *базовом уровне* должны научиться:

- понимать и использовать язык последовательностей (термины, символические обозначения);
- применять формулы, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями;
- решать комбинированные задачи с применением формул n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий;
- понимать арифметическую и геометрическую прогрессии как функции натурального аргумента.

Проблема исследования: выявление методических особенностей обучения решению задач повышенной трудности по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе математики основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика обучения решению задач повышенной трудности по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в курсе математики основной школы.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения решению задач повышенной трудности по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в курсе математики основной школы.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть понятие «задача повышенной трудности по математике».

2. Изучить историю развития понятий арифметической и геометрической прогрессий;

3. Проанализировать содержание теоретического материала по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в учебниках алгебры основной школы;

4. Провести анализ типовых задач по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в учебниках алгебры основной школы;

5. Подобрать задачи повышенной трудности и олимпиадные задачи на прогрессии для обучающихся основной школы;

6. Выделить основные цели обучения теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе алгебры основной школы;

7. Сформулировать методические рекомендации по обучению решения задач на прогрессии в курсе алгебры основной школы.

Методы исследования: анализ научно - методической литературы по теме исследования, подборка и самостоятельное решение задач повышенной трудности по теме; систематизация и обобщение материала.

На защиту выносятся: подборка задач повышенной трудности по теме и методические рекомендации по обучению прогрессиям в курсе математики основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения решения задач повышенной трудности по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе математики основной школы. Рассматривается понятие «задача повышенной трудности по математике». Представлена история развития понятия арифметической и геометрической прогрессий. Проанализировано содержание теоретического материала по данной теме в учебниках алгебры основной школы. Проведен анализ типовых задач в учебниках алгебры основной школы, подобраны задачи на прогрессии в олимпиадных заданиях для обучающихся общеобразовательной школы.

Глава II содержит методические основы обучения решению задач повышенной трудности по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе математики основной школы. Выделены основные цели обучения теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе алгебры основной школы. Представлена подборка задач повышенной трудности на прогрессии для обучающихся основной школы. Приведены методические рекомендации по обучению решения задач на прогрессии и по обучению решений олимпиадных задач на прогрессии в курсе алгебры основной школы.

В заключении приведены основные выводы и результаты проведенного исследования. *Список литературы* содержит 35 наименований. Общий объем работы – 66 страниц, в том числе приложения – 7 страниц.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ТЕМЕ «АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1 Понятие задачи повышенной трудности по математике

Н.В. Кострикина под задачей повышенной трудности понимает:

- задачи, для решения которых не требуются знания программного материала соответствующего класса;

- задачи, тесно связанные с изучаемым на уроках алгебры материалом;

Задачи первого типа могут быть решены учениками в любое время учебного года, а задачи второго типа могут быть использованы по мере изучения соответствующего программного материала [13, с.40].

Имеющиеся задачи повышенной трудности в разделах школьных учебников алгебры разнообразны по своему содержанию, форме, по способам решения и по возлагаемой на них учебно - воспитательной функции.

Многие из задач первого типа нестандартны по содержанию и по способам решения, ибо в школьных учебниках алгебры помещены в разделах «Задачи повышенной трудности». Новизна и необычность математической ситуации являются трудностями таких задач. Вследствие решения таких задач нужно добиваться усвоения учеников способам их решения и умения использовать при решении более трудных задач.

Решение задач повышенной трудности или нестандартных задач со всеми учащимися способствует к развитию интереса к математике и углублению их знаний по программному материалу, как отдельных учащихся, так и всего класса.

Задачи повышенной трудности являются хорошим материалом для выявления наиболее способных к математике учащихся, они могут быть использованы как дополнительные задания.

Добиться больших успехов в развитии математических способностей отдельных учащихся и всего класса в целом – есть основная цель, отмечает автор.

Психологи считают, что задача занимает важную часть не только в любой деятельности, но и в познавательной. В таких науках как психология, педагогика и частная методика не раз различные функции задач становились предметом исследований. Анализ работ о проблемах организации учебно-познавательной деятельности на основе задач и их систем, позволяет прийти к выводу, что результат обучения зависит во многом от того, что станет материалом задачи, применяемой в учебном процессе, как будет организовано ее представление учащимся, каким образом предлагается осуществлять поиск ее решения и анализ полученного результата.

«Решение многих задач повышенной трудности по математике можно разделить на несколько этапов:

- интуитивное угадывание одного или нескольких решений задачи или ограничений, накладываемых на эти решения;

- творческий поиск метода нахождения всех возможных решений задачи или доказательства того, что других решений, кроме найденных на первом этапе, не существует;

- строгое логическое оформление идей, выработанных на первом и втором этапах» [6, с. 48].

Так как ЗПТ отличаются от друга от друга и нет определенного алгоритма их решений, то «натаскать» ученика практически нереально, в отличии от задач представленных в базовом уровне. Но рассматривая большое количество примеров, показывающие различные способы и методы, может способствовать формированию навыка решения ЗПТ. При этом нужно обратить внимание учеников на все этапы решения, то есть научиться угадыванию ответа (первый этап), научиться поиску верного способа решения (второй этап) и правильной записи полученного решения (третий этап). Большое значение имеет постоянное обращение внимание школьников на то, что на третьем этапе необходимо эти идеи сформулировать более точно. [6, с. 48].

Главная цель задач – это развитие творческого и математического мышления учащихся, а так их интереса к математике. Но для достижения этой цели недостаточно обычных задач, использование нестандартных задач формирует самостоятельное мышление и творческую активность, поэтому их необходимо включать в систему упражнений, решаемых на уроках. Они будут вызывать у учеников наибольшее затруднение.

«Нестандартные задачи – это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу решения» - написал Л.М. Фридман [28].

§2 Из истории развития арифметической и геометрической прогрессий

История математики рисует яркую картину отношений человечества с числами [33].

В IV в. н.э. римский автор Боэций установил новый термин «прогрессия», означавший от латинского progressio – «движение вперед».

Понимания об арифметической прогрессии были сформированы ещё у древних народов. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии с указанным решением. Говорят, что в древнеегипетском папирусе Ахмеса находилась древнейшая задача на прогрессии про вознаграждение изобретателя шахмат, насчитывающая за собою двухтысячелетнюю давность.

Предположим, у нас имеется числовая последовательность, в которой разница между соседствующими числами одинакова и равна d (Рис. 1).

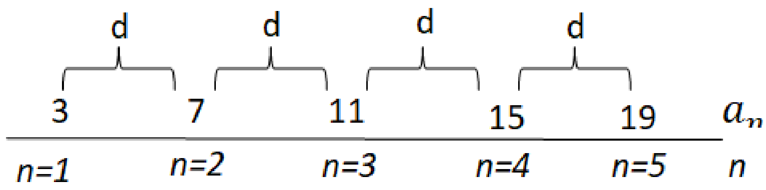

Рис. 1. Числовая последовательность с разностью d

$a_1=3 a_2=3+d=7 \Rightarrow d=7-3=4$, $a_3=7+4=11$, $a_4 = 11+4 =15$, $a_5= 15+4= 19$ и т.д.

Числовая последовательность такого рода является арифметической прогрессией.

«Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, в которой каждый член равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Это число называется разностью арифметической прогрессии и обозначается d» [22, с. 160].

На связь между прогрессиями первым обратил внимание Архимед (ок. 287-212 г.г. до н.э). [22, с. 160], один из величайших математиков истории, разработавший динамическую математику, которая может быть применена к законам природы [9]. Первые данные о прогрессиях, впервые появились в Древней Греции. Греки уже в V в. до н.э. знали следующие прогрессии и их суммы:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$

Будучи учащимся, начальной школы Карл Гаусс (1777-1855) смог найти сумму натуральных чисел от 1 до 100:

$1+2+\ldots+99=(1+99)+(2+98)+\ldots+(49+51)+50=100\cdot 49+50=4900+50=5050.$

В толковом словаре [16, с. 22, 70] понятия арифметической и геометрической прогрессии даются следующим образом:

«Арифметическая прогрессия – это последовательность чисел, каждое из которых, начиная со второго, получается из предыдущего прибавлением к нему постоянного (для всех членов) числа d, называемого разностью арифметической прогрессии» [16, с. 22].

«Геометрическая прогрессия – это последовательность чисел, каждое из которых, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на некоторое постоянного для данной прогрессии число q (знаменатель прогрессии)» [16, с. 70].

В школьном курсе «Алгебра» 9 класс под редакцией А.Г. Мордковича [17, с.145], понятия геометрической и арифметической прогрессии дается следующим образом:

Определение. «Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют арифметической. При этом число d называют разностью прогрессий».

$$a_1 = a,$$
$$a_n = a_{n-1} + d \quad (n = 2,3,4,\ldots)$$

Очевидно, что арифметическая прогрессия представляется возрастающей последовательностью, если $d > 0$, и убывающей, если $d < 0$.

Формула n – члена арифметической прогрессии

$$a_n = \mathbf{a_1} + \mathrm{d}\ \ \mathrm{n} - 1\ .$$

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Каждый член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего – в случае конечной прогрессии), равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов. Верно и обратное: если последовательность (a_n) такова, что для любого $n > 1$ выполняется равенство $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, то (a_n) - арифметическая прогрессия.

Теорема. «Числовая последовательность является арифметической тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего – в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов» [17, с.145].

Определение. «Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называют геометрической прогрессией [1,с. 56]. При этом число q называют знаменателем прогрессии».

$$b_1 = b,$$
$$b_n = b_{n-1}q, \ (n = 2,3,4,\ldots)$$

Формула n − го члена геометрической прогрессии.

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

«Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, первого (и последнего – в случае конечной последовательности), равен произведению предшествующего и последующего членов. Верно и обратное: если последовательность (b_n) такова, что для любого $n > 1$ выполняется равенство

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$$

то (b_n) - геометрическая прогрессия» [1,с. 56].

Теорема: «Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, кроме первого (и последнего – в случае конечной последовательности), равен произведению предшествующего и последующего членов» [19, с. 153].

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}\ .$$

Таким образом, в данном параграфе выяснено, как возникло понятие последовательности, то есть прогрессии; какие ученые внесли свой вклад в развитие практических и теоретических знаний по данной теме; рассмотрены теоретические основы геометрической и арифметической прогрессий.

§3 Анализ содержания теоретического материала по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в учебниках алгебры основной школы

Представим содержание теоретического материала по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в учебниках алгебры 9 класса (Прил. 1).

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры для 9 класса средней школы / под ред. Ш.А. Алимова [2, с.89].

Параграф 17 «Числовая последовательность». Здесь описательно вводится понятие числовая последовательность; понятия бесконечной числовой последовательности и членов этой последовательности. Вводятся два способа задания последовательности: с помощью формулы ее n-го члена и рекуррентный способ. Понятие рекуррентного способа (задание последовательности через формулу, которая позволяет вычислить n_1+1-**ый** член через предыдущие n членов) вводится описательно. Ранее в курсе алгебры учащиеся не встречались с понятием числовой последовательности.

Параграф 18 «Арифметическая прогрессия». В параграфе так определяется арифметическая прогрессия: «Числовая последовательность a_1, a_2, $a_3,\ldots,a_n,\ldots$ называется арифметической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство $a_{n+1}=a_n+d$, где d - некоторое число» (формально-логическое, через род и видовые отличия, родовое понятие – числовая последовательность a_1, a_2, $a_3,\ldots,a_n,\ldots$, видовое отличие задается индуктивно). Понятие разности арифметической прогрессии вводится символьной записью. Ранее в курсе алгебры учащиеся не встречались с понятием арифметической прогрессии. Содержание понятия арифметической прогрессии дополняют свойство о среднем арифметическом: $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, n>1$ и формула $n-$**го** члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+\ n-1\ d$. Свойство арифметической прогрессии о среднем арифметическом доказывается следующим методом: выражаются предыдущий и последующий члены через n-ый член, затем складываются полученные равенства, далее выражается n-ый член. Вывод формулы n-го члена арифметической прогрессии основывается на формулировке арифметической прогрессии и осуществляется методом неполной индукции.

Параграф 19 «Сумма n первых членов арифметической прогрессии». В нем вводится понятие суммы n первых членов арифметической прогрессии в символьной записи: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$. Для доказательства теоремы о сумме n первых членов арифметической прогрессии используются понятие суммы n первых членов арифметической прогрессии, определение арифметической прогрессии и равносильные преобразования. Для доказательства теоремы используется следующий прием: записывают эту сумму дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания их номеров, а во втором случае в порядке убывания одна под другой. Получают, что сумма каждой пары членов прогрессии, расположенные друг под другом, равна $(a_{\mathbf{1}} + a_n)$. В итоге, сложив почленно выражения и выполнив преобразования, получают нужную формулу. Теорема о сумме n первых членов арифметической прогрессии доказывается синтетическим методом, поэтому можно формировать у учащихся умения доказывать теоремы данным методом.

Параграф 20 «Геометрическая прогрессия». В параграфе определяется геометрическая прогрессия: «Числовая последовательность b_1, b_2, $b_3, ..., b_n, ...$ называется геометрической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство $b_{n+1}=b_n*q$, где $b_n \neq 0$, q - некоторое число, не равное нулю» (формально-логическое, через род и видовые отличия, родовое понятие – числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$, видовое отличие задается индуктивно). Понятие знаменателя геометрической прогрессии вводится символьной записью. Доказательство свойства геометрической прогрессии о среднем геометрическом осуществляется на основе определения геометрической прогрессии и с помощью алгебраических действий. Свойство геометрической прогрессии о среднем геометрическом доказывается следующим методом: выражаются предыдущий и последующий члены через n-ый член, затем умножаются полученные равенства, далее выражается n-ый член. Свойство геометрической прогрессии о среднем геометрическом и формула n члена геометрической прогрессии доказываются на основе определения геометрической прогрессии, то есть с помощью рекуррентной формулы $b_{n+1} = b_n q, b_n \neq 0, q \neq 0$.

Параграф 21 «Сумма n первых членов геометрической прогрессии». Здесь вводится понятие суммы n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ в символьной записи: $S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + ... + b_1 \cdot q^{n-1}$. На данном понятии основано доказательство теоремы о сумме n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$. Понятие суммы n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ вводится символьной записью. Содержание понятия дополняет теорема о сумме n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$: «Сумма n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ равна $S_n = \frac{b_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$». Для доказательства теоремы о сумме n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$используются понятие суммы n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$, определение геометрической прогрессии и равносильные преобразования. Для доказательства теоремы о сумме n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ используется следующий прием: записывают эту сумму дважды, в первом случае все члены записываются по формуле n-ого члена, а во втором случае всю сумму умножают на знаменатель. Затем из первого выражения вычитают второе и выражают сумму прогрессии через первый член и знаменатель прогрессии.

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры для 9 класса средней школы / под ред. Г.В. Дорофеева [7, с. 200].

Параграф 4.1. «Числовые последовательности». Параграф начинается со старинной задачи Леонардо Фибоначчи, которая помогает ученикам получить представление о числах Фибоначчи. Само определение числовой последовательности автором не дается. Подробно разбирается понятие рекуррентной формулы. («Рекуррентная формула выражает любой член последовательности, начиная с некоторого, через один или несколько предыдущих членов. При рекуррентном способе задания, члены последовательности вычисляются поочередно один за другим. $a_n = a_{n-\mathbf{1}} + a_{n-2}$»).

Параграф 4.2. «Арифметическая прогрессия». Понятие арифметической прогрессии вводится рекуррентно после рассмотрения задачи, в которой получается последовательность чисел. Далее вводится определение разности арифметической прогрессии. Рассматриваются понятия возрастающей и убывающей прогрессии. Решая задачу, составляется формула n члена прогрессии: $a_n = a_{\mathbf{1}} + d \;\; n - 1$. Автор доказывает, что точки, изображающие на координатной плоскости члены прогрессии, лежат на одной прямой.

Параграф 4.3. «Сумма первых n членов арифметической прогрессии». Параграф начинается с известной истории о знаменитом немецком математике К.Гауссе. Вспоминая эту историю, можно найти сумму первых ста членов арифметической прогрессии. Автор говорит о том, что метод Гаусса можно применить к любой арифметической прогрессии. Так Дорофеев показал, как через метод Гаусса можно вывести формулу суммы n первых членов прогрессии. (Записываем сумму дважды, в первой строке начинаем с $a_{\mathbf{1}}$ и каждый следующий член будет получаться прибавлением d. Во второй строке начинаем с a_n и каждый следующий член будет получаться вычитанием d. Каждая пара чисел, расположенных друг под другом, в сумме дает $a_1 + a_n$. Всего таких пар n. Сложив равенства получаем нужную формулу: $S_n = \frac{a_1 + a_n \ * n}{2}$).

Параграф 4.4. «Геометрическая прогрессия». Здесь определение дается после примера, в котором определяется последовательность чисел, каждый следующий член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же число. Далее вводится понятие знаменателя геометрической прогрессии. Рассматриваются возрастающая и убывающая геометрическая прогрессия. Решая задачу, составляется формула n члена прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$. Автор обращает внимание на то, что переменная n в формуле n члена прогрессии, содержится в показателе степени, поэтому зависимость b_n **от** nназывают экспоненциальной, с этим связано и происхождение названия линии (экспонента), по которой располагаются точки, изображающие геометрическую прогрессию.

Параграф 4.5. «Сумма первых n членов геометрической прогрессии». Параграф начинается с легенды об изобретателе шахмат, в которой общее число зерен, попросивших он, равно сумме членов геометрической прогрессии. С помощью легенды автор выводит формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Объясняется, что данной формулой можно пользоваться при условии, что знаменатель геометрической прогрессии не равен 1, но если q=1, то найти сумму членов прогрессии совсем просто, в этом случае все члены прогрессии равны между собой, поэтому : $S_n = nb_1$.

Параграф 4.6. «Простые и сложные проценты». Тема начинается с примеров, про штрафы, которые увеличиваются, если их не оплачивать и про хранение денег в банке, за которое начисляют проценты. Объясняется, что вклады в банках растут в геометрической прогрессии. Рассматриваются понятия простых и сложных процентов. («Если при вычислении процентов на каждом следующем шаге исходят из величины, полученной на предыдущем шаге, то говорят о начислении сложных процентов, если при вычислении процентов все время исходят из начального значения величины, то речь идет о простых процентах»).

Параграф 4.7. «Сумма квадратов первых n *натуральных чисел».* Данный параграф, написанный автором «для тех, кому интересно». Сначала приводится сумма n натуральных чисел, потом её формула: $S = \frac{n(n+1)}{2}$. В параграфе автор объясняет, как ввести эту формулу через «Метод Гаусса» или другим «искусственным» приемом.

Параграф 4.8. «Треугольник Паскаля». Данный параграф так же, как и предыдущий, «для тех, кому интересно». Говориться что такое треугольник Паскаля, что собой представляет, как строится.

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры для 9 класса для углубленного изучения / под ред. А.Г. Мордковича [18, с. 162].

Параграф 21 «Числовые последовательности», параграф 22 «Свойства числовых последовательностей». Параграф «Последовательности» развёрнуто изучается. Дано определение числовой последовательности, как функции натурального аргумента. Представлены способы задания последовательности: аналитический, словесный, рекуррентный. Отдельно посвящен параграф свойствам числовых последовательностей: ограниченность, монотонность. На все приводятся примеры. Затем вводится определение арифметической прогрессии, как числовой последовательности заданной рекуррентно соответствиями $\mathbf{a_1} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} + d$ $(n = 2,3,4\dots)$, где d – разность арифметической прогрессии.

Параграф 23 «Арифметическая прогрессия». Понятия арифметической и геометрической прогрессий в учебнике А.Г. Мордковича рассматриваются аналогично учебнику Ш.А. Алимова. Разбирается, когда арифметическая прогрессия представлена убывающей и возрастающей. Устанавливается обозначение арифметической прогрессии. Присутствует формула n-го члена арифметической и геометрической прогрессий. Говорится, что арифметическую прогрессию считать линейной функцией, заданной на множестве натуральных чисел, строится график этой функции на конкретной арифметической прогрессии. Выводится и доказывается формула суммы первых n членов арифметической прогрессии. Разбирается характеристическое свойство арифметической прогрессии, задается обратное ему утверждение.

Параграф 24 «Геометрическая прогрессия». Таким же образом изучается геометрическая прогрессия: представлено определение геометрической прогрессии, формула n-ого члена, формула суммы n первых членов последовательности. Рассказывается, что геометрическую прогрессию можно рассматривать как показательную функцию, заданную на множестве натуральных чисел, приводятся графики конкретных последовательностей. Вводится свойство геометрической прогрессии. Выделяется признак геометрической прогрессии (обратное утверждение), и выражается критерий геометрической прогрессии. суммы для бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Параграф 25 «Метод математической индукции». Параграф, познакомивший учеников с методом математической индукции. В нем о полной и не полной индукции и дедукции. В учебнике так же есть примеры комбинированных задач.

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики / под ред. Н. Я. Виленкина [5 , с. 233].

Параграф 1 «Числовые последовательности». Первый параграф Н.Я. Виленкин посвятил числовым последовательностям. Числовая последовательность задается как функция на множестве натуральных чисел, так же как у А.Г. Мордковича. Даются рекуррентный и аналитический способы задания последовательности. Рассматривается монотонность последовательности.

Параграф 2 «Метод математической индукции». Описательно вводится понятие индукции (Индукция - переход от частных утверждений к общим). Для разъяснения автор приводит пример: П. Ферма (знаменитый математик XVII в.), проверив, что числа $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5, 2^{2^2}+1=7, 2^{2^3}+1=257, 2^{2^4}+1=65537$ простые, сделал по индукции предположение, что для всех n=1,2,… числа вида 2^{2^n}+1 простые. Тем не менее предположение, как выяснилось, неверное, так как в XVIII в. Л. Эйлер нашел, что $2^{2^5}+1=4294967297=641*6700417$ – составное число. Далее говорится о самом методе математической индукции и приводится принцип математической индукции (утверждение P(n) истинно для любого натурального n, если: оно справедливо для n=1, и из справедливости утверждения для какого – либо произвольного натурального n= k следует его достоверность для n=k+1).

Параграф 3 «Арифметическая прогрессия». Индуктивно дано определение арифметической прогрессии, присутствует характеристическое свойство. Автор сообщает о том, что общий член этой последовательности есть значение линейной функции, вводит формулу n-ого члена арифметической прогрессии. Выводит и доказывает формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Параграф 4 «Геометрическая прогрессия». Изучается геометрическая прогрессия: индуктивно представлено определение и формула n-ого члена. Устанавливается и утверждается свойство. Вводится признак и формулируется критерий геометрической прогрессии. Выводится формула суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Параграф 5 «Предел последовательности». Изучаются бесконечно малые последовательности и их свойства, так же бесконечно большие последовательности. Задается определение предела последовательности, рассматриваются свойства предела последовательности, признак существования предела. Лишь в этом параграфе рассматривается бесконечно убывающая геометрическая последовательность и выводится формула суммы для бесконечно убывающей геометрической последовательности.

Параграф 6 «Прогрессии, проценты и банковские расчеты». Данный параграф Н. Я. Виленкина, отмеченный «*», для углубленного изучения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессия». Автор дает понятие банка, приводит исторические справки, связывает арифметическую и геометрическую прогрессию с простыми процентами, задаёт формулы начисления простых процентов $S_1 = S_0 \left(1 + \frac{p_0}{100}\right)$ и сложных процентов $S_n = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, n = 1,2,3,\ldots$

§4 Анализ типовых задач по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в учебниках алгебры основной школы

Пример 1. «Между числами 2 и 162 напишите три числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию» [14, с.158].

Решение: $b_1 = 2; b_5 = 162; b_5 = b_1 * q_4;$

$$2 * q_4 = 162;$$

$$q_4 = 81;$$

$$q = \pm 3$$

Если q=3 , то $b_2 = 2 * 3 = 6;\ b_3 = 6 * 3 = 18;\ b_4 = 18 * 3 = 54;$

Если q=-3, то $b_2 = -6;\ b_3 = 18;\ b_4 = -54;$

Ответ: 6,18,54 или -3, -6,-54.

Пример 2. «Сумма трех чисел, представляющих возрастающую арифметическую прогрессию равна 21. Если к ним, соответственно, добавить 2, 3, и 9 то образованные числа составят геометрическую прогрессию. Найти наибольшее из искомых членов прогрессии» [17, с.158].

Решение: Таким заданием можно проверить знание формул арифметической и геометрической прогрессии. Обозначим члены возрастающей прогрессии через $a-d, a, a+d.$ Тогда их сумма равна $3a = 21$, откуда $a = \frac{21}{3} = 7$. Такое быстрое решение получили за счет удачного выбора формул членов прогрессии. Таким образом средний член арифметической прогрессии известен.

Далее найдем неизвестные члены геометрической прогрессии.

Первый: $a-d+2 = 7-d+2 = 9-d$, второй: $a+3 = 7+3 = 10$, третий: $a+d+9 = 7+d+9 = 16+d$. По свойству геометрической прогрессии о среднем геометрическом значении получим что квадрат среднего ее члена равен произведению равноудаленных, т.е.

$$b_1 = \frac{b_2}{q}$$

$$b_3 = b_2 q \to b_1 \cdot b_3 = \frac{b_2}{q} \cdot b_2 q = (b_2)^2$$

Подставим члены геометрической прогрессии в формулу: $(9-d)(16+d) = 102 = 100$. Раскроем скобки и сведем к квадратному уравнению относительно разницы арифметической прогрессии: $-d^2 - 7d + 9 \cdot 16 - 100 = 0 \to$ $d^2 + 7d - 44 = 0$

Находим дискриминант: $D = 7^2 + 4 \cdot 44 = 225 = 15^2$

и шаг арифметической прогрессии: $d = \frac{-7+15}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Отсюда находим нужный член арифметической прогрессии: $a + d = 7 + 4 = 11$.

Ответ**:** 11.

Пример 3. « Три числа дают в сумме 15 и образуют арифметическую прогрессию. Если к первому и второму из них добавить по единице, а к третьему числу прибавить 4, то полученные числа будут составлять геометрическую прогрессию. Найти старший член заданной прогрессии» [17,с.158].

Решение: Задача аналогична предыдущей. Вводим те же обозначения что и в предыдущем примере, тогда средний член арифметической прогрессии равен $\frac{15}{3} = 5$, а соседние – $5 - d$ и $5 + d$. По условию запишем члены геометрической прогрессии $(5 - d + 1) = 6 - d$; $5 + 1 = 6$; $5 + d + 4 = 9 + d$ и составим из них уравнение $(6 - d)(9 + d) = 6 * 6 = 36$.

Раскрываем скобки и сводим к квадратному уравнению:

$$-d^2 - 3d + 9 \cdot 6 - 36 = 0 \rightarrow$$
$$d^2 + 3d - 18 = 0$$

Вычисляем дискриминант:

$$D = 3^2 + 4 \cdot 18 = 81$$

и разницу арифметической прогрессии $d = \frac{-3+9}{2} = 3$. Больший из членов прогрессии равен 8. $a + d = 5 + 3 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 4. [5, с.284]. Студент хочет положить деньги в банк, который за вклад платит 7% в год. Какой должен быть вклад, чтобы через 10 лет на счету лежало 22000 рублей.

Решение: По формуле $S_n = S_0(1 + \frac{p}{100})^n$ посчитаем S_0: $S_0 = \frac{S_n}{(1+\frac{p}{100})^n}$.

Подставим значения: S_n= 22000р., $p = 7\%$, $n = 10$, получается $S_n = \frac{22000}{1{,}07^{10}} = 11183$р.

Ответ: 11183р.

Пример 5. [7, с.220]. Найдем сумму всех двузначных чисел, кратных трём.

Решение: Последовательность 12;15;18;…;99 является арифметической прогрессией, разность которой равна 3. Нам известны первый и последний члены этой прогрессии: $a_1 = 12, a_n$=99. Для того, чтобы использовать формулу суммы, нужно найти число членов данной прогрессии. Подставим в формулу n-ого члена арифметической прогрессии данные: $a_1 = 12, a_n$=99 и $d = 3$, получается уравнение: $99 = 12 + 3(n - 1)$. Решив уравнение, найдем, что n=30. Теперь можно найти требуемую сумму: $S_{30} = \frac{12+99 \ *30}{2} = 1665$.

Ответ: 1665.

Пример 6. « Какие числа, составляют арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Причем, если к ним прибавить **1, 4 и 19** , то получатся три числа, которые будут составлять геометрическую прогрессию» [29, с.388].

Решение: Из условия имеем: $a_1 + a_2 + a_3 = 15$. Если $a_2 — a_1 = a_3 — a_2$, то $2a_2 = a_1 + a_3$ и из условия имеем $2a_2 + a_2 = 15$. Отсюда получаем $a_2 = 5$.

Тогда $a_1 = 5 - d$, $a_2 = 5$, $a_3 = 5 + d$ и по условию: $u_1 = a_1 + 1 = 6 - d$; $u_2 = a_2 + 4 = 9$; $u_3 = a_3 + 19 = 24 + d$. Так как $a_2^2 = a_1 a_3$, то $9^2 = (6 - d)(24 + d)$, отсюда находим $d = 3$, $a_1 = 2$ или $d = - 21$, $a_1 = 26$.

Ответ: искомые числа: 2; 5; 8 или 26; 5; —16.

Пример 7. [10, с. 141]. Найти первый член геометрической п рогрессии b и последний l, если $q = 3$, $n = 5$ и $S = 242$.

Решение: Сначала находим l по формуле $l = bq^{\,n-1} = a * 3^4$ и затем эту величину и данные числа подставим в формулу для суммы: $242 = \frac{b*3^4*3-b}{3-1} = \frac{b(3^5-1)}{2} = 121b$, откуда: $b = 242 : 121 = 2$. Теперь находим: $l = 2 * 3^4 = 162$. Поверка: 2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242.

Ответ: 2, 162.

Пример 8. «Дана арифметическая прогрессия, у которой второй член равен 14, а третий 16. Составьте г. п., знаменатель которой будет равен разности а.п., а сумма первых трех членов одна и та же в обеих прогрессиях» [29, с.387].

Решение: Из условия найдем: $d = 16 - 14 = 2$; $a_1 = 14 - d = 12$; $a_1 + a_2 + a_3 = 12 + 14 + 16 = 42$.

Следует, что в искомой геометрической прогрессии:

1) $q = 2$ и 2) $u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 42$, отсюда $u_1 = 6$.

Ответ: ...; 6; 12; 24; ...

Пример 9. [29, с.387]. В геометрической прогрессии $b_{10} * b_{14} * b_{21} = -0{,}125$. Вычислить b_{15}.

Решение: Приведем методику, которая упростит решение подобных примеров. Для начала найдем сумму индексов членов прогрессии: 10+14+21=45. Сумма 45 нацело делится на 15 и получаем 3. Заданное произведение членов прогрессии можно представить в виде $b_{10}*b_{14}*b_{21}=(b_{15})^3$ Это следует и со свойств геометрической прогрессии. Отсюда вычисляем искомый член прогрессии: $b_{15}=\sqrt[3]{b_{10}\cdot b_{14}\cdot b_{21}}=\sqrt[3]{-0{,}125}=0{,}5$

Итак, 15 член прогрессии равен: -0,5.

Ответ: -0,5

Пример 10. [10, с. 141]. Определить седьмой член возрастающей арифметической прогрессии если $a_3+a_9=24$, $a_3*a_9=108$.

Решение: Задача не сложная, поскольку имеем два условия и две неизвестные. Так что решение найти можно. Выразим из первого уравнения a_9 и подставим во второе: $a_9=24-a_3$, $a_3(24-a_3)=108$, $(a_3)^2-24a_3+108=0$ Последнее уравнение решаем через дискриминант:

$$D=(-24)^2-4\cdot 108=144$$

$$a_3=\frac{24\pm 12}{2}$$

$$a_3=18;\ \ a_3=6$$

С первого условия $a_3+a_9=24$ видим, что при $a_3=18$ прогрессия не будет возрастающей. Итак, остается $a_3=6$. Отсюда $a_9=24-a_3=24-6=18$. С другой стороны $a_9=a_3+6d$ имеем условие для нахождения разницы прогрессии $6+6d=18;\ 6d=12;\ d=12/6=2$. По формуле находим седьмой член арифметической прогрессии $a_7=a_3+4d=6+4*2=14$.

Ответ: 14.

Пример 11. [9, с. 18]. Найдите сумму геометрической прогрессии $S_n=1+3+9+\cdots+3^n$.

Решение: Зная S_n, можно получить следующую сумму S_{n+1} двумя способами: 1. Добавить 3^n;

2. умножить все слагаемые на 3, затем прибавить 1.

Получим уравнение: $S_n + 3^n = 3 * S_n + 1$, Отсюда $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

Ответ: $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

Пример 12. «На карьере добыли 36 камней. Их веса составляют арифметическую прогрессию: 490 кг, 495 кг, 500 кг, . . . , 665 кг. Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках» [9, с. 39]?

Решение: Для начала нам нужно найти сумму членов прогрессии :$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$. Отсюда известно: n=36, $a_1 = 490, a_n$ =665. Находим $S_n =$ 36*$\frac{490+665}{2}$= 20790 кг.- масса всех камней. Масса семи трёхтонных грузовиков равна 7*3т.= 21000 кг. 20790 < 21000.

Ответ: Камни можно увезти на семи грузовиках.

«Арифметическая прогрессия – это есть числовая последовательность, в которой каждое следующее число, начиная со второго, следует из предыдущего увеличением его на определённое число. Всякая арифметическая прогрессия полностью устанавливается заданием любых двух её величин». «Геометрическая прогрессия - последовательность чисел, в которой каждое следующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число» [35, с. 104].

Особые трудности у учеников вызывают задачи, в которых речь идет сразу о двух прогрессиях - арифметической и геометрической [11, с.10].

Нет четкого определения понятия числовой последовательности. Числовая последовательность определяется способом задания. Выделяют два способа задания последовательности: с помощью формулы n-го члена и рекуррентный способ. Учащиеся смогут самостоятельно сформулировать определения прогрессий, зная, что они являются числовыми последовательностями, и определив предварительно зависимость между членами каждой из них. Кроме определений также являются аналогичными свойства арифметической и геометрической прогрессий и их доказательства, формулы n-го члена прогрессий и способы их выведения, теоремы о сумме n первых членов прогрессий и их доказательства. Даже соответствующие задачи в тексте параграфов (ключевые) имеют аналогичные решения [18,с.108].

Для арифметической прогрессии выполняется *свойство о среднем арифметическом*. Для геометрической прогрессии выполняется аналогичное, но о среднем геометрическом. Они доказываются следующим методом: выражаются предыдущий и последующий члены через n-ый член, затем складываются (для арифметической прогрессии) / умножаются (для геометрической прогрессии) полученные равенства, далее выражается n-ый член. Для арифметической и геометрической прогрессий также аналогично выводятся формулы n-ого члена методом неполной индукции, в которых n-ый член находится через первый член и разность для арифметической / знаменатель для геометрической прогрессии. Эти формулы являются ещё одним способом задания прогрессии.

Для доказательства теоремы о сумме n первых членов арифметической прогрессии используется следующий прием: записывают эту сумму дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания их номеров, а во втором случае в порядке убывания одна под другой. Получают, что сумма каждой пары членов прогрессии, расположенные друг под другом, равна (a_1+ a_n). В итоге, сложив почленно выражения и выполнив преобразования, получают нужную формулу. Для геометрической прогрессии также записывается сумма в двух случаях: в первом все члены записываются по формуле n-ого члена, во втором всю сумму умножают на знаменатель. Затем из первого выражения вычитают второе и выражают сумму прогрессии через первый член и знаменатель прогрессии.

«Решение задач - практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано. Научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь», говорил Д. Пойа [34].

§5 Задачи на прогрессии в олимпиадных заданиях для обучающихся общеобразовательной школы

Задачи на прогрессии встречаются в олимпиадных заданиях обучающихся общеобразовательной школы. Рассмотрим типы задач некоторых из них.

Историческая задача.

Задача 1. [22, с. 160].

Задача-легенда «Индийский Принц Сеам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, для того, чтобы вознаградить его за остроумную выдумку. Сета потребовал за первую клетку шахматной доски 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Обрадовавшийся царь посмеялся над Сетой и приказал выдать ему такую «скромную» награду. Нужно ли царю смеяться?»

Решение:

Дано: …,1, 2, 4, 8, 16,…

b_1=1,q=2, n = 64;
S_{64}– ?

$$S^{64} = \frac{1\ 2^{64}-1}{64-1} = \frac{1{,}8446744*10^{19}}{63}$$

Сумма равна 18 446 744 073 709 551 615 Царю смеяться не нужно.

Практическая задача.

Задача 2. «Если бактерия попадет в живой организм, то к концу 20–й минуты она делится на две бактерии, далее каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток» [1, с. 51].

Решение: В сутках 1440 минут. Каждые 20 минут появляется новое поколение, за 24 часа - 72 поколения. Высчитываем по формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии, в которой известно: $\boldsymbol{b_1} = \mathbf{1}, q = 2, n = 72$, получаем, что $S_{72}=2^{72}-1$= 4 722 366 482 869 645 213 696 - 1= 4 722

366 482 869 645 213 695.

Геометрические задачи.

Задача 3. [25]. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то их высоты тоже образуют геометрическую прогрессию.

Решение: Пусть стороны треугольника равны b, bq, bq^2. Площадь треугольника – S. Значит, высоты треугольника соответственно равны: $\frac{2S}{b}$, $\frac{2S}{bq}, \frac{2S}{db^2}$. То есть тоже образуют геометрическую прогрессию. Что и требовалось доказать.

Задача 4. [26, с.81]. В треугольнике с углом 120° стороны образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Найдите стороны треугольника.

Решение: В треугольнике только один тупой угол, он наибольший. Так как против наибольшего угла лежит наибольшая сторона. Пусть одна из сторон лежащая на сторонах угла в 120^0 равна x, тогда вторая равна $x+1$, а сторона треугольника, лежащая против угла в 120^0 равна $x+1$ (так как стороны образуют арифметическую прогрессию с разностью 1).

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * cosA$;

$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2 * x \;\; x+1 \;\; * cos120°;$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + x;$$

$$2x^2 - x - 3 = 0;$$

$$D = \overline{1+24} = \overline{25};$$

$$x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5;$$

$$x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 < 0, \text{не подходит};$$

$$x = 1{,}5;\; x+1 = 2{,}5;\; x+2 = 3{,}5.$$

Ответ: 1,5; 2,5; 3,5.

Численные задачи.

Задача 5. [21] Взяли 2015 последовательных натуральных чисел, делящихся на 2015. Может ли их сумма быть 2015-й степенью некоторого натурального числа?

Решение: Обозначим первое из указанных чисел а. Тогда второе число, а+2015, третье число – а+2015*2 и т.д. Последнее из чисел – а+ 2015*2014. Эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 2015. Их сумма равна: S= $\frac{2a+2015*2014}{2}*2015 = a+1007*2015 \ *2015$. Возьмем, например, а=$2015^{2014}-1007*2015$. Тогда S=$2015^{2015}$.

Ответ: может.

Задача 6. «Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10» [1, с. 65].

Решение: Докажем, что для всех натуральных n число $10^{81n}-1$ делится на 729. Действительно, $10^{81n}-1=(10^{81})^n-1$ делится на $10^{81}-1$, а $10^{81}-1=(10^9-1)(10^{72}+10^{63}+...+1)=(10-1)(10^8+10^7+...+1)(10^{72}+10^{63}+...+1)$. Второй сомножитель и третий сомножитель – числа, в записи каждого из которых содержится по 9 единиц, поэтому они делятся на 9. Следовательно, $10^{81}-1$ делится на $9^3=729$. Что и требовалось доказать.

Задача 7. [19, с.12]. Первый член бесконечной арифметической прогрессии из натуральных чисел равен 1. Докажите, что среди её членов можно найти 2015 последовательных членов геометрической прогрессии.

Решение: Пусть разность прогрессии равна а−1 (т. е. второй член прогрессии равен а). Покажем, что тогда среди её членов можно найти числа 1, а, a^2 , a^3, …, $\mathbf{a}^{\mathbf{2014}}$ из чего очевидно следует утверждение задачи. Действительно, поскольку a^k = 1 + (а – 1)(1 + а +a^2 + . . . + $a^{\boldsymbol{k-1}}$), число a^k встретится в исходной арифметической прогрессии на месте с номером 2 + а + . . . +$a^{\boldsymbol{k-1}}$. Что и требовалось доказать.

Задача 8. [25]. Дано, что $a_{\mathbf{11}}$ = -89, а сумма первых двадцати членов равна -1810. Найдите число членов прогрессии, содержащихся на интервале (0;16).

Решение: $a_{11}= -89$; $a_n \in (0;\ 16)$, $S_{20}=1810$.

$$\begin{cases} a_{11} - a_1 + 10d = -89 \\ S_{20} = \dfrac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = -1810 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 10d = -89 \\ 2a_1 + 19d = -181 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -119 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$a_n = a_1+(n-1)d$$

$$0 < -119+3(n-1) < 16$$

$$40\frac{1}{3} < n<46, \text{ т.к. } n\in N$$

Ответ: 5 чисел 41; 42; 43; 44; 45 .

Задача 9. [21]. Найдите наибольший член последовательности $c_n = 17n - n^3$.

Решение: $c_1 = 17 * 1 - 1 = 16$; $c_2 = 17 * 2 - 8 = 26$; $c_3 = 17 * 3 - 27 = 24$; $c_4 = 17 * 4 - 64 = 4$; $c_5 = 17 * 5 - 125 = -40$.

Ответ: $c_2 = 26$

Задачи на прогрессии предлагают ученикам на олимпиадах, на вступительных экзаменах, так же они встречаются на ОГЭ и ЕГЭ, ибо их решение требует не только знание и применение формул, а и умение решать уравнения, навыки в преобразовании выражений и так далее.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

1. В данной главе рассмотрено понятие задачи повышенной трудности по математике. ЗПТ по математике – это те задачи, которые не может сразу решить любой ученик. Задачи, которые требуют или логики, или особых знаний, а так же больше времени для решения. Обычно в таких задачах нет четкого плана решения или дана необычная формулировка условия.

2. Рассмотрена история развития арифметической и геометрической прогрессий. Еще в IV веке н.э. римский автор Боэций установил новый термин «прогрессия», означавший от латинского progressio – «движение вперед».

3. Проанализировано содержание теоретического материала по данной теме в учебниках алгебры 9 класса, таких авторов, как: Ш.А. Алимов, Г.В. Дорофеев, А.Г. Мордкович, Н.Я. Виленкин.

4. Проведен анализ типовых задач в учебниках алгебры основной школы. Особые трудности у учеников вызывают задачи, в которых речь идет сразу о двух прогрессиях - арифметической и геометрической. Чтобы найти требуемое в задаче, можно выписать соответствующую формулу, определить, что в ней известно, а что нет, затем выразить из этой формулы то, что нужно найти, подставив известные значения.

5. Рассматриваются задачи на прогрессии в олимпиадных заданиях для обучающихся общеобразовательной школы. Задачи на прогрессии предлагают ученикам на олимпиадах, на вступительных экзаменах, так же они встречаются в заданиях ОГЭ и ЕГЭ, ибо их решение требует не только знание определений и применение формул.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ТЕМЕ «АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§6 Цели обучения теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе алгебры основной школы

В федеральном государственном образовательном стандарте общего образования [27] отмечается, что предметные результаты должны отражать:

- развитие умений работы с математическим текстом (анализ, извлечение нужной информации), грамотное выражение своих мыслей с применением математической терминологии и символики, логические обоснование, доказательство математических утверждений;

- овладение умением использовать функционально-графические представления для решения различных задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

- владение методами алгоритмов и доказательств решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Рассмотрим содержание примерной образовательной программы основного общего образования по математике в 7-9 классах [23, с. 96].

Выпускник научится в 9 классе оперировать на *базовом уровне* понятиями:

- последовательность;
- арифметическая прогрессия;
- геометрическая прогрессия.

Выпускник научится в 9 классе оперировать на *углубленном уровне* понятиями:

- ограниченная последовательность;
- монотонно возрастающая (убывающая) последовательность;
- предел последовательности;

- характеристическое свойство арифметической (геометрической) прогрессии;

Выпускник 9 класса имеет возможность научиться:

- «применять формулы, связанные с арифметической и геометрической прогрессией, и аппарат, сформированный при изучении других разделов курса, к решению задач, в том числе с контекстом из реальной жизни;

- решать комбинированные задачи с применением формул n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессии, применяя при этом аппарат уравнений и неравенств;

- понимать арифметическую и геометрическую прогрессию как функции натурального аргумента» [23, с. 96].

Цели обучения теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия»:

- *образовательная:* усовершенствовать навыки применения теоретических знаний при решении задач;

- *развивающие:* развить умение применять изученные формулы при решении задач; формировать интерес к изучению математики;

- *воспитательные:* формировать ответственность, внимательность, умение анализировать; воспитать настойчивость и дисциплинированность.

К *задачам* обучения теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» отнесем:

- развитие самостоятельности учеников, их логическое мышление и устные вычислительные навыки;

- формирование интеллектуальных умений и аналитических и логических способностей;

- формирование умений, самоконтроля, взаимоконтроля;

- воспитание стремления учащихся к совершенствованию знаний.

§7 Система задач повышенной трудности на прогрессии для обучающихся основной школы

Представим 3 уровневую систему задач на прогрессии для обучающихся основной школы базового уровня (Прил. 2).

Все задачи на прогрессии требуют знаний следующих формул:

Арифметическая прогрессия:

$a_n = a_{\mathbf{1}} + d\ \ n - 1\ ;\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n; S_n = \frac{2a_1 + d\ \ n - \mathbf{1}}{2} * n;$

$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k = 2, 3, \ldots, n - 1; a_k + a_m = a_p + a_q,$ где $k + m = p + q.$

Откуда $a_{\mathbf{1}}$ –первый член, $d -$ разность, $n -$ число членов, $a_n -$ n-й член, $S_n -$ сумма n первых членов.

Геометрическая прогрессия:

$b_n = b_{\mathbf{1}} q^{n-\mathbf{1}}; S_n = \frac{b_1\ \ \mathbf{1} - q^n}{\mathbf{1} - q},\ \ q \neq 1\ ; S_n = nb_{\mathbf{1}},\ \ q = 1\ ;$

$b_k^2 = b_{k-\mathbf{1}} b_{k+\mathbf{1}}, k = 2, 3, \ldots, n - 1;$

$b_k b_m = b_p b_q,$ где $\ k + m = p + q.$

Откуда $b_{\mathbf{1}} -$ первый член, $q -$ знаменатель $\ q \neq 0\ , n -$ **число членов**, $b_n -$ n-й член ($b_n \neq 0$), S_n –сумма n первых членов.

В наше время информационные технологии позволяют посчитать n-ый член прогрессии или сумму n первых членов прогрессии с помощью компьютерной программы Microsoft Excel (Прил. 3).

Рассмотрим систему задач из сборника М.И. Сканави [24 ,с.196].

Блок А

Задача 1. «В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафные очки: первый промах – одно штрафное очко, каждый последующий – на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал стрелок в цель, если получил 7 штрафных очков» [24 ,с.196]?

Решение: Пусть x – число промахов из данной серии выстрелов. Используем формулу суммы первых n членов $S_n = \frac{a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, получаем уравнение: $\frac{2\cdot 1+0,5(x-1)}{2}\cdot x = 7$ или $x^2+3x-28=0$, отсюда: $x_1=4, x_2=-7$ (не подходит). Следовательно, стрелок попал в цель 21 раз.

Ответ: 21.

Задача 2. Найдите четыре числа, которые образуют геометрическую прогрессию, с суммой крайних членов -49, а суммой средних членов 14.

Решение: Используя условие и формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, получаем систему:

$$\begin{cases} b_1+b_4=-49, \\ b_2 b_3 = 14, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b_1(1+q^3)=-49, \\ b_1 q(1+q)=14. \end{cases}$$

Следует, что: $\frac{1-q+q^2}{q} = -\frac{49}{14}$, или $2q^2+5q+2=0$, получим

$q_1=-2$, $q_2=-0{,}5$. Искомыми числами являются: 7; -14; 28; -56.

Ответ: 7; -14; 28; -56.

Задача 3. «Арифметическая прогрессия обладает следующим свойством: при любом n сумма её первых n членов равна $5n^2$. Найдите разность этой прогрессии и три первых ее члена» [24 ,с.197].

Решение: Используем формулу $S_n = \frac{a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ и условие задачи, получаем равенство: $\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n = 5n^2$ или $2a_1-d=(10-d)\cdot n$. В этом равенстве может изменяться только n, поэтому $d=10$. При $d=10$ находим $a_1=5$. Получаем три первых члена этой прогрессии: 5; 15; 25.

Ответ: 5; 15; 25; $d=10$.

Задача 4. «Найдите натуральные числа, которые образуют арифметическую прогрессию, произведение трех и четырех первых ее членов равны соответственное 6 и 24» [24 ,с.198].

Решение: В силу условия имеем

$$\begin{cases} a_1(a_1+d)(a_1+2d)=6, \\ a_1(a_1+d)(a_1+2d)(a_1+3d)=24 \end{cases} \Rightarrow a_1+3d=4, a_1=4-3d.$$

Таким образом, приходим к кубическому уравнению: $3d^3-22d^2+48d-29=0$ или $3d^3-3d^2-19d^2+19d+29d-29=0$,откуда $(d-1)(3d^2-19d+29)=0$. Это уравнение имеет единственный корень $d=1$.

Ответ: 1; 2; 3; 4.

Задача 5. «Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Отнимем от первых двух членов этой прогрессии по 1, а к третьему члену прибавим 1, полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии» [24 ,с.198].

Решение: a_1- первый член арифметической прогрессии, $d-$ разность. Из условия $\frac{(2a_1+2d)\cdot 3}{2}=15$, отсюда $a_1+d=5$. Числа a_1-1, a_1+d-1 составляют геометрическую прогрессию, значит $b_k^2=b_{k-1}b_{k+1}, k=2,3,\dots,n-1$ получаем:

$$(a_1+d-1)^2=(a_1-1)(a_1+2d+1),$$
$$\begin{cases}(a_1+d-1)^2=(a_1-1)(a_1+2d+1),\\ a_1+d=5.\end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим два решения $a_1=3, d=2$ и $a_1=9, d=-4$. Так как значение d должно быть больше нуля, то второе решение не подходит. Итак, $S_{10}=\frac{2\cdot 3+2\cdot 9}{2}\cdot 10=120$.

Ответ: 120

Блок Б.

Задача 6. «Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов - 189. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии» [24 ,с.198].

Решение: По условию, имеем

$$\begin{cases}b_1(1+q+q^2)=21,\\ b_1^2(1+q^2+q^4)=189.\end{cases}$$

Возводим в квадрат обе части первого уравнения: $b_1^2(1+q^2+q^4)+2b_1^2q(1+q+q^2)=441$.

Вычитем из этого уравнения второе уравнение системы, получаем: $2b_1^2q\ 1+q+q^2\ =252.$ Отсюда $b_1q=6.$ Из системы

$$b_1\ 1+q^2\ =15,$$
$$b_1q=6.$$

находим два решения $q=2, b_1=3$ и $q=0{,}5, b_1=12.$ Проверка показывает, что оба решения подходят.

Ответ: $q=2, b_1=3$ и $q=0{,}5, b_1=12$

Задача 7. «Известно, что в некоторую арифметическую прогрессии входят члены a_{2n} и 2_m такие, что $\frac{a_{2n}}{a_{2m}}=-1.$ Существует ли член этой прогрессии, равный нулю? Если да, то какой номер у этого члена прогрессии» [24 ,с.198]?

Решение: $\frac{a_{2n}}{a_{2m}}=-1 \Rightarrow a_{2n}+a_{2m}=0$.Отсюда следует , что

$$a_1+\ 2n-1\ d\ +\ a_1+\ 2m-1\ d\ =0 \text{ или } a_1+\ n+m-1\ d=0.$$

Значит, что $n+m$ - й член прогрессии равен 0.

Ответ: да, что $n+m$ -й член.

Задача 8. «Решить уравнение $1+2x+4x^2+\dots+\ 2x\ ^n+\ldots=3{,}4-1{,}2x,$ если известно, что $x\ <0{,}5$» [24 ,с.198].

Решение: Часть уравнения до знака «равно» - сумма бесконечной геометрической прогрессии, $b_1=1$ и $q\ =\ 2x\ <1$, потому что $x\ <0{,}5$. По формуле: $S=\frac{b_1}{1-q}$ получаем:

$$1+2x+4x^2+\ldots=\frac{1}{1-2x} \text{ или } \frac{1}{1-2x}=3{,}4-1{,}2x,$$

$$3{,}4-1{,}2x\quad 1-2x\ =1,$$

$$2{,}4x^2-8x+2{,}4=0 \text{ или } 3x^2-10x+3=0,$$

Первый корень: $x_1=3,$ **второй**: $x_2=\frac{1}{3}$. Условию удовлетворяет только второй корень.

Ответ: $x=\frac{1}{3}$.

Задача 9. «Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 21. Отнимем от первых двух членов этой прогрессии по 1, а к третьему члену прибавим 2, полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму восьми первых членов геометрической прогрессии» [24 ,с.198].

Решение: a_1- первый член а.п., $d-$ разность а.п.. По формуле: $S_3=\frac{2a_1+2d}{2}\cdot 3=21$ или $a_1+d=7.$ Из условия $a_1-1,\ a_1+d-1,\ a_1+d+2-$ три последовательных члена геометрической прогрессии. Используя формулу $b_k^2=b_{k-1}b_{k+1}, k=2,3,\dots,n-1$ получаем: $(a_1+d-1)^2=(a_1-1)(a_1+2d+2)$. Подставим $a_1=7-d$ и раскроем скобки. Приходим к квадратному уравнению $d^2+3d-18=0,$ и, значит $d_1=3, d_2=-6.$ Условию удовлетворяет $d_1=3$; тогда $a_1=4.$ Находим $b_1=a_1-1=3, b_2=a_1+d-1=6$ и, следовательно, $q=1$. Наконец получим:

$$S_8=\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}=\frac{3(2^8-1)}{2-1}=765.$$

Ответ: 765.

Задача 10. «Найдите четыре числа, в которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел - 21, сумма средних – 18» [24 ,с.199].

Решение: a_1,a_2,a_3,a_4- искомые числа. Используя условия и формулы:

$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}, k=2,3,\dots,n-1 \text{ и } b_k^2=b_{k-1}b_{k+1}, k=2,3,\dots,n-1.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a_2^2=a_1a_3, \\ 2a_3=a_2+a_4 \\ a_1+a_4=21,' \\ a_2+a_3=18. \end{cases}$$

Исключим из этих уравнений a_1,a_2,a_4, получаем $4a_3^2-75a_3+324=0,$ отсюда находим $a_3=12$ или $a_3=6{,}75$.

Ответ: 3; 6; 12; 18 или 18,75; 11,25; 2,25.

Система задач, составленная Сканави М.И., рассчитана для учеников «сильного» уровня по математике. В неё входят задачи повышенной трудности двух блоков. Можно использовать как для решения в классе с учителем, так и среди тяжелых задач на контрольной работе.

§8 Методические рекомендации по обучению решению задач на прогрессии в курсе алгебры основной школы

Основная цель изучения темы - дать учащимся представление о прогрессиях как числовых последовательностях особого вида.

Определение. «Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со 2-го, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называемым разностью арифметической прогрессии».

Пример. Последовательность 3, 6, 9, 12, … является арифметической прогрессией с разностью 3.

Из определения следует, что разность между n-ым и n + 1-ым членами арифметической прогрессии всегда есть одинаковое число, обозначается d. Последовательность $\{a_n\}$ предоставляется арифметической прогрессией, если для ее членов верна рекуррентная формула: $a_n + 1 = a_n + \mathrm{d}$. Для задания арифметической прогрессии, достаточно указать ее первый член a_1 и разность d.

Определение. «Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со 2-го, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, называемым знаменателем геометрической прогрессии».

Пример. Последовательность 2, 4, 8, 16,… является геометрической прогрессией со знаменателем 2.

Из определения следует, что частное от деления n + 1-го члена на n-ый геометрической прогрессии всегда есть одинаковое число, обозначается q. Последовательность $\{b_n\}$ предоставляется геометрической прогрессией, если для ее членов верна рекуррентная формула: b_n + 1 = b_n·q. Для того, чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член b_1 и разность q. Если b1 ≠ 0 и q ≠ 0, то все члены геометрической прогрессии не равны нулю [3].

Средствами обучения теме являются формулы, классификация последовательностей и классификация текстовых задач (Прил. 4).

Типология задач числовых последовательностей и прогрессий по учебнику Ш.А. Алимова [2].

- нахождение числовой последовательности и членов числовой последовательности;
- вычисление n-ого члена последовательности, заданного рекуррентной формулой;
- нахождение члена прогрессии и разности;
- доказательство последовательности, заданной n-ым членом арифметической прогрессии;
- нахождение суммы n первых членов прогрессии;
- нахождение суммы при заданной последовательности рекуррентной формулой и условием;
- доказательство равенства арифметической прогрессии;
- отыскание n первых членов геометрической прогрессии;
- доказательство того, что последовательность является геометрической прогрессией;
- вычисление знаменателя геометрической прогрессии;
- запись формулы n – го члена геометрической прогрессии;
- вычисление n-го члена прогрессии;
- нахождение номера члена заданной последовательности;

- решение логических задач;
- нахождение суммы n первых членов геометрической прогрессии;
- нахождение по условию число n членов геометрической прогрессии;
- нахождение суммы чисел, если её слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии;
- нахождение знаменателя геометрической прогрессии по условию.

«Ученики начинают знакомиться с прогрессиями в 9 классе в теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия». Для общеобразовательных классов на эту тему отводится: изучение арифметической прогрессии – 6 часов, геометрической прогрессии – 7 часов. На усмотрение учителя часы могут варьироваться. Хоть и тема прогрессий несколько изолированная от других разделов школьного курса алгебры, но является существенной» [12, с.311].

На первом уроке темы учитель объясняет смысл понятий «последовательность», «n-й член последовательности», вырабатывает у учеников умение использовать индексные обозначения.

На примере можно ввести понятие последовательности. На этом уроке уместно показать различные способы задания последовательности по заданиям из учебника Ю.Н. Макарычева [14].

№562. Пусть a_n – последовательность квадратов натуральных чисел. Выпишите первые десять ее членов. Найдите a_{20}, a_{40}, a_n.

Решение: 1) выпишем первые 10 членов последовательности: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100; 2) заметим закономерность $a_1 = 1^2 = 1, a_2 = 2^2 = 4, a_{20} = 20^2 = 400$, $a_{40} = 40^2 = 1600$; 3) отсюда $a_n = n^2$.

№ 570 (а). Выпишите первые четыре члена последовательности a_n, если $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 5$.

Решение: $a_2 = a_1 + 5 = 5 + 5 = 10$; $a_3 = a_2 + 5 = 10 + 5 = 15$; $a_4 = a_3 + 5 = 15 + 5 = 20$.

№ 570 (б). Выпишите первые четыре члена последовательности a_n, если $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n * 5$.

Решение: $a_2 = a_1 * 5 = 5 * 5 = 25$; $a_3 = a_2 * 5 = 25 * 5 = 125$; $a_4 = a_3 * 5 = 125 * 5 = 625$.

При введении понятий арифметической и геометрической прогрессии, ученик получает знания, которые в дальнейшем будет использовать и при выводе формул n- го члена и суммы n первых членов прогрессий.

Учителю нужно обратить внимание учеников при помощи формулировки определения, что прогрессии являются простейшим примером последовательностей, заданных рекуррентным способом.

Арифметическая прогрессия задается соотношением $a_{n+1} = a_n + d$, являющимся рекуррентным. Прогрессия полностью определена при заданных ее первом члене и разности. Арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = a$ и $a_{n+1} = a_n + d$. Если последовательность задана данным способом, то для полного ее задания нужно указать начальные члены; в частности для арифметической прогрессии нужно задать первый ее член.

Натуральные числа образуют а.п. с разностью $d = 1$ и первым членом $a_1 = 1$: $1, 2, 3, 4, \dots$. На это стоит обратить внимание обучающихся. Геометрическая прогрессия так же последовательность с рекуррентным соотношением: $a_{n+1} = a_n * q$. Это значит, что она задается следующими условиями: $a_1 = a$ и $a_{n+1} = a_n * q$.

Учеников с прогрессиями можно начать знакомить так: учитель на доске записывает несколько последовательностей, среди них должны присутствовать арифметическая прогрессия. Ученики, смотря на примеры, смогут выявить характеристические свойства последовательностей некоторого вида. Учитель называет, что из этих примеров арифметическая прогрессия и говорит ученикам попробовать сформулировать определение. Нужно рассказать ученикам, что постоянную последовательность, в которой каждый член принимает значение равное числу c, принимаем как арифметическую прогрессию с разностью $d = 0$, а геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1$. Так же ученики должны знать, что характер поведения членов прогрессии различается значениями разности d или знаменателя q.

Объясним учащимся, что арифметическая прогрессия является возрастающей, если $d > 0$, убывающей, если $d < 0$. Но с геометрической прогрессией тяжелее, ее поведение в зависимости от значений знаменателя нужно разбирать с учащимися более подробно. Допустим, по плану Ю.М. Колягина:

« - $q > 1$, тогда значение членов геометрической прогрессии имеют один и тот же знак и возрастают по модулю;

Пример 1. $a_1 = 1, q = 3$, Геометрическая прогрессия: $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ Или $a_1 = -2, q = 4$, геометрическая прогрессия: $-2, -8, -32, \ldots$

- $0 < q < 1$, тогда значение членов геометрической прогрессии имеют один и тот же знак и убывают по модулю;

Пример 2. $a_1 = 4, q = \frac{1}{16}$, геометрическая прогрессия: 4,$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{64}$,… Или - $a_1 = -1, q = \frac{1}{5}$, геометрическая прогрессия: 1, -$\frac{1}{5}$, -$\frac{1}{25}$, …

- $q < -1$, тогда значения членов геометрической прогрессии имеют знакочередующиеся и возрастают по модулю;

Пример 3. $a_1 = -5, q = -2$, геометрическая прогрессия: -5, 10, -20, 40, …

- $-1 < q < 0$, тогда значения членов геометрической прогрессии имеют знакочередующиеся и убывают по модулю;

Пример 4. $a_1 = -9, q = -\frac{1}{9}$, геометрическая прогрессия: -9, 1, -$\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$,...

- $q = 1$, тогда все значения членов геометрической прогрессии одинаковые, то есть a_1, $a_1, a_1, \ldots$

- $q = -1$, тогда все значения членов геометрической прогрессии отличаются только знаками, то есть $a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots$ »

Опыт работы учителей показывает, что вывод формул для общего члена прогрессий у учащихся никаких трудностей не вызывает. Можно вывести формулу исходя из определения, а именно:

- по определению для арифметической прогрессии имеем:

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d$

……………

$a_n = a_{n-1} + d$

- по определению для геометрической прогрессии имеем:

$a_2 = a_1 * q$

$a_3 = a_2 * q$

……………

$a_n = a_{n-1} * q$, $a_1 \neq 0$ и $q \neq 0$.

Сложив равенства в первом случае, а во втором перемножив, ученики получают с учетом свойств, известные формулы:

$a_n = a_{n-1} + d$ и $a_n = a_{n-1} * q$.

Вывод суммы первых n членов прогрессий не вызывает у учащихся трудностей. Чтобы заинтересовать учеников, можно рассказать историю о знаменитом Карле Гауссе, который будучи учеником начальной школы, в 10 лет очень быстро решил задачу о нахождении суммы первых ста натуральных чисел. Около 200 лет тому назад в немецкой школе на уроке математики учитель предложил ученикам найти сумму первых 100 натуральных чисел. Все дети начали подряд складывать числа, но один из учеников сразу же сказал правильный ответ. Этот ученик - Карл Фридрих Гаусс. В дальнейшем он стал великим математиком. Как удалось ему так быстро найти эту сумму? Дадим ученикам задание: быстро найти сумму первых 100 натуральных чисел? Решение: (1 + 100) * 50 = 5050. Последовательность чисел: 1, 2, 3, …,100 -есть арифметическая прогрессия. Потом выводим формулу суммы n -первых членов арифметической прогрессии. Формулу суммы n – первых членов геометрической прогрессии выводим аналогично (расскажем индийскую легенду об изобретателе шахмат Сете и задим вопрос ученикам: «Сколько зерен должен был получить Сета за свое изобретение?»).

Главный фактор занимательности – это приобщение учащихся к творческому поиску, активизация их самостоятельной и исследовательской деятельности, потому как уникальность занимательной задачи служит мотивом к учебной деятельности, развивая и тренируя мышление.

Поставленные цели преподавания сопровождаются конкретным перечнем знаний и умений, наличие которых у студентов можно проверить и оценить с помощью соответствующего контроля [15].

§9 Методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач на прогрессии в курсе алгебры основной школы

Математические Олимпиады имеют традицию более ста лет. Первые математические соревнования были организованы в Восточной Европе (Венгрия и Румыния) к концу 19 века. В 1959 году первая международная математическая Олимпиада проходила в Румынии. Семь стран, в общей сложности 52 студента, присутствовали на этом конкурсе. В 2010 году прошла Олимпиада в Казахстане, с количеством стран-участников - 97, а количеством студентов - 517. Очевидно, что количество молодых студентов, интересующихся математикой и математическими соревнованиями сегодня больше, чем когда-либо. Достаточно посетить некоторые математические форумы в сети, чтобы увидеть, что есть десятки тысяч зарегистрированных пользователи и миллионы сообщений [31].

Огромный плюс от Олимпиад в том, что те, кто участвовал в национальных и международных экзаменах, значительно повысили свои знания математики и продолжили на более высоких уровнях академических достижений [32].

Олимпиадная задача по математике – это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решения. «Для успешного участия в олимпиаде, можно выделить три составляющих, учитывая особенности математики:

- развитый математический кругозор;

- умение решать нестандартные задачи, владение необходимым для этого математическим аппаратом;

- практические умения и навыки, знание основных приемов, способов решения математических задач.

Такие ключевые моменты определяют основные направления подготовки школьника» [20].

Шеховцов В. А. выделяет «семь основных взаимосвязанных факторов, способствующих успешному решению олимпиадных задач:

- объем фактических знаний;

- развитые воображение, фантазия, интуиция;

- опыт самостоятельных решений;

- навыки владения основными мыслительными операциями (анализ, сравнение, обобщение, синтез, сопоставление, аналогия и т.д.);

- знание основных классов нестандартных задач;

- постоянное совершенствование логических навыков (выдвижение гипотез, построение доказательной структуры, примеры и контрпримеры, выводы и умозаключения);

- умение изучать, понимать и оценивать решения, предлагаемые другими»[30, с. 6].

Получим полный граф с семью вершинами (рис. 2.), который показывает определенную систему работы по подготовке к Олимпиадам.

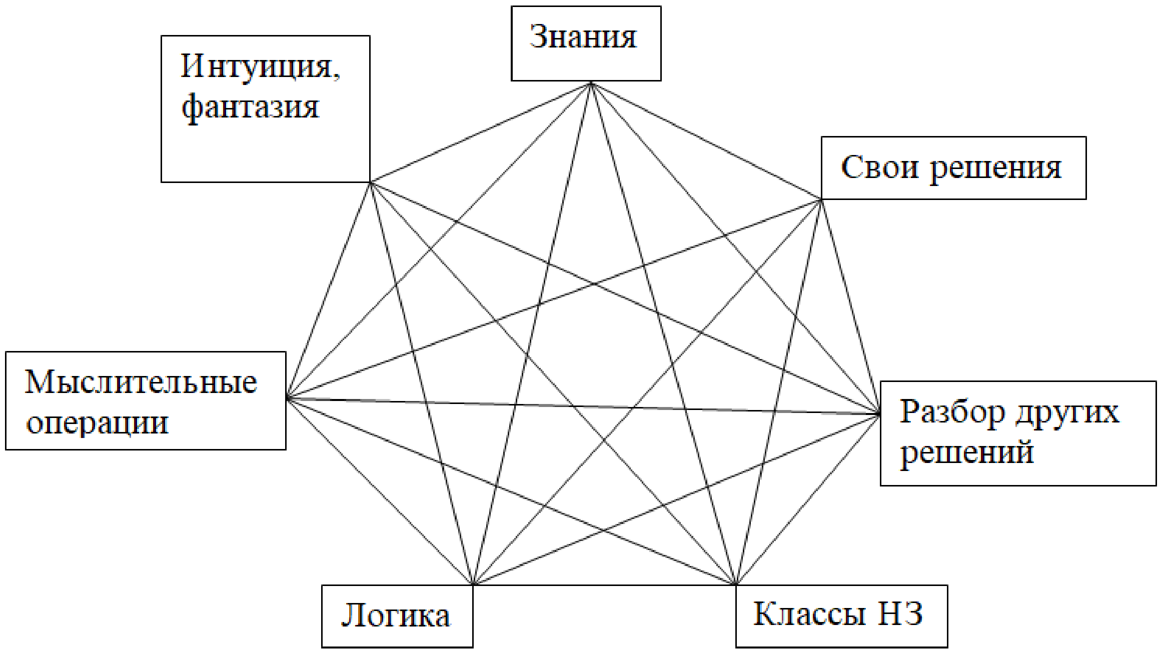

Рис. 2. Граф компонентов успешного решения

«Способность долго думать над задачей является одним из самых главных условий успешной работы в математике. Если, не смотря на трудности и неудачи процесс учения, а в частности решения задач, доставляет радость, то в этой науке можно освоиться. В Олимпиадной жизни постоянная, систематическая совместная творческая деятельность учителя и ученика, направленная на совершенствование навыков решения нестандартных задач обернется результатом» [30, с. 7].

Для того чтобы решить задачу на арифметическую прогрессию можно составить несколько вспомогательных рекомендаций:

- Из определения арифметической прогрессии следует связь соседних членов данной прогрессии. Например: $a_{n+1} = a_n + d$, $a_5 = 7$,

$$d = 4, \text{тогда } a_6 = a_5 + d = 7 + 4 = 11.$$

- Когда в арифметической прогрессии нам известен первый член a_1 и разность d, то возможно найти каждый её член, воспользовавшись формулой n-ого члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

- Чтобы найти первый член арифметической прогрессии, используем предыдущую формулу. Тогда a_1 будет находиться по формуле: $a_1 = a_n - d\ n - 1$.

- Для нахождения разности арифметической прогрессии, нужно знать первый и n-ый член прогрессии. Если они известны, то разность находится по формуле: $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$.

- Если нам неизвестен n-ый член арифметической прогрессии, но известны разность и номер n-го члена, то для нахождения суммы, можно использовать формулу: $S_n = \frac{2a_1 + n-1\ d * n}{2}$.

- Для пары членов в прогрессии, у которой один и членов первый, а другой произвольно выбранный, можно составить формулу нахождения разности, но должен быть известен порядковый номер произвольно выбранного члена. Чтобы вычислить разность, нужно сложить оба числа и разделить полученный результат на уменьшенный на единицу порядковый номер произвольного члена. $d = \frac{a_1 + a_i}{i-1}$.

- Если кроме произвольного члена арифметической прогрессии с порядковым номером i нам известен другой ее член с порядковым номером j, то нужно изменить формулу: $d = \frac{a_i + a_j}{i-j}$.

- Если в условии задачи дано значение первого члена и сумма заданного числа первых членов арифметической последовательности, то для получения искомого значения нужно разделить сумму на количество составивших её членов, отнять значение первого числа в последовательности и удвоить результат. Получившуюся величину нужно разделить на уменьшенное, на единицу число членов, составивших сумму. $d = 2 * \frac{\frac{S_i}{i - a_1}}{i-1}$.

- Если известен m-ый член прогрессии и какой-нибудь другой член прогрессии – n- ый, но n неизвестно, но известно, что m и n не совпадают, то разность прогрессии можно вычислить по формуле: $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$. Тогда $n = \frac{a_n - a_m + m*d}{d}$.

- Если известна сумма нескольких элементов арифметической прогрессии и ее первый и последний элемент, то можно определить и количество этих элементов. Сумма арифметической прогрессии будет равна: $S = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$. Тогда $n = \frac{2S}{a_1 + a_n}$ – число членов прогрессии. Используя то, что $a_n = a_1 + (n-1) * d$, можно переписать формулу в виде: $n = \frac{2S}{2a_1 + (n-1)} * d$. Из этой формулы можно выразить n, решая квадратное уравнение.

Для того чтобы решить задачу на геометрическую прогрессию можно составить несколько вспомогательных рекомендаций:

- Задачи на геометрическую прогрессию чаще всего решаются составлением и решением системы уравнений относительно первого члена прогрессии и знаменателя прогрессии.

- Для составления уравнений нужно помнить формулу выражения n-го члена прогрессии через первый член прогрессии и знаменатель прогрессии: $b_n = b_1 * q^{n-1}$.

- Для составления уравнений нужно помнить формулу нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии, зная первый член и знаменатель. $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = b_1 * \frac{1-q^n}{1-q}$.

- Если знаменатель прогрессии по модулю меньше единицы, то это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма первых n членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии находится так же, как и для неубывающей геометрической прогрессии. В случае бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно найти сумму всех членов этой прогрессии, поскольку при бесконечном увеличении n будет бесконечно уменьшаться значение b_n и сумма всех членов будет стремиться к определенному пределу. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

- Каждый член прогрессии является средним геометрическим соседних с ним членов. Значит, b_k **есть** квадратный корень из произведения: $b_{(k-1)} * b_{k+1}$.

- Если известны значения двух соседних членов геометрической прогрессии, для того чтобы найти знаменатель, нужно число с большим индексом разделить на предшествующее ему число: $q = \frac{b^{\ n+1}}{b_n}$. Условием является неравенство нулю первого члена и знаменателя прогрессии, в противном случае прогрессия является неопределённой.

- По формуле $b_n = b_1 * q^{n-1}$ вычисляется любой член геометрической прогрессии, в который известны знаменатель и первый член прогрессии. Каждый из членов геометрической прогрессии по модулю равен среднему геометрическому своих соседних членов: $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} * b_{n+1}}$.

- Формула для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии: $S_n = b_1 .* \frac{1-q^n}{1-q}$, справедлива при q≠1, если q=1, то сумма первых n членов вычисляется формулой: $S_n = n * b_1$. Прогрессия называется возрастающей при q>1 и $b_1 > 0$. При знаменателе прогрессии, по модулю не превышающем единицы, прогрессия называется убывающей.

- Частный случай геометрической прогрессии - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Члены убывающей геометрической прогрессии раз за разом уменьшаются, но никогда не достигнут нуля. Найти сумму всех членов такой прогрессии возможно по формуле: $S = \frac{b1}{1-q}$, общее количество членов n бесконечно.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Во второй главе рассмотрены методические основы обучения решению задач повышенной трудности на тему «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в основной школе.

1. Сформулированы цели обучения теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия»: совершенствование навыков применения теоретических знаний при решении задач, развитие умения применять изученные формулы при решении задач, формирование ответственности, внимательности, интереса к изучению математики, умения анализировать, воспитание настойчивости и дисциплинированности.

2. Представлена двух блоковая система задач повышенной трудности на прогрессии для обучающихся основной школы, которую можно использовать как для решения в классе с учителем, так и среди задач в контрольной работе.

3. Изучены методические рекомендации по обучению решению задач на прогрессии в курсе алгебры основной школы. Учение о прогрессиях считается существенной темой, несколько изолированной от остальных разделов курса алгебры. Раньше в курсе алгебры учащиеся не встречались с понятиями арифметической и геометрической прогрессии. Этот материал является новым для них. Основная цель изучения темы - дать учащимся представление о прогрессиях как числовых последовательностях особого вида. Для успешного решения задач на прогрессии учащиеся должны знать или выводить нужные формулы.

4. Рассмотрены методические рекомендации по обучению решения олимпиадных задач на прогрессии в курсе алгебры основной школы. При решении Олимпиадных задач на прогрессии важно правильно прочитать и понимать условие задачи, правильно определить, что дано, что нужно найти, подобрать или вывести нужные формулы, составить и решить уравнение или систему уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью бакалаврской работы являлось выявление методических особенностей обучения решению задач повышенной трудности по теме: «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе математики основной школы.

В результате работы выполнены следующие задачи:

- рассмотрено понятие «задача повышенной трудности по математике».
- изучена история развития понятия арифметической и геометрической прогрессий;
- проанализировано содержание теоретического материала по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в учебниках алгебры основной школы;
- проведен анализ типовых задач по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в учебниках алгебры основной школы;
- подобраны задачи повышенной трудности и олимпиадные задачи на прогрессии для обучающихся основной школы;
- выделены основные цели обучения теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в курсе алгебры основной школы;
- раскрыты методические рекомендации по обучению решения задач на прогрессии в курсе алгебры основной школы.

В результате можно сделать такие выводы:

1. Задачи повышенной трудности (ЗПТ) - это такие задачи, которые требуют логики или особых знаний, а так же больше времени на их решение. Обычно в таких задачах нет четкого плана решения или тяжелое на восприятие условие. ЗПТ по прогрессиям для учеников это те задачи, где нужно искать одновременно арифметическую и геометрическую прогрессию.

2. Изучение прогрессий изолированная тема от других разделов алгебры. Изучается в 9 классе.

3. Чтобы решать задачи на прогрессии нужно знать или уметь выводить нужные формулы.

4. Задачи на прогрессии требуют не только знания и применения формул, а также навыков в преобразовании выражений, умения решать уравнения и системы уравнений.

При обучении теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» следует учесть следующие рекомендации:

1. Знакомить учеников с историей возникновения прогрессий. Можно на примере из жизни К. Гаусса показать как быстро и просто можно посчитать сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

2. Показать и вывести существующие формулы прогрессий.

3. Дать учащимся представление о прогрессиях как числовой последовательности особого вида.

4. Разобрать систему задач, представленных на усвоение и закрепление данной темы.

Решение задачи сложный процесс, невозможно дать учащимся правила, позволяющие решить любую нестандартную задачу, потому что нестандартные задачи в какой-то степени неповторимы. Для их решения не существует универсального метода.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаханов Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы. - М.:МЦНМО, 2007. - 472 с.

2. Алимов Ш. А. Алгебра: учебник для учащихся 9 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 2012 г.

3. Архангельская Е.В. Математический анализ последовательности. Пределы. [Электронный ресурс]/Е.В. Архангельская//Учебно-методическое пособие. - 2013. - № 33п. - С. 10-16. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=23868275 . – Последнее обновление: 23.01.2013

4. Бурмистрова Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7—9 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций. — 2-е изд., доп. — М. : Просвещение, 2014. — 96 с.

5. Виленкин Н.Я. Алгебра: учебник для учащихся 9 кл. с углубленным изучением математики. -7-е изд. – М.: Просвящение, 2006.

6. Гриншпон Я.С., Подстригич А.Г. Особенности обучения школьников решению задач повышенной сложности по математике [Электронный ресурс]/ Я.С. Гриншпон, А.Г. Подстригич А.Г.// https://elibrary.ru/download/elibrary_24075521_37450387.pdf

7. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных.9 кл.: Учебник для общеобразовательных учебных заведений; под ред. Г.В. Дорофеева. - М. :Дрофа, 2000. – 328 с.

8. Кабо П.Д., Родзевич Т.Н. Книга для чтения по математике и физике (на английском языке). - Москва: Просвещение, 1968. – 111с.

9. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В. О. Бугаенко. 4-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.

10. Киселёв А.П. Элементы алгебры и анализа. Ч. 2: Элементы анализа и некоторые дополнительные статьи алгебры. – М.: - 1929. - 167 с.

11. Колесова Т. Задания повышенной трудности в экзамене по алгебре в новой форме // http://mat.1september.ru/download/e-mat24.pdf

12. Колягин. Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учебное пособие для студентов физ.-мат. Фак. пед. ин-тов. М., «Просвещение», 1977, 480с

13. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 класс. 1991 г. 244с.

14. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феактистов И.Е. Алгебра: учебник для учащихся 9 кл. общеобразовательных учреждений. -М.: Мнеозина, 2008. – 294 с.

15. Малышева Е.В. Математическое образование: современные методики и инновации, опыт практического применения. [Электронный ресурс]/ Е.В. Малышева, Н.М.Григорьева, Ю.В. Гильманшина, О.А.Бузина // Центр мониторинга и сопровождения образования. – 2016. - № 65. - С. 42-112. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28375986. – Последнее обновление: 3. 03. 2016.

16. Мантуров О.В. Толковый словарь математических терминов. Москва: Просвещение, 1965. — 509 с.

17. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра. Учебник. 9 класс, - М.: 2010 г. – 224 с.

18. Мордкович А. Г. Алгебра. Учебник для 9 кл., углубленное изучение. – 2-е изд., - М.: Мнемозина, 2006г. – 296с.

19. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005—2008) [Текст] / А.В. Бегунец., П.А. Бородин., И.Н. Сергеев под редакцией И.Н. Сергеева. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008.

20. Организация и проведение школьных олимпиад как механизм обеспечения индивидуальных образовательных достижений [Электронный

ресурс] / Е.А. Чопозова. – Ставрополь, 2014. Режим доступа: https://doc4web.ru/pedagogika/programma-speckursa-podgotovka-uchaschihsya-k-olimpiade-po-matem.html/ – Последнее обновление 23.05.2017.

21. Официальный сайт Межрегиональной олимпиады школьников по математике «САММАТ». – Режим доступа: http://sammat.ru/ – Последнее обновление 28.05.2017.

22. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры : Кн. Для учащихся 7-9 кл. средн. Шк.. – М.: Просвещение, 1990. -224.

23. Примерные программы основного общего образования. Математика. – М: Просвещение, 2009 – 96 с. – (Стандарты второго поколения).

24. Сканави М.И. Сборник задач по математике. Под ред. М.И. Сканави. ─М.:Издательский Дом ОНИКС: Альянс-В, 1998. ─624с. ─ (Готовимся к экзаменам)

25. Социальная сеть работников образования «Наша сеть» [Электронный ресурс]/ https://nsportal.ru

26. Фарков, А. В. Математические олимпиадные работы. 5-11 классы [Текст] / А. В. Фарков. – СПб.: Питер, 2010. – 192 с.

27. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. – Последнее обновление 05.05.2018.

28. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов сред. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 191 с.

29. Худобин А. И. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. Пособие для учителей. – М., Просвещение, 1966. – 441 с.

30. Шеховцов В.А. Олимпиадные задачи по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности / авт.-сост. В.А.Шеховцов. – Волгоград: Учитель, 2009. – 99с.

31. Andreescu T., Enescu B. Mathematical Olympiad Treasures. Birkhauser Boston, 2003. - 234 pp.

32. Becheanu M. International Mathematical Olympiads. Academic Distribution Center, 2001. – 371pp.

33. Boyer C.B., Merzbach U.C. A History of Mathematics. Wiley, 1989. –762 pp.

34. Polya, G. Mathematical Discovery. Princeton: Princeton University Press. New York: Wiley, 1981.

35. Konev V.V. The Elements of mathematics. TextBook. The Second Edition. 2009, 140pp.

Приложение 1

Таблица 1

Содержание теоретического материала по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» в учебниках алгебры 9 класса

Последовательность рассматриваемого материала	
Ш.А. Алимов (базовый уровень) [2]	числовая последовательность; арифметическая прогрессия; сумма n первых членов арифметической прогрессии; геометрическая прогрессия; сумма n первых членов геометрической прогрессии.
Г.В. Дорофеев (базовый уровень) [7]	числовые последовательности; арифметическая прогрессия; сумма n первых членов арифметической прогрессии; геометрическая прогрессия; сумма n первых членов геометрической прогрессии; простые и сложные проценты; сумма квадратов первых n натуральных чисел; треугольник Паскаля.
А.Г. Мордкович (углубленное изучение) [19]	числовые последовательности; свойства числовых последовательностей; арифметическая прогрессия; геометрическая прогрессия;метод математической индукции.
Н.Я. Виленкин (углубленное изучение) [5]	числовые последовательности; метод математической индукции; арифметическая прогрессия; геометрическая прогрессия; предел последовательности; прогрессии, проценты и банковские расчеты.
Введение понятий арифметической и геометрической прогрессий	
Ш.А. Алимов (базовый уровень) [2]	«Числовая последовательность $a_1, a_2, a_3,\dots,a_n,\dots$ - есть арифметическая прогрессия, если для всех натуральных n будет выполняться равенство: $a_{n+1}=a_n+d$, где d - некоторое число. Числовая последовательность $b_1, b_2, b_3,\dots,b_n,\dots$ - есть геометрическая прогрессия, если для всех натуральных n будет выполняться равенство $b_{n+1}=b_n*q$, где $b_n\neq 0$, q - некоторое число, которое не равно нулю».
Г.В. Дорофеев (базовый уровень) [7]	«Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа. Геометрической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число».
А.Г. Мордкович (углубленное изучение) [19]	«Числовая последовательность, член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называется арифметической прогрессией, а число d называют разностью прогрессии. Числовая последовательность, члены которой не равны нулю и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называется геометрической прогрессией, а число q называют знаменателем прогрессии».
Н.Я. Виленкин (углубленное изучение) [5]	Аналогично как и у А.Г. Мордкович

Приложение 2

Арифметическая и геометрическая прогрессии. 1 уровень сложности.

Задание 1. Дополни определения:

Определение 1. Числовую_________________, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом d, называют__________________ *прогрессией***.** При этом число d называют _____________ прогрессии.

Определение 2. Числовую ________________, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называют ________________ *прогрессией*. При этом число q называют _______________ прогрессии.

Задание 2.

а) Какая из следующих последовательностей является арифметической прогрессией?

1. 1, 4, 9,...
2. 5, 25, 125,…
3. 5, 10, 15,…

б) Какая из следующих последовательностей является геометрической прогрессией?

1. $3,\frac{1}{3},9,\frac{1}{9},27,\frac{1}{27},\ldots$
2. 1,3,9,27,81,...
3. -5,0,-15,0,-25,-30,…

Задание 3.

а) Запишите следующие пять членов арифметической прогрессии (a_n): 16; 11; 6; ….

16;11;6;__;__;__;__;__;…

б) Запишите первые пять членов геометрической прогрессии, если b_1 =0.5 , q=-4

$b_1 =$_________;$b_2 =$_________;$b_3 =$_________;$b_4 =$_________;$b_5 =$_______.

Задание 4. Запишите формулу нахождения n первых членов арифметической прогрессии и найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если $a_2 = -1,\ a_3 = 1$.

Задание 5. В арифметической прогрессии $a_n = 6n - 3$ найдите a_3, a_{16}.

Задание 6. В геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{81}, q = 3$ найдите b_6.

Задание 7*. Дана арифметическая прогрессия 3; 2,8; 2,6... Сколько в этой прогрессии положительных членов?

Арифметическая и геометрическая прогрессии. 2 уровень сложности.

Задание 1. Приведите примеры арифметической и геометрической прогрессий.

Задание 2.

а) Какая из следующих последовательностей является арифметической прогрессией?

1. Последовательность натуральных степеней числа 2; 2. Последовательность натуральных чисел, кратных 5; 3. Последовательность кубов натуральных чисел.

б) Какая из последовательностей является геометрической прогрессией?

1. Последовательность натуральных чисел кратных 3;2. Последовательность кубов натуральных чисел;3.Последовательность натуральных степеней числа 3.

Задание3.

а) Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии, если $a_1 = -3, d = 3$

б) Найдите пятый член геометрической прогрессии, если b_1=2, q=3.

Задание 4.

Является ли число 19 членом арифметической прогрессии, если a_1=-17, d=3?

Задание 5.

Найдите номер подчеркнутого члена геометрической прогрессии: 6, 12, 24,…,192,…

Задание 6*. Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена $a_n = 4n + 1$. Найдите сумму членов данной арифметической прогрессии с двадцать пятого по пятидесятый член включительно.

Арифметическая и геометрическая прогрессии. 3 уровень сложности.

Задание 1. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = -2n + n^3$. Найдите шестой член этой последовательности.

Задание 2. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_8 = 20$; $b_6 = 5$.

Задание 3. Найдите первый член геометрической прогрессии, в которой $q = 3$, $S_4 = 560$.

Задание 4*. Найдите сумму всех нечетных натуральных чисел от 11 до 101 включительно.

Задание 5*. Три числа составляют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что их сумма равна 27 и при уменьшении на 1, 3 и 2 соответственно они составляют геометрическую прогрессию.

Данная трехуровневая система задач составлена для «слабого», «сильного» и «среднего» девятых классов. Можно использовать как самостоятельную работу после прохождения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

Приложение 3

Составим таблицу, которая вычислит n-й член и сумму n-го члена арифметической прогрессии, с помощью компьютерной программы Ms Exel.

В математике формулы выглядят так: $a_n = \boldsymbol{a_1} + d\ \ n - \mathbf{1}$ и $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$, откуда $\boldsymbol{a_1}$ –первый член, d – разность, n – число членов, a_n – n-й член, S_n – сумма n первых членов.

За первый член арифметической прогрессии возьмем $\boldsymbol{a_1} = -5$.

Таблица 2

Вычисление n-го члена и суммы а.п.			
d	n	an	sn
0,38	1	-5	-5
0,38	2	-4,62	-9,62
0,38	3	-4,24	-13,86
0,38	4	-3,86	-17,72
0,38	5	-3,48	-21,2
0,38	6	-3,1	-24,3
0,38	7	-2,72	-27,02
0,38	8	-2,34	-29,36
0,38	9	-1,96	-31,32
0,38	10	-1,58	-32,9

Таблица 2. Вычисление n-го члена и суммы n членов арифметической прогрессии

Таблица 3

Нахождение n-го члена г.п.			
b1	q	n	bn
10	0,3	4	0,27
11	0,3	5	0,0891
12	0,3	6	0,02916
13	0,3	7	0,009477
14	0,3	8	0,003062
15	0,3	9	0,000984
16	0,3	10	0,000315
17	0,3	11	0,0001

Таблица 3. Нахождение n-го члена геометрической прогрессии

Составим технологию заполнения таблицы 2:

1. В ячейку $A1$ вводим заголовок таблицы «Вычисление n-го члена и суммы а.п.».

2. Введем в ячейки $A2, B2, C2, D2$ обозначения d, n, an, sn.

3. Выполним заполнение таблицы.

4. В ячейку $A3$введем величину разности $d = 0{,}38$.

5. Заполним ряд нижних ячеек d тем же числом, используя маркер заполнения.

6. Следующий столбец - ряд чисел от 1 до 10. Введем 1 в первую ячейку, а во вторую 2, выделив обе ячейки, заполним ячейки далее, используя маркер автозаполнения.

7. В ячейку $C4$ поместим и зафиксируем формулу для вычисления n-го члена арифметической прогрессии «=C3+F4*(B4-1)». Выполним автозаполнение нижних ячеек, с помощью маркера заполнения.

8. В ячейку D3 поместим и зафиксируем формулу для подсчета суммы n первых членов арифметической прогрессии «=(C3+C3)*B3/2». Выполним автозаполнение нижних ячеек, с помощью маркера заполнения.

Аналогично, составлена таблица нахождения n – го члена геометрической прогрессии, по формуле «=(A3*СТЕПЕНЬ(C3;B3))/(B3-1)» (Таблица 3).

Приложение 4

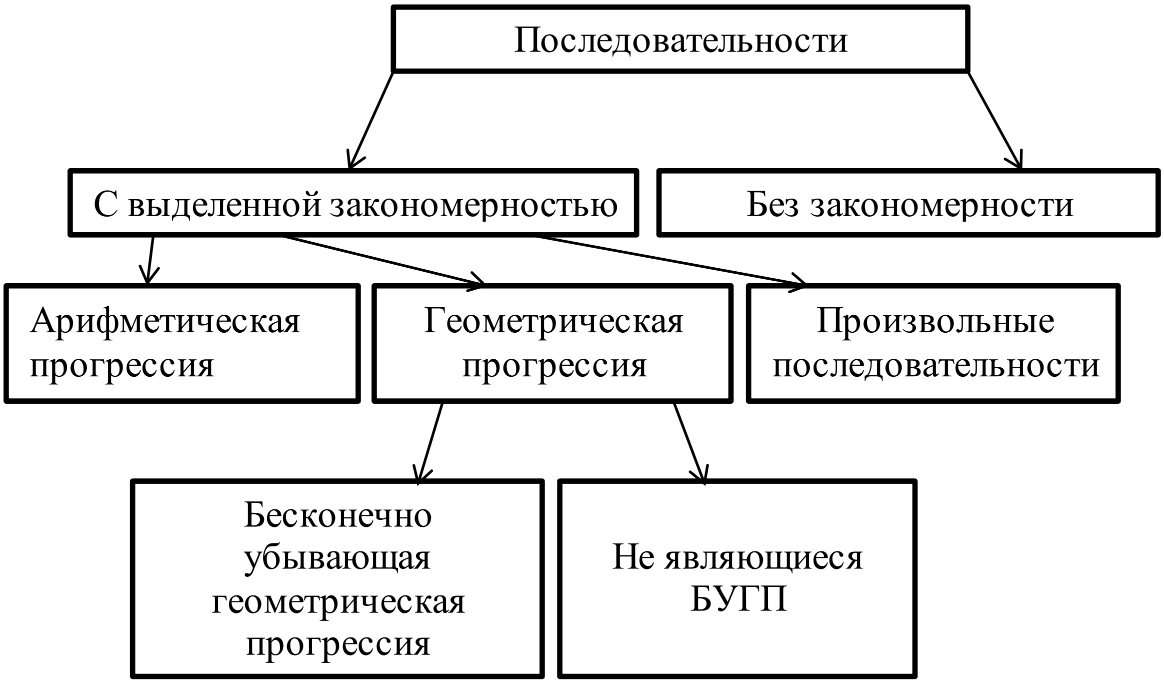

Рис. 1. Классификация последовательностей

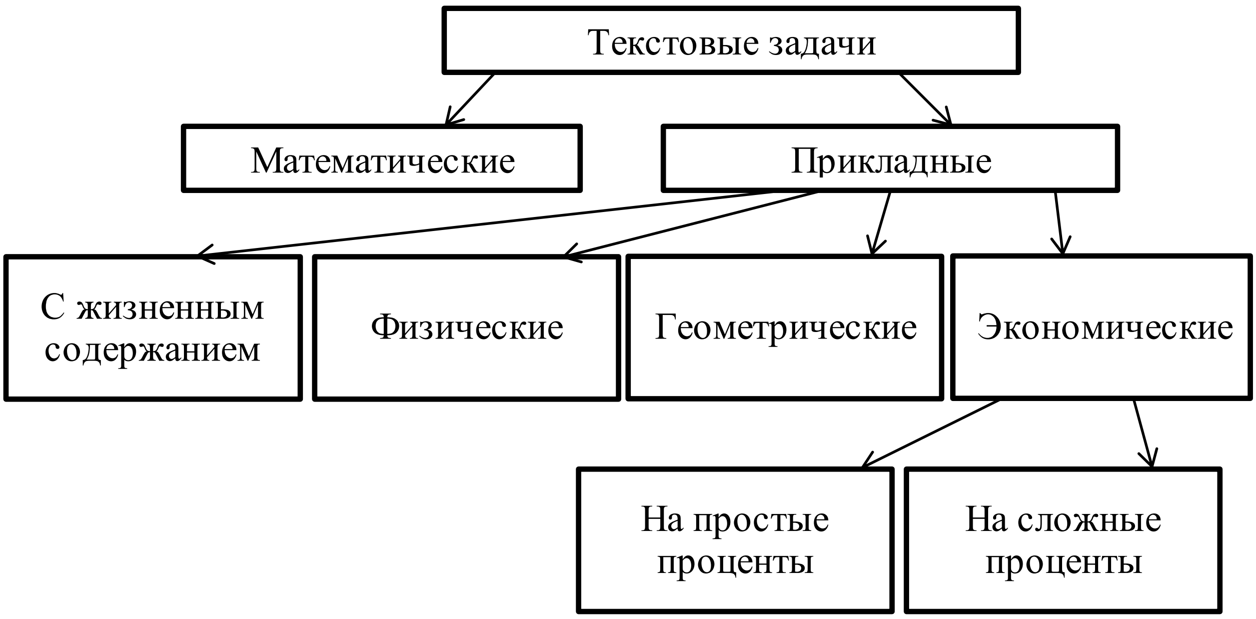

Рис.2. Классификация текстовых задач