МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Б А К А Л А В Р С К А Я   Р А Б О Т А

Направление подготовки бакалавра: 44.03.05 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математика и информатика*

Студент С.В. Николаева ___________
Научный
Руководитель: к.п.н., доцент. Н.А. Демченкова ____________

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Линия тождественных преобразований является одной из четырых основных содержательных линий школьного курса алгебры (учение о числе, функции, уравнения и неравенства, тождественные преобразования) [7]. Отдельной темой школьного курса математики линия тождественных преобразований не является, она изучается на протяжении всего курса арифметики, алгебры и начал анализа. Начиная с 5-6 классов производятся простейшие тождественные преобразования, которые опираются на законы и свойства арифметических действий. В курсе алгебры основной школы 7-9 классов сконцентрирована основная нагрузка по формированию умений и навыков выполнения тождественных преобразований. Это связано со значительным увеличением числа, а также с разнобразием совершаемых преобразований. Осуществляется развитие культуры выполнения тождественных преобразований, а так же, на основе закрепленных знаний свойств операций и алгоритмов их выполнения развивается культура вычислений [8]. Высокий уровень выполнения тождественных преобразований проявляется в умении правильно обосновать преобразования, в умении проследить за изменением области определения в последовательной цепочке тождественных преобразований, в быстроте и безошибочности выполнения преобразований, в умении найти кратчайший путь решения к окончательному виду преобразований [6].

В документе об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов основного общего образования обязательный минимум содержания основных образовательных программ по тождественным преобразованиям базового уровня являются следующие:

- выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений, содержащих степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем;

- выполнять несложные преобразования целых выражений: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые;

- использовать формулы сокращенного умножения (квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов) для упрощения вычислений значений выражений;

- выполнять несложные преобразования дробно-линейных выражений и выражений с квадратными корнями [45].

Авторы Н.С. Подходова, Н.Л. Стефанова, выделяют четыре этапа изучения тождественных преобразований:

- пропедевтический (5-6 классы);

- первый этап (начало 7 класса), использование нерасчлененной системы преобразований;

- второй этап (8-9 классы), рассмотрение конкретных видов преобразований;

- третий этап, формирование целостной системы преобразований (10-11 классы) [41].

Существует несколько подходов к определению тождества, мы их рассмотрим в первой главе. Для обозначения тождества был введен знак «≡» в 1857 году, немецким математиком Бернхардом Риманом, непосредственного преемника К. Гаусса [7].

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: тождественные преобразования в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования: разработать методические материалы обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.

Задачи исследования:

- выделить основные понятия линии тождественных преобразований;

- рассмотреть методическую схему обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы;

- представить методику обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы;
- охарактеризовать методические особенности тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы;
- рассмотреть организацию самостоятельных работ учащихся;
- показать разработку обучающих самостоятельных работ по теме «Тождественные преобразования» для 7-9 классов.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ педагогической и методической литературы; изучение опыта учителей математики по данной теме исследования; сравнительный анализ учебников и учебных пособий.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в ней представлены методические материалы по обучению тождественным преобразованиям учащихся 7-9-х классов, разработка обучающих самостоятельных работ, которые могут быть использованы учителями математики и студентами педагогических специальностей в ходе педагогической практики.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на первом этапе научной студенческой конференции “Дни науки” института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г. Тольятти, апрель 2016 г.).

На защиту выносятся:

1. Методические особенности обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.
2. Разработка обучающих самостоятельных работ для учащихся 7-9-х классов.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена методическим аспектам обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы. В ней рассмотрены основные понятия и содержание линии тождественных преобразований; представлена методическая схема изучения темы «Тождественные преобразования» в курсе алгебры основной школы; выявлены методические особенности по обучению данной темы учащимися 7-9-х классов.

В главе II представлены методические материалы по обучению тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы; представлена разработка обучающих самостоятельных работ по теме исследования для учащихся 7-9-х классов.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 47 наименований.

ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие и содержание линии тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы

Линия тождественных преобразований является одной из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она изучается в течение всего курса математики, начиная с начальных классов. В первом параграфе будут рассмотрены основные понятия данной содержательной линии такие как: «выражение», «тождественно равные выражения», «тождество» и «тождественные преобразования выражений» [7].

Определение. *Выражением* в математике называют запись, состоящую из чисел, букв (обозначающих постоянные или переменные величины), знаков математических действий. В числовых множествах имеют дело с числовыми выражениями [30].

Школьный курс математики выделяет два основных класса математических выражений: *алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).*

Определение. Алгебраическим выражением называется выражение, составленные из конечного числа букв и цифр, соединенных знаками действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень и извлечения корня) [31].

Определение. Трансцендентными называются аналитические функции, которые не являются алгебраическими (тригонометрические, логарифмические и показательные) [31].

Выражения являются предметом нашего изучения, поэтому можно выделить в каждом из этих классов следующие подклассы математических выражений (рис.1) [32].

Рис. 1 Подклассы математических выражений

Основы тождественных преобразований закладываются еще в начальной школе (законы арифметических действий). Систематически и углубленно эти вопросы изучаются в курсе алгебры, начиная с седьмого класса. Рассмотрим последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы (Таблица 1) [33].

Таблица 1

Класс	Виды выражений
7	Целые (одночлены и многочлены)
8	Дробные (дробные рациональные выражения, арифметические квадратные корни)
9(10)	Иррациональные (степень с рациональным показателем, корни *n-й* степени)
10	Тригонометрические выражения
11	Логарифмические выражения

Впервые понятие тождество сформулировано в 7 классе. Рассмотрим следующее определение, данное в учебнике А.Г. Мордковича:

Определение. *Тождество* – это равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в его состав переменных [36].

Например: $a + b = b + a, ab = ba$.

В дальнейшем вводится сначала определение тождественно равных выражений:

Определение. Два выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных, называются *тождественно равными* [36].

После этого дается понятие тождественного преобразования выражений:

Определение. *Тождественное преобразование выражения* – это замена исходного выражения на выражение, тождественно равное ему [36].

В этом определении слово «тождественное» иногда опускают, и говорят просто «преобразование выражения», при этом понимают, что речь идет о тождественном преобразовании [7].

Приведем примеры для пояснения, сформулированного выше определения.

Пример 1. Данное выражение $5x + 11 - 4$ можно заменить тождественно равным ему выражением $5x + 7$, т.е. эта замена есть тождественное преобразование выражения $5x + 11 - 4, 5x + 11 - 4 = 5x + 7$ [10].

Пример 2. Замена выражения $\frac{2a}{6}$ выражением $\frac{a}{3}$ является тождественным преобразованием, т.е. $\frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$ [10].

Контрпример: Выражение x тождественным преобразованием выражения x^2 не является, так как выражения x и x^2 не тождественно равные [10].

Следует отметить, что на практике при проведении тождественных преобразований удобно записывать выражения в виде равенства, т.е.

исходное выражение и выражение полученное после проведения некоторых тождественных преобразований. Например, запись $2x - x + 13 - 5 = x + 8$ показывает, что первоначальное выражение $2x - x + 13 - 5$ преобразовано к виду $x + 8$. Цепочкой равенств можно отобразить последовательность выполнения нескольких тождественных преобразований. К примеру, запись $2x - x + 13 - 5 = x + 13 - 5 = x + 8$ означает по шаговое проведение двух преобразований: первое – выражение $2x - x + 13 - 5$ преобразовали к виду $x + 13 - 5$, а его – к виду $x + 8$ [9].

В каждой области знаний, которая использует математику, возникает потребность в замене одно выражение другим, для простоты и удобства в решении рассматриваемой задачи. Другими словами, появляется необходимость в выполнении тождественных преобразований. Рассмотрим приведенные ниже упражнения.

1. Упростите выражение: $x^2 + a^3 - 3a^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}3a^3$.

2. Решите уравнение: $4x + 2x + x = 14$; $1 + \cos s + \cos 2x = 0$.

3. Докажите неравенство: $(c + 2)(c + 6) < (c + 3)(c + 5)$.

4.Найдите значение выражения: $3\sqrt{5}a - \sqrt{20}a + 4\sqrt{45}a$ при $a = 2{,}45$.

5. Докажите, что выражение: $\frac{(2k+1)^4-1}{4k^2+4k+2}$, где $k = N$, кратно 8.

6. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 6x^2 + 9$.

Обязательным условием для решения этих упражнений, отличающихся по содержанию, является предварительное выполнение тождественных преобразований содержащихся в них выражений [7].

На уроках математики, в пропедевтическом курсе, начинают отрабатываться навыки тождественных преобразований, такие как:

а) приведение подобных слагаемых:

б) раскрытие и заключение в скобки;

в) вынесение за скобки общего множителя.

Преобразования такого рода продолжают применять на уроке алгебры в 7 классе при изучении темы: «Многочлены». Учащиеся выполняют преобразования на основе законов и свойств арифметических действий:

- $a + b = b + a$ – сложение коммутативно;
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ – сложение ассоциативно;
- $a \cdot b = b \cdot a$ – умножение коммутативно;
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – умножение ассоциативно;
- $a + 0 = 0 + a = a$– сложение с нулем;
- $a - 0 = a$; $a - a = 0$ – вычитания с нулем;
- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ – умножения с нулем;
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – умножения с единицей;
- $a - (b + c) = a - b - c$ – вычитание суммы из числа;
- $(a + b) - c = (a - c) + b$ – вычитание числа из суммы;
- $a \cdot (b + c) = ab + ac$ – умножение дистрибутивно относительно операции сложения;
- если $a = b$, то $b - a$; если $a = b$ и $\mathrm{b} = \mathrm{c}$, то $a = c$ – свойства равенств [25].

Тождества школьного курса делятся на два этапа:

а) основное свойство дроби и тождества сокращенного умножения;

б) тождества, которые связывают основные элементарные функции (показательные, тригонометрические, логарифмические, степенные и др.) и арифметические операции [8].

Таким образом в данном параграфе было рассмотрено:

1. Основные понятия данной содержательной линии такие как: «выражение», «тождественно равные выражения», «тождество» и «тождественные преобразования выражений».

2. Подклассы математических выражений в курсе алгебры основной школы.

3. Последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

§2. Методика изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы

2.1. Целые рациональные выражения

В справочных материалах В.А. Гусева, А.Г. Мордковича рассмотрено следующее определение целых рациональных выражений:

Определение. *Целыми рациональными выражениями* называются алгебраические выражения, которые не содержат деления на переменные и извлечения корня (в частности, возведения в степень с дробным показателем) [31].

Примеры: $3x^2y - 2xy^2,\ a + b + \frac{c}{5}, \left(\sqrt[3]{2} - x\right)^4$.

В первом параграфе было дано определение тождества, поэтому имеет смысл рассмотреть следующие понятия: область определения алгебраического выражения и допустимые значения переменных.

Определение. Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют *допустимым значением переменных* [31].

Определение. Множество всех допустимых значениях переменных называют *областью определения алгебраического выражения* [28].

Целое рациональное выражение имеет смысл при любых значениях переменных. Так, при любых значениях переменных имеют смысл целые рациональные выражения $3x^2y - 2xy^2,\ a + b + \frac{c}{5}, \left(\sqrt[3]{2} - x\right)^4$.

В разделе целые рациональные выражения рассматриваются понятия одночленов и многочленов и действия над ними. В учебнике Ю.Н. Макарычева для 7 класса средней школы под редакцией С.А. Теляковского трактуются следующие определения:

Определение. *Одночленом* называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными. Например, $3a^2b \cdot (3{,}5a^3),\ (-21x^3y^2) \cdot 3x^2y \cdot 25xy^4, 4z \cdot (-2{,}5z^2)$ [27].

Определение. *Многочленом* называют сумму одночленов. Например, $3{,}6t^2 \cdot 2x\,^4t^3 + 4xt^3 - 2x^2t, \frac{1}{2}\,a^2b\,b^3 + 4ab^2$ [27].

В своей частной методике В.И. Мишин, при изучении тождественных преобразований целых рациональных выражений, выделяет следующие важные аспекты:

- на множестве одночленов полезно рассматривать лишь одну операцию - умножение;

- не следует рассматривать специально деление многочленов, отнеся его в раздел «рациональные дроби»;

- полезно считать тождественно равными два целых рациональных выражения, значения которых совпадают при одинаковых значениях, входящих в них переменных;

- тождественные преобразования лучше строить на основе законов арифметических действий (аксиом полугруппы и кольца), считать их аксиомами тождественных преобразований [32].

В таблице 2 рассмотрена методическая схема обучения тождественным преобразованиям целых рациональных выражений.

Методическая схема обучения тождественным преобразованиям целых рациональных выражений

Таблица 2

Раздел	Методические приемы вычислений

Целые рациональные выражения (одночлен, многочлен)	1. Приведение одночленов и многочленов к стандартному виду, выполнение основных действий с целыми рациональными выражениями (раскрытие и заключение в скобки, выполнение арифметических действий); 2. Приемы разложения многочлена на множители (вынесения общего множителя за скобки, способ группировки); 3.Приемы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения); 4. Специальный прием разложение квадратного трехчлена на линейные множители, выделения полного квадрата в трехчлене; 5. Обобщенный прием упрощения целого рационального выражения (приведение подобных членов); 6. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$; 7. Возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона).

2.2. Дробные рациональные выражения

В курсе алгебры основной школы в конце 7 и в начале 8 класса рассматриваются: тождественные преобразования алгебраических дробей; представление выражения в виде дроби; сокращение дробей. В справочных материалах В.А. Гусева, А.Г. Мордковича рассмотрено следующее определение дробных рациональных выражений:

Определение. *Дробными рациональными выражениями* называются алгебраические выражения, составленые из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления, причем используется деление на выражение с переменными [37].

Примеры: $\frac{4x^2+4x+1}{x-1}$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{c}{3}\right)^3$, $\frac{a^2-2a+4}{a^3+8}$.

Любое дробное выражение можно записать в виде $\frac{P}{Q}$, где P и Q – рациональные выражения, причем Q обязательно содержит переменные.

Такую дробь $\frac{P}{Q}$ называют *рациональной дробью*. Например, $\frac{x+1}{2x-\frac{1}{3}}$, $\frac{(x+2)(x^2-3)}{a+2b+5c}$ [43].

В учебнике алгебры Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк для 8 класса средней школы под редакцией С.А. Теляковского дается основное свойство дроби следующим образом:

Определение. Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

Запишем *основное свойство дроби* в буквенном виде: для натуральных чисел a, b и m справедливы равенства $\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$ и $\frac{a:m}{b:m} = \frac{a}{b}$ [29].

Например, $\frac{\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x^2+1}{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}} = \frac{12\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x^2+1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{4x^2-6x^2+12}{3x^2+2x+6}$.

Основное свойство дроби может быть использовано для перемены знаков у членов дроби.

На уроках алгебры учащиеся 8 класса встречают различные по содержанию упражнения, например:

1) $\frac{a^2-b^2}{x+y} : \frac{a-b}{x^2+y^2}$; 2) $\frac{x^2+2xy+y^2}{a^2-b^2} : \frac{x+y}{a+b}$; 3) $(3b-6b) \cdot \frac{a+b}{2a-4b}$;

4) $\frac{a+a^2+b^2+b}{x^2-y^2+x-y} : \frac{3a+3b}{2x-2y}$; 5) $\frac{4f^2}{2f-b} : \frac{12f^3}{4f^2-b^2} : \frac{2f^2}{6f^2-3fb}$.

Выполнение именно таких заданий проходит поэтапно. На первом этапе происходит умение распознавать формулы сокращенного умножения, на втором производится само преобразование, использующее формулы-тождества [43].

Ученики на первых порах записывают последовательно каждый шаг преобразований, затем некоторые операции опускают и выполняют устно. Потом учащиеся используют несколько тождеств в решении одного упражнения [24]. Рассмотрим ниже пример:

Упростить и проанализировать:

а) $\left(\frac{8a^2+2a}{8a^3-1}-\frac{2a+4}{4a^2+2a+1}\right)\left(1+\frac{2a+1}{2}-\frac{4a^2+10a}{4a^2+2a}\right)$;

б) $\left(\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}-\frac{4x^2}{x^2-1}\right):\left(\frac{1}{x^{2-}x^3}-\frac{1+x}{x^2}-1\right)$.

Требуется доказать, что значение данного выражения не зависит от значений, входящих в него букв.

а) $\left(\frac{4y}{x^{2-3xy}}-\frac{x}{xy-3y^2}\right):\frac{x^2-4y^2}{9xy^2-x^2y}$;

б) $\left(\frac{n^2-5n}{n^2-10n+25}+\frac{25}{n^2-25}\right)\cdot\frac{5+n}{125+n^3}$ и др.

Такие задание в целом направленны на усвоение структуры тождества, а также на понимание, что тождество можно как свернуть, так и развернуть т.е. на обратимость преобразований. Общая цель заданий– это углубить понимание тождеств за счет рассмотрения различных упражнений его в разных ситуациях, в сочетании с другими темами курса математики [24].

Автор В.И. Мишин рассматривает два подхода при изучении тождественных преобразований дробных рациональных выражений:

1) *Алгебраический подход* (заключается в том, что изучаются действия над выражениями). Для школы, в частности для седьмых и восьмых классов, где изучаются тождественные преобразования целых и дробно-рациональных выражений, этот подход не представляется возможным, так как для четкого обоснования действий над рациональными выражениями необходимо знание таких понятий, как кольцо многочленов и поле рациональных дробей.

2) *Теоретико-функциональный подход* (рассматривают многочлен как целую рациональную функцию (одного или нескольких переменных), а алгебраическую дробь как дробно-рациональную функцию [32].

Для школьной алгебры полезно объединять эти две позиции, потому что, в одном случае, приходится сосредоточивать внимание учащихся на алгебраической стороне вопроса, в другом - интерес представляет функциональная сторона. Следует отметить, что действия, в том смысле, который принят в арифметике, над алгебраическими выражениями, выполнить нельзя. Выполнить обозначенные действия возможно только при каждом конкретном наборе числовых значений входящих в эти выражения букв [32].

В таблице 3 рассмотрена методическая схема обучения тождественным преобразованиям дробных рациональных выражений.

Методическая схема обучения тождественным преобразованиям дробных рациональных выражений

Таблица 3

Раздел	Методические приемы вычислений
Дробные рациональные выражения	1. Приемы записи преобразований дробных рациональных выражений; 2. Сокращение рациональных дробей; 3. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю; 4. Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей; 5. Возведение рациональной дроби в целую степень; 6. Обобщенный прием упрощения рационального выражения (приведение подобных членов, прибавление и вычитание одного и того же числа); 7. Приемы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения).

2.3. Иррациональные выражения

В учебном пособие автор Н.Л. Стефанова выделяет цель методики изучения темы содержащих степени и квадратные корни – научить рационально выполнять тождественные преобразования степенных выражений, опирающие на знания свойств степеней [41].

В справочных материалах В.А. Гусева, А.Г. Мордковича рассмотрено следующее определение иррациональных выражений:

Определение. Если в алгебраическом выражении используется извлечение корня из переменных (или возведение переменных в дробную степень), то его называют *иррациональным выражением*. [34].

Начиная с 7 класса, ученики изучают тождественные преобразования выражений, содержащих степени. Вводится определение степени с натуральным показателем как произведения n раз числа a (4 класс, система Занкова),

где $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a;$ n раз $\quad a \neq 0, n \in N$

после изучаются темы x и n степеней, возведение в степень произведения и дроби, возведение степени в степень в учебнике Ш.А. Алимова по алгебре для 8 класса в связи с этим рассматриваются следующие тождества:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(a^n a^n) = a^n \cdot a^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

На основе этих тождеств при возведении в степень одночленов, показывают, в каком случае показатели степеней складывают, а в каком перемножают [5].

По учебной программе А.Г. Мордковича во второй четверти 8 класса изучаются темы, такие как: квадратные корни, арифметический квадратный корень и квадратный корень из произведения и дроби.

Изучают формулы – тождества:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Изучение степени с отрицательным показателем изучают в конце 8 класса. Учащиеся знакомятся с формулой $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ [43].

По учебной программе А.Г. Мордковича в 9 классе в третьей четверти изучают темы: степень с дробным показателем, и свойства корня n-ой степени. Рассмотрены следующие свойства:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

В таблице 4 рассмотрена методическая схема обучения тождественным преобразованиям иррациональных выражений.

Методическая схема обучения тождественным преобразованиям иррациональных выражений

Таблица 4

Раздел	Методические приемы вычислений
Иррациональные выражения	1. Специальные приемы основных простейших преобразований арифметических корней (выполняются с использованием свойств корня); 2. Преобразования выражений со степенями с рациональным показателем (выполняются с использованием свойств степени); 3. Прием доказательства неравенств. 4. Обобщенный прием упрощения иррационального выражения (приведение подобных членов, умножение на сопряженное выражение); 5. Приемы доказательства тождества (применяются так называемые формулы – тождества); 6. Приемы разложения многочлена на множители (вынесения общего множителя за скобки);

Таким образом в данном параграфе было рассмотрено:

1. Определения: целые рациональные выражения (одночлен, многочлен), дробные рациональные выражения, основное свойство дроби, иррациональные выражения, область определения алгебраического выражения и допустимые значения переменных.

2. Два подхода при изучении тождественных преобразований дробных рациональных выражений (алгебраический подход, теоретико-функциональный подход).

3. Методические схемы обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы.

§3. Методические особенности обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры

Авторы Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова в своей книге предлагают такую схему математических выражений (Рис. 2) [41].

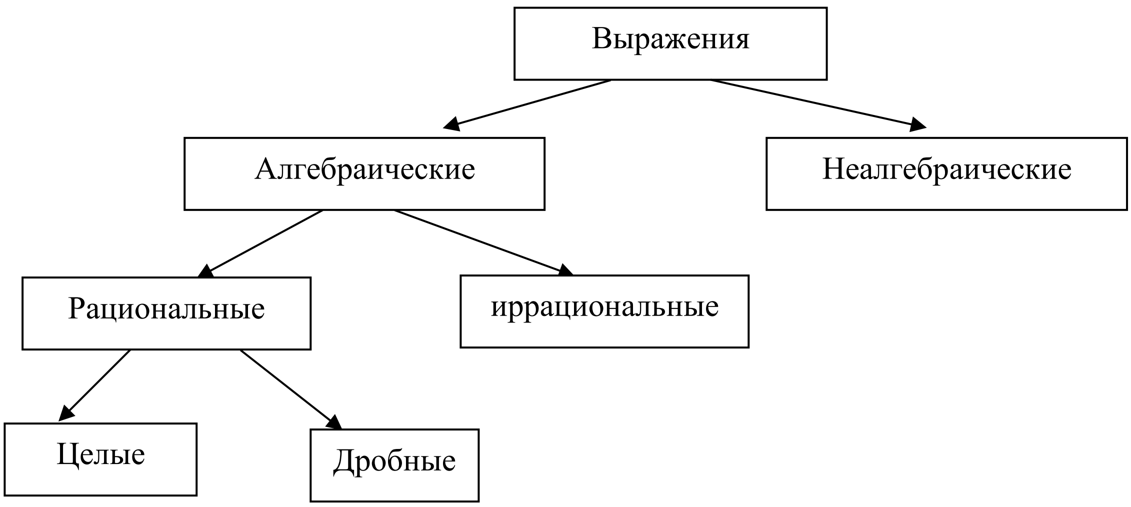


Рис. 2 Виды выражений.

Выделяют среди выражений:

- *выражение без переменных*

1) Термы (обозначающее число и не содержащие знака отношения);

2) Формула (содержащее один из знаков отношений).

- *выражение с переменными:*

1) Термы (числовая форма, выражающая числовую функцию числовой переменной, например $8 + y$);

2) Формула (высказывательная форма, выражающая логическую функцию числовой переменной – предикат) [39].

Начиная с 5 класса по учебнику Н.Я. Виленкина в сознание ученика закладывается понятие о тождественных преобразованиях, но по школьной программе термины «тождество» и «тождественное преобразование» еще не вводились. В 5-х классах выполняются задания в которых присутствуют простейшие преобразования числовых выражений и тех выражений, которые содержат переменные, тождественные преобразования, арифметические действия, выполняемые на основе свойств. Ученики ознакомляются с первыми основными тождествами $(a + b) + c = a + (b + \text{c})$, $a(b + c) = ab + ac$ и др.), а после используют их при решении различного рода упражнений:

а) При каких значениях переменной истинны равенства: $11(x + 4) = 11x + 44$; $(27 + v) \cdot 5 = 27 \cdot 5 + v \cdot 5$;

б) Сократить дробь: $\frac{18}{129} = \frac{18}{43 \cdot 3} = \frac{6}{43}$.

в) Выполнить действия: $144 \cdot 15 = (198 - 22) \cdot 15 = 4250 – 15$;

с) Найти значение выражения: $128 \cdot 23 + 23 \cdot 48 = 23 \cdot (128 + 48)$.

С помощью таких упражнения, мы подготавливаем учащихся к введению такого понятия как тождественное преобразование, и к пониманию целесообразности тех или иных преобразований [10].

Понятие коэффициента вводится в 6-ых классах, там учащиеся сталкиваются с выражениями вида: $4a, -2ab, 7\text{a}b$, то есть встречают понятие одночлена, хотя термин «одночлен» не вводится по школьной программе на этой ступени. Внедрение подобных слагаемых приводится как пример использования распределительного свойства к сумме произведений с идентичными буквенными множителями: $4a + 8b + 3a = a(4 + 3) + 8b = 7a + 8b$ [18].

Впервые формулировка определение тождества вводится для учащихся в 7-м классе. Автор А.Г. Мордкович рассматривает три подхода к определению тождества.

Определение. *Тождество* – это равенство, верное при любых значениях переменной [36].

Целые рациональные выражения этому определению удовлетворяют, но равенства вида $\frac{a^2}{a} = a$ или с радикалами $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ под это определение уже не подходят, поэтому в 8-м классе в учебнике А.Г. Мордковича под ред. Теляковского, когда появляются дробные рациональные выражения, внедряется уже другое определение.

Определение. *Тождество* – это равенство верное при всех допустимых значениях, входящих в него переменных [37].

Данное определение расширяет множество выражений, к которым применимо понятие тождества, но на примере $\sqrt{t} = \sqrt{-t}$, мы видим, что такое тождество не имеет смысла [37]. В связи с этим, учащимся в учебнике А.Г. Мордковича предлагают рассмотреть другую трактовку определения.

Определение. *Тождество* рассматривается на некотором множестве как равенство, верное для любых значений переменных из данного множества [37].

Это множество является подмножеством общей области определения выражений, стоящих в левой и правой частях равенства.

Например, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – тождество на множестве действительных чисел; $\sqrt{t^2} = t$ – тождество принадлежит множеству положительных действительных чисел; $\sqrt{y(y+1)} = \sqrt{y}\sqrt{y+1}$ – тождество при $y > 0$ [39].

Авторы Н.С. Подходова, Н.Л. Стефанова рассматривают две точки зрения на тождественность алгебраических выражений и тождественное преобразование: формальную и функциональную. С формальной точки зрения если два выражения будут получены друг из друга с помощью элементарных преобразований т.е. применяя последовательно правила тождественного преобразования и основных законов действий, то они тождественны. С функциональной точки зрения если два выражения принимают одинаковые численные значения при произвольных значений букв, входящих в данные выражения, то они тождественны [41].

В частной методики автор В.И. Мишин дифференцирует понятия:

- *тождества-равенства* (формулы сокращенного умножения, свойства степени с натуральным показателем и др.)
- *тождества-действия* (вынесение общего множителя за скобку, приведение подобных слагаемых и др.) или тождественные преобразования.

В настоящее время наличие линии тождественных преобразований видны достаточно явно, в ее содержание входит: изучение тождеств в числовой системе, применение их к решению уравнений и упрощению выражений, изучение тождеств в классе элементарных функций.

В своей частной методике преподавания математики в средней школе Р.С. Черкасов рассматривает организацию обучению отдельных тождеств, и предлагает применение специальных циклов заданий. Перечень заданий на материале именно этой темы, автор считает последовательным соединением упражнений нескольких аспектов изучения и приемов расстановки материала. Применительно к тождественным преобразованиям представление о цикле может быть дано следующим образом. Задания связаны с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. В состав цикла, вместе с исполнительными, входят задания, предусматривающие распознавания применимости изучаемого тождества [46].

Рассматриваемое тождество применяется для проведения вычислений на различных числовых областях. Учитывается специфика заданий на данную тему. Авторы Р.С. Черкасов, А.А. Столяр, задания разбивают на две группы:

I группа. Первоначальный этап, применяется для отработки заданий в явно видной ситуации и усвоения тождества, вместе с его формулировкой определения. Весь материал методически построен для несколько идущих подряд уроков.

II группа. Этап углубленного изучения тождества. Материал связывает изучаемое тождество с различными его применениями за счет рассмотрения его в сложных ситуациях в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам школьного курса [46].

На основе этих двух групп, представим методическую систему упражнений для усвоения тождества – разность квадратов $a^2 - b^2 - (a - b)(a + b)$(Таблица 5) [32].

Методическая система для усвоения тождества разность квадратов $\boldsymbol{a^2 - b^2 - (a - b)(a + b)}$

Таблица 5

Задания	Методические указания
I группа 1.Представить в виде произведения: $a)$ $x^2 – y^2$; в)$a^2 - 6^2$; с) $121 –\ b^2$.	Задания направлены на знания и понимания учащимися прежде всего словесной формулировки свойства, тождества.
2.Проверить справедливость равенства: $(10^2 – 1)(10^2 + 1)\ =\ 10^4 – 1$.	Задание на отработку двустороннего преобразования.
3. Раскрыть скобки в выражении: $(2xy\ +\ 7x^2)(2xy\ –\ 7x^2)$	Умение правильно раскрывать скобки и отрабатывается применение тождества.
4.Вычислить: $26^2 – 23^2;\ 25 \cdot 121$.	Эта группа упражнений развивает навыки применения тождества и углубляет представление об операции подстановки.
5. Разложить на множители: $a^4 - b^4;\ 16\ (xy)^2 –\ (x - y)^2$.	Применение изучаемое тождество дважды.
6.Упростить: $(a + b)^2 - (a - b)^2$.	Переосмысление изучаемого тождества в терминах отношений между компонентами арифметических действий.
II группа 1.Разложить на множители: $x^2 – 10$. 2.Исключить иррациональность	Идет привлечение новой операции - извлечение корня. Задания предполагают наличие уже сформированных навыков использования

в знаменателе дроби: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. 3.Доказать, что если к – нечетное число, то к -1 кратно 4. 4.Функция задана выражением $$f(x) = \frac{x^2 + 2\|x\| + 1}{x^2 - 1}$$ Упростить, раскрыв знак модуля.	изучаемого тождества для разности квадратов. Цель предлагаемых заданий – углубить понимание тождества с различными его применениями за счет рассмотрения его в сложных ситуациях в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам школьного курса.
5. Решить уравнение: $z^3 - 4z = 15\ (*)$	$(*)$ <=> $z^3 - 9z = 15 - 5z$ <=> $z(z-3)(z+3) = 5(3-z)$ <=> $z = 3$. или $z(z+3) = -5$. Но уравнение $z(z+3) = -5$ действительных корней не имеет, поэтому $z = 3$ - единственный корень уравнения. В предлагаемом задании использование тождества для разности квадратов составляет лишь часть решения уравнения, являясь ведущей идеей проведения преобразований.

Для формирования навыков тождественных преобразований, автор И.В. Баум считает, что задача учителя стоит в том, что бы добиться от учащегося устно выполнять некоторые промежуточные преобразования не только при устном счете, но и в процессе решения различных задач [7]. Полезно отметить, что при выполнения тождественных преобразований, мы сталкиваемся с выражением, область определения которого задана. Как правило, она может сужаться или расширяться.

Пример 1.

$x \neq 0, x \neq -3$

$\frac{x+2}{x(x+3)} - \frac{1}{3x+9} = \frac{3x+6-x}{3x(x+3)} = \frac{2}{3x}$ - область определения расширилась

Пример 2.

$\frac{n+1}{n-1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$ - область определения сузилась

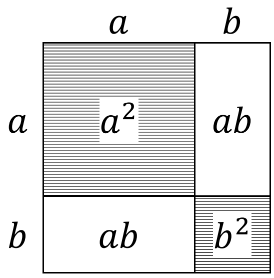
$n \neq 1, n \neq 0$

Что бы этого избежать, нужно осуществлять преобразования на области определения исходного выражения:

$$\frac{n+1}{n-1} = \begin{cases} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \text{ если } n \neq 0 \\ -1, \text{ если } \; n = 0 \end{cases}$$

$n \neq 1$

Подавляющее большинство тождеств, которые изучаются в школьном курсе математики, доказываются. Доказательства опираются на свойства арифметических операций, определения используемых понятий и их свойства. Часто к доказательствам привлекаются геометрические понятия, тождествам даются геометрические интерпретации. Например, при доказательстве тождеств $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$, $\cos\,(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$, используется понятие поворота плоскости вокруг точки, для тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ дается следующая геометрическая иллюстрация:



В зависимости от уровня строгости можно выделить:

а) доказательства, основанные на неполной индукции;

б) доказательства, опирающиеся на свойства арифметических действий и не использующие свойств числовой системы;

в) доказательства, использующие условия разрешимости уравнения $f(x) = a$, где $f(x)$ - изучаемая элементарная функция [22].

К типу а) относятся доказательства свойств степени с натуральным показателем, вывод формул n-го члена арифметической и геометрической прогрессий. Для придания полной строгости этим доказательствам необходимо использование метода математической индукции, с которым учащиеся общеобразовательных классов не знакомятся. Чтобы учащиеся осознали структуру доказательства, следует рассмотреть частные случаи для различных значений натуральных чисел, в том числе и больших.

Например,

$$a^5 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^9 = a^{5+4};$$

$$a^9 \cdot a^5 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{14} = a^{9+5};$$

$$a^{324} \cdot a^{250} = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = a^{574} = a^{324+250}.$$

В приведенных рассуждениях показатели степени играют роль переменных. По указанному образцу можно повторять рассуждения для любых значений показателей степени, поэтому они имеют общий характер.

К типу б) относятся наиболее распространенные в школьном курсе алгебры доказательства. Именно их стоит проводить в развернутом виде, поясняя все выполняемые шаги, которые просты и доступны для учащихся. Например, при доказательстве тождеств $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ используются правила умножения многочлена на многочлен, раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, основанные на распределенном свойстве умножения относительно сложения. Распределительное свойство умножения относительно сложения знакомо учащимся с начальной школы и неоднократно отрабатывалось при изучении различных чисел. Поэтому и суть доказательства учащимся понятна [22].

Доказательства типа в) наиболее трудные в школьном курсе алгебры, так как в них используются достаточно сложные логические средства. Эти доказательства применяются при выводе свойств степени с рациональным показателем и логарифмической функции. Например, при рассмотрении свойства логарифмов пользуются тем фактом, что логарифм числа b по основанию $a -$ это единственный корень уравнения $a^x = b$ при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. При $b \leq 0$ указанное уравнение решений не имеет. Таким образом получаем, что при $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$ $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$. Тогда $x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Поскольку $xy > 0$, то $\log_a(xy) =$

$\log_a x + \log_a y$. Основная идея доказательства в типа в) сопоставление двух взаимно обратных функций. Эта идея может быть полностью осознана только в том случае, если учащиеся знакомы с понятиями «обратная функция», «функция, обратная данной», «взаимно обратные функции». В общеобразовательных классах изучение указанных понятий программой не предусмотрено [24].

Все тождества, которые рассматриваются в теоретической части школьных курсов алгебры и алгебры и начал анализа, широко используются в упражнениях на преобразование выражений, при решении уравнений и неравенств, при доказательстве новых тождеств. Запоминая краткие формулировки, учащиеся забывают условия, при которых соответствующие тождества доказывались, что приводит к появлению ошибок при решении задач. Поэтому необходимо требовать от учащихся воспроизведения полных формулировок [17].

При доказательстве тождеств весьма распространена логическая ошибка, которую продемонстрируем на примере. Пусть требуется доказать тождество $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$. Очень часто можно увидеть такое доказательство:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^3 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

$$x^3 + y^3 = x^3 + y^3$$

Значит, тождество верно [8].

Рассуждения в таком доказательстве проводятся от искомого к данным в виде нисходящего анализа. Предполагают, что тождество верно и стараются получить из него верное следствие. Если верное следствие получено, то обязательным этапом доказательства является обратимость рассуждений. В том случае, когда все рассуждения обратимы, доказываемое тождество верно. В противном случае следует искать другой способ доказательства. В приведенном примере вывод должен быть сделан после проверки обратимости рассуждений. А именно: «Так как к правой части последнего равенства можно добавить многочлен $3x^2y+3xy^2-3x^2y-3xy^2$, тождественно равный нулю, а затем перегруппировать слагаемые, вынести общий множитель за скобки и использовать тождество $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3$, то все проведенные рассуждения обратимы и тождество доказано». Проверка обратимости обязательна, так как из неверного утверждения можно получить верное следствие. Например, из неверного утверждения $5\ =-5$ получаем возведением в квадрат обеих частей верное равенство $5^2=(-5)^2$ [25]. Примерами необратимых рассуждений являются следующие:

1. Если $a=b\neq 0$, то $a^2=b^2\neq 0$;
2. Если $\alpha=\beta$, то $\cos\alpha=\cos\beta$;
3. Если $\alpha=\beta$, то $\sin\alpha=\sin\beta$;
4. Если $\alpha=\beta$, то $\mathrm{tg}\alpha=tg\beta$;
5. Если $\alpha=\beta$, то $\mathrm{ctg}\alpha=\mathrm{ctg}\beta$;
6. Если $\sqrt{t}=a$, то $t=a^2$.

Рассмотрим из того, что $a^2=b^2\neq 0$ следует, что $a=b$ или $a=-b$; из того, что $\sin\alpha=\sin\beta$; следует, что $\alpha=\beta+2\pi k$ или $\alpha=\pi-\beta+2\pi k,$ где $k\in Z$ [14].

Другими способами доказательства тождества А = В являются:

1. Рассмотрение разности А – В и ее преобразование к нулю;
2. Преобразование правой части В к левой части А;
3. Преобразование левой части А к правой части В;
4. Преобразование отдельно левой части А и правой части В к одному и тому же выражению.

Учитель математики Л.П. Морозова, рассматривает примеры преобразований в качестве методических задач, выполненных учениками.

Пример 1. Вычислить $((-2)^2)^{\frac{1}{2}}$.

Четыре ученика дали различные решения этой задачи.

$((-2)^2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^1=-2;$

$((-2)^2)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=2;$

$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;$

$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = -2.$

Кто решил правильно? В чем причина ошибок остальных?

Пример 2. Найти значение выражения $\sqrt{(a-5)^2}$ при $a = 2$.

Ученики дали решения:

$\sqrt{(a-5)^2} = a - 5 = 2 - 5 = -3;$

$\sqrt{(a-5)^2} = \sqrt{(2-5)^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

Кто решил правильно? В чем причина ошибки другого? Как он должен был записать решение?

Пример 3. Решить уравнение $lgx^2 = 2$.

Ученик решил его так.

$2lg\,x = 2;$

$lgx = 1;$

$x = 10.$

Решите уравнение правильно. Объясните причину ошибки ученика [38].

Рассмотрим последовательную цепочку обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений (Таблица 6), с помощью которой, можно выявить общие методические рекомендации для усвоения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы [32].

Последовательная цепочка обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы

Таблица 6

Раздел		Выполнения основных действий	Замечание	Виды преобразований
Целые рациональные выражения	**Одночлен** - знать: определение одночлена, понятие степени и его свойства, стандартный вид.	Умножение одночленов, деление и возведение в степень одночленов.	Для выполнения деления одночленов необходимо придерживаться двум условиям: 1) Показатель степени переменной делимого должен быть больше	

			показателя степени той же переменной делителя; 2) Делитель не должен содержать переменных, которых нет в делимом.	
	Многочлен -знать: определение многочлена, стандартный вид, понятие степени и его свойства, дистрибутивный закон.	Производятся все четыре основные действий с многочленами (сложение, вычитание, умножение и деление), возведение в степень, прием разложения на множители многочленов.	Для выполнения деления многочленов необходимо придерживаться двум условиям: 1) Степень делимого должен быть больше степени делителя; 2) Деление может быть как с остатком так и без остатка.	- деление на основе разложения на множители; - приведение подобных слагаемых; - раскрытие и заключение в скобки; - формулы сокращенного умножения; - приведение к стандартному виду; - разложение на множители двучлена $x^n - a^n$; - возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона).
Дробные рациональные выражения -знать: определение дробного выражения, Основное свойство дробного выражения и следствия из него, правила действий с числовыми дробями.		Производятся все четыре основные действий с дробными рациональными выражениями (сложение, вычитание, умножение и деление), возведение в степень дробных выражений.	Устанавливать область определения исходного дробного выражения с переменной.	Приведение дробей к общему знаменателю, сокращение дробей.
Иррациональные выражения -знать: определение иррациональных		Умножение, деление, возведение в степень корней	Устанавливать область определения исходного иррационального выражения.	Внесение рационального множителя под знак радикала,

выражений, понятие и основное свойство арифметического корня, теоремы о преобразованиях корней.	извлечение корня из произведения, дроби, степени, корня.		сокращение показателей корня и подкоренного выражения, вынесение и уничтожение иррациональности в дроби.

Таким образов в этом параграфе было рассмотрено:

1. Три подхода к определению «тождества».

2. Специфика заданий на данную тему которая разбита на две группы (I группа- первоначальный этап, II группа – этап углубленного изучения тождества).

3. Методическая система для усвоения тождества разность квадратов $a^2 - b^2 - (a - b)(a + b)$.

4. Последовательная цепочка обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы.

Выводы по первой главе

Линия тождественных преобразований является одной из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она изучается в течение всего курса математики, начиная с начальных классов.

Школьный курс математики выделяет два основных класса математических выражений: *алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).*

В первой главе было рассмотрено:

1. Основные понятия данной содержательной линии такие как: «выражение», «тождественно равные выражения», «тождество» и «тождественные преобразования выражений».

2. Подклассы математических выражений в курсе алгебры основной школы.

3. Последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

4. Определения: целые рациональные выражения (одночлен, многочлен), дробные рациональные выражения, основное свойство дроби, иррациональные выражения, область определения алгебраического выражения и допустимые значения переменных.

5. Два подхода при изучении тождественных преобразований дробных рациональных выражений (алгебраический подход, теоретико-функциональный подход).

6. Методические схемы обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы.

7. Три подхода к определению «тождества».

8. Специфика заданий на данную тему которая разбита на две группы (I группа- первоначальный этап, II группа – этап углубленного изучения тождества).

9. Методическая система для усвоения тождества разность квадратов $a^2 - b^2 - (a - b)(a + b)$.

10. Последовательная цепочка обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы.

11. Методические особенности по обучению данной темы учащимися 7-9-х классов.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ОБУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§4. Методика обучения тождественным преобразованиям на основе опыта работы учителей

Изучение вопросов связанных с тождественными преобразованиями выражений перед учителем стоит главная цель – формировать у учащихся устойчивые умения и навыки. В достижение этой цели нужно:

- формировать у учащихся знания о приемах и методах решения этих задач, способы контроля правильности их решения;

- включать тождественные преобразования в контекст деятельности по решению любых задач;

- корректировать представления учащихся о содержании основных понятий, которые относятся к этим видам задач [21].

Поставленная цель также определяет характер учебного взаимодействия учителя и учащихся. Учитель должен побуждать учащихся к самостоятельному поиску решения задачи и демонстрировать им наиболее рациональный способ [21]. Для развития у учащихся умения выполнять отдельные виды дедуктивных умозаключений нужно приучать школьников рассуждать, таким образом, при выполнение аналогичных задач: «Для любых чисел a, b и c справедливо распределительное свойство $(a + b)\,c = ac + bc$, значит, и для наших чисел оно верно, то есть…». Вот на таком простом учебном примере можно воспитать потребность в обосновании выполняемых действий и в доказательстве, что, является хорошей пропедевтикой для проведения более сложных дедукций при изучении систематического курса алгебры [8].

В учебном пособии «Методика и технология обучения математике» автор Н.Л. Стефанова выделяет следующие этапы освоения применений преобразований буквенных, числовых выражений и формул [41].

I. Начала алгебры. На первом этапе используется неразделенная система преобразований, которая при выполнений действий над любыми частями равенства опирается на правила. Пример: а) $6x - 3x = 2$; б) $5x = 3x + 2$; в) $7\,(4 - 2y) + 4y = 5\,(2 - 2y)$. Общая идея состоит в том, что бы упростить данные равенства с помощью элементарных правил. Рассмотрим подробно, каких правил: применяя тождество $6x - 3x = (6 - 3)x$ для упрощения в первом задании, тождественное преобразование данное уравнение переводит в равносильное ему уравнение $3x - 3$. Во втором уравнение для решения требуется и тождественное, и равносильное преобразования, т.е. воспользоваться правилом переноса членов уравнения с одной стороны в другую с измененном знаком. Такие же правила применяется для более громоздких заданий, например, как третье [41].

Цель этапа – достичь высокого уровня в выполнении простейших уравнения, задающих функции, упрощение формул, и с опорой на свойства действий проводить рационально вычисления.

На первом этапе, начал алгебры, использование системы приемов и правил проведения преобразований имеет обширную область приложений на протяжении всего курса математики, но эта система в связи своей малой специфичности нуждается в дополнительных преобразований [41].

II. Формирование навыков применения конкретных видов преобразований. С введением формул сокращенного умножения на этом этапе происходит освоение соответствующих видов преобразований. Рассматриваются преобразования, с разными видами элементарных функции: степенных, показательных, тригонометрических, логарифмических. На каждый из этих типов преобразований требуется уделять внимание, на этапе изучения, для усвоения их характерных особенностей. Появляется возможность определить главные черты всех рассмотренных преобразований, после накопления полного материала, и на этой основе водится понятие тождественного и равносильного преобразований [41].

Специфика раздела по мнению учителя математики Л.П. Морозовой, «Тождественные преобразования выражений» заключается в том, что он открывает широкие возможности для выработки у учащихся важных трудовых умений, способствует развитию воли, сообразительности, творческой инициативы, самоконтроля и т.п. В частности, при выполнении заданий комбинированного характера ученик должен вспомнить все известные правила выполнения тождественных преобразований, суметь, следуя этим правилам, шаг за шагом сделать все выкладки, не допустить никаких ошибок, так как малейшая ошибка, например, неверно поставленный знак, делает бессмысленными все усилия. Такая работа способствует воспитанию настойчивости, аккуратности, внимания, осмыслению материала с новых позиций. Целесообразно подобранные упражнения, например при введении в тему, способствуют развитию интереса к математике, мотивации изучения материала [38].

Примеры.

1) Учитель предлагает числовой фокус:

«Задумайте число, умножьте на задуманное, к результату прибавьте 1, к полученному результату прибавьте удвоенное задуманное число. Скажите, какое число у вас получилось, а я угадаю, какое число вы задумали».

2) Приемы устного счета.

а) учитель моментально находит квадраты чисел, оканчивающихся на цифру 5: (75^2, 45^2, 55^2и т. д.), произведение двузначных чисел, число десятков которых одинаково, а сумма единиц равна 10 ($53 \cdot 57, 46 \cdot 44, 61 \cdot 69, 83 \cdot 87$ и т. д.) [44];

б) учитель просит учеников назвать любое двузначное число, сам записывает другой множитель и сразу указывает результат. Например, дети называют число 27, учитель - число 23 и дает ответ - 621. Дети удивлены - в чем секрет? Учитель говорит, что секрет они раскроют сегодня после изучения нового материала [38].

Информация из первой главы дает четко понимать, что такое тождественное преобразование выражений, следующий вопрос, которое нужно разобрать, это какие основные преобразования существуют и как они выполняются.

На основе опыта работы учителей Л.П. Морозовой, В.В. Крючковой, Е.Г. Шаталиной, можно выделить ряд наиболее часто используемых тождественных преобразований, которые проводятся с выражениями различных видов. [25,38,47].

Представим обзор основных тождественных преобразований, используемых в основной школе (Таблица 7).

Основные тождественные преобразования, используемых в основной школе

Таблица 7

Тождественные преобразования
1. Тождественные преобразования и ОДЗ.
2. Перестановка местами слагаемых, множителей.
3. Раскрытие скобок.
4. Группировка слагаемых, множителей.
5. Замена разностей суммами, частных произведениями и обратно.
6. Выполнение действий с числами.
7. Вынесение за скобки общего множителя.
8. Приведение подобных слагаемых.
9. Замена чисел и выражений тождественно равными им выражениями.
10. Прибавление и вычитание одного и того же числа.

Рассмотрим подробно каждое тождественное преобразование на основе опыта работы учителей:

Тождественные преобразования и ОДЗ

В 8 классе начинается изучение выражений, которые имеют смысл не при любых значениях переменных. По мнению опытных учителей, при проведении тождественных преобразований таких выражений нужно следить за областью допустимых значений (ОДЗ) переменных.

Некоторые тождественные преобразования не изменяют ОДЗ переменных. Например, переход от выражения $a+(-b)$ к выражению $a-b$ является тождественным преобразованием, причем ОДЗ переменных a и b при этом переходе не изменяется [5,25,47].

Другие тождественные преобразования сужают область допустимых значений, например, при переходе от выражения x к выражению $\frac{x^2}{x}$ ОДЗ переменной x сужается с множества всех действительных чисел до множества всех действительных чисел, из которого исключен нуль. А иногда происходит и расширение ОДЗ, как при замене выражения $\frac{x^2}{x}$ тождественно равным ему выражением x. Здесь ОДЗ переменной x в выражении $\frac{x^2}{x}$ есть множество действительных чисел за исключением нуля, а в полученном после преобразования выражении x ОДЗ переменной x есть все множество действительных чисел [31].

Возникает логичный вопрос: «Влияет ли на решение задачи сужение или расширение ОДЗ при проведении тождественных преобразований»? Может повлиять и привести к неверному результату. Поэтому нужно быть внимательным к ОДЗ переменных при проведении тождественных преобразований выражений [31].

<u>Перестановка местами слагаемых, множителей</u>

Начнем с тождественного преобразования, имеющего говорящее за себя название перестановка местами слагаемых. Справедливо правило: в любой сумме слагаемые можно переставлять местами. Это правило вытекает из переместительного и сочетательного свойств сложения. Из этих свойств следует, что все выражения, полученные после перестановки местами слагаемых, тождественно равны исходному выражению. Поэтому, перестановка местами слагаемых в сумме является тождественным преобразованием [41].

Рассмотрим пример. Возьмем сумму трех слагаемых вида $3+5+7$. Можно поменять местами слагаемые 3 и 5, при этом выражение примет вид $5+3+7$. Можно было в исходном выражении переставить первое слагаемое на место третьего, а третье – на место первого, в этом случае мы бы получили выражение $7+5+3$. А можно исходное выражение путем перестановки слагаемых преобразовать к виду $7+3+5$ (сначала меняем местами слагаемые 3 и 7, приходим к выражению $7+5+3$, после чего в полученном выражении меняем местами 5 и 3) [18].

Слагаемые в суммах могут быть представлены не только числами, но и выражениями. Их тоже можно переставлять местами. Например, сумму двух слагаемых вида $3+sinx$ можно путем перестановки слагаемых преобразовать к виду $sinx+3$. А в сумме трех слагаемых $\frac{1}{a+b}$, $\left(\sqrt{a^2+2a+5}+\frac{a}{7}\right)\cdot a^3$ и $(-12a)$ вида $\frac{1}{a+b}+\left(\sqrt{a^2+2a+5}+\frac{a}{7}\right)\cdot a^3+\left(\sqrt{a^2+2a+5}+\frac{a}{7}\right)\cdot a^3+(-12a)$ слагаемые можно переставить, например, так $(-12a)+\frac{1}{a+b}+\left(\sqrt{a^2+2a+5}+\frac{a}{7}\right)\cdot a^3$. В свою очередь можно переставить местами слагаемые в знаменателе дроби $\frac{1}{a+b}$, при этом дробь примет вид $\frac{1}{b+a}$. А выражение под знаком корня $a^2+2\cdot a+5$ тоже является суммой, в которой можно поменять местами слагаемые [33].

Аналогично перестановке местами слагаемых проводится следующее преобразование – перестановка местами множителей в произведениях.

Соответствующее правило звучит так: в произведении можно переставлять местами множители. Оно основано на переместительном и сочетательном свойствах умножения, из которых следует, что в результате перестановки местами множителей получается выражение, тождественно равное исходному выражению. Это и объясняет тот факт, что перестановка местами множителей представляет собой тождественное преобразование.

Перестановка местами слагаемых и множителей бывает полезна, например, при вычислении значений выражений или упрощении их вида, она может также предшествовать группировке. [5,25,47].

Раскрытие скобок

Числовые выражения и выражения с переменными в своей записи могут содержать скобки. Эти выражения можно заменить тождественно равными выражениями, в которых будет меньшее количество скобок или их не будет вовсе. Такой преобразование выражения называют раскрытием скобок [33].

Для примера рассмотрим выражение со скобками вида $3 + (x - \frac{1}{x})$, после раскрытия скобок оно примет вид $3 + x - \frac{1}{x}$. Еще пример: выражение $3(x-1) + \left(-\frac{1+x}{1-x}\right)$ можно преобразовать в тождественно равное выражение без скобок $3 - x - \frac{1+x}{1-x}$ [41].

Группировка слагаемых, множителей

К суммам трех и большего количества слагаемых применимо тождественное преобразование, получившее название группировка слагаемых. Под группировкой слагаемых понимают объединение нескольких слагаемых в группу, путем их перестановки и заключения в скобки. То есть, при группировке слагаемые переставляются местами так, чтобы группируемые слагаемые оказались рядом, после чего они заключаются в скобки.

Для наглядности приведем пример. После группировки первого слагаемого с третьим, выражение $5 + 7 + 1$ примет вид $(5 + 1) + 7$.

Аналогично в произведениях трех, четырех и т.д. множителей может быть проведена группировка множителей. Например, в произведении $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ можно сгруппировать первый множитель с третьим, а второй – с четвертым, при этом придем к выражению $(2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 5)$. А если бы мы сгруппировали первый, второй и четвертый множители, то получили бы выражение $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4$.

Группируемые слагаемые и множители могут быть не только числами, но и переменными, и целыми выражениями [30].

Замена разностей суммами, частных произведениями и обратно

Знакомство с противоположными числами позволило нам вычитание из числа a числа b рассматривать как прибавление к числу a числа $-b$. То есть, справедливо равенство $a - b = a + (-b)$. На базе этого равенства выполняется замена разностей суммами.

В любом выражении мы можем заменить разность суммой. Например, в числовом выражении $4 + 3 - 2$ разность чисел $3 - 2$ мы можем записать в виде суммы $3 + (-2)$, в итоге исходное выражение примет вид $4 + 3 + (-2)$. Еще пример: все разности в выражении $5 + 2 \cdot x - x^2 - 3 \cdot x^3 - 0{,}2$ можно заменить суммами как $5 + 2 \cdot x + (-x^2) + (-3 \cdot x^3) + (-0{,}2)$.

Разобранное преобразование позволяет нам от любых разностей переходить к суммам. Заметим, что достаточно часто выражения, содержащие вычитание, называют суммами. К примеру, выражение $3 - x - 5$ – это сумма трех слагаемых 3, $-x$ и -5, так как оно может быть заменено тождественно равное ему суммой вида $3 + (-x) + (-5)$.

Аналогично можно выполнить обратную замену суммы разностью. Это преобразование выполняется на базе равенства $a + b = a - (-b)$. Например, сумму $x^2 + x$ можно заменить разностью вида $x^2 - (-x)$.

Введение понятия взаимно обратных чисел позволяет деление на некоторое число заменить умножением на число, обратное делителю. Этому преобразованию отвечает равенство $a : b = a \cdot (b^{-1})$.

Озвученный вид преобразования частного в произведение лежит в основе правила деления обыкновенных дробей. Например, частное $\frac{1}{3} : \frac{3}{5}$ можно заменить произведением вида $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3}$. Аналогично деление на некоторое выражение можно заменить умножением на обратное выражение. К примеру, в выражении $1 + 5 : x : (x + 3)$ деление на x можно заменить умножением на $\frac{1}{x}$, а деление на $x+3$ – умножением на $\frac{1}{x+3}$, после такого преобразования оно примет вид $1+5\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+3}$.

Имеет место и обратная замена умножения делением, ей отвечает равенство $a\cdot b=a:(b^{-1})$. Например, в выражении $5:\frac{x}{x^2+1}-3$ умножение можно заменить делением как $5:\frac{x^2+1}{x}-3$ [6].

<u>Выполнение действий с числами</u>

Одно из самых главных тождественных преобразований выражения заключается в выполнении действий с числами. Понятно, что действия должны выполняться в соответствии с принятым порядком выполнения действий: сначала степени чисел, корни из чисел, логарифмы, тригонометрические и другие функции заменяются их значениями, далее выполняются действия в скобках, после чего – остальные действия, причем все действия выполняются слева направо и умножение с делением выполняются до сложения и вычитания. В результате выполнения действий числами исходное выражение преобразуется в тождественно равное ему выражение [6].

Рассмотрим несколько примеров преобразования выражений путем выполнения действий с числами.

Начнем с простого выражения вида $5+3\cdot2-x$. В этом выражении мы сначала выполняем умножение чисел 3 и 2, после этого оно примет вид $5+6-x$. Теперь складываем числа 5 и 6, в результате имеем $11-x$ [].

Теперь преобразуем выражение $3\cdot(2^3-1)\cdot a+\sqrt{4}\cdot(x^2+5x)$, выполнив все возможные действия с числами. В этом выражении есть степень 2^3 и корень $\sqrt{4}$, вычисляем их значения в первую очередь: $2^3=8$ и $\sqrt{4}=2$. После подстановки этих значений исходное выражение преобразуется к виду $3\cdot(8-1)\cdot a+2\cdot(x^2+5x)$. Теперь вычисляем разность в скобках: $8-1=7$, после этого приходим к выражению $3\cdot7a+2\cdot(x^2+5x)$. Еще мы можем выполнить умножение чисел 3 и 7, в итоге имеем $21a + 2 \cdot (x^2 + 5x)$. Выполняя действия с числами, исходное выражение преобразовали к тождественно равному ему выражению вида $21a + 2 \cdot (x^2 + 5x)$ [30].

Выполнение действий с числами могут предшествовать другие виды тождественных преобразований, например, группировка чисел или раскрытие скобок. Для примера рассмотрим выражение $3 + 2 \cdot (6:3) \cdot x \cdot (y^3 \cdot 4) - 2 + 11$. В нем мы можем сразу частное в скобках $6:3$ заменить его значением 2, получаем $3 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot (y^3 \cdot 4) - 2 + 11$. Теперь можно раскрыть скобки: $3 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot (y^3 \cdot 4) - 2 + 11 = 3 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y^3 \cdot 4 - 2 + 11$. Сгруппируем числовые множители в произведении, а также слагаемые, являющиеся числами: $(3 - 2 + 11) + (2 \cdot 2 \cdot 4) \cdot x \cdot y^3$. И последнее, выполняем действие в скобках: $(3 - 2 + 11) + (2 \cdot 2 \cdot 4) \cdot x \cdot y3 = 12 + 16 \cdot x \cdot y^3$ [43].

Выполнение всех действий в числовых выражениях позволяет найти значение выражения, а выполнение действий с числами в выражениях с переменными позволяет упростить выражение [41].

Вынесение за скобки общего множителя

Когда слагаемые в выражении имеют одинаковый множитель, то с таким выражением можно провести преобразование, которое называется вынесением за скобки общего множителя. При этом преобразовании исходное выражение представляется в виде произведения общего множителя и выражения в скобках, состоящего из исходных слагаемых без общего множителя.

Покажем простой пример. Числовое выражение $2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$ после вынесения общего множителя 2 за скобки принимает вид $2 \cdot (7 + 3)$ [33].

Приведение подобных слагаемых

Следующее тождественное преобразование относится к суммам, содержащим подобные слагаемые, то есть, одинаковые слагаемые или слагаемые, отличающиеся только числовым коэффициентом. Оно получило название приведение подобных слагаемых [43].

Суть приведения подобных слагаемых заключается в вынесении общей буквенной части подобных слагаемых за скобки, и в последующем вычислении суммы числовых коэффициентов в скобках. Например, на первом этапе приведения подобных слагаемых в выражении $1 + 4 \cdot x - 2 \cdot x$ мы выносим буквенную часть x за скобки, при этом получаем выражение $1 + x \cdot (4 - 2)$, и после вычисления значения выражения в скобках приходим к сумме вида $1 + x \cdot 2$. Это преобразование очень часто используется при упрощении выражений [10].

Замена чисел и выражений тождественно равными им выражениями

Числа и выражения, из которых составлено исходное выражение, можно заменять тождественно равными им выражениями. Такое преобразование исходного выражения приводит к тождественно равному ему выражению [43].

Например, в выражении $3 + x$ число 3 можно заменить суммой $1 + 2$, при этом получится выражение $(1 + 2) + x$, которое тождественно равно исходному выражению. Другой пример: в выражении $1 + a^5$ степень a^5 можно заменить тождественно равным ей произведением, например, вида $a \cdot a^4$. Это нам даст выражение $1 + a \cdot a^4$.

Данное преобразование, несомненно, искусственно, и обычно является подготовкой к каким-либо дальнейшим преобразованиям. Например, в сумме $4 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2$, учитывая свойства степени, слагаемое $4 \cdot x^3$ можно представить в виде произведения $2 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot x$. После такого преобразования исходное выражение примет вид $2 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot x^2$. Очевидно, слагаемые в полученной сумме имеют общий множитель $2 \cdot x^2$, таким образом, мы можем выполнить следующее преобразование - вынесение за скобки. После него мы придем к выражению: $2 \cdot x^2 \cdot (2 \cdot x + 1)$ [41].

Прибавление и вычитание одного и того же числа

Другим искусственным преобразованием выражения является прибавление и одновременное вычитание одного и того же числа или выражения. Такое преобразование является тождественным, так как оно, по сути, эквивалентно прибавлению нуля, а прибавление нуля не меняет значения.

Рассмотрим пример. Возьмем выражение $x^2 + 2 \cdot x$. Если к нему прибавить единицу и отнять единицу, то это позволит в дальнейшем выполнить еще одно тождественное преобразование - выделить квадрат двучлена: $x^2 + 2 \cdot x = x^2 + 2 \cdot x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$ [6].

На основе опыта работы учителей Л.П. Морозовой, В.В. Крючковой, Е.Г. Шаталиной по исследуемой теме при изучении тождественных преобразований любого вида выражений, стоит сказать, что помимо основных существует еще ряд преобразований, относящихся к выражениям конкретного вида. Например, для дробей характерны такие преобразования, как сокращение и приведение к новому знаменателю. Преобразование выражений с корнями и степенями выполняются с использованием свойств степени и свойств корня. Преобразование логарифмических выражений проводится на базе свойств логарифмов, а преобразование тригонометрических выражений – с использованием тригонометрических формул [25,38,47].

Таким образом в данном параграфе было рассмотрено:

1. Два этапа освоения применений преобразований буквенных, числовых выражений и формул (начала алгебры, формирование навыков применения конкретных видов преобразований).

2. Обзор основных тождественных преобразований, используемых в основной школе на основе опыта работы учителей.

§5. Методические рекомендации обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы

Автор А.А. Ларин в учебном пособии для студентов, рассматривает основной принцип организации любой системы заданий – предъявление их от простого к сложному с учетом необходимости преодоления учениками посильных трудностей и создания проблемных ситуаций. Указанный основной принцип требует конкретизации применительно к особенностям данного учебного материала [26]. Для описания различных систем заданий в методике математики, автор В.И. Мишин использует понятие цикла упражнений. Цикл упражнений характеризуется соединением в последовательности упражнений нескольких аспектов изучения и приемов расположения материала. По отношению к тождественным преобразованиям представление о цикле может быть дано следующим образом [32].

Цикл упражнений связан с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. В состав цикла наряду с исполнительными входят задания, требующие распознавания применимости рассматриваемого тождества. Изучаемое тождество применяется для проведения вычислений на различных числовых областях. Учитывается специфика тождества; в частности, организуются связанные с ним обороты речи [32].

Задания в каждом цикле автор В.И. Мишин разбивает на две группы.

1) К первой относятся задания, выполняемые при первоначальном знакомстве с тождеством. Они служат учебным материалом для нескольких идущих подряд уроков, объединенных одной темой.

2) Вторая группа упражнений связывает изучаемое тождество с различными приложениями. Эта группа не образует композиционного единства – упражнения здесь разбросаны по различным темам [32].

Описанная структура цикла относится к этапу формирования навыков применения конкретных видов преобразований. На заключительном этапе – этапе синтеза циклы видоизменяются. Во-первых, объединяются обе группы заданий, образующие «развернутый» цикл, причем из первой группы исключаются наиболее простые по формулировкам или по сложности выполнения задания. Оставшиеся типы заданий усложняются. Во-вторых, происходит слияние циклов, относящихся к различным тождествам, в силу чего повышается роль действий по распознаванию применимости того или иного тождества [32].

Отметим особенности циклов заданий, связанных с тождествами для элементарных функций. Эти особенности обусловлены тем, что, во-первых, соответствующие тождества изучаются в связи с изучением функционального материала и, во-вторых, они появляются позже тождеств первой группы и изучаются с использованием уже сформированных навыков проведения тождественных преобразований [32].

Каждая вновь вводимая элементарная функция резко расширяет область чисел, которые могут быть обозначены и названы индивидуально. Поэтому в первую группу заданий циклов должны войти задания на установление связи этих новых числовых областей с исходной областью рациональных чисел. Приведем примеры таких заданий.

Пример 1. Вычислить:

$$2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}};\ \ \lg 2 + \lg 3;\ \ a^3 \cdot a^2 = a^{3+2};\ \ \lg a + \lg b = \lg ab;\ \ \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2}.$$

Рядом с каждым выражением указано тождество, в циклах по которым могут присутствовать предлагаемые задания. Цель таких заданий – в освоении особенностей записей, включающих символы новых операций и функций, и в развитии навыков математической речи.

Значительная часть использования тождественных преобразований, связанных с элементарными функциями, приходится на решение иррациональных и трансцендентных уравнений. В циклы, относящиеся к усвоению тождеств, входят только наиболее простые уравнения, но уже здесь целесообразно проводить работу по усвоению приема решения таких уравнений: сведение его путем замены неизвестного к алгебраическому уравнению [32].

Последовательность шагов при этом способе решения такова:

а) найти функцию φ, для которой данное уравнение $f(x) = 0$ представимо в виде $F(\varphi(x)) = 0$;

б) произвести подстановку $y = \varphi(x)$ и решить уравнение $F(y) = 0$;

в) решить каждое из уравнений $y = \varphi(x), F(y) = 0$, где $\{y_k\}$ – множество корней уравнения $F(y) = 0$ [31].

При использовании описанного способа зачастую шаг б) выполняется в неявном виде, без введения обозначения для φ (x). Кроме того, ученики зачастую предпочитают из различных путей, ведущих к нахождению ответа, выбирать тот, который быстрее и проще приводит к алгебраическому уравнению [31].

Пример 2. Решить уравнение $4^x - 3 \cdot 2^x = 0$

Первый способ: $4^x = 3 \cdot 2^x$; $\frac{4^x}{2^x} = 3$;

Второй способ: а) $(2^2)^x - 3 \cdot 2^x = 0$; б) $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x = 0$;

$2^x(2^x - 2) = 0$; $2^x - 3 = 0$; в) $2^x = 3; x = \log_2 3$ [6].

Здесь видно, что при первом способе шаг а) сложнее, чем при втором. Первым способом «труднее начать», хотя дальнейший ход решения значительно проще. С другой стороны, у второго способа имеются достоинства, состоящие в большей легкости, большей обработанности в обучении сведения к алгебраическому уравнению.

Для школьного курса алгебры типичны задания, в которых переход к алгебраическому уравнению осуществляется даже еще проще, чем в данном примере. Основная нагрузка таких заданий относится к выделению шага в) как самостоятельной части процесса решения, связанного с использованием свойств изучаемой элементарной функции [33].

Пример 3. Решить уравнение:

а) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; б) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$;

Эти уравнения сводятся к уравнениям: а) $2^{2x} = 2$ или $2^x = 1$;

б) $2^x = 4$ или $2^x = -1$. Для решения этих уравнений требуется знание лишь простейших фактов о показательной функции: ее монотонность, область значений. Как и задание предыдущего примера, уравнения а) и б) можно отнести к первой группе цикла упражнений на решение квадратно-показательных уравнений.

Значительная часть тождеств, изучаемых в курсах алгебры и алгебры и начал анализа, доказывается в них или, по крайней мере, поясняется. Эта сторона изучения тождеств имеет большое значение для обоих курсов, поскольку доказательные рассуждения в них с наибольшей четкостью и строгостью проводятся именно по отношению к тождествам. За пределами этого материала доказательства обычно менее полны. Они не всегда выделяются из состава применяемых средств обоснования [32].

Так, если на уроке предполагается решение логарифмических уравнений с использованием основного логарифмического тождества $a^{\log N} = N$, то полезно в план урока включить устные упражнения на упрощение или вычисление значений выражений: $2^{\log(2)x}, 10^{\lg(x-1)-1}, x^{\log 0,1} - 10^{\lg 10(-1)}$.

Цель упражнений всегда сообщается учащимся. В ходе выполнения упражнения может возникнуть необходимость потребовать от учащихся обоснований отдельных преобразований, действий или решения всей задачи, даже если это не планировалось. Там, где возможны различные способы решения задачи, желательно всегда ставить вопросы: «Каким способом решалась задача?», «Кто решил задачу другим способом?»[43].

В своей книге «Совершенствование методики работы учителя математики» автор Я.И. Груденов, отмечает среди приемов, способствующих сознательному усвоению учащимися тождественных преобразований следующие:

1.Теоретическое объяснение тождеств (насколько это возможно) в 5-6 классах и строгое их доказательство в 7-11 классах. Раскрытие взаимосвязи с ранее изученным материалом.

2. Требование знания и понимания учащимися прежде всего словесной формулировки свойства, тождества.

3. Формирование грамотной математической речи, умения по-разному истолковывать изучаемые свойства и тождества, давать различные словесные интерпретации выполняемому заданию.

4. Варьирование примеров на применение тождеств.

5. Демонстрация образцов решения заданий на применение тождества, свойства, правила с подробными записями и обоснованиями и требование выполнения учащимися заданий по данному образцу на начльном этапе изучения.

7. Проведение аналогии между тождествами и числовыми равенствами.

8. Внимательное изучение выражения, его анализ, поиск различных путей преобразования, анализ выполненных преобразований.

9. Осуществление контроля за выполнением преобразований как со стороны учителя, так и со стороны учащихся [14].

Рассмотрим каждый прием отдельно и привидем примеры.

1. Теоретическое объяснение тождеств (насколько это возможно) в 5–6 классах и строгое их доказательство в 7–11 классах. Раскрытие взаимосвязи с ранее изученным материалом [14].

В качестве примера рассмотрим свойство $-(a+b)=-a-b,$ с которым учащиеся знакомятся в 6 классе (учебник Н. Я. Виленкина и др.). Свойство записывается в общем виде после рассмотрения нескольких числовых примеров. Дается словесная формулировка: Чтобы записать сумму, противоположную сумме нескольких слагаемых, надо изменить знаки данных слагаемых. Словесная формулировка сложна для восприятия учащимися 6-го класса, и не совсем понятно, как получено тождество, ведь рассуждения, в основе которых лежит неполная индукция, не являются достоверными. Есть еще одно обстоятельство, затрудняющее применение свойства учащимися: они на момент рассмотрения тождества не привыкли работать с отрицательными числами и знак «минус» перед буквой воспринимают как указание на то, что рассматривается отрицательное число, буквой же, по их мнению, обозначаются положительные числа. Учитель может доказать свойство, используя тот факт, что знак «минус» перед выражением трактуется как множитель (-1). Аналогия очень простая: 1 как множитель не меняет значение числа, (-1) как множитель меняет значение числа на противоположное. Доказательство будет следующим:

$$-(a+b) = -1 \cdot (a+b) = -1 \cdot a + (-1) \cdot b = -a - b$$

Это доказательство убеждает учащихся в том, что изучаемое свойство есть лишь частный случай распределительного свойства умножения относительно сложения $c(a+b) = ca + cb$ при $c = -1$, которое рассматривалось ранее. Если свойства действий уже изучены, то ими надо пользоваться как при вычислениях, так и для получения новых свойств [11,26].

2. Требование знания и понимания учащимися прежде всего словесной формулировки свойства, тождества. В символической записи некоторые важные моменты затушевываются. Сравните формулировку «Квадрат суммы двух выражений равен сумме квадратов этих выражений и их удвоенного произведения» и запись «$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$». Учащиеся, как правило, стараются запомнить символическую запись, которую они не всегда могут грамотно прочитать, и тот факт, что под a и b подразумеваются любые выражения без знака отношения, от них ускользает [14].

3. Формирование грамотной математической речи, умения по-разному истолковывать изучаемые свойства и тождества, давать различные словесные интерпретации выполняемому заданию [14].

Например, тождество

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, если использовать его слева направо, можно трактовать как:

а) представление разности квадратов двух выражений в виде произведения;

б) разложение многочлена, являющегося разностью двух неотрицательных выражений, на множители;

в) представление разности двух неотрицательных выражений в виде произведения делителя и частного.

Трактовки б) и в) расширяют круг задач на использование данного тождества. Трактовка б) позволяет раскладывать на множители выражения вида $a - b$, где $a \geq 0, b \geq 0$. Трактовка в) подсказывает, что тождество можно использовать для сокращения дробей:

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

4. Варьирование примеров на применение тождеств. Здесь имеется в виду решение упражнений, в которых тождество используется как слева направо, так и справа налево, а также упражнений, в которых учтены все возможные случаи чередования знаков, виды выражений, изученных на данном этапе, которые могут быть подставлены вместо букв.

Например, одним из вариантов тождества $-(a+b) = -a - b$ является $-a - b - a(a+b)$. Смысл этих двух записей различен. В первом тождестве речь идет о раскрытии скобок, перед которыми стоит знак «минус», или о внесении множителя (–1) в скобки. Во втором случае — о заключении в скобки, перед которыми ставится знак «минус», или о вынесении множителя (–1) за скобки. Есть и другие варианты данного тождества:

$-(a-b) = -a + b$ и $-a + b = -(a-b)$;

$-(-a-b) = a + b$ и $a + b = -(-a-b)$;

$-(-a+b) = a - b$ и $a - b = -(-a+b)$;

При разложении разности квадратов двух выражений в произведение в 7 классе могут быть предложены для преобразования выражения следующих видов:

а) $x^2 - y^2$; е) $25a^2b^4 - a^4b^8$;

б) $c^2 - 4^2$; ж) $(a+3)^2 - a^2$;

в) $144 - a^2$; з) $(2b+1)^2 - (2b-1)^2$;

г) $98^2 - 2^2$; и) $(2x+y)^2 - (3x-2y)^2$;

д) $16(ab)^2 - 4c^2$; к) $x^4 - y^4$.

Задание а) имеет целью фиксировать структуру изучаемого тождества, что достигается заменой букв, используемых в записи тождества (a и b), другими буквами. Задания б), г) ориентированы на установление связи данного тождества с числовой системой. В заданиях в), д), е) предложенные выражения не имеют вида разности квадратов. Прежде чем использовать тождество, учащийся должен представить каждое из выражений 144, $16(ab)^2$, $4c^2$,$25a^2b^4$, a^4b^8 в виде полного квадрата. Задания ж), з), и) позволяют учащимся понять, что тождество может быть использовано и в том случае, когда рассматривается разность квадратов двучлена и одночлена, двух двучленов. К заданиям такого вида можно вернуться после изучения формул для квадрата суммы и квадрата разности и, решив их двумя способами, попросить выбрать более рациональный. В задании к) тождество используется дважды [10,11].

5. Демонстрация образцов решения заданий на применение тождества, свойства, правила с подробными записями и обоснованиями и требование выполнения учащимися заданий по данному образцу на начальном этапе изучения. Длительность этапа подробной записи и обоснования решаемых упражнений зависит от индивидуальных особенностей учащихся и уровня их математической подготовки. Если быстро переходить к краткой записи и не требовать обоснований, то в процессе свертывания алгоритма решения упражнений может произойти потеря некоторых, несущественных на взгляд учащегося, этапов. Именно использование учащимися таких неполных и неосознанных алгоритмов решения задач данного вида является причиной появления ошибок. В 5 и 6 классах алгоритм решения или порядок выполнения действий при решении задач данного вида фиксируется в правиле. В последующих классах правила в материале учебников встречаются очень редко. В основном формулируются свойства, теоремы, на основании которых происходит решение задач. Однако чтобы у учащихся было сформировано умение решать задачи данного вида, необходимо четко выделять последовательность действий и скрупулезно следить за ее выполнением. Например, последовательность действий при сложении дробных рациональных выражений с разными знаменателями следующая:

1. Разложить числитель и знаменатель каждой дроби на множители.

2. Сократить каждую из дробей, если это возможно.

3. Выделить наиболее простой общий знаменатель. Для чего составить произведение из всех различных множителей, присутствующих в разложении знаменателей складываемых дробей. Если в знаменателях дробей есть одинаковые множители, то в произведение записывается множитель, показатель степени у которого больше.

4. Найти дополнительный множитель для каждой дроби. Для чего составить произведение из множителей, входящих в запись общего знаменателя, но не входящих в разложение знаменателя рассматриваемой дроби.

5. Числитель и знаменатель каждой дроби умножить на соответствующие дополнительные множители.

6. Сложить дроби с одинаковыми знаменателями.

7. В числителе суммы раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

8. Числитель суммы разложить на множители.

9. Сократить полученную дробь, если это возможно.

10. Записать ответ [28].

Этот алгоритм аналогичен алгоритму сложения дробей с разными знаменателями. Как видим, он очень длинный и потому сложен для восприятия учащихся. Однако пропуск какого-то из шагов при решении задач приводит к усложнению решения или к ошибке. Типичная ошибка заключается в том, что учащиеся опускают шаги 1, 2, 8, а общий знаменатель находят, перемножая знаменатели слагаемых дробей. Безусловно, заучивать этот алгоритм учащимся не надо, возможно, его в таком виде не надо и сообщать им. Задача учителя — сформировать у учащихся умение складывать дробные выражения, а, значит, действовать в указанном порядке. Это достигается путем неоднократной демонстрации образцов решения, предъявления специальной подборки упражнений, направленной как на отработку каждого элемента алгоритма, так и на осознание всего сложного действия в целом и учитывающей индивидуальные особенности учащихся, уровень их математической подготовки [14,33].

6. Использование различных средств наглядности: таблиц, схем, условных обозначений и т. д.

7. Проведение аналогии между тождествами и числовыми равенствами. Любое тождество можно рассматривать как обобщение соответствующих числовых равенств. Следует использовать этот факт для осуществления контроля за выполнением тождественных преобразований.

Например, типичной ошибкой, допускаемой учащимися, является следующая: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Подставив вместо a единицу, а вместо b — два, получим $(1+2)^2 = 1^2 + 2^2$ или 9 = 5, что неверно [14,37].

8. Внимательное изучение выражения, его анализ, поиск различных путей преобразования, анализ выполненных преобразований.

Например, рассматривая выражение $(x+y)^2 - (x-y)^2$, кто-то из учащихся увидит его части — квадрат суммы и квадрат разности двух выражений, а кто-то охватит выражение в целом и увидит разность квадратов двух выражений. Полезно упростить выражение двумя способами и выбрать наиболее рациональный.

Полезно проанализировать оба решения, предварительно убедившись с помощью проверки, что второе решение верно, и выяснить причину потери корня в первом решении [14,31].

9. Осуществление контроля за выполнением преобразований как со стороны учителя, так и со стороны учащихся. Важно, чтобы учащиеся приучались сами контролировать свою деятельность. Поэтому при совершении учеником ошибки не стоит торопиться указывать на нее. Можно попросить ученика выполнить одно из следующих заданий:

а) перечитать текст задачи (возможно, он не правильно его понял);

б) сверить записанное в тетради с записью на доске или в учебнике (возможно, неправильно написал условие);

в) сформулировать правило, свойство, назвать формулу и проверить, правильно ли их использовал;

г) сделать подробную запись решения;

д) проверить правильность выполнения преобразования, подставив вместо букв числа;

е) провести преобразования в обратном порядке;

ж) объяснить сущность допущенной ошибки, когда она найдена, или учитель убедил в том, что она есть, приведя контрпример.

Задания, указанные выше, способствуют появлению у учащихся привычки контролировать свою деятельность и должны предлагаться при работе над любой темой школьного курса математики [14,40].

Таким образом в данном параграфе было рассмотрено:

1. Методические рекомендации обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.

2. Цикл упражнений.

3. Основные приемы, способствующие сознательному усвоению учащимися тождественных преобразований.

§6. Самостоятельная работа по теме исследования

6.1. Организация обучающих самостоятельных работ учащихся

В условиях высокого уровня развития науки и техники особые требования предъявляются к подготовке учащихся в школе. Задача образования не может сводиться только к вооружению учащихся определенной суммой знаний. Необходимо сформировать у них умение оперировать приобретенными знаниями, применять их в новых ситуациях, делать самостоятельные выводы и обобщения, находить решения в нестандартных условиях [1].

Самостоятельная работа учащихся – один из важнейших способов организации познавательной деятельности [16].

Самостоятельная работа в обучении математике необходима для перевода знаний извне во внутреннее достояние учащегося, необходима для овладения этими знаниями, а также для осуществления контроля со стороны учителя за их усвоением. Задачи, которые ставятся при проведении самостоятельной работы, различны. Это может быть отработка какого-то умения с целью довести его до навыка, проверка усвоения материала, какого-то метода, умения давать обоснования, а иногда и настоящий контроль. В зависимости от задачи самостоятельной работы допускается или не допускается (при контрольной работе) помощь учителя, другого ученика, учебника и других пособий [16].

В своей статье автор В.А Далингер считает, что самостоятельная работа как прием обучения применяется на разных этапах процесса обучения для достижения тех же целей, что преследуются на работах, выполняемых под руководством учителя. Автор выделяет следующие этапы (Таблица 8).

Этапы процесса обучения

Таблица 8

Этап	**Время**
1. Осмысление изучаемого материала.	5-6 минут
2. Формирования умений по применению изучаемого материала.	до 10-15 минут
3. Формирования навыков.	до 30 минут

Организация самостоятельной работы на уроке требует от учителя не меньшей подготовки, а даже большей, когда учебный материал он излагает сам. Если при этом он ставит задачу формирования у учащихся навыков самостоятельной работы, то ему нужно определить:

1) Цель, время и характер самостоятельной работы, а также те формируемые навыки самостоятельного учебного труда, самостоятельного изучения математики, на которые можно обратить внимание учащихся при выполнении именно этой работы.

2) Способ повторения того минимума фактических знаний и умений, без которых невозможно успешное выполнение данной самостоятельной работы.

3) Цель работы с книгой: для повторения, для поиска справочной информации, для знакомства с новым материалом. Здесь же определяются те моменты урока, где можно подчеркнуть роль и значение тех или иных навыков самостоятельной работы.

4) Вид упражнений: выполнение заданий на повторение, а также сопутствующие им умения самостоятельной работы.

5) Методику устранения у учащихся возможных затруднений в ходе выполнения заданий, а также способ быстрой проверки полученных результатов и методику разбора допущенных ошибок [16].

Поэтому, по мнению автора, преподавателю целесообразно в качестве первого шага раскрыть учащимся содержание основных видов самостоятельной деятельности при изучении математики и показать возможные способы по их организации.

Учитель математики Л.П. Морозова в своей статье «Обучающая самостоятельная работа как метод активизации деятельности учащихся при изучении теории на уроках математики»[38] различает следующие виды самостоятельных работ:

Виды самостоятельных работ
Работа с книгой.
Упражнения.
Выполнение практических работ.
Проверочные самостоятельные, контрольные работы, математические диктанты.
Подготовка докладов, рефератов, проектных работ и их защита.
Выполнение домашней работы.

Так же автор Л.П. Морозова в качестве формы организации самостоятельных работ выделяет:

Формы организации самостоятельных работ	
Индивидуальные	Каждому учащемуся предоставляется карточка с посильными ему заданиями, здесь учитывается дифференцирующий подход в обучении.
Фронтальные	В данном случае самостоятельная работа предлагается выборочно, когда необходимо определить уровень усвоения материала конкретным учеником.
Групповые	Обычно это бывают общие самостоятельные или контрольные работы.

Очень важно, чтобы содержание самостоятельной работы, форма и время ее выполнения отвечали основным целям обучения данной теме на данном этапе [38]. В зависимости от целей, которые ставятся учителем, самостоятельные работы могут быть:

1) обучающими;

2) тренировочными;

3) закрепляющими;

4) повторительными;

5) развивающими;

6) творческими;

7) контрольные.

В данном параграфе будет подробно рассмотрено обучающие самостоятельные работы. Смысл обучающих самостоятельных работ заключается в самостоятельном выполнении школьниками заданий, данных учителем в ходе объяснения нового материала. *Цель таких работ* – довести до сознания ученика содержание нового понятия, раскрыть его необходимые признаки, показать связь с ранее известными понятиями. Здесь сразу выясняется непонятное, выявляются сложные моменты, дают о себе знать пробелы в знаниях, которые мешают прочно усвоить изучаемый материал.

Учителю необходимо знать следующие особенности обучающих самостоятельных работ:

1) Их надо составлять в основном из заданий репродуктивного характера;

2) Проверять немедленно и не ставить за них плохих оценок. [46].

Так как самостоятельные обучающие работы проводятся во время объяснения нового материала или сразу после объяснения, то их немедленная проверка дает учителю четкую картину того, что происходит на уроке, какова степень понимания учащимися нового материала, на самом раннем этапе его обучения. *Цель этих работ* – не контроль, а обучение, поэтому им следует отводить много времени на уроке [38,40].

При разработки обучающих работ по данной теме были рассмотрены следующие основные дидактические требования:

1. Система обучающих работ должна способствовать к приобретению учащимися прочных знаний, формировать навыки тождественных преобразований и безошибочно применять их на практике.

2. Система должна удовлетворять основным принципам дидактики, и, прежде всего принципам доступности и систематичности.

3. Входящие в систему обучающих работ, задания должны быть разнообразны по учебной цели и содержанию, чтобы обеспечить формирование у учащихся разнообразных умений и навыков.

4. Последовательность выполнения домашних и классных самостоятельных работ логически вытекало из предыдущих и готовило почву для выполнения последующих. В этом случае между отдельными работами обеспечиваются не только «ближние», но и «дальние» связи. Успех решения этой задачи зависит не только от педагогического мастерства учителя, но и от того, как он понимает значение и место каждой отдельной работы в системе работ, в развитии познавательных способностей учащихся, их мышления и других качеств [40,42].

6.2. Обучающие самостоятельные работы по теме «Тождественные преобразования» для 7-9 классов

Самостоятельная работа обеспечивает оптимальное развитие каждого ученика в классе, как самостоятельного сильного, так и слабого. Самостоятельная деятельность учащихся можно и нужно организовывать на различных уровнях, от воспроизведения действий по образцу и узнавание объектов путем их сравнения с известным образцом до составления модели и алгоритма действий в нестандартных ситуациях. Переход с одного уровня на другой должен осуществляться полностью, только тогда, когда учитель будет убежден, что учащийся справится со следующим уровнем самостоятельно, иначе в атмосфере спешки и нервозности у ученика возникают пробелы в знаниях. Самостоятельная работа соответствует учебным возможностям ученика, а степень сложности удовлетворяет принципу постепенного перехода с одного уровня самостоятельности на другой [40].

При составлении заданий для обучающей работы учитывается, что степень сложности должна учитываться учебными возможностями учеников, т.е. применяется *технология уровневой дифференциации* [31].

Представим разработку обучающих самостоятельных работ которая разбита на два варианта по три уровня сложности.

Система обучающих самостоятельных работ по теме:

«Тождественные преобразования» для 7 класса.

<table>
<tr><td colspan="2">Задания</td></tr>
<tr><td colspan="2">I уровень</td></tr>
<tr><td>I вариант</td><td>II вариант</td></tr>
<tr><td>1. Выясните, при каких значениях переменной выражение $\frac{x}{x-3}$ не имеет смысла.</td><td>1. Выясните, при каких значениях переменной выражение $\frac{m}{m+4}$ не имеет смысла.</td></tr>
<tr><td>2. Раскройте скобки и упростите:
$a)\ 1{,}03+(x-y)$;
$b)\ 4{,}1-(7a+b)$;
$c)2{,}6-(p-q)$.</td><td>2. Раскройте скобки и упростите:
$a)\ z-(5{,}6+z)\ -21$;
$b)\ s+(3{,}2-s)\ -2{,}5$;
$c)\ d-(8{,}7+d)\ +12-4$.</td></tr>
</table>

3. Вынесите общий множитель за скобки: $a)4a+9a-3a;$ $b)$ $10b-2b+7b;$ $c)$ $3{,}9+c-2{,}8c.$	3. Вынесите общий множитель за скобки: $a)5ac-3c;$ $b)3a-4{,}5b-6c;$ $c)2ab+4ac-6ax.$
4. Упростите выражение: $a)4(f+7{,}3)+14;$ $b)9{,}4+3(r-5)-2r;$ $c)7+8(-z)-7.$	4. Упростите выражение: $a)0{,}3(a+7)-2{,}1;$ $b)$ $1{,}2(b-1)+4(c-0{,}2);$ $c)9(0{,}5+x)-3(1{,}5-x).$
II уровень	
I вариант	II вариант
1. При каком значение переменной значение выражений $12t$ больше выражения $3t+5$ на 4 ?	1. При каком значение переменной значение выражений $6y+2$ равно значению выражения $y-3$?
2. Решите уравнение: $a)$ $3y-5=-14;$ $b)$ $\frac{3}{5}x=15;$ $c)2x+8+3x=15;$ $d)1{,}7x+3-0{,}8x=7{,}5.$	2. Решите уравнение: $a)$ $5y+9=-11;$ $b)$ $\frac{5}{6}y=20;$ $c)2(7-s)+3(4+s)=24;$ $d)$ $5(2y+3)-4(y+1)=35.$
3. Упростите выражения и найдите их значения: $a)9(x-5x)+12x-5,$ если $x=-3;$ $b)$ $-1{,}9x+(8x-7x+3)-2,$ если $x=2.$	3. Упростите выражения и найдите их значения: $a)$ $4(c-3d)+11c-3d$ при $c-d=4;$ $b)2(7x+4y)-3(3x+y)$ при $x+y=6;$
4. Решите уравнение: $a)$ $(3x+4)-(2x-7)=-x;$ $b)$ $(x-3)+(5-x)=2.$	4. Решите уравнение: $a)$ $(6-x)+(-x-3)=2;$ $b)$ $(4x+7)-(7-3x)=5x.$
III уровень	
I вариант	II вариант
1. Решите уравнение: $a)$ $0{,}125x=\frac{131}{8};$ $b)$ $7y+3=-18;$ $c)$ $(x+11)-(7x-1)=0.$	1. Решите уравнение: $a)$ $0{,}25x=\frac{133}{4};$ $b)$ $9y+5=0{,}5;$ $c)$ $(9x-7)+(8-x)=8x.$
2. Упростите выражения и найдите их значения: $a)$ $3(0{,}5-3q)+8q$ при $q=-0{,}25;$	2. Упростите выражения и найдите их значения: $a)$ $2{,}5e-(1{,}3+0{,}2e)$ при $e=3;$

$b)$ $1{,}3w+3{,}4-6(0{,}3+0{,}2w)$ при $w=\frac{1}{4}$.	$b)$ $0{,}9d+3{,}1+2(1{,}8d-0{,}3)$ при $d=-\frac{1}{3}$.
3. Упростите выражения и найдите их значения: $a)$ $4(0{,}2-3v)+8v$ при $v=-0{,}25$; $b)$ $0{,}7u+3{,}4-6(0{,}3+0{,}2u)$ при $u=\frac{1}{4}$.	3. Упростите выражения и найдите их значения: $a)$ $3{,}1c+(1{,}5-2{,}2c)$ при $c=8$; $b)$ $1{,}3f-3{,}4+5(1{,}6f-0{,}2)$ при $f=\frac{1}{3}$.
4. Разность двух чисел равна 12, а сумма удвоенного первого и второго равна 27. Найдите данные числа.	4. Сумма двух чисел равна 35, а разность утроенного первого числа и второго числа равна 1. Найдите данные числа.

Система обучающих самостоятельных работ по теме:

«Тождественные преобразования» для 8 класса.

Задания	
I уровень	
I вариант	II вариант
1. Выполните умножение и деление дробей: $\frac{c+4}{8c}\cdot\frac{4c^2}{a^2-16}$	1. Выполните умножение и деление дробей: $3p^3q^{-3}:\frac{(3p)^3}{q^2}$
2. Вычислите дробь: $\frac{2^5\cdot 0{,}2^{-15}}{10^3}$	2. Вычислите дробь: $\frac{5^2\cdot 0{,}2^{-2}}{125}$
3. Решите уравнение: $x-3x^{-1}=9$	3. Решите уравнение $36y-y^{-1}=0$
II уровень	
I вариант	II вариант
1. Найдите значение переменной f, при котором алгебраическая дробь $f\ -\ 8\,f\ (f\ +\ 8)$ не имеет смысла?	1. Найдите значение переменной f, при котором алгебраическая дробь $f\ +\ 10f\ (f\ -\ 10)$ не имеет смысла?
2. Найдите значение данного выражения: $6\ -\ 3\cdot 7a^2\ -a+\ 6a^2\ \cdot 3\ -\ a$ при $a=-3$	2. Найдите значение данного выражения: $6\ -\ 3q\ 36\ -\ q^2\ +\ 5q\cdot 36\ -\ q^2$ при $q=-2$.
3. Задано выражение: $\frac{1}{x^2+2}-\frac{2}{x^2-2}+\frac{8}{x^4-4}$ Докажите, что значение данного выражения положительно при всех допустимых значениях переменной.	3. Задано выражение: $\frac{10}{25-y^4}-\frac{1}{5-y^2}+\frac{1}{5+y^2}$ Докажите, что значение данного выражения положительно при всех допустимых значениях переменной.
4. Упростите выражение:	4. Упростите выражение:

$\left(\frac{y-4}{3y-3}+\frac{1}{y-1}\right):\frac{y+1}{3}+\frac{2}{y^2-1}$.	$\left(\frac{a+6}{3a+9}-\frac{1}{a+3}\right)\cdot\frac{3}{a-3}-\frac{6}{a^2-9}$.
III уровень	
I вариант	II вариант
1. Выполните сложение и вычитание алгебраических дробей: а) $\frac{2x+1}{12x^2y}+\frac{2-3y}{18xy^2}$; б) $\frac{a+4}{a}-\frac{a+6}{a+2}$; в) $\frac{a+1}{2a(a-1)}-\frac{a-1}{2a(a+1)}$; г) $\frac{x+2}{2x-4}-\frac{3x-2}{x^3-2x}$.	1. Выполните сложение и вычитание алгебраических дробей: а) $\frac{b+3a}{18a^2b}+\frac{a-4b}{24ab^2}$; б) $\frac{m-4}{m}-\frac{m-3}{m+1}$; в) $\frac{y+3}{4y(y-3)}-\frac{y-3}{4y(y+3}$; г) $\frac{a-5}{5a+25}+\frac{3a+5}{a^2+5a}$.
2. Вычислите: а) $2{,}5\sqrt{25}+3$; б) $\sqrt{18}-2\sqrt{6}+\sqrt{36}$;	2. Вычислите: а) $3{,}4\sqrt{81}-12$; б) $\sqrt{21}-\sqrt{63}+\sqrt{112}$;
3. Решите задачу. Из города в село отправился пешеход. Через час 30 минут вслед за ним выехал велосипедист, скорость которого в 3 раза больше, чем у пешехода. Какова скорость туриста, если в село они прибыли одновременно? Расстояние между городом и селом составляет 9 км.	3. Решите задачу. Из деревни А в деревню В, расстояние между которыми 100 км, выехал грузовик. Через 40 минут вслед за ним мотоцикл. Скорость мотоцикла в 1,5 раза больше чем скорость грузовика. Какая скорость у грузовика, если в деревню В и грузовик и мотоцикл приехали одновременно?
4. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\left(b-2+\frac{4}{b+2}\right)^2\cdot\frac{b^2+4b+4}{b^4}$ не зависит от значения переменной.	4. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\left(t-4+\frac{t^2+4}{t+4}\right)^2\cdot\frac{t^2+8t+16}{32}$ не зависит от значения переменной.

Система обучающих самостоятельных работ по теме: «Тождественные преобразования» для 9 класса.

Задания	
I уровень	
I вариант	II вариант
1. Решите неравенство: $a)$ $(x+2)(x-4)>0$; $b)$ $x(x-4)\leq 0$.	1. Решите неравенство: $a)$ $(x-1)(x+3)\geq 0$; $b)$ $x(2-x)<0$.
2. Решите неравенство: $\frac{2x-3}{1-x}<4$	2. Решите неравенство: $\frac{3x+1}{2-x}<2$

3. Найдите область определения выражения: $\sqrt{\frac{25-x^2}{x^2+x+47}}$	3. Найдите область определения выражения: $\sqrt{\frac{x^2-3x-4}{9-x^2}}$
4. Решите систему неравенств: $\begin{cases}2a-1\geq 0\\4-2a\leq 0\end{cases}$	4. Решите систему неравенств: $\begin{cases}3b+4<0\\2b+8\geq 0\end{cases}$
II уровень	
I вариант	II вариант
1. Решите неравенство: $a)\ x\cdot x>9;$ $b)\ \frac{x(x-1)}{3-x}<0$	1. Решите неравенство: $a)\ x\cdot x<16;$ $b)\ \frac{x(2-x)}{x+3}\geq 0$
2. Решите систему неравенств: $\begin{cases}2p+4>0\\p^2+2p-3\geq 0\end{cases}$	2. Решите систему неравенств: $\begin{cases}3q-6\leq 0\\2q^2+5q+2>0\end{cases}$
3. Найдите область определения функции: $y=\frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{x^2-4}}$	3. Найдите область определения функции: $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{16-x^2}}$
4. Решите неравенство: $\frac{2a^3+5a^2+2a}{36-a^2}\geq 0$	4. Решите неравенство: $\frac{b^3+2b^2+b}{16-9b^2}\leq 0$
III уровень	
I вариант	II вариант
1.Решить уравнение: $\lvert x-3\rvert=2x$	1. Решите уравнение: $\lvert x-4\rvert=3x$
2. Найдите область определения выражения: $\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{\frac{3-x}{x}}$	2. Найдите область определения выражения: $\sqrt{(2-x)x}+\sqrt{\frac{7-x}{5x}}$
3. Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{если } 0\leq x<4\\ x^2-14, & \text{если } 4\leq x\leq 8\end{cases}$ $a)$ вычислите: $f(0); f(4); f(6)$.	3. Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{если } x\leq 1\\ x-2, & \text{если } 1\leq x\leq 3\end{cases}$ $a)$ вычислите: $f(-3); f(1); f(2)$.
4. Решите систему неравенств: $\begin{cases}3z-6\leq 0\\2z^2+5z+2>0\end{cases}$	4. Решите систему неравенств: $\begin{cases}3t^2\geq 108\\t^2+9t+8<0\end{cases}$

Таким образом в данном параграфе было рассмотрено:

1. Виды самостоятельных работ (работа с книгой; упражнения; выполнение практических работ; проверочные самостоятельные,

контрольные работы, математические диктанты; подготовка докладов, рефератов, проектных работ и их защита; выполнение домашней работы).

2. Формы организации самостоятельных работ (индивидуальные, фронтальные, групповые).

3. Раскрыт смысл обучающих самостоятельных работ, применение технологии уровневой дифференциации.

4. Разработка обучающих самостоятельных работ по теме «Тождественные преобразования» для 7- 9 классов.

Выводы по второй главе

Анализируя опыт работы учителей по исследуемой теме, отметим, что при изучении тождественных преобразований любого вида выражений необходимо рассмотреть следующие вопросы:

- теоретические основы преобразований;
- определение (или описание);
- виды преобразований.

В ходе описания особенностей реализации линии тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы отмечено, что основной принцип организации любой системы заданий – предъявление их от простого к сложному с учетом необходимости преодаления учениками посильных трудностей и создания проблемных ситуаций.

Изучение тождественных преобразований служит аналитическим аппаратом при:

- доказательстве теорем и выводе формул;
- решении уравнений, неравенств и их систем;
- упрощении выражений;
- нахождении значений выражений;
- исследовании функций и др.

Во второй главе было рассмотрено:

1. Два этапа освоения применений преобразований буквенных, числовых выражений и формул (начала алгебры, формирование навыков применения конкретных видов преобразований).

2. Обзор основных тождественных преобразований, используемых в основной школе на основе опыта работы учителей.

3. Методические рекомендации обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.

4. Цикл упражнений.

5. Основные приемы, способствующие сознательному усвоению учащимися тождественных преобразований.

6. Виды самостоятельных работ (работа с книгой; упражнения; выполнение практических работ; проверочные самостоятельные, контрольные работы, математические диктанты; подготовка докладов, рефератов, проектных работ и их защита; выполнение домашней работы).

7. Формы организации самостоятельных работ (индивидуальные, фронтальные, групповые).

8. Раскрыт смысл обучающих самостоятельных работ, применение технологии уровневой дифференциации.

9. Разработка обучающих самостоятельных работ по теме «Тождественные преобразования» для 7- 9 классов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Линия тождественных преобразований является одной из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она изучается в течение всего курса математики, начиная с начальных классов.

Сформулируем основные выводы и полученные результаты бакалаврской работы:

1. В данной работе были рассмотрены основные понятия и содержание линии тождественных преобразований.

2. Подклассы математических выражений в курсе алгебры основной школы.

3. Последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

4. Представлена методическая схема обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы.

5. Выявлены методические особенности тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

6. Обзор основных тождественных преобразований, используемых в основной школе на основе опыта работы учителей.

7. Методические рекомендации обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.

8. Основные приемы, способствующие сознательному усвоению учащимися тождественных преобразований.

9. Раскрыт смысл обучающих самостоятельных работ, применение технологии уровневой дифференциации.

9. Разработка обучающих самостоятельных работ по теме «Тождественные преобразования» для 7- 9 классов.

Цели и задачи, поставленные в данной работе, выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Актуальные вопросы теории и методики обучения математике в средней школе: сборник научный статей. Вып. 1. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. – 111 с.
2. Александрова Л. А. Алгебра. 9 класс. Самостоятельные работы для учащихся общеобразовательных учреждений : к учебнику А. Г. Мордковича, П. В. Семенова / Л. А. Александрова ; под ред. А. Г. Мордковича. — 9-е изд., стер. — М., 2014. — 88 с.
3. Алгебра и начала анализа: Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы / И. Р. Высоцкий, Л . И. Звавич, Б.П. Пигарев и др.; Под ред. С.А. Шестакова - 2-е изд., испр.- М.: Внесшигма- М., 2004. – 207с.
4. Александров П.С., Колмогоров А.Н. Алгебра: Пособие для учащихсясредней школы.– М.: Наука, 2013. – 287 с.
5. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. и др.Алгебра: Пособие для учащихся. –.: М.: Просвещение, 2014. – 255 с.
6. Барыбин К.С. Методика преподавания алгебры: Пособие для учителя.– М.: Просвещение, 2006.– 345 с.
7. Баум И.В. Тождественные преобразования выражений/ И.В. Баум, Ю.Н. Макарычев// Преподавание алгебры в 6-8 классах./ Сост. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк.– М.: Просвещение, 1980.С. 77-90.
8. Блох А.Я. О тождественных реобразованиях в курсе алгебры VI-VIII кл. [Текст] / Метод. рекомендации и указания по методике преподавания математики в средней школе: Сб. статей / А.Я. Блох. - М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 2005.– 83 с.
9. Виленкин Н.Я. и др. Современные основы школьного курса математки.— М.: Просвещение, 2001.– 240 с.
10. Виленкин Н.Я. Равенства, тождества, уравнения, неравенства Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбурд// Математика в школе. - 2000. - № 4.

11. Виленкин Н.Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С.И., Жохов В. И. Математика. Учеб. для 6 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 2008. — 256 с.
12. ГИА 2015, Математика: сборник зданий: 9 класс/ В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. – М.: Эксмо, 2014.– 336 с.
13. ГИА. Алгебра. Сборник заданий для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе/ Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. – 6-е изд., М.: Просвещение, 2015.–240 с.
14. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1990. — 224 с.
15. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внекласная работа по математике в 6—8 классах.— М.: Просвещение, 2007.–289 с.
16. Далингер В.А., Самостоятельная деятельность учащихся - основа развивающего обучения. // Математика в школе, №6, 1994.
17. Иванова Т.А., Теоретические основы обучения математике в средней шко ле;Учебное пособие/ Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. проф. Т.А. Ивановой. - Н. Новгород: НГПУ, 2010 – 320 с.
18. Канин Е.С. К формированию умений и навыков в вычислениях и тождественных преобразованиях / Е.С. Канин// Математика в школе. – 2002. – №5.
19. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / Под ред. А. Н. Колмогорова.– М.: Просвещение. 2015.– 384 с.
20. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Ивлиев Б.М., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10–11 кл. сред. шк.–М.: Просвещение, 2010. – 320 с.
21. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. М.: Просвещение, 2005.– 324 с.
22. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики.–М.: Просвещение, 2007. – 480 с.

23. Колягин Ю.М., Луканин Г.Л. Основные понятия современного школьного курса математики.– М.: Просвещение, 2014. –367 с.
24. Кондрушенко Е.М. Тождественные преобразования выражений в школьном курсе математики.— Великий Новгород: МОУ ПКС «Институт образовательного маркетинка и кадровых ресурсов», 2006. — 72 с.
25. Крючкова В.В. Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены». В.В. Крючкова// Математика в школе. - 2004. - №5.
26. Ларин А.А. Курс высшей математики. Учеб. для студентов втузов /Под ред. А. А. Шестакова. Часть 1.- 2004.– 320 с.
27. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Под ред. С.А. Теляковского.— М.: Просвещение, 2014.– 235 с.
28. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2014.–235 с.
29. Макарычев Ю.Н. Об учебниках алгебры 6 и 7 классов/ Ю.Н.Макарычев, Г.Миндюк, С.Б. Суворова// Математика в школе. - 2002. - №3.
30. Макарычев Ю.Н. Тождественные преобразования многочленов / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин // Математика в школе. - 1973. -№
31. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец./ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др; Сост. В.И. Мишин.- М.: Просвещение, 1987.- Гл.5.– 416 с.
32. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / Сост. В.И. Мишин. — М.: Просвещение, 2003.– 421 с.
33. Миндюк Н.Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований алгебраических выражений классов/ Н.Г. Миндюк// Математика в школе. - 1985. - №5.
34. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 9 кл.: в 2 ч. 4.I: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович.- М.: Мнемозина, 2013
35. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа . 9 кл.: В 2 ч. Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева,Т.А.

Корешкова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под ред. А.Г. Мордковича. - М.: Мнемозина, 2013.
36. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 кл.: в 2 ч. Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2013. – 240 с.
37. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 кл.: учебник для классов с углубленным изучением математики / А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2013. ─228 с.
38. Морозова Л.П. Обучающая самостоятельная работа как метод активизации деятельности учащихся при изучении теории на уроках математики. [Электронный ресурс] /Л.П. Морозова.─ URL: http://festival.1september.ru/articles/213464/
39. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб.пособие для студ.мат. спец.пед.вузов и ун-тов.- М.: Просвещение, 2002.─224 с.
40. Ситникова Е.В. Самостоятельная работа учащихся в процессе личностно ориентированного обучения в современной школе. [Электронный ресурс] /Е.В. Ситникова.─ URL: http://festival.1september.ru/articles/214474/
41. Стефанова Н.Л. , Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. Учеб. пособие / Н.Л. Стефанова и др. М. : Дрофа, 2008.─416 с.
42. Столяр А.А. Методы обучения математике.─Минск: Высшая школа, 1996.─191 с.
43. Тождественные преобразования выражений. Математика. 8-9 кл./ М.В. Шабанова, О.Л. Безумова, С.Н. Котова и др. – М.: Дрофа. 2010.─ 77 с.
44. Тосуниди Е.Г. Активизация мыслительной деятельности при проведении устного счета на уроках математики. [Электронный ресурс] /Г.Р. Тосуниди.─ URL: http://festival.1september.ru/articles/566201/
45. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования. / М-во образования и науки РФ.─М.: Просвещение, 2010. – 50 с. URL: http://минобр-науки.рф/документы/2365 (дата обращения 22.04.2016).

46. Черкасов Р.С., Столяр А.А. Методика преподавания математикив средней школе. М.: Просвещение, 2010.–336 с.
47. Шаталина Е.Г. Активизация познавательной деятельности на уроках математики. [Электронный ресурс] /Е.Г. Шаталина.– URL: http://festival.1september.ru/articles/559342/