МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Б А К А Л А В Р С К А Я Р А Б О Т А

Направление подготовки бакалавра: 44.03.05 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математика и информатика*

Студент И.Ю. Сергеева __________
Научный
Руководитель: д.п.н., проф. Р.А. Утеева __________

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева __________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В ФГОС ООО [27] в пункте «Математика» говорится, о знаниях и умениях на базовом уровне, ученики должны: «*решать текстовые задачи, умение действовать в соответствии с алгоритмом и строить простейшие алгоритмы*». Значит, теме решения задач и задачам на совместную работу должно быть уделено достаточное количество времен.

Под з*адачей на совместную работу* будем понимать *такие задачи, в которых несколько объектов или субъектов (людей, бригад, коллективов, насосов, тракторов и т.д.) выполняют одну и ту же работу вместе, при этом с отличными друг от друга скоростями.*

Решение задач на совместную работу является неотъемлемой частью школьного курса математики 5-11 классов. Однако, как показывает практика, при решении таких задач у учащихся часто возникают трудности, связанные с непониманием смысла самой задачи.

Все вышесказанное обосновывает **актуальность** разработки темы данной выпускной квалификационной работы.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре в общеобразовательной школе.

Предмет исследования – методика обучения учащихся решению задач на совместную работу в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования: выявление методических особенностей решения задач на совместную работу в обучении математике в общеобразовательной школе, направленной на систематизацию знаний и умений учащихся.

Задачи исследования:

1. Проанализировать понятие задачи и видов задач на совместную работу в курсе алгебры основной школы.
2. Выделить этапы процесса решения задач на совместную работу.
3. Проанализировать опыт работы учителей по теме исследования.

4. Провести анализ учебников математики 5-6 классов и алгебры 7-9 классов.

5. Разработать методические материалы для обучения решению задач на совместную работу.

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих **методов исследования**: изучение и анализ психолого-педагогической и методической литературы по теме исследования, школьных программ, учебников и учебных пособий.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем выявлены методические особенности изучения задач на совместную работу в обучении математике в общеобразовательной школе; сформирована система упражнений для учащихся 5-9 классов и подготовки к итоговой аттестации выпускников основной школы.

На защиту выносится: методические рекомендации по обучению учащихся решению задач на совместную работу в курсе алгебры основной школы.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении обоснована актуальность исследования, даны основные характеристики.

ГЛАВА I посвящена рассмотрению основных понятий, относящихся к задачам на совместную работу. Также в данной главе освещены различные методы решения задач на совместную работу разными способами, рассмотрена пропедевтика введения темы и составление алгоритма решения задач на совместную работу. Глава также посвящена рассмотрению и анализу преподавания данной темы учителями и выделению возможных методических ошибок при преподавании данной темы.

ГЛАВА II посвящена анализу школьных учебников и учебных пособий по математике для общеобразовательных школ, на наличие задач на совместную работу. Также составлению и решению системы упражнений по теме *«Задачи на совместную работу»* для учеников 5-9 классов. Данная система упражнений может быть использована для подготовки к ГИА.

В **заключении** приведены основные выводы и результаты проведенного исследования.

Список литературы содержит 37 наименования.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие задачи и виды задач на совместную работу в курсе алгебры основной школы

В Толковом словаре русского языка С. Ожегова, Н. Шведовой [20, С. 196] термин *«задача»* определяется как:

1) то, что требует исполнения, разрешения (боевая задача);

2) упражнение, которое выполняется посредством умозаключения, вычисления (арифметическая, алгебраическая задача).

В различных областях знания (психология, педагогика, математика, методика математики) проблему содержания понятия «задача» исследовали Г.А. Балл, Ю.М. Колягин, В.И. Крупич, Л.М. Фридман, А.Ф. Эсаулов, П.М. Эрдниев и многие другие. Анализ точек зрения перечисленных авторов на исследуемую проблему представлен в работах Г.И. Саранцева [23,23].

В методике обучения математике большинство придерживаются трактовки задачи, представленной Ю.М. Колягиным [12, С.139], который отмечает, что без субъекта нет задачи: то, что для одних является задачей, для других может ею не быть. Автор предлагает понимать под задачей особое *состояние системы* «человек – задачная ситуация», где вторым компонентом является множество взаимосвязанных через некоторые свойства и отношения элементов. Кроме того, если субъекту, вступившему в контакт с некоторой ситуацией, неизвестен хотя бы один элемент, свойство или отношения и у субъекта есть потребность установить неизвестные ему элементы, свойства и отношения этой ситуации, последняя становится для него задачей.

Иная *трактовка* реализуется в работах Л.М. Фридмана, который даёт определение задачи, как *модели проблемной ситуации*, которая выражена с помощью знаков некоторого естественного или искусственного языка. Когда субъект в своей деятельности, встречает какое-либо затруднение либо преграду, то возникает *проблемная ситуация* [8, С.14].

Подводя итог проведённому анализу различных трактовок понятия задачи, Г.И. Саранцев отмечает, что наиболее распространённым является использование термина «задача» для *обозначения ситуации, включающей цель и условия для её достижения.* Для понятия задачи характерны две стороны: *объективная* и *субъективная*.

К первой относятся предмет действия, требование, логическая структура решения задачи, место в системе задач, определенность или неопределенность условия и т.д., ко второй – способы и средства решения [23, С. 123]. Автор разъясняет содержание задачи через родовое понятие «явление обучения», а также через видовые отличия: выступать способом организации и управления учебно-познавательной деятельностью; являться носителем действий, адекватных содержанию обучения; средством целенаправленного формирования знаний, умений и навыков; одной из форм методов обучения; средством связи теории с практикой [24, С.15].

Такая трактовка охватывает весь круг предметных задач, представленных в учебниках, а также и тех, которые могут занять в них свое место. [25, С.20].

В статье [10] Г.А. Балл говорит о том, что термин "*задача*" по частоте его использования - один из самых распространенных в науке и образовательной практике.

Г.А. Балл предлагает следующее определение: «Задача в самом общем виде – это система, обязательными компонентами которой являются:

а) предмет задачи, находящийся в исходном состоянии;

б) модель требуемого состояния предмета задачи (эту модель мы отождествляем с требованием задачи)» [1, С. 32].

Наиболее общим является определение задачи как цели, заданной в определенных условиях (А.Н. Леонтьев). Л.Л. Гурова обращает главное внимание на объект мыслительных усилий человека, решающего задачу:

«*Задача* – объект мыслительной деятельности, содержащий требование некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющих раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными её элементами» [2, С. 12].

Некоторые авторы рассматривают понятие "*задача*" как то, что нельзя определить и в самом широком смысле означающее то, что требует решения, исполнения.

Важную роль в курсе математики играют сюжетные задачи. Фактически при их решении впервые реализуется одна из важных задач курса математики – обучение методу моделирования (моделирование в школьном курсе математики кратко можно охарактеризовать как описание реальных процессов на языке математики). *Под сюжетными* следует понимать задачи, в которых описан некоторый жизненный сюжет (явление, событие, процесс) с целью нахождения определенных количественных характеристик или значений [9, С. 3].

К *сюжетным задачам* относят *задачи на работу*. Задачи на совместную работу являются неотъемлемой частью изучения курса математики, часто с ними приходится сталкиваться и в повседневной жизни.

Задачи на работу можно отнести к задачам на прямую или обратную зависимость. Производительность труда, время работы и объем выполненной работы за данное время – это тройка пропорциональных величин.

Все, что мы можем измерить, обозначить числом, мы называем *величиной*. Две величины могут быть связаны друг с другом (говорят, величины *зависят друг от друга*) или не связаны (*не зависят друг от друга*). Зависимости бывают:

– *прямые* – когда изменение одной величины приводит к изменению второй величины в ту же самую сторону (например, если увеличить производительность деталей, то и общий объём выполненной работы увеличится)

— *обратные* – когда увеличение одной величины приводит к уменьшению другой (например, если нужно сделать определённое количество деталей, то при увеличении производительности, время, затрачиваемое на работу, уменьшится).

Все *задачи на работу* можно условно разделить *на две группы*:

— задачи, в которых выполняемый *объем* работы *известен* или его *нужно определить* (например, количество изготовленных деталей, количество гектар вспаханной земли, объем бассейна и т.д.);

— задачи, в которых вообще не сказано, какая работа выполняется или эта работа задана неявно (в таких задачах зачастую задано только время).

Задачи на работу также делятся на два типа:

- задачи, в которых выполняется *раздельная работа* - эти задачи решаются аналогично задачам на движение;

- задачи на *совместную работу*.

В дальнейшем, под з*адачей на совместную работу* будем понимать такие задачи, в которых несколько объектов или субъектов (людей, бригад, коллективов, насосов, тракторов и т.д.) выполняют одну и ту же работу вместе, при этом с отличными друг от друга скоростями.

§ 2. Основные требования к знаниям и умениям учащихся основной школы по решению задач на совместную работу

В Примерной программе основного общего образования по учебным предметам, в разделе «Математика», для пункта «Текстовые задачи» сказано, что:

Выпускник научится в 5-6 классах (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом уровне)

- Решать несложные сюжетные задачи разных типов на все арифметические действия;
- строить модель условия задачи (в виде таблицы, схемы, рисунка), в которой даны значения двух из трёх взаимосвязанных величин, с целью поиска решения задачи;
- осуществлять способ поиска решения задачи, в котором рассуждение строится от условия к требованию или от требования к условию [22, С. 78];
- составлять план решения задачи;
- выделять этапы решения задачи;
- интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи;
- решать задачи разных типов (на работу, на покупки, на движение), связывающих три величины, выделять эти величины и отношения между ними [22, С. 79].

Выпускник научится в 7-9 классах (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом уровне)

- Решать несложные сюжетные задачи разных типов на все арифметические действия;

- строить модель условия задачи (в виде таблицы, схемы, рисунка или уравнения), в которой даны значения двух из трёх взаимосвязанных величин, с целью поиска решения задачи;

- осуществлять способ поиска решения задачи, в котором рассуждение строится от условия к требованию или от требования к условию;

- составлять план решения задачи;

- выделять этапы решения задачи;

- интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи [22, С. 88];

- решать задачи разных типов (на работу, на покупки, на движение), связывающих три величины, выделять эти величины и отношения между ними [22, С. 89];

Методы математики

- Выбирать подходящий изученный метод для решении изученных типов математических задач;

- Приводить примеры математических закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства [22, С. 91].

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять и решать линейные уравнения при решении задач, возникающих в других учебных предметах [22, С. 86].

Исходя из навыков, которыми должен овладеть учащийся, можно сказать, что решение текстовых задач способствует *развитию мышления* учащихся, более *глубокому усвоению* идеи *функциональной зависимости*, *повышает вычислительную* культуру. В процессе решения текстовых задач у учащихся формируются умения и навыки моделирования реальных объектов и явлений [16, С. 137].

Остановимся на пропедевтике алгебраического метода решения текстовых задач, среди которых выделяют два основных этапа [16]:

Первый этап пропедевтики.

Умения, которые необходимо сформировать у учащихся на этом этапе:

- внимательно читать текст задачи;

- проводить первичный анализ текста задачи — выделять условие и вопрос задачи;

- оформлять краткую запись текста задачи;

- выполнять чертежи (рисунки) по тексту задачи.

Рассмотрим соответствующие *приемы* работы учителя *по формированию выделенных умений*, составленные *З. П. Матушкиной* [16, С.138].

Для *формирования умения читать текст задачи*, нужно показывать образец правильного чтения задачи и проводить работу над текстом, для усвоения её содержания.

То есть, задачу нужно предъявлять не только в одном каком-либо виде, но и в виде текста, краткой записи текста или рисунком. Во время работы над усвоением содержания задачи нужно изменять числовые данные задачи и сюжет задачи.

Для *формирования умения выделять условие и вопрос задачи, нужно* обращать внимание учащихся на точность и ясность формулировки вопроса задачи, выполнять переформулировку вопроса задачи, с последующим ответом на него. К условию задачи нужно формулировать дополнительно хотя бы один вопрос. К каждой задаче нужно находить необходимые данные для ответа на вопрос задачи, не пропуская данный этап при решении задач. Обязательным является упражнение, в котором нужно составлять задачи по вопросу и формулировать одну или несколько задач по данному вопросу.

Для формирования обучения оформлению краткой записи текста задачи, нужно выполнять оформление краткой записи в виде таблиц, схем, записи в строку или столбец. Включать в обучение такие приемы, как чтение краткой записи задачи и составление задачи по ее краткой записи.

Для формирования умения выполнения чертежей (рисунков) по тексту задачи. Нужно использовать следующие приемы: использовать задания, в которых требуется выполнить соответствующий рисунок по тексту задачи и обратное задание – это прочитать рисунок, выполненный по тексту задачи. Обязательным упражнением для формирования умения является задание на составление задачи по данному рисунку или чертежу. В результате выполнения данных упражнений у учащихся формируются навыки перевода графических данных на текстовый язык задачи.

Стоит отметить, что чертежи, рисунки, графики должны быть наглядными и четкими, по возможности они должны отражать все данные условия задачи. При этом выделенные данные и искомые должны соответствовать не только условию задачи, но и общепринятым обозначениям.

Второй этап пропедевтики.

Здесь важным является именно обучение учащихся пониманию различных способов словесного выражения изменения величин, а также фиксации их в виде математических выражений или уравнений.

Данный навык достигается с помощью упражнений, которые должны быть использованы в обучении, сложность таких упражнений должна быть посильной для учащихся, а количество – достаточным для того, чтобы происходило формирования соответствующих умений и навыков. Например, можно использовать следующий приём: рассматривать конкретные текстовые задачи и после прочтения их текстов учащимся предлагать ответить на ряд вопросов [16, С.139].

Раскроем содержание этого приема на нескольких задачах.

Задача 1. Швея за час выполняет в 3 раза больше работы, чем её ученица. Какой объём работы выполняет швея и ученица, если вместе за час они сшили 12 фартуков?

Задание.

1) Назовите величины, которые связаны зависимостями: а) одна выполняет больше другой в 3 раза; б) одна выполняет меньше другой в 3 раза.

2) Если ученицы сшила x фартуков, то как можно истолковать

выражения: $3x$; $3x+x$? Значение какой из представленных здесь величин известно по условию задачи?

Задача 2. Среди землевладельцев проводились состязания по сбору урожая. Землевладелец К. выиграл на ... состязаний..., чем проиграл. Число проигранных землевладельцем К. состязаний в ... числа состязаний, проведенных вничью. Сколько проведено состязаний, если ничьих было на ..., чем проигрышей?

Задание. Используя справочный материал, заполните пропуски в тексте задачи. Справочный материал: землевладелец К. выиграл 16 состязаний, проиграл 6 и свел вничью 2.

Задача 3. Ученик токаря, для получения постоянной работы, должен сделать 8 деталей. За каждую деталь без брака засчитывалось 5 очков, а за каждую деталь с браком списывалось 3 очка. Сколько деталей без брака сделал токарь, если он получил 24 очка?

Задание. Установите, к решению, каких из приведенных ниже уравнений сводится решение предложенной задачи:

а) $5a – 3(8 – a) = 24$; б) $5a=24$;

в) $5(8 – a) – 3a=24$; г) $5a – 3 (8+a)=24$;

д) $3b = 24$; е) $5a + 3 (8 – a) = 24$.

Задача 4. Два асфальтоукладчика начали ремонтировать дорогу длиной 120 м. Через сколько часов они завершат работу, если начнут ремонт и если один укладывает 11 м/ч, а другой 9 м/ч?

Задание. Дополните приведенные ниже выражения до уравнения, к которому сводится решение задачи:

а) $11x + ... = 120$;

б) $120 ... = 9x$;

в) $...11x = ...$.

Данные задания не требуют решения исходных задач.

Среди подобных заданий выделяют две группы:

– *первая группа*, примеры подобных заданий приведены под задачами 1 и 2. Упражнения первой группы направлены на формирование умения у учащихся видеть различные и всевозможные зависимости между величинами, входящими в задачу;

– *вторая группа*, примеры подобных заданий приведены под задачами 3 и 4. Упражнения второй группы, направлены на формирование умения видеть в математическом выражении или формуле определенное содержание, т. е. математическую модель.

Изложенная система пропедевтической работы учителя по обучению решению текстовых задач показывает, что эти задачи выступают не только как цель и средство, но и как предмет изучения [16, С.140].

Не стоит забывать, что для осознанного решения задач учащимися алгебраическим методом, методом составления уравнений, нужно прочное усвоение методов решения «чисто арифметических» задач [16, С.140].

Кратко, пропедевтику можно разделить на два этапа, где *на первом этапе* учитель должен систематически и целенаправленно формировать у учащихся важные общеучебные и математические навыки. *На втором* этапе учитель должен уделить основное внимание выявлению зависимостей между величинами, которые входят в текст задачи, и также обязательно обучать переводу этих зависимостей на математический язык [16, С.138].

§ 3. Этапы процесса решения задач на совместную работу

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, – её ответ [29, С. 27].

Н.Л. Стефанова выделяет в процессе решения задачи четыре основных этапа работы:

1. *Анализ текста задачи*. Одна из трудностей анализа текста задачи состоит в том, что текст неодинаково воспринимается и понимается разными людьми. Существует несколько задач, созданных на основе этого текста: задача, которую имел в виду автор; задача, которую «перевел» для себя ребёнок; задача, которую воспринял учитель. И совсем необязательно, что они совпадают. Фактически процесс решения задач должен начинаться с создания одной и той же задачи, корректировка субъектного опыта, привлекаемого к решению, обучению языку математики. Чем меньше ребёнок, тем выше субъективность его индивидуального опыта в области математики, а значит, тем более значима работа с текстом. [26, С. 105].

Цель этапа – выделить объективное содержание задачи, условие, заключение, выполнить краткую запись, чертеж, схему, если это понадобится решающему.

2. *Поиск решения задачи.*

Цель этапа – создание плана решения, который можно представить в виде устного или письменного текста, а также в виде модели или поисковой схемы.

3. *Реализация плана решения с обоснованием*.

4. *Проверка решения задачи и запись ответа*. Проверка может быть проведена по смыслу: могут ли существовать объекты с описанными и

полученными свойствами; проверка правильности выполнения логических и математических операций и т.д.

Этот *этап* предполагает *обобщение и систематизацию* полученного опыта, рефлексию, осознание того, как и с помощью каких процедур была решена данная задача. В некоторых случаях проводится исследование задачи (другие методы и *способы решения*, единственность или не существование объекта) [26, С. 106].

Четвертый этап может быть частично рассмотрен в начале второго этапа, что может помочь нахождению способа решения. При решении задачи, человек, решающий задачу, может многократно возвращаться к одному из этапов.

Выполнение всех четырех этапов необходимо воспитывать у ребёнка. Ответ на четвертый вопрос теста предполагает не только выполнение требования, поставленного в задаче, но и исследовательскую работу [26, С. 107].

Итак, *процесс решения задачи по Н.Л. Стефановой* включает:

— анализ текста;

— поиск решения;

— реализацию плана;

— проверку и запись ответа.

Л.М. Фридман в работе [29, С. 28-29] выделяет следующие этапы:

1. *Анализ задачи*. Необходимо разобраться в том, что это за задача, каковы её условия, в чем состоят её требования.

2. *Оформление и запись анализа.* Использование схематической записи задач.

3. *Поиск способа решения задачи.* Первый и второй этап решения необходим главном образом для того, чтобы найти способ решения данной задачи.

4. *Этап осуществления (изложения) решения.*

5. *Проверка решения.* На данном этапе нужно убедиться, что это решение правильное, что оно удовлетворяет всем требованиям задачи.

6. *Исследование задачи*. На этом этапе нужно установить, при каких условиях задача имеет решение и сколько различных решений существует

7. *Чёткая формулировка ответа*, после повторного исследования задачи.

8. *Анализ решения задачи*. Анализ выполненного решения, поиск более рационального способа решения, либо обобщения задачи, выводы, которые можно сделать из этого решени и т.д.

Рассмотрим *алгоритм решения задач на совместную работу,* который был составлен нами в ходе решения задач.

1. В задачах на совместную работу мы имеем дело тремя параметрами:

- время – t (время, за которое выполняют работу);
- объём работы – A (объем работы, выполняемый за единицу времени),
- производительность – P (скорость работы),

Производительность труда, время работы и объем выполненной работы за данное время – это тройка пропорциональных величин.

Три величины связаны между собой, следующими формулами:

1) $\text{работа} = \text{производительность} \cdot \text{время}$, A = P·t;
2) $\text{производительность} = \frac{\text{работа}}{\text{время}}$, $P = \frac{\text{А}}{t}$;
3) $\text{время} = \frac{\text{работа}}{\text{производительность}}$, $t = \frac{\text{А}}{P}$

2. Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью.

Производительность и время взаимообратные величины, т. е. вся работа А = 1, следовательно, в таких задачах объем всей работы – A, которая должна быть выполнена, если он не указан, принимается за 1.

3. Во время решения задач на совместную работу нужно ответить на следующие вопросы (рассмотрим на примере рабочих):

— Что принято за время выполнения работы первым рабочим?
— Что принято за время выполнения работы вторым рабочим?
— Какова производительность труда первого рабочего?
— Какова производительность труда второго рабочего?
— Чему равна совместная производительность труда?
— Чему равно время, за которое выполнят задание, работая вместе?

Ответить на эти вопросы можно, как в виде составления математической модели, так и с помощью таблицы.

Рассмотрим сначала ответы на эти вопросы, составив математическую модель.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время выполнения некоторой работы первым рабочим,

y – время выполнения этой же работы вторым рабочим.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда первого рабочего,

$\frac{1}{y}$ – производительность труда второго рабочего.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – совместная производительность труда.

$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y}$ – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

Также решая задачи на совместную работу с помощью таблиц, нужно последовательно отвечать на представленные вопросы, постепенно заполняя таблицу (Табл.1.).

Таблица 1

	Производительность	Время	Работа
1 рабочий	$\frac{1}{x}$	x	1
2 рабочий	$\frac{1}{y}$	y	1
Вместе	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y}$	1

Задачи на совместную работу можно решать как арифметическим, так и алгебраическим способом, составляя математическую модель, либо решая задачу табличным способом, но нельзя стремиться сделать выбранный метод «универсальным» и применять его в неподходящей ситуации. Подобная ситуация будет разобрана нами в дальнейшем.

Рассмотрим примеры решения задач разными способами.

Арифметический способ

Задача 1 [10, С. 40, №127]. Мастер может изготовить 360 деталей за 6 дней, а ученик - за 12 дней. За сколько дней мастер и ученик могут изготовить это количество деталей, работая одновременно?

Решение.

Сначала найдём производительность мастера и ученика по отдельности, далее, найдём их общую производительность, затем сможем найти время за которое они вместе смогут сделать всю работу.

1) 360:6 = 60 (дет.) – производительность мастера за один день.

2) 360:12 = 30 (дет.) – производительность ученика за один день.

3) 30+60 = 90 (дет.) – производительность мастера и ученика за один день, если они будут работать вместе.

4) 360:90 = 4 (дня) – количество дней, которое нужно мастеру и ученику на совместное изготовление всего количества деталей.

Ответ: 4 дня.

Покажем, решение данной задачи по составленному нами алгоритму.

Объём работы принимаем равным 1.

Решение.

Пусть *6* – время выполнения некоторой работы мастером,

12 – время выполнения этой же работы учеником.

Тогда $\frac{1}{6}$ – производительность труда мастера,

$\frac{1}{12}$ – производительность труда ученика.

$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ – совместная производительность труда.

$\frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{3}{12}} = 1 \cdot \frac{12}{3} = 4$ – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

Ответ: 4 дня.

Алгебраический способ

Задача 2 [19, С. 48, №7.24]. Чан наполняется двумя кранами при совместной работе за 1 час. Наполнение чана только через первый кран длится вдвое дольше, чем через второй кран. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан.

Решение.

Объём чана принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое чан наполнится через второй кран,

$2x$ – время, за которое чан наполнится через первый кран.

Тогда $\frac{1}{x}$ – наполняет за 1 час второй кран,

$\frac{1}{2x}$ – наполняет за 1 час первый кран.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{2+1}{2x}=\frac{3}{2x}$ – за 1 час наполняют чан первый и второй кран вместе. По условию задачи сказано, что за 1 час, будет наполнен чан полностью первым и вторым краном вместе, т.е. $\frac{3}{2x}$ = 1 (1)

Значит, из (1) следует, что *x* = 1,5 (ч) - время, за которое чан наполнится только через второй кран, а *2x* = 3 (ч) - время, за которое чан наполнится через первый кран.

Ответ: 1,5 и 3 часа потребуется, для заполнения чана отдельно вторым и первым краном.

Решим эту задачу с помощью заполнения *таблицы 1*.

Решим эту задачу, последовательно составляя и заполняя таблицу 1 (Таб.2-5).

Таблица 2

	Производительность	Время	Работа
1 кран			
2 кран			
Вместе			

Всю работу мы приняли за 1 (Табл.3.).

Таблица 3

	Производительность	Время	Работа
1 кран			1
2 кран			1
Вместе			1

Мы обозначили время, за которое наполнится чан, только через второй и первый кран. Так как время заполнения чана через второй кран наименьшее, поэтому принимаем эту величину за *x*. Значит, время заполнения чана через первый кран – *2x,* время, за которое два крана наполнят чан вместе, по условию равно 1 часу. (Табл.4.).

Таблица 4

	Производительность	Время	Работа
1 кран		2x	1
2 кран		x	1
Вместе		1	1

Далее заполнили столбец производительности. Он показывает, какой объём работы может выполнить первый и второй кран за 1 час, работая по отдельности и вместе (Табл.5.).

Таблица 5

	Производительность	Время	Работа
1 кран	$\frac{1}{2x}$	2x	1
2 кран	$\frac{1}{x}$	x	1
Вместе	$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{3}{2x}$	1	1

Из этого следует, что $\frac{3}{2x}=1.$

Значит, *x* = 1,5 (ч) - время, за которое чан наполнится только через второй кран, а *2x* = 3 (ч) - время, за которое чан наполнится через первый кран.

Ответ: 1,5 и 3 часа потребуется, для заполнения чана отдельно вторым и первым краном.

Задача 3 [16, С. 148]. По плану бригада должна была выполнить заказ за 10 дней. Но фактически она перевыполняла норму на 27 деталей в день и за 7 дней работы не только выполнила предусмотренное планом задание, но и изготовила сверх плана 54 детали. Сколько деталей в день должна была изготовить бригада по плану?

1. *Ответим на следующие вопросы:*

За сколько дней бригада должна выполнить заказ по плану?

За сколько дней бригада фактически выполнила заказ?

Сколько деталей изготовила бригада сверх плана?

Какие величины содержатся в задаче?

Как связаны между собой производительность труда, время и объем выполненной работы?

Какие величины, входящие в условие и вопрос задачи, неизвестны?

Какая величина в задаче является искомой? [16, С. 148].

Во время ответов на поставленные вопросы, заполняется таблица:

Таблица 6

Величины	Ситуация		
	По плану	Фактически	
Производительность бригады, дет. в день	? < ?		на 27
Время работы, дн.	10	7	
Объём выполненной работы, дет	? < ?		на 54

Для выяснения связи между значениями одной и той же величины учащиеся отвечают на вопросы, например: в каком случае производительность труда бригады была выше? На сколько деталей в день бригада перевыполняла норму?

Благодаря правильному ответу на первый вопрос ставим в таблице соответствующий знак неравенства. При ответе на второй вопрос, записываем: «На 27» (в указанном в таблице месте). Аналогично поступают при выяснении связи между неизвестными значениями другой величины. В данном случае сравнивается плановый и фактический объем выполненной работы [16, С. 149].

Пользуясь установленными зависимостями, на основе табличной записи текста задачи заполняется таблица поиска решения задачи:

Таблица 7

Величины	Ситуация		
	По плану	Фактически	
Производительность бригады, дет. в день	x < $x+27$		на 27
Время работы, дн.	10	7	
Объём выполненной работы, дет	$10x$ < $7\cdot(x+27)$		на 54

Выписываем неравенство $10x <(x + 27) \cdot 7$ на 54, и составим уравнение $10x + 54 = (x+27) \cdot 7$ или уравнение $10x = (x + 27) \cdot 7 – 54$.

Остается решить полученное уравнение, выполнить проверку решения и записать ответ.

$10x = (x + 27) \cdot 7 – 54,$

$10x = 7x + 189 – 54,$

$10x = 7x + 135,$

$3x = 135,$

$x = 45.$

Ответ: 45 деталей в день должна была изготовить бригада по плану.

В заключение отметим, что предложенная методика обучения решению текстовых задач на процессы эффективна также и в случае решения задач, приводящих к решению уравнений более сложного вида, чем линейные, например квадратных. Естественно, что при последовательном формировании умений решать текстовые задачи методика обучения, претерпевает определенные изменения: отпадет необходимость применять табличную форму записи текста задачи и поиска ее решения, сократится число выявленных этапов процесса ее решения, сам этот процесс станет более свернутым [16, С. 151].

§ 4. Анализ опыта работы учителей по теме исследования

В данном параграфе выполним анализ опыта учителей по теме исследования, на основе которого выделим возможные методические ошибки при обучении *задачам на совместную работу,* опираясь на этапы решения задач по Л.М. Фридману, представленные выше.

1. Пропуск этапа анализа задачи

Ошибка заключается в том, что после прочтения условия задачи, вызова ученика для решения задачи, сразу начинается оформление решения. Не все учителя и сами понимают, для чего нужно обязательно проводить этап анализа задачи, даже если подобные задачи были решены ранее. Возможно, что данный этап обязателен не для всех учеников, так как есть те, кто проходят его очень быстро и сразу видят решение задачи, но в классе, вероятнее всего, есть ученики, у которых не получается решение.

Стоит понимать, что решение задачи основывается на связях между данными и искомыми величинами. Для того, чтобы выделить эти связи и нужно проводить анализ условия задачи [32, С. 28].

2. Пропуск этапа поиска решения

При пропуске данного этапа у учащихся появляется непонимание эвристической деятельности, что ведёт к возникновению трудностей при самостоятельном решении. Часто учитель вызывает к доске учащихся, которые знают, как решить задачу, но основное внимание учителя должно быть направлено на тех, кто испытывает затруднения при самостоятельном решении задач.

Для тех учащихся, которые могут решать задачи самостоятельно, необходимо предлагать такие задания, которые бы усиливали их умения и способствовали их развитию, например: составление задачи на основе справочных данных; предложить найти другие способы решения задачи; составление граф-схем и других уравнений по задаче и др.

3. Пропуск этапа исследования решения

На данном этапе следует обучить учащихся, не просто решать задачу, а установить, при каких условиях задача имеет решение, сколько различных решений может быть у той или иной задачи, а также при каких условиях задача не имеет смысла, то есть не имеет решения вообще [29, С. 29].

Также нужно проводить анализ, из которого можно сделать вывод о том, что полезного можно извлечь из решенной задачи. Это приводит накоплению опыта по решению задач.

4. Смешение этапов анализа и поиска решения

Для того, чтобы этого избежать, надо знать, какая цель преследуется на каждом этапе. Цель *этапа анализа условия* – выявление всевозможных связей между данными и искомыми величинами, этому может помочь составление таблицы, схемы или рисунка. Цель *этапа поиска решения* – это выбор метода решения и составление плана решения.

У этих этапов разные цели, значит, значит, нельзя допускать смешения этих этапов.

На этапе анализа условия задачи:

1. Разбиваем условие задачи на части;

2. Выясняем, какие величины характеризуют описываемый в условии процесс;

3. Выясняем, какие величины известны, а какие требуется найти;

4. Устанавливаем связи между величинами.

Во время поиска решения выясняем, что можно найти по данным задачи, и поможет ли это для дальнейшего решения задачи.

Если для решения задачи выбран *алгебраический метод*, то поиск ведем по следующим этапам:

1. Определяем условия, которые могут быть основанием для составления уравнения, и выбираем одно из них;

2. Составляем схему уравнения, соответствующего выбранному условию;

3. Определяем, какие величины можно обозначить за x; выбираем одну из них;

4. Определяем, какие величины нужно выразить через x, и находим условия, которые позволяют это сделать.

Завершается этап поиска составлением плана решения задачи.

5. На этапе анализа условия фиксируются не все связи между величинами.

Надо стараться зафиксировать как можно больше таких связей. Почему это важно? Упустив какую-нибудь связь, мы можем потерять:

а) условие для составления уравнения;

б) возможность одну величину выразить через другие;

в) возможность нескольких способов решения [33, С. 29].

6. Поиск решения задачи алгебраическим методом начинается с выбора переменной.

При поиске решения задачи алгебраическим методом, сначала выбирают условие для составления уравнения, затем составление схемы уравнения, и только тогда нужно вводить переменную. Часто происходит следующее: сначала вводят переменную, после через неё выражают остальные величины и затем составляют уравнение.

В данном случае лучше поступить следующим образом. Если не был проведен этапы анализа и этап поиска решения, то ученики найдутся и такие ученики, для которых возникнет затруднение в самостоятельном решении, для них будет непонятно, почему за неизвестную переменную решили обозначить именно эту величину.

Значит, нужно:

- провести анализ и поиск решения задачи;
- составить по условию задачи таблицу;
- найти несколько условий для составления уравнений;
- записать схему уравнения для выбранного условия.

Нужно объяснить ученикам, что существуют разные схемы составления уравнений и, что за *неизвестную переменную* можно обозначить любую из неизвестных величин.

7. Постановка частных, подсказывающих вопросов учащимся

Многое во время обучения зависит от задавать вопросы учащимся. Вопросы не должны нести в себе подсказку, а подталкивать учащихся к размышлению [34, С. 29].

Вместо вопросов: «Во сколько этапов проходил конкурс?», «Как распределили участки?», «Как долго исследователи находились в пути?», «Какие виды животных обитают в зоопарке?», «Можно ли найти количество учащихся, которые ходят на математический кружок?» стоит задавать общие вопросы: «Что происходит по условию задачи?», «Какие объекты участвуют в задаче?», «Какие части можно выделить в задаче?», «Что можно найти по данным задачи?», поскольку он может вывести на несколько вариантов решения.

Задавая вопросы, учитель не должен вести учащихся к своему решению; нужно рассмотреть все пути решения, выслушать и обсудить все варианты.

В статье С.Н. Герасимовой [4] представлен урок по теме «Решение текстовых задач на совместную работу» в 6 классе, который будет полезен для начинающих учителей математики.

В начале урока, учитель *обозначает цели*:

– научить находить способ решения задач с помощью использования опорных задач на совместную работу;

– научить использовать арифметический способ решения текстовых задач,

– развивать смекалку и сообразительность, умение ставить вопросы и отвечать на них.

О*порные* задачи:

Задача 1 *(тип задачи А)*. Бассейн наполняется за 10 часов. Какая часть бассейна наполняется за 1 час?

Задача 2 *(тип задачи В)*. В каждый час первая труба наполняет бассейн $\frac{1}{10}$ бассейна, а вторая – $\frac{1}{15}$ бассейна. Какую часть бассейна наполняют обе трубы за 1 час совместной работы?

Задача 3 *(тип задачи С)*. В каждый час труба наполняет $\frac{1}{6}$ бассейна. За сколько часов она наполнит бассейн?

После опорных задач учитель предлагает *ответить на вопросы*:

1. Сколько минут содержится в половине, в трети, в четверти часа?

2. Работу выполнили за 4 часа. Какую часть работы выполняли в каждый час?

3. Путник проходит в час $\frac{1}{8}$ пути. За сколько часов он пройдет весь путь?

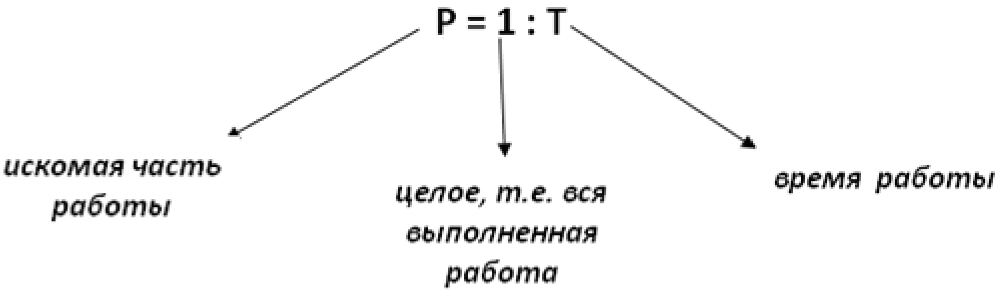
4. Два путника вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 часа. На какую часть первоначального расстояния они сближались в каждый час?

Далее учитель приступает к этапу *закрепления знаний*. На этом этапе автор предлагает решить *старинную задачу* на совместную работу, используя следующий *ход действий*:

- выслушать мнение ребят по поводу решения старинной задачи,
- разобрать затруднения, возникшие при решении задачи на совместную работу.

Учитель делает *подсказку*, что «*при совместной работе складывается не время работы, а часть работы, которую делают ее участники*». После этого даётся решение задачи.

Далее автор предлагает сделать *вывод*: при решении задач на совместную работу вся выполненная работа принимается за 1 – “целое”, а часть работы, выполненная за единицу времени, находится по формуле.



После разбора вывода и формулы, учитель предлагает решить 2 задачи. *Первая задача* – стандартная задача на совместную работу, *вторая – это задача на движение* навстречу друг другу. Учитель делает отступление, что это тоже задача на “совместную работу”, хотя никто не работает. Но можно считать, что “работа” пешеходов – это прохождение пути. Поэтому весь путь принимается за “единицу” и вычисляется часть пути, пройденная каждым пешеходом.

В статье *О.В. Осиповой* [21] представлен урок-исследование по теме "Задачи на совместную работу" *по программе “Школа 2100*” (в начальной школе).

Общедидактическая цель урока: Создать условия для актуализации и усвоения знаний о производительности труда, формирования умений применять эти знания для решения задач на совместную работу.

Далее учитель предлагает решить *старинную задачу из математической рукописи XVII века.*

Задача. Решил барин двор ставить, и пригласил к себе двух плотников. И говорит первый:

- Только бы мне одному двор ставить, то я бы управился в 6 лет.

А другой молвил:

- А я бы поставил его в 3 года.

Спорили, кому двор ставить, и решили, чтоб не обидно было ставить двор сообща. Сколь долго они ставили двор?

Учитель делает оговорку о том, что *мнения в классе разделились*. Одни утверждали, что оба плотника вместе будут строить дом 6+3=9 лет. Другие, что вместе плотники должны построить дом быстрее, а не дольше, чем каждый в отдельности.

Так как, задача не была решена, автор предлагает найти выход из данной ситуации, проделав *два эксперимента*:

1 опыт. Используют бак и две трубы разного диаметра. С помощью секундомера измеряют время вытекания воды (100 мл) из бака через 1-ю трубу, через 2-ю трубу, через обе трубы вместе. В результате чего, получают три значения.

2 опыт. Во втором опыте, автор предлагает двум ученикам выполнить роль насосов. Также как и во время первого опыта измеряется время всасывания воды (50 мл) через трубочку первым учеником, вторым учеником, обоими учениками вместе. В результате опыта, получают три значения.

Результаты измерений заносятся в таблицу. После этого учитель разбивает класс на группы, в которых:

1 группа работает с числовыми величинами 1-го опыта.

2 группа с обратными величинами 1-го опыта.

3 группа работает с числовыми величинами 2-го опыта.

4 группа с обратными величинами 2-го опыта.

Путем вычислений учащиеся приходят к выводу, что $\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}= \frac{1}{T}$

Далее переводят к этапу усвоения новых знаний, учитель вводит понятие производительности:

Величину, обратную времени принято называть производительностью $p=\frac{1}{\text{T}}$.

В четвертом этапе «Проверка понимания учащимися нового материала» предлагается разобрать *задачи по готовым чертежам*, далее приступают к *работе в группах*: всем группам предлагаются задачи разного содержания, но с одинаковым условием (проверка осуществляется по готовому образцу)

Во время пятого этапа группам предлагается решить задачу и защитить её, при этом к каждой задаче дан список вопросов, на которые следует ответить, во время решения задачи:

Задача 1 группы: Три экскаватора различной мощности могут отрыть котлован, работая отдельно: первый - за 10 дней, второй - за 12 дней, а третий- за 15 дней. За сколько времени они отроют котлован, работая совместно?

1. Какая производительность (часть работы за 1 день) каждого экскаватора?
2. Какая производительность экскаваторов, если они будут работать совместно?
3. За сколько времени сделают они всю работу, если будут работать совместно?

Задача 2 группы: Школа заказала в швейную мастерскую форму для учащихся. Одна швея может выполнить весь заказ за 20 дней, второй для выполнения заказа требуется $\frac{3}{5}$ этого времени, а третьей - в 2 раза больше времени, чем второй. За сколько времени выполнит весь заказ три швеи, работая совместно.

1. Сколько времени требуется второй и третьей швее?
2. Какая производительность (часть работы за 1 день) каждой швеи?
3. Какая производительность трёх швей, если они будут работать совместно?
4. За сколько времени сделают они всю работу, если будут работать совместно?

Задача 3 группы: Водоём наполняется двумя трубами за 5 часов, а через одну первую трубу - за 6 часов. Через сколько времени будет наполнен водоём, если открыть только одну вторую трубу?

1. Сколько времени требуется второй и третьей швее?
2. Какая производительность (часть работы за 1 день) каждой швеи?

3. Какая производительность трёх швей, если они будут работать совместно?

4. За сколько времени сделают они всю работу, если будут работать совместно?

Задача 4 группы: К ванне подведены два крана . Через один кран ванна может наполнится за 12 мин, а через другой в $1\frac{1}{2}$ раза быстрее. За сколько минут наполнится $\frac{5}{6}$ ванны, если открыть сразу два крана.

1. Сколько времени потребуется одному второму крану, чтобы наполнить ванну?

2. Какая производительность (часть работы за 1 мин) каждого крана?

3. Какая производительность двух кранов, если они будут работать одновременно?

4. За сколько минут наполнится целая ванна, если будут работать сразу два крана?

5. За сколько минут наполниться $\frac{5}{6}$ всей ванны?

Анализ представленного урока показывает, каким образом можно организовать исследовательскую деятельность учащихся при рассмотрении задач на совместную работу.

Интерес для начинающих учителей может также представить статья *Н.А. Чураковой* [35], в которой приведен урок на тему «Задача на совместную работу».

Выводы по первой главе

В данной главе получены следующие результаты.

1. Выполнен анализ структуры различных трактовок понятия задачи и в обучении.

2. Сформулировано определение задачи на совместную работу

3. Рассмотрены основные требования к знаниям и умениям учащихся основной школы по решению задач на совместную работу.

4. Выделены два основных этапа пропедевтики: *на первом этапе* учитель должен систематически и целенаправленно формировать у учащихся важные общеучебные и математические навыки. *На втором* этапе учитель должен уделить основное внимание выявлению зависимостей между величинами, которые входят в текст задачи, и также обязательно обучать переводу этих зависимостей на математический язык. [16, С.138]. Рассмотрены соответствующие *приемы* работы учителя *по формированию выделенных умений.*

5. Выявлены и рассмотрены этапы решения текстовых задач.

6. Составлен алгоритм решения задач на совместную работу.

7. Даны методические рекомендации при изучении темы решения задач на совместную работу на примерах решения задач по теме исследования.

8. Проанализировано и рассмотрено опытное преподавание данной темы учителями.

9. Выделены возможные методические ошибки, которые учитель может допустить при преподавании данной темы.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 5. Сравнительный анализ программ и учебников по теме исследования

В данном параграфе выполним анализ учебников математики 5-6 классов и учебниках алгебры 7 – 9 классов на наличие задач на совместную работу. Оговоримся, что задачи на встречное движение, мы не будем рассматривать.

Ниже представим анализ учебников из федерального перечня допущенных и рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в общеобразовательном процессе в общеобразовательных учреждениях на 2015-2016 года.

5.1. Анализ учебников математики 5 класса

Для анализа были рассмотрены учебники математики 5 класса следующих авторов:

1. Виленкин Н.Я. Математика. 5 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 280 с.: ил.
2. Дорофеев Г.В. Математика. 5 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др. ; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 12-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 303 с.: ил.
3. Зубарева И.И. Математика. 5 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 270 с. : ил.

Таблица 8

Авторы учебника	Номера задач на совместную работу	Примеры задач
Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Всего – 3 задачи	№ 418, 1132, 1388	№ 418. Столяр и его помощник должны сделать 217 рам. Столяр в день делает 18 рам, а его помощник – 13.Сколько рам им останется сделать после двух дней работы? четырёх дней работы? семи дней работы? № 1132. Пошел дождь. Под водосточную трубу поставили пустую бочку. В нее вливалось каждую минуту 8 л воды, а через щель в бочке выливалось 3 л воды в минуту. Сколько литров воды будет в бочке через 1 мин; 2 мин; 3 мин? Успеет ли бочка наполниться, если ее объем 400 л, а дождь шел 1 ч 10 мин?
Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и др Всего – 40 задач	№282, 285, 295 – 301, 406, 407, 891- 892, 901, 902, 966, 968, 1000,1001, 1076–1082, 1091-1095	№ 285 (а). Наташа и её подруга должны надписать 360 конвертов. Наташа надписывает 40 конвертов в час, а ее подруга 50 конвертов. За какое время они выполняют всю работу, если будут работать вместе? № 1000. Одна швея может выполнить работу за 4 ч, а другая – за 5 ч. Какую часть работы выполнят ли они, работая вместе, за 2 часа, за $\frac{1}{2}$ часа за $\frac{3}{4}$часа? № 1092. Лошадь съедает воз сена за месяц, коза – за два месяца, а овца – за три месяца. За какое время лошадь, коза и овца вместе съедят такой же воз сена?
Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Всего – 16 задач	№126-128, 163, 178, 268, 274, 457, 488, 489, 543, 618, № 4 (стр. 261).	№ 457. Одна труба заполняет бассейн за 30 ч, а другая - за 15 ч. Какая часть бассейна будет заполнена через час, если включить одновременно две трубы? Сколько времени понадобится для заполнения бассейна при совместной работе обеих труб? № 543. Библиотеке надо переплести 960 книг. Одна переплетная мастерская может выполнить эту работу за 16, другая – за 24 и третья - за 48 дней. В какой срок могут выполнить эту работу три мастерские, работая одновременно, и сколько книг успеет переплести каждая мастерская? Можно ли распределить книги между мастерскими так, чтобы эта работа была выполнена за более короткий срок?

В учебнике *Н.Я. Виленкина* [2] из анализируемых выше учебников меньше всего задач на совместную работу. Первая задача встречается в Главе I. Натуральные числа, §3. Умножение и деление натуральных чисел, пункте 11. Умножение натуральных чисел и его свойства, задача под номером №418, никаких пояснений, вспомогательных вопросов и т.д. ни после задачи, ни перед ней нет.

Следующие две задачи представлены в Главе II. Дробные числа, в пункте 29. Сложение и вычитание смешанных чисел и в 35. Деление десятичных дробей на натуральные числа, под номерами №1132 и №1388, соответственно.

Всего в учебнике [2] три задачи на совместную работу.

При анализе учебника *Г.В. Дорофеева* [8], сразу отметим важную особенность: в данном учебнике, задачам на совместную работу посвящен параграф, в отличие от учебников [2, 64].

В учебнике достаточно большое количество заданий. Первые задачи на совместную работу даны в Главе 3. Действия с натуральными числами, §3.3 Порядок действий в вычислениях, это задачи под номерами: №282, 285(а,б), 295 – 301, нет никаких пояснений, вспомогательных вопросов и т.д.

Следующие две задачи встретились в Главе 4. Использование свойств действий при вычислениях, § 4.2 Распределительное свойство, под номером № 406, 407 соответственно.

Наибольшее количество задач на совместную работу представлено в Главе 9. Действия с дробями. В §9.1 Сложение дробей, дано сразу несколько задач: №891(а, б), № 892(а, б), №901, №902. Следующие задачи под номерами № 966 (а, б), № 968(а, б), встречаются в §9.3 Вычитание дробных чисел. В параграфе §9.4 Умножение дробей, даны две задачи на совместную работу № 1000, №1001, они усложнены тем, что время, за которое выполняют работу, выражено либо в виде обыкновенных дробей, либо в виде смешанных чисел, чего не встретилось в других учебниках.

Итак, можно отметить следующее: в учебнике встречается большое разнообразие задач на совместную работу, причём дано достаточно много старинных задач. Всего в учебнике [8] около 40 задач на совместную работу.

В учебнике *И.И. Зубаревой* [10] задачи на совместную работу впервые встречаются в Главе I. Натуральные числа, §7. Координатный луч (№126, 127), данные задачи отмечены в учебнике как учебно-познавательные задания, но, несмотря на это, не сказано, что это задачи на совместную работу, но позже ученикам предлагается ответить на вопросы, если при решении у них возникли затруднения. Разбора и решения задач после вопросов нет, сразу же следует номер №128, который содержит в себе 4 задачи.

Далее задачи на совместную работу встречаются в §9. Прикидка результата действия, №163.

Задачи на совместную работу даны и в §10, §16 и §17, соответственно под номерами №178, №268 и №274. В задаче под номером №268 нужно записать на математическом языке ответы на вопросы. Задача №274 связана с задачей №273, в этих задачах рассматривается встречное движение и, впервые, говорят о совместной работе, но никакого определения, величин или единиц измерения не дано.

В Главе II. Обыкновенные дроби, задачи на совместную работу встречаются в следующих параграфах: §24. Сложение и вычитание обыкновенных дробей, задача №457 и §26. Умножение и деление обыкновенной дроби на натуральное число, задачи № 488 и №489, причём, эти задачи отмечены, как задачи повышнной сложности.

Далее задачи на совместную работу встречаются в Главе III. Геометрические фигуры, в §30. Биссектриса угла и §35. Расстояние от точки до прямой. Перпендикулярные прямые, под номерами №543, №618. После чего, ещё одна задача использовалась в домашней контрольной работе №6 (§27-37), под 4 заданием.

Всего *в учебнике* [10]около *16 задач* на совместную работу.

5.2. Анализ учебников математики 6 класса

Для анализа были рассмотрены учебники математики 6 класса следующих авторов:

1. Виленкин Н.Я. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 288 с.: ил.

2. Дорофеев Г.В. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др. ; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил.

3. Зубарева И.И. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2014. – 264 с. : ил.

Таблица 9

Авторы учебника	Номера задач на совместную работу	Примеры задач
Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Всего – 4 задачи	№344, 363, 382, 1351	№ 344. Один комбайн может убрать все поле за 6 дней, а другой — за 4 дня. Какую часть поля уберут оба комбайна за один день? № 363. Слесарь может выполнить задание за 6 ч, а его ученик это же задание — за 8 ч. Какую часть задания они могут выполнить вместе за 1 ч? № 382. Школьный бассейн наполняется через первую трубу за 4 ч, а через вторую — за 6 ч. Какую часть бассейна останется наполнить после совместной работы обеих труб в течение часа?
Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и др Всего – 7 задач	№20 – 22, 31-32, 5 (Задания для итогового повторения Работа 1 и 2)	№ 31. На заводе трудятся рабочие разной квалификации. Рабочий высшего разряда может выполнить заказ за 12 дней, менее опытный рабочий - за 20 дней. Рабочий самой низкой квалификации выполнит этот заказ за 30 дней. За сколько дней выполнит этот заказ бригада из трех рабочих разной квалификации? № 5. Зрители могут выйти из кинозала через узкие и широкие двери. Если открыты только узкие двери, то все зрители выходят за 15 мин. Если открыты только широкие двери, то все зрители выходят за 10 мин. За какое время зал освободиться, если открыты одновременно и те и другие двери?
Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Всего – 10 задач	№ 443, 456, 874, 875, 1016, 1076, 1090.	№ 443(а). Одна машинистка может перепечатать рукопись за 5 ч, другая — за 10 ч. Какую часть рукописи они могут перепечатать за 1 ч, работая одновременно? № 875. Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из резервуара за 6 ч. Первый насос, работая один, может откачать эту воду за 15 ч. За сколько часов сможет откачать воду из резервуара второй насос, если будет работать только он? № 874. Для разравнивания дороги выделены два грейдера различной мощности. Первый грейдер может выполнить всю работу за 12 дней, а второй — за 6 дней. За какое время выполнят работу обе машины, если будут работать одновременно?

В учебнике *Н.Я. Виленкина* [3], также как и в учебнике [2], среди анализируемых выше, меньше всего задач на совместную работу. Первые две задачи на совместную работу встречаются в Главе I. Обыкновенные дроби, §2. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями, пункте 11. Сравнение, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями, задачи под номерами №344 и №363 соответственно, к задачам не дано никаких пояснений, вспомогательных вопросов.

Следующая задача находится в той же главе и параграфе под пунктом 12. Сложение и вычитание смешанных чисел, к задаче под номером №382, также нет вспомогательных вопросов.

Последняя задача на исследуемую тему находится в Главе II. Рациональные числа, §8. Решение уравнений, пункт 42. Решение уравнений, номер задачи №1351.

Проанализировав данный учебник, стоит отметить, что в нём встречается *4 задачи*, что очень мало для развития навыков решения задач на совместную работу у учеников. По сложности задачи не меняются, т.е. те задачи, которые были предложены в 11 и 12 пунктах и задача из 42 пункта, одного уровня сложности.

При анализе учебника *Г.В. Дорофеева* [9] заметим, что в отличие от учебника за пятый класс [8], заметно сократилось количество задач на совместную работу: 40 *задач* против *7*, которые были в учебнике [9].

Первые задачи на совместную работу даны в Главе 1. Обыкновенные дроби, §1.1 Что мы знаем о дробях, это задачи под номерами: №№20 – 22, №№31-32, к первым трём задачам даны вспомогательные вопросы, что является существенным плюсом.

Следующие две задачи мы встретили в пункте «Задания для итогового повторения». Эти две задачи даны в работах 1 и 2, под номером №5.

Старинных задач, как это было в учебнике [8], нет.

В учебнике *И.И. Зубаревой* [11] задачи на совместную работу впервые встречаются в Главе I. Положительные и отрицательные числа. Координаты,

§14. Координатная плоскость, под номером № 443, который содержит сразу три задачи на совместную работу.

Следующая задача дана в той же главе, в следующем параграфе §15. Умножение и деление обыкновенных дробей, под номером №456. Стоит отметить, что в этой задаче, производительность записана в виде обыкновенной дроби, а время, за которое выполнена работа, дано в часах и минутах, что не встречалось ранее.

Далее задачи на совместную работу встречаются в Главе III. Делимость натуральных чисел, §29. Признаки делимости на 3 и 9, №874 и №875 и в Главе IV. Математика вокруг нас, §33. Отношение двух чисел, под номером №1016, этот номер содержит две задачи под пунктом а) и б). Стоит отметить, что в задании просят не просто решить задачу, а составить уравнение по условию задачи, причём дана подсказка о том, что «В первой задаче объём работы, а во второй – объём воды надо принять за единицу».

Последние две задачи учебника [11] даны в §37. Разные задачи, под номерами №1076 и №1090.

Если сравнивать учебник [10] и [11] по количеству *задач*, то можно отметить, что их количество сократилось, так как в анализируемом учебнике их всего *10*.

5.3. Анализ учебников алгебры 7 класса

1. Дорофеев Г.В. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суфорова, Е.А. Бунимович и др. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 287 с. : ил.

2. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 17-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2013. — 271 с. : ил.

3. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс : учеб.дляобщеоразоват. Учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 240 с. : ил.

Таблица 10

Авторы учебника	Номера задач на совместную работу	Примеры задач
Дорофеев Г.В., Суфорова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Всего – 1 задача	№196	№196. Одна машинистка может перепечатать рукопись за 15 часов, а другая - эту же рукопись за 25 часов. Они вместе отпечатали рукопись, одновременно начав и закончив работу. Первая отпечатала 150 страниц. Сколько страниц отпечатала вторая машинистка и сколько страниц в рукописи?
Макарычев Ю.Н. Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б.	Нет задач на совместную работу	
Мордкович А. Г. и др.	Нет задач на совместную работу	

При анализе учебника *Г.В. Дорофеева* [5] были найдена только одна *задача* на исследуемую нами тему в Главе 2. Прямая и обратная пропорциональность, §2.3 Пропорции. Решение задач с помощью пропорций, задача под номером №196(а).

Также в учебнике дан *тест для самопроверки*, в котором используется формула *связи трёх величин*: объём выполненной работы P, производительность p и время выполнения t. Формула записана в следующем виде: P = pt, *нужно определить*, какие из следующих утверждений являются *верными*:

А. Объём выполненной работы при постоянной производительности пропорционален времени работы.

Б. Время работы при постоянном её объёме пропорционально производительности.

В. Объём выполненной работы при постоянном времени работы пропорционален производительности.

Стоит отметить, что данный тест – это хорошая возможность вспомнить теоретические знания о связи трёх величин.

При рассмотрении учебников Ю.Н. Макарычева [13] и А. Г. Мордковича [15] не было найдено ни одной задачи на исследуемую нами тему, достаточно задач на работу, но среди них не встречаются задачи на совместную работу.

Из анализа всех трёх учебников следует, что при их использовании, обязательно нужно дополнять банк заданий по исследуемой теме.

5.4. Анализ учебников алгебры 8 класса

1. Дорофеев Г.В. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суфорова, Е.А. Бунимович и др. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2016. – 320 с. : ил.
2. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс : учеб.для общеоразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 15-е изд. – М. : Просвещение, 2007. – 271 с. : ил.
3. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 12-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2010. — 271 с. : ил.

Таблица 11

<table>
<tr><th>Авторы учебника</th><th>Номера задач на совместную работу</th><th>Примеры задач</th></tr>
<tr><td>Дорофеев Г.В., Суфорова С.Б., Бунимович Е.А. и др.</td><td colspan="2">Нет задач на совместную работу</td></tr>
<tr><td>Макарычев Ю.Н. Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б.

Всего – 8 задач</td><td>№ 172, 632, 633, 719-723</td><td>№ 633. Два автомата разной мощности изготовили за 2 ч 55 мин некоторое количество деталей. За какое время это количество деталей мог бы изготовить первый автомат, если известно, что ему для этого потребуется на 2 ч больше, чем второму автомату?
№ 722. Два слесаря получили заказ. Сначала 1 ч работал первый слесарь, затем 4 ч они работали вместе. В результате было выполнено 40% заказа. За сколько часов мог выполнить заказ каждый слесарь, если первому для этого понадобилось бы на 5 ч больше, чем второму?</td></tr>
<tr><td>Мордкович А. Г. и др.</td><td colspan="2">Нет задач на совместную работу</td></tr>
</table>

В учебнике *Г.В. Дорофеева* [6] и *А. Г. Мордковича* [17] нет задач на совместную работу. В учебнике [17], по сравнению с [15] заметно сократилось и количество задач на работу в целом. Использование только учебников в курсе изучения алгебры, не помогает развитию навыков решения задач по теме исследования.

В учебнике *Ю.Н. Макарычева* [14] задачи на совместную работу впервые встречаются в Главе I. Рациональные дроби, §7. Преобразование рациональных выражений, под номером № 172, задача отмечена, как задача базового уровня.

Следующие две задачи даны в Главе III. Квадратные уравнения, §9. Дробно-рациональные уравнения, под номерами №632 и №633, эти задачи также базового уровня.

Далее задачи на совместную работу встречаются в той же главе, под пунктом «Дополнительные упражнения к главе III» под номерами №№719-723. Стоит отметить, что задания под номерами №№720-723 являются задачами повышенного уровня сложности.

В учебнике дано *8 задач* на исследуемую тему.

5.5. Анализ учебников алгебры 9 класса

1. Дорофеев Г.В. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суфорова, Е.А. Бунимович и др. – 5-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 304 с. : ил.
2. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 12-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2010. — 223 с. : ил.
3. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс : учеб.дляобщеоразоват. Учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2000. – 272 с. : ил.

Таблица 12

Авторы учебника	Номера задач на совместную работу	Примеры задач
Дорофеев Г.В., Суфорова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Всего – 5 задач	№436–438, 478, 479	№ 478. Два крана, открытые одновременно, могут наполнить водой детский надувной бассейн за 20 мин. Если сначала в течение 25 мин будет открыт только первый кран, а затем его закрыть и открыть второй, то через 16 мин бассейн наполнится. За сколько минут может наполнить бассейн каждый кран в отдельности? № 479. Два ученика 9 класса вместе расчистили школьный каток за 20 мин. В следующий раз один из них расчистил $\frac{2}{3}$ площади катка, а после этого его сменил другой и закончил работу. При этом каток был расчищен за 40 мин. За какое время может расчистить каток каждый из школьников, работая отдельно?
Макарычев Ю.Н. Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Всего – 7 задач	№287, 303, 545, 546, 941, 983, 984	№ 941. Две бригады, работая вместе, выполняют работу за 6 часов. Одной первой бригаде на эту же работу требуется на 5 ч больше, чем второй. За какое время может выполнить работу каждая бригада, работая отдельно? № 983. Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После 7 дней совместной работы один из них был переведён на другой участок, а второй закончил работу, проработав ещё 9 дней. За сколько дней каждый рабочий мог выполнить всю работу? № 546. Чтобы наполнить бассейн, сначала открыли одну трубу и через 2 ч, не закрывая её, открыли другую. Через 4 ч совместной работы труб бассейн был наполнен. Одна вторая труба могла бы наполнить бассейн в 1,5 раза быстрее, чем одна первая труба. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу?
Мордкович А. Г. и др. Всего – 20 задач	№7.21–7.27, 7.43–7.44, 7.46, 7.47, 9 (Д.к.р№2), 25, 26, 35 – 38	№ 36. Две копировальные машины, работая одновременно, могут выполнить работу за 12 мин. Если будет работать только первая копировальная машина, то она может выполнить всю работу на 10 мин быстрее, чем вторая. За сколько минут всю работу может выполнить вторая копировальная машина? № 38. Один экскаватор может вырыть котлован на 10 ч быстрее, чем другой. После того как первый экскаватор проработал 10 ч, его сменил второй экскаватор и закончил работу за 15 часов. За сколько часов могли вырыть котлован оба экскаватора работая одновременно? № 7.47. В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна равномерно подает, а вторая равномерно отводит воду, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

В учебнике *Г.В. Дорофеева* [7] из анализируемых выше учебников меньше всего задач на совместную работу. Первые три задачи встречаются в Главе III. Уравнения и системы уравнений, §3.4. Решение задач, под номерами №№436 – 438. В задаче №436 предлагают ученикам разобрать, как составлено уравнение по условию задачи, и довести решение задачи до конца, стоит отметить, что разбор заданий подробный, расписан каждый этап решения.

Следующие задачи даны в той же главе, в параграфе §3.6. Решение задач, задачи под номерами №478 и №479 соответственно.

Всего в учебнике *5 задач* по теме исследования.

В учебнике *Ю.Н. Макарычева* [15] первые задачи встречаются в Главе II. Уравнения и неравенства с одной переменной, §5. Уравнения с одной переменной, пункте 12. Целое уравнение и его корни, задача под номером №287, дана в упражнениях для повторения. Следующая задача встречается в той же главе и параграфе, но в пункте 13. Дробные рациональные уравнения, под номером №303, задача так же дана на повторение материала.

Далее задачи на совместную работу встретились в пункте «дополнительные упражнения к Главе III», под номерами №№545-546.

Последние три задачи даны в пункте «Упражнения для повторения курса 7 – 9 классов», под номерами №941,№983, №984.

Всего *в учебнике 7* задач

При анализе задач из учебника [14] и [15], можно сделать вывод, что задания 9-ого и 8-ого классов практически не отличаются по уровню сложности.

При анализе учебника *А. Г. Мордкович* [19] первые задачи встретились в Главе II. Системы уравнений, §7. Системы уравнений, как математические модели реальных ситуаций, под номерами №7.21 – 7.27, эти задания относятся к заданиям среднего уровня трудности. Также в данном параграфе к задачам на совместную работу относятся номера № 7.43 – 7.44, 7.46, это задания базового уровня сложности и задание под номером №7.47, это задание повышенного уровня сложности.

Следующие две задачи включены в Домашнюю контрольную работу № 2 [19, С.54], задачи даны в двух вариантах под номером №9.

Далее задачи на совместную работу встречаются в итоговом повторении, в пункте «Задачи на составление уравнений или систем уравнений», под номерами №№25 – 26 и №№35 – 38, уровень сложности этих задач не указан.

Всего в учебнике дано *20 задач* на совместную работу.

Стоит отметить, что в учебнике за 9 класс, в отличие от учебников того же авторского коллектива за 7 и 8 классы, появились задачи на исследуемую нами тему.

§ 6. Система упражнений для учащихся 5-9 классов

Выполнение совместной работы работником и его учеником

Задача №1 [60, №418]. Столяр и его помощник должны сделать 217 рам. Столяр в день делает 18 рам, а его помощник — 13. Сколько рам им останется сделать после двух дней работы? четырех дней работы? семи дней работы?

Решение.

1) $18 + 13 = 21$ – количество рам, которые вместе изготовят за один день столяр и его помощник.

2) $217 - 21 \cdot 2 = 175$ – рам останется сделать после 2 дней работы.

3) $217 – 21 \cdot 4 = 133$ – рам останется сделать после 4 дней работы.

4) $217 – 21 \cdot 7 = 70$ – рам останется сделать после 7 дней работы.

Ответ: 175 рам; 133 рам; 70 рам.

Задача №2 [64, №126]. Маляр за 1 ч может окрасить 4 $м^2$ ограды, а его ученик – только 3 $м^2$. Какую площадь они могут окрасить за 6 ч совместной работы? За какое время могут окрасить 28 $м^2$ такой ограды, работая одновременно?

Решение.

1) $4 + 3 = 7$ ($м^2$) – площадь которую маляр и ученик могут окрасить за 1 ч совместной работы.

2) $7 \cdot 6 = 42$ ($м^2$) – площадь которую маляр и ученик могут окрасить за 6 ч совместной работы.

3) $28 – 7 = 4$ (ч) – время, за которое маляр и его ученик могут окрасить 28 $м^2$ ограды.

Ответ: 42 $м^2$; 4 ч.

Задача №3 [62, №891(а)]. Рабочий может выполнить весь заказ за 3 ч, а ученик за 7 ч.

1) Какую часть заказа выполнит рабочий за 1 ч?
2) Какую часть заказа выполнит ученик за 1 ч?

3) Какую часть заказа они выполнят вместе за 1 ч?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{3}$ – часть заказа, которую выполнит рабочий за 1 ч.

2) $\frac{1}{7}$ – часть заказа, которую выполнит ученик за 1 ч.

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{7+3}{21}=\frac{10}{21}$ – часть заказа, которую они выполнят вместе за 1 ч.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{10}{21}$.

Задача №4 [62, №891(б)]. Швея может выполнить заказ за 3 дня, а её ученица – за 6 дней.

4) Какую часть заказа может выполнить швея за 1 день?

5) Какую часть заказа может выполнить ученица за 1 день?

6) Какую часть заказа они могут выполнить вместе за 1 день?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{3}$ – часть заказа, выполнит швея за 1 день.

2) $\frac{1}{6}$ – часть заказа, которую выполнит ученица за 1 день.

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ – часть заказа, которую они выполнят вместе за 1 день.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$.

Задача №5 [61, №363]. Слесарь может выполнить задание за 6 ч, а его ученик это же задание — за 8 ч. Какую часть задания они могут выполнить вместе за 1 ч?

Решение.

Объём задания принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{6}$ – часть задания, которую выполнит слесарь за 1 ч.

2) $\frac{1}{8}$ – часть задания, которую выполнит ученик за 1 ч.

3) $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{4+3}{24}=\frac{7}{24}$ – часть заказа, которую они выполнят вместе за 1 час.

Ответ: $\frac{7}{24}$ заказа выполнят слесарь и ученик, работая вместе.

Задача №6 [62, №966(б)]**.** Мастер и ученик сделали партию деталей за 3 ч. Если бы мастер работал один, то он бы эту работу выполнил за 4 ч. Какую часть работы выполнял каждый из них за 1 час?

Решение:

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{3}$ – часть работы, которую выполнят мастер и ученик, работая вместе.

2) $\frac{1}{4}$ – часть работы, которую выполнит мастер за 1 ч.

3) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$ – часть работы, которую выполнит ученик за 1 ч.

Ответ: $\frac{1}{4}$ – часть работы, которую выполнит мастер за 1 ч., $\frac{1}{12}$ – часть работы, которую выполнит ученик за 1 ч.

Задача №7 [68, №436].Электротехник и его ученик вместе выполнили работу за 8 часов. За сколько часов эту работу мог бы выполнить электротехник, работая один, если известно, что его ученик работает в 2 раза медленнее?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время выполнения некоторой работы электротехником,

$2x$ – время выполнения этой же работы учеником, 8 – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда электротехника,

$\frac{1}{2x}$ – производительность труда ученика,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2x}$ – совместная производительность труда.

Значит $\frac{3}{2x} = 8$; $2x = 24$; $x = 12$ (ч) – время, за которое выполнит задание электротехник, работая один.

Ответ: 12 часов.

Задача №8 [65, №1016(а)]. Составьте уравнение по условию задачи. Мастер и его ученик могут выполнить некоторую работу за 17 ч. За какое время ученик один сможет выполнить всю работу, если ему потребуется на это на 20 ч больше, чем мастеру?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время выполнения некоторой работы мастера,

$x+20$ – время выполнения этой же работы учеником,

17 – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда мастера,

$\frac{1}{x+20}$ – производительность труда ученика,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+20} = \frac{x+20+x}{x\cdot(x+20)} = \frac{2x+20}{x\cdot(x+20)}$ – совместная производительность труда.

Значит $\frac{x\cdot(x+20)}{2x+20} = 17$ – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

$$\Rightarrow\ x^2 + 20\mathrm{x} = 34\mathrm{x} + 340 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2 - 14\mathrm{x} - 340 = 0.$$

Ответ: $x^2 - 14x - 340 = 0$.

Задача №9 [62, №299]. Над выполнением задания токарь работал 3 ч, а потом его ученик 2 ч. Всего они выточили 108 деталей. Сколько деталей в час вытачивал ученик, если токарь в час 26 деталей?

Решение.

1) 26 · 3 = 78 деталей сделал токарь за 3 часа работы.

2) 108 – 78 =30 деталей сделал ученик токаря за 2 часа работы.

3) 30 : 2 = 15 – деталей в час вытачивал ученик.

Ответ: 15 деталей.

Задача №10 [74, №7.45]. Мастер, работая с учеником, обрабатывает деталь за 2 ч 24 мин. Если мастер будет работать 2 ч, а ученик — 1 ч, то будет выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. Сколько времени потребуется мастеру и ученику в отдельности на обработку детали?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время обработки детали мастером,

y – время обработки детали учеником.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда мастера,

$\frac{1}{y}$ – производительность труда ученика.

Составим первое уравнение.

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ – совместная производительность труда за 1 час;

2 ч 24 мин или 2,4 часа – время, за которое они выполнят задание, работая вместе,

*Значи*т $2{,}4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$ – за 2,4 часа ученик и мастер обработают деталь.

Составим второе уравнение.

Пусть время работы мастера – 2 часа, время работы ученика – 1 час.

Тогда $\frac{2}{x}$ – производительность труда мастера,

$\frac{1}{y}$ – производительность труда ученика.

*Значи*т $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$ – часть работы, которую выполнят мастер и ученик за это время.

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} 2{,}4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1, \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2{,}4}, \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}, \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{12}, \\ \frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{12}, \\ \frac{1}{x}+\frac{5}{12}=\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{5}{12}-\frac{1}{x}, \\ \frac{1}{x}=\frac{2}{3}-\frac{5}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{5}{12}-\frac{1}{x}, \\ \frac{1}{x}=\frac{8}{12}-\frac{5}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{5}{12}-\frac{1}{x}, \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}, \\ x=4; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{5}{12}-\frac{3}{12}, \\ x=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ x=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6, \\ x=4; \end{cases}$$

Значит, *4 часа* – время обработки детали мастером,

6 часов – время обработки детали учеником.

Ответ: 4 и 6 часов.

Задачи на выполнение совместных заказов

Задача №1[62, №295]**.** Две машинистки, работая вместе, перепечатали 264 страницы рукописи за 12 ч. Одна из них печатала 12 страниц в час. Сколько страниц в час печатала другая машинистка?

Решение.

1) 12 · 12 = 144 страницы перепечатала за 12 часов одна из машинисток.

2) 264 – 144 =120 страниц перепечатала за 12 часов вторая машинистка.

Ответ: 120 страниц.

Задача №2 [62, №296]**.** Библиотеке надо переплести 900 книг. Первая мастерская может выполнить эту работу за 10 дней, а вторая – за 15 дней. За сколько дней выполнят эту работу мастерские, если будут работать вместе?

Решение.

1) 10 + 15 = 25 книг переплетут две мастерские за 1 день, работая вместе.

2) 900 : 25 = 36 дней, время за которое мастерские сделают всю работу.

Ответ: 36 дней.

Задача №3 [65, №443(а)]**.** Одна машинистка может перепечатать рукопись за 5 ч, другая — за 10 ч. Какую часть рукописи они могут перепечатать за 1 ч, работая одновременно?

Решение.

Объём страниц в рукописи принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{5}$ – может перепечатать за 1 час одна из машинисток.

2) $\frac{1}{10}$ – – может перепечатать за 1 час вторая машинистка.

3) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2+1}{10}=\frac{3}{10}$ – смогут перепечатать две машинистки вместе за 1 ч.

Ответ: $\frac{3}{10}$**.**

Задача №4 [62, №968(б)]**.** Одна машинистка может перепечатать рукопись за 6 ч, а другая - за 8 ч. Какая часть рукописи останется неперепечатанной после 1 часа совместной работы?

Решение.

Объём страниц в рукописи принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{6}$ – может перепечатать за 1 час одна из машинисток.

2) $\frac{1}{8}$ – – может перепечатать за 1 час вторая машинистка.

3) $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$ – смогут перепечатать две машинистки вместе за 1 ч.

4) $1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$ – останется неперепечатанной после 1 часа совместной работы

Ответ: $\frac{17}{24}$**.**

Задача №5 [62, №1000]**.** Одна швея может выполнить работу за 4 ч, а другая – за 5 ч. Какую часть работы выполнят ли они, работая вместе, за 2 часа, за $\frac{1}{2}$ часа за $\frac{3}{4}$ часа?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{4}$ – часть работы, которая может выполнить первая швея за 1 час.

2) $\frac{1}{5}$ – часть работы, которая может выполнить вторая швея за 1 час.

3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ – часть работы, которую выполнят две швеи, работая совместно за 1 час.

4) $\frac{9}{20}\cdot 2=\frac{9}{10}$ – часть работы, которую выполнят две швеи, работая совместно за 2 часа.

5) $\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{40}$ – часть работы, которую выполнят две швеи, работая совместно за $\frac{1}{2}$ часа.

6) $\frac{9}{20}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{80}$ – часть работы, которую выполнят две швеи, работая совместно за $\frac{3}{4}$ часа.

Ответ: $\frac{9}{10};\frac{9}{40};\ \frac{27}{80}$**.**

Задача №6 [62, №1001]**.** Одна швея может выполнить работу за 4 ч, а другая – за 8 ч. Успеют ли они выполнить всю работу за $2\frac{2}{3}$ ч, если будут работать вместе?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{4}$ – часть работы, которая может выполнить первая швея за 1 час.

2) $\frac{1}{8}$ – часть работы, которая может выполнить вторая швея за 1 час.

3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ – часть работы, которую выполнят две швеи, работая совместно за 1 час.

4) $\frac{3}{8}\cdot 2\frac{2}{3}=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}=1$ – значит, весь объём работы, выполнят две швеи, работая совместно за $2\frac{2}{3}$ часа.

Ответ: да, успеют.

Задача №7 [66, №196]**.** Одна машинистка может перепечатать рукопись за 15 часов, а другая - эту же рукопись за 25 часов. Они вместе отпечатали рукопись, одновременно начав и закончив работу. Первая отпечатала 150 страниц. Сколько страниц отпечатала вторая машинистка и сколько страниц в рукописи?

Решение.

1) 15:25 = 3:5 = $0{,}6$ – во столько раз быстрее печатает первая машинистка.

2) 150 · $0{,}6 = 90$ – страниц отпечатала вторая машинистка.

Ответ: 90 страниц.

Задача №8 [62, №301]**.** Два мастера работают на фабрике ёлочных украшений. Один из них работал 12 дней по 7 ч, а другой – 10 дней по 8 ч, и вместе они расписали 2880 ёлочных шаров. Сколько шаров в час расписывал первый мастер, если второй расписывал 15 шаров в час?

Решение.

1) $15 \cdot 8 = 120$ шаров расписывает в день второй мастер.

2) $120 \cdot 10 = 1200$ шаров расписал за 10 дней второй мастер.

3) $2880 – 1200 = 1680$ шаров расписал за 12 дней первый мастер.

4) $1680 : 12 = 140$ шаров расписывает в день первый мастер.

5) $140 : 7 = 20$ шаров расписывает в час первый мастер.

Ответ: 20 шаров.

Задача №9 [62, №300]. Два мастера работают на фабрике елочных украшений. Один из них расписывает 20 елочных шаров в час, а другой - 25. Первый работал 5 дней по 8 ч в день, а второй - 4 дня по 6 ч в день. Сколько елочных шаров расписали они вместе?

Решение.

1) $8 \cdot 20 = 160$ шаров расписывает в день первый мастер.

2) $160 \cdot 5 = 800$ шаров расписал за 5 дней первый мастер.

3) $6 \cdot 25 = 150$ шаров расписывает в день второй мастер.

4) $150 \cdot 4 = 600$ шаров расписал за 4 дня второй мастер.

5) $800 + 600 = 1400$ шаров расписали за всё время работы 2 мастера.

Ответ: 1400 шара.

Задача №10 [64, №543]**.** Библиотеке надо переплести 960 книг. Одна переплетная мастерская может выполнить эту работу за 16, другая – за 24 и третья - за 48 дней. В какой срок могут выполнить эту работу три мастерские, работая одновременно, и сколько книг успеет переплести каждая мастерская?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{16}$ – переплетает первая мастерская за 1 день.

2) $\frac{1}{24}$ – переплетает вторая мастерская за 1 день.

3) $\frac{1}{48}$ – переплетает третья мастерская за 1 день

4) $\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}=\frac{3+2+1}{48}=\frac{6}{48}=\frac{1}{8}$ – смогут переплести три мастерские вместе за 1 день.

За 8 дней смогут переплести три мастерские все книги.

5) $\frac{1}{16}\cdot 8=\frac{1}{2}$ – часть работы, которую выполнит первая мастерская за 8 дней.

6) $\frac{1}{2}\cdot 960=480$ – книг переплетёт за 8 дней первая мастерская.

7) $\frac{1}{24}\cdot 8=\frac{1}{3}$ – часть работы, которую выполнит вторая мастерская за 8 дней.

8) $\frac{1}{3}\cdot 960=320$ – книг переплетёт за 8 дней вторая мастерская.

9) 960 – 320 – 480 = 160 – книг переплетёт за 8 дней третья мастерская.

Ответ: 480, 320, 160 книг переплетут за 8 дней первая, вторая и третья мастерские.

Задача №11 [62, №31]**.** На заводе трудятся рабочие разной квалификации. Рабочий высшего разряда может выполнить заказ за 12 дней, менее опытный рабочий - за 20 дней. Рабочий самой низкой квалификации выполнит этот заказ за 30 дней. За сколько дней выполнит этот заказ бригада из трех рабочих разной квалификации?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть *12* – время, за которое выполнит заказ рабочий высшего разряда,

20 – время, за которое выполнит заказ менее опытный рабочий,

30 – время, за которое выполнит заказ рабочий самой низкой квалификации.

Тогда

$\frac{1}{12}$ – часть работы, которую выполнит рабочий высшего разряда за 1 час,

$\frac{1}{20}$ – часть работы, которую выполнит менее опытный рабочий за 1 час,

$\frac{1}{30}$ – часть работы, которую выполнит рабочий самой низкой квалификации за 1 час.

$\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{5+3+2}{60}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ – часть работы, которую выполнят рабочие вместе за 1 час.

Значит за 6 дней выполнит этот заказ бригада из трех рабочих разной квалификации.

Ответ: 480, 320, 160 книг переплетут за 8 дней первая, вторая и третья мастерские.

Задача №12 [74, №7.43]**.** Две наборщицы напечатали текст рукописи за 6 ч. Если сначала первая наборщица напечатает половину рукописи, а затем вторая — оставшуюся часть, то на всю работу будет затрачено 12,5 ч. За какое время может выполнить всю работу каждая наборщица?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое напечатает рукопись первая наборщица,

y – время, за которое напечатает рукопись вторая наборщица.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть рукописи, которую печатает первая наборщица за 1 час,

$\frac{1}{y}$ – часть рукописи, которую печатает вторая наборщица за 1 час.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – часть рукописи, которую печатает первая и вторая наборщицы, работая совместно.

За 6 часов, совместно двумя наборщицами, будет напечатана вся рукопись, значит $6\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ – *первое уравнение*.

Пусть $\frac{x}{2}$ – время, за которое напечатает половину рукописи первая наборщица,

$\frac{y}{2}$ – время, за которое напечатает половину рукописи вторая наборщица.

Значит, *второе уравнение*: $\frac{x}{2}+ \frac{y}{2} =12{,}5$ – время печати всей рукописи, если первая наборщица напечатает половину рукописи, а затем вторая — оставшуюся часть.

$$\begin{cases} 6\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=12{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\cdot\left(\frac{x+y}{xy}\right)=1, \\ x+y=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+6y=xy, \\ y=25-x; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+6(25-x)=x(25-x), \\ y=25-x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+150-6x=25x-x^2, \\ y=25-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-25x+150=0, \\ y=25-x; \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $x^2-25x+150=0$, по т. Виета:

$x_1 = 15$,

$x_2 = 10$.

Значит, $y_1 = 10$, $y_2 = 15$.

Ответ: 10 и 15 часов.

Задача №13 [74, С. 54, №9]**.** Два каменщика выполнили вместе некоторую работу за 12 ч. Если бы сначала первый каменщик сделал половину этой работы, а затем другой – остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 ч. За какое время мог бы выполнить эту работу каждый каменщик в отдельности?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всю работу первый каменщик,

y – время, за которое выполняет всю работу второй каменщик.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первый каменщик за 1 час,

$\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет второй каменщик за 1 час.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет первый и второй каменщик, работая совместно.

За 12 часов, совместно двумя каменщиками, будет выполнена вся работа, значит $12\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ – *первое уравнение*.

Пусть $\frac{x}{2}$ – время, за которое выполняет половину работы первый каменщик,

$\frac{y}{2}$ – время, за которое выполняет половину работы второй каменщик.

Значит, *второе уравнение*: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25$ – время печати всей рукописи, если первая наборщица напечатает половину рукописи, а затем вторая — оставшуюся часть.

$$\begin{cases}12\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1,\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12\cdot\left(\frac{x+y}{xy}\right)=1,\\ x+y=50;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12x+12y=xy,\\ y=50-x;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}12x+12(50-x)=x(50-x),\\ y=50-x;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}12x+600-12x=50x-x^2,\\ y=50-x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-50x+600=0,\\ y=50-x;\end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $x^2-50x+600=0$, по т. Виета:

$x_1 = 30$,

$x_2 = 20$.

Значит, $y_1 = 20$, $y_2 = 30$.

Ответ: 20 и 30 часов.

Задача №14 [74, С. 196, №26]**.** Двое рабочих, работая совместно, могут выполнить заказ за 3 ч 36 мин. Первый рабочий, работая один, может выполнить этот заказ за 6 ч. Сколько времени необходимо второму рабочему для выполнения заказа, если он будет работать один?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть 6 ч – время, за которое выполняет весь заказ первый рабочий,

y – время, за которое выполняет весь заказ второй рабочий,

3 ч 36 мин = 3,6 ч – время, за которое выполнят весь заказ двое рабочих, работая совместно.

Тогда $\frac{1}{6}$ – часть заказа, которую выполняет первый рабочий за 1 час,

$\frac{1}{y}$ – часть заказа, которую выполняет второй рабочий за 1 час.

$\frac{1}{3{,}6}$ – часть заказа, которую выполняет первый и второй рабочий, работая совместно.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3{,}6};$$

$$\frac{y+6}{6y}=\frac{1}{3{,}6};$$

$$\frac{y+6}{y}=\frac{1}{0{,}6};$$

$$\frac{y+6}{1}=\frac{1}{0{,}6};$$

$0{,}6\cdot(y + 6)=y;$

$0{,}6y + 3{,}6=y;$

$0{,}4y=3{,}6;$

$y=9;$

Ответ: 9 часов.

Задача №15 [71, №287]**.** Два сварщика, работая вместе, могут выполнить задание за 30 ч. За сколько часов сможет выполнить это задание каждый сварщик, если известно, что первому на выполнение всей работы потребуется времени на 11 ч больше чем второму?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть $(x + 11)$ ч – время, за которое выполняет всё задание первый сварщик,

x ч – время, за которое выполняет всё задание второй сварщик,

30 ч – время, за которое выполнят всё задание двое сварщиков, работая совместно.

Тогда $\frac{1}{x+11}$ – часть задания, которую выполняет первый сварщик за 1 час,

$\frac{1}{x}$ – часть задания, которую выполняет второй сварщик за 1 час.

$\frac{1}{30}$ – часть задания, которую выполняет первый и второй сварщики, работая совместно.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{x+11} + \frac{1}{x} = \frac{1}{30};$$

$$\frac{x+x+11}{x(x+11)} = \frac{1}{30};$$

$$\frac{2x+11}{x(x+11)} = \frac{1}{30};$$

$60x + 330 = x^2 + 11x;$

$x^2 - 49x - 330 = ;$

$D = 61;$

$x_1 = 55,$

$x_2 = -6$ – не удовлетворяет условию.

Значит, *55 + 11 = 66 часов* – время, выполнения задания первым сварщиков.

Ответ: 66 и 55 часов.

Задача №16 [71, №984]**.** Двое рабочих, работая вместе, выполнили работу за 2 дня. Сколько времени нужно каждому из них на выполнение всей работы, если известно, что если бы первый проработал 2 дня, а второй – один, то всего было бы сделано $\frac{5}{6}$ всей работы?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всю работу первый рабочий,

y – время, за которое выполняет всю работу второй рабочий,

2 дня – время, за которое выполнили всю работу двое рабочих, работая вместе.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первый рабочий за 1 день,

$\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет второй рабочий за 1 день,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет первый и второй рабочий, работая совместно.

За 2 дня, совместно двумя рабочими, будет выполнена вся работа, значит $2x+2y=1$ – *первое уравнение*.

Значит, *второе уравнение*: $2x+y=\frac{5}{6}$ – если бы первый проработал 2 дня, а второй – один, то всего было бы сделано $\frac{5}{6}$ всей работы.

$$\begin{cases}2x+2y=1,\\ 2x+y=\frac{5}{6};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y=1,\\ 2x+y=\frac{5}{6};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y=1,\\ y=\frac{5}{6}-2x;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+2(\frac{5}{6}-2x)=1,\\ y=\frac{5}{6}-2x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+\frac{5}{3}-4x=1,\\ y=\frac{5}{6}-2x;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{5}{3}-2x=1,\\ y=\frac{5}{6}-2x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{3}=2x,\\ y=\frac{5}{6}-2x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}=x,\\ y=\frac{1}{6};\end{cases}$$

Значит, *3 ч* – время, за которое выполняет всю работу первый рабочий,

6 ч – время, за которое выполняет всю работу второй рабочий,

Ответ: 3 и 6 часов.

Задача №17 [71, №983]. Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После 7 дней совместной работы один из них был переведён на другой участок, а второй закончил работу, проработав ещё 9 дней. За сколько дней каждый рабочий мог выполнить всю работу?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всю работу первый рабочий,

y – время, за которое выполняет всю работу второй рабочий,

10 дней – время, за которое выполнили всю работу двое рабочих, работая вместе.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первый рабочий за 1 день,

$\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет второй рабочий за 1 день,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет первый и второй рабочий, работая совместно.

За 10 дней, совместно двумя рабочими, будет выполнена вся работа, значит $10\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ – *первое уравнение*.

Значит, *второе уравнение*: $7\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{y}=1$ – после 7 дней совместной работы один из них был переведён на другой участок, а второй закончил работу, проработав ещё 9 дней.

$$\begin{cases}10\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1,\\ 7\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{y}=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10\cdot\left(\frac{x+y}{xy}\right)=1,\\ \frac{7}{x}+\frac{16}{y}=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{10x+10y}{xy}=1,\\ \frac{16x+7y}{xy}=1;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10x+10y=xy,\\ 16x+7y=xy;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x+10y=xy,\\ 6x=3y;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x+10y=xy,\\ 2x=y;\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 12x + 600 - 12x = 50x - x^2, \\ y = 50 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 50x + 600 = 0, \\ y = 50 - x; \end{cases}$

Решим квадратное уравнение $x^2 - 50x + 600 = 0$, по т. Виета:

$x_1 = 30$,

$x_2 = 20$.

Значит, $y_1 = 20$, $y_2 = 30$.

Ответ: 20 и 30 часов.

Задача №18 [70, №722]**.** Два слесаря получили заказ. Сначала 1 ч работал первый слесарь, затем 4 ч они работали вместе. В результате было выполнено 40% заказа. За сколько часов мог выполнить заказ каждый слесарь, если первому для этого понадобилось бы на 5 ч больше, чем второму?

Решение.

	Время	Производительность	Работа
Первый слесарь	x	$\frac{1}{x}$	1
Второй слесарь	x - 5	$\frac{1}{x-5}$	1
Совместно	4	$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x}$	1

Первый слесарь, работая один, за 1 час выполнил работу $\frac{1}{x}$, и работая вместе, выполнили $4\left(\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x}\right)$, это равно 40% всего заказа, т.е. 0,4. Значит:

$4\left(\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = \frac{2}{5}$;

$\frac{4}{x-5} + \frac{4}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{5}$;

$\frac{4}{x-5} + \frac{5}{x} = \frac{2}{5}$;

$\frac{4x+5(x-5)}{x(x-5)} = \frac{2}{5}$;

$\frac{4x+5(x-5)}{x(x-5)} = \frac{2}{5}$;

$\frac{4x+5x-25}{x(x-5)} = \frac{2}{5}$;

$\frac{9x-25}{x(x-5)} = \frac{2}{5}$;

$45x - 125 = 2x^2 - 10x$;

$2x^2 - 55x + 125 = 0$;

D = 45^2;

x_1 = 2,5 – не удовлетворяет условию задачи, т.к. второй слесарь работал на 5 ч меньше,

x_2 = 25 ч.

Значит, *25 - 5= 20 часов* – время, выполнения задания вторым слесарем.

Ответ: 25 и 20 часов.

Задача №19 [74, №7.27]**.** Двое рабочих вместе могут справиться с заданием за 2 ч. Если один из них сделает 40% задания, а затем второй — оставшуюся часть работы, то на выполнение задания понадобится 4 ч. За какое время сможет выполнить все задание каждый рабочий, действуя в одиночку, если известно, что производительность труда у них различная?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первый рабочий,

y – время, за которое выполняет всё задание второй рабочий,

2 ч – время, за которое выполнили всё задание двое рабочих, работая вместе.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первый рабочий за 1 час,

$\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет второй рабочий за 1 час,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет первый и второй рабочий, работая совместно.

За 2 часа, совместно двумя рабочими, будет выполнена вся работа, значит $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 2$ – *первое уравнение*.

Значит, *второе уравнение*: $0{,}4x + 0{,}6y = 4$ – если один из них сделает 40% = 0,4 задания, а затем второй — оставшуюся часть работы = 0,6, то на выполнение задания понадобится 4 ч.

$$\begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 2, \\ 0{,}4x + 0{,}6y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 2, \\ 2x + 3y = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2(x+y), \\ 2x + 3y = 20; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2x + 2y, \\ 2x + 3y = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 4x + 4y, \\ 2x = 20 - 3y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(20 - 3y) = 2(20 - 3y) + 4y, \\ 2x = 20 - 3y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20y - 3y^2 = 40 - 6y + 4y, \\ 2x = 20 - 3y; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 22y + 40 = 0, \\ 2x = 20 - 3y; \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $3y^2 - 22y + 40 = 0$:

D = 2^2;

$y_1 = 4$,

$y_2 = \frac{10}{3}$.

Значит, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, по условию $y \neq x$.

Ответ: 5 и 4 часа.

Задача №20 [74, С. 56, №9]**.** Два слесаря выполняют некоторую работу. После 45 мин совместного труда первый слесарь был переведен на другую работу, и второй закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый слесарь в отдельности, если известно, что второму на это понадобится на 1 ч больше, чем первому?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всю работу первый слесарь,

$x + 1$ – время, за которое выполняет всю работу второй слесарь.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первый слесарь за 1 час,

$\frac{1}{x+1}$ – часть работы, которую выполняет второй слесарь за 1 час,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ – часть работы, которую выполняет первый и второй слесарь, работая совместно.

После 45 мин = 0,75 ч совместного труда первый слесарь был переведен на другую работу, и второй закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин = 2,25 ч, значит $0{,}75\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} \cdot 2{,}25 = 1.$

$\frac{0{,}75}{x} + \frac{3}{x+1} = 1,$

$\frac{0{,}75}{x} + \frac{3}{x+1} = 1,$

$\frac{0{,}75(x+1)+3x}{x(x+1)} = 1,$

$0{,}75(x + 1) + 3x = x(x + 1),$

$0{,}75x + 0{,}75 + 3x = x^2 + x,$

$3{,}75x + 0{,}75 = x^2 + x,$

$x^2 - 2{,}75x - 0{,}75 = 0,$

D = $3{,}25^2$,

x_1 = - 0,25 – не удовлетворяет условию,

x_2 = 3.

Значит, y = 4.

Ответ: 3 и 4 часа.

Задача № 1 [64, №128(а)]. Первая бригада может отремонтировать 1800 м дороги за 90 дней, а вторая – за 45 дней. За сколько дней будет закончен ремонт этой дороги, если бригады будут работать совместно?

Решение.

1) 1800 : 90 = 20 (м) дороги за один день ремонтирует первая бригада.

2) 1800 : 45 = 40 (м) дороги за один день ремонтирует вторая бригада.

3) 40 + 20 = 60 (м) дороги за один день отремонтируют две бригады, работая совместно.

4) 1800 : 60 = 30 дней – время за которое две бригады отремонтируют всю дорогу, работая совместно.

Ответ: 30 дней.

Задача № 2 [64, №274]. Одной бригаде трактористов, чтобы вспахать 180 а, требуется 2 дня, а другой – 3 дня. За какое время эти бригады смогут вспахать 300 а, работая одновременно?

Решение.

1) 180 : 2 = 90 (а) за один день вспахивает первая бригада трактористов.

2) 180 : 3 = 60 (а) за один день вспахивает вторая бригада трактористов.

3) 90 + 60 = 150 (а) за один день вспахивают две бригады трактористов, работая совместно.

4) 300 : 150 = 2 дня – понадобится двум бригадам трактористов, чтобы вспахать 300 а, работая совместно.

Ответ: 2 дня.

Задача № 3 [62, №1078(б)]**.** Одна бригада может выполнить работу за 6 дней, а другая - за 12 дней. За сколько дней две бригады выполнят ту же работу вместе?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть 6 – время выполнения некоторой работы первой бригадой, *12* – время выполнения этой же работы второй бригадой.

Тогда $\frac{1}{6}$ – производительность труда первого рабочего,

$\frac{1}{12}$ – производительность труда второго рабочего.

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ – совместная производительность труда.

$\frac{1}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{1}=4$ дня – время, за которое две бригады выполнят задание, работая вместе.

Ответ: 4 дня.

Задача № 4 [62, №1082]**.** Одна бригада может выполнить задание за 9 дней, а другая – за 12 дней. Первая бригада работала над выполнением этого задания три дня, потом вторая бригада закончила работу. За сколько дней было выполнено задание?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть *9* – время выполнения некоторой работы первой бригадой,

12 – время выполнения этой же работы второй бригадой.

Тогда $\frac{1}{9}$ – производительность труда первого рабочего,

$\frac{1}{12}$ – производительность труда второго рабочего.

1) $\frac{1}{9}\cdot 3=\frac{1}{3}$ – сделала первая бригада за 3дня.

2) 1 - $\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{3}$ – часть задания, которую осталось сделать второй бригаде за 3дня.

3) $\frac{2}{3}:\frac{1}{12}=\frac{24}{3}=$ 8 дней понадобится для того, чтобы закончить задание.

4) 8 + 3 = 11 дней понадобится двум бригадам для того, чтобы закончить задание.

Ответ: 11 дней.

Задача № 5 [74, №7.22]**.** Две бригады, работая вместе, могут выполнить задание за 8 ч. Первая бригада, работая одна, могла бы выполнить задание на 12 ч быстрее, чем вторая бригада. За сколько часов могла бы выполнить задание первая бригада, если бы она работала одна?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первая бригада,

$x + 12$ – время, за которое выполняет всё задание вторая бригада,

8 ч – время, за которое выполняют всё задание первая и вторая бригада, работая совместно.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первая бригада за 1 час,

$\frac{1}{x+12}$ – часть работы, которую выполняет вторая бригада за 1 час,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+12}$ – часть работы, которую выполняет первая и вторая бригада, работая совместно.

Значит, $8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+12}\right)=1,$

$$8\left(\frac{x+12+x}{x(x+12)}\right)=1,$$

$$8\left(\frac{2x+12}{x(x+12)}\right)=1,$$

$$\frac{16x+96}{x(x+12)}=1,$$

$$16x+96=x(x+12),$$

$$16x+96=x^2+12x,$$

$$x^2-4x-96=0,$$

$D = 20^2$,

$x_1 = -8$ – не удовлетворяет условию,

$x_2 = 12$.

Значит, *12 +12 = 24 ч* - время, за которое выполняет всё задание вторая бригада.

Ответ: 12 и 24 часа.

Задача № 6 [74, С. 197, №35]**.** Две бригады, работая одновременно, могут выполнить некоторое задание за 6 дней. Одна бригада, работая отдельно, может выполнить это задание на 5 дней быстрее, чем вторая. За какое время может выполнить всё задание вторая бригада, работая отдельно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первая бригада,

$x + 5$ – время, за которое выполняет всё задание вторая бригада,

6 дней – время, за которое выполняют всё задание первая и вторая бригада, работая совместно.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первая бригада за 1 час,

$\frac{1}{x+5}$ – часть работы, которую выполняет вторая бригада за 1 час,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}$ – часть работы, которую выполняет первая и вторая бригада, работая совместно.

Значит, $6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right)=1$,

$6\left(\frac{x+5+x}{x(x+5)}\right)=1$,

$6\left(\frac{2x+5}{x(x+5)}\right)=1$,

$\frac{12x+30}{x(x+5)}=1$,

$12x+30=x(x+5)$,

$12x+30=x^2+5x$,

$x^2 - 7x - 30 = 0,$

D = 13^2,

x_1 = - 3 – не удовлетворяет условию,

x_2 = 10.

Значит, *10 +5 = 15 ч* - время, за которое выполняет всё задание вторая бригада.

Ответ: 10 и 15 часов.

Задача № 7 [71, №303]**.** На строительстве работали две бригады. После 5 дней совместной работы вторую бригаду перевели на другой объект. Оставшуюся часть работы первая бригада закончила за 9 дней. За сколько дней могла бы выполнить всю работу каждая бригада, работая отдельно, если известно, что второй бригаде на выполнение всей работы потребовалось бы на 12 дней меньше, чем одной первой бригаде?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первая бригада,

x - *12* – время, за которое выполняет всё задание вторая бригада.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первая бригада за 1 день,

$\frac{1}{x-12}$ – часть работы, которую выполняет вторая бригада за 1 день,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-12}$ – часть работы, которую выполняет первая и вторая бригада, работая совместно.

После 5 дней совместной работы вторую бригаду перевели на другой объект, оставшуюся часть работы первая бригада закончила за 9 дней, значит $5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-12}\right) + \frac{1}{x} \cdot 9 = 1.$

$\frac{5}{x} + \frac{5}{x-12} + \frac{9}{x} = 1,$

$\frac{14}{x} + \frac{5}{x-12} = 1,$

$$\frac{14(x-12)+5x}{x(x-12)} = 1,$$

$$14(x-12)+5x = x(x-12),$$

$$14x-168+5x = x^2-12x,$$

$$19x-168 = x^2-12x,$$

$$x^2-31x+168 = 0,$$

D = 17^2,

x_1 = 24,

x_2 = 7 – не удовлетворяет условию, т.к. x > 12.

Значит, y = 12.

Ответ: 24 и 12 дней.

Задача № 8 [74, №7.44]**.** Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч скорее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то будет выполнено только 60% всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения задания?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание бригада слесарей,

$x + 15$ – время, за которое выполняет всё задание бригада учеников.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет бригада слесарей за 1 час,

$\frac{1}{x+15}$ – часть работы, которую выполняет бригада учеников за 1 час,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}$ – часть работы, которую выполняет обе бригады, работая совместно.

Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то будет выполнено только 60% = 0,6 всего задания, значит $\frac{18}{x+15} + \frac{6}{x} = 0{,}6$.

$\frac{18x+6(x+15)}{x(x+15)} = \frac{3}{5}$,

$\frac{18x+6x+90}{x(x+15)} = \frac{3}{5}$,

$\frac{24x+90}{x(x+15)} = \frac{3}{5}$,

$5(24x + 90) = 3x(x + 15)$,

$120x + 450 = 3x^2 + 45x$,

$120x + 450 = 3x^2 + 45x$,

$40x + 150 = x^2 + 15x$,

$x^2 - 25x - 150 = 0$,

$x^2 - 25x - 150 = 0$,

D = 35^2,

x_1 = 30,

x_2 = -5 – не удовлетворяет условию.

Значит, 30 + 15 = 45 дней требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения задания.

Ответ: 45 дней.

Задача № 9 [74, №7.46]**.** Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать участок шоссейной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала первая бригада, а заканчивала ремонт участка дороги вторая бригада, работающая не более чем в два раза быстрее первой. В результате ремонт участка дороги продолжался 40 дней, причем первая бригада в свое рабочее время выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько дней был бы отремонтирован участок дороги каждой бригадой отдельно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первая бригада,

y – время, за которое выполняет всё задание вторая бригада.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первая бригада за 1 день,

$\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет вторая бригада за 1 день,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет первая и вторая бригада, работая совместно.

Всю работу две бригады, работая совместно должны закончить за 18 дней, значит $18\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ – *первое уравнение*.

Ремонт участка дороги продолжался 40 дней, причем первая бригада в свое рабочее время выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы, значит:

$$\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{x}+\left(40-\frac{2x}{3}\right)\cdot\frac{1}{y}=1 - \textit{второе уравнение}.$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 18\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1, \\ \frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{x}+\left(40-\frac{2x}{3}\right)\cdot\frac{1}{y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x+18y=xy, \\ \frac{2}{3}+\frac{40}{y}-\frac{2x}{3y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x+18y=xy, \\ \frac{2}{3}+\frac{120}{3y}-\frac{2x}{3y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x+18y=xy, \\ 2y+120-2x=3y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x+18y=xy, \\ 120-2x=y; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x+18(120-2x)=x(120-2x), \\ 120-2x=y; \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $18x+18(120-2x)=x(120-2x)=0$:

$18x+2160-36x=120x-2x^2$,

$2x^2-138+2160=0$,

$x^2-69+1080=0$,

$D=21^2$;

$x_1 = 24$,

$x_2 = 45$.

Значит, $y_1 = 72$, $y_2 = 30$. По условию вторая бригада, работает не более чем в два раза быстрее первой.

Ответ: 45 и 30 дней.

Задача № 10 [68, №438]**.** Для ремонта участка дороги выделили две бригады, одна из которых могла бы выполнить весь ремонт на 7 дней быстрее другой. Работу начали одновременно с двух концов участка и через 9 дней выполнили 75% всей работы. Сколько дней потребовалось бы каждой бригаде на выполнение ремонта всей дороги?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первая бригада,

$x + 7$ – время, за которое выполняет всё задание вторая бригада.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первая бригада за 1 день,

$\frac{1}{x+7}$ – часть работы, которую выполняет вторая бригада за 1 день,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}$ – часть работы, которую выполняют обе бригады, работая совместно.

Через 9 дней выполнили 75% = $\frac{3}{4}$ всей работы, значит:

$$9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}\right) = \frac{3}{4}.$$

$9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}\right) = \frac{3}{4}$,

$9\cdot\frac{x+7+x}{x(x+7)} = \frac{3}{4}$,

$\frac{2x+7}{x(x+7)} = \frac{1}{12}$,

$\frac{2x+7}{x(x+7)} = \frac{1}{12}$,

$12(2x + 7) = x(x + 7),$

$24x + 84 = x^2 + 7x,$

$x^2 - 17x - 84 = 0,$

D = 25^2,

x_1 = 21,

x_2 = -4 – не удовлетворяет условию.

Значит, 21 + 7 = 28 дней требуется второй бригаде для ремонта участка дороги.

Ответ: 21 и 28 дней.

Выполнение совместной работы трактористами

Задача № 1 [64, №128(в)]**.** Работая один, трактор может вспахать поле площадью 420 а за 3 дня, а вместе с другим трактором - за 2 дня. За сколько дней может вспахать поле второй трактор, работая один?

Решение.

1) 420 : 3 = 140 (а) поля за один день может вспахать первый трактор, работая один.

2) 420 : 2 = 210 (а) поля за один день могут вспахать два трактора, работая вместе.

3) 210 – 140 = 70 (а) поля за один день может вспахать второй трактор, работая один.

4) 420 : 70 = 6 дней – время, за которое второй трактор может вспахать всё поле.

Ответ: 6 дней.

Задача № 2 [62, №1081(б)]**.** Два тракториста вспахали поле за 6 ч совместной работы. Первый тракторист мог бы один выполнить ту же работу за 10 ч. За сколько часов второй тракторист может вспахать поле?

Решение.

1) $\frac{1}{6}$ – часть работы, которую выполнят два тракториста за 1 час, работая совместно.

2) $\frac{1}{10}$ – часть работы, которую выполнит первый тракторист за 1 час работы.

3) $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ часть работы, которую выполнит второй тракторист за 1 час работы. Значит 15 дней – время, за которое второй тракторист может выполнить всю работу.

Ответ: 15 дней.

Задача № 3 [62, №966(а)]**.** Два тракториста вспахали поле за 4 дня. Если бы работал один из них, то он вспахал бы поле за 6 дней. Какую часть поля обрабатывал каждый тракторист за день?

Решение.

1) $\frac{1}{4}$ – часть поля, которую вспахивают два тракториста за 1 день, работая совместно.

2) $\frac{1}{6}$ – часть поля, которую вспахивает первый тракторист за 1 день работы.

3) $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$ часть поля, которую вспахивает второй тракторист за 1 день работы. Значит 12 дней – время, за которое второй тракторист может вспахать всё поле.

Ответ: 12 дней.

Задача № 4 [74, №7.26]**.** Два тракториста, работая совместно, вспахали поле за 48 ч. Если бы половину поля вспахал один из них, а затем оставшуюся половину другой, то работа была бы выполнена за 100 ч. За сколько часов мог бы вспахать поле каждый тракторист, работая отдельно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всю работу первый тракторист,

y – время, за которое выполняет всю работу второй тракторист,

48 ч – время, за которое два тракториста, работая совместно, вспахали поле.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первый тракторист за 1 час,

$\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет второй тракторист за 1 час,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – часть работы, которую выполняет первый и второй тракторист, работая совместно.

Значит $48\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ – *первое уравнение*.

Половину поля вспахал один из них, а затем оставшуюся половину другой, то работа была бы выполнена за 100 ч, значит $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=100$ – *второе уравнение.*

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}48\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\ ,\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=100;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}48\left(\frac{x+y}{xy}\right)=1\ ,\\ x+y=200;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=48x+48y,\\ x+y=200;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}xy=48x+48y,\\ 48x+48y=9600;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=9600,\\ x+y=200;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=9600,\\ x+y=200;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}xy=9600,\\ x=200-y;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(200-y)y=9600,\\ x=200-y;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-200y+9600=0,\\ x=200-y;\end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $y^2-200y+9600=0$:

D = 40^2;

y_1 = 80,

y_2 = 120.

Значит, x_1 = 120, x_2 = 80.

Ответ: 120 и 80 часов.

Задача № 5 [70, №719]**.** За 4 дня совместной работы двумя тракторами было вспахано $\frac{2}{3}$ поля. За сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором, если первым его можно вспахать на 5 дней быстрее, чем вторым?

Решение.

	Время	Производительность	Работа
Первый трактор	x	$\frac{1}{x}$	1
Второй трактор	$x + 5$	$\frac{1}{x+5}$	1
Совместно	4	$\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x}$	$\frac{2}{3}$

Т.к. за 4 дня совместной работы двумя тракторами было вспахано $\frac{2}{3}$.

Значит: $4\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{3}$;

$\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$;

$\frac{x+x+5}{x(x+5)}=\frac{1}{6}$;

$\frac{2x+5}{x(x+5)}=\frac{1}{6}$;

$12x+30=x^2+5x$;

$x^2-7x-30=0$;

D = 13^2;

x_1 = - 3 – не удовлетворяет условию задачи,

x_2 = 10 ч.

Значит, *10 + 5= 15 часов* – время, выполнения задания вторым трактором.

Ответ: 10 и 15 часов.

Совместная работа каких-либо машин, аппаратов и т.д.

Задача № 1 [62, №285(б)]**.** Один автомат за час наполняет соком 75 банок, а другой – 65 банок. За какое время они наполнят соком 700 банок, если будут включены оба?

Решение.

1) 75 + 65 = 140 банок наполняют соком два автомата, если будут включены оба.

2) 700 : 140 = 5 часов – время, за которое два автомата наполнят соком 700 банок, если будут включены оба.

Ответ: 5 часов.

Задача № 2 [61, №344]**.** Один комбайн может убрать все поле за 6 дней, а другой — за 4 дня. Какую часть поля уберут оба комбайна за один день?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{6}$ – часть поля, которую может убрать первый комбайн за 1 день.

2) $\frac{1}{4}$ – часть поля, которую может убрать второй комбайн за 1 день.

3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$ – часть поля, которую уберут два комбайна, работая совместно за 1 день.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Задача № 3 [61, №1351]**.** Одна поливочная машина может полить всю улицу за 15 мин, а другая — за 12 мин. Какую часть улицы польют обе машины за 1 мин? за 3 мин?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{15}$ – часть улицы, которую может полить первая поливочная машина за 1 минуту.

2) $\frac{1}{12}$ – часть улицы, которую может полить первая поливочная машина за 1 минуту.

3) $\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\frac{4+5}{60}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$ – часть улицы, которую польют две поливочные машины за 1 минуту, работая совместно.

4) $\frac{3}{20}\cdot 3=\frac{9}{20}$ часть улицы, которую польют две поливочные машины за 3 минуты, работая совместно.

Ответ: $\frac{3}{20}$; $\frac{9}{20}$.

Задача № 4 [62, №407]**.** На двух копировальных машинах за 15 мин распечатали 180 страниц. Первая машина печатает 6 страниц в минуту. Сколько страниц в минуту печатает вторая машина?

Решение.

1) 180 : 15 = 12 страниц в минуту печатают две копировальные машины, работая совместно.

2) 12 – 6 = 6 страниц, печатает в минуту вторая копировальная машина.

Ответ: 6 страниц.

Задача № 5 [62, №406]**.** На одной копировальной машине можно распечатать 6 страниц в минуту, а на другой 8 страниц. Сколько страниц можно распечатать за 20 минут, если обе машины будут работать одновременно?

Решение.

1) 6 + 8 = 14 страниц в минуту печатают две копировальные машины, работая совместно.

2) 14 · 20 = 280 страниц можно распечатать за 20 минут, если обе машины будут работать одновременно.

Ответ: 280 страниц .

Задача № 6 [62, №901]**.** В цехе три автомата для заполнения бочек краской. Первый автомат может наполнить бочку за 20 мин, второй – 15 мин, третий – за 10 мин. Какая часть бочки наполниться за 1 мин, если одновременно включить первый и второй автоматы? А если включить одновременно все три автомата?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{20}$ – часть бочки, которую может наполнить первый автомат за 1 минуту.

2) $\frac{1}{15}$ – часть бочки, которую может наполнить второй автомат за 1 минуту.

3) $\frac{1}{10}$ – часть бочки, которую может наполнить третий автомат за 1 минуту.

4) $\frac{1}{20}+\frac{1}{15}=\frac{3+4}{60}=\frac{7}{60}$ – часть бочки, которую может наполнить первый и второй автомат за 1 минуту, работая совместно.

5) $\frac{7}{60}+\frac{1}{10}=\frac{7+6}{60}=\frac{13}{60}$ – часть бочки, которую могут наполнить три автомата за 1 минуту, работая совместно

Ответ: $\frac{7}{60}$; $\frac{13}{60}$.

Задача № 7 [65, №874]**.** Для разравнивания дороги выделены два грейдера различной мощности. Первый грейдер может выполнить всю работу за 12 дней, а второй — за 6 дней. За какое время выполнят работу обе машины, если будут работать одновременно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{12}$ – часть работы, которую может выполнить первый грейдер за 1 день.

2) $\frac{1}{6}$ – часть работы, которую может выполнить второй грейдер за 1 день.

3) $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1+2}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ часть работы, которую могут выполнить два грейдера за 1 день, работая совместно. Значит, двумя грейдерами, совместно, за 4 дня будет выполнена вся работа.

Ответ: 4 дня.

Задача № 8 [70, №632]**.** При совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 ч. Сколько времени потребовалось бы каждому крану отдельно для разгрузки баржи, если известно, что первому крану для этого требуется на 5 ч больше, чем второму?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть 6 ч – время, которое потребовалось на разгрузку баржи двумя кранами,

x – время, которое потребовалось на разгрузку баржи первом краном,

$x + 5$ – время, которое потребовалось на разгрузку баржи вторым краном.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую делает первый кран за 1 ч,

$\frac{1}{x+5}$ – часть работы, которую делает второй кран за 1 ч.

Значит, $6\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right)=1$,

$$6\cdot\left(\frac{x+5+x}{x\,(x+5)}\right)=1,$$

$$6\cdot\left(\frac{2x+5}{x\,(x+5)}\right)=1$$

$x^2 + 5x = 12x + 30,$

$x^2 - 7x - 30 = 0,$

D = 13^2,

$x_1 = 10$,

$x_2 < 0$ – не удовлетворят условию.

10 ч – время, которое потребовалось на разгрузку баржи первом краном,

15 ч – время, которое потребовалось на разгрузку баржи вторым краном.

Ответ: 10 и 15 часов.

Задача № 9 [70, №633]**.** Два автомата разной мощности изготовили за 2 ч 55 мин некоторое количество деталей. За какое время это количество деталей мог бы изготовить первый автомат, если известно, что ему для этого потребуется на 2 ч больше, чем второму автомату?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть (x + 2) – время, которое потребовалось на изготовление деталей первому автомату,

x – время, которое потребовалось на изготовление деталей второму автомату.

Тогда $\frac{1}{x+2}$ – часть работы, которую делает первый автомат за 1 ч,

$\frac{1}{x}$ – часть работы, которую делает второй автомат за 1 ч.

2 ч 55 мин – это $\frac{35}{12}$ ч.

Значит, $\frac{35}{12} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right) = 1$,

$$\left(\frac{x+2+x}{x\,(x+2)}\right) = \frac{12}{35},$$

$$\left(\frac{2x+2}{x\,(x+2)}\right) = \frac{12}{35}$$

$12x^2 + 24x = 70x + 70,$

$12x^2 - 46x - 70 = 0,$

$6x^2 - 23x - 35 = 0,$

D = 37^2,

$x_1 = 5$ – время, которое потребовалось на изготовление деталей второму автомату,

$x_2 < 0$ – не удовлетворят условию.

5 + 2 = 7 ч – время, которое потребовалось на изготовление деталей второму автомату.

Ответ: 7 часов.

Задача № 10 [70, №720]**.** Два хлопкоуборочных комбайна могут собрать хлопок с поля на 9 дней быстрее, чем один первый комбайн, и на 4 дня быстрее, чем один второй. За сколько дней каждый комбайн может собрать весь хлопок?

Решение.

Составим таблицу, проанализировав условия задачи.

	Время	Производительность	Работа
Первый комбайн	$x + 9$	$\frac{1}{x+9}$	1
Второй комбайн	$x + 4$	$\frac{1}{x+4}$	1
Совместно	6	$\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9}$ или $\frac{1}{x}$	1

Составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{x+9+x+4}{(x+4)(x+9)} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{2x+13}{x^2+13x+36} = \frac{1}{x},$$

$$2x^2 + 13x = x^2 + 13x + 36,$$

$x^2 = 36$,

x = ± 6; - 6 не удовлетворяет условию задачи.

За 6 дней соберут весь хлопок два комбайна; за 10 дней - второй комбайн и за 15 дней - первый.

Ответ: 15 и 10 дней.

Задача № 11 [74, № 7.21]. Два комбайна, работая совместно, могут выполнить задание за 6 ч. Первый комбайн, работая один, может выполнить это задание на 5 ч скорее, чем второй комбайн. За сколько времени может выполнить задание первый комбайн, работая один?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть 6 ч – время, которое потребовалось двум комбайнам, для выполнения совместной работы,

x – время, которое потребовалось первому комбайну, для выполнения работы,

$x + 5$ – время, которое потребовалось второму комбайну, для выполнения работы.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую делает первый комбайн за 1 ч,

$\frac{1}{x+5}$ – часть работы, которую делает второй комбайн за 1 ч.

Значит, $6 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}\right) = 1$,

$$6 \cdot \left(\frac{x+5+x}{x\,(x+5)}\right) = 1,$$

$$6 \cdot \left(\frac{2x+5}{x\,(x+5)}\right) = 1$$

$x^2 + 5\text{x} = 12x + 30$,

$x^2 - 7x - 30 = 0$,

D = 13^2,

$x_1 = 10$,

$x_2 < 0$ – не удовлетворят условию.

10 ч – время, за которое может выполнить задание первый комбайн, работая один.

Ответ: 10 часов.

Задача № 12 [74, №7.23]**.** Два экскаватора, работая одновременно, выполняют некоторый объем земляных работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объем работ на 4 ч быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объема земляных работ?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, которое потребовалось на выполнение работы первому экскаватору,

$x + 4$ – время, которое потребовалось на выполнение работы второму экскаватору.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую делает первый автомат за 1 ч,

$\frac{1}{x+4}$ – часть работы, которую делает второй автомат за 1 ч.

3 ч 45 мин – это $\frac{15}{4}$ ч.

Значит, $\frac{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) = 1$,

$\left(\frac{x+4+x}{x\,(x+4)}\right) = \frac{4}{15}$,

$\left(\frac{2x+4}{x\,(x+4)}\right) = \frac{4}{15}$

$4x^2 + 16x = 30x + 60$,

$4x^2 - 14x - 60 = 0$,

$2x^2 - 7x - 30 = 0$,

$D = 17^2$,

$x_1 = 6$ – время, которое потребовалось на выполнение работы первому экскаватору,

$x_2 < 0$ – не удовлетворят условию.

6 + 4 = 10 ч – время, которое потребовалось на выполнение работы второму экскаватору.

Ответ: 6 и 10 часов.

Задача № 13 [74, С. 197, №37]**.** Один асфальтоукладчик может выполнить задание на 15 дней быстрее, чем другой. После того как первый асфальтоукладчик проработал 10 дней, его сменил другой и закончил работу за 30 дней. За сколько дней могут выполнить всю работу два асфальтоукладчика, работая одновременно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первый асфальтоукладчик,

$x + 15$ – время, за которое выполняет всё задание второй асфальтоукладчик.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первый асфальтоукладчик за 1 день,

$\frac{1}{x+15}$ – часть работы, которую выполняет второй асфальтоукладчик за 1 день,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}$ – часть работы, которую выполняют два асфальтоукладчика, работая совместно.

Первый асфальтоукладчик проработал 10 дней, его сменил другой и закончил работу за 30 дней, значит $\frac{30}{x+15}+\frac{10}{x} = 1.$

$$\frac{30x+10(x+15)}{x(x+15)} = 1,$$

$$\frac{30x+10x+150}{x(x+15)} = 1,$$

$$\frac{40x+150}{x(x+15)} = 1,$$

$$40x + 150 = x(x + 15),$$

$$40x + 150 = x^2 + 15x,$$

$$x^2 - 25x - 150 = 0,$$

$$x^2 - 25x - 150 = 0,$$

D = 35^2,

$x_1 = 30$,

$x_2 = -5$ – не удовлетворяет условию.

Значит, 30 + 15 = 45 дней требуется второму асфальтоукладчику для самостоятельного выполнения задания.

$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{3+2}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ – часть работы, которую выполняют два асфальтоукладчика, работая совместно.

Значит, за 18 дней могут выполнить всю работу два асфальтоукладчика, работая одновременно.

Ответ: 18 дней.

Задача № 14 [74, С. 197, №38]**.** Один экскаватор может вырыть котлован на 10 ч быстрее, чем другой. После того как первый экскаватор проработал 10 ч, его сменил второй экскаватор и закончил работу за 15 часов. За сколько часов могли вырыть котлован оба экскаватора работая одновременно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первый экскаватор,

$x + 10$ – время, за которое выполняет всё задание второй экскаватор.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первый экскаватор за 1 час,

$\frac{1}{x+10}$ – часть работы, которую выполняет второй экскаватор за 1 час,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}$ – часть работы, которую выполняют два экскаватора, работая совместно.

Первый экскаватор проработал 10 ч, его сменил второй экскаватор и закончил работу за 15 часов, значит $\frac{10}{x}+\frac{15}{x+10} = 1$.

$$\frac{15x+10(x+10)}{x(x+10)}=1,$$

$$\frac{15x+10x+100}{x(x+10)}=1,$$

$$\frac{25x+100}{x(x+10)}=1,$$

$$25x+100=x(x+10),$$

$$25x+100=x^2+10x,$$

$$x^2-15x-100=0,$$

D = 25^2,

$x_1 = 20$,

$x_2 = -5$ – не удовлетворяет условию.

Значит, 20 + 10 = 30 часов, время, за которое выполнит всё задание второй экскаватор.

$\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{2+3}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$ – часть работы, которую выполняют два асфальтоукладчика, работая совместно.

Значит, за 12 часов могут выполнить всю работу два асфальтоукладчика, работая одновременно.

Ответ: 18 часов.

Задача № 15 [74, С. 197, №36]**.** Две копировальные машины, работая одновременно, могут выполнить работу за 12 мин. Если будет работать только первая копировальная машина, то она может выполнить всю работу на 10 мин быстрее, чем вторая. За сколько минут всю работу может выполнить вторая копировальная машина?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое выполняет всё задание первая машина,

$x + 10$ – время, за которое выполняет всё задание вторая машина,

12 мин – время, за которое, две копировальные машины, работая одновременно, могут выполнить работу

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет первая машина за 1 мин,

$\frac{1}{x+10}$ – часть работы, которую выполняет вторая машина за 1 мин,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10}$ – часть работы, которую выполняют две машины, работая совместно.

Значит $12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10}\right) = 1.$

$$\frac{12x+12(x+10)}{x(x+10)} = 1,$$

$$\frac{12x+12x+120}{x(x+10)} = 1,$$

$$\frac{24x+120}{x(x+10)} = 1,$$

$$24x + 120 = x(x + 10),$$

$$24x + 120 = x^2 + 10x,$$

$$x^2 - 14x - 120 = 0,$$

$D = 26^2$,

$x_1 = 20$,

$x_2 = -6$ – не удовлетворяет условию.

Значит, 20 + 10 = 30 минут, время, за которое выполнит всю работу вторая копировальная машина.

Ответ: 30 минут.

Задача № 16 [70, №723]**.** При совместной работе двух копировальных машин можно снять ксерокопию с рукописи за 6 мин. Если сначала снять ксерокопию с половины рукописи одной машиной, а затем с оставшейся части - другой машиной, то вся работа будет закончена через 12,5 мин. За какое время можно снять ксерокопию с рукописи каждой машиной в отдельности?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое можно снять ксерокопию с рукописи на первой копировальной машине,

y – время, за которое можно снять ксерокопию с рукописи на второй копировальной машине.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть рукописи, с которой можно снять ксерокопию на первой копировальной машине за 1 мин,

$\frac{1}{y}$ – часть рукописи, с которой можно снять ксерокопию на второй копировальной машине за 1 мин,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – часть рукописи, с которой можно снять ксерокопию на первой и второй копировальной машинах за 1 мин.

За 6 часов, совместно двумя машинами, будет снята ксерокопия со всей рукописи, значит $6\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ – *первое уравнение*.

Пусть $\frac{x}{2}$ – время, за которое можно снять половину ксерокопии с рукописи на первой копировальной машине,

$\frac{y}{2}$ – время, за которое можно снять половину ксерокопии с рукописи на второй копировальной машине.

Значит, *второе уравнение*: $\frac{x}{2}+\ \frac{y}{2}=12{,}5$ – время снятия ксерокопии со всей рукописи, если сначала снять ксерокопию с половины рукописи одной машиной, а затем с оставшейся части - другой машиной.

$$\begin{cases} 6\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1, \\ \frac{x}{2}+\ \frac{y}{2}=12{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\cdot\left(\frac{x+y}{xy}\right)=1, \\ x+y=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+6y=xy, \\ y=25-x; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+6(25-x)=x(25-x), \\ y=25-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+150-6x=25x-x^2, \\ y=25-x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-25x+150=0, \\ y=25-x; \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $x^2-25x+150=0$, по т. Виета:

$x_1 = 15$,

$x_2 = 10$.

Значит, $y_1 = 10$, $y_2 = 15$.

Ответ: 10 и 15 часов.

Задачи на совместную работу. Наполнение через трубы.

Задача № 1 [62, №1077]**.** Через первую трубу бассейн можно наполнить за 3 ч, через вторую - за 6 ч. Какую часть бассейна наполнит каждая труба за 1 ч? Какую часть бассейна наполнит за 1 ч две трубы вместе? За сколько часов наполнится весь бассейн, если открыть обе трубы одновременно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{3}$ – скорость заполнения через первую трубу за 1 час.

2) $\frac{1}{6}$ – скорость заполнения через вторую трубу за 1 час.

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ – часть бассейна наполнят за 1 ч две трубы вместе.

Значит, за 2 часа наполнится бассейн, если обе трубы будут работать одновременно.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$; 2 часа.

Задача № 2 [64, №457]**.** Одна труба заполняет бассейн за 30 ч, а другая - за 15 ч. Какая часть бассейна будет заполнена через час, если включить одновременно две трубы? Сколько времени понадобится для заполнения бассейна при совместной работе обеих труб?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{30}$ – скорость заполнения через первую трубу за 1 час.

2) $\frac{1}{15}$ – скорость заполнения через вторую трубу за 1 час.

3) $\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ – скорость заполнения через две трубы за 1 час.

Значит, за 10 часов наполнится бассейн, если обе трубы будут работать одновременно.

Ответ: $\frac{1}{10}$; 10 часов.

Задача № 3 [61, №382]**.** Школьный бассейн наполняется через первую трубу за 4 ч, а через вторую — за 6 ч. Какую часть бассейна останется наполнить после совместной работы обеих труб в течение часа?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{4}$ – скорость заполнения через первую трубу за 1 час.

2) $\frac{1}{6}$ – скорость заполнения через вторую трубу за 1 час.

3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$ – скорость заполнения через две трубы за 1 час.

4) $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ часть бассейна останется наполнить после совместной работы обеих труб в течение часа

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Задача № 4 [62, №1078(а)]**.** Через первую трубу можно наполнить бак водой за 4 мин, через вторую – за 12 мин. За сколько минут можно наполнить бак через две трубы?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{4}$ – скорость заполнения через первую трубу за 1 мин.

2) $\frac{1}{12}$ – скорость заполнения через вторую трубу за 1 мин.

3) $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3+1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ – скорость заполнения через две трубы за 1 мин.

Значит, за 3 минуты наполнится бассейн, если обе трубы будут работать одновременно.

Ответ: 3 минуты.

Задача № 5 [74, С. 196, №25]**.** Бассейн наполняется через одну трубу за 4 часа, а через другую за 6 часов. Через сколько часов наполнится бассейн, если обе трубы будут работать одновременно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{4}$ – скорость заполнения через первую трубу за 1 час.

2) $\frac{1}{6}$ – скорость заполнения через вторую трубу за 1 час.

3) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$ – скорость заполнения через две трубы за 1 час.

Значит, за $\frac{12}{5} = 2{,}4$ ч наполнится бассейн, если обе трубы будут работать одновременно.

Ответ: 2,4 часа.

Задача № 6 [65, №443(б)]**.** В бассейн проведены три трубы. С помощью первой трубы бассейн можно наполнить за 10 ч, с помощью второй — за 8 ч, с помощью третьей трубы вся вода из наполненного бассейна может вылиться за 5 ч. Какая часть бассейна будет наполнена за 1 ч, если будут открыты все три трубы?

Решение.

1) $\frac{1}{10}$ – скорость, с которой первая труба наполняет бассейн за 1 ч.

2) $\frac{1}{8}$ – скорость, с которой вторая труба наполняет бассейн за 1 ч.

3) $\frac{1}{5}$ – скорость, с которой вода выливается из третьей трубы за 1 ч.

3) $\frac{1}{10} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} = \frac{4+5-8}{40} = \frac{1}{40}$ – часть бассейна будет наполнена за 1 ч, если будут открыты все три трубы.

Ответ: $\frac{1}{40}$.

Задача № 7 [65, №1090]**.** Две трубы, работая вместе, могут наполнить бассейн за 15 минут. Если бы первая труба работала одна, то наполнение бассейна заняло бы 20 минут. Сколько времени понадобится для заполнения бассейна через вторую трубу?

Решение.

1) $\frac{1}{15}$ – скорость, с которой две трубы наполняют бассейн за 1 мин, работая совместно.

2) $\frac{1}{20}$ – скорость, с которой первая труба наполняет бассейн за 1 мин.

3) $\frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{4-3}{60} = \frac{1}{60}$ – скорость, с которой вторая труба наполняет бассейн за 1 мин.

Значит, время, которое понадобится для заполнения бассейна через вторую трубу составляет 60 минут.

Ответ: 60 минут.

Задача № 8 [60, №1132]**.** Пошел дождь. Под водосточную трубу поставили пустую бочку. В нее вливалось каждую минуту 8 л воды, а через щель в бочке выливалось 3 л воды в минуту. Сколько литров воды будет в бочке через 1 мин; 2 мин; 3 мин? Успеет ли бочка наполниться, если ее объем 400 л, а дождь шел 1 ч 10 мин?

Решение.

1) 8 – 3 = 5 (л) заполняется бочка в минуту.

2) 5 · 2 = 10 (л) будет в бочке через 2 минуты.

3) 5 · 3 = 15 (л) будет в бочке через 3 минуты.

1 ч 10 мин = 70 мин

4) 5 · 70 = 350 (л) будет в бочке через 1 ч 10 мин.

350 < 400, значит, не успеет.

Ответ: 5 л; 10 л; 15 л; нет, не успеет.

Задача № 9 [65, №456]**.** Из бака выходят две трубы. Через одну из них вытекает $\frac{4}{5}$ л воды в минуту, а через другую — в полтора раза больше. Полный бак опорожняется через обе трубы за 3 ч 20 мин. Сколько литров воды вмещает бак?

Решение.

1) $\frac{4}{5} \cdot 1{,}5 = \frac{6}{5}$ (л) вытекает через вторую трубу в минуту.

2) $\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2$ (л) вытекает через две трубу в минуту.

3 ч 20 мин = 200 мин

3) 200 · 2 = 400 (л) вмещает бак.

Ответ: 400 литров.

Задача № 10 [71, №545]**.** Бассейн наполняется через первую трубу на 5 ч. быстрее, чем через вторую. Бассейн можно наполнить, если открыть сначала одну первую трубу на 5 ч, а затем вторую на 7,5 ч. За сколько часов наполниться бассейн при совместной работе обеих труб?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое наполнится бассейн через первую трубу,

$x + 5$ – время, за которое наполнится бассейн через вторую трубу,

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть воды, на которую наполнится бассейн через первую трубу за 1 ч,

$\frac{1}{x+5}$ – часть воды, на которую наполнится бассейн через вторую трубу за 1 ч,

Значит, $\frac{5}{x} + \frac{7,5}{x+5} = 1$,

$\frac{5}{x} + \frac{7,5}{x+5} = 1$,

$\frac{5x + 25 + 7,5x}{x \cdot (x+5)} = 1$,

$\frac{12,5x + 25}{x \cdot (x+5)} = 1,$

$x^2 + 5\mathrm{x} = 12,5x + 25,$

$x^2 - 7,5x - 25 = 0,$

$2x^2 - 15x - 50 = 0,$

$D = 25^2,$

$x_1 = 10,$

$x_2 < 0$ – не удовлетворят условию.

Первая труба наполняет бассейн за 10 часов, тогда вторая за 15 часов, значит совместная производительность за 1 час: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}.$

Следовательно, две трубы наполняют бассейн при совместной работе за 6 ч.

Ответ: 6 часов.

Задача № 11 [70, №721]**.** Для наполнения бассейна через первую трубу потребуется на 9 ч больше времени, чем при наполнении через первую и вторую трубы, и на 7 ч меньше, чем через одну вторую трубу. За сколько часов наполнится бассейн через обе трубы?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое наполнится бассейн через обе трубы,

$x + 9$ – время, за которое наполнится бассейн через первую трубу,

$x + 16$ – время, за которое наполнится бассейн через вторую трубу,

Тогда $\frac{1}{x+9}$ – часть воды, на которую наполнится бассейн через первую трубу за 1 ч,

$\frac{1}{x+16}$ – часть воды, на которую наполнится бассейн через вторую трубу за 1 ч,

Значит, $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+9} + \frac{1}{x+16}$,

$\frac{x+16+x+9}{(x+16)\cdot(x+9)} = \frac{1}{x}$,

$\frac{2x+25}{x^2+25x+144} = \frac{1}{x}$,

$2x^2 + 25\text{x} = x^2 + 25x + 144$,

$x^2 = 144$,

$x = \pm 12$, т.к. x > 0, значит x = 12 (ч) – наполнится бассейн через обе трубы

Ответ: 12 часов.

Задача № 12 [71, №546]**.** Чтобы наполнить бассейн, сначала открыли одну трубу и через 2 ч, не закрывая её, открыли другую. Через 4 ч совместной работы труб бассейн был наполнен. Одна вторая труба могла бы наполнить бассейн в 1,5 раза быстрее, чем одна первая труба. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу?

Решение.

Объём бассейна принимаем равным 1.

Пусть x – время заполнения бассейна второй трубой,

1,5x – время заполнения бассейна первой трубой,

Тогда $\frac{1}{x}$ – скорость заполнения бассейна второй трубой,

$\frac{1}{1,5x}$ – скорость заполнения бассейна первой трубой,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{1,5x}$ скорость заполнения бассейна двумя трубами.

Значит, за два часа работы только первой трубы и 4 часа совместной работы двух труб, был наполнен бассейн, составим *уравнение:*

$$\frac{2}{1,5x}+4\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1,5x}\right)=1,$$

$$\frac{2}{1,5x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{1,5x}=1,$$

$$\frac{6}{1,5x}+\frac{4}{x}=1,$$

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{x}=1,$$

$$\frac{8}{x}=1,$$

$x = 8$ (ч) – время заполнения бассейна второй трубой,

$8 \cdot 1,5 = 12$ (ч) – время заполнения бассейна первой трубой

Ответ: за 12 и 8 часов.

Задача № 13 [74, №7.47]**.** В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна равномерно подает, а вторая равномерно отводит воду, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

Решение.

Объём бассейна принимаем равным 1.

Пусть x – время заполнения бассейна,

y – время опустошения бассейна,

Значит, *первое уравнение*: $x – y = 2$.

Пусть $\frac{1}{x}$ – часть, на которую наполняется бассейн за 1 час,

$\frac{1}{y}$ – часть, на которую опустошается бассейн за 1 час.

Тогда, из условия задачи, составим *второе уравнение:* $\frac{1}{3\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)} = 8.$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ \frac{1}{3\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)} = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy}{3(x-y)} = 8, \\ x - y = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy}{3\cdot 2} = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 48, \\ x = 2 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 48, \\ x = 2 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+y)y = 48, \\ x = 2 + y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

Решим квадратное уравнение $y^2 + 2y - 48 = 0$, по т. Виета:

$y_1 = -8$ – не удовлетворят условию,

$y_2 = 6$.

Значит, $x = 8$.

Ответ: за 8 часов наполняет бассейн, за 6 часов опустошает.

Задачи на совместную работу. Насосы.

Задача № 1 [64, №128(г)]**.** Работая один, насос может откачать 1512 л воды за 12 ч, а вместе с другим насосом – за 9 ч. За какое время может откачать это количество воды один второй насос, работая один?

Решение.

Объём бассейна принимаем равным 1.

1) 1512 : 12 = 126 л – воды за один час может откачать первый насос за 1 ч.

2) 1512 : 9 = 168 л – воды за один час может откачать первый насос, работая совместно с другим насосом за 1 ч.

3) 168 – 126 = 42 л – воды за один час может откачать второй насос за 1 ч.

4) 1512 : 42 = 36 ч – время, за которое может откачать это количество воды второй насос, работая один.

Ответ: 36 часов.

Задача № 2 [62, №968(а)]**.** Один насос может выкачать воду из бассейна за 6 ч, а другой - за 4 ч. Какая часть бассейна останется наполненной водой после 1 ч их совместной работы?

Решение.

Объём бассейна принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{6}$ – часть воды, которую может выкачать первый насос за 1 ч.

2) $\frac{1}{4}$ – часть воды, которую может выкачать первый насос за 1 ч.

3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$ – часть воды, которую могут выкачать два насоса за 1 ч, работая совместно.

4) $1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$ – часть воды, которую останется выкачать двум насосам через 1 ч совместной работы.

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Задача № 3 [65, №875]**.** Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из резервуара за 6 ч. Первый насос, работая один, может откачать эту воду за 15 ч. За сколько часов сможет откачать воду из резервуара второй насос, если будет работать только он?

Решение.

Объём бассейна принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{6}$ – часть воды, которую могут выкачать первый и второй насос за 1 ч, работая совместно.

2) $\frac{1}{15}$ – часть воды, которую может выкачать первый насос за 1 ч.

3) $\frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{5-2}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ – часть воды, которую могут выкачать два насоса за 1 ч, работая совместно.

4) $\frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$ (ч) время, за которое сможет откачать воду из резервуара второй насос, если будет работать только он.

Ответ: 10 часов.

Задача № 4 [65, №1016(б)]**.** Составьте уравнение по условию задачи. Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из цистерны за 18 ч. Первый насос мог бы откачать эту воду на 9 ч быстрее, чем второй. За какое время мог бы откачать воду из цистерны каждый из насосов, работая отдельно?

Решение.

Объём воды в цистерне принимаем равным 1.

Пусть x – время, за которое первый насос, может откачать воду из цистерны,

$x + 9$ – время, за которое второй насос, может откачать воду из цистерны, 18 ч – время, за которое два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из цистерны.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть воды, которую первый насос, может откачать за 1 ч,

$\frac{1}{x+9}$ – часть воды, которую второй насос, может откачать за 1 ч,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{x+9+x}{x\cdot(x+9)}=\frac{2x+9}{x\cdot(x+9)}$ – совместная производительность труда.

Значит $\frac{x\cdot(x+9)}{2x+9}=18$ – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

$\Rightarrow\ x^2+9\text{x}=36\text{x}+162\Rightarrow$

$\Rightarrow\ x^2-25\text{x}-162=0.$

Ответ: $x^2-25\text{x}-162=0.$

Задача № 5 [65, №443(в)]**.** Один насос может наполнить бак нефтью за 15 мин, другой — за 20 мин, а третьему насосу на это потребуется 30 мин. Какую часть бака могут наполнить нефтью все три насоса вместе за 1 мин?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{15}$ – часть бака, которую может наполнить первый насос за 1 минуту.

2) $\frac{1}{20}$ – часть бака, которую может наполнить второй насос за 1 минуту.

3) $\frac{1}{30}$ – часть бака, которую может наполнить третий насос за 1 минуту.

4) $\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{4+3+2}{60}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$ – часть бочки, которую может наполнить три насоса за 1 минуту, работая совместно.

Ответ: $\frac{3}{20}$.

Задача № 6 [64, №178]**.** В Санкт-Петербурге часты наводнения. Однажды затопило подвал дома на набережной. Из подвала нужно было выкачать воду. Спасатели установили 5 больших и 3 маленьких насоса. Большой насос выкачивал за 1 ч 4537 л, а малый – 2120 л воды. Через 6 часов вся вода была выкачана. Сколько литров воды скопилось в подвале во время наводнения?

Решение.

1) $4537 \cdot 5 = 22685$ (л) выкачали 5 больших насосов за 1 час.

2) $22685 \cdot 6 = 136\,110$ (л) выкачали 5 больших насосов за 6 час.

3) $2120 \cdot 5 = 10600$ (л) выкачали 3 маленьких насоса за 1 час.

4) $10600 \cdot 6 = 63\,600$ (л) выкачали 3 больших насосов за 6 час.

5) $136\,110 + 63\,600 = 199\,710$ (л) воды скопилось в подвале во время наводнения.

Ответ: 199 710 л.

Задача № 7 [64, №488]**.** Один насос заполняет танк для хранения нефти за 4 ч, другой – за 16 ч. Какая часть танка будет заполнена за 3 ч, если оба насоса будут включены одновременно?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{4}$ – часть танка, которую заполняет первый насос за 1 час.

2) $\frac{1}{16}$ – часть танка, которую заполняет второй насос за 1 час.

3) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$ – часть танка, которую заполняют два насоса за 1 час, работая совместно.

4) $\frac{5}{16} \cdot 3 = \frac{15}{16}$ часть танка, которую заполняют два насоса за 3 часа, работая совместно.

Ответ: $\frac{15}{16}$.

Задача № 8 [64, №618]**.** Один насос откачивает воду со скоростью 400 л в минуту. Скорость второго насоса в 2 раза больше. Судно может затонуть, если объём воды в трюме превысит 80 000 литров. Успеют ли эти насосы откачать воду из трюма, если к тому времени, как они были подключены, через пробоину в корпусе судна в трюм набралось 20 000 л воды и известно также, что на ликвидацию пробоины уйдёт около 17 мин, а за каждую минуту через пробоину поступает 3000 л воды?

Решение.

1) $400 \cdot 2 = 800$ (л) скорость второго насоса.

2) $400 + 800 = 1200$ (л) совместная скорость насосов.

3) $3000 - 1200 = 1800$ (л) поступит воды в трюм за 1 мин.

4) $1800 \cdot 17 = 30\,600$ (л) поступит воды в трюм за 17 мин.

5) $30\,600 + 20\,000 = 50\,600$ (л) будет воды в трюме через 17 минут.

$50\,600 < 80\,000$, значит судно не затонет.

Ответ: нет, не затонет.

Задачи на совместную работу. Наполнение через краны.

Задача № 1 [62, №892(а)]**.** Один кран заполняет бассейн за 4 ч, а другой – за 3 ч. Какая часть бассейна будет заполнена за 1 ч, если открыть одновременно оба крана?

Решение.

1) $\frac{1}{4}$ – часть бассейна, которую заполняет первый кран за 1 ч.

2) $\frac{1}{3}$ – часть бассейна, которую заполняет второй кран за 1 ч.

3) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$ – бассейна, которую заполняет первый и второй кран за 1 ч, работая вместе.

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Задача № 2 [62, №892(б)]**.** Один кран заполняет бак за 10 мин, а другой – за 15 мин. Какая часть бака будет заполнена за 1 мин, если открыть одновременно оба крана?

Решение.

1) $\frac{1}{10}$ – часть бака, которую заполняет первый кран за 1 мин.

2) $\frac{1}{15}$ – часть бака, которую заполняет второй кран за 1 мин.

3) $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ – бака, которую заполняет первый и второй кран за 1 мин, работая вместе.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задача № 3 [64, №128(б)]**.** Бак, вмещающий 120 000 л, через один кран можно заполнить за 20 ч, а через другой – за 30 ч. За какое время заполнится бак, если включить оба крана?

Решение.

1) 120 000 : 20 = 6000 (л) заполняет один кран за час.

2) 120 000 : 30 = 4000 (л) заполняет второй кран за час.

3) 6000+4000 = 10 000 (л) заполняют два крана за час, работая вместе.

4) 120 000 : 10 000 = 12 (ч) время за которое заполнится бак, если включить оба крана

Ответ: 12 часов.

Задача № 4 [60, №1388]**.** Кран, который подает в минуту 30 л воды, за 5 мин наполнил ванну. Потом кран закрыли и открыли сливное отверстие, через которое вся вода вылилась за 6 мин. Сколько литров воды выливалось за 1 мин?

Решение.

1) 30·5 = 150 (л) объём ванны.

2) 150 : 6 = 25 (л) выливается за 1минуту.

Ответ: 25 литров.

Задача № 5 [74, №7.24]**.** Чан наполняется двумя кранами при совместной работе за 1час. Наполнение чана только через первый кран длится вдвое дольше, чем через второй кран. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?

Решение.

Пусть объём воды, которую налил в чан за 1 час первый кран, примем за 1 часть.

Тогда 2 части налил за 1 час второй кран.

Значит:

1) 1+ 2 = 3 части – это объём всего чана.

2) 3 : 1 = 3 часа будет наполнять первый кран весь чан, работая один.

3) 3 : 2 = 1,5 часа будет наполнять второй кран весь чан, работая один.

Ответ: 3 и 1,5 часа.

Задача № 6 [74, №7.25]**.** Аквариум объемом 54 м^3 заполняется при помощи двух кранов. При этом первый кран работает 3 ч, а второй — 2 ч. Какова пропускная способность первого крана, если 1 м^3 он заполняет на 1 мин медленнее, чем второй?

Решение.

Пусть x м^3/ч – пропускает воды первый кран,

y м^3/ч – пропускает воды второй кран.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность первого крана,

$\frac{1}{y}$ – производительность второго крана.

За 3 ч работы первого и 2 ч работы второго, был наполнен аквариум объёмом 54 м^3, значит, *первое уравнение*: $3x + 2y = 54$.

Так как, первый кран заполняет на 1 мин медленнее 1 м^3, чем второй, значит, *второе уравнение*: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{60}$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 54, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{60}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{y-x}{xy}\right) = \frac{1}{60}, \\ 2y = 54 - 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60y - 60x = xy, \\ 2y = 54 - 3x; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 120y - 120x = 2xy, \\ 2y = 54 - 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60(54 - 3x) - 120x = x(54 - 3x), \\ 2y = 54 - 3x; \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение:

$$60(54 - 3x) - 120x = x(54 - 3x),$$

$$3240 - 180x - 120x = 54x - 3x^2,$$

$$3240 - 354x + 3x^2 = 0,$$

$$1080 - 118x + x^2 = 0,$$

$x_1 = 10$,

$x_2 = 108$.

Значит, $y_1 = 12$, $y_2 < 0$.

Ответ: 10 м^3/ч.

Задача № 7 [68, №478]**.** Два крана, открытые одновременно, могут наполнить водой детский надувной бассейн за 20 мин. Если сначала в течение 25 мин будет открыт только первый кран, а затем его закрыть и открыть второй, то через 16 мин бассейн наполнится. За сколько минут может наполнить бассейн каждый кран в отдельности?

Решение.

Пусть x – время, за которое наполняется бассейн с помощью первого крана,

y – время, за которое наполняется бассейн с помощью второго крана,

20 – время, за которое наполняется бассейн с помощью двух кранов одновременно.

Тогда $\frac{1}{x}$ – часть бассейна, которая наполняется за 1 мин с помощью первого крана,

$\frac{1}{y}$ – часть бассейна, которая наполняется за 1 мин с помощью второго крана.

Составим и решим систему двух уравнений по условиям задач:

$$\begin{cases} 20\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1, \\ \frac{25}{x} + \frac{16}{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\left(\frac{x+y}{xy}\right) = 1, \\ \frac{16x+25y}{xy} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x + 20y = 16x + 25y, \\ 20x + 20y = xy; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 5y, \\ 20x + 20y = xy; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}25y, \\ 80 \cdot 1{,}25y + 80y = 4 \cdot 1{,}25y^2; \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение:

$100y + 80y = 5y^2,$

$5y^2 - 180y = 0,$

$y^2 - 36y = 0,$

$y_1 = 0$ – не удовлетворяет условию,

$y_2 = 36.$

Значит, $x = 45.$

Ответ: 45 и 36.

Разные задачи на совместную работу.

Задача № 1 [62, №20]. Брат может прополоть грядку за 30 мин, а его младшая сестра – за 60 мин. Ответьте на вопросы:

1) Какую часть грядки пропалывает за 1 мин брат?

2) Какую часть грядки пропалывает за 1 мин сестра?

3) Какую часть грядки пропалывают они за 1 мин, работая вместе?

4) За сколько мин брат с сестрой пропалывают грядку, работая вместе?

Решение.

1) $\frac{1}{30}$ – часть грядки, которую пропалывает брат за 1 мин.

2) $\frac{1}{60}$ – часть грядки, которую пропалывает сестра за 1 мин.

3) $\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{2+1}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$ – часть грядки, которую пропалывает брат с сестрой за 1 мин, работая вместе.

4) $\frac{1}{\frac{1}{20}}=20$ минут, время, за которое брат с сестрой пропалывают грядку, работая вместе.

Ответ: $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{20}$; 20 мин.

Задача № 2 [62, №21]**.** Мама может почистить картофель для обеда за 16 мин, а сыну на эту работу требуется 48 мин. Ответьте на вопросы.

1) Какую часть картофеля почистит каждый из них за 1 мин?

2) Какую часть картофеля почистят они за 1 мин, работая вместе?

3) За сколько минут они почистят картофель для обеда, работая вместе?

Решение.

1) $\frac{1}{16}$ – часть картофеля, которую почистит мама за 1 мин.

2) $\frac{1}{48}$ – часть картофеля, которую почистит сын за 1 мин.

3) $\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{3+1}{48}=\frac{4}{48}=\frac{1}{12}$ – часть грядки, картофеля, которую почистят они за 1 мин, работая вместе.

4) $\frac{1}{\frac{1}{12}}=$ 12 минут, время, за которое они почистят картофель для обеда, работая вместе.

Ответ: $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{48}$; $\frac{1}{12}$; 12 мин.

Задача № 3 [62, №282]**.** Таня и её подруга должны надписать 450 конвертов. Таня надписывает 46 конвертов в час, а её подруга – 42 конверта. Сколько конвертов останется им подписать: а) через 2 ч работы? б) через 4 ч? в) через 5 ч?

Решение.

1) $46 + 42 = 88$ конвертов, подписывают Таня и подруга за 1 час.

2) $450 - 2 \cdot 88 = 274$ конвертов останется им подписать через 2 ч работы.

3) $450 - 4 \cdot 88 = 98$ конвертов останется им подписать через 4 ч работы.

4) $450 - 5 \cdot 88 = 10$ конвертов останется им подписать через 5 ч работы.

Ответ: а) 274; б) 98; в) 10 конвертов.

Задача № 4 [62, №285(а)]**.** Наташа и её подруга должны надписать 360 конвертов. Наташа надписывает 40 конвертов в час, а ее подруга 50 конвертов. За какое время они выполняют всю работу, если будут работать вместе?

Решение.

1) $40 + 50 = 90$ конвертов, надписывают Наташа и подруга за 1 час.

2) $360 : 90 = 6$ часов, время, за которое они выполняют всю работу, если будут работать вместе.

Ответ: 6 часов.

Задача № 5 [62, №902]**.** Таня, Наташа и Алёша упаковывают подарки. Таня может выполнить всю работу за 20 мин, если будет работать одна, Наташа – за 15 мин, а Алёша – за 12 мин. Какую часть работы выполнят они за одну минуту, работая вместе? Упакуют ли они половину всех подарков за 2 мин?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{20}$ – часть работы, которую выполняет Таня за 1 мин.

2) $\frac{1}{15}$ – часть работы, которую выполняет Наташа за 1 мин.

3) $\frac{1}{12}$ – часть работы, которую выполняет Алёша за 1 мин.

4) $\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\frac{3+4+5}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ – часть работы выполнят они за одну минуту, работая вместе.

5) $\frac{1}{5}\cdot 2=\frac{2}{5}<$ 0,5, значит, они не упакуют половину всех подарков за 2 мин.

Ответ: $\frac{1}{5}$**;** нет, не успеют.

Задача № 6 [62, №1079]**.** На птицеферму привезли корм, которого хватило бы уткам на 30 дней, а гусям – на 45 дней. Рассчитайте, хватит ли привезённого корма уткам и гусям вместе на 20 дней.

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{30}$ – часть корма, которую съедают утки за 1 день.

2) $\frac{1}{45}$ – часть корма, которую съедают гуси за 1 день.

3) $\frac{1}{30}+\frac{1}{45}=\frac{3+2}{90}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$ – часть корма, которую съедают гуси и утки за 1 день.

4) $\frac{1}{18}\cdot 20=\frac{10}{9}<1$ значит, привезённого корма хватит уткам и гусям вместе на 20 дней.

Ответ: да, хватит.

Задача № 7 [62, №297]**.** Отец и сын, работая вместе, покрасили забор длиной 168 м за 12 ч. Если бы отец красил забор один, он выполнил бы эту работу за 21 ч. За сколько часов покрасил бы этот забор сын?

Решение.

1) 168 : 21 = 8 (м) за один час красит отец.

2) 168 :12 = 14 (м) за один час красит отец и сын, работая вместе.

3) 14 – 8 = 6 (м) за один час красит сын.

4) 168 : 6 = 28 (ч) за это время покрасил бы забор сын, работая один.

Ответ: 28 часов.

Задача № 8 [62, №32]**.** Отец и сын, работая вместе, покрасили забор за 12 часов. Если бы отец красил забор один, он выполнил бы эту работу за 21 час. За сколько часов покрасил бы этот забор сын?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{12}$ – часть забора, которую за один час красит отец и сын, работая вместе.

2) $\frac{1}{21}$ – часть забора, которую за один час красит отец.

3) $\frac{1}{12}-\frac{1}{21}=\frac{7-4}{84}=\frac{1}{28}$ – часть забора, которую за один час красит сын.

4) $\frac{1}{\frac{1}{28}}=28$ часов, время, за которое покрасил бы забор сын, работая один.

Ответ: 28 часов.

Задача № 9 [62, №1081(а)]**.** Заготовленных материалов хватит для работы двух цехов в течение 10 дней, или одного первого цеха — в течение 30 дней. На сколько дней хватило бы этих материалов для работы одного второго цеха?

Решение.

Объём заготовленных материалов принимаем равным 1.

1) $\frac{1}{10}$ – часть материалов, которую тратят два цеха в день, работая вместе.

2) $\frac{1}{30}$ – часть материалов, которую тратит первый цех в день, работая один.

3) $\frac{1}{10}-\frac{1}{30}=\frac{3-1}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ – часть материалов, которую тратит второй цех в день, работая один.

4) $\frac{1}{\frac{1}{15}}=15$ дней, время, на которое хватило бы этих материалов для работы одного второго цеха.

Ответ: 15 дней.

Задача № 10 [68, №437]**.** Коля и Миша, работая вместе, выполнили сортировку газет за 4 минуты. Коля может выполнить это задание на 6 минут быстрее Миши. За сколько минут Коля выполнит это задание, работая один?

Решение.

Объём работы принимаем равным 1.

Пусть x – время сортировки газет Колей,

$x+6$ – время сортировки газет Мишей,

4 мин – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда Коли,

$\frac{1}{x+6}$ – производительность труда Миши,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{x+6+x}{x\cdot(x+6)}=\frac{2x+6}{x\cdot(x+6)}$ – совместная производительность труда.

Значит $\frac{x\cdot(x+6)}{2x+6}=4$ – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

$\Rightarrow\ x^2+6\text{x}=8\text{x}+24\Rightarrow$

$\Rightarrow\ x^2-2\text{x}-24=0.$

$x_1=6$,

$x_2=-4$- не удовлетворяет условию.

Ответ: 6 минут.

Задача № 11 [62, С. 286, №5]**.** Зрители могут выйти из кинозала через узкие и широкие двери. Если открыты только узкие двери, то все зрители выходят за 15 мин. Если открыты только широкие двери, то все зрители выходят за 10 мин. За какое время зал освободиться, если открыты одновременно и те и другие двери?

Решение.

Количество зрителей примем за 1.

Пусть *15 мин* – время, за которое освободится зал, если открыты только узкие двери,

10 мин – время, за которое освободится зал, если открыты только широкие двери,

Тогда $\frac{1}{15}$ – часть, на которую освобождается зал в минуту, если открыты только узкие двери,

$\frac{1}{10}$ – часть, на которую освобождается зал в минуту, если открыты только широкие двери,

$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{2+3}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ – часть, на которую освобождается зал в минуту, если открыты одновременно и те и другие двери.

4) $\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$ минут, за это время зал освободиться, если открыты одновременно и те и другие двери.

Ответ: 6 минут.

Задача № 12 [62, С. 287, №5]**.** Зрители могут выйти из кинозала через узкие и широкие двери. Если открыты одновременно те и другие двери, то зал освободится через 4 мин. Если открыты только узкие двери, то все зрители выйдут через 12 мин. За какое время все зрители выйдут из кинозала, если открыты только широкие двери?

Решение.

Количество зрителей примем за 1.

Пусть *12 мин* – время, за которое освободится зал, если открыты только узкие двери,

4 мин – время, за которое освободится зал, если одновременно и те и другие двери,

Тогда $\frac{1}{12}$ – часть, на которую освобождается зал в минуту, если открыты только узкие двери,

$\frac{1}{4}$ – часть, на которую освобождается зал в минуту, если открыты одновременно и те и другие двери,

$\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ – часть, на которую освобождается зал в минуту, если открыты только широкие двери.

4) $\frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$ минут, за это время зал освободиться, если открыты только широкие двери.

Ответ: 6 минут.

Задача № 13 [68, №479]**.** Два ученика 9 класса вместе расчистили школьный каток за 20 мин. В следующий раз один из них расчистил $\frac{2}{3}$ площади катка, а после этого его сменил другой и закончил работу. При этом каток был расчищен за 40 мин. За какое время может расчистить каток каждый из школьников, работая отдельно?

Решение.

Количество зрителей примем за 1.

Пусть *20 мин* – время, за которое два ученика 9 класса вместе расчистили школьный каток,

x мин – время, за которое первый ученик расчистит весь каток,

y мин – время, за которое второй ученик расчистит весь каток,

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность первого ученика,

$\frac{1}{y}$ – производительность второго ученика,

Значит, *первое уравнение*: $20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1,$

Пусть $\frac{2x}{3}$ ч - первый ученик работал один.

Тогда $\frac{y}{3}$ ч - второй ученик работал один.

Значит, *второе уравнение*: $\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}=40.$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1,\\ \frac{2x}{3}+\frac{y}{3}=40;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}20\cdot\left(\frac{x+y}{xy}\right)=1,\\ 2x+y=120;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}20x+20y=xy,\\ y=120-2x;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}20x+20(120-2x)=x(120-2x),\\ y=120-2x;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}20x+240-40x=120x-2x^2,\\ y=120-2x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-70x+1200=0,\\ y=120-2x;\end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $x^2-70x+1200=0$, по т. Виета:

$x_1 = 30$,

$x_2 = 40$.

Значит, $y_1 = 60$, $y_2 = 40$.

Ответ: 2 решения: $x_1 = 30$, $y_1 = 60$; $x_2 = 40$, $y_2 = 40$.

Старинные задачи на совместную работу

Задача № 1 [62, №1091]**.** (*Брахмагупта, Индия, около 600 г.*) Слониха, слонёнок и слон пришли к озеру, чтобы напиться воды. Слон может выпить озеро за 3 часа, слониха – за 5 часов, а слонёнок – за 6 часов. За сколько времени они все вместе выпьют озеро?

Решение.

В данной задаче объём озера нам неизвестен. Значит, объём озера принимаем равным 1.

Пусть 3 – время, за которое слон может выпить озеро,

5 – время, за которое слониха может выпить озеро,

6 – время, за которое слонёнок может выпить озеро.

Тогда $\frac{1}{3}$ – выпивает слон за 1 час,

$\frac{1}{5}$ – выпивает слониха за 1 час,

$\frac{1}{6}$ – выпивает слонёнок за 1 час.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{10+6+5}{30}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$ – выпивают слон, слониха и слонёнок за 1 час.

$\frac{1}{\frac{7}{10}}= 1\cdot\frac{10}{7}=1\ \frac{3}{7}$ (ч) – время, за которое они вместе выпьют озеро.

Ответ: слон, слониха и слонёнок вместе выпьют озеро за $1\ \frac{3}{7}$ часа.

Задача № 2 [62, №1095]**.** (Древняя Греция, Герон Александрийский, I в. До н. э.) Бассейн может заполняться через четыре фонтана. Если открыть только первый фонтан, бассейн наполнится за день, только второй - за два дня, только третий - за три дня, только четвертый - за четыре дня. За какое время наполнится бассейн, если открыть все четыре крана?

Решение.

В данной задаче объём бассейна принимаем равным 1.

Пусть *1 день* – время, за которое первый фонтан может наполнить бассейн,

2 дня – время, за которое второй фонтан может наполнить бассейн,

3 дня – время, за которое третий фонтан может наполнить бассейн,

4 дня – время, за которое четвертый фонтан может наполнить бассейн.

Тогда $\frac{1}{1}$ – часть бассейна наполняет первый фонтан за 1 день,

$\frac{1}{2}$ – часть бассейна наполняет второй фонтан за 1 день,

$\frac{1}{3}$ – часть бассейна наполняет второй фонтан за 1 день,

$\frac{1}{4}$ – часть бассейна наполняет второй фонтан за 1 день.

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}= \frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{12}$ часть, которую наполнят все 4 фонтана за один день.

$\frac{1}{\frac{25}{12}}=\frac{12}{25}$ (дня) – время, за которое они вместе выпьют озеро.

Переведём в часы: $\frac{12}{25}\cdot 24=11,52$ (ч)

Ответ: слон, слониха и слонёнок вместе выпьют озеро за 11,52 часа.

Выводы по второй главе

В данной главе получили следующие результаты:

1. Выполнен анализ программ, школьных учебников и учебных пособий по математике для общеобразовательных школ, на наличие задач на совместную работу.
2. Составлена система упражнений по теме *«Задачи на совместную работу»* для учеников 5-9 классов. Данная система упражнений может быть использована для подготовки к ГИА.
3. Выполнено решение системы упражнений по теме *«Задачи на совместную работу»* для учеников 5-9 классов различными способами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрим выполнение задач, поставленных во введении к данной дипломной работе:

1. Проанализирован понятие задачи в школьном курсе математики.
2. Сформулировано понятие задачи на совместную работу в школьном курсе математики.
3. Выделены этапы процесса решения задач на совместную работу.
4. Проанализирован опыт работы учителей по теме исследования.
5. Проведён анализ учебников математики и алгебры 5-9 классов.
6. Определена методика обучения решению задач на совместную работу в школьном курсе математики.

Таким образом, задачи на совместную работу содержат в себе огромный дидактический потенциал.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балл Г.А. Теория учебных задач. – М.: Педагогика, 1990.

2. Виленкин Н.Я. Математика. 5 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 280 с.: ил.

3. Виленкин Н.Я. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 288 с.: ил.

4. Герасимова С. Н. Фестиваль «Открытый урок» [Электронный ресурс] : многопредмет. науч. журн. – Электрон. журн. – М: ИД «Первое сентября» – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/590890/, свободный. – Загл. с экрана.

5. Дорофеев Г.В. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суфорова, Е.А. Бунимович и др. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 287 с. : ил.

6. Дорофеев Г.В. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суфорова, Е.А. Бунимович и др. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2016. – 320 с. : ил.

7. Дорофеев Г.В. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суфорова, Е.А. Бунимович и др. – 5-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 304 с. : ил.

8. Дорофеев Г.В. Математика. 5 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др. ; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 12-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 303 с.: ил.

9. Дорофеев Г.В. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др. ; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил.

10. Зубарева И.И. Математика. 5 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 270 с. : ил.

11. Зубарева И.И. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2014. – 264 с. : ил.

12. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: Учеб.пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский.- 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 386 с.

13. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс : учеб.дляобщеоразоват. Учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 240 с.: ил.

14. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс : учеб.для общеоразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 271 с. : ил.

15. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс : учеб.дляобщеоразоват. Учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2000. – 272 с. : ил.

16. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для стдентов пед. ин-тов по физ. – мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.: ил.

17. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 17-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2013. — 271 с. : ил.

18. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 12-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2010. — 271 с. : ил.

19. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 12-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2010. — 223 с. : ил.

20. Ожегов С. И. Толковый словарь русского языка / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова. − 4-е изд., доп. − Москва : Азбуковник, 2000. – 940 с.

21. Осипова О. В. Фестиваль «Открытый урок» [Электронный ресурс] : многопредмет. науч. журн. – Электрон. журн. – М: ИД «Первое сентября» – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/522202/, свободный. – Загл. с экрана.

22. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам / ОДОБРЕНО Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 8 апреля 2015 г. № 1/15) ????

23. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб.пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. – Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 1999. – 208с.

24. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев.- 2-е изд., - М.: Просвещение, 2005. – С. 3 - 75.

25. Саранцев, Г. И. Функции задач в процессе обучения / Г.И. Саранцев, Е.Ю. Миганова // Педагогика. - 2001.- №9.- С. 19-24.

26. Стефанова Н.Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с. : ил.

27. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2011. – 48с.

28. Федеральный компонент государственного стандарта основного общего образования по математике / Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – 2-е изд. стереотип. – М.: Дрофа, 2008. – 128 с.

29. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов сред. шк. / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.: ил.

30. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ учебных задач. - М.: Педагогика, 1977. – С. 67 – 161.

31. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика. – М.: Школа-пресс, 2002.

32. Чаплыгин В.Ф. Некоторые методические соображения по решению текстовых задач // Математика в школе. – 2000. - №4. - С.28.

33. Чаплыгин В.Ф. Некоторые методические соображения по решению текстовых задач // Математика в школе. – 2000. - №4. - С.29.

34. Чаплыгин В.Ф. Некоторые методические соображения по решению текстовых задач // Математика в школе. – 2000. - №4. - С. 29.

35. Чуракова Н. А. Фестиваль «Открытый урок» [Электронный ресурс] : многопредмет. науч. журн. – Электрон. журн. – М: ИД «Первое сентября» – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/506957/, свободный. – Загл. с экрана.

36. Шевкин А.В. О задачах на «работу» и не только о них / А.В. Шевкин // Математика в школе. -1993. – № 6. – С. 16-18.

37. Щепоткин А.А. Алгоритм решения задач на тему «работа» / А.А. Щепоткин // Математика в школе. -1993. – № 2. – С.