МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ**

Студент Ю.С. Канаева ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель д.п.н., профессор С.Н. Дорофеев ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант М.В. Емелина ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью дипломной работы является выявление методических особенностей обучения школьников решению планиметрических задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники» и разработать систему задач, способствующих формированию умения решать планиметрические задачи по данной теме.

Данная тема является одной из основных в курсе планиметрии и изучается в 7-9 классах. При изучении темы «Вписанные и описанные многоугольники» учащиеся знакомятся с новыми понятиями, изучают теоремы, учатся решать задачи по данной теме.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Объектом дипломной работы является процесс обучения геометрии в основной школе.

Предметом дипломной работы являются методические особенности обучения решению планиметрических задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники» в курсе геометрии основной школы.

В **Главе I** изучается понятие логико-математического анализа тем школьного курса математики. Рассмотрены основные требования к знаниям учащихся и проведён анализ теоретического и практического материала по данной теме.

Глава II посвящена методическим особенностям обучения решению планиметрических задач. В ней рассмотрены формы, методы и средства обучения, а также методические рекомендации по обучению вписанных и описанных многоугольников.

Список литературы содержит 35 наименований.

Объем работы составляет 58 страниц, в том числе приложения – 2 страницы.

ABSTRACT

The title of the graduation work is « Teaching methodology of solving planimetric tasks on the topic «Inscribed and circumscribed polygons" in the curriculum of geometry at secondary school».

The aim of the graduation work is to reveal the methodological peculiarities of teaching pupils to solve planimetric tasks on the topic «Inscribed and circumscribed polygons» and to develop a system of tasks on the topic of the research.

This topic is one of the most important aspects in the curriculum of planimetry, and it is studied in 7-9 classes. While studying the topic «Inscribed and circumscribed polygons» students get an insight into the new concepts, study theorems and learn to solve tasks on this topic.

The object of the graduation work is the process of teaching geometry at secondary school.

The subject of the research is the methodological peculiarities of teaching how to solve planimetric tasks on the topic «Inscribed and circumscribed polygons» in the curriculum of geometry at secondary school.

In Chapter I, the concept of logical and mathematical analysis of the school curriculum mathematics topics is examined. The main requirements to pupils' knowledge are considered, and the analysis of theoretical and practical foundations on this topic is carried out as well.

Chapter II is devoted to the methodological peculiarities of teaching pupils to solve planimetric tasks. This chapter gives a full coverage to the forms, methods and training tools as well as the methodological recommendations with regard to teaching inscribed and circumscribed polygons.

The graduation work consists of an explanatory note on pages, 5 tables, the list of 35 references including 5 foreign sources, 25 figures, 2 appendices.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Одним из самых сложных предметов в школьном курсе математики считается геометрия. Благодаря изучению геометрии, учащиеся приобретают различные навыки и умения, развивают логическое мышление и пространственное воображение.

В книге В.Г. Чичигина «Методика преподавания геометрии» [28] автор выделяет три цели преподавания геометрии:

- образовательные;
- воспитательные;
- практические.

Образовательные цели включают в себя объединение и обобщение изучаемых понятий, научиться решать задачи и отчетливо понимать, что дано, что надо найти в задаче и как это сделать. Под воспитательными целями автор подразумевает развитие мировоззрения, воображения, внимания и аккуратности при выполнении работы. И практические цели заключаются в том, чтобы учащиеся в окружающей жизни могли распознавать математическую сущность и применяли полученные знания и навыки в повседневной жизни.

Анализ результатов ОГЭ и ЕГЭ по математике показывает что самыми сложными задачами для учашихся являются планиметрические задачи. Большинство учащихся не умеют правильно строить геометрические чертежи к задачам, выдвигать гипотезы для решения задач, а также доказывать их.

В курсе геометрии 7-9 классов изучаются геометрические фигуры на плоскости, основное внимание уделяется изучению многоугольников и их свойств.

Учение о многоугольниках ведет еще из глубокой древности. Часто такие фигуры встречались в орнаментах, которые обнаружили археологи, в том числе были фигуры, вписанные в окружность. Но если древние художники создавали орнаменты без всякой научной теории, то позднее многоугольники стали предметом внимательного изучения. Своей красотой форм и изящностью привлекали к себе внимание многих лучших умов человечества. Учение о правильных многоугольниках зародилось в школе Пифагора [16].

Как построить эти фигуры интересовало многих учёных, практиков, а также представителей искусства и различных ремесленных профессий.

При изучении темы «Вписанные и описанные многоугольники» учащиеся знакомятся с новыми понятиями, изучают теоремы, учатся решать задачи по данной теме.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения школьников реешнию планиметрических задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники».

Объект исследования: процесс обучения школьников геометрия в основной школе.

Предмет исследования: методические особенности обучения реешнию планиметрических задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники» в курсе геометрии основной школы.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения школьников реешению планиметрических задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники» в курсе геометрии основной школы и разработать системы задач по теме исследования.

Задачи исследования:

1. Проанализировать школьные учебники по данной теме.

2. Представить анализ теоретического и задачного материалов темы «Вписанные и описанные многоугольники» в учебниках разных авторов.

3. Выделить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Вписаные и описанные многогоугольники».

4. Выявить формы, методы и средства обучения решению геометрических задач.

5. Представить методические рекомендации по обучению школьников по теме «Вписанные и описанные многоугольники» в курсе геометрии основной школы.

6. Составить систему задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники».

Методы исследования: изучение и анализ школьных программ, учебной литературы и методических пособий по теме работы, решение примеров.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

В первой главе изучается понятие логико-математического анализа тем школьного курса математики. Рассмотрены основные требования к знаниям учащихся и проведён анализ теоретического и практического материала по данной теме.

Вторая глава посвящена методическим особенностям обучения решению планиметрических задач. В ней рассмотрены формы, методы и средства обучения, а также методические рекомендации по обучению вписанных и описанных многоугольников.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы состоит из 35 наименований.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Понятие логико-математического анализа тем школьного курса математики на примере содержания темы «Вписанные и описанные многоугольники»

Логико-математический анализ темы – знание целей обучения содержанию темы и основных результатов обучения, также это знание того, каким объектам и понятиям даются определения, знания формулировок определений.

Основной целью логико-математического анализа является выработка умения решать основные и типовые задачи какой-либо темы. А также дать знания методов решения задач, используемых в школе.

Выделяются два значимых блока в учебном материале:

- теоретический материал
- различные математические задачи

Теоретический материал основан на понятиях и определениях этих понятий:

- утверждениях (теоремах, признаках, свойствах и т.д.),
- алгоритмах (формулах, правилах и т.д.),
- различных математических способах, например, аксиоматическом – прямое и косвенное доказательство, векторным методом, координатным, методом неравенств и т.д.)

Математические задачи можно разделить на две группы по методу их применения в учебном процессе. Первая группа – это математические задачи прямого использования изученных теорем, формирование понятий непосредственного применения, закрепление алгоритмов. Вторая группа — это задачи для выявления и использования математических методов.

Такие задачи не требуют особых усилий для поиска их решений. Самое решение, в основном, находится с помощью не более двух шагов. Задачи такого типа являются средством обучения математике. В современной школе задачи такого типа встречаются очень часто.

Такая трактовка учебного материала даёт возможность анализировать логическую структуру объектов, помогает различать определения понятий, позволяет устанавливать логические и математические различия (если такое возможно), что способствует развитию эффективного метода обучения, как по времени, так и по содержанию, обучая математике в целом, а также ее отдельных тем.

Е.И. Лященко в учебном пособии [18, с. 36] пишет: «Логико-математический анализ не предполагает формулировку целей изучения того или иного компонента содержания, так как это можно сделать только после определения целей изучения темы».

Учитель при изучении учебника для конкретного класса должен ответить себе на следующие вопросы:

1. Какие вводятся новые понятия, объекты?

2. Даны ли определения?

3. К какой структуре определений может быть отнесено это определение?

4. Определены ли ранее определения с такой структурой или же мы работаем с новой структурой?

5. Какие познавательные и учебные мероприятия могут быть выполнены, чтобы выявить структуру определения и его применение?

6. Какой обширный материал возможен для раскрытия всех операций и действий?

Рассмотрим логико-математический анализ темы «Вписанные и описанные многоугольники».

Материал в теме «Вписанные и описанные многоугольники» организован на индуктивной основе, так как всем фигурам, вводимым в теме, даются определения.

В самом начале темы дается определение вписанному и описанному многоугольнику, также приводятся условия их существования. Далее приводятся весьма громоздкие формулы нахождения радиусов окружностей.

В данной теме доказываются следующие теоремы: «О сумме противоположных углов вписанного четырёхугольника», «О сумме противоположных сторон описанного четырёхугольника», «Об окружности, вписанной в треугольник», «Об окружности, описанной около треугольника», «Об окружности, описанной около правильного многоугольника», «Об окружности, вписанной в правильный многоугольник».

В основе данных теорем является свойство опирающихся на дуги окружностей углов, оно же используется и как прием доказательства. От этого свойства переходим к следующему звену и т.д. и индуктивно делаем общий вывод. Аналогичный прием и в следующей теореме. Поэтому необходимо раскрыть операционный состав приема и суть умозаключения по индукции, чтобы были усвоены и действия, приводящие к обоснованию утверждения.

Основной учебной задачей темы, как вытекает из целей обучения теме и анализа содержания учебного материала, может быть формирование нового понимания геометрической фигуры как части плоскости и раскрытие некоторых ее конструктивных и метрических свойств на основе решения математических задач.

При решении этой учебной задачи можно решить следующие подзадачи: «Раскрыть логическую структуру взаимосвязи определений фигур темы от ломаной до правильного многоугольника. Результатом решения этой подзадачи будет «цепочка» взаимосвязанных определений и умения конструировать их, выделяя родовое свойство и видовые отличия», «Раскрыть структуру приема доказательства утверждений по индукции. Результат решения — овладение последовательностью действий, составляющих прием доказательства по индукции», «Раскрыть соотношение между линейными и угловыми элементами правильных многоугольников и радиусами вписанной и описанной окружностей и конкретизировать его при решении математических задач. Результат решения — последовательность действий при применении формул к решению математических задач», «Раскрыть специфику получения формулы длины окружности (на основе интуитивного понимания понятия «близко» между периметрами вписанного и описанного правильных многоугольников) и применить ее к нахождению длин окружностей и их частей. Результат решения — понимание особого приема доказательства теоремы и последовательность операций по применению формулы в аналогичных задачах», «Овладеть приемами поиска решения математических задач путем использования общих приемов решения задач на доказательство и конкретных эвристик, использующих выведенные в теме свойства фигур. Результат решения — актуализированные общие приемы поиска решения задач на доказательство и специфические эвристики».

§ 2. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Вписанные и описанные многоугольники»

На основе федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования [27] определяются следующие требования к усвоению учащимися образовательной программы основного общего образования.

Требования к *предметным результатам освоения базового курса* математики должны отражать:

1) владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их свойствами;

2) формирование умения различать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;

3) применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

Требования к *предметным результатам освоения углубленного курса* математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

1) формирование представлений о доказательствах для обоснования математических утверждений;

2) формирование знаний основных теорем, формул и умения их применять;

3) формирование умения доказывать теоремы;

В сборнике рабочих программ 7-9 класса Бурмистровой Т.А. [8] по геометрии, указаны основные требования к знаниям и умениям учащихся, которыми они должны овладеть при изучении темы «Вписанные и описанные многоугольники».

Рассмотрим следующие требования по программе Бурмистровой Т.А. [8] по учебнику Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев за 8 класс [5]:

- формулировать определения окружностей, вписанной в многоугольник и описанной около многоугольника;

- формулировать и доказывать теоремы: об окружности, вписанной в треугольник, об окружности, описанной около треугольника, о свойстве сторон описанного четырехугольника, о свойстве углов вписанного в четырехугольник;

- уметь решать задачи на вычисление, доказательство и построение, связанные с окружностью, вписанными и описанными треугольниками и четырехугольниками.

Требования Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев за 9 класс [5]:

- формулировать и доказывать теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него;

-выводить и использовать формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности.

Обучаясь по учебнику А.В. Погорелова «Геометрия,7» [25] в сборнике программ сформулированы следующие требования ученика, которые он должен получить:

- уметь объяснить, что такое окружность, описанная около треугольника и вписанная в него;

- формулировать и доказывать теоремы о центре окружности, описанной около треугольника и о центре окружности, вписанной в треугольник;

- уметь решать простейшие задачи на построение.

Требования А.В. Погорелова «Геометрия,9» [25]:

- уметь объяснять, что такое вписанные и описанные многоугольники;

- формулировать и доказывать теорему о том, что правильный выпуклый многоугольник является описанным и вписанным;

- уметь строить вписанные в окружность и описанные около него правильные шестиугольник, четырёхугольник (квадрат), треугольник.

- строить по вписанному правильному n-угольнику правильный 2n-угольник;

Обучаясь по учебнику А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Т. Г. Ходот «Геометрия, 9» [3] в сборнике рабочих программ Бурмистровой Т.А. указаны следующие требования:

- уметь формулировать определение описанной вокруг многоугольника окружности и вписанной в многоугольник окружности;

- приводить примеры многоугольников, имеющих описанную окружность и вписанную окружность и не имеющих её;

- уметь доказывать теоремы об окружности, описанной вокруг треугольника и вписанной в него.

- уметь выражать радиус описанной вокруг треугольника окружности через сторону треугольника и синус противолежащего угла;

- уметь выражать площадь треугольника через периметр и радиус вписанной в него окружности;

§ 3. Анализ содержания теоретического материала темы «Вписанные и описанные многоугольники» в учебниках разных авторов.

Тема «Вписанные и описанные многоугольники» в курсе геометрии 7-9 классов является одной из основных. Содержание и структура учебника очень важно для учащихся, так как в каких-то учебниках материал дается более доступно, и ученики воспринимают его легко, а в других, учебные тексты воспринимаются сложнее, из-за этого интерес к учебному процессу у учащихся падает, так как не могут выделить для себя важную информацию.

Проанализируем запретить учебу по три учебника геометрии 7-9 классов с целью анализа последовательности изложения материалы по теме « Вписанные и описанные многоугольники». Для анализа содержания теоретического материала возьмем наиболее распространенные учебники по геометрии: *А.В. Погорелов [25], Л.С. Атанасян и др. [5], А.Д. Александров и др. [3]*

Представлена таблица с последовательностью изложения материала по теме «Вписанные и описанные многоугольники» и приведено количество часов, отведённое на данную тему (Приложение 1), а также рассмотрим как каждый из авторов вводит понятия данной темы (Приложение 2).

1. Учебник *Л.С. Атанасян В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев [5],* предназначен для учащихся основной школы. Впервые тема многоугольники встречается у авторов в 8 классе, где сразу же дается его определение.

В конце 8 класса тема «Вписанные и описанные окружности» рассматриваются в двух параграфах в главе «Окружность»

Л.С. Атанасян сразу вводит понятие вписанной и описанной окружности в многоугольник.

Затем в учебнике рассматривается теорема об окружности, вписанной в треугольник и рассматриваются свойства сторон четырехугольника.

После рассмотрения вписанной окружности в многоугольник, автор переходит к определению описанной окружности около многоугольника и рассматривают теорему об окружности, которая описана около треугольника.

На этом теоретический материал данной темы окончен и авторы учебника предлагают учащимся закрепить материал с помощью решения задач.

К теме «Вписанные и описанные многоугольники» Л.С. Атанасян и его соавторы [5] возвращаются в 9 классе. В главе «Длина окружности и площадь круга» рассматриваются два параграфа «Окружность, описанная около правильного многоугольника» и «Окружность, вписанная в правильный многоугольник». Сначала авторы напоминают какая окружность называется описанной около многоугольника, а затем доказывают теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

В следующем параграфе идёт напоминание определения об окружности, которая вписана в многоугольник и доказывается теорема об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Затем рассматриваются два следствия, которые даны без доказательств.

Далее Л.С. Атанасян и соавторы выводят формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности и знакомят учащихся с построением правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Приводятся два примера, один на построение шестиугольника, другой на 2n-угольник.

Теория изложена кратко и подробно, не смотря на это, изучаемый материал доступен для учеников с разным уровнем подготовки по предмету. Что касается практического материалы, то для закрепления учащимся предлагаются задачи, которые находятся сразу же после параграфа.

2. Учебник *А.В. Погорелов [25]* предназначен также для учащихся основной школы. Впервые тема «Вписанные и описанные многоугольники» встречаются в конце 7 класса, в главе «Геометрические построения» рассматриваются два параграфа «Окружность, описанная около треугольника» и «Окружность, вписанная в треугольник». Сначала автор дает определение окружности, описанной около треугольника, а затем рассматривает теорему с доказательством о центре окружности, описанной около треугольника.

В следующем параграфе рассматривается «Окружность, вписанная в треугольник». Аналогично дается определение окружности, вписанной в треугольник и доказывается теоорема.

Для примера А.В. Погорелов [25] разбирает задачи с доказательством.

На этом изучение данной темы в 7 классе заканчивается, и автор возвращается к ней потом только в 9 классе.

Для изучения темы «Многоугольники» в учебнике под редакцией А.В. Погорелов посвящается целая глава. В этой главе автор знакомит учащихся с выпуклыми и правильными многоугольниками, учит построению правильных многоугольников, особое внимание уделяет вписанным и описанным четырехугольникам.

В параграфе «Правильные многоугольники автор дает определение многоугольника, вписанного в окружность и описанного около него. Далее идет теорема с доказательством.

В следующем параграфе автор выводит формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников. Затем А.В. Погорелов кратко объясняет, как построить правильные вписанные в окружность треугольники, четырёхугольники и правильные многоугольники и 2n-угольники, описанные около окружности.

В параграфе «Вписанные и описанные четырехугольники» приводятся две теоремы с доказательством. Обе теоремы выражают свойства и признаки вписанного четырехугольника и описанного четырехугольника.

Для закрепления материала в коце главы автор предлагает учащимся ответить на контрольные вопросы и порешать задачи.

Отметим, что только у А.В. Погорелова [25] выделены два параграфа для подробного изучения темы: «Окружность, вписанная в треугольник», и «Окружность, описанная около треугольника».

Что касается практического материала, то задач достаточно мало, поэтому учителю придется использовать дополнительный методический материал, для актуализации знаний учащихся. В учебнике автор использует интересный подход к усвоению темы, к некоторым задачам автор даёт подсказки, например, подписан пункт параграфа, к которому относится эта задачи, либо указывает задачу,которая схожа с ней.

3. *Учебник А.Д. Александров А.Л. Вернер, В.И. Рыжик [3]* предназначен для учащихся основной школы, а также есть учебники, которые предназначены для углубленного изучения геометрии.

Знакомство учащихся с многоугольниками начинается с 8 класса. В учебнике для этой темы выделена целая глава в которой изучаются выпуклые и невыпуклые многоугольники, четырехугольники, правильные многоугольники и различные многоугольные фигуры.

Тема «Вписанные и описанные многоугольники» встречаются в конце 9 класса в главе «Геометрия круга» и рассматриваются два параграфа.

Сначала учащихся знакомят с окружностью, описанной вокруг многоугольника и приводится теорема об окружности, описанной вокруг треугольника.

В следующем параграфе говорится об окружности, вписанной в многоугольник. Авторы дают определение и доказывают теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Отметим, что в двух параграфах рассматриваются формулы радиуса окружности, описанной вокруг треугольника и вписанной.

В учебнике под редакцией А.Д. Александров и др. в конце каждого параграфа есть вопросы для самоконтроля, которые позволяют выделить необходимую информацию из текста. Для того чтобы раскрыть тему полнее, автор добавляет к некоторым параграфам дополнения, что позволяет учащимся не только ознакомиться с основными понятиями темы, но и при желании ознакомиться с дополнительным материалом.

Достаточно богатый задачный материал, где выделено несколько рубрик, такие как: «дополняем теорию», «рисуем», «исследуем», «доказываем», «планируем», «применяем геометрию». В учебниках после каждой главы даются задачи повторение и предлагаются задачи под рубрикой «Применяем компьютер».

В статье «Сравнительный анализ школьных учебников геометрии» автор Д.Н. Шеховцова [30] выделяет *принцип наглядности* всех авторов учебников, так:

1) учебник *А.Д. Александров и др.* представляет возможность учащимся обрабатывать текстовую информацию, переводя ее на язык чертежей, рисунков и схем, выполняя эти действия без сторонней помощи. Количество рисунков в учебнике составляет не более 19% от всего объема информации.

2) учебник *А.В. Погорелова* в первую очередь ставит развитие логического мышления у школьников, поэтому около 23% в его учебнике занимают рисунки от общего объема информации.

3) учебник *Л.С. Атанасяна и др.* фиксирует своё внимание на развитии умений и навыков учащихся, на простоту изложения материала, поэтому учебник включает в себя большое количество рисунков и чертежей.

Таким образом, можно сделать вывод, что логика построения темы «Вписанные и описанные многоугольники отличается в учебниках разных авторов.

В учебниках Атанасяна и Погорелова теоретический материал изложен подробнее и доступнее для учащихся, чем у Александрова. В учебнике А.В. Погорелова большое количество рисунков и чертежей в теоретической части.

Практические задания в теме «Вписанные и оисанные многоугольники»,
предлагаемые в учебниках Л.С. Атанасяна [5] и А.Д. Александрова [3] в отличие от учебника под редакцией А.В. Погорелова [25] располагаются в конце каждого пункта после изученного материала. В учебнике А.В. Погорелова интересный подход к освоению темы, автор для развития логического мышления у учащихся добавляет готовые задачи с решениями. Учебники значительно отличаются по количеству и уровню задач.

Таким образом, действующих учебников в настоящее время много. Авторы учебников стараются внести что-то новое, чтобы отличало их от других учебников.

§ 4. Анализ практического материала по теме «Вписанные и описанные многоугольники» в учебниках разных авторов.

Изучив тему «Вписанные и описанные многоугольники» можно заметить, что основные геометрические фигуры, изучаемые в школе, это треугольники и четырёхугольники.

Проанализировав задачный материал в учебниках геометрии основной школы, выделим основные типы задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники»:

1. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в треугольник»;

2. Решение задач по теме «Окружность, описанная около треугольника»;

3. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в правильный треугольник»;

4. Решение задач по теме «Окружность, описанная около правильного треугольника»;

5. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник»;

6. Решение задач по теме «Окружность, описанная около прямоугольного треугольника»;

7. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник»;

8. Решение задач по теме «Окружность, описанная около равнобедренного треугольника»;

9. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в квадрат»;

10. Решение задач по теме «Окружность, описанная около квадрата»;

11. Решение задач по теме «Окружности, вписанная в ромб»;

12. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в трапецию»;

13. Решение задач по теме «Окружность, описанная около трапеции»;

14. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в четырёхугольник»;

15. Решение задач по теме «Окружность, описанная около четырёхугольника»;

16. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в правильный шестиугольник»;

17. Решение задач по теме «Окружность, описанная около правильного шестиугольника».

Рассмотрим примеры задач по основным типам, которые мы выделили выше.

I. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в треугольник».

1. В треугольнике ABC $AC = 4, BC = 3$, угол $C = 90°$. Найдите радиус вписанной окружности.

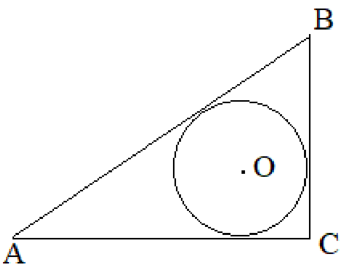


Рис.1. Рисунок к задаче №1

Решение: Для решения этой задачи воспользуемся формулой радиуса окружности, вписанной в треугольник:

$$\frac{2S}{a+b+c}$$

Две стороны нам известны(катеты), можем вычислить третью(гипотенузу) и найдём площадь.

По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + AB^2}$

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$AB = 5;$$

Найдем площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} * AC * BC = \frac{1}{2} * 4 * 3 = 6;$

Таким образом, мы нашли все стороны и площадь треугольника, теперь подставим наши значения в формулу:

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2*6}{4+3+5} = \frac{12}{12} = 1$$

Ответ: 1 см.

2. Площадь треугольника равна 54, а его периметр 36. Найдите радиус вписанной окружности.

Решение: Задачу будем решать по той же формуле, что использовали выше.

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2*54}{36} = \frac{108}{36} = 3$$

Ответ: 3 см.

3. «В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и CA в точках P, Q и R. Найдите AP, PB, BQ, QC, RA, если $AB = 10$ см, BC = 12 см, $CA = 5$ см» [5, с. 185].

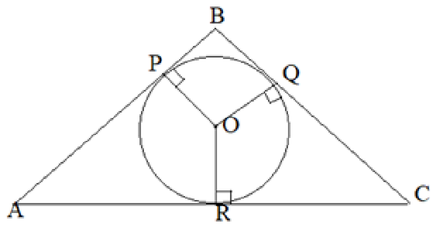


Рис.2. Рисунок к задаче №3

Решение: Так как $PB = BQ, QC = CR, AR = AP$ (по свойству касательных отрезков). Пусть $PB = x$, тогда $QC = 12 - x$, а $AP = 10 - x$, $AR + RC = 5$ отсюда получаем уравнение $12 - x + 10 - x = 5$

$$22 - 2x = 5$$

$$-2x = -17$$

$$x = 8{,}5$$

Найдем $QC = CR = 12 - 8{,}5 = 3{,}5$ и $AP = AR = 10 - 8{,}5 = 1{,}5$.

Ответ: $PB = BQ = 8{,}5$, $QC = CR = 3{,}5$, $AR = AP = 1{,}5$.

II. Решение задач по теме «Окружность, описанная около треугольника».

4. «Треугольник ABC вписан в окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$ см, а центр окружности удален от этой стороны на 5 см» [5, с. 185].

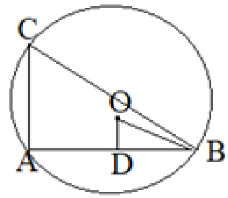


Рис.3. Рисунок к задаче №4

Решение: Так как OD перпендикулярен AB, то D является серединой AB и DB. Значит AD и $DB = 12$ см. По теореме Пифагора найдем OB.

$$OB = \sqrt{OD^2 + BD^2};$$

$OB = \sqrt{5^2 + 12^2}$;

$OB = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169}$;

$OB = 13$ см.

Ответ: 13 см.

5. «Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10 см, 10 см, 12 см» [16, с. 68].

Решение: Найдем для начала полупериметр треугольника: $p = \frac{10+10+12}{2} = \frac{32}{2} = 16$.

Теперь по формуле Герона найдем площадь треугольника:$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = \sqrt{16*6*6*4} = \sqrt{2304}$. Отсюда следует, что $S = 48$.

Так как нам всё известно теперь по формуле мы сможем найти радиус окружности:$R = \frac{abc}{4S} = \frac{10*10*12}{4*48} = \frac{1200}{192} = 6{,}25$ см.

Ответ: 6,25 см.

III. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в правильный треугольник».

6. «В правильном треугольнике ABC сторона $AB = 9$ см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC» [21].

Решение: Так как треугольник ABC правильный, то радиус окружности, вписанной в этот треугольник мы найдем по формуле: $r = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ см.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см.

7. «Найти радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, если его площадь равна $9\sqrt{3}$» [21].

Решение: Формула для площади правильного треугольника:$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Так как площадь треугольника известна нам по условию задачи, то найдем длину стороны: $a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4*9\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4*9\sqrt{3}*\sqrt{3}}{\sqrt{3}*\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4*27}{3}} = \sqrt{\frac{108}{3}} = \sqrt{36} = 6$ см. Теперь мы можем найти радиус вписанной окружности, зная сторону правильного треугольника:$r = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ см.

Ответ: $\sqrt{3}$ см.

IV. Решение задач по теме «Окружность, описанная около правильного треугольника».

8. «Найти радиус окружности, описанной около правильного треугольника, если его площадь равна $9\sqrt{3}$» [21].

Решение: Для начала найдем сторону треугольника**:** $a^2 = \frac{36\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 36$, следовательно a=6 см. По формуле найдем радиус описанной окружности:$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ см.

Ответ: $2\sqrt{3}$ см.

9. «Найти длину окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 3 см» [5, с. 186].

Решение: Длина окружности находится по формуле: $C = 2\pi R$.

Для того чтобы найти длину окружности нам сначала нужно найти радиус описанной окружности: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3*\sqrt{3}}{\sqrt{3}*\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ см. Отсюда следует, что длина окружности будет равна $C = 2\sqrt{3\pi}$.

Ответ: $2\sqrt{3\pi}$ см.

V. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник».

10. «Найдите радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC со сторонами AB = 8 см, $BC = 10$ см» [5, с. 186].

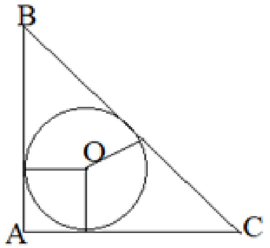


Рис.4. Рисунок к задаче №10

Решение: Из треугольника ABC нам известно катет и гипотенуза, по теореме Пифагора сможем найти значение второго катета:$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36}$, значит $AC = 6$ см. Все значения нам известны теперь по формуле сможем найти радиус вписанной окружности:$r = \frac{AB+AC-BC}{2} = \frac{8+6-10}{2} = 2$ см.

Ответ: 2 см.

11. «В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 см, r = 4 см б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см» [5, с. 185].

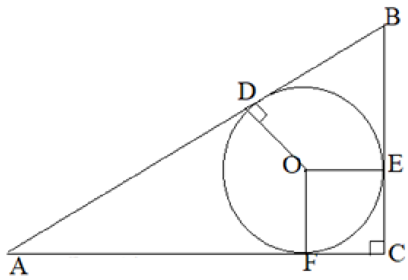


Рис.5. Рисунок к задаче №11

Решение: а)$P_{ABC} = AB + BC + AC = 26$ см, $P_{ABC} = BE + EC + CF + +AF$. $P_{ABC} = 26 + 8 + BE + AF, DB + DA = 26$. Отсюда следует, что $P_{ABC} = 26 + 8 + 26 = 60$ см.

б) $AD = AF = 5$ см, $DB = BE = 12$ см (по свойству касательных отрезков). Пусть $FC = CE = r$, тогда $AC = 5 + r, BC = 12 + r$. По теореме Пифагора найдем: $17^2 = \sqrt{5 + r\ ^2 + (12 + r)^2}$, отсюда получаем уравнение $2r^2 + 34r - 120 = 0$. Решая квадратное уравнение мы получаем два корня $r_1 = -20$ (не подходит по смыслу), $r_2 = 3$. Значит $FC = 3$ см. Зная все значения мы сможем найти периметр треугольника: $P_{ABC} = 17 + 8 + 15 = 40$ см.

Ответ: а) 60 см, б) 40 см.

VI. Решение задач по теме «Окружность, описанная около прямоугольного треугольника».

12. «Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AC = 18$ см, $\angle B = 30°$» [5, с. 186].

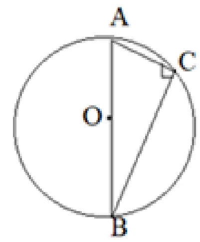


Рис.6. Рисунок к задаче №12

Решение: Так как АС лежит напротив угла в $30°$, отсюда следует, что $AC = \frac{1}{2}AB$, значит $AB = 2AC$, тогда $AB = 2 * 18 = 36$ см. Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной около треугольника окружности, значит $r = 18$ см.

Ответ: 18 см.

13. «В прямоугольном треугольнике один из катетов на 2 см больше другого. Найти площадь треугольника, если радиус описанной окружности равен 5 см» [3, с. 160].

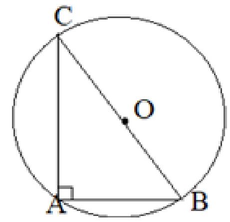


Рис.7. Рисунок к задаче №13

Решение: Пусть катет $AB = x$ см, тогда $AC = x + 2$ см. Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, тогда $BC = 2 * 5 = 10$ см. По теореме Пифагора получим: $x^2 + (x + 2)^2 = 10^2$, получаем квадратное уравнение $2x^2 + 4x - 96 = 0$, отсюда находим два корня $x_1 = -8$(не подходит по смыслу), $x_2 = 6$. Значит $AB = 6$ см, $AC = 8$ см. Теперь найдем площадь треугольника:$S = \frac{AB*AC}{2} = \frac{6*8}{2} = \frac{48}{2} = 24$ см^2.

Ответ: 24 см^2.

14. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, если его катеты равны 24 и 10 см.

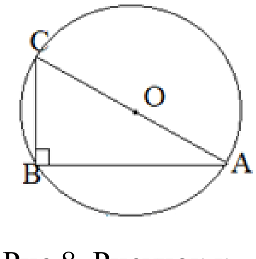


Рис.8. Рисунок к задаче №14

Решение: По теореме Пифагора найдем гипотенузу:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676$, значит $AB = 26$ см. Теперь найдем радиус окружности: $r = \frac{AB}{2} = 13$ см.

Ответ: 13 см.

VII. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник».

15. «В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник» [5, с. 185].

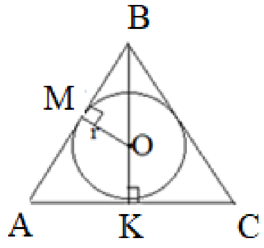


Рис.9. Рисунок к задаче №15

Решение: В треугольнике ABK и OBM: $\angle B$-общий, $\angle M = \angle K = 90°$, т.е. треугольник $BOM \sim BAK$ (по двум углам), значит, $\frac{BK}{BM} = \frac{AK}{OM} = \frac{AB}{OB}$. По теореме Пифагора:

$AB^2 = \overline{AK^2 + BK^2}$

$13^2 = \overline{5^2 + BK^2}$

$BK^2 = \overline{169 - 25}$

$BK^2 = \overline{144}$, отсюда $BK = 12$ см.

Так как прямоугольные треугольники $BOM \sim BAK$ подобны, отсюда следует: $\frac{r}{5} = \frac{12 - r}{13}$;

$13r = 60 - 5r$;

$18r = 60$;

$r = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ см.

Ответ: $3\frac{1}{3}$ см.

16. «Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 12:5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см» [5, с. 185].

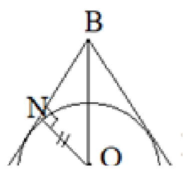


Рис.10. Рисунок к задаче №16

Решение: В треугольнике ABH и OBN: $\angle$-общий, $\angle M = \angle K$=90°, т.е. треугольники $ABH \sim OBN$ (по двум углам), значит, $\frac{BH}{BN} = \frac{AH}{ON} = \frac{AB}{OB}$. Пусть $BM = 12x$, тогда $OM = 5x$, следовательно, $\frac{60}{12x} = \frac{AH}{5x}$, отсюда $AH = \frac{60*5x}{12x} =$ 25 см. Теперь найдем $AC = 2 * 25 = 50$ см.

Ответ: 50 см.

VIII. Решение задач по теме «Окружность, описанная около равнобедренного треугольника».

17. «Остроугольный равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, равным 16, вписан в окружность с центром O и радиусом 10. Найдите площадь треугольника BOC» [21].

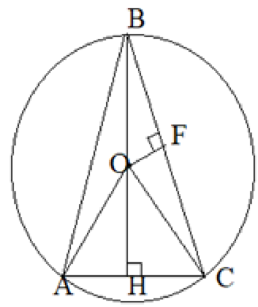


Рис.11. Рисунок к задаче №17

Решение: $AC = 16$, значит $AH = HC = 8$. Треугольник AOH прямоугольный, по теореме Пифагора найдем OH. $OH^2 = 10^2 - 8^2$, отсюда $OH = 6$ см. Значит $BH = 10 + 6 = 16$ см. Теперь по теореме Пифагора мы можем найти BC. $BC^2 = 16^2 + 8^2 = 256 + 64 = 320$, отсюда $BC = 8\sqrt{5}$. Так как треугольники $FBO \sim HBC$, то $\frac{S_{BOF}}{S_{BHC}} = F^2 = (\frac{10}{8\sqrt{5}})^2 = (\frac{5}{4\sqrt{5}})^2 = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{5}{16}$.

Теперь найдем площадь треугольника BHC. $S = \frac{16*8}{2} = 64$, так как нам известна площадь треугольника BHC , то найдем площадь треугольника BOF. $\frac{S_{BOF}}{64} = \frac{5}{16}$, отсюда следует, что $S_{BOF} = 20$ см. $S_{BOC} = 2 * 20 = 40$ см.

Ответ: 40 см.

18. «Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника» [21].

Решение: Чтобы решить данную задачу необходимо применить формулу радиуса описанной окружности около треугольника:$R = \frac{abc}{4S}$. Сначала найдем полупериметр треугольника: $p = \frac{40+40+48}{2} = 64$. Теперь по формуле Герона найдем площадь треугольника $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{64(64-40)(64-40)(64-48)}=\sqrt{64*24*24*16}=\sqrt{589824}$, $S=768$. $R=\frac{abc}{4S}=\frac{40*40*48}{4*768}=\frac{76800}{3072}=25$ см.

Ответ: 25 см.

VIIII. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в квадрат».

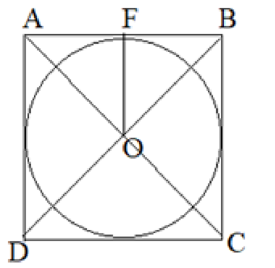


Рис.12. Рисунок к задаче №19

19. «Радиус окружности, вписанной в квадрат равен 1 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата» [3, с. 140].

Решение: Формула для нахождения радиуса вписанной окружности в квадрат: $\boldsymbol{r=\frac{a}{2}}$. Найдем для начала сторону квадрата: $\boldsymbol{a=1*2=2}$ см. По теореме Пифагора найдем диагональ: $\boldsymbol{d^2=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}}$, отсюда следует, что диагональ равна $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ см. Найдем радиус окружности: $\boldsymbol{r=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}}$.

Ответ: $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ см.

20. «Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат со стороной 16» [21].

Решение: Радиус вписанной окружности в квадрат является половина стороны квадрата, отсюда $r=8$ см.

Ответ: 8 см.

X. Решение задач по теме «Окружность, описанная около квадрата».

21. «Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{8}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата» [22].

Решение: Проведем радиусы вписанной и описанной окружности и рассмотрим наш "волшебный" прямоугольный треугольник, найдем

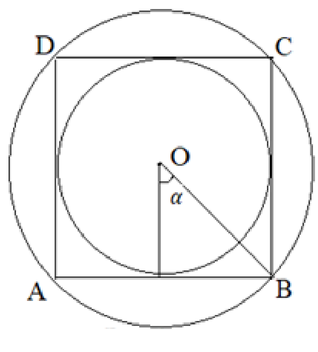


Рис.13. Рисунок к задаче №21

угол α: $\alpha = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$. Найдем радиус описанной окружности:$r = \frac{r}{cos45^\circ} = \frac{\sqrt{8}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4$ см.

Ответ: 4 см.

XI. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в ромб».

22. В ромб вписана окружность радиусом 3,6. Длины диагоналей ромба относятся как 3:4, а) найдите сторону ромба б) найдите площадь.

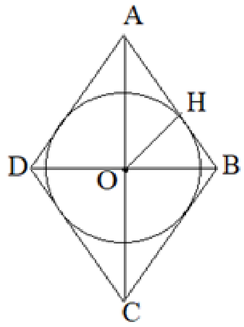


Рис.14. Рисунок к задаче №22

Решение: Если $\boldsymbol{OA = 4}$, а $\boldsymbol{OB = 3}$, тогда по теореме Пифагора сможем найти $\boldsymbol{AB}.\boldsymbol{AB^2 = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25}}$, отсюда $\boldsymbol{AB = 5}$ см. Теперь найдем высоту треугольника $\boldsymbol{AOB}$: $\boldsymbol{p = \frac{3+4+5}{2} = 6}$, $\boldsymbol{OH = \frac{2*\sqrt{6*(6-3)(6-4)(6-5)}}{5} = \frac{2*\sqrt{6*3*2*1}}{5} = \frac{12}{5} = 2,4}$. Найдём сторону ромба: $\boldsymbol{AB = \frac{5*3,6}{2,4} = 7,5}$ см. Найдём площадь ромба: $\boldsymbol{S = a*h = 7,5*7,2 = 54}$ $\boldsymbol{см^2}$.

Ответ: а) 7,5 см, б) $\boldsymbol{54}$ $\boldsymbol{см^2}$

23. «Найти радиус окружности, вписанной в ромб, если известно, что длина диагоналей 30 см и 40 см» [25, с. 160].

Решение: Точка O является центром вписанной окружности в ромб, а также будет являться точкой пересечения диагоналей, делящих их пополам. $AO = \frac{1}{2}AC = 15$, $BO = \frac{1}{2}BD = 20$. Так как диагонали ромба пересекаются под прямым углом, то треугольник AOB является прямоугольным. По теореме Пифагора найдем:$AB^2 = 15^2 + 20^2$, отсюда $AB = 25$ см. Получив все значения найдем радиус окружности: $r = \frac{30*40}{4*25} = \frac{1200}{100} = 12$ см.

Ответ: 12 см.

XII. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в трапецию».

24. «Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности» [21].

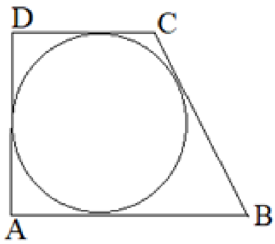


Рис.15. Рисунок к задаче №24

Решение: Для того чтобы решить данную задачу, нужно вспомнить свойство четырёхугольника, описанного около окружности, звучит оно так: «Суммы противоположных сторон любого четырёхугольника, описанного около окружности равны». Применяя это свойство получим: $AD + CB = 11$ и $DC + AB = 11$. CB большая сторона трапецию, следовательно $AD - CB = 11 - 7 = 4$. Значит радиус равен 2.

Ответ: 2 см.

25. «В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найти высоту трапеции, если известны ее основания: $AD = 10, BC = 6$» [25, с. 193].

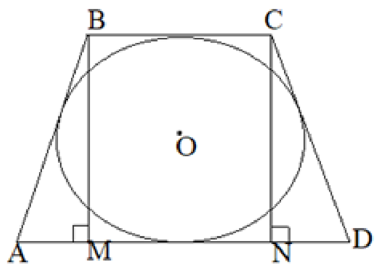


Рис.16. Рисунок к задаче №25

Решение: Четырёхугольник $BCNM$ является прямоугольником, так как все углы прямые. Значит, $MN = BC = 6$ см. Прямоугольные треугольники ABM и NCP равны по катету и гипотенузе, отсюда следует: $AM = ND = \frac{AD-BC}{2} = \frac{10-6}{2} = 2$ см. Так как в трапецию вписана окружность, то $AB + CD = AD + BC = 10 + 6 = 16$. $AB = \frac{AB+CD}{2} = \frac{16}{2} = 8$ см. Из треугольника ABM найдём BM по теореме Пифагора: $BM^2 = AB^2 - AM^2$

$$BM^2 = 8^2 - 2^2$$

$$BM^2 = 60$$

Отсюда, $BM = 2\sqrt{15}$.

Ответ: $2\sqrt{15}$ см.

XIII. Решение задач по теме «Окружность, описанная около трапеции».

26. Окружность описана около трапеции. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.

Решение: Описать окружность можно только около равнобедренной трапеции. Найдём сумму оснований $DC + AB = 2 * KM$, средняя линия равна 5, значит $DC + AB = 10$. Отсюда следует, что сумма боковых сторон равна $22 - 10 = 12$ см. Боковые стороны равнобедренной трапеции равны, значит одна сторона будет равна 6 см.

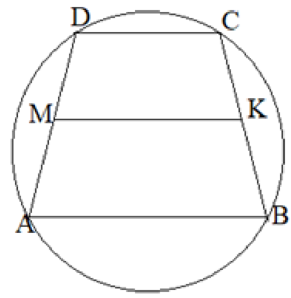


Рис.17. Рисунок к задаче №26

Ответ: 6 см.

27. «Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции» [21].

Решение: Отрезок FE является высотой трапеции. Так как $DE = EC$, значит $EC = 3$ см. По теореме Пифагора вычислим OE. $OC^2 = OF^2 + EC^2$, $OE = 5^2 - 3^2$, отсюда следует, что $OE = 4$. В прямоугольном треугольнике OFB известна гипотенуза, по теореме Пифагора вычислим $OF{:}OB^2 = OF^2 + FB^2, OF^2 = OB^2 - FB^2$, отсюда получается $OF^2 = \overline{5^2 - 4^2} = \overline{9}$. Значит $OF = 3$ см. Получается, что $FE = EO + OF = 4 + 3 = 7$.

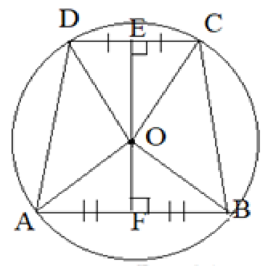


Рис.18. Рисунок к задаче №27

Ответ: 7 см.

XIIII. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в четырёхугольник».

28. «Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырехугольника» [5, с. 186].

Решение: $\boldsymbol{AB + CD = 12 + 12 = 24}$ см. Отсюда следует, что $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} * 24 * 5 = 60}$ $\textbf{см}^{\boldsymbol{2}}$.

Ответ: $\boldsymbol{60}$ $\textbf{см}^{\boldsymbol{2}}$.

29. «Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырехугольника» [5, с. 186].

Решение: Для того чтобы решить задачу нужно вспомнить свойство четырёхугольника, звучит оно так: «Четырехугольник можно описать вокруг тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны».

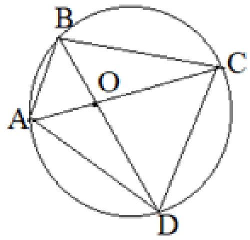


Рис.19. Рисунок к задаче №29

Тогда $AD + BC = DC + AB = 15$ см. Найдем периметр четырёхугольника:$P = AD + DC + BC + AB = 15 + 15 = 30$ см.

Ответ: 30 см.

XV. Решение задач по теме «Окружность, описанная около четырёхугольника».

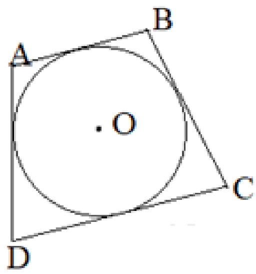


Рис.20. Рисунок к задаче №30

30. «Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $80°$, угол CAD равен $34°$. Найдите угол ABC» [25, с. 193].

Решение: Углы CAD **и** CBD опираются на одну и ту же дугу окружности, поэтому равны и угол $CBD = 34°$. Тогда угол $ABC = ABD + CBD = 80° + 34° = 114°$.

Ответ: $114°$.

31. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так,что сторона AD является диаметром этой окружности, угол $ABC = 130°$,а угол $BCD = 140°$.Найти углы BAD, CDA, ACB.

Решение: По свойству четырёхугольника**:** «Четырёхугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна $180°$». Найдём углы: $\angle BAD = 180° - 140° = 40°$, $\angle CDA = 180° - 130° = 50°$.

Треугольник CDA прямоугольный(если треугольник опирается на диаметр окружности, то он прямоугольный). Отсюда следует, что $ACB = BCD - ACD = 140° - 90° = 50°$.

Ответ: $40°, 50°, 50°$.

XVI. Решение задач по теме «Окружность, вписанная в правильный шестиугольник».

32. «Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$» [22].

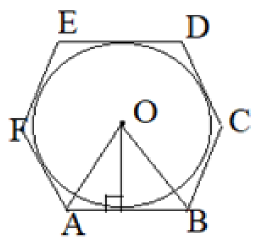


Рис.21. Рисунок к задаче №32

Решение: Правильный шестиугольник разбивается на шесть правильных треугольников. Рассмотрим треугольник AOB с высотой, равной радиусу вписанной окружности. В шестиугольнике все углы равны $60°$, тогда радиус будет равен: $r = AO * \sin 60° = \sqrt{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5$ см.

Ответ: 1,5 см.

33. «В правильный шестиугольник $ABCDEF$, со стороной 6 см, вписан правильный треугольник $A_1B_1C_1$. Найдите отношение радиуса окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, к радиусу окружности, вписанной в шестиугольник ABCDEF» [21].

Решение: $ABCD$ - трапеция, так как $BC||AD, A_1B_1$ средняя линия трапеции. Найдём $A_1B_1 = \frac{BC+AD}{2} = \frac{6+12}{2} = 9$ см. Найдем отношение радиуса окружности: $r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ см,

$$r_3 = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см},$$

$$\frac{r_3}{r_6} = \frac{3\sqrt{3}}{2*3\sqrt{3}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: 0,5 см.

XVII. Решение задач по теме «Окружность, описанная около правильного шестиугольника».

34. Радиус вписанной в правильный шестиугольник окружности равен $\overline{12}$. Найдите радиус описанной около этого шестиугольника окружности.

Решение: По свойству правильного шестиугольника радиус r вписанной окружности равен перпендикуляру, проведенному из центра правильного шестиугольника (центр вписанной и описанной окружности) к стороне шестиугольника; причем этот перпендикуляр падает в середину стороны.

Также по свойству правильного шестиугольника радиус описанной окружности равен его стороне a. Найдем эту сторону: $a^2 = (\frac{a}{2})^2 + r^2$, отсюда следует, что $a = \frac{2}{\overline{3}} r$, $a = \frac{2}{\overline{3}} * \overline{12} = 4$ см.

Ответ: 4 см.

35. «Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности» [21].

Решение: Диагонали правильного шестиугольника пересекаются в одной точке, это и будет являться центром описанной около него окружности. Найдём для начала сторону шестиугольника: $72 : 6 = 12$ см. Радиус описанной вокруг шестиугольника окружности равен его стороне, а диаметр вдвое больше, отсюда следует $2 * 12 = 24$ см.

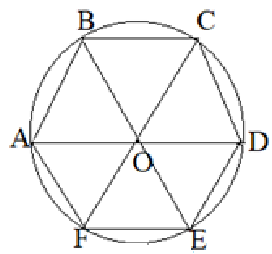


Рис.22. Рисунок к задаче №35

Ответ: 24 см.

В этом параграфе выделены основные типы вписанных и описанных многоугольников и представлены различные типы задач с решением.

Выводы по первой главе.

1. В данной главе раскрыто понятие логико-математического анализа материала школьного курса математики на примере содержания темы «Вписанные и описанные многоугольники». Целью логико-математического

анализа является разработка основ методики формирования умения решать основные и типовые задачи какой-либо темы.

2. Выявлены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Вписанные и описанные многугольники».

3. Проведен логико-математический анализ теоретического материала по теме «Вписанные и описанные многоугольники». Данная тема изучается как 8, так и в 9 классе.

4. Проведен анализ практического материала по теме «Вписанные и описанные многоугольники» и разработана методическая система, ориентированная на обучение школьников решению планиметрических задач, в условии и требовании которых содержатся какие-нибудь элементы многоугольников, вписанных в окружность или описанных около неё. Эта система задач обуславливает обучение школьников индуктивным способом познания окружающего мира.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Формы, методы и средства обучения решению геометрических задач.

В пратике преподования одной из важнейших составляющих является обучение решению задач. Задачи используются не только в качестве основного средства для усвоения материала, но и способствуют развитию математического мышления и умение применять теоретичиские знания на практике.

В своих лекциях Б.Т. Лихачев [17] даёт определение форме обучения и звучит оно так: «Форма обучения – некая система с определёнными целями, чёткой организацией, а также содержанием и методикой познавательного и воспитательного взаимодействия, общения и отношений между обучающим и обучаемыми».

Согласно Б. Т. Лихачеву [17] формы обучения могут быть:

- групповой;
- коллективной;
- индивидуальной.

Средства обучения – это различные материалы учебного процесса, с помощью которых за короткое время достигается определённая цель обучения.

К средствам обучения относятся: учебники, дидактические материалы, учебные кабинеты и т.д.

В обучении математики задачи выступают как средство обучения:

- при решении задач, учащиеся получают и усваивают математические знания;

- при решении задач у учеников развивается мышление:логическое, операционное(анализ,сравнение);

- развиваются качества мышления, такие как гибкость, оригинальность, четкость, лаконичность речи и записи;

- с помощью задач вырабатывается интерес к предмету.

И.П. Подласый в книге [23] описывает методы обучения как упорядоченную деятельность педагога и учащихся, направленную на достижение ими определенной цели обучения. Методы обучения в методической литературе чаще всего рассматривают как некоторую совокупность путей и способов достижения целей обучения учащихся, решения необходимых задач образования.

В курсе геометрии задачи разбиваются на три типа:

1) задачи на вычисление;
2) задачи на доказательство;
3) задачи на построение.

В основном в школе наибольшим вниманием пользуются задачи на вычисление, они занимают основное содержание сборников задач по геометрии. Однако, при решении геометрических задач на вычисление они имеют свои особые специфические трудности. В основном они связаны с построением и использования чертежа или с применением теорем.

В своей книги В.Г. Чичигин [28] предлагает определённый план для учащихся для решения задач на вычисление:

1) Схематическая запись условия задачи, т.е. сделать чертеж и указать, что дано в задаче.
2) Решение самой задачи, составить необходимые уравнения и решения к ним.
3) Составление ответа на вопрос к данной задаче.
4) Проверка решения.

Следующий тип задачи на построение. Они занимают основное содержание школьного курса геометрии и состоит в изучении свойств геометрических фигур. Автор предлагает следующий план для решения задач на построение:

1) Анализ задачи (проводится в устной форме, записываются самые необходимые предложения);
2) Построение.
3) Доказательство (записывается с кратким пояснением);
4) Исследование (записывается с кратким пояснением).

И послений тип задачи на доказательство. Считается, что для учащихся этот тип является самым трудным, потому что учащиеся в предложенной задаче не видят задачи в привычвном для них смысле. В таких задачах отсутсвует привычный вопрос и вводит учащихся в недоумение.

В.Г. Чичигин [28] предлагает такой метод решения задач на доказательство: «Для начала задачи на доказательство можно предлагать учащимся не в виде теоремы, а формулировать её в виде обычной задачи. Затем учащиеся должны формулировать вопросы к задаче, чтобы найти метод решения».

Для развития логического мышления большее значение имеют задачи на построение, они имеют самый богатый материал для выроботки у учащихся навыков логического мышления. При решение задач на построение учащиеся должны сами создать необходимую фигуру, нежели задачи на доказательство, где учащиеся имеют дело с определённой фигурой [29].

У большинства учащихся отсутствует интерес к геометрическим задачам, как и к самой геометрии, ученики испытывают значительные трудности при решении задач, в частности, планиметрических. В.А. Далингер [12] в своей книги выделил следующие причины низкого уровня умения решать задачи:

- задачи, решаемые на уроках большинство решаются по образцу;

- задачи, рассматриваемые на уроке даются учащимся в готовом виде, нет работы над составлением задач;

- основное внимание уделяется оформлению решения задач, нежели процессу решения;

- мало задач, которые помогают учащимся осознать способы решения(рефлексивые задачи);

- однообразие типологии задач;

Основной причиной низкого уровня умения решать задачи по геометрии является излишняя ориентация учителей на итоговые экзамены. Отметим, что задачи на построение вообще не включаются, а также мало задач и на доказательство. Из-за этого учителя мало уделяют внимания таким задачам, не умеют рационально включать их в процесс обучения и решают их в последнюю очередь.

Для того чтобы активизировать учащихся к познавательной деятельности в работе А.И. Мостовой [21] доказывается, что один из путей является обучение решения геометрических задач различными способами.

При обучении учащихся решению геометрических задач различными способами и методами даёт возможность: воспитать интерес к изучаемому предмету, развить критическое и математическое мышление, лучше исследовать свойства геометрических фигур, отметить свойство, о котором в задаче не говорится [14].

Выделим общую методическую схему обучения решению геометрических задач:

- Прочитайте задачу, установите её тип: вычисление, построение, доказательство;

- Выделите условие и требования задачи;

- Сделайте чертёж к задаче;

- Выведите следствия из данных условий;

- Трактование символических записей;

- Определите, какие теоремы, свойства и приёмы необходимо использовать для решения задачи;

- Ответьте на вопросы, отражающие причинно-следственные связи: «Чтобы узнать…надо найти…», «Зная…, можно найти…». Поиск решения задачи с помощью анализа или синтеза;

- Оформите решение задачи;

- Составьте и решите аналогичную задачу;

- Сделайте проверку.

Таким образом, раскрыты формы, методы и средства обучения геометрических задач. Применение их будет способствовать развитию у учащихся интерес к предмету и более глубокому усвоению материала.

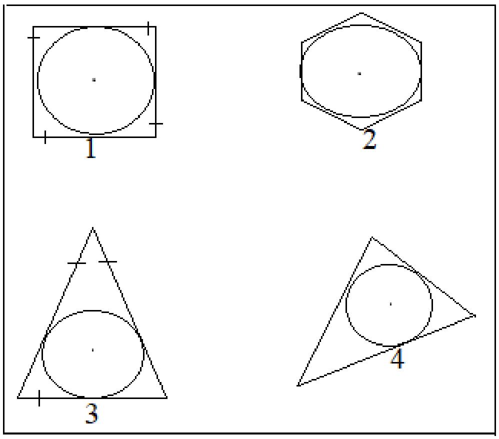
§6. Методические рекомендации по обучению вписанных и описанных многоугольников в курсе геометрии основной школы.

Методические рекомендации - это вспомогательная информация, где даются конкретные советы по организации учебно-воспитательного процесса учебного занятия, мероприятия. Их задача состоит в том, чтобы рекомендовать наиболее эффективные, рациональные варианты по проведению учебного занятия.

Методические рекомендации могут быть:

- по изучению предмета;
- для подготовки к практическим занятиям;
- для выполнения контрольных работ;
- по изучению отдельных тем учебного предмета;
- по организации какой-либо конкретной деятельности учащихся.

Рассмотрим методические рекомендации для учителя по геометрии по обучению темы: «Вписанные и описанные многоугольники» в учебном пособии Т.М. Мищенко [20]. Автор предлагает ввести понятия многоугольник, вписанный в окружность и многоугольник, описанный около окружности с помощью приготовленных заранее плакатами или карточками, как на рис.23. и рис.24.



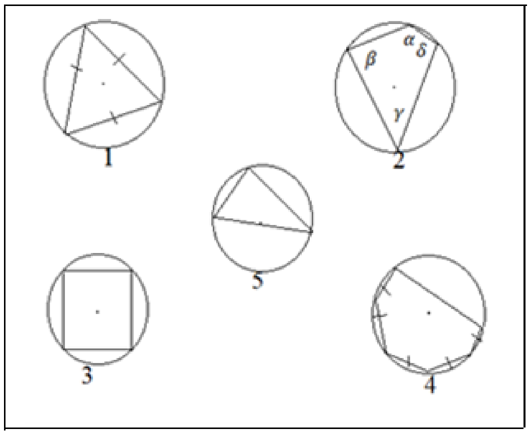


Рис.23. Введение понятия многоугольник Рис.24. Введение понятия многоугольник

Нужно напомнить учащимся, что они уже встречались с частными случаями введённых понятий: окружностями, треугольниками и четырёхугольниками, вписанными в окружность и описанными около неё, а также нужно обратить внимание учащихся на то, что многоугольники, вписанные и описанные около окружности, могут быть правильными и неправильными.

Для работы с карточками, которые представлены выше, можно задать следующие вопросы:

1. Укажите, под какими номерами указаны правильные многоугольники.
2. Фигуры под номерами 2,3,4 на рисунке 23 являются правильными многоугольниками?
3. Фигуры под номерами 3 и 5 на рисунке 24 являются правильными многоугольниками?

Учителю стоит обратить внимание учащихся на то, что, если в условии сказано: «многоугольник, вписанный в окружность», значит, что задана и «окружность, описанная около этого многоугольника» и аналогично для «многоугольника, описанного около окружности».

После этого учащимся можно предложить практическое задание. Например, «Начертите треугольник и постройте две окружности: а) вписанную в него б) описанную около него».

В процессе обучения учащимся стоит записать в тетрадь определения.

Учителю при формулировке теорем о вписанных и описанных многоугольниках следует обратить внимание учащихся на то, что доказываются два утверждения, а именно для любого правильного многоугольника существует:

а) окружность, описанная около него;

б) окружность, вписанная в него.

Таблица 1

Формулы для радиуса вписанной и описанной окружности

исло сторон -угольника	Выражение радиусов описанной R_n и вписанной r_n окружностей через сторону a_n -угольника.		Выражение стороны a_n -угольника через радиусы описанной R_n и вписанной r_n окружностей.	
	R	r	R	r
3	$R_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$r_3 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$R_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$R_6 = a$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$a_6 = R$	$a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$
n	$R_n = \frac{a}{2sin\frac{180^\circ}{n}}$	$r_n = \frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$	$a_n = 2Rsin\frac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2rtg\frac{180^\circ}{n}$

Для того, чтобы вывести формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников полезно решить следующую задачу: «Дан правильный многоугольник $A_1, A_2, \dots A_n$. R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности, a_n – сторона правильного многоугольника. Выразите R и r через a_n. Выразите a_n через R и r.

Перед решением данной задачи учащимся нужно пояснить, что -угольник необходимо разбить на n треугольников.

Далее автор рекомендует рассмотреть вывод формул для частных случаев при n, равном 3, 4 и 6 в виде таблицы (таблица 1), для того, чтобы учащиеся лучше поняли геометрический смысл величин, которые входят в формулы.

Для закрепления этих формул учащимся можно предложить несложные задачи:

1. В окружность радиуса $R = 12$ вписан правильный n-угольник. Определите его сторону, если: а) $n = 3$, б) $n = 4$, в) $n = 6$.
2. Около окружности радиуса $r = 6$ описан правильный n-угольник. Определите его сторону, если: а) $n = 3$, б) $n = 4$, в) $n = 6$.
3. Для правильного n-угольника со стороной $a = 6$ найдите радиус описанной около него окружности и радиус вписанной в него окружности, если: а) $n = 3$, б) $n = 4$, в) $n = 6$.

Далее в учебном пособии автор рассматривает «Вписанные и описанные четырёхугольники» и дает методические рекомендации по данной теме.

Так как определения четырёхугольника, вписанного в окружность и четырёхугольника, описанного около окружности давались в разделе «Четырёхугольники», то учителю следует напомнить учащимся эти определения.

Т.М. Мищенко [19] советует сделать на доске таблицу в виде двух задач и предложить учащимся, чтобы они сами попробовали сформулировать признак и свойство вписанного четырёхугольника в окружность.

Для свойства и признака четырёхугольника, описанного около окружности можно воспользоваться тем же методом, что описан ниже.

После изучения данной темы учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теоремы вписанной и описанной окружности, выводить формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников, уметь решать задачи.

Таблица 2

Свойство и признак четырёхугольника

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность	Признак четырёхугольника, вписанного в окружность
Дано: $ABCD$ – четырёхугольник; O – центр окружности, описанной около $ABCD$.	Дано: $ABCD$ – четырёхугольник; $\angle ABC + \angle CDA = \angle DAB + \angle BCD$.
Доказать: $\angle ABC + \angle CDA = \angle DAB + \angle BCD$.	Доказать: O – центр окружности, описанной около $ABCD$.

Рассмотрим методические рекомендации по теме «Вписанные и описанные многоугольники» в учебном пособии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. [6].

Авторы на изучение данной темы отводят 4 часа, где 2 урока изучается вписанная окружность, остальные 2 урока посвящаются описанной окружности.

Л.С. Атанасян при изучении первого параграфа по теме: «Вписанная окружность» рекомендует его разбить на две части. На первом уроке следует изложить параграф в виде небольшой лекции, для начала ввести понятие вписанной окружности, познакомить учащихся с теоремой об окружности, вписанной в треугольник и доказать её, затем рассмотреть первое замечание к теореме, но перед этим провести устную подготовительную работу. На втором уроке рассмотреть второе замечание и ознакомить учащихся со свойством четырёхугольника. В конце второго урока можно провести самостоятельную работу обучающего характера.

Параграф «Описанные окружности» провести аналогично первому.

Таким образом, изучив данные параграфы, учащиеся должны знать определения окружности, вписанной в многоугольник и окружности, описанной около многоугольника, теоремы об окружности, вписанной в треугольник и об окружности, описанной около треугольника, свойства вписанного и описанного четырёхугольника, уметь применять полученные знания при решении задач.

Параграф «Правильные многоугольники» Л.С. Атанасян [6] советует разбить на два этапа: первые два урока повторить пройденный материал, который понадобится в данном параграфе, а третий и четвёртый урок посвятить темам: «Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности» и «Построению правильных многоугольников».

Вывод формул учащиеся могут провести самостоятельно под руководством учителя, а для закрепления данного материала рекомендуется решить следующую задачу: «Правильный многоугольник вписан в окружность радиуса 1 м. Вычислите сторону, периметр, площадь многоугольника и радиус вписанной окружности, если число сторон равно 3, 4 и 5». Для решения этой задачи автор рекомендует сделать на доске таблицу, которые учащиеся будут заполнять в ходе решения.

Таблица 3

n	a_n	P	S	r
3				
4				
5				

В конце урока целесообразно будет провести самостоятельную работу.

В итоге изучения параграфов учащиеся должны знать определение правильного многоугольника, уметь доказывать теоремы об окружности, вписанной в правильный многоугольник и об окружности, описанной около правильного многоугольника, знать формулы для нахождения угла, площади и сторон правильного многоугольника и радиуса вписанной для него окружности, уметь применять полученные знания при решении задач.

Таким образом, методические рекомендации представляют собой информацию, выстроенную так, чтобы наиболее упорядоченно и логично проводить занятия и мероприятия при изучении той или иной темы.

§7. Системы задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники» в курсе геометрии основной школы.

Представим трёхуровневую систему задач по теме: «Вписанные и описанные многоугольники».

1 уровень сложности.

Задание 1. Закончите предложение.

а) Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его ____________.

б) Окружность вписана в многоугольник, если __________.

в) Центр описанной около треугольника окружности – точка пересечения _____________.

Задание 2.

а) Окружность всегда можно *вписать* в:

1) квадрат 2) треугольник 3) параллелограмм

4) ромб 5) прямоугольник 6) равнобедренная трапеция.

б) Окружность всегда можно *описать* около:

1) квадрат 2) треугольник 3) параллелограмм

4) ромб 5) прямоугольник 6) равнобедренная трапеция.

Задание 3. Около треугольника ABC описана окружность. Найти R.

Задание 4. Определите, можно ли описать окружность вокруг четырёхугольника $ABCD$, если углы A, B, C, D равны соответственно:

а) $90^\circ, 90^\circ, 20^\circ, 160^\circ$

б) $5^\circ, 120^\circ, 175^\circ, 60^\circ$

Задание 5. Вычислите неизвестную сторону четырёхугольника, если в него вписана окружность.

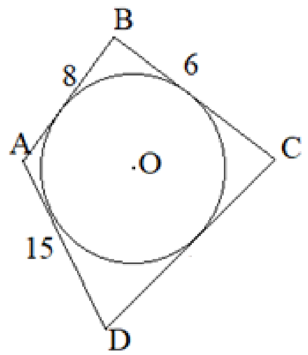


Рис.25. Рисунок к заданию №5

Задание 6*. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 12 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

2 уровень сложности.

Задание 1. Приведите примеры вписанных и описанных многоугольников.

Задание 2. В треугольнике ABC, $AC = 6$, $BC = 3$ угол C равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.

Задание 3. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 9 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

Задание 4. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°, а боковая сторона 5 см. Найдите радиус описанной окружности.

Задание 5. Найдите неизвестные углы вписанного четырёхугольника, если а) два из них равны 46° и 125°, б) вписанной трапеции, если один из них равен 80°.

Задание 6*. Около окружности описаны правильный треугольник и четырёхугольник. Периметр треугольника равен $6\sqrt{3}$. Найдите периметр четырёхугольника.

3 уровень сложности.

Задание 1. Можно ли описать окружность около пятиугольника с углами $80^{\circ}, 90^{\circ}, 100^{\circ}, 130^{\circ}, 140^{\circ}$?

Задание 2. По данным углам вписанного пятиугольника $ABCDE$. Найдите углы между его диагоналями, выходящими из одной вершины.

Задание 3. По углам вписанного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите угол между диагоналями AC **и** AE.

Задание 4. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 10 см. Найдите сторону квадрата, описанного около данной окружности.

Задание 5*. Периметр правильного четырёхугольника, описанного около окружности на 8 см больше периметра правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность. Найдите радиус окружности.

Данная система задач составлена для «низкого», «среднего» и «высокого» уровня учащихся. Можно использовать как самостоятельную работу после изучения данной темы.

В сборнике М.И. Сканави [13, с. 408] представлена следующая система задач.

Блок А

Задание 2.1. «Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности как 5 : 2. Найти площадь треугольника, если один из его катетов равен a» [13, с. 408].

Задание 2.2. «Найти отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, опущенной на гипотенузу» [13, с. 408].

Задание 2.3. «К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключённого между сторонами треугольника» [13, с. 408].

Задание 2.4. «В окружность, диаметр которой равен $\sqrt{12}$, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник, в который вписана новая окружность. Найти радиус этой окружности» [13, с. 408].

Задание 2.5. «В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найти сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r» [13, с. 408].

Задание 2.6. «В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равно 6 см, так, что угол 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника» [13, с. 409].

Блок Б

Задание 2.7. «Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n. Доказать, что площадь треугольника $S = mn$. Найти площадь прямоугольника, вписанного в данный треугольник так, что одна его вершина совпадает с вершиной прямого угла, а противоположная вершина - с точкой касания окружности и гипотенузы» [13, с. 410].

Задание 2.8. «Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а гипотенуза равна 10 см. Найти радиус вписанной окружности» [13, с.410].

Задание 2.9. «Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определить стороны треугольника» [13, с. 411].

Задание 2.10. «Дан треугольник ABC такой, что $AB = 15$ см, $BC = 12$ см и $AC = 18$ см. В каком отношении центр вписанной в треугольник окружности делит биссектрису угла C» [13, с. 411]?

Задание 2.11. «Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят её на четыре дуги. Найти расстояние от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7 см» [13, с. 412]

Задание 2.12. «В ромб со стороной a и острым углом 60° вписана окружность. Определить площадь четырёхугольника, вершинами которых являются точки касания окружности со сторонами ромба» [13, с. 412].

Отметим, что система задач, составленная М.И. Сканави рассчитана для учащихся «высокого» уровня.

Выводы по второй главе.

1. Раскрыты формы, методы и средства обучения по решению планиметрических задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники».

2. Разработаны методические рекомендации по обучению школьников решению задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники».

3. Разработана трёхуровневая система задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники, ориентированная на выявление уровня сформированности умений и навыков учащихся основной школы решать планиметрические задачи, в условии и требовании которых, содержатся элементы многоугольников, вписанных в окружность или описанных около неё.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Раскрыто понятие логико-математического анализа тем школьного курса математики на примере содержания темы «Вписанные и описанные многоугольники». Выявлено, что материал по данной теме организован на индуктивной основе, так как всем фигурам, вводимым в теме, даются определения по принципу от простого многоугольника(треугольника) к более сложному.

2. Выявлены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Вписанные и описанные многоугольники». Учащиеся должны знать и уметь формулировать определения многоугольника, вписанного в окружность и описанного около неё, знать и доказывать теоремы о том, что:

1. «Во всякий треугольник можно вписать окружность»;

2. «Около всякого треугольника можно описать окружность»;

3. «Центром окружности, вписанной в треугольник, служит точка пересечения биссектрисы»;

4. «Центром окружности, описанной около треугольника служит точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника»;

5. «Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, служит середина гипотенузы»;

6. «Центр окружности, описанной около правильного треугольника совпадает с центром окружности, вписанной в правильный треугольник»;

7. «Четырёхугольник можно вписать в окружность, если сумма его противоположных углов равна 180°»;

8. «Четырёхугольник можно описать вокруг окружности, если сумма длин его противоположных сторон равна»;

9. «Центром вписанной в четырёхугольник окружности является точка пересечения биссектрис»;

10. «Из всех параллелограммов окружность можно описать около прямоугольника, квадрата»;

11. «Из параллелограммов окружность можно вписать в ромб, квадрат».

3. Описан анализ теоретического и практического материала школьных учебников разных авторов по теме «Вписанные и описанные многоугольники».

4. Рассмотрены методические рекомендации по обучению школьников решению темы «Вписанные и описанные многоугольники» .

7. Разработана диференцированная система задач по теме «Вписанные и описанные многоугольники», ориентированная на выявление уровня сформированности умений и навыков учащихся основной школы решать планиметрические задачи, в условии и требовании которых, содержатся элементы многоугольников, вписанных в окружность или описанных около неё.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акшонова Ю.И., Майнагашева Е.Б. Методические аспекты обучения учащихся решению геометрических задач с практическим содержанием [Электронный ресурс]/ Ю.И.Акшонова, Е.Б. Майнагашева// Проблемы и перспективы образования XXI века. – 2016. №7.- С. 20-26. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26427244 – Последнее обновление: 18.01.2018

2. Александров А.Д. Геометрия. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2014. – 176 с.

3. Александров А.Д. Геометрия. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2014. – 175 с.

4. Александров, А.Д. Геометрия: учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М: Просвещение, 2002. – 240 с

5. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

6. Атанасян, Л.С. Изучение геометрии в 7 – 9 классах [Текст]: пособие для учителей / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

7. Бескин, Н.М. Методика геометрии [Текст]: учебник для педагогических институтов / Н.М. Бескин. – М.: Учпедгиз, 1947. – 276 с.

8. Бурмистрова, Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ составитель Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2011. – 95 с.

9. Глаголев, Н.А. Элементарная геометрия. Планиметрия. Для 6-8 классов семилетней и средней школы [Текст] / Н.А. Глаголев. – Ч.1. – М.: Учпед- гиз, 1954. – 236 с.

10. Глейзер, Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982.- 376 с.

11. Гусев, В.А. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений [Текст] / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др.; под ред. В.А. Гусева. – М.: Издат. центр «Академия», 2004. – 368 с.

12. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений : кн.для учителя / В.А. Далингер. – М. : Просвещение, 2006. – 256 с.

13. Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. Сборник задач по математики с решениями. 8-11 класс / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; Под ред. М.И. Скинави. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство Астрель», 2012. – 624 с.

14. Кибирев В.В. Обучение методам решения геометрических задач [Электронный ресурс]/ В.В. Кибирев// Вестник бурятского государственного университета. – 2014. №15. – С. 24-28. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=22747625 – Последнее обновление: 08.05.2018

15. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. Институтов / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

16. Кольман, Э. История математики в древности / Э. Кольман. – М.: Физматлит, 1961. – 236 с.

17. Лихачев Б.Т.. Педагогика: Курс лекций [Текст]: учеб. пособие для студентов педагог, учеб. заведений и слушателей ИПК и ФПК. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт-М.—7с. 2001.

18. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие / Е. И. Лященко [и др.]; под ред. Е. И. Лященко. - Москва : Просвещение, 1988. - 223 с. : ил. - (Учебное пособие для педагогических институтов). - Библиогр.: с. 214-222

19. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс: к учебнику Ф.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т. М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2015.

20. Мостовой А. И. Вопросы активизации обучения геометрии в восьмилетней школе /А.И. Мостовой. – Алма-Ата: КазПИ им. Абая, 1976.– 103 с.

21. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/ - Последнее обновление 06.05. 2018

22. Панов М., Спивак А. Вписанные многоугольники [Электронный ресурс]/ М. Панов, А. Спивак// Квант. – 1999. №1. – С. 40-43. – Режим доступа: http://kvant.mccme.ru/pdf/1999/01/kv0199panov.pdf - Последнее обновление: 29.01.2018

23. Подласый И.П. Педагогика : 100 вопросов – 100 ответов : учеб. пособие для студентов вузов / И.П. Подласый. – М. : Изд-ство ВЛАДОС-ПРЕСС, 2006. – 365 с.

24. Пойа, Д. Как решать залачу /Д. Пойа. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.

25. Погорелов А.В. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций/ А.В. Погорелов. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 240 с.

26. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа:

http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/06.pdf. – Последнее обновление 20.12.2017.

27. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/543 – Последнее обновление 30.01.2018.

28. Чичигин, В.Г. Методика преподавания геометрии. Планиметрия [Текст]: пособие для учителей средней школы / В.Г. Чичигин. – М.: Учпедгиз, 1959. – 392 с.

29. Шебанова Л.П. Формирование у учащихся основной школы умения решать геометрические задачи [Электронный ресурс]/ Л.П. Шебанова// Современные проблемы науки и образования. – 2015. №4. - С. 219. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=23940032 – Последнее обновление: 10.05.2018

30. Шеховцова Д.Н. Сравнительный анализ школьных учебников геометрии/ Д.Н. Шеховцова // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. 2009. № 2. - С. 74–76.

31. Candrasekaran Dr.S. Productive Methods of Teaching Middle School Science/ Dr.S. Candrasekaran// International Journal of Humanities and Social Science Invention. 2013. – vol. 3, №133. - 15-25 p. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ijhssi.org/papers/v3(7)/Version-2/C0372015025.pdf - Последнее обновление: 05.03. 2018

32. Lang, S. Geometry. 2nd ed. / Serge Lang, Gene Murrow. - New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1988. - 391 p.

33. Ogilvy S. Excursions in Geometry. – New York, Dover Publications Inc, 1991. – 192 p

34. Towers, Jo. Teaching and learning mathematics in the collective/ Jo Towers , Lyndon C.Martin, Brenda Heater// The Journal of Mathematical Behavior, added 3.09.2013. –vol. 32, №3. – 424-433 p. [Электронный ресурс]. -

Режим доступа: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312313000461. – Последнее обновление 01.02.2018

35. Zawaira, A., Hitchcock, G. A primer for mathematics competitions. – New York, 2009. – 360 p.

Приложение 1

Таблица 4

Последовательность рассматриваемого материала

Геометрия, 7 класс. Л.С. Атанасян и др.	**Геометрия, 7 класс. А.В. Погорелов**	**Геометрия, 7 классю А.Д. Александров и др.**
Количество часов		
-	2	-
-	«§5. Геометрические построения. - окружность, описанная около треугольника; - окружность, вписанная в треугольник» [25].	-
Геометрия, 8 класс. Л.С. Атанасян и др.	**Геометрия, 8 класс. А.В. Погорелов**	**Геометрия, 8 класс. А.Д. Александров и др.**
Количество часов		
4	-	-
«§4. Окружность - вписанная окружность; - описанная окружность» [5].	-	-
Геометрия, 9 класс Л.С. Атанасян и др.	**Геометрия, 9 класс. А.В. Погорелов**	**Геометрия, 9 класс. А.Д. Александров и др.**
Количество часов		
3	3	4
«§1. Длина окружности и площадь круга. - окружность, описанная около правильного многоугольника; - окружность, вписанная в правильный многоугольник; - формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности» [5].	«§13. Многоугольники. - формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников; - вписанные и описанные четырехугольники» [25].	«§12. Вписанные и описанные окружности. - окружность, описанная вокруг многоугольника; - окружность, вписанная в многоугольник»[3].

Приложение 2

Таблица 5

Основные понятия темы «Вписанные и описанные многоугольники»

Л.С. Атанасян и др.	**А.В. Погорелов**	**А.Д. Александров и др**
Введение понятия многоугольники		
«Рассмотрим фигуру, которая состоит из отрезков AB, BC, CD, DE, EF, FA так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек. Такая фигура называется многоугольником».	«Ломанная называется замкнутой, если у неё концы совпадают. Простая замкнутая ломанная называется многоугольником».	«Простая замкнутая ломанная вместе с конечной частью плоскости, ограниченной ею, называется многоугольником».
Введение понятия окружность, вписанная в многоугольник		
«Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник-описанным около этой окружности».	«Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на некторой окружности»	«Говорят, что многоугольник описан около окружности, если все его стороны касаются данной окружности. Тогда об этой окуржности говорят, что она вписана в данный многоугольник».
Введение понятия окружность, описанная вокруг многоугольника		
«Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник- вписанным в эту окружность».	«Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны каасются некоторой окружности»	«Говорят, что многоугольник вписан в окружность, если все его вершины лежат на ней. Тогда об этой окружности говорят, что она описана вокруг многоугольника».