МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «СТЕПЕНИ И КОРНИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	О.В. Кепшина	__________________
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Руководитель	к.п.н., доцент Н.А. Демченкова	__________________
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Консультант	ст.преподаватель А.В. Прошина	__________________
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы.

Тема «Степени и корни» занимает значимое место в курсе алгебры основной школы. Содержание данной темы богато теоретическим материалом и разнообразием упражнений. Задачи по теме «Степени и корни» включены в основной государственный экзамен.

Данная дипломная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении определены основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

Глава 1 посвящена теоретическим основам обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены основные требования к знаниям и умениям учащихся и проведен анализ теоретического и практического материала по данной теме.

Глава 2 содержит методические основы обучения теме «Степени и корни». В этой главе рассмотрены формы, методы и средства обучения, а также методические рекомендации по обучению теме «Степени и корни». В заключении приведены основные выводы и результаты проведенного исследования.

В заключении приведены основные выводы и результаты проведенного исследования.

Список литературы содержит 52 наименований. *Объем работы* составляет 59 страниц.

ABSTRACT

The aim of the thesis is to identify methodological features of teaching the topic "Powers and roots" in the course of the Algebra of secondary school.

The topic "Powers and roots" occupies an important place in the course of the Algebra of secondary school. The content of this topic is full with theoretical material and a variety of exercises. The tasks on the topic "Powers and roots" are included in Unified State Examination.

The thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion and a list of references.

The introduction defines the main characteristics of the study: the problem, the aim, the object, the subject and the research methods.

Chapter 1 is devoted to the theory of the fundamentals of teaching the topic "Powers and roots" in the course of Algebra of secondary schools. The main requirements to knowledge and skills of students are considered and the analysis of theoretical and practical material on this topic is carried out.

Chapter 2 contains the methodological foundations of teaching the topic "Powers and roots". Here the forms, methods, training tools and methodological recommendations for teaching the topic "Powers and roots" are considerate.

The conclusion contains the summary and the results of the study.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Математика – составная часть человеческой культуры, важная компонента для развития личности. В результате изучения обучающимся предметной области «Математика» развивается логическое мышление, получается представление о математических моделях; учащийся овладевает умением применять математические знания при решении различных учебных задач, развивает математическую интуицию [46].

Сложение, вычитание, умножение и деление являются главными арифметическими действиями. У математиков не сразу сложилось представление о *возведении в степень* как о самостоятельной операции, и при умножении одного и того же числа много раз они тратили много ненужных усилий. Решение нашел древнегреческий математик Диофант Александрийский. В своей знаменитой арифметике он впервые описывает натуральную степень числа: «Все числа состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь до бесконечности. Среди них находятся квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа на себя; это же число называется стороной квадрата, затем кубы, получающиеся от умножения квадратов на их сторону, далее квадрато-квадраты – от умножения квадратов самих на себя, далее квадрато-кубы, получающиеся от умножения квадрата на куб его стороны, далее кубо-кубы – от умножения кубов самих на себя» [13].

Математики средних веков стремились сократить число символов и ввести единое обозначение. Француз Никола Шюке ввел свою символику и добавил нулевой и отрицательный показатель степени. Он писал показатель сверху и справа от коэффициента мелким шрифтом. Такая символика приближена к современной [18].

Обратимся к истории возникновения корня.

Термин *корень* имеет сложную и долгую историю. Древние греки понимали извлечение квадратного корня строго геометрически, как нахождение стороны квадрата по известной площади. Впервые обозначение √ ввел в 1525 году Кристоф Рудольф. Происходит этот знак от первой буквы слова «radix», что означает «корень» [16].

Показатель степени появился в знаке корня в 18 веке благодаря Валлису и «Универсальной арифметике» Ньютона [10].

В курсе алгебры основной школы обучающиеся усваивают действия со степенями и корнями, изучают понятие «арифметический корень», способы преобразования алгебраических выражений, содержащих степени и корни. Кроме того, усвоение темы «Степени и корни» в курсе алгебры предполагает формирование навыков решения уравнений, неравенств и их систем. Основы темы «Степени и корни» закладываются уже на начальном этапе обучения алгебре [50].

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в курсе основной школы.

Предмет исследования: методика обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы.

Задачи исследования:

1. Изучить понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса алгебры.

2. Выявить цели обучения теме «Степени и корни».

3. Провести анализ теоретического материала темы «Степени и корни» в учебниках разных авторов.

4. Провести анализ задачного материала по теме «Степени и корни» в учебниках разных авторов.

5. Рассмотреть методы, формы и средства, используемые при обучении теме «Степени и корни».

6. Привести методические рекомендации для обучения теме «Степени и корни».

7. Рассмотреть задачи основного государственного экзамена по теме исследования, составить их типологию.

Методы исследования: изучение и анализ научной и методической литературы; анализ передового опыта учителей математики; подборка и самостоятельное решение задач по теме исследования**;** обобщение и систематизация материала.

На защиту выносятся: методические особенности обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы. Проведен логико-математический анализ содержания темы исследования. Выявлены основные цели и планируемые результаты обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы. Проанализировано содержание теоретического и задачного материала по данной теме в учебниках алгебры основной школы.

Глава II посвящена методическим основам обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы. В ней рассмотрены методы, формы и средства обучения теме исследования. Приведены методические рекомендации по обучению степеням и корням. Составлена типология задач основного государственного экзамена по теме исследования.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты выпускной квалификационной работы.

Список литературы состоит из 52 источников. Объем работы составляет 59 страниц.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «СТЕПЕНИ И КОРНИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики

Процесс подготовки к уроку включает в себя:

– исследование и анализ учебного материала, планирование его изучения;

– аргументацию выбора средств обучения;

– изготовление наглядных пособий;

– контроль и оценивание деятельности учащихся во время учебного процесса;

– результат учения [21].

По словам Е.И. Лященко: «Эти действия представляет собой *логико-математический анализ содержания* учебного материала по математике. Прежде чем раскрыть суть этого анализа, требуется уточнить, что понимается под понятием *содержание учебного материала*» [21].

В разных литературных источниках под этим понятием подразумеваются всегда разные объекты. Это могут быть факты, идеи, математические задачи. Иногда под содержанием учебного материала рассматриваются конкретные тексты учебников и математические задачи.

В таком случае каждый параграф и пункт учебника можно воспринимать как что-то новое, имеющее оригинальное содержание; и сводить анализ к выяснению, о чем идет речь в том или ином пункте (параграфе). Подобный подход возможен, но с его помощью трудно выполнить обобщение содержания, установить внутрипредметные связи.

Если и проводить анализ содержания, то таким образом: начинать с знаний-знакомств, далее продвигаться к фундаментальным и методологическим знаниям, затем переходить к знаниям-умениям, которые покажут степень практического овладения предметом.

Прежде всего, нужно учитывать специфику предмета математики, а именно абстрактность понятий, логику утверждений. Взяв это во внимание, в содержании учебного материала можно выделить два крупных блока: теоретический материал и математические задачи.

Теоретический материал представляет собой совокупность понятий и их определений, математических утверждений. Это могут быть утверждения (теоремы, леммы, признаки, свойства и др.), алгоритмы (формулы, правила и др.), математические методы (метод уравнений и неравенств, векторный метод) и т.д. Эти компоненты взаимосвязаны принципами построения дедуктивной теории, адаптированными для средней школы, либо содержательными идеями, предназначенными для конкретной темы предмета математики.

Математические задачи имеют важную роль. На их основе организуется математическая деятельность, формируются понятия и др. [49].

А.Ю. Бакирова пишет: «Логический анализ темы сводится к установлению логической организации учебного материала в теме, выяснению, какие утверждения доказываются, какие вводятся как иллюстрированные факты, определению уровня логической строгости доказательств, методов, используемых для доказательств, выделению новых теоретических утверждений, которые вводятся при решении математических задач. Математический анализ темы сводится к выяснению основной математической идеи темы, выяснению математических обоснований выполняемых преобразований, исследований, доказательств, осмыслению применяемых в теме математических приемов и методов» [11, с. 25].

Таким образом, логико-математический анализ содержания способствует разработке эффективной методики обучения математике в целом, а также отдельных тем. Строго после выполнения логико-математического анализа основных компонентов учебного материала школьных учебников, можно приступать к разработке методики обучения понятию, темы раздела учебника, теме урока и т. п.

К началу изучения темы «Степени и корни» необходимо иметь простейшие представлений о такой операции, как возведение числа в натуральную степень. Знакомство с данной операцией осуществляется на начальном этапе обучения математике [17]. В курсе алгебры 7 класса вводится понятие степени с натуральным показателем, изучаются свойства степеней и соответствующие тождественные преобразования со степенями [7]. В 8 классе основное внимание уделено преобразованиям рациональных дробей и степеней с целыми показателями. Положено начало изучению тождественных преобразований иррациональных выражений (квадратные корни) [8, 26]. В 9 классе вводится понятие степени с рациональным показателем [27].

Понятие о корне формируется в курсе алгебры, начиная с 8 класса. Данное обстоятельство обусловлено необходимой логической последовательностью в изучении степеней и корней. Сначала обучающихся знакомят с понятием степени, формируют у них знания о свойствах степеней и навыки тождественных преобразований со степенями; затем изучается понятие корня [8, 26].

§ 2. Цели обучения теме «Степени и корни», ее место в курсе алгебры основной школы

В федеральном государственном образовательном стандарте общего образования [46] отмечается, что предметные результаты в области математики должны отражать:

– развитие умений работать с математическим текстом (анализ, извлечение необходимой информации), грамотно выражать свои мысли с применением математических терминов и символов, делать логические обоснования, доказывать математические утверждения;

– развитие представления о числе; овладение навыками устного счета, письменных и инструментальных вычислений;

– овладение символикой алгебры, приемами выполнения преобразований выражений, решения уравнений, неравенств и их систем.

Понятия «степени и корня» лежат в основе двух взаимообратных операций по возведению числа в натуральную степень и по извлечению корня натуральной степени из числа. Поэтому важной целью изучения темы «Степени и корни» является формирование навыка связанных с этими операциями тождественных преобразований.

Без ознакомления со степенями и операцией по возведению числа в степень невозможно изучение полиномов, степенных и показательных уравнений, неравенств и их систем. Без формирования понятия о корне невозможно изучение иррациональных уравнений, неравенств и их систем. Тема «Степени и корни» служит, таким образом, основой для формирования математических знаний более высоких порядков. Ознакомление со степенью и корнем закладывает практические основы усвоения более сложных математических и алгебраических понятий.

Цели обучения теме «Степени и корни»:

– *образовательные:* сформулировать понятия степени и корня; обеспечить учащимся условия для овладения свойствами степеней и квадратного корня; научить применять их при преобразованиях числовых выражений;

– *развивающие:* содействовать интеллектуальному и личностному развитию, математическому и логическому мышлению учащихся; формировать познавательный интерес к математике;

– *воспитательные:* воспитывать внимательность, аккуратность, упорство в достижении целей; выразить отношение к математике как к общечеловеческой культуре [43].

После изучения темы «Степени и корни» учащиеся должны:

– знать понятие степени, основания и показателя степени;

– понимать и применять определения степени с натуральными показателями; степени с целыми и целыми отрицательными показателями;

– выполнять действия со степенями с натуральными и целыми показателями;

– уметь применять свойства степеней для упрощения числовых и алгебраических выражений;

– записывать числа в стандартном виде;

– владеть определениями «квадратный корень», «арифметический квадратный корень»;

– оперировать понятием «квадратный корень», применять его при вычислениях;

– знать свойства квадратных корней;

– решать уравнение вида $x^2 = a$;

– находить приближенные значения квадратных корней;

– уметь находить квадратный корень из произведения и дроби, квадратный корень из степени;

– выполнять преобразования выражений, которые содержат степени с целыми показателями и операцию извлечения квадратного корня [40].

Знание о степени и о корне проверяется в рамках централизованного тестирования по математике. Изучаемые в курсе алгебры «Степени и корни» содержатся в заданиях, предлагаемых обучающимся как на ОГЭ, так и на ЕГЭ. Причем некоторые задания направлены непосредственно на выявление представлений обучающихся об этих понятиях, некоторые задания направлены на выявление умений использовать степени и корни в соответствующих тождественных преобразованиях. На экзаменах также представлены задания, которые выявляют умение решать уравнения, неравенства и их системы с использованием понятий о степени и о корне.

Таким образом, тема «Степени и корни» занимает ведущее место в курсе алгебры основной школы.

§ 3. Анализ содержания теоретического материала по теме «Степени и корни» в учебниках алгебры основной школы

Ознакомление с темой «Степень» начинается на пропедевтическом уровне в 5 – 6 классах [51]. В учебниках Г.В. Дорофеева [14, 15], И.И. Зубаревой [17] знакомство со степенью происходит путем формирования знаний о площади квадрата и объема куба.

Таблица 1

Содержание теоретического материала по теме «Степени» различных учебников алгебры 7 класса

Алгебра 7 класс, Г.В. Дорофеев [1]	**Алгебра 7 класс, А.Г. Мордкович [28]**	**Алгебра 7 класс, Ю.Н. Макарычев [2]**
Последовательность рассматриваемого материала		
- определение степени с натуральным показателем; - свойства степени; - возведение степени в степень; - степень произведения и дроби.	- определение степени с натуральным показателем; - таблица основных степеней; - свойства степеней с натуральными показателями; - умножение и деление степеней с одинаковыми показателями; - степень с нулевым показателем.	- определение степени с натуральным показателем; - умножение и деление степеней; - возведение в степень произведения и степени.
Введение понятия степени с натуральным показателем		
Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a: $a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ множителей}}$, $n > 1$. Степенью числа a с	Под a^n, где $n = 2,3,4,5,\ldots$, понимают произведение n одинаковых множителей, каждым из которых является число a. Выражение a^n называют **степенью,** число a – **основанием степени,** число n – **показателем**	Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется выражение a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a. Степенью числа a с показателем 1 называется само число a.

показателем, равным 1, называют само число a: $a^1 = a$.	**степени.**	

Начиная с изучения алгебры в 7 классе знания о степенях и корнях систематизируются. Проанализируем содержание теоретического материала по теме «Степени» различных учебников алгебры. Анализ представлен в Таблице 1.

7 класс. В этом классе по всем трем учебникам приводится определение степени с натуральным показателем.

Выполним анализ теоретического материала по учебнику алгебры для 7 класса средней школы Г.В. Дорофеева [1].

Параграф 6.1 «Произведение и частное степеней».

В параграфе «Произведение и частное степеней» дается напоминание, что смысл термина «степень с натуральным показателем» может быть разъяснен для двух случаев: когда показатель степени больше 1, когда он равен 1. Далее вводятся определения для этих двух случаев. Рассматриваются те свойства степени, которые часто используются при преобразовании выражений.

Свойство 1. Если a – любое число и m и n – любые натуральные числа, то $a^m a^n = a^{m+n}$.

Таким образом, при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складывают.

Свойство 2. Если a – любое число, не равное 0, и m и n – любые натуральные числа, причем $m > n$, то $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Таким образом, при делении степеней с одинаковыми показателями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

В тексте нужные правила выделены. Для каждого свойства приводится доказательство и рассматриваются примеры. Алгоритмическое описание действий давать не обязательно, поскольку доказательства являются несложными.

Параграф 6.2 «Степень степени, произведения и дроби».

Параграф «Степень степени, произведения и дроби» начинается с рассмотрения выражения $(a^2)^4$. Оно представляет собой степень с основанием a^2, поэтому $(a^2)^4 = \underbrace{a^2a^2a^2a^2}_{4\text{ множ.}} = a^{\overbrace{2+2+2+2}^{4\text{ слаг.}}} = a^{2\cdot 4} = a^8$.

Если записать данное преобразование в общем случае, то получим третье свойство.

Свойство 3. Если a – любое число и m и n – любые натуральные числа, то $(a^m)^n = a^{mn}$.

После доказательства этого свойства, сделан вывод, что при возведении степени в степень показатели перемножают.

Далее рассматривается случай, когда можно преобразовать степень произведения чисел, после чего автор приходит к следующему свойству.

Свойство 4. Если a и b – любые числа и n – любое натуральное число, то $(ab)^n = a^nb^n$.

Итак, при возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

Г.В. Дорофеев отметил, что данное свойство справедливо для любого числа множителей.

Далее аналогичным способом описывается пятое свойство, когда при возведении дроби в степень нужно возвести в эту степень отдельно ее числитель и знаменатель.

Свойство 5. Если a и b – любые числа, причем $b \neq 0$, и n – любое натуральное число, то $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Для всех свойств из данного параграфа также приведены примеры. Доказательства, соответствующие третьему, четвертому и пятому свойствам являются аналогичными доказательствам свойствам 1 и 2 параграфа 6.1.

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры для 7 класса средней школы А.Г. Мордковича [28].

Степеням посвящена 4 глава учебника. Данной теме уделено 5 параграфов.

Параграф 15 «Что такое степень с натуральным показателем».

В начале параграфа автор призывает учеников научиться одной из особенностей математического языка – применять как можно более короткие записи. Для получения представления об этой особенности, А.Г. Мордкович сначала приводит пример, где складываются несколько одинаковых слагаемых. Затем, аналогично, вместо суммы нескольких слагаемых, автор приводит пример произведения пяти одинаковых множителей. Такая запись приводит к короткой записи числа в степени. Так появляется новый термин и определение степени.

Преимущество учебника А.Г. Мордковича состоит в том, что в нем определены понятия *основание степени* и *показатель степени*. В определении сказано, что показатель степени – натуральное число, поэтому его называют *натуральным показателем.* Отсюда и происходит название как всей главы, так и этого параграфа.

Далее в форме «вопрос-ответ», автор говорит о том, что в определении степени не рассмотрен случай, когда $n = 1$. Это упущение рассмотрено в следующем определении: степенью числа a с показателем 1 называют само число a.

Материал для запоминания в тексте выделен. Приведены примеры.

В конце параграфа автор обращает внимание на некоторую закономерность: если отрицательное число возводится в *четную* степень, то получается *положительное* число. И следом за этим суждением ученикам дается возможность подумать и объяснить следующую закономерность: если же отрицательное число возвести в *нечетную* степень, то получится *отрицательное* число?

Параграф 16 «Таблица основных степеней».

Таблица степеней простых однозначных чисел (в пределах тысячи), с помощью которой можно находить и степени составных чисел, является отличительной чертой учебника А.Г. Мордковича.

В таблице приводятся степени с основаниями 1, 0, -1; рассматриваются примеры.

Кроме этого, в данном параграфе автор обращает внимание на то, что если выбрать в качестве основания число 10 ($10^1 = 10,\ 10^2 = 100,\ 10^3 = 1000$), то можно заметить следующее: каков показатель, столько нулей надо записать после цифры 1.

В заключение данного параграфа стоит еще раз отметить, что математики всегда стремятся к четкости рассуждений и краткости записей.

Параграф 17 «Свойства степеней с натуральными показателями».

В начале параграфа говорится о том, что математические утверждения в своем становлении проходят три этапа. Автор предлагает ученикам вместе пройти все три этапа для того, чтобы *открыть, сформулировать* и *доказать* свойства степеней с натуральным показателем.

Первый этап подразумевает рассмотрение примеров. В процессе решения ученики должны заметить некую закономерность. На этом первый этап будет завершен. На втором этапе открывается общая закономерность и формулируется определение. Третий этап подразумевает доказательство данного открытия.

В параграфе сформулированы три главных свойства степеней, которые записаны в виде теорем. Кроме того, эти свойства представлены в виде правил, которые даны для запоминания.

Параграф 18 «Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями».

В предыдущем параграфе говорилось об умножении и делении степеней с одинаковыми основаниями. В параграфе «Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями» рассматривается умножение и деление степеней с *разными* основаниями. Такое возможно, если у этих степеней показатели одинаковые.

В процессе рассмотрения пары примеров, автор получает две формулы:

$$a^n b^n = \ ab\ ^n; \qquad \frac{a^n}{b^n} = \ \frac{a}{b}\ ^n, \ b \neq 0.$$

Их также можно сформулировать в виде правил действий над степенями и добавить их к трем правилам из параграфа 17.

В заключение – одно предостережение в виде Таблицы 2.

Таблица 2

Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями

если *основания* одинаковы, то	если *показатели* одинаковы, то
$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, $a^n : a^k = a^{n-k} \quad n > k$,	$a^n \cdot b^n = \ ab\ ^n$, $a^n : b^n = \ a : b\ ^n \quad b \neq 0$.

Параграф 19 «Степень с нулевым показателем».

В отличие от учебника Г.В. Дорофеева [3], в котором степень с нулевым показателем рассматривается лишь в 8 классе, в учебнике А.Г. Мордковича оно дано в 7 классе в виде отдельного параграфа.

Автор говорит о том, что показатель степени может быть не только натуральным числом, тем самым забегая вперед – к изучению степеней в старших классах. А пока скромным шагом в этом направлении будет являться введение понятия степени с нулевым показателем.

Определение 1. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

В конце каждого параграфа присутствуют вопросы для самопроверки. В конце главы подводятся итоги изученного материала.

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры Ю.Н. Макарычева для 7 класса средней школы [2].

В учебнике степень с натуральным показателем представлена в 3 главе. Весь материал по этой теме входит в 7 параграф, который, в свою очередь, делится на три пункта (18, 19, 20).

Параграф 7 «Степень и ее свойства».

18. Определение степени с натуральным показателем.

У Ю. Н. Макарычева и Г.В. Дорофеева [1] определение степени с натуральным показателем сформулировано схожим образом. Так же Ю.Н. Макарычев выделяет такие определения как «основание степени», «показатель степени», «возведение в степень».

Возведению в степень уделено большое внимание. Например, если возвести число в нулевую степень, получится нуль.

Как и в учебнике А.Г. Мордковича [28], в тексте выделено правило возведения отрицательного числа в четную и нечетную степень.

Отличительной чертой данного учебника является то, что в нем в виде материала для запоминания представлено правило: квадрат любого числа есть положительное число.

После теоретического материала предлагается рассмотреть несколько выражений со степенями с подробным ходом решения.

19. Умножение и деление степеней.

Так же как и определение, в схожей форме с учебником Г.В. Дорофеева [1] даются свойства степеней (умножение и деление степеней с одинаковыми показателями).

Присутствует следующее определение.

Определение 2. Степень числа a, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице.

20. Возведение в степень произведения и степени.

В данном пункте параграфа 7 автор описывает следующие три свойства степеней с натуральным показателем. Уточняется, что свойство степени произведения распространяется на произведения трех и более множителей, как и у Г.В. Дорофеева [1].

После рассмотрения всех пунктов параграфа следуют контрольные вопросы и задания.

Таблица 3

Содержание теоретического материала по теме «Степени» различных учебников алгебры 8 класса

Алгебра 8 класс, Г.В. Дорофеев [3]	**Алгебра 8 класс, А.Г. Мордкович [30]**	**Алгебра 8 класс, Ю.Н. Макарычев [4]**
Последовательность рассматриваемого материала		
- степень с целым показателем; -степень с нулевым показателем; - стандартный вид числа; - свойства степени с целым показателем.	- степень с отрицательным целым показателем; - свойства степеней с отрицательным целым показателем.	- определение степени с целым отрицательным показателем; - свойства степени с целым показателем; - стандартный вид числа.
Введение понятия степени с целым показателем		
Для любого числа a, не равного нулю, и целого отрицательного числа $-n$ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.	Если n – натуральное число и $a \neq 0$, то под a^{-n} понимают $\frac{1}{a^n}$: $a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a \neq 0$.	Если $a \neq 0$ и n – целое отрицательное число, то $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$.

8 класс. В этом классе понятие степени расширяется: по всем трем учебникам приводится определение степени с целым показателем (Табл. 3).

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры для 8 класса средней школы Г.В. Дорофеева [3].

Степени с целым показателем входят в Главу 1 «Алгебраические дроби». Этой теме посвящены 6 и 7 параграфы данной главы.

Параграф 1.6 «степень с целым показателем».

Параграф начинается с того, что автор напоминает ученикам, что в 7 классе они уже познакомились с понятием «степень». После чего вводятся определения степени с целым показателем и степени с нулевым показателем.

Г.В. Дорофеев говорит о стандартном виде числа: «Степени с целыми показателями используются для записи больших и малых чисел в так называемом *стандартном виде*» [3, с. 36]. Данное определение объясняется. Например, если массу Земли представить в десятичной записи, то получится «длинное» число. Поэтому, чтобы полученное число было более удобным для обозрения и действий над ним, его следует записать в стандартном виде.

1.7 «Свойства степени с целым показателем».

Говоря о степенях с целыми показателями, автор объясняет, что на них распространяются уже известные свойства степени с натуральным показателем. Эти свойства представлены в виде формул. Для примера разобрано одно из свойств. Автор доказывает справедливость этого свойства при любых целых показателях.

Так как свойства степени с целым показателем те же, что и свойства степени с натуральным показателем, то и действия над степенями с целыми показателями выполняются по таким же правилам. Приведены примеры.

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры для 8 класса средней школы А.Г. Мордковича [30].

В данном учебнике, как и в предыдущем, тема «Степень с отрицательным показателем» входит в Главу 1 «Алгебраические дроби».

Параграф 8 «Степень с отрицательным целым показателем».

А.Г. Мордкович напоминает о том, что ученики уже умеют вычислять значение степени с любым натуральным показателем, и, что им знакомо понятие степени с нулевым показателем.

Автор вводит символ 2^{-3}, с помощью которого планирует прийти к определению степени с отрицательным показателем. А именно, говорится о том, что если бы сохранялись привычные свойства степеней, выполнялось бы следующее равенство: $2^{-3} \cdot 2^{3} = 2^{0}$ (подробнее: $2^{-3} \cdot 2^{3} = 2^{-3+3} = 2^{0}$). Но $2^{0} = 1$, а тогда из равенства $2^{-3} \cdot 2^{3} = 1$ получаем, что $2^{-3} = \frac{1}{2^{3}}$. Значит, появились основания определить 2^{-3} как $\frac{1}{2^{3}}$. Подобные рассуждения позволяют ввести определение степени с отрицательным целым показателем.

В параграфе отмечено важное тождество: $\frac{a}{b}^{-n} = \frac{b}{a}^{n}$.

В частности, $\frac{1}{a}^{-n} = a^{n},\ a \neq 0$.

Далее рассматриваются примеры, после которых автор делает вывод, что свойства степеней с натуральными показателями, изученные ранее, сохраняются и для отрицательных целых показателей.

В учебнике А.Г Мордковича не рассматривается стандартный вид числа. Параграф «Степень с отрицательным целым показателем» является заключительным параграфом Главы 1. В конце параграфа приведены основные результаты.

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры Ю.Н. Макарычева для 8 класса средней школы [4].

В данном учебнике степеням посвящена Глава 5 «Степень с целым показателем. Элементы статистики», которая состоит из двух параграфов (12, 13). Теоретический материал о степени с целым показателем представлен в параграфе 12.

Параграф 12 «Степень с целым показателем и ее свойства».

37. Определение степени с целым отрицательным показателем.

В тексте приведен факт, что масса Солнца равна $1{,}989 \cdot 10^{33}$ г, а масса атома водорода равна $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г. Запись 10^{33} означает произведение тридцати трех множителей, каждый из которых равен 10. А каков смысл записи 10^{-24}? Чтобы ответить на этот вопрос, автор предлагает выписать степень числа 10 с показателями 0, 1, 2 и т. д. Получится последовательность: $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots$. В этой строке каждое число меньше следующего в 10 раз. Если продолжить эту последовательность влево, то после 10^0 следует написать число $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$, перед числом $\frac{1}{10^1}$ – число $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$ и т. д.. Получим новую последовательность: $\ldots, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots$. Справа от числа 10^0 показатель каждой степени на единицу меньше показателя следующей за ней степени. Этот закон распространяется так же на числа, стоящие после 10^0, их записывают в виде степени числа 10 с отрицательным показателем. Вместо $\frac{1}{10^1}$ пишут 10^{-1} и т. д.

Такое соглашение принимается для степеней с любыми основаниями, не равными нулю. Такое рассуждение подводит к введению определения степени с целым отрицательным показателем.

38. Свойства степени с целым показателем.

В данной части параграфа автор говорит о том, что свойства степени с натуральными показателями справедливы и для степени с любым целым показателем. Нужно только предполагать, что основание степени отлично от нуля. Ниже приведены пять свойств и, как в учебнике Г.В. Дорофеева [4], приведено доказательство основного свойства степени. Представлены примеры.

39. Стандартный вид числа.

Стандартный вид числа в учебнике Г.В. Дорофеева [3] и Ю.Н. Макарычева [4] объясняется аналогичным образом.

В данном учебнике рассматривается объем Земли и диаметр молекулы воды. Вводится определение.

Определение 3. Стандартным видом числа a называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n – целое число. Число n называется *порядком числа* a.

Порядок числа дает представление о том, насколько это число мало или велико. Например, если порядок числа a равен 3, это означает, что $1000 \leq a < 10000$.

9 класс. Определение рациональной степени (степени с дробным показателем) вводится только в учебнике Ю.Н. Макарычева[6] (Табл. 4). В учебнике Г.В. Дорофеева[5] определение отсутствует, нет его и в учебнике А.Г. Мордковича[32]. В учебнике А.Г. Мордковича определение рациональной степени переносится в 10 класс.

В отличие от степеней, корням посвящены отдельные главы в каждом из рассматриваемых учебников 8 класса. Анализ содержания темы «Квадратные корни» представлен в Таблице 5.

Таблица 4

Содержание теоретического материала по теме «Степени» различных учебников алгебры 9 класса

Алгебра 9 класс, Г.В. Дорофеев [5]	**Алгебра 9 класс, А.Г. Мордкович [32]**	**Алгебра 9 класс, Ю.Н. Макарычев [6]**
Последовательность рассматриваемого материала		
-	-	- степень с рациональным показателем.
Введение понятия степени с рациональным показателем		
-	-	Если a – положительное число, $\frac{m}{n}$ – дробное число (m – целое, n – натуральное), то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Больше чем в других часов на изучение корней выделяется в учебнике Ю.Н. Макарычева [4]. Глава «Квадратные корни» разделена на 4 параграфа, каждый из которых состоит из нескольких пунктов. В данном учебнике рассмотрено квадратное уравнение $x^2 = a$, рассматриваются все его решения (три возможных случая).

В учебнике Г.В. Дорофеева [3] на раздел, посвященный корням, выделено 17 часов. Глава состоит из 9 пунктов. Отдельно рассматривается пункт «Кубический корень»; в нем доступно объясняется, что такое кубический корень, строится график и выделяются некоторые свойства. Заканчивается изучение данной темы памяткой о двойных радикалах: «Для тех, кому интересно».

Во всех трех учебниках предусмотрены преобразования выражений, содержащих квадратный корень.

Класс 9. Понятие корня n-й степени и его свойства разбираются только в учебнике Ю.Н. Макарычева [6]. Свойства в учебнике представлены в виде двух теорем.

Понятие корня n-й степени в УМК А.Г. Мордковича перенесено в 10 класс, однако число свойств расширено (в виде пяти теорем).

Изучение квадратных корней на базе учебника алгебры за 8 класс автора Г.В. Дорофеева [3].

Таблица 5

Анализ теоретического материала по теме «Корни» различных учебников алгебры 8 класса

Алгебра 8 класс, Г.В. Дорофеев [3]	**Алгебра 8 класс, А.Г. Мордкович [30]**	**Алгебра 8 класс, Ю.Н. Макарычев [4]**
Последовательность рассматриваемого материала		
2.1. Задача о нахождении стороны квадрата 2.2. Иррациональные числа 2.3 Теорема Пифагора 2.4. Квадратный корень 2.5. График зависимости $y = \sqrt{x}$ 2.6 Свойства квадратных корней 2.7. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни 2.8. Кубический корень 2.9. Двойные радикалы	§ 9. Рациональные числа §10. Понятие квадратного корня из неотрицательного числа § 11. Иррациональные числа § 12. Множество действительных чисел § 13. Функция $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график; § 14. Свойства квадратных корней; § 15. Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня § 16. Модуль действительного числа	§ 4. Действительные числа 10. Рациональные числа 11. Иррациональные числа § 5. Арифметический квадратный корень 12. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень 13. Уравнение $x^2 = a$ 14. Нахождение приближенных значений квадратного корня 15. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график § 6. Свойства арифметического квадратного корня 16. Квадратный корень из произведения и дроби 17. Квадратный корень из степени § 7. Применение свойств арифметического квадратного корня 18. Вынесение множителя за знак корня 19. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни 20. Преобразование двойных радикалов

Изучение главы «Квадратные корни» начинается с задачи о нахождении стороны квадрата. В первом параграфе автор знакомит учащихся со *знаком квадратного корня* или *радикала*. Далее, на примере нахождения площади квадрата, объясняются понятия: *извлечение квадратного корня* и *подкоренное число*.

Пример 1. Найти $\sqrt{2116}$.

Чтобы узнать, квадрат какого числа равен 2116, необходимо обратиться к таблице квадратов двузначных чисел, которая располагается на форзаце учебника. Оттуда найдем: $\overline{2116} = 46$.

В параграфе 2 говорится о иррациональных числах. В нем ученикам предоставляется прийти к открытию того, что есть квадраты чисел, которые не имеют точного значения. Появляется новое понятие *десятичное приближение.*

Знакомство с иррациональными числами происходит в связи с изучением квадратных корней и обеспечивает, прежде всего, потребности этой темы.

Также в Главу 2 учебника Г.В. Дорофеева включен параграф «Теорема Пифагора». После рассмотрения этой темы, автор подходит непосредственно к определению квадратного корня.

Определение 4. Число b называют квадратным корнем из числа a, если $b^2 = a$.

В Параграфе 6 «Свойства квадратных корней» автор приводит свойства *арифметического квадратного корня*. Но для краткости призывает учащихся называть его квадратным корнем или просто «корень».

На примере возведения корня квадратного из числа во вторую степень, автор вводит первое свойство.

Свойство 6. При любом $a \geq 0$ $\overline{a}^{\;2} = a$.

Это свойство непосредственно следует из определения квадратного корня.

Далее Г.В. Дорофеев предлагает рассмотреть свойства корня из произведения и частного двух неотрицательных чисел.

Свойство 7. При любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ $\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

Свойство 8. При любых $a \geq 0$ и $b > 0$ $\overline{\frac{a}{b}} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$.

Приведены доказательства. Также автор отмечает, что если прочитать эти свойства справа налево, то получим правила *умножения* и *деления* корней.

Кроме свойств, в данном параграфе рассматривается правило вынесения множителя из под знака корня.

Пример 2. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$.

Изучение темы «Квадратные корни» на базе учебника алгебры за 8 класс автора Ю.Н. Макарычева [5].

Глава начинается с повторения натуральных и целых чисел. Автор обобщает их во множество рациональных чисел.

Дальше следует изложение материала об иррациональных числах.

Эти сведения обобщаются в параграфе 4 «Действительные числа».

После этого начинается непосредственное изучения квадратного корня. В отличие от Г.В. Дорофеева [4], Ю.Н. Макарычев вводит два определение, тем самым разделяя определения квадратного корня и арифметического квадратного корня.

Определение 5. Арифметическим квадратным корнем их числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

В параграфе 6 учебника рассмотрены свойства квадратного корня, и изучается применение этих свойств при решение примеров.

Проведем анализ теоретического материала по учебнику алгебры для 8 класса А.Г. Мордковича [30].

Понятие квадратного корня из неотрицательного числа рассматривается после параграфа о рациональных числах.

Понятие квадратного корня рассматривается сначала с уравнения $x^2 = \mathbf{4}$, потом разбирается уравнение $x^2 = 5$. Метод доказательства, который используется в учебнике, в математике называют *методом доказательства от противного*. Вводится определение квадратного корня из неотрицательного числа, записываются два свойства, также приводится сравнительная таблица (возведения в квадрат и извлечение квадратного корня), приведены примеры.

Отличительной чертой рассматриваемого учебника является то, что в нем рассматривается модуль действительного числа.

§ 4. Анализ содержания задачного материала темы «Степени и корни» в учебниках разных авторов

Рассмотрим типовые задачи 7 класса по учебнику Г.В. Дорофеева [1].

После каждого параграфа предлагаются упражнения, которые разделены на два блока (А, Б).

Упражнения № 537-541, где необходимо упростить выражение, не должны вызвать у учащихся затруднений при выполнении.

Пример 1. Упростить: xx^4y^2y.

Решение. Чтобы упростить данное выражение, нужно сложить показатели степеней с одинаковыми основаниями: $xx^4y^2y = x^{1+4}y^{2+1} = x^5y^3$.

Чтобы решить упражнения № 543-548, необходимо применить свойство деления степеней.

Пример 2. Чему равно значение выражения $\frac{6^{114}}{6^{112}}$?

Решение. $\frac{6^{114}}{6^{112}} = 6^{114-112} = 6^2 = 36$.

Далее – упражнения, где применяется и умножение и деление степеней с одинаковыми показателями.

Пример 3. Вычислите: $\frac{m^{20}}{m^8 \cdot m^2}$.

Решение. $\frac{m^{20}}{m^8 \cdot m^2} = m^{20} - \ m^8 + m^2 \ = m^{20} - m^{10} = m^{10}$.

Упражнения № 557-559 – на сокращение дробей.

С № 560 начинается блок Б. В нем должны содержаться задачи второго уровня сложности. Действительно, с ними могут справиться не все учащиеся.

Рассмотрим пример из этого блока.

Пример 4. Представить выражение в виде степени с основанием y: $y^{k+1}\colon y^{k-1}$.

Решение. $y^{k+1}\colon y^{k-1} = y^{\ k+1\ -(k-1)} = y^{k+1-k+1} = y^2$.

У ученика могут возникнуть затруднения при раскрытия скобок. Типичная ошибка – это вместо плюса поставить минус, и наоборот.

В блоке Б также присутствуют упражнения на вычисление и упрощение выражений.

В параграфе 2 главную роль занимает возведение степени в степень.

Пример 5. Представить a^{30} в виде степени с основанием a^5.

Решение. Воспользуемся третьим свойством степеней: $a^{30} = a^{5\cdot 6} = a^{5\quad 6}$.

Также в этом параграфе присутствуют задания, где нужно умножить или разделить степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями. Например, упражнение № 587: $100^3\colon 50^3$.

В параграфе присутствуют текстовые задачи, одна из которых *задача-исследование* из блока повышенной трудности.

Проанализируем задачный материал по учебнику 7 класса Ю.Н. Макарычева [2].

Как и в предыдущем учебнике, упражнения расположены в конце изученной темы. Они содержат задачи обязательного уровня и задачи на повторение. Задания повышенной трудности в Главе «Степень с натуральным показателем» не предусмотрены.

В учебнике Ю.Н. Макарычева [2] давно упражнение: представить в виде квадрата (куба, степени десяти) число. В учебнике Г.В. Дорофеева [1] подобные примеры не были рассмотрены.

Текстовые задачи также есть. Некоторые из них могут казаться сложными для учащихся, хотя и не являются задачами сложного уровня.

Пример 6. Составить формулу для вычисления площади круга, изображенного на рисунке. Найти площадь круга, если $R = 6{,}4$ см, $r = 3{,}6$ см. [2].

В данном учебнике присутствует *задача-исследование,* упражнения *для работы в парах.*

Рассмотрим задачник 7 класса А.Г Мордковича с целью анализа задачного материала [29].

В отличие от учебников Г.В. Дорофеева [1,3,4] и Ю.Н. Макарычева [2,4,6], где упражнения располагаются после каждого параграфа или пункта, задачный материал автора А.Г. Мордковича предлагаются отдельно от теоретического.

Каждый параграф, посвященный теме «Степени» содержит упражнения трех уровней сложности: легкие, средние, повышенной сложности.

В данном учебнике, кроме аналогичных с предыдущими учебниками, предлагаются задачи следующего типа.

Пример 7. Записать на математическом языке:

а) чему равна площадь квадрата s со стороной a;

б) чему равен объем куба v, если ребро равно a.

В учебнике А.Г. Мордковича сравнительно больше текстовых задач. Причем задачи относятся к базовому уровню и не должны вызвать затруднений.

При рассмотрении теоретического материала данного учебника было выявлено его отличие от других учебников. А именно то, что в нем содержится параграф «Таблица основных степеней». Для отработки навыков пользования данной таблицы в задачнике дано множество упражнений.

Пример 8. Используя таблицу степеней, найдите m, если $7^m = 343$.

Пример 9. Найдите x, если $2^{x-3x} = 256$.

Перейдем к рассмотрению материала по теме исследования в 8 классе. Проведем анализ учебника Ю.Н. Макарычева [4]. В этом учебнике продолжаются изучаться степени, и появляется глава «Корень квадратного уравнения».

В Главе 5 данного учебника материал направлен на решение задач со степенями с целым отрицательным показателем, и на применение свойств степеней. Рассмотрим некоторые из упражнений.

Пример 10. Вычислить: $2{,}5^{-\mathbf{1}}$.

Пример 11. Представить выражение в виде степени с основанием 3 и найти его значение: $32 \cdot\ \ 2^{-4}\ ^{2}$.

Пример 12. Представить степень в виде произведения: $\ -2n^5n^{-3}\ ^{2}$.

Изучение темы «Квадратные корни» на базе учебника алгебры за 8 класс автора Ю.Н. Макарычева [4].

В пункте 12 приведены упражнения на вычисление квадратного корня.

Пример 13. Найти значение корня $\ \overline{1600}$. Решение происходит путем разложения подкоренного выражения следующим образом: $\ \overline{1600} = \ \overline{16 \cdot 100} = \ \overline{4^2 \cdot 10^2} = 40$.

В пунктах 16 и 17 вводятся свойства квадратных корней, представлены задачи на их применение.

Пример 14. Найти значение выражения $\ \overline{81 \cdot 900}$.

$$\overline{81 \cdot 900} = \ \overline{81 \cdot 9 \cdot 100} = 9 \cdot 3 \cdot 100 = 270.$$

Пример 15. Вычислить: $\ \overline{\frac{2}{3}} \cdot \ \overline{\frac{3}{8}}$. $\ \overline{\frac{2}{3}} \cdot \ \overline{\frac{3}{8}} = \ \overline{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 8}} = \ \overline{\frac{6}{24}} = \ \overline{\frac{\mathbf{1}}{4}} = \frac{\mathbf{1}}{2}$.

Пункты 18-20 также направлены на применение свойств арифметического корня и на преобразования выражений, содержащих квадратные корни.

Пример 16. Вынесите множитель за знак корня: $\ \overline{160}$.

Решение. $\ \overline{160} = \ \overline{16 \cdot 10} = \ \overline{4^2 \cdot 10} = 4\ \ \overline{10}$.

Пример 17. Расположить в порядке возрастания числа: $3\ \overline{7}$, $6\ \overline{2}$, $2\ \overline{14}$, $\overline{29}$.

Выводы по первой главе

В первой главе представлены теоретические основы обучения теме исследования:

– изучено понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса алгебры;

– выявлены цели темы «Степени и корни», определено ее место в курсе алгебры основной школы;

– изучен федеральный государственный стандарт, и выявлены планируемые предметные результаты изучения темы;

– рассмотрен теоретический материал по теме «Степени и корни», проанализированы школьные учебники разных авторов;

– выполнен анализ содержания задачного материала по теме «Степени и корни», рассмотрены примеры решения.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «СТЕПЕНИ И КОРНИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 5. Методы, формы, средства обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы

Современное образование настоятельно требует качественной профессиональной подготовки учителей, так как содержание воспитания и развития учеников во многом зависит не только от того, что изучается, но и от того, как изучается. Для эффективной передачи и усвоения знаний, умений и навыков используются методы обучения.

«Метод обучения – это упорядоченная деятельность педагога и учащихся, направленная на достижение заданной цели обучения» [38, с. 204].

В математике используется множество общедидактических методов и методов, разработанных в специфических условиях преподавания данной дисциплины.

В дидактике методы обучения сведены в три основные группы:

– методы организации учебно-познавательной деятельности;

– методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности;

– методы контроля и самоконтроля в процессе обучения [37].

Методы организации учебно-познавательной деятельности включают в себя: методы работы учащихся под контролем учителя, методы работы с использованием средств управления учебно-познавательной деятельность (учебник, ТСО), методы самостоятельной работы.

Е.И. Перовский утверждал, что на методы обучения наибольшее влияние оказывают источники, из которых ученики черпают свои знания, и предложил классификацию методов обучения по источникам знаний. В соответствии с этим были выделены три группы методов: словесные, наглядные и практические [19]. На уроках алгебры, посвященных степеням и корням, целесообразно использовать методы из каждой группы.

Существует классификация методов обучения по характеру познавательной деятельности, предложенная в середине 60-х гг. И.Я. Лернером и М.Н. Скаткиным. Этой классификации присущи следующие методы:

– объяснительно-иллюстративные;

– репродуктивные;

– проблемные;

– эвристические;

– исследовательские [44].

Остановимся подробнее на объяснительно-иллюстративном, репродуктивном и эвристическом методах. Проанализируем сущность данных методов на основе опубликованных статей.

В статье Ю.И. Горелова [12] *объяснительно-иллюстративный* метод трактуется так: учителю надлежит передавать учащимся готовую информацию с помощью различных средств обучения, а учащиеся, в свою очередь, должны воспринимать и понимать полученную информацию, и уметь связывать ее со своими представлениями и знаниями, полученными ранее. Обычно данный метод используется на первых этапах изучения новой темы.

В статье И.В. Харитоновой [47] описываются следующие два метода.

Сущность *репродуктивного* метода заключается в том, что учитель организует работу учеников на уроке посредством передачи им знаний и показанных способов деятельности. В реализации данного метода важную роль занимают упражнения.

Эвристический метод заключается во влечении учащихся в процесс самостоятельного «открытия» определений, теорем и др. Разновидностью рассматриваемого метода является эвристическая беседа. Суть этой беседы заключается в том, что учитель разрабатывает систему вопросов к учащимся, использование которых и приводит к достижению целей урока.

Также наиболее известными являются классификации по способам изложения учебного материала, по формам организации учебной деятельности, по дидактическим целям и др.

Рассмотренные выше классификации методов обучения имеют дидактический контекст и являются общими, то есть методами, не учитывающими специфики отдельных предметов [48]. Поэтому они не могут отразить все методические особенности обучения математике. Для разрешения этого противоречия подойдем к проблеме методов обучения с другой стороны.

Основное различие дидактики и частной методики заключается в том, что содержание обучения включает не только деятельность учителя и ученика, но и содержание учебного предмета, в нашем случае – математики. Исходя их этого, рассмотрим некоторые специфические методы, применяемые в преподавании математики.

В ходе изучения степеней и корней применяются подготовительные задачи. Они готовят учащихся к введению нового определения, «открытию» теоремы, к пониманию ее доказательства, решению упражнений. Все это составляет сущность *метода целесообразных задач*. Данный метод разработал известный русский методист С.И. Шохор-Троцкий. В настоящее время этот метод широко используется учителями и авторами учебников [21].

На протяжении развития педагогики и теории обучения математики проблема методов обучения формировалась с разных точек зрения:

– с точки зрения формы деятельности;

– с точки зрения логической структуры и функций деятельности;

– с точки зрения характера познавательной деятельности [52].

В качестве примера классификация методов обучения математики выступает классификация по характеру учебно-познавательной деятельности и организации содержания учебного процесса, представленная Г.И. Саранцевым. Она содержит:

– индуктивно-репродуктивный метод;

– дедуктивно-репродуктивный метод;

– обобщенно-репродуктивный метод;

– индуктивно-эвристический метод;

– дедуктивно-эвристический метод;

– эвристическое обобщение;

– индуктивно-исследовательский метод;

– дедуктивно-исследовательский метод;

– обобщенное исследование [42].

При изучении темы «Степени и корни» полезно использовать перечисленные далее методы.

Индуктивно-репродуктивный метод предполагает, что учитель должен создать такую ситуацию, чтобы ученик воспроизвел понятие или теорему в процессе рассмотрения частных случаев, например, посредством решения задач, удовлетворяющих условию теоремы, либо решение задачи (изучение теоремы) должно осуществляться по плану, который предложит учитель.

При *обобщенно-репродуктивном* методе цель достигается путем воспроизведения изученных фактов.

При *индуктивно-эвристический* методе предполагается самостоятельное открытие фактов в процессе рассмотрения частных случаев. Например, упражнения на умножение степеней с одинаковым основанием приводят к выявлению определения произведения степеней с одинаковыми основаниями.

Дедуктивно-эвристический метод заключается в открытии частностей какого-либо факта при рассмотрении общего случая. Так, например, решение конкретного квадратного уравнения по общей формуле приводит к зависимости между заданными коэффициентами при x^2, x, и свободным членом и корнями данного уравнения.

Эвристическое обобщение предполагает, что учитель должен создать такую ситуацию, в которой ученик самостоятельно или с его незначительной помощью должен прийти к обобщению.

Сутью *дедуктивно-исследовательского* метода обучения является организация исследований с помощью дедуктивного развития учебного материала. Он проявляется в таких формах, как аксиоматический метод, метод моделирования, решение задач на применение теорем.

Выбор методов обучения математике зависит от таких критериев, как соответствие целям и задачам урока, соответствие реальным возможностям учителя и ученика, соответствие формам организации учебно-воспитательной деятельности. При этом, главная задача учителя – это применять и комбинировать различные методы. «Использование учителем многообразия методов дает возможность формировать у школьников тот или иной тип мышления, развивать механизмы мыслительной активности» [22].

Усвоение учебного материала учащимися происходит в различных формах обучения.

«Форма обучения представляет собой целенаправленную, четко организованную, содержательно насыщенную и методически оснащенную систему познавательного и воспитательного общения, взаимодействия учителя и учащихся» [25, с. 397]. Она зависит от содержания, целей, методов и средств обучения, коллектива учащихся и места проведения учебного процесса.

В пособии для студентов математических специальностей педагогических вузов Р.А. Утеевой [45] описываются следующе формы обучения:

– индивидуальные;

– групповые;

– фронтальные;

– коллективные.

Индивидуальная форма обучения подразумевает работу учителя с каждым учеником, то есть самостоятельное выполнение учащимися заданий, предназначенных одинаково для всего класса. Задачей учителя при данном подходе ставится создание условия для стимулирования у учеников самоценной образовательной деятельности для саморазвития, самовыражения в ходе выполнения заданий. К преимуществам индивидуальной формы обучения можно отнести развитие самостоятельности, самооценки, умение осуществлять контроль.

При *групповой* форме обучения учащиеся работают в группах, основанных на различных критериях; учитель дает одинаковое задание и поочередно работает с каждым коллективом. Членами группы допускается обсуждение хода работы. Итоги подводятся относительно деятельности целой группы.

При *фронтальной* форме обучения учитель ведет работу со всем классом в едином темпе. Учащиеся, непосредственно под руководством и наблюдением учителя, выполняют одинаковые задания. Учитель на конкретном этапе урока взаимодействует только с некоторыми учениками поочередно; остальные учащиеся выполняют задания по образцу, заданному учителем, либо учеником, выполняющим задания у доски. Итоги подводятся относительно деятельности некоторых учеников.

Коллективная форма отличается от фронтальной тем, что учащимся предлагается выполнить общее задание без помощи учителя, путем обсуждения этого задания, выдвижения гипотиз, проверки их на конкретных примерах. Задача учителя при этом – мотивировать их к самостоятельному достижению цели.

Во время изучения темы «Степени и корни» в большинстве случаев используется фронтальная (при изучении нового материала), коллективная (на уроках закрепления) и индивидуальная (при проверке знаний) формы обучения.

Методы обучения применяются в единстве со средствами обучения. Однозначного определения понятия «средства обучения» в педагогике нет. Под ними чаще всего понимаются учебные и наглядные пособия, технические средства, демонстрационные устройства и др.

Доктор педагогический наук, П. И. Пидкасистый, трактует это понятие так: «средство обучения – материальный или идеальный объект, который использован учителем и учащимися для усвоения знаний» [37, с. 229]. Такое определение является наиболее емким и в большей степени отражает современную точку зрения на средства обучения.

На уроке, во время прохождения темы «Степени и корни» используются такие средства обучения, как учебники, таблицы, раздаточный материал, презентация по теме урока и др.

§ 6. Методические рекомендации по обучению теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы

Последовательность изучения темы «Степени и корни»:

– степень с натуральным показателем;

– степень с целым показателем;

– арифметический квадратный корень;

– степень с рациональным показателем;

– корень n-й степени;

1. *«Степень с натуральным показателем».*

Основной целью изучения данного пункта является накопление знаний о степенях, то есть создание своего рода фундамента для последующего изучения широкого круга тождественных преобразований различного вида и разделов: квадратный корень, степень с целым показателем, корень n-й степени. В связи с этим «степени с натуральным показателем» необходимо уделить особое внимание; добиться того, чтобы данная тема была усвоена всеми учащимися.

Определение степени числа a с натуральным показателем n учащиеся должны хорошо усвоить, так как на его основе этого определения строится алгоритм вычисления степени. Для лучшего запоминания определения целесообразно использовать наглядный материал, представленный в таблице.

Необходимо требовать от учащихся грамотного прочтения выражения вида a^n при конкретных значениях a и n.

Таблица 6

Степень с натуральным показателем

<table>
<tr>
<td>Определения:
1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$;
2. $a^1 = a$;
3. $0^n = 0$.</td>
<td>Обозначения:

</td>
</tr>
</table>

Внимание учащихся следует обратить на свойство степени с отрицательным основанием с четным и нечетным показателем, а также на справедливость неравенства $a^2 \geq 0$ при любых значениях a. Таким образом, ученик в первую очередь должен привыкнуть определять знак получаемого значения степени.

Большое количество упражнений уделяется вычислению значений выражений. Для их выполнения учитель должен ознакомить учеников с принятым порядком выполняемых действий: при отсутствии скобок сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление, и сложение и вычитание.

Некоторые учащиеся считают, что $-a\ ^2 = -a^2$. Во избежание ошибки, следует уделить внимание следующему упражнению.

Пример [1, с. 156]. $-x\ ^2 \cdot x = x^2 \cdot x = x^3$.

При изучении свойств степеней с натуральным показателем, учащиеся сталкиваются с теоремами и их доказательствами. На этом этапе важно объяснить, что равенство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ является основным свойством степени. Так как из него следуют правила деления степеней и возведения степени в степень. Уместно рекомендовать учащимся изучить доказательства свойств степеней по учебнику, либо попробовать доказать их самостоятельно. Требовать воспроизводить доказательства в дальнейшем – не рекомендуется.

В связи с изучением правила деления степеней с одинаковыми показателям вводится понятие степени с нулевым показателем. Необходимо выделить, что выражение 0^0 не имеет смысла. Далее рекомендуется обратить внимание, что формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, где $a \neq 0$ теперь можно применять в случае, когда один из показателей равен нулю, либо оба показателя равны нулю. А формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$ можно применять при любых целых неотрицательных m и n, если $m \geq n$.

При изучении правила возведения в степень произведения, нужно отметить, что для этого действия используются переместительное и сочетательное свойства умножения.

2. *«Степень с целым показателем».*

В ходе изучения данной темы, учащиеся должны осознать расширение понятия степени, а именно то, что степень бывает не только с натуральным, но и с любым целым показателем, поэтому первый урок целесообразно начать с напоминания определения степени с натуральным показателем. Учитель должен объяснить, что у степени с неположительным целым показателем основание не должно быть равным нулю.

Учащиеся могут допустить типичную ошибку психологического характера: соотносить степень с отрицательным показателем с отрицательным числом (например, $2^{-5} = -\frac{1}{2^5}$). Для предупреждения подобных ошибок полезны некоторые упражнения, которые неоднократно нужно предлагать к выполнению, причем показатель степени можно брать в виде числа.

Пример [3, с. 37]. Какое выражение равно 2^{-n}?

1) 2^{-n}; 2) $\frac{1}{2^{-n}}$; 3) $\frac{1}{2^n}$; 4) $-\frac{1}{2^n}$.

Ошибки допускаются также при вычислении значений степеней с дробными основаниями. Поэтому следует обучить школьников рациональному приему, для усвоения которого следует выполнить определенные упражнения.

Пример [3, с. 39]. Записать без отрицательного показателя степени число, равное:

а) $\frac{4}{5}^{-1}$; б) $\frac{1}{3}^{-1}$; в) $\frac{a}{b}^{-1}$; г) $\frac{c-d}{c+d}^{-1}$.

Свойства у степеней с целым показателями такие же, как и у степеней с натуральными показателями. Поэтому новый материал ученикам несложно будет освоить. Учителю достаточно объяснить, что каждое «новое свойство» можно доказать с помощью соответствующего «старого свойства», и рассмотреть предложенные примеры этих «доказательств».

3. «Квадратный корень».

Этот пункт с точки зрения изучаемого материала можно считать центральным. Необходимо, чтобы все учащиеся усвоили данную тему, иначе последующее изучение курса будет невозможным.

При введение понятия квадратного корня, учащиеся знакомятся с новым для них действием, обратным к возведению в степень, – извлечением корня. Причем, чтобы извлечения выполнялись однозначно, вводится понятия арифметического квадратного корня (если, например, квадратный корень из числа 25 имеет два значения: $5, -5$; арифметический корень из 25 равен 5). Осознанному усвоению этого понятия будет способствовать запись в тетрадях учащихся, представленная в Таблице 7.

Важно обратить внимание учащихся, что выражение $\overline{a}$ имеет смысл при любом $a \geq 0$ верно равенство $\overline{a}^{\,2} = a$.

Таблица 7

Арифметический квадратный корень

Слова учителя	**Запись в тетрадях**
Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.	$\overline{a}$ $\overline{a} \geq 0$ (или $\overline{a} = b,\ b \geq 0$) $\overline{a}^{\,2} = a$ (или $b^2 = a$)

При выполнении упражнений полезно просить школьников правильно читать запись равенства, а также называть подкоренное выражение в левой части равенства.

Пример [31, с. 57]. Проверьте равенство: $\overline{49} = 7$.

Решение. Равенство верно, так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

Изучение свойств квадратных корней дает учащимся некоторое преимущество. В самом деле, например, преобразовать выражение $\sqrt{16 \cdot 9}$ на основе лишь определения квадратного корня можно было бы так: $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$. Свойство корня из произведения позволяет использовать более простой способ, чтобы прийти к тому же результату: $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$.

Переписав свойства $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ справа налево, получим правила умножения и деления корней.

Можно напомнить школьникам, что с подобной «двусторонней» записью они уже неоднократно встречались. Например, разложение на множители разности квадратов двух выражений.

При изучении квадратного корня из степени полезно рекомендовать учащимся записать в тетради вывод: чтобы извлечь корень из степени с четным показателем, достаточно воспользоваться тождеством $\sqrt{x^2} = |x|$. Этот вывод поможет при выполнении упражнений из данного пункта.

Кроме перечисленных преобразований, в некоторых учебника может встретиться выражение вида $\sqrt{2^6}$. В теоретической части данное упрощение выражения не рассматривается, но предполагается, что ученики должны действовать по алгоритму: $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^{3 \cdot 2}} = 2^3$.

4. *«Степень с рациональным показателем»*.

Данная тема присутствует лишь в некоторых учебниках алгебры для 9 класса. У Ю.Н. Макарычева [6] данная тема представлена в разделе *«Для тех, кто хочет знать больше»*. Некоторые сведения о степени с рациональным показателем ученики могли получить при ознакомлении с приемами вычислений корня n-й степени с помощью микрокалькулятора. На данном этапе сведения систематизируются и дополняются.

Материал по этой теме может быть рекомендован учащимся, остро интересующимся математикой, для самостоятельного изучения.

5. *«Корень n-й степени».*

Отметим, что на базовом уровне, учащимся достаточно знать понятия корня 2-й и 3-й степеней [39]. Однако здесь же ученик должен уметь решать уравнения типа $x^n = 2$. Но кажется странным, что ученик основной школы должен решать уравнения $x^2 = 2$, $x^3 = 2$, а уравнение $x^2 = 5$ – нет. Поэтому в некоторых учебниках, например у Ю.Н. Макарычева [6], изучаются корни степени $n \geq 2$. Учитель в конкретном классе сам определяет, изучать ли весь материал или отобрать только то, что относится к квадратным или кубическим корням. В классах с углубленным изучением рекомендуется изучить весь материал.

§ 7. Типология задач основного государственного экзамена по теме «Степени и корни»

В данном параграфе рассмотрим упражнения, ориентированные на подготовку к сдаче основного государственного экзамена по математике в 9 классе.

Выделим основные типы этих задач.

I тип. Задания на нахождение значения выражения.

Пример 1 [36, № 110]. $0{,}6 \cdot (-10)^3 + 50 = -600 + 50 = -550$.

Пример 2 [36, № 311395]. $\frac{3^8 \cdot 3^5}{3^9} = 3^{8+5-9} = 3^4$.

Пример 3 [36, № 337268]. $5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-4} = 0{,}5 + 0{,}06 +$ $+0{,}0004 = 0{,}5604$.

Пример 4 [36, № 137272]. $\frac{(2\sqrt{6})^2}{36} = \frac{2^2 \cdot (\sqrt{6})^2}{36} = \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Пример 5 [36, № 137285]. $5\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{22} = 5 \cdot \sqrt{11} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 11} =$ $5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 220$.

Пример 6 [41, №1]. $\frac{2^{10} \cdot (7^2)^4}{14^7} = \frac{2^{10} \cdot 7^8}{(2 \cdot 7)^7} = \frac{2^{10} \cdot 7^8}{2^7 \cdot 7^7} = 2^3 \cdot 7 = 8 \cdot 7 = 56$.

Пример 7 [41, № 30]. $\frac{28\cdot98\cdot75}{7^2\cdot20}=\frac{7\cdot4\cdot7\cdot7\cdot2\cdot5\cdot5\cdot3}{7^2\cdot4\cdot5}=\frac{7^2\cdot4\cdot2\cdot5^2\cdot3}{7^2\cdot4\cdot5}=2\cdot5\cdot3=30.$

Пример 8 [36, № 317389]. $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{200}{8}}=\sqrt{25}=5.$

Пример 9 [9, с. 11]. Найдите значение выражения $\sqrt{1+3x}$ при $x=-0{,}17$.

А. 1,21

Б. 0,07

В. 0,7

Г. выражение не имеет смысла

Решение.

$\sqrt{1+3x}=\sqrt{1+3\cdot(-0{,}17)}=\sqrt{0{,}49}=0{,}7.$

Правильный ответ Б.

Пример 10 [9, с. 51]. Найдите значение выражения $\sqrt{x^2-y^2}$ при $x=10,\ y=-5$.

Решение.

$\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{10^2-(-5)^2}=\sqrt{100-25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}.$

II тип. Задания, связанные с числами и алгебраическими выражениями.

Пример 11 [36, № 28]. Значение какого выражения является рациональным числом?

1) $(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)$;

2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}$;

3) $(\sqrt{6}-2)^2$;

4) $\frac{(\sqrt{7})^2}{49}$.

Решение.

Упростим каждое выражение:

1) $(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)=6-3\sqrt{6}+3\sqrt{6}-9=6-9=-3$;

2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{30}$;

3) $(\sqrt{6}-2)^2 = 6 - 4\sqrt{6} + 4 = 10 - 4\sqrt{6}$;

4) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10} = 0{,}7\sqrt{10}$.

Рациональным является выражение 1.

Пример 12 [36, № 287934]. Расположите в порядке возрастания числа $-0{,}5$; $(-0{,}5)^2$; $(-0{,}5)^3$.

Решение.

Поскольку $(-0{,}5)^2 = 0{,}25$; $(-0{,}5)^3 = -0{,}125$, получаем порядок: $-0{,}5$; $(-0{,}5)^3$; $(-0{,}5)^2$.

Пример 13 [36, № 348417]. Какое из данных чисел является значением выражения

$(\sqrt{42}-2)^2$?

1) $46 - 4\sqrt{42}$;

2) $38 - 4\sqrt{42}$;

3) $46 - 2\sqrt{42}$;

4) 38.

Решение.

Найдем значение выражения:

$(\sqrt{42}-2)^2 = 42 - 4\sqrt{42} + 4 = 46 - 4\sqrt{42}$.

Значением выражения $(\sqrt{42}-2)^2$ является вариант под номером 1.

Пример 14 [36, № 137275]. Какое из следующих выражений равно 5^{k-3}?

1) $\frac{5^k}{5^3}$;

2) $\frac{5^k}{5^{-3}}$;

3) $5^k - 5^3$;

4) $(5^k)^3$.

Решение.

При делении степеней с одинаковыми основаниями показателями вычитаются. Следовательно, правильный ответ под номером 1.

Пример 15 [9, с. 8]. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна $\sqrt{3}-1$.

Решение.

Площадь квадрата равна a^2.

Таким образом, $S=a^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=3-2\sqrt{3}+1=4-2\sqrt{3}$.

Пример 16 [36, № 318723]. Какому из следующих выражений равна дробь $\frac{2^n}{8}$?

1) 2^n-2^3;

2) $2^{\frac{n}{3}}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^n$;

4) 2^{n-3}.

Решение.

Используем свойство степени: $\frac{2^n}{8}=\frac{2^n}{2^3}=2^{n-3}$.

Правильный ответ указан под номером 4.

Пример 17 [36, № 137278]. Представьте выражение $\frac{(c^{-6})^{-2}}{c^{-3}}$ в виде степени с основанием c.

1) c^9;

2) c^{15};

3) c^{-5};

4) c^{-4}.

Решение.

Используя свойства степеней, получаем $\frac{(c^{-6})^{-2}}{c^{-3}}=\frac{c^{12}}{c^{-3}}=c^{12-(-3)}=c^{15}$.

Пример 18 [36, № 348654]. Какое из данных ниже выражение при любых значениях n равно дроби $\frac{5^n}{125}$?

1) 5^{n-3};

2) $5^{\frac{n}{2}}$;

3) 25^n;

4) $\frac{1^n}{5}$.

Решение.

Рассмотрим дробь: $\frac{5^n}{125} = \frac{5^n}{5^3} = 5^{n-3}$.

Правильный ответ под номером 1.

III тип. Сравнение чисел. Числа на прямой.

Пример 19 [36, № 137293]. Сравните числа x и y, если $x = 2{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-1}$, $y = 0{,}007$. В ответ запишите меньшее из чисел.

Решение.

Оба числа приведем к десятичному виду и сравним х. для этого воспользуемся формулой $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$x = 2{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 2{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 6{,}6 \cdot 10^{-3} = 0{,}0066.$

Y уже приведен к десятичному виду и равен $0{,}007$, значит, $0{,}007 > 0{,}0066$. Отсюда $y > x$. Ответ: $0{,}0066$.

Пример 20 [36, № 337301]. На координатной прямой отмечено число a.

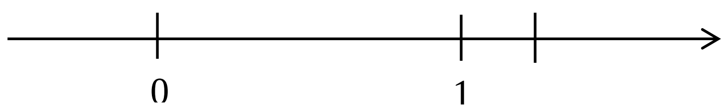

Рис. 1. Рисунок к примеру 20

Найдите наименьшее из чисел a^2, a^3, a^4.

Решение.

$a > 0$, значит, $1 < a^2 < a^3 < a^4$. Таким образом, a^2 – наименьшее из всех чисел.

Пример 21 [9, с. 15]. На координатной прямой отмечены числа a и b. Сравните числа $-\ \overline{a}$ и $-\ \overline{b}$.

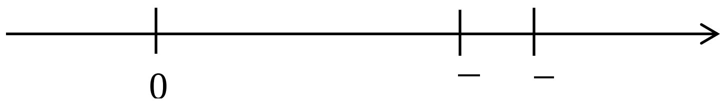

Рис. 2. Рисунок к примеру 21

А. $-\ \overline{a} <- \ \overline{b}$

Б. $-\ \overline{a} >- \ \overline{b}$

В. $-\ \overline{a} =- \ \overline{b}$

Г. Сравнить невозможно

Решение.

Если представить, что $\overline{a} < 0$ и $\overline{b} < 0$, то получится $-\ \overline{a} >- \ \overline{b}$. Правильный ответ под буквой Б.

V тип. Текстовые задачи.

Пример 22 [9, с. 23]. Масса Луны составляет $7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг. Выразите массу Луны в миллионах тонн.

А. $7{,}35 \cdot 10^{9}$ млн тонн

Б. $7{,}35 \cdot 10^{2}$ млн тонн

В. $7{,}35 \cdot 10^{21}$ млн тонн

Г. $7{,}35 \cdot 10^{13}$ млн тонн

Решение.

10^3 кг=1 тонна. 10^6 – 1 миллион. Преобразуем массу Луны:

$7{,}35 \cdot 10^{22} = 7{,}35 \cdot 10^{3} \cdot 10^{6} \cdot 10^{13} = 7{,}35 \cdot 10^{13}$ млн тонн.

Правильный ответ находится под буквой Г.

Пример 23 [36, № 317753]. Расстояние от Земли до Солнца составляет $147{,}1$ млн километров. В каком варианте ответа записана эта же величина?

1) $147{,}1 \cdot 10^{10}$ км

2) $147{,}1 \cdot 10^{2}$ км

3) $147{,}1 \cdot 10^{8}$ км

4) $147{,}1 \cdot 10^{12}$ км

Решение.

Запишем расстояние в стандартном виде:

$147{,}1\,\text{млн} = 147{,}1 \cdot 10^6 = 1{,}471 \cdot 10^8$.

Правильный ответ находится под номером 3.

Для выполнения этих заданий учащийся должен уметь выполнять вычисления и преобразования алгебраических выражений. Также ученику необходимы знания об использовании свойств степеней с натуральным показателем; о степени с отрицательным показателем; стандартном виде числа; навыки выполнения операций с корнями.

Выводы по второй главе

Во второй главе представлены методические основы обучения теме «Степени и корни»:

– рассмотрены методы, формы и средства, используемые при обучении теме исследования;

– приведены методические рекомендации для обучения теме «Степени и корни»;

– проанализированы задачи основного государственного экзамена, содержащие степени и корни; составлена их типология.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем исследовании были выявлены особенности содержания и методологии изучения темы «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы.

В ходе логико-математического и методического анализа темы «Степени и корни» было выявлено, что логическая последовательность изучения тем «Степень» и «Корень» основана на том, что непосредственно операции *возведение в степень* и *извлечение корня*, связанные с данными понятиями, также следуют одна за другой в аспекте формирования навыков их осуществления.

Вместе с тем выделен пропедевтический аспект в изучении темы «Степени и корни», который подразумевает закладывание основ для формирования знаний еще до начала изучения алгебры в курсе основной школы.

Получены следующие результаты:

1. Изучено понятия логико-математического анализа содержания темы «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы.
2. Выявлены цели темы «Степени и корни», определено ее место в курсе алгебры основной школы.
3. Изучен федеральный государственный стандарт, и выявлены планируемые результаты изучения темы.
4. Рассмотрен теоретический материал по теме «Степени и корни», проанализированы школьные учебники разных авторов.
5. Выполнен анализ содержания задачного материала по теме «Степени и корни», рассмотрены примеры задач и их решения.
6. Рассмотрены методы, формы и средства, используемые при обучении теме исследования.
7. Приведены методические рекомендации для обучения теме «Степени и корни».

8. Проанализированы задачи основного государственного экзамена, содержащие степени и корни; составлена их типология.

Практическая значимость работы определилась тем, что в ней разработаны учебные материалы для преподавания темы «Степени и корни», подобрана система задач для указанной темы. Данная работа может быть использована как педагогами, так и учащимися при подготовке к самостоятельной и контрольной работам, ОГЭ по математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.; под ред. Г. В. Дорофеева. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 256 с.
2. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.
3. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.; под ред. Г. В. Дорофеева. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.
4. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.
5. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.; под ред. Г. В. Дорофеева. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.
6. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.
7. Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс: учебное пособие для общеобразовательных организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 144 с.
8. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс: учебное пособие для общеобразовательных организаций / С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова и др. – М.: Просвещение, 2015. – 246 с.
9. Алгебра: сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 кл. / Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 191 с.

10. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник, изд. 3-е. — СПб.: ЛКИ, 2008. — С. 82. — 248 с.

11. Бакирова А.Ю. Методика преподавания математики. Учебное пособие / А.Ю. Бакирова. – Т., 2007.

12. Горелов Ю.И. Объяснительно-иллюстративный и репродуктивные методы обучения электротехническим дисциплин / Ю.И. Горелов // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2013. – Вып. 12. Ч. 2. – 198 с.

13. Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах / Перевод с древнегреческого И.Н. Веселовского; Под ред. И.Г. Башмаковой. – М.: Наука, 1974. – 328 с.

14. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика: 5 класс. Учебник в двух частях. Часть 1 / Г.В. Дорофеев [и др.]. – М.: Ювента, 2011. – 176 с.

15. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика: 5 класс. Учебник в двух частях. Часть 2 / Г.В. Дорофеев [и др.]. – М.: Ювента, 2011. – 240 с.

16. Знаки математические // Математическая энциклопедия; Под ред. И.М. Виноградова. — М.: Советская энциклопедия, 1982. — Т. 2.

17. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Математика: 5 класс. Учебник / И.И. Зубарева [и др.]. – М.: Мнемозина, 2013. – 270 с.

18. История возникновения степени числа [Электронный ресурс]: открытый урок. – Режим доступа: http://mirurokov.ru/открытый-урок/возведение-в-степень/история-возникновения-степен-числа.html – Последнее обновление: 01.05.2018.

19. Колягин, М. Ю. Школьный учебник: вчера, сегодня, завтра [Электронныйресурс] / М. Ю. Колягин. – режим доступа: http://www.portal-slovo.ru/art/36369.php – Последнее обновление: 29.04.2018.

20. Крившенко Л.П. Педагогика: Учебник / Л.П. Крившенко, М.Е. Вайндорф-Сысоева и др.; Под ред. Л.П. Крившенко. – М.: ТК Велби, изд-во Проспект, 2004. – 432 с.

21. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е. И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. –223 с.: ил.

22. Ланков А.В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. / А.В. Ланков. – М.: Учпедгиз, 1951. – 330 с.

23. Лебедева С.В. Современные формы и средства обучения математике: Учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 050100. – Педагогическое образование (профиль подготовки – Математическое образование) / С.В. Лебедева. – Саратов, 2012. – 131 с.

24. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов и учителей / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – 3-е изд., перераб. И доп. – М.: «ABF», 1995. – 352 с.

25. Лихачев Б.Т.. Педагогика: Курс лекций: учеб. пособие для студентов педагог, учеб. заведений и слушателей ИПК и ФПК. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт-М. –2001. – 505 с.

26. Миндюк, Н.Г. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс: учебное пособие для общеобразовательных организаций / Н.Г. Миндюк, И.С. Шлыкова. – М.: Просвещение, 2016. – 192 с.

27. Миндюк, Н.Г. Методические рекомендации. 9 класс: учебное пособие для общеобразовательных организаций / Н.Г. Миндюк, И.С. Шлыкова. – М.: Просвещение, 2017. – 239 с.

28. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7кл.: в 2 частях. Часть 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

29. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7кл.: в 2 частях. Часть 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 17-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.

30. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8кл.: в 2 частях. Часть 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

31. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8кл.: в 2 частях. Часть 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

32. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9кл.: в 2 частях. Часть 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

33. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9кл.: в 2 частях. Часть 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

34. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра. Учебник. 9 класс, - М.: 2010 г. – 224 с.

35. Новик И.А. Практикум по методике обучения математике / И.А. Новик. – М.: Дрофа, 2008. – 240 с.

36. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://math-oge.sdamgia.ru/?redir=1/ Последнее обновление 10.05.2018

37. Педагогика: педагогические теории, системы, технологии: Учеб. помобие для студ. высш. и сред. пед. учеб. заведений / С.А. Смирнов, И.Б.Котова, Е.Н.Шиянов и др.; Под ред. С.Л. Смирнова. - 4-е изд., испр. - М.: Издательский центр «Академия», 2001.-512 с.

38. Подласый И.П. Педагогика: 100 вопросов – 100 ответов: учебное пособие для вузов / И.П. Подласый. – М.: ВЛАДОС-пресс, 2004. – 365 с.

39. Потапов, М.К. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс: пособие для учителей общеобразовательных организаций / М.К. Потапов, А.В. Шевкин. – М.: – Просвещение, 2015. – 191 с.

40. Программа курса математики для 5-11 классов общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2007. –158 с.

41. Пыжова Т.А. Математика: Учебное пособие для углубленного изучения математики в 7 классе / Т.А. Пыжова, Т.В. Лупенко, И.А. Масленникова. – М.: МИФИ, 2009. – 76 с.

42. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

43. Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – 2-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2008. – 128 с.

44. Сластенин В.И. Педагогика: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Сластенин, И.Ф. Исаев, Е.Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 576 с.

45. Утеева Р.А. Дифференцированное обучение математике учащихся средней школы: Пособие по спецкурсу и семинару для студентов мат. спец. педвузов. – М.: Прометей. – 1996. – 118 с.

46. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/938. – Последнее обновление 01.11.2018

47. Харитонова И.В. Методы обучения и научные методы в преподавании математики / И.В. Харитонова // Вестник Мордовского университета. – 2008. – № 3. 274 с.

48. Big Ideas Math: Algebra 1 Student Journal. – 2014. – 227 p.

49. Herman, J., Kucera, R., Simsa, J., Dilcher. K. Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory. – 2000. – 344 p.

50. Hawkes, H.E. First course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. - Boston: Ginn and company, 1910. – 334 p.

51. Schoenfeld, Alan H, ed. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-makingin. New York: MacMillan, 1992. – 334 – 370 p.

52. Zawaira, A., Hitchcock, G. A primer for mathematics competitions. – New York, 2009. – 360 p.