МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ВЕКТОРЫ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	А.В. Лашманкина	________________
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Руководитель	к.п.н., доцент Н. А. Демченкова	________________
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Консультант	ст.преподаватель А.В. Прошина	________________
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ________________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы и разработать систему задач, решаемых векторным и координатным способом.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в курсе основной школы.

Предмет исследования: векторы в курсе геометрии основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы: рассмотрена история развития векторов в математике; выявлены различные подходы к определению понятия «вектор»; проанализировано содержание теоретического материала и задачного материала по заданной теме; выполнен логико-дидактический анализ содержания темы «Векторы».

В *Главе II* представлены методические основы обучения теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы: рассмотрены приемы и методы работы учителей по обучению теме «Векторы»; рассмотрены методические рекомендации по обучению теме «Векторы»; разработана система упражнений. В заключении приведены основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 30 наименований.

Объем работы составляет 60 страниц, в том числе приложения – 3 страницы.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Method of teaching to the topic «Vectors» method in the course of geometry of the secondary school".

The aim of the work is to reveal the methodological features of teaching pupils to the vector method in the course of geometry of the secondary school and to make a system of exercises on the topic of research.

The object of the bachelor's thesis is the process of teaching pupils to geometry in the secondary school.

The subject of the bachelor's thesis is the vectors in the course of geometry of the secondary school.

The bachelor's thesis consists of an introduction, 2 chapters, a conclusion, a list of references and 5 appendices.

The first chapter of the thesis describes theoretical principles of teaching to the vector method. We consider history of development of vectors in Math and education. We compare different approaches to the definition of vector. Then we analyse the theoretical and task material of school textbooks of different authors on the topic of «Vectors».

In *the second chapter* we present methodical principles of teaching to the vector method. We develop a system of exercises on the topic of research. We also report the results of experiments conducted to explore level of pupil's knowledge.

The list of references contains 30 items.

The thesis consists of 60 pages.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Тема «Векторы» является одной из достаточно «молодых» вопросов, которые изучаются в курсе геометрии общеобразовательной школы. В связи с потребностями курса физики данная тема стала изучаться в основной школе, векторы превратились в мощный и элегантный метод решения множества задач и доказательства множества теорем.

В результате изучения темы «Векторы и координаты на плоскости» согласно примерной программе основного общего образования от 8 апреля 2015 года в учащиеся должны уметь:

– «свободно оперировать понятиями вектор, сумма, разность векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение векторов, координаты на плоскости, координаты вектора;

– владеть векторным и координатным методами на плоскости для решения задач на вычисление и доказательство;

– выполнять с помощью векторов и координат доказательство известных геометрических фактов (свойства средних линий, теорем о замечательных точках треугольника и т.п.) и получать новые свойства известных фигур» [22, С. 114].

В повседневной жизни и при изучении других предметов должны сформироваться такие навыки, как:

– «использование векторов для решения простейших задач на определение скорости относительного движения;

– использование векторов и координат для решения задач по физике, географии и другим учебным предметам» [22, С. 114].

Обучение векторам и координатам на плоскости, а также в пространстве направлено на реализацию в курсе геометрии общеобразовательной школы межпредметных и внутрипредметных связей, систематизацию знаний учащихся, обогащение опыта учащихся.

Актуальность темы исследования позволяет выявить следующее **противоречие:** недостаточная методическая разработанность, связанная с использованием векторов; векторы не находят своего должного применения при решении прикладных задач, представленных в различных разделах школьного курса геометрии.

Проблема исследования: выявление методических особенностей обучения теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в курсе основной школы.

Предмет исследования: методика обучения теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть историю развития векторов в математике.
2. Выявить различные подходы к определению понятия «вектор».
3. Рассмотреть содержание теоретического материала по теме «Векторы».
4. Рассмотреть содержание задачного материала по теме «Векторы».
5. Провести логико-дидактический анализ содержания темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы.
6. Выделить межпредметные связи математики и физики при изучении темы «Векторы».
7. Рассмотреть приемы и методы работы учителей по изучению темы «Векторы».
8. Выявить методические рекомендации по обучению теме «Векторы».

9. Представить типологию задач по теме «Векторы» в заданиях Основного Государственного Экзамена.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования:** изучение и анализ школьных программ, учебной литературы и методических пособий по теме работы; решение задач по теме работы, изучения опыта работы учителей математики, работающих в общеобразовательных школах.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в результате работы выявлены методические особенности обучения теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы.

Практическую значимость результатов исследования составляет разработанная система упражнений, которая может быть использована учителями математики в процессе обучения учащихся.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по изучению темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы.

2. Система упражнений по теме «Векторы», направленная на проверку знаний учащихся основной школы.

Апробация результатов исследования осуществлена путем выступлений на: первом этапе научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (г. Тольятти, апрель 2018 г., диплом за III место); 14 всероссийской научно-практической конференции «Артемовские чтения»: «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (г. Пенза, 18 апреля 2018 г.); 7 Международном интеллектуальном конкурсе студентов, аспирантов, докторантов Discovery Science: University-2018 (г. Москва, 25 мая 2018 г., диплом за I место).

Основные результаты исследования отражены в 1 публикации [10].

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы, 3 приложений.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, объект, предмет, цель, задачи, методы исследования, а также теоретическая и практическая значимость исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы: рассмотрена история развития векторов в математике; выявлены различные подходы к определению понятия «вектор»; проанализировано содержание теоретического материала и задачного материала по заданной теме; выполнен логико-дидактический анализ содержания темы «Векторы»; рассмотрены межпредметные связи математики и физики при изучении темы «Векторы».

В **Главе II** представлены методические основы обучения теме «Векторы» в курсе геометрии основной школы: рассмотрены приемы и методы работы учителей по обучению теме «Векторы»; рассмотрены методические рекомендации по обучению теме «Векторы», разработана система упражнений; рассмотрена типология задач по теме векторы в заданиях ОГЭ.

В заключении приведены основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 30 наименований.

Объем работы составляет 60 страниц, в том числе приложения – 3 страницы.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ВЕКТОРАМ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Из истории развития векторов в математике

Под самим термином «векторная величина» или «вектор» понимают величину, имеющую направление, например, сила, скорость, ускорение и т.д. Величину, не имеющую направления, называют скалярной или скаляром.

Термин «вектор» произошел от латинского слова vector, что означает «ведущий или несущий, влекущий, переносящий».

Долгое время вектор рассматривали как направленный отрезок. Спустя время, в процессе развития теории преобразований вектор стали рассматривать не только как направленный отрезок, но и как параллельный перенос, заданный парой точек: точкой O и ее прообразом O'.

Г.И. Глейзер пишет: «Интерес к векторам и векторному исчислению возник у математиков в XIX в. в связи с потребностями механики и физики. Однако, начало исчисления с использованием направленных отрезков появились еще в далеком прошлом» [6, С.150].

«В Древней Греции пифагорейцы, открыв иррациональные числа, которые нельзя выразить дробями (например: $\overline{3}$, $\overline{7}$ и др.), не решились ввести более широкое и точное толкование числа. Математики того времени делали попытки разрешить вопросы арифметики и алгебры с помощью решения задач геометрическим путем. Так было положено начало геометрической теории отношений Евдокса (408-355 гг. до н.э.), а позднее «геометрической алгебре». В геометрическом исчислении, представленном в известном труде Евклида «Начала», сложение и вычитание сводились к сложению и вычитанию отрезков, а умножение – к построению прямоугольников на отрезках, которые соответствовали по длине множителям» [6, С.150].

В 1587 г. фламандский ученый С. Стевин выпустил трактат «Начала статики». В трактате автор исследует сложение сил, после этого он приходит к выводу, что для того, чтобы найти результат сложения двух сил, которые взаимодействуют под углом 90°, необходимо использовать «параллелограмм сил». При этом для обозначения силы С. Стевин ввел стрелки. То есть, он впервые в истории ввел сложение двух перпендикулярных друг другу векторов.

Спустя долгое время французский математик Л. Пуансо (1777-1859 г.) в своей книге «Элементы статики», которая была выпущена в 1803 г., разработал целую теорию векторов, которой он пользовался во время рассмотрения сил, действующих в различных направлениях.

Значительный вклад внес в развитие векторного исчисления У.Гамильтон после изложения теории комплексных чисел и учения о кватернионах (1853 г.). Именно Гамильтон начал использовать такие понятия как: «скаляр», «скалярное произведение», «вектор», «векторное произведение.

«В 1844 г. независимо от Гамильтона к таким же результатам пришел и Г.Грасман. В работе «Учение о протяженности» он впервые излагает учение о n-мерном евклидовом пространстве. Вместо терминов «скалярное произведение», «векторное произведение» он использует термины «внутреннее произведение» и «внешнее произведение» соответственно. Векторы Г. Грасман обозначал, используя жирные буквы латинского алфавита. Принятое в наши дни обозначение вектора r ввел в 1853г. О. Коши, а единичные векторы i, j, k ввел в том же году Гамильтон» [6, С.150].

Систематично применял векторное исчисление для нужд естествознания Д. Максвелл, а в конце 19 в. Д. Гиббс и О. Хевисайд придали современный вид векторному исчислению [30].

«В наши дни, в современной математике раздел, в котором рассматривается учение о действиях с векторами, называют векторной алгеброй, так как эти действия имеют довольно много общих свойств с алгебраическими действиями» [7, С. 151].

§2. Различные подходы к определению понятия «вектор» в курсе геометрии основной школы

В настоящее время мы можем говорить о некоторых подходах к определению понятия «вектор». Н.Л. Стефанова [21] выделяет следующие подходы:

Первый подход. Определение вектора как направленного отрезка. Такое определение является самым распространенным в школьной практике. Н. Л. Стефанова пишет: «В геометрии обычно рассматриваются свободные векторы, которые равны, если имеют равные модули и, соответственно, одинаковые направления, а в физике – связанные векторы, которые равны, если имеют не только равные модули и одинаковые направления, но и общую точку приложения, а также скользящие векторы – равные векторы, лежащие на одной прямой» [21, С. 340].

Второй подход. Вектор – параллельный перенос. С геометрической точки зрения вектор есть геометрический объект, который характеризуется направлением и длиной. Согласно этому общему определению, параллельный перенос следует считать вектором, так как параллельный перенос как раз и характеризуется направлением и длиной.

Третий подход определяет вектор как тензор. Тензор – обобщение понятия «вектор». Тензор - это математическое представление некоторого объекта (геометрического или физического), существующего в пространстве в виде таблицы величин – компонентов тензора [26].

Четвертый подход определяет вектор как упорядоченную n-ку чисел. Если в пространстве задана система координат, то вектор однозначно задается набором своих координат, поэтому упорядоченные наборы чисел тоже называются вектором [28].

Далее рассмотрим основные подходы к определению «вектор», которые используются в школьном курсе геометрии основной школы.

Определение вектора, как направленного отрезка четко прослеживается в учебниках Л.С. Атанасяна [3] и А.В. Погорелова [17].

В учебнике А.В. Погорелова [17] автор называет направленный отрезок вектором, но не дает определение направленного отрезка. Подразумевается, что учащиеся уже должны иметь наглядное представление о направленном отрезке. В учебнике Л.С. Атанасяна [3] изложение материала строится иначе. В начале дается определение вектора, как величины, характеризующейся числовым значением; затем вводится понятие направленного отрезка, и на его основе дается второе определение вектора (вектором называется направленный отрезок). Недостаток такого способа изложения заключается в том, что сразу вводятся два понятия вектора без соответствующих пояснений.

Определение вектора как параллельного переноса представлено в учебнике А.Н. Колмогорова [9]. В данном учебнике автор определяет вектор как параллельный перенос на всей плоскости, а в дальнейшем – как перенос всего пространства.

Определения вектора как тензора и вектора как упорядоченной n-ки чисел не рассматриваются в школьном курсе геометрии. Эти понятия рассматриваются в учебниках, предназначенных для обучения в высших учебных заведениях. Вводятся эти определения в таких разделах математики как, аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Если говорить о подходах к определению понятия «вектор» в основной школе, то было бы полезно ознакомиться со статьей Александрова «Что же такое вектор?». Анализируя материал, представленный в школьных учебниках, автор пишет: «Можно сказать, что направленные отрезки называют векторами, но определять вектор, как направленный отрезок, т.е. «данный вектор – это данный направленный отрезок», неправильно. Точно так же неправильно определять вектор, как параллельный перенос. Ошибка состоит в том, что учителя хотят сразу дать определение вектора. А нужно сначала определить направленный отрезок и равенство направленных отрезков, а уже потом высказывать определение вектора: вектором в геометрии называется направленный отрезок, рассматриваемый с точностью до выбора его начала, т.е. равные друг другу направленные отрезки считаются представителями или изображениями одного и того же вектора. Данный вектор – это любой из таких отрезков» [1, С. 39].

В данной работе мы будем придерживаться подхода, реализуемого в учебниках Л.С Атанасяна [3] и А.В. Погорелова [17].

§3. Содержание теоретического материала по теме «Векторы» в учебниках геометрии 7-9 классов

Ознакомившись с Федеральным государственным образовательным стандартом общего основного образования [22] и перечнем учебников геометрии основной школы, рекомендованных к использованию образовательными учреждениями согласно приказам Министерства образования и науки РФ № 253 от 31.03.2014 г. и № 38 от 26.01.2016 г. [19], в работе в качестве основного был выбран учебник под редакцией Л.С. Атанасяна [3]. Также были рассмотрены учебники под редакцией А.В. Погорелова [17] и И.Ф. Шарыгина [23].

Рассмотрим изложение теоретического материала в учебниках геометрии основной школы.

Изучение темы «Векторы» в учебнике Л.С. Атанасяна начинается в 8 классе с введения определения вектора.

Определение: «Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором» [3, С.193]. В учебниках А.В. Погорелова [17] и И.Ф. Шарыгина [23] вектор также определяется, как направленный отрезок.

В учебнике Л.С. Атанасяна приведено следующее **определение** длины вектора: «Длиной или модулем ненулевого вектора AB называется длина отрезка АВ» [3, С. 193].

В учебнике И.Ф Шарыгина [23] даны аналогичные определения. А.В. Погорелов [17], в свою очередь, модуль вектора называет его абсолютной величиной.

Прежде чем ввести определение равных векторов Л.С. Атанасян вводит определение коллинеарных векторов. Далее на примерах показывает, чем отличаются сонаправленные и противоположно направленные векторы. На рисунке 1 изображены сонаправленные векторы: a и b, a и CD, b и CD, противоположно направленные векторы: a и AB, b и AB, AB и CD.

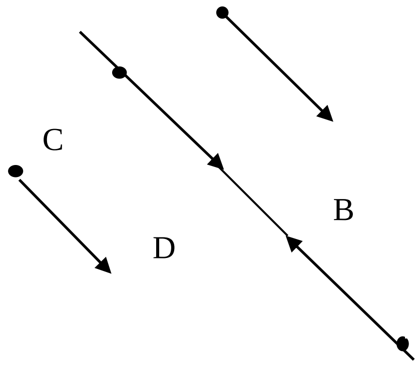

Рис. 1. Сонапраленные и противоположно направленные векторы

Ненулевые коллинеарные векторы обладают теми свойствами, которые изображены на рисунке 2.

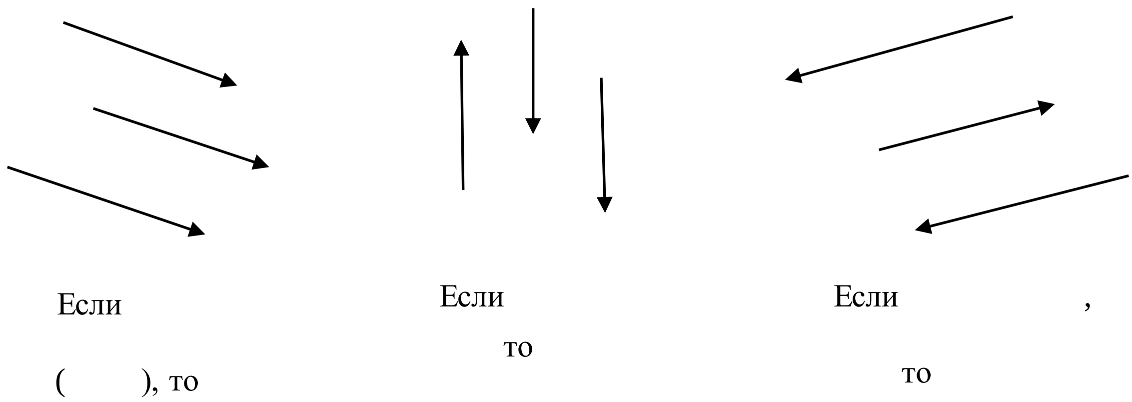

Рис. 2. Свойства ненулевых коллинеарных векторов

После этого Л.С Атанасян вводит **определение** равных вектов**:** «Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

От любой точки М можно отложить вектор, равный данному вектору a, и притом только один» [3, С.196]. Далее рассмотрено доказательство этого утверждения.

В учебниках И.Ф. Шарыгина [23] и А.В. Погорелова [17] приведены аналогичные определения равных векторов.

В учебнике Л.С. Атанасяна [3] правило сложения векторов рассматривается разными способами. Это правило треугольника (Рис. 3), правило параллелограмма (Рис. 4), правило многоугольника (Рис. 5). А для разности векторов a и b автор приводит следующее **определение**: «Разностью векторов a и b называется вектор, сумма которого с вектором b равна вектору a» [3, С.202].

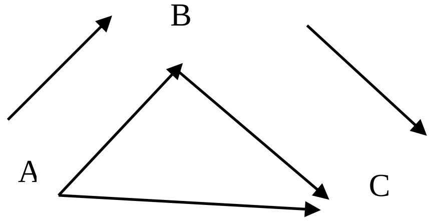

Рис. 3. Правило треугольника

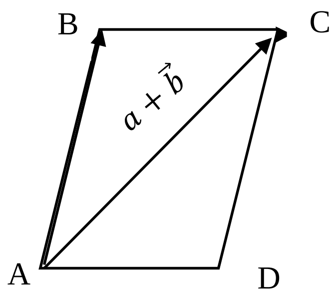

Рис. 4. Правило параллелограмма

В учебнике И.Ф. Шарыгина [23] сложение векторов рассматривается аналогично, а в продолжении сложение и вычитание векторов рассматриваются с использованием координат вектора. А.В. Погорелов [17], в свою очередь, сначала рассматривает сложение векторов с использованием координат вектора и только потом вводит правило треугольника и правило параллелограмма.

После изучения всего основного материала Л.С. Атанасян [3] в своем учебнике предлагает перейти к параграфу: «Применение векторов к решению задач». В параграфе рассмотрено, как векторы могут быть использованы для решения различных геометрических задач, а также для доказательства теорем. Приведены различные примеры. В завершении автор рассматривает теорему о средней линии трапеции, доказательство которой производится с использованием темы «Векторы».

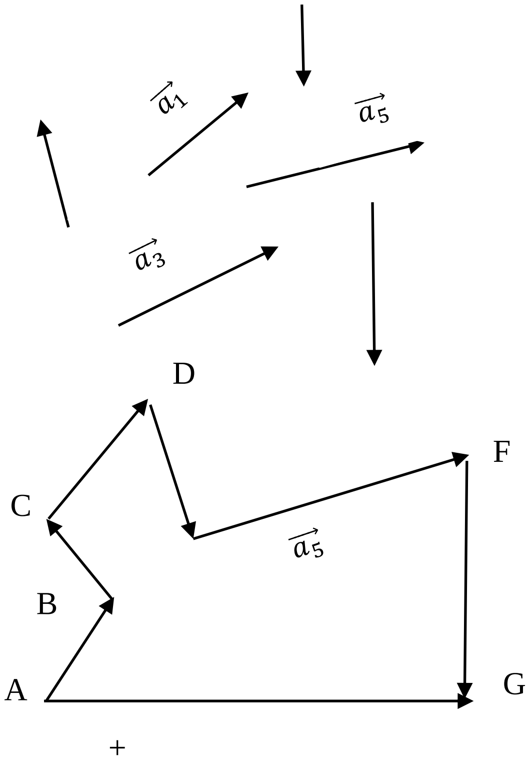

Рис. 5. Правило многоугольника

Л.С. Атанасян вводит следующее **определение:** «Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон» [3, С.143]. Далее Л.С. Атанасян формулирует **теорему:** «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме» [3, С. 210].

Доказательство:

«Пусть MN – средняя линия трапеции $ABCD$ (Рис. 6). Докажем, что $MN||AD$ и $MN = \frac{AD+BC}{2}$. По правилу многоугольника $MN = MB + BC + CN$ и $MN = MA + AD + DN$. Сложив эти равенства, получим: $2MN = MB + MA + BC + AD + (CN + DN)$. Но M и N - середины сторон AB и CD, поэтому $MB + MA = 0$ и $CN + DN = 0$. Следовательно, $2MN = AD + BC$, откуда $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Так как векторы AD и BC сонаправлены, то векторы MN и AD также сонаправлены, а

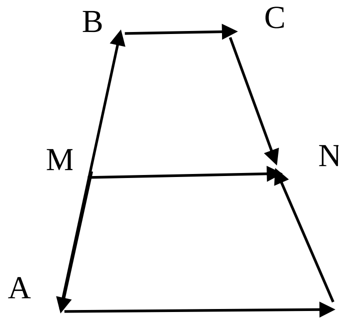

Рис. 6. Теорема о средней линии трапеции

длина вектора $(AD + BC)$ равна $AD + BC$. Отсюда следует, что $MN||AD$ и $MN = \frac{AD+BC}{2}$. Теорема доказана» [2, С.210].

Изучение темы «Векторы» в учебнике Л.С. Атанасяна [3] продолжается уже в 9 классе. Автор рассматривает: «Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, координаты вектора, связь между координатами вектора и координатами его начала и конца, угол между векторами, скалярное произведение векторов, скалярное произведение в координатах, свойства скалярного произведения векторов» [3, С. 230].

Л.С. Атанасян приводит следующее объяснение понятия «координаты вектора»: «Отложим от начала координат O единичные векторы $\boldsymbol{\imath}$ и $\boldsymbol{\jmath}$ так, чтобы направление вектора $\imath$ совпало с направлением оси Ox, а направление вектора $\boldsymbol{\jmath}$ – с направлением оси Oy. Векторы $\imath$ и $\boldsymbol{\jmath}$ назовем координатными векторами. Координатные векторы не коллинеарны, поэтому любой вектор p можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде $p = x\imath + y\boldsymbol{\jmath}$, причем коэффициенты разложения (числа x и y) определяются единственным образом. Коэффициенты разложения вектора p по координатным векторам называются координатами вектора p в данной системе координат. Координаты вектора будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $p\{x;y\}$» [2, С.230].

В учебнике А.В. Погорелова приводится иное объяснение понятия «координаты вектора»: «Пусть вектор a имеет началом точку A_1 $x_1;y_1$, а концом – точку A_2 $x_2;y_2$. Координатами вектора a будем называть числа $a_1 = x_2 - x_1, a_2 = y_2 - y_1$.» [17, С.140]. Подобное объяснение рассматривается и в учебнике И.Ф. Шарыгина [23].

Если рассматривать скалярное произведение векторов, Л.С. Атанасян вводит следующее **определение:** «Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними» [3, С.265]. Отдельно автор рассматривает скалярное произведение в координатах:

«Скалярное произведение векторов $a\{x_1;y_1\}$ и b $x_2;y_2$ выражается формулой $a * b = x_1x_2 + y_1y_2$» [3, С. 266].

А.В. Погорелов [17] и И.Ф. Шарыгин [23] вводят определение скалярного произведения аналогично.

В Таблице 1, которая представлена в Приложении 1, рассмотрена последовательность изложения теоретического материала в школьных учебниках геометрии основной школы разных авторов. После ознакомления с учебными пособиями разных авторов, можно прийти к выводу, что формируемые умения и навыки у учащихся имеют некоторые отличия. Результаты сравнения приведены в Таблице 2 в Приложении 2.

В учебниках геометрии разных авторов различная последовательность изучения темы «Векторы». Содержание представленного материала также имеет отличия. В учебнике Л.С. Атанасяна [3] тема «Векторы» рассматривается в 8 и 9 классе, в учебнике А.В. Погорелова [17] в 8 классе, а в учебнике И.Ф. Шарыгина [23] в 9 классе.

§4. Содержание задачного материала по теме «Векторы» в учебниках геометрии 7-9 классов

В методическом пособии для учителя Л.С. Атанасян пишет: «Изучение векторов в курсе геометрии преследует две цели: подготовить учащихся к восприятию действий над векторными величинами в физике и показать, как можно использовать векторы при решении геометрических задач. Следовательно, основное внимание следует уделить не обоснованиям формул и теорем векторной алгебры, а умению выполнять действия над векторами и демонстрации возможностей векторного метода в геометрии» [3, С.153].

По уровню сложности математические задачи, приведенные в учебнике, можно разделить на две категории: базовый уровень сложности и задачи повышенного уровня сложности (в Таблице 3). Задачи повышенного уровня сложности также можно разделить на 2 уровня. Рассмотрим основные типы этих задач.

Таблица 3

Типы задач по уровню сложности

Типы задач	**Базовый уровень сложности (I)**	**Повышенный уровень сложности**	
		* (II)	** (III)
Задачи на усвоение понятия «вектор»	738, 744	739	
Задачи на вычисление длин векторов	745, 774	746	
Задачи на построение коллинеарных и неколлинеарных векторов	740, 741, 742,743, 747, 756		
Задачи на построение равных векторов	748,749, 751, 753	750, 752	
Задачи на усвоение понятий и свойств суммы и разности векторов	754, 755, 757, 759, 762,763, 764, 765,766, 767, 770, 771	758, 760, 768	761, 769, 772
Задачи на построение вектора, умноженного на число	775, 776,777,	778	
Задачи на усвоение свойств умножения вектора на число	779, 781,782, 783, 784	780, 785	786, 787
Задачи на усвоение понятия и свойств средней линии трапеции	793, 794, 795, 796	790, 799	797
Задачи на разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	911, 912, 913	914, 915	916
Задачи на усвоение понятия «координаты	917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924929, 930, 931, 932, 933, 934, 935,	925, 926, 928, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947,	927, 954, 955, 956, 957, 958

вектора»	936, 937, 938	948, 949, 950, 951	
Задачи на нахождение угла между векторами	1039, 1040		
Задачи на усвоение понятия и свойств скалярного произведения	1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047	1050, 1051, 1052	1053

I тип. Задачи на усвоение понятия «вектор».

Задача 1: «Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы, изображающие полет самолета сначала на 300 км на юг от города А до В, а потом на 500 км на восток от города В до С. Затем начертите вектор AC, который изображает перемещение из начальной точки в конечную» [3, С.196].

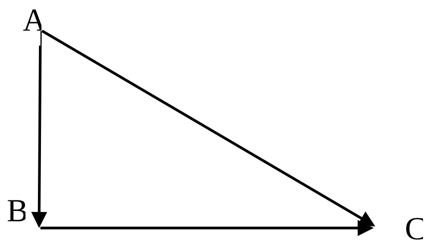

Рис. 7. Решение задачи 1

II тип. Задачи на вычисление длин векторов.

Задача 2: «В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, M – середина стороны AB. Найдите длины векторов $AB, BC, DC, MC, MA, CB, AC$» [2, С.197].

Решение: $\mathrm{AB} = \mathrm{DC} = 3$ см., $\mathrm{BC} = \mathrm{CB} = 4$ см. По теореме Пифагора: $\mathrm{MC} = \sqrt{\mathrm{MB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 4^2} = \sqrt{18{,}25}$ см. $\mathrm{MA} = \frac{1}{2}\mathrm{BA} = 1{,}5$см. $\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ см.

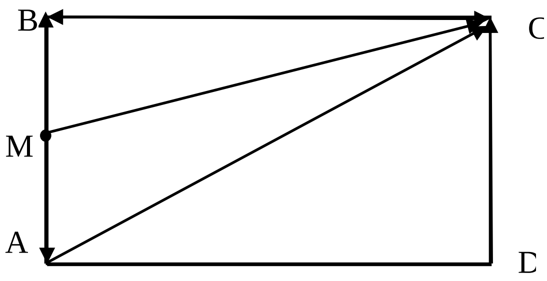

Рис. 8. Рисунок к задаче 2

Ответ: $\mathrm{AB} = 3$ см., $\mathrm{BC} = 4$ см, $\mathrm{DC} = 3$ см., $\mathrm{MC} = \sqrt{18{,}25}$ см., $\mathrm{MA} = 1{,}5$см., $\mathrm{CB} = 4$ см., $\mathrm{AC} = 5$ см.

III тип. Задачи на построение коллинеарных и неколлинеарных векторов.

Задача 3: «Начертите два вектора: а) имеющие равные длины и неколлинеарные; б) имеющие равные длины и сонаправленные; в) имеющие равные длины и противоположно направленные. В каком случае полученные векторы равны?» [3, С.197].

Решение:

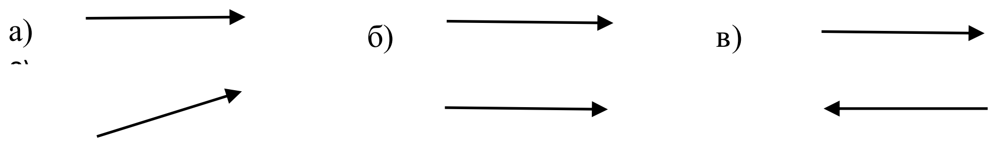

Рис. 9. Рисунок к задаче 3

Ответ: векторы равны в случае в).

IV тип. Задачи на построение равных векторов.

Задача 4: «Начертите ненулевой вектор a и отметьте на плоскости три точки A, B, C . Отложите от точек A, B, C векторы, равные a» [3, С.197].

Решение:

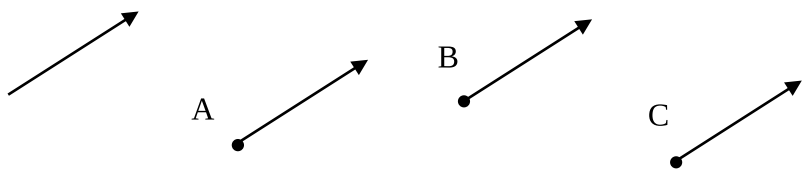

Рис. 10. Рисунок к задаче 4

V тип. Задачи на усвоение понятий и свойств суммы и разности векторов.

Задача 5: «Начертите векторы x, y, z так, чтобы $x \uparrow\uparrow y$, $x \uparrow\downarrow z$. Постройте векторы $x + y, y - z, x + z$» [3, С.204].

Решение:

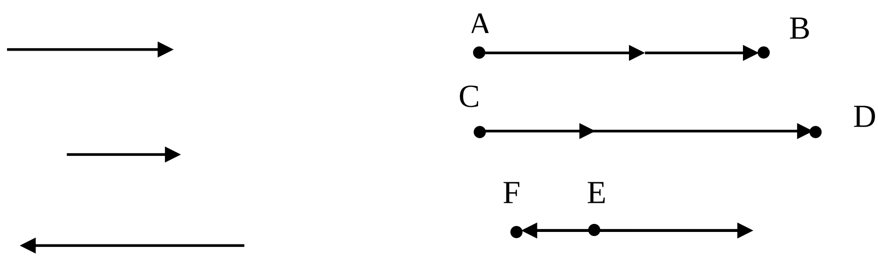

Рис. 11. Рисунок к задаче 5

$$AB = x + y, CD = y - z, EF = x + z.$$

VI тип. Задачи на построение вектора, умноженного на число.

Задача 6: «Начертите попарно неколлинеарные векторы $a, b,$ и c. Постройте вектор $2a + 3b - 4c$» [3, С.211].

Решение:

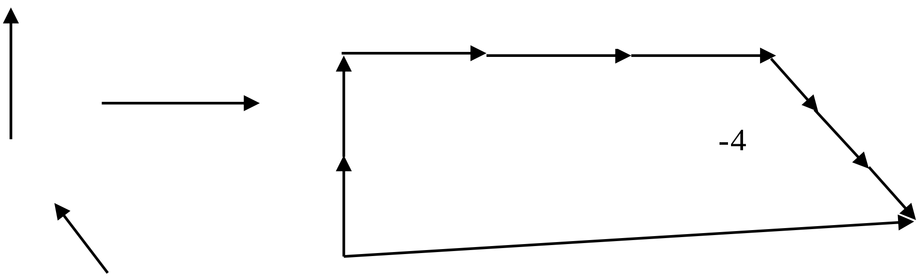

Рис. 12. Рисунок к задаче 6

VII тип. Задачи на усвоение свойства умножения вектора на число.

Задача 7: «Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причем $BM: MC = 3:1$. Выразите векторы AM и MD через векторы $a = AD$ и $b = AB$» [3, С. 211].

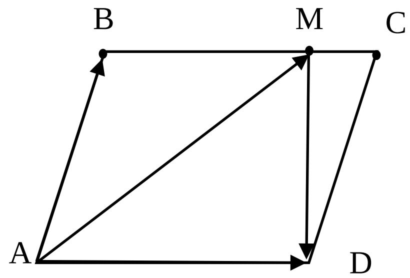

Рис. 12. Рисунок к задаче 7

Решение:

$AM = AB + BM, BM = \frac{3}{4}BC = \frac{3}{4}AD = \frac{3}{4}a, AM = b + \frac{3}{4}a$. $MD = MC + CD = \frac{1}{4}BC + CD = \frac{1}{4}AD + BA = \frac{1}{4}a - b$.

Ответ: $AM = b + \frac{3}{4}a, MD = \frac{1}{4}a - b$.

VIII тип. Задачи на усвоение понятия и свойств средней линии трапеции.

Задача 8: «Докажите, что отрезок соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований» [3, С.212].

Решение: Пусть точки M и N – середины диагоналей AC и BD, следовательно $AO = OC$ и $BO = OD$. Очевидно, что $BC = BD - AD + AC \rightarrow BC + AD = BD + AC \rightarrow BD + CA = -(AD + BC)$. Поэтому $MN = MA + AD + DN = \frac{1}{2}CA + AD + \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}\ \ CA + DB\ \ + AD = -\frac{1}{2}\ \ AD + BC\ \ + AD =$ $\frac{1}{2}\ \ AD - BC\ $. Так как $AD \uparrow\uparrow BC$ и $MN \uparrow\uparrow \frac{1}{2}(AD - BC)$, то $MN\ \ AD\ \ BC$ и $|MN\ \uparrow\uparrow \frac{1}{2}\ \ AD - BC\ | = \frac{AD-BC}{2}$. Ч.Т.Д.

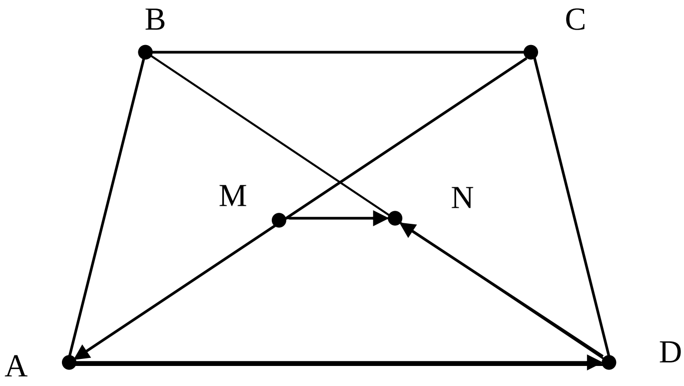

Рис. 14. Рисунок к задаче 8

IX тип. Задачи на разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

Задача 9: «Векторы a и b коллинеарны. Коллинеарны ли векторы: а) $a + 3b$; б) $b - 2a$ и a. Ответ обоснуйте» [3, С.232].

Решение:

а) Да, так как сумма коллинеарных векторов есть коллинеарный им вектор.

б) Да, так как разность коллинеарных векторов есть коллинеарный им вектор.

X тип. Задачи на усвоение понятия «координаты вектора».

Задача 10: «Выпишите координаты векторов $a = 2\imath + 3\jmath$; $b = -\frac{1}{2}\imath - 2\jmath$; $c = 8\imath$; $d = \imath - \jmath$; $e = -2\jmath$; $f = -\imath$» [3, С.233].

Решение:

$$a\ \ 2;3\ \ ;\ b\ \ -\frac{1}{2};2\ \ ;\ c\ \ 8;0\ \ ;\ d\ \ 1;-1\ \ ;\ e\ \ 0;-2\ \ ;\ f\ \ -1;0\ \ .$$

XI тип. Задачи на нахождение угла между векторами.

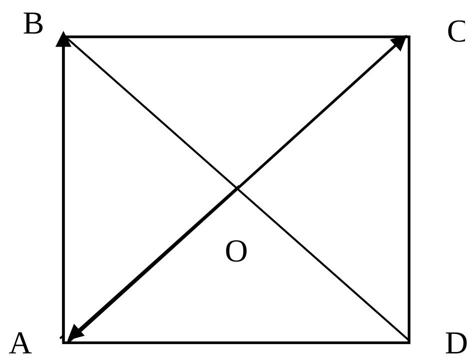

Рис. 15. Рисунок к задаче 11

Задача 11: «Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: а) AB и AC; б) OA и AB» [3, С.269].

Решение: а) $AB\ AC\ = 45^{\circ}$; б) $OA\ AB\ = 90^{\circ}$.

Задача 12: «В четырехугольнике $ABCD$ (Рис. 16) диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что $OB = OC = 1, OA = 2, OD = 3$. Найдите угол между прямыми AB и DC» [14, С. 144].

Дано: $ABCD$ – четырехугольник, $AC \perp BD, OB = OC = 1, OA = 2, OD = 3$.

Найти: $\angle(AB; CD)$.

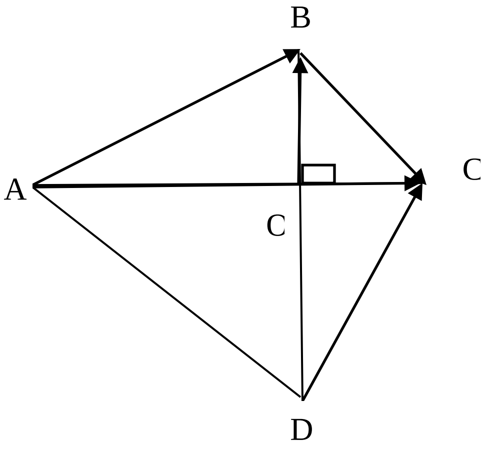

Рис. 16. Рисунок к задаче 12

Решение: В ΔAOB: по т. Пифагора $AO^2 + BO^2 = AB^2$, где $OA = 2, OB = 1$, найдем $AB = 5$. Аналогично для ΔCOD по т. Пифагора $CO^2 + OD^2 = CD^2$ находим $CD = 10$. Далее стороны четырехугольника обозначим через векторы AB, AO, OB, DC, DO, OC. Для нахождения суммы двух векторов воспользуемся правилом треугольником: $AB = AO + OB, DC = DO + OC$. Найдем скалярное произведение: $AB * DC\ = AB * DC * \cos\alpha = 5$. Найдем $\angle\ \alpha$, подставив в формулу $AB * DC\ = AB * DC * \cos\alpha$ известные данные: $5 = 5 * 10\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{2}{2}$, $\alpha = 45^{\circ}$. Нами был найден угол между векторами AB и DC, который равен $\alpha = 45^{\circ}$. Данные векторы являются направляющими для прямых AB и $DC \to \alpha = 45^{\circ}$ – искомый угол.

Ответ: 45°.

XII тип. Задачи на усвоение понятия и свойств скалярного произведения.

Задача 12: «Вычислите скалярное произведение векторов a и b, если $a\left(\frac{1}{4}; -1\right), b\{2;3\}$» [3, С.269].

Решение: $a\left(\frac{1}{4}; -1\right), b(2;3), a * b = \frac{1}{4} * 2 + (-1).3 = \frac{1}{2} - 3 = -2{,}5.$

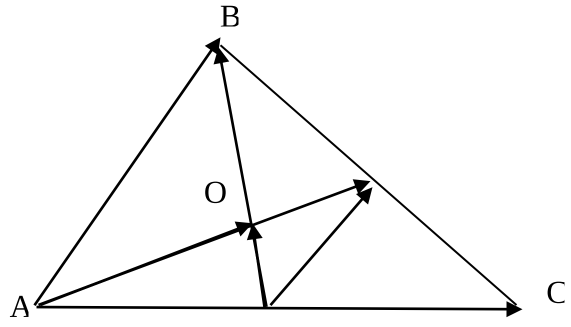

Рис. 17. Рисунок к задаче 13

XIII тип. Задачи на доказательство.

Задача 13: «Точка A_1 лежит на стороне BC, а точка B_1 – на стороне AC треугольника ABC (Рис. 17). O – точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1, причем $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{2}{1}$. Докажите, что AA_1 и BB_1 – медианы треугольника» [8, С. 82].

Дано: $\Delta ABC, A_1 \in BC, B_1 \in AC,\ O = AA_1 \cap BB_1, \frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{2}{1}$.

Доказать: AA_1 **и** BB_1 **– медианы** ΔABC.

Доказательство:

По условию $A_1 \in BC, B_1 \in AC$. $AO = 2OA,\ OB = 2B_1O$. Используя правило треугольника, выразим вектор AB:

$$AB = AO + OB = 2OA_1 + 2B_1O = 2B_1O + OA_1 = 2B_1A_1.$$

$$AB = AC + CB = yB_1C + xCA_1, \text{где } AC = yB_1C,\ CB = xCA_1.$$

Далее выразим вектор $B_1A_1 = B_1C + CA_1 \rightarrow\ yB_1C + xCA_1 =\ 2B_1C + 2CA_1$.

$$y - 2B_1C = x - 2A_1C \rightarrow x = 2, y = 2.$$

Если AB вдвое больше чем B_1A_1, то B_1A_1 – средняя линия, следовательно, A_1 и B_1– середины отрезков BC и AC, то есть AA_1 и BB_1 – медианы ΔABC. Ч.Т.Д.

Задача 14: «Диагонали параллелограмма $ABCD$ (Рис. 18) пересекаются в точке O. Точка K лежит на стороне BC, а E– на AD, причем $\frac{BK}{KC} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$. Докажите, что O – середина KE» [8, С. 72].

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $K \in BC, E \in AD$, $\frac{BK}{KC} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$.

Доказать: O – середина KE.

Доказательство:

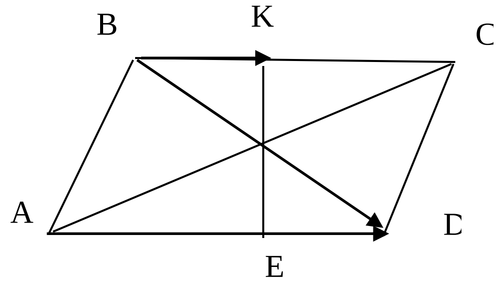

Рис. 18. Рисунок к задаче 14

По условию $K \in BC, E \in AD$, $\frac{BK}{KC} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$. $2BK = KC, 2ED = AE, BC = AD$. Используя правило сложения векторов получим: $BC = BK + KC = BK + 2BK = 3BK$, $AD = AE + ED = 2ED + ED = 3ED$. Значит, $BK = ED$. Используя правило треугольника при сложении векторов рассмотрим векторы BK и ED. $BK = BO + OK$, $ED = EO + OD = EO + BO$. Если $BK = ED$, BO и OD, то $EO = OK \rightarrow O$ – середина KE. Ч.Т.Д.

Задача 15: «Точки K, L, M, N – середины сторон BC, CD, DE, EA пятиугольника $ABCDE$, точки P и Q – середины отрезков KM и LN. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны, и найдите отношение их длин» [14, С. 144].

Дано: $ABCDE$ – пятиугольник (Рис. 19), $BK = KC, CL = LD, DM = ME, EN = NA, PK = MP, NQ = QL$.

Доказать: $PQ \parallel AB$.

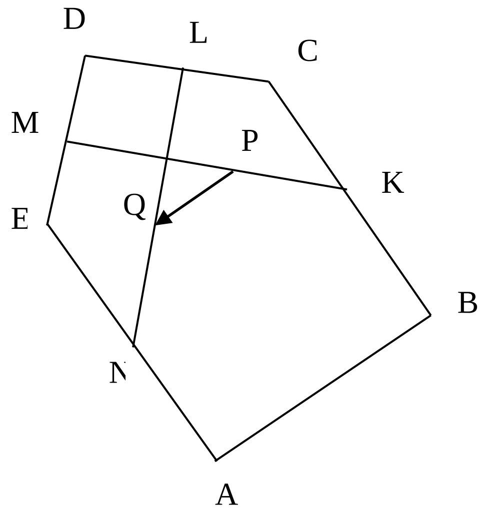

Рис. 19. Рисунок к задаче 15

Доказательство: Введем векторы PQ, AB. Возьмем произвольную точку O, такую что $OZ = \frac{1}{2}\ \ OX + OY$, где Z – середина отрезка XY. Выразим вектор PQ: $PQ = OQ - OP = \frac{1}{2}OL + ON - \frac{1}{2}OK + OM = \frac{1}{2}OC + OD + \frac{1}{2}OA + OE - \frac{1}{2}OB + OC - \frac{1}{2}OD + OE = \frac{1}{4}OA - OB = -\frac{1}{4}AB$. Следовательно, векторы PQ и AB коллинеарны, т.е. $PQ \parallel AB$ – Ч.Т.Д. $\frac{PQ}{AB} = \frac{1}{4}$ – искомое отношение.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 16: «На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$ и $BCKF$. Докажите, что медиана BD треугольника ABC перпендикулярна MF» [14, С. 144].

Дано: $\Delta ABC, BD$ – медиана, $ABMN$ и $BCKF$ – квадраты.

Доказать: $BD \perp MF$.

Доказательство: «Введем векторы BD, BA, BC, MF (Рис. 20). Далее воспользуемся правилом треугольника для суммы двух векторов:

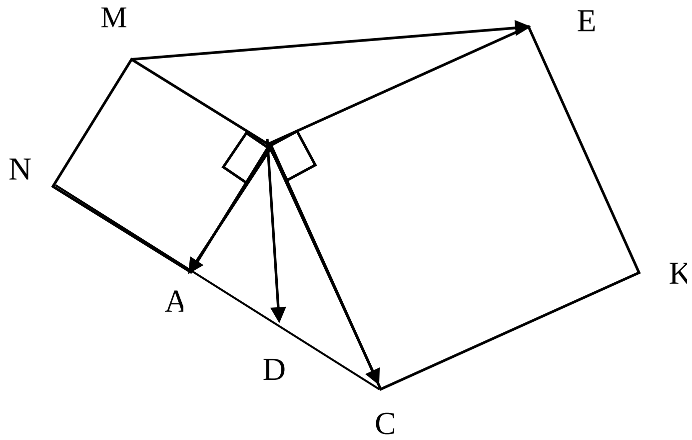

Рис. 20. Рисунок к задаче 16

$BD = \frac{1}{2}(BA + BC)$, $MF = MB + BF = BF - BM$. Найдем скалярное произведение для векторов BD и MF: $BD*MF = \frac{1}{2} BA + BC, \quad BF - BM = \frac{1}{2} BA * BF - \ BC * \ BM$. Отдельно найдем скалярное произведение $BA * BF$ и $BC * BM$:

$$BA * BF = \ BA \ * \ BF \ * \cos\angle ABF = \ BA \ * \ BF \ \cos(\angle ABC + 90^{\circ})$$

$$BC * BM = \ BC \ * \ BM \ * \cos\angle CBM = \ BC \ * \ BM \ \cos(\angle ABC + 90^{\circ})$$

Получается, что $BA = BM$, т. к. $ABMN$ – квадрат, аналогично $BF = BC \rightarrow BA * BF = BC * BM$. Вернемся к скалярному произведению векторов BD и MF: $BD*MF = \frac{1}{2} BA * BF - BC * BM = \frac{1}{2} * 0 = 0$. Т.о. $BD*MF = 0 \leftrightarrow BD \perp MF \longrightarrow BD \perp MF$» [14, С. 144].

Задача 17: «В окружность $(O;R)$ вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что если $AB^2 + CD^2 = 4R^2$, то диагонали этого четырехугольника перпендикулярны» [20, С. 126]. *Дано:* $(O;R)$ – окружность, $ABCD$ – четырехугольник, $AB^2 + CD^2 = 4R^2$(Рис.21) *Доказать:* $AC \perp BD$.

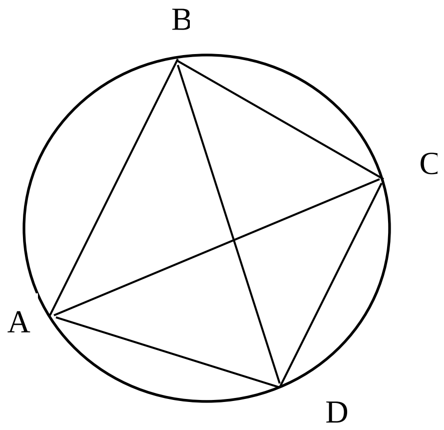

Рис. 21. Рисунок к задаче 17

Доказательство: Введем векторы AB, CD, OB, OA, OD, OC. Выразим векторы $AB = OB - OA$ и $CD = OD - OC$, подставим данные выражения в соотношение, которое приведено в условии задачи: $AB^2 + CD^2 = (OB - OA)^2 + \ OD - OC \ ^2 = 4R^2 - 2OB * OA + OD * OC$. Исходя из условия получаем: $OB * OA + OD * OC = 0 \ \ 1$, $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, значит $\angle BOC + \angle AOD = 180^\circ$. Из этого следует, что $OB * OC + OA * OD = 0$. Значит, $CA * DB = 0$, значит диагонали $AC \perp BD$. Ч.Т.Д.

Задача 18: «На отрезке AC построены два произвольных параллелограмма $ABDC$ и $ACKL$. Докажите, что четырехугольник $BDKL$ - параллелограмм» [20, С. 126].

Дано: $ABDC, ACKL$ – параллелограммы.

Доказать: $BDKL$ – параллелограмм.

Доказательство: Введем векторы AC, BD, KL (Рис. 22). $ABDC$ – параллелограмм, следовательно, $AC = BD \ \ 1$. Аналогично $ACKL$ – параллелограмм, следовательно $AC = LK$ (2). Из (1) и (2) выходит, что $BD = LK$ (3). Из (3) следует, что $BD \parallel KL$ и $BD = LK \longrightarrow BDKL$ – параллелограмм. Ч.Т.Д

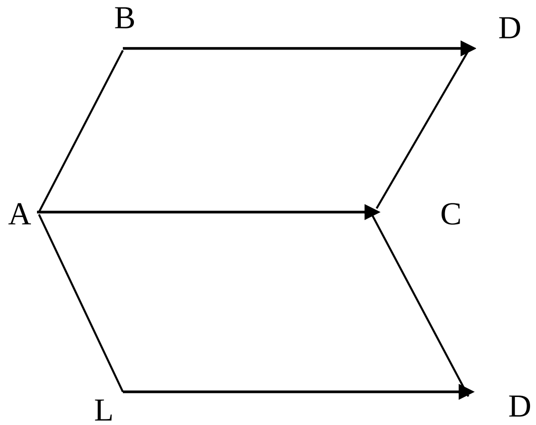

Рис. 22. Рисунок к задаче 18

В учебнике Л.С. Атанасяна [3] представлен разнообразный задачный материал, направленный на закрепление основных понятий и формирование всех необходимых умений и навыков. В соответствии с ожидаемыми результатами обучения, решение задач каждого уровня сложности должно быть хорошо отработано в классе со всеми учащимися.

На основе проведенного анализа, можно сделать вывод, что задачный материал, представленный в учебниках геометрии основной школы – довольно многообразен. Задачный материал всех рассмотренных учебников соответствует теоретическому материалу.

§5. Логико-дидактический анализ содержания темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы

1. Тематическое планирование темы «Векторы» по учебнику Л.С. Атанасяна [2]. В Таблице 4 представлен вариант тематического планирования учебного материала на изучение темы «Векторы». Предлагается следующее распределение часов по этой теме:

Таблица 4

Тематическое планирование учебного материала

Название параграфа	**Количество часов**	**Требования к результату уровня подготовки учащихся**
Понятие вектора	2	«Должны знать: определение вектора, равных векторов» [4, С. 155]. «Должны уметь: обозначать и изображать векторы, изображать вектор, равный данному» [4, С.155].
Сложение и вычитание векторов	4	«Должны знать: определение суммы векторов, правило треугольника и параллелограмма, законы сложения, определение разности двух векторов, понятие противоположного вектора» [4, С.157]. «Должны уметь: формулировать и применять законы сложения, строить вектор, равный разности двух векторов различными способами» [4, С.157].
Умножение вектора на число. Применение вектора к решению задач.	5	«Должны знать: определение умножения вектора на число, свойства умножения вектора на число, понятие средней линии трапеции» [4, С.162]. «Должны уметь: строить вектор, равный произведению вектора на число, применять

		векторы к решению задач» [4, С.162].
Координаты вектора, простейшие задачи в координатах	6	«Должны знать: формулировки и доказательства леммы о коллинеарных векторах и теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам, правила действий над векторами с заданными координатами» [4, С.188]. «Должны уметь: выводить формулы координат вектора через координаты его конца и начала, координат середины отрезка, длины вектора и расстояния между двумя точками» [4, С.188].
Скалярное произведение векторов	4	«Должны знать: определение скалярного произведения векторов, условие перпендикулярности ненулевых векторов, выражение скалярного произведения в координатах и его свойства» [4, С.210]. Должны уметь: объяснить, что такое угол между векторами, решать задачи по данной теме» [4, С.210].

2. Логико-математический анализ темы.

При изучении темы «Векторы» в учебнике Л. С. Атанасяна [3] доказывается восемь теорем, семь из них сформулированы в категоричной форме и только одна – в условной. В Таблице 5 в Приложении 3 приведен анализ представленных в учебнике теорем.

3. Учебные задачи и действия, им адекватные.

Согласно программе ФГОС [22] одной из основных учебных задач темы «Векторы и координаты на плоскости», является формирование у учащихся навыка решения задач с использованием векторов и координат на плоскости. Важная особенность формирования данного навыка – осознанное выполнение всех действий учащимися. При решении этой учебной задачи можно решить следующие подзадачи:

а) Раскрыть логическую структуру взаимосвязи определений от простого к сложному. Результатом решения этой подзадачи будет «цепочка» взаимосвязанных определений, а также умения воспроизводить их, выделяя родовое свойство и видовые отличия.

б) Овладеть приемами простейших действий с векторами. Результат – готовность к доказательству теорем и решению задач с использованием векторов.

в) Раскрыть специфику применения векторов к решению задач. Результат решения подзадачи – актуализированные общие приемы поиска решения задач.

4. Средства и приемы обучения.

Средства: модели и чертежи векторов на плоскости; магнитная доска; проектор; слайдовая презентация; электронные ресурсы для подготовки к ОГЭ; математические задачи, как средство подведения под понятие вектора и конкретизацию теоретических фактов; математические задачи, как цель реализации математической деятельности на школьном уровне.

Приемы: составление пошагового доказательства теорем; работа с учебником при доказательстве; составление таблиц и схем и представление их в классе для постепенного, непроизвольного запоминания.

5. Формы контроля и оценки.

При обучении данной теме контролироваться и оцениваться будет следующее: знание основных определений; умение доказывать теоремы, производить основные действия с векторами, решать задачи с использованием векторов.

На основе проведенного логико-дидактического анализа (по Е.И. Лященко [12]) можно сделать вывод, что тема «Векторы» занимает важное место в курсе геометрии основной школы, поэтому ей следует уделить особое внимание.

§6. Межпредметные связи математики и физики при изучении темы «Векторы»

Межпредметные связи играют важную роль в процессе обучения. Этой теме посвящены работы многих известных педагогов, все они сходятся во мнении, что межпредметные связи помогают на высоком уровне решить все поставленные задачи обучения.

Тесная связь между школьными курсами математики и физики очевидна: математические определения мы применяем на занятиях по физике, когда формулируем законы, преобразуем различные формулы или решаем физические задачи. Несмотря на тесную связь школьных курсов математики и физики, в преподавании этих дисциплин прослеживаются некоторые нарушения. Примеры таких нарушений выделяет А.В. Дадонова в своей статье: «Межпредметные связи в преподавании математики и физики». Автор пишет: «Имеют место случаи, когда чисто математические понятия в математике не рассматриваются, а в физике вводятся и используются. В геометрии подробно рассматриваются операции сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число, и совершенно отсутствует понятие проекции вектора на ось. Не всегда на уроках физики используются некоторые математические понятия, которые прочно утвердились в математике. В физике не пользуются понятием противоположных векторов и нулевого вектора, хотя они известны учащимся из курса геометрии 8 класса. В учебниках физики и математики иногда используется разная терминология, также иногда имеет место несоответствие между символикой. Хотя эти нарушения не столь значительны, знание их позволит учителям математики и физики более эффективно построить преподавание предмета» [7, С. 14].

Такую же точку зрения имеет Т.Т. Мухамедов. В своей статье «Межпредметные связи физики и математики» автор отмечает четкую выраженность временной несогласованности прохождения учебного материала по математике и физике. Автор пишет: «Возьмём тему «Векторы» в курсе геометрии 8 класса и темы «Скорость» и «Сила» в курсе физики 7 класса. Сразу отметим, что при изучении понятий силы и скорости учащиеся 7 класса получают информацию о векторных величинах, учатся складывать и вычитать векторы значительно раньше, чем на уроках геометрии. Кроме этого здесь также присутствует и понятийная несогласованность школьных программ по физике и математике, в этих дисциплинах различается понятийная трактовка в учебниках, а также по-разному трактуются и обозначаются отдельные термины. Ещё одним примером несоответствия программ может служить тот факт, что в физике вводится понятие проекции векторов на оси координат, а в геометрии – понятие координат векторов. Эти несоответствия программ и должны устраняться межпредметными связями физики и математики» [16, С. 56].

Для успешной реализации межпредметных связей между математикой и физикой Т.Т. Мухамедов дает свои рекомендации для учителей математики и физики. Учителю физики на первых уроках не рекомендуется заставлять учащихся заучивать тот факт, что сила и скорость являются векторами. Нужно только объяснить им, что сила и скорость имеют особые свойства, поэтому выполняемые над ними действия отличаются от обычных алгебраических действий над числами. Также он должен быть ознакомлен с содержанием школьной программы по математике, с принятой в ней терминологией. Учитель математики, в свою очередь, обязательно должен брать у учителя физики примеры обозначения величин в физике, примеры решения задач, решать математические уравнения не только с величинами, принятыми в математике, но и с величинами, которые приняты в физике.

Н.Б. Мельникова [13] в статье «Об изучении темы «Векторы на плоскости»» пишет, что одной из задач изучения векторов в курсе геометрии является формирование аппарата, необходимого для изучения ряда вопросов курса физики. Н.Б. Мельникова приводит конкретные рекомендации, которые учитель может использовать в своей работе при изучении темы «Векторы на плоскости» для успешного формирования межпредметных связей математики и физики.

1. В самом начале изучения темы следует сказать учащимся, что те сведения о векторах, которые им сообщат на уроках физики, на ближайших уроках геометрии будут рассмотрены и получат объяснение.

2. При введении понятия «вектор» полезно вспомнить, что в курсе физики рассматривались векторные величины – перемещение тела и скорость. В частности, можно напомнить учащимся определение из курса физики: «Перемещением тела (материальной точки) называют направленный отрезок прямой, соединяющий начальное положение тела с его последующим положением». После этого учитель дает математическое определение: «Направленный отрезок называется вектором». При введении вектора, следует сказать, что над буквенным обозначением вектора ставится стрелка или черта – в разной литературе по-разному.

3. Обратить внимание учащихся на то, что в учебнике геометрии вводится понятие «абсолютной величины вектора» или «модуля вектора», в учебнике же физики используется только понятие «модуль вектора». На уроке геометрии в ходе изложения материала и решения задач желательно использовать оба эти названия. При введении обозначения модуля вектора - $|a|$ нужно сказать, что в некоторой литературе знак модуля не ставят. Так, например, в физике вместо $|s|$ пишут s.

4. Перед введением определения координат вектора полезно напомнить учащимся, что в курсе физики они рассматривали понятие проекции вектора на ось. После этого можно привести данное в учебном пособии определение координат вектора

5. Перед тем как ввести определение суммы векторов можно вспомнить рассмотренное в физике правило: «Проекция суммы векторов на заданную ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось». Поскольку уже было сказано, что проекция вектора на ось равна координате по этой оси, то естественно возникает принимаемое в математике определение: «Суммой векторов a и b с координатами $\boldsymbol{a_1}, a_2$ **и** $\boldsymbol{b_1}, b_2$

называется вектор c с координатами $a_1 + b_1, a_2 + b_2$, т. е. $a \ a_1, a_2 + b \ b_1, b_2 = c(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$».

Также следует сказать учащимся, что правило треугольника и правило параллелограмма, по которым в физике находили сумму двух векторов, в геометрии доказываются.

На уроках геометрии не нужно забывать о том, что векторы являются важнейшим аппаратом физики. Неумение работать с векторами равносильно неумению решать многие физические задачи. Таким образом, нарушаются межпредметные связи, нарушается целостность мировоззрения учащихся. Это еще раз доказывает особую важность темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы.

Выводы по первой главе

1. История развития векторов взяла свое начало еще в XIX в., многие ученые внесли свой вклад в историю развития. В настоящее время, в современной математике, раздел, в котором излагается учение о действиях с векторами называют векторной алгеброй.

2. Анализируя материал, представленный в школьных учебниках, можно сделать вывод, что определять вектор, как направленный отрезок, неправильно. Так же неправильно определять вектор, как параллельный перенос. Нужно сначала определить направленный отрезок и равенство направленных отрезков, а уже потом высказывать определение вектора.

3. В учебниках геометрии разных авторов разная последовательность изучения темы «Векторы». Содержание представленного материала также имеет некоторые отличия.

4. Задачный материал, представленный в учебниках геометрии основной школы довольно многообразен. Задачный материал всех рассмотренных учебников соответствует теоретическому материалу.

5. На основе проведенного логико – дидактического анализа можно сделать вывод, что тема «Векторы» занимает важное место в курсе геометрии основной школы, поэтому ей следует уделить особое внимание.

6. На уроках геометрии не нужно забывать о том, что векторы являются важнейшим аппаратом физики. Неумение работать с векторами равносильно неумению решать многие физические задачи. Таким образом, нарушаются межпредметные связи, нарушается целостность мировоззрения учащихся. Это еще раз доказывает особую важность темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ВЕКТОРАМ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСОВНОЙ ШКОЛЫ

§7. Из опыта работы учителей по изучению темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы

В методической литературе теме «Векторы» уделяется большое внимание, но несмотря на это, для учеников она до сих пор является одной из самых трудных тем школьного курса геометрии. На это указывают работы многих учителей математики. Рассмотрим некоторые из них.

Л.Н. Аксаковская в статье «Трудности изучения темы «Векторы» в школьном курсе математики» пишет: «Учащиеся, заканчивая школу, порой не умеют выполнять даже простейшие операции над векторами. Подход к изложению этой темы должен быть пересмотрен. Формирование у учащихся умений применять векторы к решению задач, к доказательству суждений –

это одна из актуальных задач процесса обучения, раскрывающая значимость этой темы» [1, С. 83].

По мнению автора, после изучения темы «Векторы» необходимо постоянно возвращаться к ней в процессе обучения, пополнять знания учащихся новыми сведениями. Не выпуская данную тему из поля зрения учащихся долгое время, учитель сможет сформировать в их сознании целостную картину всех взаимосвязей. Рациональное представление данной темы в школьном курсе геометрии будет способствовать повышению качества знаний.

В статье «Опережающее обучение по темам «Геометрические преобразования» и «Векторы» в 8 классе» Г.Г. Левитас излагает методику опережающего обучения темам «Геометрические преобразования» и «Векторы». Автор пишет: «Геометрические преобразования и векторы – весьма трудные темы курса геометрии 8 класса. Главное, чего нам не хватает, - это времени, за которое ученик мог бы освоиться с материалом, привыкнуть к нему. В поисках решения данной проблемы я обратился к методу опережающего обучения, давно известного в дидактике» [10, С. 34].

Г.Г. Левитас разработал и проверил на практике систему из 8 вопросов. Он включал по одному из этих вопросов в регулярно проводимые им диктанты по геометрии. Начинать работу нужно с таким расчетом, чтобы последний вопрос прозвучал непосредственно перед началом темы. Вот какие вопросы предлагает автор:

1. Стрелку, идущую из одной точки в другую, называют вектором. В скобках указывают, на сколько вторая точка левее или правее первой и на сколько она выше или ниже первой точки. Скопировать с доски вектор $a\ (-2;3)$.

2. Начертить вектор $c\ (3;1)$.

3. Скопировать с доски по клеткам треугольник ABC и вектор $a\ (1;-1)$. Перенести треугольник ABC на вектор a.

4. Скопировать с доски по клеткам треугольник ABC и наклонный вектор a. Перенести треугольник ABC на вектор a.

5. Скопировать с доски по клеткам треугольник ABC и вектор $a\ (1;-2)$. Перенести треугольник ABC на вектор $3a$.

6. Скопировать с доски по клеткам треугольник ABC и вектор $a\ (2;-1)$. Перенести треугольник ABC на вектор $-a$.

7. Скопировать с доски по клеткам треугольник ABC, вектор $a\ (2;-4)$ и вектор $b\ (1;2)$ Перенести треугольник ABC на $a+b$, то есть сначала на a, а потом на b.

8. Скопировать с доски по клеткам треугольник ABC, вектор $a\ (2;-4)$ и вектор $b\ (1;2)$ Перенести треугольник ABC на $a-b$, то есть сначала на a, а потом на $-b$.

Интересно, что уже дважды после проведения этого опережающего обучения на вопрос «Так что же мы назовем вектором?» автор слышит от детей определение, данное в школьном учебнике геометрии А. Н. Колмогорова: «Вектор – это параллельный перенос».

Е.В. Якушина [25] в статье «Об изучении векторов в планиметрии и стереометрии» делится с нами своим методом изучения темы «Векторы». В учебниках геометрии изучение данной темы включает в себя два этапа. Смысл первого этапа заключается в изучении свойств векторов на плоскости, второго – в пространстве.

Автор пишет: «На первом этапе предполагается серьезное изучение со строгими доказательствами, а на втором – ссылки на первый этап. На мой взгляд, это является недостатком плана изучения. Разумнее на первом этапе некоторые теоремы принять без строгих доказательств. Снятие ряда доказательств теорем в курсе планиметрии даст возможность больше времени уделить обучению применению этих теорем к решению математических задач и задач, носящих прикладной характер» [25, С.29].

При дальнейшем изучении темы «Векторы» в каждый соответствующий раздел стереометрии необходимо добавить доказательства теорем, рассмотренных в курсе планиметрии без доказательств.

Интересным опытом работы делится с нами О.С. Шулбаева [24] в статье «Использование проектных технологий на уроках геометрии при изучении темы «Векторы»». Данная деятельность предполагает накопление учащимися опорных схем, конспектов, различных таблиц по теме и последующее их объединение в одно целое. Вот как это работает: на первом уроке происходит ознакомление с идеей проекта. Учитель ставит цели и определяет задачи проекта, дает идею оформления проекта. Затем – внимательное изучение темы, определение основных понятий. На уроках учащиеся слушают учителя, конспектируют материал, решают представленные задачи. Дома, при выполнении домашнего задания, учащиеся составляют свой опорный конспект, оформляют его по своему усмотрению. Т. е. в начале следующего урока учащиеся должны предоставить опору предыдущей темы, которая должна быть оформлена в красочной свободной форме. Таким образом, за время изучения темы учащиеся накопят большое количество материала.

Использование проектных технологий нацелено на получение глубоких и прочных знаний по изучаемой теме. Работа над проектом поможет активно развивать внутреннюю мотивацию учащихся, позволит каждому ученику проявить самостоятельность, инициативу, избирательность в способах работы. После использования проектных технологий на уроках геометрии при изучении темы «Векторы» О.С. Шулбаева [24] пришла к выводу, что данный метод работы помогает учащимся не только овладеть базовыми знаниями по данной теме, но и многосторонне развить свою личность. Во время работы над проектами учащиеся проявили талант и фантазию, повысили уровень своего развития, все это, однозначно, способствовало повышению интереса к изучению темы «Векторы».

Сьюзан Колли [27] в книге «Векторное исчисление» представила большое количество материала по теме «Векторы». Данный материал могут использовать учителя геометрии на своих уроках и на внеурочных занятиях. В книге подробно разобран весь теоретический материал, к каждому разделу предложена система задач. Представленные задачи, могут быть использованы как во время самостоятельной работы учащихся, так и при совместной работе с учителем.

Банеш Хоффманн [29] в книге «О векторах» также подробно разобрал тему «Векторы». Автор пишет в сложном стиле, но это не мешает представленному материалу быть простым и доступным. Основные вопросы, представленные в книге: понятие вектора, правило параллелограмма, координаты вектора, скалярное произведение. В книге представлено почти 400 упражнений, которые направлены не только на усвоение темы «Векторы», но и на развитие у учащихся логического мышления, творческих способностей.

В данном параграфе был рассмотрен опыт работы учителей по теме исследования. Для качественной работы в школе молодому специалисту необходимо постоянно изучать опыт работы своих коллег.

§8. Методические рекомендации изучения темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы

1. Н. Л. Стефанова пишет: «Несмотря на некоторые отличия в трактовке понятия «вектор» в учебниках геометрии содержание данной темы практически не отличается. В содержание входит: векторы, коллинеарность и компланарность векторов, сложение векторов и умножение на число, свойства данных действий, скалярное произведение и его свойства, координаты векторов, применение векторов к решению задач» [21, С. 343].

2. «При традиционном разделении школьного курса геометрии на планиметрию и стереометрию векторы в школе изучаются дважды: в

основной школе – векторы на плоскости, а в старшей – векторы в пространстве, что представляется нецелесообразным, поскольку, часть вопросов просто дублируется. Один из не совсем удачных выходов по разрешению данной ситуации – это исключение темы «Векторы» из курса основной школы и изучение ее только в старшей школе. Однако, это вызовет определенные трудности при изучении физики и нарушит целостность геометрических знаний выпускников основной школы. Другой выход – изучение векторов в основной школе сразу в пространстве на пространственных фигурах. Минимально необходимый набор фактов для успешного изучения физики и применения векторного метода при решении геометрических задач может быть освоен с опорой на знание свойств параллелепипеда.» [21, С. 343].

3. «Изучение векторов в курсе геометрии следует согласовать с тем опытом действий над векторами, который приобрели школьники при изучении физики так как действия с силами они выполняют уже в 7 классе» [21, С. 344].

4. «При рассмотрении вектора следует четко выделить 2 составляющие: численное значение и направление вектора. Если вектор вводится как направленный отрезок, то следует сразу же рассмотреть понятие равных векторов, то есть необходимо понятие направления. Если же вектор рассматривается как связанный, то необходимо ввести операцию откладывания вектора» [21, С. 344].

5. «Данная тема предполагает большое количество новых понятий. Все эти понятия могут быть рассмотрены на одном уроке, сделаны соответствующие выводы, которые могут быть оформлены в виде краткого конспекта» [21, С. 343].

6. Рассмотрение основных понятий возможно в процессе выполнения следующих заданий (система заданий в качестве примера):

а) «Из курса физики вы знаете о существовании векторных и скалярных величин. Приведите примеры таких величин. В чем отличия векторов от скаляров? Что между ними общего? Какие основные характеристики векторных величин? Как изображаются векторы?» [21, С. 344].

б) «Вектор определяется как направленный отрезок и как параллельный перенос. Удалось ли кому-либо из вас найти иные определения вектора? При каком условии отрезок превращается в направленный? Как определяется нулевой вектор? Почему вектор называют параллельным переносом? Задает ли направленный отрезок параллельный перенос? Задается ли параллельный перенос нулевым вектором?» [21, С. 344].

в) «Разыскивая определение вектора один ученик в математической энциклопедии выяснил, что среди векторов выделяют свободные, связанные и скользящие. Как определяются указанные векторы? Чем различаются свободный и связанный векторы?» [21, С. 344].

г) «Рассмотрите модель или изображение параллелепипеда. Сколько различных направлений задают его ребра? Как можно определить понятие «направление»? Какие векторы будем называть сонаправленными, противоположно направленными? Какие векторы можно назвать равными и противоположными? Назовите векторы на модели параллелепипеда. В чем их отличие? Какой вектор можно назвать нулевым? Что можно сказать о длине и направлении нулевого вектора?» [21, С. 344].

д) «Анализируя термин «коллинеарные векторы» сформулируйте определение этого понятия. Какие векторы будут называться компланарными? Можно ли утверждать, что коллинеарные векторы являются еще и компланарными? Можно ли утверждать, что два вектора, сонаправленные третьему будут сонаправленными? А если эти векторы будут противоположно направленными?» [21, С. 344].

е) «Из курса физики вы знаете, что действие силы на тело зависит от его численного значения, направления и точки приложения. Какие действия следует выполнить, чтобы отложить вектор, равный данному от заданной точки? Сколько векторов, равных данному, можно отложить от заданной точки? Как вы обоснуете полученный вывод? Какие теоретические факты понадобились для обоснования данного утверждения?» [21, С. 345].

ж) «Вспомните определения углов между прямыми, лучами, прямой и плоскостью, плоскостями. Какое определение угла между векторами вы можете предложить? Какой будет величина угла между сонаправленными, противоположно направленными векторами?» [21, С. 345].

7. Актуализировать опыт учащихся при изучении операций над векторами и организовать их самостоятельную познавательную деятельность можно при выполнении следующих заданий:

а) «Из курса физики вы знаете, что на тело одновременно могут действовать несколько сил. Какую силу называют равнодействующей этих сил? Будет ли двигаться тело под действием двух равных, но противоположно направленных сил? Какое правило сложения коллинеарных векторов вы можете получить, основываясь на знаниях курса физики?» [21, С. 345].

б) «Один семиклассник, узнав на уроке физики правило сложения сонаправленных или противоположно направленных сил, поставил вопрос: «Как можно сложить силы, не лежащие на одной прямой?». Дома он решил провести соответствующий опыт: взял модель автомобиля, привязал к ней две прочные нити и, расположив их под углом друг к другу, потянул за эти нити. Как стала двигаться модель автомобиля? Какой стала равнодействующая этих сил? Какое правило сложения двух векторов, отложенных от одной точки, установил ученик в результате данного опыта? Как сложить два вектора, не имеющие общего начала? Как сложить три вектора, выходящие из одной точки?» [21, С. 345].

в) «Отвечая на вопросы предыдущей задачи, мы установили, что два неколлинеарных вектора складываются по правилу параллелограмма, а три по правилу параллелепипеда. Можно ли утверждать, что любые два вектора и их сумма будут лежать в одной плоскости? Зависит ли результат сложения векторов от выбора точки, от которой отложены векторы?» [21, С. 345].

г) «Выполните сложение 5 векторов. Как сложить несколько векторов, не лежащих в одной плоскости? Задайте несколько векторов, лежащих на ребрах параллелепипеда и найдите их сумму» [21, С. 346].

д) «Можно ли заменить вычитание чисел сложением? По аналогии с этим правилом сформулируйте правило вычитания двух векторов. Можно ли заменить операцию вычитания двух векторов сложением? Какое правило вычитания векторов вы установили?» [21, С. 346].

В результате выполнения этих заданий должны быть сформулированы правила треугольника и многоугольника, параллелограмма и параллелепипеда, сформулированы свойства сложения векторов.

8. «Изучая действия над векторами, следует обратить внимание на аналогию между действиями над числами и действиями над векторами и указать, что векторы с введенными действиями образуют специальную структуру - линейное пространство. При изучении векторов в основной школе недостаточное внимание уделяется разложению вектора на составляющие, на это следует обратить особое внимание» [21, С. 346].

9. Изучение темы «Скалярное произведение векторов и его свойства» может быть организовано в виде семинара, на котором выполняются следующие задания:

а) Сформулируйте определение скалярного произведения векторов. Где вы встречались со скалярным произведением в курсе физики?

б) Найдите в справочнике по математике формулу для вычисления скалярного произведения векторов в координатах. Вспомните свойства умножения чисел, какими из этих свойств обладает скалярное произведение векторов? Запишите формулы для вычисления скалярного произведения. Выразите из формулы одни компоненты через другие. Какой вид примет формула для сонаправленных векторов, для противоположно направленных векторов?

в) Вычислите скалярный квадрат вектора. Как, пользуясь формулой, можно вычислить длину вектора? Можете ли вы, зная координаты вектора, вычислить его длину, не прибегая к скалярному произведению?

10. «При изучении векторов появляется новый метод для решения задач – векторный. Суть векторного метода учитель может сформулировать для учащихся следующим образом: геометрические понятия и отношения переводятся на векторный язык, выполняются преобразования на векторном языке, полученные результаты переводятся на геометрический язык и осмысливаются в геометрических понятиях. Учителю следует выделить два типа задач, решаемых векторным методом: аффинные задачи и метрические задачи» [21, С. 349].

Изучение векторов тесно связано с изучением координат на плоскости и в пространстве. С координатами на плоскости учащиеся знакомятся еще в курсе математики 6 класса и при изучении функций в курсе в курсе алгебры 7-9 классов [18].

Авторская методическая разработка по теме «Векторы» для учеников основной школы.

В соответствии с обязательными результатами обучения теме «Векторы» в работе представлены три самостоятельные работы для учеников 8 и 9 классов на различные темы, а именно:

1. «Сумма и разность векторов». Работа предназначена для учеников 8 класса. Цель: контроль усвоения знаний учащихся по данной теме (законы сложения векторов, определение разности двух векторов). Карточка содержит в себе 4 задачи. Работа рассчитана на 30 минут.

2. «Свойства умножения вектора на число». Работа предназначена для учеников 8 класса. Цель: контроль усвоения знаний учащихся по данной теме (правило произведения вектора на число, свойства умножения вектора на число). Карточка содержит в себе 2 задачи. Работа рассчитана на 20 минут.

3. «Скалярное произведение векторов». Работа предназначена для учеников 9 класса. Цель: контроль усвоения знаний учащихся по данной теме (определение скалярного произведения, умение находить скалярное произведение двух векторов). Карточка содержит в себе 2 задачи. Работа рассчитана на 20 минут. При разработке данной самостоятельной работы использовались задачи из учебника Л.С. Атанасяна [3].

По сложности карточки делятся на 3 уровня.

I уровень сложности. Задачи данного уровня сложности выполняются учениками на оценку «3». В каждом задании представлен чертеж и указания к решению. Задачи данного уровня являются задачами обязательных результатов обучения, поэтому каждый ученик должен уметь решать представленные задачи.

II уровень сложности. Задачи данного уровня сложности выполняются учениками на оценку «4». Уровень включает в себя задачи I уровня сложности без указаний к решению и задачи II уровня сложности с указаниями к решению.

III уровень сложности. Задачи данного уровня сложности выполняются учениками на оценку «5». Сюда включен II уровень сложности без указаний к решению, а также III уровень сложности с указаниями к решению.

1. *Самостоятельная работа по теме: «Сумма и разность векторов» (8 класс).*

I уровень сложности.

Задача 1: «Дан произвольный четырехугольник $MNPQ$. Докажите, что: а) $MN + NQ = MP + PQ$; б) $MN + NP = MQ + QP$» [3, С. 204].

Чертеж и указание к решению пункта а):

Дано: $MNPQ$ – четырехугольник.

Доказать: $MN + NQ = MP + PQ$.

Доказательство:

Доказательство производится с помощью правила треугольника.

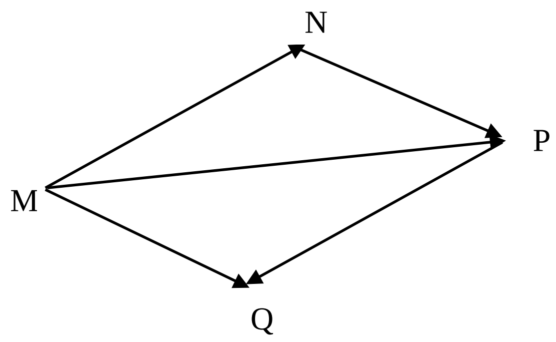

Рис. 23. Рисунок к задаче 1

Задача 2: «Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $AB + BC$; б) $AB + AC$; в) $AB + CB$; г) $BA - BC$; д) $AB - AC$» [3, С. 205].

Чертеж и указание к решению пункта а):

Дано: ΔABC, $AB = BC = AC = a$.

Найти: $AB + BC$.

Решение: Решение производится с помощью правила треугольника.

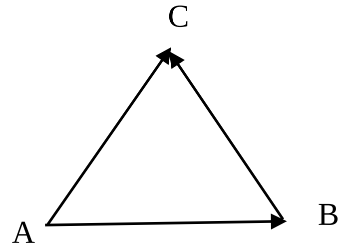

Рис. 24. Рисунок к задаче 2

Задача 3: «В треугольнике ABC: $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^{\circ}$. Найдите: а) $BA| - |BC$ и $BA - BC$; б) $AB| + |BC$ и $AB + BC$; в) $|BA| + |BC$ и $BA + BC$; г $AB - BC$ и $|AB - BC|$» [3, С. 205].

Чертеж и указание к решению пункта а):

Дано: ΔABC, $AB = 6, BC = 8, \angle B = 90^{\circ}$.

Найти: $BA| - |BC$ и $BA - BC$.

Решение: Решение производится с помощью определения разности двух векторов.

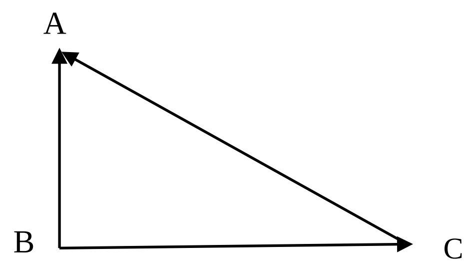

Рис. 25. Рисунок к задаче 3

Задача 4: «На рисунке 259 изображены векторы a, b, c, d, XY. Представьте вектор XY в виде суммы остальных или им противоположных векторов» [3, С. 205]

Указание к решению данной задачи:

1) Выражаем вектор XY через сумму 4-х векторов по правилу многоугольника.
2) Выполняем замену обозначений получившихся векторов на вектора a, b, c, d и снова выражаем вектор XY.

II уровень сложности.

Задача 1: «Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $AB + BC$; б) $AB + AC$; в) $AB + CB$; г) $BA - BC$; д) $AB - AC$» [3, С. 205].

Задача 2: «В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^{\circ}$. Найдите: а) $BA| - |BC$ и $BA - BC$; б) $AB| + |BC$ и $AB + BC$; в) $|BA| + |BC$ и $BA + BC$; г AB $-$ BC и $|AB - BC|$» [3, С. 205]

Задача 3: «Докажите, что для любых двух неколлинеарных векторов x и y справедливо неравенство $|x + y| < |x| + |y|$» [3, С. 204].

Указание к решению данной задачи: доказательство производится с помощью правила треугольника.

Задача 4: «Точки M и N – середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы BM, NC, MN, BN через векторы $a = AM, b = AN$» [3, С. 205].

Указание к решению данной задачи: доказательство производится с помощью правила треугольника.

III уровень сложности.

Задача 1: «Докажите, что для любых двух неколлинеарных векторов x и y справедливо неравенство $|x + y| < |x| + |y|$» [3, С. 204].

Задача 2: «Точки M и N – середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы BM, NC, MN, BN через векторы $a = AM, b = AN$» [3, С. 205].

Задача 3: «Докажите, что если A, B, C, D – произвольные точки, то $AB + BC + CD + DA = 0$» [3, С. 204].

Указание к решению данной задачи: доказательство производится при помощи правила треугольника.

Задача 4: «Отрезок BB_1- медиана треугольника ABC. Выразите векторы B_1C, BB_1, BA, BC **через** $x = AB_1$ **и** $y = AB$» [3, С. 205].

Указание к решению данной задачи: доказательство производится при помощи правила треугольника.

2. *Самостоятельная работа по теме: «Свойства умножения вектора на число» (8 класс).*

I уровень сложности.

Задача 1: «Пусть $x = m + n, y = m - n$. Выразите через m **и** n векторы: **а)** $2x - 2y$;**б)** $2x + \frac{1}{2}y$; **в)** $- x - \frac{1}{3}y$» [3, С. 211].

Указание к решения пункта а):

Решение производится при помощи выноса за скобку общего множителя и последующей замены x и y.

Задача 2: «В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а M – точка на стороне AD, такая, что $AM = \frac{1}{2}MD$. Выразите через векторы $x = AD, y = AB$ **следующие векторы: а)** $AC, AO, CO, DO, AD + BC, AD + CO, CO + OA$;**б)** AM, MC, BM, OM» [3, С. 211].

Чертеж и указание к решению пункта а):

Дано: $ABCD$- параллелограмм, $AM = \frac{1}{2}MD, AD = x, AB = y$.

Найти: $AC, AO, CO, DO, AD + BC, AD + CO, CO + OA$.

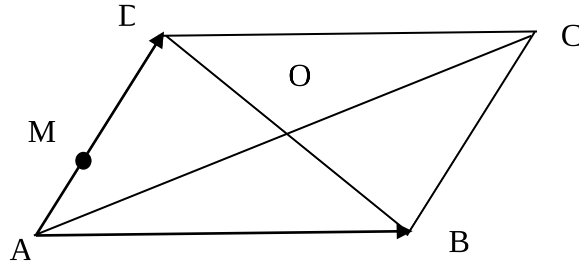

Рис. 26. Рисунок к задаче 2

Решение: Решение производится с помощью правила треугольника, правила параллелограмма и свойств умножения вектора на число.

II уровень сложности.

Задача 1: «Пусть $x = m + n, y = m - n$. Выразите через m и n векторы: а) $2x - 2y$; б) $2x + \frac{1}{2}y$; в) $-x - \frac{1}{3}y$» [3, С. 211].

Задача 2: «Докажите, что для любого вектора a справедливы равенства а) $1 * a = a$; б) $-1 * a = -a$» [3, С. 211].

Указание к решению данной задачи: решая равенства, выясняем вид векторов (сонаправленные или противоположнонаправленные), исходя из результата делаем вывод.

III уровень сложности.

Задача 1: «Точки M и N – середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $MN = \frac{1}{2}(AD + CB)$» [3, С. 211].

Задача 2: Точка O – середина медианы EG треуголника DEF. Выразите вектор DO через векторы $a = ED$ и $b = EF$» [3, С. 212].

Указание к решению данной задачи: решение производится при помощи правила треугольника.

3. *Самостоятельная работа по теме: «Скалярное произведение векторов» (9 класс).*

I уровень сложности.

Задача 1: «Вычислите скалярное произведение векторов a и b, если $|a| = 2, |b| = 3$, а угол между ними равен: а) 45°; б) 90°; в) 135°» [3, С. 269].

Указание к решения пункта а): Решение производится при помощи использования определения скалярного произведения двух векторов.

Задача 2: «В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $AB * AC$; б) $AC * CB$; в) $AC * BD$; г) $AC * AC$» [3, С. 269].

Указание к решения пункта а): Решение производится при помощи использования правила треугольника и определения скалярного произведения векторов.

II уровень сложности.

Задача 1: «В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $AB * AC$; б) $AC * CB$; в) $AC * BD$; г) $AC * AC$» [3, С. 269].

Задача 2: «Вычислите скалярное произведение векторов $p = a - b - c$ и $q = a - b + c$ если $|a| = 5, |b| = 2, |c| = 4$ и $a \perp b$» [3, С. 270].

Указание к решению данной задачи: подставить данные значения векторов в формулу скалярного произведения и произвести вычисления.

III уровень сложности.

Задача 1: «Вычислите скалярное произведение векторов $p = a - b - c$ и $q = a - b + c$ если $|a| = 5, |b| = 2, |c| = 4$ и $a \perp b$» [3, С. 270].

Задача 2: «Вычислите скалярное произведение векторов a и b, если $a = 3p - 2q$ и $b = p + 4q$ где p и q – единичные взаимно перпендикулярные векторы. Указание к решению данной задачи: подставить данные значения векторов в формулу скалярного произведения и произвести вычисления» [3, С. 270].

Таким образом, получилось 9 карточек с заданиями для проведения самостоятельных работ в основной школе. Самостоятельные работы подобного вида можно проводить в начале урока перед изучением новой темы. Проведение таких самостоятельных работ поможет проводить своевременный контроль знаний и подскажет учителю на что стоит обращать особое внимание.

§9. Типология задач по теме «Векторы» в заданиях Основного Государственного Экзамена

В данном параграфе представлены основные типы задач, которые встречаются в заданиях Основного Государственного Экзамена по математике в 9 классе по теме «Векторы». К каждому типу задач приведен пример задачи с решением.

I тип. Задачи на тему «Координаты вектора» (I часть).

Задача №1. Вектор AB с началом в точке $A(2;4)$ имеет координаты $(6;2)$. Найдите ординату точки B.

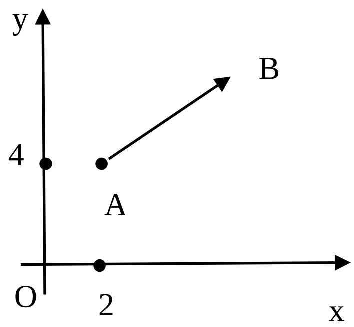

Рис. 27. Рисунок к задаче 1

Решение: Чтобы найти координаты вектора AB, зная координаты его начальной точки A и конечной точки B, необходимо из координат конечной точки вычесть соответствующие координаты начальной точки. Так как вектор AB имеет координаты $(6;2)$, то легко вычислить координаты точки B: $B(x-2=6; y-4=2)$. Следовательно, точка B имеет координаты $(8;6)$.

Ответ: 6.

Задача №2. Вектор AB с началом в точке $A(9;1)$ имеет координаты $(5;3)$. Найдите сумму координат точки B.

Ответ: 18.

II тип. Задачи на тему: «Вычисление длины вектора» (I часть).

Задача №3. Найдите длину вектора $a(3;4)$.

Решение: Чтобы вычислить длину вектора a воспользуемся соответствующей формулой: $a = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставив координаты вектора a получаем: $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Ответ: 5.

Задача №4. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 16 и 30. Найдите длину разности векторов AB и AD.

Ответ: 34.

III тип. Задачи на тему: «Скалярное произведение векторов» (I часть).

Задача №5. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 4 и 18. Найдите скалярное произведение векторов AB и AD.

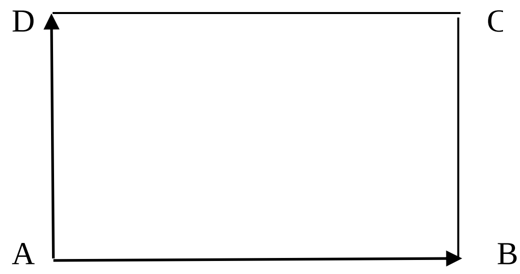

Рис. 28. Рисунок к задаче 7

Решение: Так как $ABCD$ – прямоугольник, следовательно, угол между векторами AB и AD равен 90°. По определению скалярное произведение векторов находится по формуле: $a * b = a * b * \cos ab$. Подставляем значения из условия задачи в формулу и получаем: $AB * AD = 4 * 18 * \cos 90^{\circ} = 0$.

Ответ: 0.

Задача №6. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 24 и 10. Найдите скалярное произведение векторов $AO + BO$.

Ответ: 0.

IV тип. Задачи на тему: «Сумма векторов» (II часть).

Задача №7. Даны векторы $a(2-m;4)$,$b\ (0;-n)$, $c(m-1;3)$. Найдите $m+n$, если $a{=}b+2\,c$.

Решение: Данное уравнение $a{=}b+2\,c$ запишем в координатной форме: $(2-m;4) = \ 0;-n\ \ +2(m-1;3)$. Умножим координаты вектора c на 2 и сложим координаты вектора b и соответствующие координаты вектора $2\,c$, получим в результате: $2-m;4\ =\ 0;-n\ +\ 2m-2;6$, $2-m;4\ =\ 2m-2;6-n$. Тогда $2-m=2m-2$ и $4=6-n$, откуда $m=\frac{4}{3}$ и $n=2$, а $m+n=3\frac{1}{3}$.

Ответ: $3\frac{1}{3}$.

V тип. Задачи на тему: «Коллинеарность векторов» (II часть).

Задача №8. Найдите произведение чисел k и p, при которых векторы $a\ (k; k+2p; 4)$ и $b(1; k+p;\ -2)$ коллинеарны.

Решение: Зная условие коллинеарности векторов запишем $\frac{k}{1} = \frac{k+2p}{k+p} = \frac{4}{-2}$ или $\begin{cases} k = -2, \\ \frac{k+2p}{k+p} = -2. \end{cases}$ Подставим значение $k = -2$ в уравнение $\frac{k+2p}{k+p} = -2$, далее найдем значение p: $\frac{-2+2p}{-2+p} = -2, p-1 = 2-p, p = 1{,}5$. Теперь найдем произведение чисел k и p: $-2 * 1{,}5 = -3$.

Ответ: $= -3$.

Задача №9. Векторы a и b не коллинеарные. Найдите значения α и β, если векторы $c = \alpha * a + \beta * b$ и $d = (\beta + 1) * a + (2 - \alpha) * b$ равны.

Ответ: $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$.

VI тип. Задачи на тему «Угол между векторами» (II часть).

Задача №10. При каком значении n угол между векторами $a\ (6; -2; -n)$ и $b\ (3; 0; 2n)$ острый?

Решение: Угол между векторами a и b находят по формуле $\cos\alpha = \frac{a*b}{|a|*|b|}$. Согласно условию $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, значит $\cos\alpha > 0$. Так как $|a| > 0$ и $|b| > 0$, то $\cos\alpha > 0$ при условии, что $a * b > 0$. Найдем скалярное произведение векторов a и b и решим неравенство $a * b > 0 \rightarrow 6 * 3 + (-2) * 0 + (-n) * 2n > 0, n^2 < 9, |n| < 3, n \in (-3; 3)$.

Ответ: $n \in (-3; 3)$.

Задача №11. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB| = |AC| = 8$. Точка E делит боковую сторону AB в отношении 3:1, считая от вершины B. Найдите угол между CE и CA, если $|CA| = 12$.

Ответ: $arc\cos\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Проанализировав все типы задач по теме «Векторы» в заданиях Основного Государственного Экзамена можно сделать вывод, что представленный задачный материал недостаточно многообразен. Также тема «Векторы» не всегда встречается в заданиях Основного Государственного Экзамена.

Выводы по второй главе

1. Был рассмотрен опыт работы учителей по теме исследования. Для качественной работы в школе молодому специалисту необходимо постоянно изучать работы своих коллег.

2. Изучение координат в курсе геометрии неразрывно связано с системой координат на плоскости, то есть с алгеброй. Векторы и координаты позволяют реализовывать межпредметные связи. Изучение векторов следует организовать с опорой на знания, полученные в курсе алгебры и физики. Интересным является решение известных ученикам задач, доказательство известных теорем векторным или координатным средствами.

3. Проанализировав все типы задач по теме «Векторы» в заданиях Основного Государственного Экзамена можно сделать вывод, что представленный задачный материал недостаточно многообразен. Также тема «Векторы» не всегда встречается в заданиях Основного Государственного Экзамена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. История развития векторов взяла свое начало еще в XIX в., многие
ученые внесли свой вклад в историю развития. В настоящее время, в современной математике, раздел, в котором излагается учение о действиях с векторами называют векторной алгеброй.

2. После рассмотрения материала, представленного в школьных учебниках, можно сделать вывод, что определять вектор, как направленный отрезок, неправильно. Так же неправильно определять вектор, как параллельный перенос. Нужно сначала определить направленный отрезок и равенство направленных отрезков, а уже потом высказывать определение вектора.

3. В учебниках геометрии разных авторов разная последовательность изучения темы «Векторы». Содержание представленного материала также имеет некоторые отличия.

4. Задачный материал, представленный в учебниках геометрии основной школы довольно многообразен. Задачный материал всех рассмотренных учебников соответствует теоретическому материалу.

5. На основе проведенного логико-дидактического анализа можно сделать вывод, что тема «Векторы» занимает важное место в курсе геометрии основной школы, поэтому ей следует уделить особое внимание.

6. На уроках геометрии не нужно забывать о том, что векторы являются важнейшим аппаратом физики. Неумение работать с векторами равносильно неумению решать многие физические задачи. Таким образом, нарушаются межпредметные связи, нарушается целостность мировоззрения учащихся. Это еще раз доказывает особую важность темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы.

7. Был рассмотрен опыт работы учителей по теме исследования. Для качественной работы в школе молодому специалисту необходимо постоянно изучать работы своих коллег.

8. При изучении векторов следует обратить внимание на то, что оно тесно связано с изучением координат на плоскости и в пространстве. Учителю стоит больше времени уделять решению задач.

9. Проанализировав все типы задач по теме «Векторы» в заданиях Основного Государственного Экзамена можно сделать вывод, что представленный задачный материал недостаточно многообразен. Также тема «Векторы» не всегда встречается в заданиях Основного Государственного Экзамена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксаковская, Л.Н. Трудности изучения темы «Векторы» в школьном курсе математики /Л.Н. Аксаковская, Г.М. Ёлкина// Инженерные и социальные системы. - 2016. - С. 83-90.

2. Александров, А.Д. Что же такое вектор? /А.Д. Александров// Математика в школе. - 1984. - № 5. - С. 39.

3. Атанасян, Л. С. Геометрия [Текст]: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян. и др. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

4. Атанасян, Л.С. Изучение геометрии в 7-9 классах. [Текст]: пособие для учителей /Л.С. Атанасян. и др. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

5. Березина, Л.Ю. Геометрия в 7-9 классах [Текст]: пособие для учителя / Л.Ю. Березина. И др. – М.: Просвещение, 1990. – 336с.

6. Глейзер, Г.И. История математики в школе 9-10 классов [Текст]: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1964. – 351 с.

7. Дадонова, А.В. Межпредметные связи в преподавании математики и физики /А.В. Дадонова// Учебный эксперимент в образовании. - 2013. - № 4. - С. 14-21.

8. Зив, Б.Г. Геометрия [Текст]: дидактические материалы. 8 класс / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.

9. Колмогоров, А. Н. Геометрия [Текст]: учебное пособие для 6-8 классов средней школы / А.Н. Колмогоров и др. – М.: Просвещение, 1979. – 348с.

10. Лашманкина, А.В. Методический анализ содержания темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы. // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Сборник статей XIV Международной научно-практической конференции «Артемовские чтения». Пензенский государственный университет; под общей редакцией М.А. Родионова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. – С. 188-191.

11. Левитас, Г.Г. Опережающее обучение по темам «Геометрические преобразования» и «Векторы» /Г.Г. Левитас// Математика в школе. - 2012. - № 7. – С. 34.

12. Лященко, Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. Ин-тов / Е. И. Лященко. и др. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

13. Мельникова, Н.Б. Об изучении темы «Векторы на плоскости» /Н.Б. Мельникова// Математика в школе. - 1986. - № 3. – С. 26.

14. Мерзляк, А.Г. Геометрия: 9 класс [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк и др. – М.: Вентана-Граф, 2014. – 240 с.

15. Мищенко, Т.М. Геометрия. 9класс [Текст]: методическое пособие к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия 7-9» / Т.М. Мищенко и др. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2002. – 128с.

16. Мухамедов, Т.Т. Межпредметные связи физики и математики /Т.Т. Мухамедов// Научный журнал. - 2016. - № 5. - С. 56-57

17. Погорелов, А.В. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

18. Подходова Н.С. Методика обучения математике. В 2 ч. Часть 2: учебник для академического бакалавриата / Н.С. Подходова. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 299с.

19. Приказ Минобрнауки России от 26 января 2016 г. № 38 «О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 31 марта 2014 г. № 253» [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://fpu.edu.ru/files/contentfile/82/prikaz-n-38-ot-26.01.2016.pdf - Последнее обновление 23.03.2018.

20. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев – М.: Просвещение, 1995. – 240с.

21. Стефанова, Н. Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов / Н. Л. Стефанова, Н. С. Походова. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с.

22. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. - Последнее обновление 19.02.2018

23. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 462 с.

24. Шулбаева, О.С. Использование проектных технологий на уроках геометрии при изучении темы «Векторы» / О.С. Шулбаева // Научно - методический журнал «Поиск». - 2016. - № 1. - С. 76-78.

25. Якушина, Е.В. Об изучении векторов в геометрии и стереометрии / Е.В. Якушина // Математика в школе. - 1966. - № 3. – С. 29.

26. Borisenko, A. I., Tarapov, I. E. Vector and Tensor Analysis with Applications. - Courier Corporation, 1968. – 288pp. 49.

27. Colley, S.J. Vector Calculus. - Pearson Prentice Hall, 2006. – 551 pp.

28. Copeland, H. Geometry, algebra and trigonometry by vector. – USA, 1962. – 298pp.

29. Hoffmann, B. About Vectors. - Courier Corporation, 1975. – 135 pp.

30. Konev, V.V. Linear Algebra, Vector Algebra and Analytical Geometry. Textbook. - Tomsk: TPU Press, 2009. - 114 pp.

Приложение 1

Таблица 1

Последовательность изложения теоретического материала в школьных учебниках геометрии разных авторов

Л.С. Атанасян [3]	**А.В. Погорелов** [17]	**И.Ф. Шарыгин** [23]
Количество часов на тему «Векторы»		
11(8 класс); 10(9 класс)	13 (8 класс)	7 (9 класс)
Как вводится понятие «вектор»		
Определение: Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком	**Определение:** «Вектором называют направленный отрезок. Направление вектора определяется указанием его начала и конца» [12, С. 138].	**Определение:** «Под вектором AB понимают направленный отрезок AB, то есть отрезок, у которого точка A является началом, а точка B – концом» [16, С.

или вектором» [2, С. 193].		307].
Последовательность вводимых понятий, связанных с понятием вектора		
«Вектор. Нулевой вектор. Длина (модуль) вектора, противоположно направленные, равные вектора. Откладывание вектора от данной точки. Сумма (законы сложения), разность векторов. Правило треугольника, параллелограмма, многоугольника. Произведение вектора на число. Координаты вектора. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Скалярное произведение в координатах. Свойства скалярного произведения векторов» [3, С. 193].	«Вектор. Одинаково направленные, противоположно направленные, векторы. Абсолютная величина (модуль). Нулевой вектор. Равные векторы. Координаты вектора. Сумма (правило треугольника, параллелограмма), разность векторов. Проекция вектора. Умножение вектора на число, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, скалярное произведение векторов (и теорема косинусов), разложение вектора по координатным осям. Единичный, координатный векторы» [17, С. 138].	«Вектор. Равенство двух векторов. Нулевой, коллинеарный векторы. Умножение вектора на число. Сложение векторов (правило параллелограмма). Координаты вектора. Теорема о единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам. Скалярное произведение векторов. Определение, свойства (перестановочность, коммутативность, распределительный закон) скалярного произведения. Запись скалярного произведения в декартовой системе координат. Скалярное произведение и теорема косинусов. Координатный и векторный методы» [21, С. 307].

Приложение 2

Таблица 2

Результаты сравнения приобретенных учащимися умений, навыков в учебниках разных авторов

Л.С. Атанасян [3]	**А.В. Погорелов** [17]	**И.Ф. Шарыгин** [23]
«-уметь изображать и обозначать векторы, откладывать от данной точки вектор, равный данному» [3, С. 153]. «-уметь объяснить, как определяется сумма двух и более векторов» [3, С. 153].	«-уметь изображать и обозначать вектор, различать его начало и конец в записи и на чертеже, распознавать и изображать одинаково направленные векторы, откладывать от любой точки вектор, равный данному» [4, С. 238]. «-уметь находить координаты	«-уметь изображать и обозначать вектор, различать его начало и конец, откладывать вектор, равный данному, от любой точки пространства, находить координаты вектора по координатам его начала и конца, вычислять модуль вектора по его координатам, вычислять

«-уметь формулировать свойства умножения вектора на число, уметь формулировать и доказывать теорему средней линии трапеции» [3, С. 153]. «-уметь выполнять действия над векторами с заданными координатами» [3, С. 153]. «- уметь объяснить, что такое угол между векторами, знать определение скалярного произведения векторов, условие перпендикулярности ненулевых векторов, выражение скалярного произведения в координатах и его свойства» [3, С. 153]. «-уметь решать задачи разного типа» [3, С. 153].	вектора, вычислять абсолютную величину вектора, откладывать от данной точки вектор, заданный координатами» [4, С. 238]. «-уметь находить координаты суммы и разности двух векторов, заданных координатами, распознавать на чертеже и строить сумму и разность двух векторов, заданных геометрически» [4, С. 238]. «-находить координаты вектора λa по координатам вектора a строить вектор λa по заданному вектору a, распознавать коллинеарные векторы, заданные в геометрической и координатной формах» [4, С. 238]. «-находить для векторов, заданных координатами, их скалярное произведение, угол между ними» [4, С. 238]. -уметь решать задачи разного типа» [4, С.238].	сумму и разность двух векторов по их координатам и строить сумму и разность двух векторов геометрически, вычислять координаты вектора λa по координатам a» » [10, С. 81]. «-находить скалярное произведение векторов, угол между векторами, доказывать распределительный закон скалярного произведения, применять полученные знания при решении задач» [10, С. 81]. «-уметь правильно выбирать систему координат и использовать свойства скалярного произведения при решении задач» [10, С. 81]. «-уметь решать задачи разного типа» [10, С.81].

Приложение 3

Таблица 5

Анализ представленных теорем в учебнике Л.С. Атанасяна

Формулировка теоремы	**Особенности теоремы**
«От любой точки М можно отложить вектор, равный данному вектору a ,и при том только один» [3, С. 196].	Формулировка категоричная. Логический смысл теоремы – существование и единственность.
«Если при сложении векторов a и b точку A, от которой откладывается вектор $AB = a$, заменить другой точкой A_1, то вектор AC заменится равным ему вектором A_1C_1» [3, С. 199].	Теорема представлена в условной форме, доказательство проводится методом полной индукции: в учебнике рассматривался один из возможных случаев. Логический смысл теоремы-свойство.
«Для любых векторов a, b, c справедливы равенства: $a + b = b + a$ (переместительный закон)	Формулировка категоричная, логический смысл теоремы – свойство. Доказательство проводится методом полной индукции: в

$a+b\ \ +c=a+(b+c)$ (сочетательный закон)» [3, С. 200].	учебнике рассматривался один из возможных случаев.
«Для любых векторов a и b справедливо равенство: $a-b=a+(-b)$» [3, С. 203].	Формулировка категоричная, логический смысл теоремы – свойство. Доказательство осуществляется синтетическим методом.
«Для любых чисел k, l и любых векторов a и b справедливы равенства: $kl\ \ a=k(la)$ (сочетательный закон) $k+l\ \ a=ka+la$ (первый распределительный закон) $k\ \ a+b\ \ =ka+kb$ (второй распределительный закон)» [3, С. 207].	Формулировка–категоричная, логический смысл теоремы – свойство. Доказательство проводится методом полной индукции: в учебнике рассматривается один из возможных случаев.
«Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме» [3, С. 210].	Формулировка категоричная, логический смысл теоремы — свойство, доказательство проводится синтетическим методом.
«Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом» [3, С. 228].	Формулировка категоричная, логический смысл теоремы – свойство. Доказательство проводится с использованием приема дополнительных построений.
«Скалярное произведение векторов $a\ \ x_1; y_1$ и $b\ \ x_2; y_2$ выражается формулой $a*b=x_1x_2+y_1y_2$» [3, С. 266].	Формулировка категоричная, логический смысл теоремы – существование и единственность. Доказательство проводится методом полной индукции: в учебнике рассматривается один из возможных случаев.