

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.05 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки)
«Математика и информатика»
(направленность (профиль))

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОДНОЧЛЕННЫ
И МНОГОЧЛЕННЫ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент О.Г. Волкова _____
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель к.п.н., доцент И.В. Антонова _____
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант ст.преподаватель А.В. Прошина _____
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева _____
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

« ____ » _____ 2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы и разработка систем задач по теме исследования.

Тема «Одночлены и многочлены» входит в линию тождественных преобразований школьного курса математики, которая является одной из основных его содержательных линий. При ее изучении учащиеся должны овладеть навыками преобразований целых и дробных выражений, содержащие не только цифры, но и буквы; они получают представления об операции извлечения корня, знакомятся с понятием уравнения, овладевают алгоритмами решения задач с несколькими неизвестными, изучают формулы сокращенного умножения. Поэтому для успешного обучения учащихся, необходимо раскрыть методические рекомендации по их обучению данной теме.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложений.

Глава I посвящена методическим основам обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы. Раскрыто понятие логико-математического анализа на примере темы исследования, выявлены основные цели и задачи обучения данной теме в курсе алгебры 7-9 классов. Выявлены основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Одночлены и многочлены». Проведен анализ задачного и теоретического материалов в учебниках алгебры основной школы.

В **Главе II** представлены методические рекомендации по обучению теме «Одночленов и многочлены» в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены формы, методы и средства обучения данной теме. Выполнен анализ задач ОГЭ и разработаны системы задач по теме исследования.

Список литературы содержит 49 наименований.

Объем работы составляет 60 страниц.

ABSTRACT

The title of the thesis is “The method of teaching the topic «Monomials and polynomials» in the secondary school Algebra course”.

The aim of the work is to reveal methodological recommendations, based on relevant information, on how to teach the topic of “Monomials and polynomials” in the secondary school Algebra course.

The first chapter of the graduation project is devoted to the methodological basics of «Monomials and polynomials» teaching methods in the secondary school Algebra course. We analyze the definition of the identical transformation line in Algebra course books by different authors. The course books for basic and advanced levels of Mathematics are compared. We then analyze exercise material and define types of exercises.

In the second chapter methodological recommendations on the researched topic are given and methods and means of teaching are highlighted in the general part. We then analyze the exercise on the researched topic taken from the Unified State Examination and divide them by types. The readers’ attention is also drawn to methodological recommendations of teaching the topic «Monomials and polynomials».

The work is of interest for a wide circle of readers: Mathematics students during the period of pedagogical practice in secondary school and teachers of Mathematics.

This study examines the relation between skills and attainments of students on the topic of “Monomials and polynomials”. It also gives methodological recommendations on how to make the topic’s teaching explanation more effective and comprehensive.

Finally, we present systems of exercises on monomials and polynomials suggested in the secondary school Algebra course.

The thesis consists of 60 pages, containing 5 tables, 49 examples of exercises, the list of 49 references including 5 foreign sources and 6 appendices.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ	8
§1. Понятие логико-математического анализа на примере темы «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы	8
§2. Цели обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры 7-9 классов	12
§3. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Одночлены и многочлены» в учебниках разных авторов.....	15
§4. Анализ содержания теоретического материала темы «Одночлены и многочлены» в учебниках разных авторов.....	19
§5. Анализ задачного материала по теме «Одночлены и многочлены» в учебниках алгебры 7-9 классов.....	22
Выводы по первой главе.....	29
ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОБУЧЕНИЮ ТЕМЕ «ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ	31
§6. Формы, методы и средства обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы.....	31
§7. Методика обучения решению задач по теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры 7-9 классов	36
§8. Анализ задач ОГЭ по теме исследования	42
§9. Системы задач по теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы	44
Выводы по второй главе.....	51
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	53
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	Ошибка! Закладка не определена.
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	61

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. «В курсе математики начальной школы учащиеся знакомятся с записью математических выражений и предложений с помощью букв, с выполнением арифметических действий над ними и нахождением их неизвестных компонентов по неизвестным» [22, С. 9].

В основной школе содержание материала в курсе алгебры группируется вокруг понятий «одночлен» и «многочлен», учащиеся овладевают навыками преобразований целых и дробных выражений, содержащие не только цифры, но и буквы, получают представления об операции извлечения корня, знакомятся с понятием уравнения, овладевают алгоритмами решения задач с несколькими неизвестными, изучают формулы сокращенного умножения. Без систематизированных знаний по теме «Одночлены и многочлены» трудно представить, как можно выполнять математические операции, не владея понятийным аппаратом по данной теме.

В связи с тем, что в настоящее время большое внимание уделяется образовательной функции математики, существует множество различных подходов к структуре изучаемых курсов, школьные программы и учебники разнообразны, реализация учебной программы по математике необходимо начинать именно с анализа методических особенностей изучения конкретной темы. Поэтому требуется обратить внимание на методику обучения теме «Одночлены и многочлены», которая закладывает основы для изучения линии тождественных преобразований на протяжении всего курса математики в основной школе. Кроме того, основные понятия, рассматриваемые в данной теме, имеют место в заданиях ОГЭ.

Проблема исследования: выявить методические особенности обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения теме «Одночлены и многочлены» на уроках алгебры в основной школе.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы и разработать системы задач по теме исследования.

Достижение предполагаемой цели связано с решением **основных задач исследования:**

1. Выявить цели обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры 7-9 классов.

2. Определить основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Одночлены и многочлены».

3. Раскрыть содержание теоретического и задачного материалов по теме исследования в учебниках алгебры основной школы.

5. Рассмотреть различные формы, методы и средства обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы.

6. Разработать методические рекомендации по обучению теме «Одночлены и многочлены» учащихся 7-9 классов.

7. Провести анализ задач ОГЭ по теме «Одночлены и многочлены».

8. Разработать системы задач по теме исследования.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ методической литературы, школьных учебников, учебных пособий и программ, изучение опыта работы учителей математики, работающих в 7-9 классах общеобразовательных учреждений.

Теоретическая значимость: в ходе данного исследования были выявлены методические особенности обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость результатов исследования состоит в разработке методических рекомендаций по обучению теме «Одночлены и многочлены» и систем задач, которые могут использоваться на уроках при обуче-

нии данной теме в школьном курсе алгебры и студентами педагогических направлений подготовки.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и результаты исследования были апробированы на научной конференции «Дни науки» института математики, физики и информационных технологий (г. Тольятти, апрель 2018 г., 4-ое место на 1 этапе).

На защиту выносятся: 1. Методические рекомендации по обучению теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы. 2. Системы задач по теме исследования.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложений.

Во введении сформулированы актуальность, основные цели и задачи, проблема, гипотеза, объект, предмет, методы, теоретическая и практическая значимость исследования.

Глава I посвящена методическим основам обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы. Раскрыто понятие логико-математического анализа на примере темы исследования, выявлены основные цели и задачи обучения данной теме в курсе алгебры 7-9 классов. Выявлены основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Одночлены и многочлены». Проведен анализ задачного и теоретического материалов в учебниках алгебры основной школы.

Во Глава II представлены методические рекомендации по обучению теме «Одночленов и многочлены» в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены формы, методы и средства обучения данной теме. Описаны методические рекомендации по обучению теме «Одночлены и многочлены». Выполнен анализ задач ОГЭ и разработаны системы задач по теме исследования.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы по данному исследованию. *Список литературы* содержит 49 наименований. *Объем работы* составляет 60 страниц.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОДНОЧЛЕННЫ И МНОГОЧЛЕННЫ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие логико-математического анализа на примере темы «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы

В пособии «Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики» под редакцией Е.И. Лященко [16, С. 34] отмечается, что: «Основной аспект в подготовке к уроку заключается в умении планировать и проводить урок, уметь обосновывать выбор средств обучения, контролировать учебную деятельность учащихся и оценивать результат учения. Чтобы раскрыть *понятие логико-математического анализа содержания темы*, определим понятие «содержание учебного материала». Содержание учебного материала включает в себя как идеи, факты и математические задачи, так и конкретные тексты учебников и математические задачи. Тексты учебников разбиты на пункты, которые изучаются в течение 2-3 уроков, а в конце проверяется его усвоение. Далее переходят к следующему пункту учебника. После изучения темы проводится итоговая контрольная работа. Автор утверждает, что каждый пункт учебника можно рассматривать как новое, уникальное содержание и логико-математический анализ учебного материала по математике в школе в таком случае сводится к выяснению, о чем данный материал и о каком его объеме идет речь. Знания несут в себе и фундаментальную, и методологическую сущность в виду специфики предмета математики и его абстрактности. Учитывая абстрактность понятий математики и логическую доказательность утверждений, можно выделить два основ-

ных блока: *теоретический материал* и *математические задачи*. Теоретический материал – это понятия и их определения: *утверждения* (теоремы, признаки, свойства и т.п.), *алгоритмы* (формулы, правила и др.), отличающимися по степени общности и предметному содержанию математическими методами (аксиоматичным, координатным, векторным методами, методом равных треугольников, подобия и др.)».

Математические задачи Е.И. Лященко делит *по способу их использования* в процессе обучения на две группы: «Математические задачи, которые используются для *формирования понятий, отработки изученных утверждений, непосредственного использования уже изученных теорем*. Задачи такого типа, как правило, не требуют особого поиска решения, но такие задачи очень важны для отработки какого-либо понятия, свойства или алгоритма решения аналогичных задач. Такие задачи преобладают в школьных учебниках и их принято считать *средством обучения математики*; математические задачи, с помощью которых *организовывают математическую деятельность на школьном уровне*, согласно плану: постановка задачи, организация поиска решения (анализ условия задачи, сопоставление условия задачи и известных математических фактов и приемов решения задачи, выработка стратегии решения задачи и составление плана действий), реализация плана решения задачи, осмысление результатов решения» [16, С. 35].

Отмечается, что логико-математический анализ не предполагает постановку целей изучения темы, не выясняет и методы контроля по усвоению содержания темы [40, С. 36]. Авторы учебников, выстраивая определенную логику и последовательность изучения материала, отбирают материал с общей социальной и познавательной целью обучения школьников. Эта цель заложена в школьной программе и для раскрытия логико-математического анализа содержания темы достаточно осознания и понимания этих целей. Важно, чтобы после прочтения учителем учебника для определенного класса, он смог найти ответы на вопросы: «Какие новые объекты и понятия вводятся?

Появились ли новые определения для учащихся и какую структуру они имеют? Встречалась ли такая структура определения ранее? Какие учебно-методические действия нужно выполнять, чтобы закрепить новый изучаемый материал?». Ответив на эти вопросы, учитель может сделать вывод о логике структурирования введения понятия или объекта изучения.

В пособии Н.Л. Стефановой [40, С. 85–86] указано, что логико-математический анализ теоретического содержания темы предполагает: «1) знать цель обучения согласно содержанию темы и основных результатов обучения данной теме; 2) знать каким объектам и понятиям даются определения, формулировок определений; 3) знать какие математические утверждения, отличные от определений, есть в данной теме, теоремы, законы, правила, формулы; 4) знать как вводятся данные утверждения в учебнике – на примерах, доказываются логически, иллюстрируются рисунками и т.д.; 5) знать содержание темы; 6) знать методы решения, используемых в школе».

Авторы в логико-математический анализ темы включают также *методический анализ ее задачного материала*.

Методический анализ задачного материала 7 класса темы «Одночлен и многочлены» включает:

I. Применение понятий «одночлен», «степень многочлена», «многочлен», «стандартный вид многочлена».

II. Применение свойств степени с натуральным показателем при преобразовании выражений.

III. Выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами (сложение, умножение, вычитание, деление, извлечение корня одночленов и многочленов, возведение их в степень).

IV. Применение формул сокращенного умножения в преобразованиях выражений и их вычислений.

V. Разложение многочленов на множители различными способами (вынесение множителя за скобки, способ группировки и др.).

VI. Применение действий с многочленами при решении разнообразных задач.

К методическому анализу задачного материала 8 класса, в продолжение изучения линии «Тождественные преобразования», ими отнесены:

I. Преобразование рациональных выражений.

II. Применение знаний о многочленах и одночленах для решения уравнений.

III. Применение свойств степени многочленов с целым показателем при выполнении вычислений и преобразования выражений.

IV. Выполнение действий с алгебраическими дробями.

V. Применение полученных знаний об одночленах и многочленах для решения квадратных уравнений, неравенств, решения задач.

В 9 классе линия «Тождественных преобразований» и применение знаний по теме «Одночлены и многочлены» продолжается. К методическому анализу задачного материала авторами отнесены:

I. Применение свойств неравенств.

II. Нахождение корней многочленов.

III. Усвоение понятия корня n -ой степени.

IV. Решение линейных, квадратных и дробно-рациональных неравенств и их систем.

V. Применение действий с многочленами при решении текстовых задач.

Таким образом, рассмотрев различные подходы к понятию логико-математического анализа темы, выделим, что он включает в себя по теме «Одночлены и многочлены»: учащиеся *должны знать*: понятия «одночлен», «степень многочлена», «многочлен», «стандартный вид многочлена», формулы сокращенного умножения, свойства степени с натуральным показателем для преобразования выражений. Уметь: выполнять арифметические операции над одночленами и многочленами (вычитание, сложение, умножение, деле-

ние, возведение в степень, извлечение корня одночленов и многочленов), раскладывать многочлены на множители различными способами (вынесение множителя за скобки, способ группировки и др.), применять умения действий над многочленами при решении разнообразных задач.

Данные блоки логико-математического анализа темы исследования будут подробно нами описаны в §4-5 Главы I.

§2. Цели обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры 7-9 классов

Тема «Одночлены и многочлены» входит в линию тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы. Данная линия является одной из основных содержательных линий курса математики. Тождественные преобразования выражений изучаются, начиная с начальных классов, и продолжаются в течение всего курса алгебры [4].

Символы играют неотъемлемую роль в интеграции новых знаний. Изучение математики опирается на интенсивное использование различных типов букв для представления переменных, знаков для чисел, формул и алгоритмов [49]. Поэтому, изучение темы «Одночлены и многочлены» так важно при изучении линии тождественных преобразований в школьном курсе алгебры.

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (*утвержденный приказом Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. № 1897*) (ФГОС ООО) [41] отмечено, что результаты изучения предметной области «Математика» *должны отражать:*

- 1) формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;
- 2) овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравне-

ний, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

3) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

4) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

В учебном пособии по методике преподавания математики Г.И. Саранцева выделены три основные *цели обучения математике*: воспитательные, общеобразовательные и практические. «*Воспитательные цели* обучения математике направлены на формирование мировоззрения учащихся, формирование алгоритмического мышления, приобщение к творческой деятельности и культуре общения, воспитание трудолюбия. *Общеобразовательные цели* обучения математике включают в себя: систему математических знаний, умений и навыков, которыми нужно овладеть учащимся. Данные цели помогают овладеть языком и символикой математики, математическим моделированием, специальными приемами и алгоритмами решения. *Практические цели* обучения математике направлены на формирование умений: строить математические модели реальных явлений, читать данные с графиков, изучить роль математики в научно-техническом прогрессе, производстве и конструировании» [38, С. 29].

О постановке целей обучения в 20 веке задумывался и Б. Блум - профессор педагогики Чикагского Университета. В его фундаментальном труде «Таксономия Образовательных Целей: Сфера познания» предпринята попытка к разделению целей на иерархии, ведь, по мнению Б. Блума: «Цели

обучения напрямую имеют зависимость от иерархии мыслительных процессов: запоминание, понимание, применение, анализ, синтез, оценка» [46].

В *примерной программе основного общего образования* от 8 апреля 2015 года [36, С. 86] указывается, что в процессе изучения линии «Тожественные преобразования» выпускник в 7-9 класса в процессе обучения (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования *на базовом уровне*) научится: «Выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений, содержащих степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем. Выполнять несложные преобразования целых выражений: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые. Использовать формулы сокращенного умножения (квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов) для упрощения вычислений значений выражений. Выполнять несложные преобразования дробно-линейных выражений и выражений с квадратными корнями».

В *примерной программе основного общего образования* от 8 апреля 2015 года в процессе изучения линии «Тожественные преобразования» выпускник получит возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности успешного продолжения образования *на углубленном уровне*: «Свободно оперировать понятиями степени с целым и дробным показателем. Выполнять доказательство свойств степени с целыми и дробными показателями. Оперировать понятиями «одночлен», «многочлен», «многочлен с одной переменной», «многочлен с несколькими переменными», коэффициенты многочлена, «стандартная запись многочлена», степень одночлена и многочлена. Свободно владеть приемами преобразования целых и дробно-рациональных выражений. Выполнять разложение многочленов на множители разными способами, с использованием комбинаций различных приемов. Использовать теорему Виета и теорему, обратную теореме Виета, для поиска корней квадратного трехчлена и для решения задач, в том числе задач с па-

раметрами на основе квадратного трехчлена. Выполнять деление многочлена на многочлен с остатком. Свободно оперировать понятиями тождество, тождество на множестве, тождественное преобразование» [36, С. 105].

Таким образом, подводя итог всему выше написанному, можно выделить основные *цели обучения линии тождественных преобразований* в основной школе – выработать у учащихся умения выполнять действия со степенями с натуральным показателем; складывать, вычитать и умножать многочлены и одночлены; научиться раскладывать многочлены на множители, применяя различные способы, применять формулы сокращённого умножения для преобразования алгебраических выражений.

§3. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Одночлены и многочлены» в учебниках разных авторов

«Основы тождественных преобразований выражений закладывается еще в начальной школе, где главная задача - это познакомить учащихся с алгоритмами арифметических действий, свойствами операций, нуля и единицы. Далее изучение тождественных преобразований выражений рассматривается в 5-6 классе, где основными тождественными преобразованиями выражений в пропедевтическом курсе математики (5-6 классы) являются: законы арифметических действий; вынесение общего множителя за скобки; приведение подобных слагаемых; раскрытие скобок.... В 7 классе учащиеся знакомятся с понятием одночлена и многочлена, и на протяжении всего обучения с 7-9 класс эти понятия «пронизывают» множество тем, связанных с тождественными преобразованиями выражений и широко используются при выводе формул, решении уравнений, неравенств и их систем, нахождении значений выражений, исследовании функций» [22, С. 15-16].

Требования к уровню подготовки учащихся 7 классов по учебникам алгебры различных авторов представлены в Приложении 1.

Нами были рассмотрены следующие учебники и учебные пособия для учащихся общеобразовательных учреждений по алгебре 7-9 классов: Ш.А. Алимова [1–3], Ю.Н. Макарычева [17–19], А.Г. Мордковича [23–28], Г.К. Муравина [31–33], Т.А. Бурмистровой [5].

Анализируя сборник рабочих программ 7-9 класса Т.А. Бурмистровой [5, С. 18] по программе 7, можно сформулировать следующие знания ученика, которыми он должен овладеть при обучении теме «Одночлены и многочлены»: «Что такое одночлен, как привести его к стандартному виду, уметь возводить одночлен в натуральную степень, совершать арифметические действия над одночленами и многочленами, выполнять разложение многочленов на множители с помощью комбинаций различных приемов и сокращать алгебраические выражения, знать формулы сокращенного умножения и уметь применять их для преобразований целых выражений в многочлен, и использовать их для разложения многочленов на множители».

Далее рассмотрим *требования к уровню подготовки учащихся 8 классов* по учебникам авторов, рассмотренных выше. Тема «Одночлены и многочлены» в данном классе уже используется как навык для решения новых задач. Учащиеся уже знакомы с понятиями «одночлен и многочлен», данная тема играет здесь пропедевтический характер при изучении и освоении нового материала.

Анализируя учебники алгебры 8 класса для общеобразовательных учреждений данных авторов, можно сделать вывод, что учащиеся *должны научиться*: 1) выполнять основные арифметические действия с многочленами; 2) выполнять разложение многочленов на множители с помощью различных приемов; 3) выполнять тождественные преобразования выражений; 4) решать квадратные уравнения методом разложения на множители, методом вынесения полного квадрата; 5) раскладывать на множители квадратный трехчлен.

Так как действия с рациональными дробями главным образом опираются на действия с многочленами, то перед изучением данной темы следует уделить внимание повторению темы преобразования целых выражений.

Учащиеся должны понимать, что операцию деления одночленов и многочленов всегда можно представить в виде дроби.

Линия тождественных преобразований продолжается изучаться и в 9 классе. На основе полученных знаний, вводятся методы решения выражений, уравнений и неравенств. Рассмотрим *требования к уровню подготовки учащихся 9 классов* по учебникам авторов, рассмотренных выше. Проводя анализ школьных учебников алгебры, можно выделить, какие знания учащиеся *должны* освоить по окончании обучения в 9 классе: «Решать уравнения третьей и четвертой степени с помощью разложения на множители и введение вспомогательных переменных. Решать простейшие системы уравнений второй степени с двумя переменными. Решать текстовые задачи с помощью таких систем. Выполнять основные действия со степенями с целыми показателями, с многочленами и с алгебраическими дробями. Решать дробные рациональные уравнения, сводя их к целым уравнениям. Выполнять разложение многочленов на множители; выполнять тождественные преобразования» [5].

Таким образом, *основными требованиями к знаниям и умениям обучающихся на базовом уровне по теме «Одночлены и многочлены»* в общеобразовательной школе являются: 1) умение выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений; 2) умение преобразовывать целые выражения: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые; 3) знать формулы сокращенного умножения и уметь применять их для упрощения вычислений значений выражений; 4) умение оперировать понятиями «многочлен» и «одночлен»; 5) знать правила сложения, вычитания, умножения многочленов.

Рассмотрим учебники для учащихся классов с углубленным изучением алгебры.

В учебнике Макарычева Ю.Н. «Дополнительные главы к школьному учебнику» [20] 8 класс, автор приводит главу III. «Рациональные выражения», где рассматривает: «1) приемы преобразования целого выражения в многочлен; 2) возведение двучлена в степень; 3) квадрат суммы нескольких слагаемых; 4) приемы разложения многочлена на множители. Для решения многих задач нужно хорошо уметь приводить некоторое целое выражение в многочлен стандартного вида» [20].

В учебниках Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики» для 8–9 классов автор рассматривается некоторые вопросы, которые не раскрываются в учебниках различных авторов учебников для общеобразовательных учреждений: «1) формула квадрата суммы нескольких слагаемых; 2) деление многочлена на многочлен с остатком; 3) теорема Безу. Корни многочлена; 4) симметрические многочлены от двух переменных; 5) наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух одночленов и многочленов. Алгоритм Евклида; 6) схема Горнера для нахождения корней многочлена. В учебнике Н.Я. Виленкина раскрывается понятие «корня многочлена» в 8 классе, а в учебниках базового уровня данное понятие вводится лишь Г.К. Муравиной в 9 классе» [7–8].

Обучаясь по учебникам для углубленного уровня изучения алгебры, помимо основных знаний и умений по теме «Одночлены и многочлены», которыми учащиеся овладевают на базовом уровне изучения алгебры, они должны *знать*: определение «Корень многочлена», «Теорему Безу», «Формула квадрата суммы нескольких слагаемых». Учащиеся должны владеть *умениями*: раскладывать многочлены на множители различными методами, делить многочлен на многочлен с остатком, уметь пользоваться алгоритмом

Евклида для нахождения НОД и НОК многочленов, строить схему Горнера для нахождения корней многочлена.

§4. Анализ содержания теоретического материала темы «Одночлены и многочлены» в учебниках разных авторов

Рассмотрев учебники для общеобразовательных учреждений 7-9 классов и учебные пособия к ним разных авторских коллективов по теме «Одночлены и многочлены» нами была выделена главная цель обучения данной теме: «Подготовить учащихся к «изучению тождественных преобразований многочленов» (приведение их к стандартному виду)» [32, С. 12].

Нами были рассмотрены следующие учебники и учебные пособия для учащихся общеобразовательных учреждений по алгебре 7-9 классов Ш.А. Алимова [1-3]; Ю.Н. Макарычева [17-19]; А.Г. Мордковича [23-28]; Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [31-33]. В Приложении 2 представлено содержание теоретического материала темы «Одночлены и многочлены» в учебниках алгебры для общеобразовательных учреждений 7-9 классов различных авторов.

В учебниках алгебры Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [31], Ю.Н. Макарычева [18] для 7 класса вводится понятие *одночлена и многочлена* только после определения тождества и тождественного преобразования и изучения свойств степени, а в учебниках А.Г. Мордковича [23] и Ш.А. Алимова сразу после изучения свойств степени. Стоит отметить, что в учебнике Ш.А. Алимова нет отдельного параграфа «Тождества», как в учебниках других авторов.

Определение. «Одночленом называют алгебраическое выражение, которое представляет собой произведение чисел и переменных, возведенных в степени с натуральным показателем» [23, С. 39]. Понятие *многочлена* авторы данных учебников вводят через понятие одночлена.

Определение. «Многочленом называют сумму одночленов» [23, С. 53].

В учебнике алгебры А.Г. Мордковича для 7 класса понятия *одночлена* и *многочлена* и действия, совершаемые над ними, изучаются более подробно (56 часов). Автор приводит дополнительные параграфы, которые в учебниках Г.К. Муравина и О.В. Муравиной, Ю.Н. Макарычева отдельно не рассматриваются.

Стоит отметить, что Ш.А. Алимов вводит понятие «Алгебраической дроби» уже в 7 классе, сразу после изучения темы «Многочлены», а другие авторы - лишь в 8 классе.

Если рассматривать §20 «Деление многочлена на одночлен», в учебнике А.Г. Мордковича [23], то информация в нем излагается в параграфах «Сокращение алгебраических дробей» и «Разложение многочленов на множители».

На основании данного анализа учебников алгебры 7 класса можно сделать вывод о том, что авторы учебников [1; 17; 23; 31], рассмотренных выше, вводят понятие «одночлен» после изучения темы «Степень и ее свойства». Так же в этом параграфе указанные авторы вводят такие определения, как: «стандартный вид одночлена», «коэффициент одночлена», «степень одночлена», «подобные одночлены».

В учебнике алгебры Г.К. Муравина и О.В. Муравиной для 8 класса [32] изучение линии «Тождественных преобразований» продолжается в главе «Рациональные выражения» и связано с обучением темам «Формулы сокращенного умножения», «Дробные выражения», «Степень с целым показателем».

В учебниках А.Г. Мордковича [25] и Ю.Н. Макарычева [18] для 8 класса изучение линии «Тождественных преобразований» продолжается в главах «Алгебраические дроби», где выполняют алгебраические действия с дробями, что тесно связано с обучением арифметических действий над одночленами и многочленами.

В учебнике алгебры Г.К. Муравина и О.В. Муравиной для 9 класса [33] знания и умения, полученные учащимися при обучении теме «Одночлены и многочлены», углубляется при изучении тем: «Корни многочленов», «Квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным», «Целые корни многочленов с целыми коэффициентами», «Разложение квадратного трехчлена на множители».

Таким образом, анализ учебников алгебры 7-9 классов показал, что большое внимание в них уделяется изучению линии «Гомоморфизмы преобразования», в ходе которой применяются умения и знания по теме «Одночлены и многочлены».

Проведем анализ содержания теоретического материала темы «Одночлены и многочлены» в различных учебниках для *классов с углубленным изучением математики* и представим его в Приложении 2.

В учебнике *Н.Я. Виленкина для 8 класса* [7] раскрываются «операции над многочленами, формулы сокращенного умножения, а так же рассматриваются вопросы, которых нет в учебниках для общеобразовательных учреждений 7 классов: формула разложения на множители разности степеней, формула квадрата суммы нескольких слагаемых, теорема Безу, деление многочлена на многочлен с остатком, симметрические многочлены от двух переменных, корни многочлена, НОД и НОК одночленов» [7].

В учебнике *Н.Я. Виленкина для 9 класса* обучение начинается с повторения тем, изучаемых в 8 классе, далее с учащимися рассматривают темы: «Схема Горнера, НОД и НОК многочленов, алгоритм Евклида» [8].

Стоит обратить внимание, что понятие «корня многочлена» в учебниках для общеобразовательных учреждений вводится лишь в учебнике Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [33] в 9 классе. В учебниках для углубленного изучения алгебры данное понятие вводится лишь в учебнике Н.Я. Виленкина в 8 классе.

Таким образом, для того, чтобы понять, по какому же учебнику данному учителю будет удобнее строить свой урок, сначала надо определить индивидуальные особенности всех учащихся класса, после этого разрабатывать различные варианты как индивидуальной, так и коллективной работы на уроке.

§5. Анализ задачного материала по теме «Одночлены и многочлены» в учебниках алгебры 7-9 классов

В методическом пособии для учителей А.Г. Мордковича говорится о реализации принципа «крупных блоков»: его суть в том, что если имеется возможность изучить какой-либо раздел курса алгебры в определенном классе компактно, то этим стоит воспользоваться. Так, в курсе 7 класса компактно излагается раздел, связанный с преобразованием целых выражений, начиная со степеней с натуральными показателями и заканчивая разложением многочленов на множители.

Автор утверждает, что «при изучении темы «Одночлены. Арифметические операции над одночленами» учащиеся будут учиться изучать «слоги», а не «буквы». Эту мысль нужно четко донести до сознания учащихся, чтобы они понимали, зачем изучается этот раздел математики, видеть, что каждая следующая тема - это логическое продолжение предыдущей» [29, С. 41]. Так, например, при изучении темы «Сложение подобных членов», внимание учащихся обращается на тот факт: а что если не все одночлены подобные и среди них окажутся неподобные? Что же делать, если мы пришли к выражению, представляющему собой сумму неподобных одночленов? Ну и тут математики нашли выход: такую сумму они назвали многочленом. Аналогичная ситуация возникает при изучении параграфа «Операция деления одночлена на одночлен», где впервые упоминается, но не определяется понятие дроби.

Многообразие задач в курсе линии «Тождественные преобразования», в частности темы «Одночлены и многочлены» в учебниках 7 класса Ю.Н. Макарычева [17], Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [31], А.Г. Мордковича [23], Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина [1] можно разделить на такие типы задач:

I. Применение понятий «одночлен», «многочлен», «степень многочлена»; «стандартный вид многочлена».

II. Применение свойств степени с натуральным показателем при преобразовании одночленов.

III. Выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня одночленов и многочленов).

IV. Применение формул сокращенного умножения для преобразования выражений и их вычислений.

V. Разложение многочленов на множители различными способами (вынесение множителя за скобки, способ группировки и др.).

Данные типы задач (I-IV) являются типовыми, при изучении темы «Одночлены и многочлены» в 7 классе.

Так же, имеют место быть задачи, для решения которых нужно владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены», которые не входят в состав типовых задач, выделим их:

VI. Применение действий с многочленами при решении различных задач.

В учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина [1] рациональные дроби начинают изучаться в 7 классе, поэтому в его учебнике можно выделить отдельный тип задач, для решения которых нужно также хорошо владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены» уметь применять их:

VII. Преобразование рациональных выражений.

Примеры упражнений по каждому типу задач из учебников для 7 класса для общеобразовательных учреждений, рассмотренных выше авторов представлены в Приложении 3 (Задачи 1–10).

Нужно заметить, что Ю.Н. Макарычев не приводит в параграфах «Одночлен» и «Многочлен» задания на сокращение алгебраических дробей, так как эта тема в его учебниках изучается лишь в 8 классе.

В учебниках Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мордковича и Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина по алгебре 7 класса содержится большое количество задач на выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами (*III тип задач*), в отличие от учебника Г.К. Муравина и О.В. Муравиной. В учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина изучению темы «Одночлены и многочлены» (*I, II, III, VI тип задач*) и «Разложение многочленов на множители» (*IV, V, VI тип задач*) посвящены отдельные главы учебника.

Таким образом, анализ задачного материала 7 класса по теме «Одночлены и многочлены» показал, что различия в содержании и распределении задачного материала в рассмотренных выше учебниках различный, но задачи на каждый тип присутствуют в каждом учебнике. Большое внимание уделяется задачам на выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами (*III тип задач*).

В 8 классе изучение линии, связанной с темой «Одночлены и многочлены», у разных авторов немного отличается, поэтому система задач не у всех будет схожа. Для удобства, типы задач разных авторов, которые будут совпадать, будут обозначаться одинаковыми римскими цифрами.

Так, например, множество задач в курсе линии «Тождественные преобразования» в учебнике 8 класса Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [32], где знания по теме «Одночлены и многочлены» углубляются и используются для решения следующих типов задач:

I. Применение понятий одночлена и многочлена и арифметических действий над ними для преобразования рациональных выражений.

II. Применение понятий многочлена и одночлена и действий над ними при решении уравнений, в том числе квадратных уравнений.

III. Применение свойств степени многочленов с целым показателем при выполнении вычислений и преобразования выражений.

Проводя анализ задачного материала учебника 8 класса А.Г. Мордковича [26] по линии «Тождественные преобразования», нужно отметить, что *I, II и III типы задач* аналогичны учебнику Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [32] и выделяется еще один тип:

IV. Применение понятий одночлена и многочлена и действий над ними при решении неравенств.

В учебнике 8 класса Ю.Н. Макарычева [18] *I, II и III типы задач* аналогичны как в учебнике Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [32] и А.Г. Мордковича [26], и *IV тип задач* как у А.Г. Мордковича [26].

В учебнике 8 класса Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина [2] в курсе линии «Тождественные преобразования» встречаются *II, IV, VI типы задач*, которые уже встречались в учебниках других авторов, рассмотренных выше.

Примеры упражнений по некоторым типам задач из учебников для общеобразовательных учреждений для 8 класса, для решения которых нужно владеть основными умениями и знаниями по теме «Одночлены и многочлены» представлены в Приложении 3 (Задачи 11 –12).

Сделаем вывод, что *I тип задач* в учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина [2] был рассмотрен в 7 классе, а авторы учебников Г. К. Муравин и О.В. Муравина, А.Г. Мордкович и Ю.Н. Макарычев вводят этот тип задач лишь в 8 классе. А *IV тип задач* встречается во всех учебниках 8 класса, рассмотренных выше авторов, за исключением учебника Г.К. Муравина и О.В. Муравиной, так как свойства неравенств авторы учебника вводят лишь в 9 классе.

В учебниках алгебры 9 класса Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [33] и Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина [3] выделим следующие типы задач, для

решения которых нужно владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены», которые не являются типовыми:

I. Применение понятий одночлена и многочлена и действий над ними при решении неравенств и их систем.

II. Нахождение корней многочленов.

В учебниках алгебры 9 класса А.Г. Мордковича [28] и Ю.Н. Макарычева [19] можно выделить следующие типы задач на:

III. Применение действий с многочленами при решении текстовых задач.

IV. Применение знаний о многочленах и одночленах для решения уравнений и их систем.

Нужно заметить, что задачи на применение свойств неравенств в учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина более сложные, чем в других учебниках: в основном одна часть неравенств (*I тип задач*) содержит или степень с рациональным показателем, или возведено в степень больше второй (3-7 степень), что в других учебниках базового уровня не встречается.

Приведем пример упражнения *II типа* в Приложении 3 (Задача 13) для решения которого нужно знать понятие корня многочлена, которое вводится в 8 классе.

Подведем итог по типам задач в учебниках разных авторов: в основном все типы задач у разных авторов одинаковые. Различие состоит в том, в каком классе каждый автор рассматривает данный тип задач и насколько углубленно данная тема изучается в данном классе. К примеру, *задачи на преобразование рациональных выражений* (не входящие в состав типовых задач) в учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина был рассмотрен в 7 классе, а авторы учебников Г.К. Муравин и О.В. Муравина, А.Г. Мордкович и Ю.Н. Макарычев вводят этот тип задач лишь в 8 классе. Наиболее развернуто линия «Тожественных преобразований» изучается в учебниках А.Г. Мордковича и Ю.Н. Макарычева, а в учебниках Ш.А. Алимова и Ю.М. Коля-

гина типы задач наиболее сложного уровня, для решения которых нужно обладать наиболее углубленными знаниями по теме «Одночлены и многочлены».

Далее рассмотрим учебники для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. Ответы и указания к решению задач в Приложении 3 (Задачи 14–27).

Для классов с углубленным изучением математики в учебнике Ю.Н. Макарычева «Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса» [20] рассматриваются другие приемы и методы преобразования целого выражения в многочлен и разложения многочленов на множители (II, III, IV тип задач 7 класса), которые не рассматриваются в общей образовательной программе, при рассмотрении следующих вопросов, примеры и указания к решению задач представлены в Приложении 3 (Задачи 14 –19):

1. Нахождения произведения многочленов используется прием последовательного подсчитывания коэффициентов многочлена-произведения.

Данный метод легко выявить самому, если рассмотреть сначала произведение многочленов, расположив их по убывающим степеням x :

Рассмотрим произведение многочленов $10x + 5x^2 - 1 + 2x^4$ и $7 - 6x + 3x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Выполним умножение: } & (2x^4 + 5x^2 + 10x - 1)(3x^2 - 6x + 7) = \\ = & 6x^6 - 12x^5 + 14x^4 + \\ & + 15x^4 - 30x^3 + 35x^3 + \\ & + 30x^3 - 60x^2 + 70x - \\ & - 3x^2 + 6x - 7 = \\ = & 6x^6 - 12x^5 + 29x^4 - 28x^2 + 76x - 7. \end{aligned}$$

«Особенность данной записи помогает избежать ошибок при умножении многочленов. Отсюда, можно заметить, что коэффициент при x^6 получается в единственном случае: при умножении старших членов множителей, он равен $2 \cdot 3$. Коэффициент при x^4 получается в двух случаях: при умножении

$2x^4$ на 7 и при умножении $5x^2$ на $3x^2$, поэтому он равен $2 \cdot 7 + 5 \cdot 3$. Коэффициент при x^2 можно получить в трех случаях: при умножении $5x^2$ на 7, $10x$ на $-6x$ и -1 на $-3x^2$, он равен $5 \cdot 7 + 10 \cdot -6 + (-1) \cdot 3$ [20, С. 57]. Этот прием удобен только в том случае, если многочлены не очень громоздки и содержат не много членов.

2. Упрощение многочленов с помощью введения новых переменных.

Удобство данного метода состоит в том, чтобы избавиться от громоздких записей, заменить какое-либо выражение буквой, выполнить нужное преобразование и вернуться к прежним обозначениям.

3. Разложение многочленов с помощью треугольника Паскаля.

4. Преобразование многочленов с помощью формулы квадрата суммы нескольких слагаемых.

5. Разложение многочлена на множители методом неопределенных коэффициентов.

6. Разложение многочленов на множители с помощью формулы разности n -ых степеней.

Сделаем вывод, что в учебнике Ю.Н. Макарычева «Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса» рассматриваются лишь другие методы преобразования целого выражения в многочлен и разложение многочленов на множители, что относится к *II, III, IV тип задач* 7 класса, рассматриваемые в учебниках алгебры для общеобразовательных школ.

В учебнике для 8 класса *Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики»* [7] раскрываются типы задач, которые есть и в базовых учебниках по алгебре 7 класса (*III, IV, V типы*) и 9 класса (*II тип*). Рассмотрим темы, которые раскрываются лишь в данном учебнике. Примеры и указания к решению представлены в Приложении 3 (Задачи 20–25). Для изучения данных вопросов нужно владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены»:

1. Формула квадрата суммы нескольких слагаемых.

Для любого n имеем: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ² $= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n$.

2. Деление многочлена на многочлен с остатком.

3. Теорема Безу. Корни многочлена. Приведем пример на применение теоремы Безу в Приложении 1 (Задача 22).

4. Симметрические многочлены от двух переменных.

5. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух одночленов.

В учебнике для 9 класса *Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики»* [8] раскрываются вопросы следующие вопросы, примеры и указания к решению которых представлены в Приложении 3 (Задачи 26–27):

1. Схема Горнера для нахождения корней многочлена.

2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов. Алгоритм Евклида.

В 9 классе в учебнике *Н.Я. Виленкина* изучение углубленного материала по теме «Одночлены и многочлены» продолжается, захватывая темы: «Корни многочленов», «Деление многочлена на многочлен с остатком», «Теорема Безу. Корни многочленов» на повторение, так как данные темы уже рассматривались в 8 классе. Добавляются новые разделы: «Схема Горнера», «Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов. Алгоритм Евклида».

Выводы по первой главе

1. Проведен логико-математический анализ темы «Одночлены и многочлены» темы, выделено, что он включает в себя: знание учащимися понятий: «одночлен», «многочлен», «степень многочлена», «стандартный вид многочлена», формулы сокращенного умножения и свойства степени с натуральными показателями.

ральным показателем, умение выполнять арифметические операции над одночленами и многочленами, раскладывать многочлены на множители.

2. Выявлены основные цели обучения теме «Одночлены и многочлены»: научиться выполнять арифметические операции над одночленами и многочленами, раскладывать многочлены на множители различными способами и применять формулы сокращённого умножения для преобразования алгебраических выражений и их вычислений.

3. Выявлены основные требования к уровню подготовки учащихся 7-9 классов по учебникам *для общеобразовательных учреждений* следующих авторов: Ш.А. Алимов, Ю.Н. Макарычев, А.Г. Мордкович, Г.К. Муравин. Выявлены основные требования к уровню подготовки *для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики*. Данные требования отражены в таблицах в Приложениях 1-2.

4. Выполнен анализ содержания теоретического материала по теме исследования в различных учебниках *для общеобразовательных учреждений и классов с углубленным изучением математики*. Рассмотрено, как различные авторы вводят понятия «одночлен» и «многочлен», как данные знания необходимы для применения их на уроках алгебры в 8 классе, какие темы учащиеся должны знать, чтобы успешно сдать ОГЭ в 9 классе.

5. Выполнен анализ задачного материала по теме «Одночлены и многочлены» в учебниках алгебры 7-9 классов и учебников для школ с углубленным изучением математики и выявлены основные типы задач. На каждый тип задач приведены примеры с решением, ответы на них в Приложении 3.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОБУЧЕНИЮ ТЕМЕ «ОДНОЧЛЕННЫ И МНОГОЧЛЕННЫ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§6. Формы, методы и средства обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы

«Если говорить о личностно-ориентированном подходе обучения математике, о творческой деятельности при обучении, то выявляется основная проблема - недостаточность времени обучения математике в общеобразовательной школе. Чтобы правильно организовать учебный процесс, нужно хорошо понимать, какие формы, методы и средства обучения использовать для изучения данного материала» [13, С. 66].

Г.И. Саранцев в своей монографии «Методология методики обучения математики» раскрывает определение объекта и предмета методики математики: «*Объектом* методики обучения математике является обучение математике, математическое образование и воспитание. *Предметом* методики математики служит методическая система, составляемая целям, содержанием, *методами, средствами и формами обучения математике*» [39, С. 31].

Приведем классификацию *методов обучения* математике по Г.И. Саранцеву: 1) *индуктивно-репродуктивный метод* – суть этого метода в том, что учитель создает ситуацию, в которой ученик, рассматривая частные случаи, должен сказать верное понятие или теорему; 2) *дедуктивно-репродуктивный метод* - предполагает изложение частных случаев в процессе решения задачи; 3) *обобщающе-репродуктивный метод* - в данном методе за счет воспроизведения изученных фактов достигается поставленная цель; 4) *индуктивно-эвристический метод* - предполагает найти решение в ходе рассмотрения частных случаев и прийти к общему выводу; 5) *дедуктивно-*

эвристический метод - предполагает рассмотреть общий случай и сделать частные выводы; б) *эвристическое обобщение* – в данном методе учитель создает ситуацию, когда ученик сам пытается прийти к общему выводу; 7) *индуктивно-исследовательский метод* – данный метод заключается в том, что рассматриваются конкретные проявления различных особенностей рассматриваемого объекта; 8) *дедуктивно-исследовательский метод* – при этом методе обучения учебный материал строится по принципу дедуктивного развития; 9) *обобщенное исследование* – данный метод обучения приводит к обобщенному знанию, благодаря ситуациям, созданным при изучении учебного материала [39, С. 153].

Ю.М. Колягин в книге «Методика преподавания математике в средней школе» дает определение *методу обучения*: «Метод обучения – это способ передачи знаний учащимся и способ организации познавательной и практической деятельности учащихся, направленный на усвоение ими знаний, умений, навыков, на овладение ими методами познания, на формирование личности» [14, С. 207]. Автор утверждает, что методы обучения целесообразно классифицировать по виду деятельности: то есть различать методы преподавания (деятельность учителя) и методы изучения (деятельность учащихся).

Итак, при обучении теме «Одночлены и многочлены» целесообразнее применять следующие методы обучения: работа с книгой, упражнения и выполнение самостоятельных работ, так как они способствуют формированию у учащихся теоретических знаний, обогащают их практическими навыками решения и выполнения самостоятельных работ и применение полученных знаний при дальнейшем изучении материала.

В Книге И.М. Чередова «Формы учебной работы в средней школе» выделяются следующие *формы обучения*: фронтальные, групповые и индивидуальные формы учебной работы [43, С. 15].

В книге «Методика преподавания математике в средней школе» Ю.М. Колягина утверждается, что: «Формами обучения математики являют-

ся способы организации учебного процесса. К общим формам обучения относятся: классно-групповая, классно-урочная, лабораторная, практическая» [14, С. 211].

Рассмотрим опыт работы учителя Ю.М. Поскребалова [35] на уроке закрепления и отработки навыков по теме «Многочлены» в 7 классе, где используется фронтальная форма обучения, так как на данном уроке помимо повторения и обобщения знаний по теме «Многочлены», учащиеся поговорят о такой важной проблеме как здоровье и правильном режиме дня. Например, задания выполняются у доски одним учащимся, остальные решают у себя в тетрадях и сравниваются с доской.

Задание: вычислите значения выражения: а) $4a^2 - 2a + 7a^2 + 3a - 3a^2 + 4a - 5 - 12a + 21$, при $a = -1$;

б) $2x^2 - x - y + 3y^2 - x - y + \frac{1}{3}xy + 1$, при $x = -3, y = -2$;

в) $3c^2 - 1 - 3c^2 - 5 - 4c - c^2 + 1 + 6c - 9$, при $c = -1$.

И узнайте: а) в какое время у человека наивысшая работоспособность; б) в какое время у человека наибольшее утомление; в) когда необходимо прекращать всякую деятельность.

А.Н. Грудачева на уроке обобщения и закрепления пройденного материала по теме «Многочлены и действия над ними» в 7 классе [10] использует в начале урока групповую форму работы с учащимися, где учащимся предлагается решить кроссворд, для повторения теоретического материала. Кроссворд решают группами устно, и потом участники из разных групп дают свои ответы.

Согласно данным определениям и опыту учителей, *стоит сделать вывод*, что при обучении теме «Одночлены и многочлены» целесообразнее совмещать в современной общеобразовательной практике организационные *формы*: фронтальная, групповая и индивидуальная. Так как при фронтальном обучении учитель управляет учебной деятельностью всего класса, работает над единой задачей. Такая форма работы преимущественно используется при

объяснении нового материала. При индивидуальной форме работы каждый ученик работает самостоятельно: темп его работы определяется степенью целеустремленности и усвоения знаний. Чаще такой вид работы лучше использовать при самостоятельных работах и на уроке закрепления знаний. Групповая форма работы прекрасно подойдет для актуализации знаний на уроках, или же для отработки и закрепления полученных знаний, так как деление на группы способствует соперническому духу между учащимися групп, и ученики стараются как можно быстрее найти правильный ответ на задачу.

В собрании сочинений «Вопросы теории и истории психологии» Л.С. Выготский приводит следующие средства обучения: речь, схемы, письмо, различные условные обозначения, чертежи на доске и др. [9, С. 103].

Ю.М. Колягин в книге «Методика преподавания математике в средней школе» отмечает, что на уроке учителю следует стараться подкреплять любую задачу соответствующей наглядностью: модели, макеты, карточки, наглядные пособия, слайды [14, С. 287]. Например, настенные таблицы по математике удобно использовать для решения задач. С одной стороны их многократное использование способствует запоминанию материала, а с другой – быстро вспомнить необходимую информацию.

В журнале «Математика в школе» в статье «Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены»» В.В. Крючковой [15] предлагается использовать такие методы обучения: записи на доске и заготовленные заранее плакаты, чтобы показать учащимся, что операции сложения и умножения многочленов должны удовлетворять известным для чисел переместительному, сочетательному и распределительному закону умножения. Эти законы записываются при помощи переменных:

$$1) b + a = a + b; \quad 2) b \cdot a = a \cdot b; \quad 3) b + a + h = b + a + h;$$

$$4) b \cdot a \cdot h = b \cdot a \cdot h, b; \quad 5) b \cdot a + h = b \cdot a + b \cdot h.$$

«На основании этих законов, представленные на плакате, учащиеся сами пытаются выяснить, как получаются правила нахождения произведения много-

членов, рассматривая 4 случая: произведение одночленов, произведение одночлена на сумму одночленов, произведение суммы одночленов на одночлен, произведение многочленов, отличных от одночленов» [15].

Из опыта работы учителя Ю.М. Поскребалова [35] на уроке повторения и обобщения в 7-м классе по теме "Многочлены", предлагается использовать *плакат* по теме «Многочлены». Данный плакат представлен в Приложении 6.

Из опыта работы учителя математики И.Г. Салаховой [37] на обобщающем уроке по теме «Формулы сокращенного умножения» в 7 классе автором используются разработанные *карточки*, где нужно для каждого выражения из левого столбца подобрать ему тождественно равное в правом столбце, для активизации знаний на уроке (Табл. 6). В своей книге Д. Даунинг [45], а также Т. Фатма [48] и П. Томпсон в своих статьях [47], указывают на то, что любая новая информация, полученная на уроках, закреплённая наглядными рисунками, схемами, таблицами, справочниками, способствует более качественному и быстрому усвоению материала.

Таблица 6

Карточка по теме «Формулы сокращенного умножения»

1) $x + y^2$;	1) $x^2 - y^2$;
2) $y^2 - x^2$;	2) $x^2 + 2xy + y^2$;
3) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$;	3) $y - x$;
4) $x^3 - y^3$;	4) $x - y^2$;
5) $x^2 - 4xy + 4y^2$;	5) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
6) $(x - y)(x + y)$;	6) $x + y^3$;
7) $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$;	7) $x^3 + y^3$;
8) $-(x - y)$;	8) $x - 2y^2$;
9) $x^2 - 2xy + y^2$;	9) $(y - x)(y + x)$;

На основании данных определений *подведем итог*, что на уроке алгебры для изучения темы «Одночлены и многочлены» можно использовать следующие средства обучения: таблицы с формулами сокращенного умножения для более быстрого и удобного усвоения материала; наглядные материалы

(карточки, плакаты), где представлены алгоритмы выполнения арифметических операций над одночленами и многочленами, различные презентации.

§7. Методика обучения решению задач по теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры 7-9 классов

В учебном пособии Н.М. Епифановой «Методика преподавания алгебре основной школы» [12, С. 42] выделены два подхода к изучению линии тождественных преобразований: « В *алгебраическом подходе* большое внимание уделяется буквам и операциям над буквенными выражениями. На выражение смотрят в общем виде, не предполагая, какие цифры скрываются под данными буквами. При этом все преобразования выражений основываются на правилах и свойствах действий. В *функциональном подходе* понимается, что все буквы это отдельные переменные, а тождественные преобразования опираются равенство значений функций при всех допустимых значениях переменной».

В курсе лекций Г.Н. Васильевой «Методика изучения математики в основной школе» [6, С. 7] приводятся рекомендации, при изучении линии тождественные преобразования по теме «Одночлены и многочлены: « 1) рассматривать на множестве одночленов лишь операцию умножения; 2) не выделять отдельно тему деление многочленов, рассмотрев его при изучении темы «Рациональные дроби»; 3) тождественно явными считать два целых рациональных выражения, если их значения совпадают при одинаковых значениях входящих в них переменных; 4) тождественные преобразования выполнять на основе законов арифметических операций, считать их основными аксиомами для выполнения преобразований».

Я.И. Груденов в своей книге «Совершенствование методики работы учителя математики» [11], отмечает приемы, которые способствуют сознательному усвоению учащимися темы «Одночлены и многочлены»:

1. *Чтобы запомнить материал, его необходимо понять и осознать. Если учащиеся повторяют на уроках одни и те же формулировки, но не приводят конкретные примеры, то материал может не усвоиться ими.* Рассмотрим это на примере введения понятий одночлена и многочлена. Приводя примеры учащимся следующего типа: $17b^2c$, $5xyz$, $8a^5b^2c$ и задавая вопрос «что это за выражения?», часто можно услышать типичную ошибку в ответах, что данные выражения - это многочлены. Так как учащиеся предполагают, если данное выражение состоит из *нескольких различных* переменных, то оно является многочленом, забывая об определении многочлена: «*многочленом* называют алгебраическое выражение, представленное в виде *суммы* нескольких одночленов», не замечая, что данные выражения не представлены суммой нескольких членов. Так же одной из ошибок учащихся является, что часто действительные числа они не относят к одночленам. Например, число 5 можно записать в виде $5x^0$, где сразу становится видно, что действительное число является одночленом. Поэтому полезно использовать задания, где учащимся нужно определить, является ли данное выражение одночленом и многочленом. *Пример:* установите, какие из данных выражений являются многочленами, а какие одночленами: а) $3x + 4y$ - многочлен; б) $3x^2 - 2y^2$ - многочлен; в) $4x^2 - 11y^2$ - многочлен; г) $a + 1$ $b - 2$ - многочлен; д) $3a$ - одночлен; е) $0,25x^2y$ - одночлен.

2. *Изучаемый материал можно запомнить произвольно, если систематически проводить над ним активную мыслительную деятельность.* «Например, при изучении формул сокращенного умножения, учителя часто не могут добиться того, чтобы учащиеся запомнили формулировки этих формул. Для устранения этой проблемы, на уроке рекомендуется читать данное правило из учебника, при выполнении соответствующих заданий: куб двучлена (записывает $(a+b)^3$) равен сумме четырех выражений: куба первого члена (записывает a^3), утроенного произведения квадрата первого члена и второго (записывает $3a^2 \cdot b$), утроенного произведения квадрата

второго члена и первого (записывает $3ab \cdot 2^2$), куба второго члена (записывает 2^2)» [11, С. 26].

3. При усвоении материала, его восприятие облегчается, если объекты расположены упорядоченно, без нагромождений, в строго продуманной последовательности. Например, при изучении темы «Разложение многочленов на множители» в учебнике Ю.Н. Макарычева приводится задание: «Разложите многочлен $tx + ty + bx + by$ на множители. Запишем решение в строчку: $tx + ty + bx + by = t x + y + b x + y = (t + b)(x + y)$. При изложении нового материала, хаотичное расположение записей затрудняет решение. Рекомендуется: располагать полученное выражение под соответствующим изначальным выражением; одночлены, которые мы собираемся группировать, подчеркивать одной чертой, как мы это делаем при приведении подобных членов выражения» [11, С. 39]. Удобнее для понимания учеников, записать данный пример следующим образом:

$$\begin{array}{l} tx + ty + bx + by = \\ \underline{t x + y} + \underline{b x + y} = \\ (t + b) \underline{x + y} \end{array}$$

4. При подборе заданий, на отработку изученного материала, нужно чтобы один вид заданий был в различных словесных интерпретациях. Это нужно, чтобы при дальнейшем обучении, формулировка задания не вводила учащихся в непонимание требований и применения изученных свойств. Рассмотрим это на примере формулы разности квадратов $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. В первом случае, приводя данный пример в теме «разложение многочленов на множители», проводя пропедевтический этап изучения темы «формулы сокращенного умножения», мы будем трактовать это задание как: разложение многочлена на множители, представляющего собой разность двух неотрицательных выражений. Данную трактовку можно использовать для заданий: разложения многочленов на множители вида $a - b$, где $a \geq 0, b \geq 0$.

Пример [31, С. 146]: представьте выражение $x + 3^2 - 1$ в виде произведения многочленов. Решение: $x + 3^2 - 1 = x + 3 - 1 \cdot x + 3 + 1 = (x + 2)(x + 4)$. Во втором случае, при изучении самой темы «формулы сокращенного выражения», мы проговариваем правило: «разность квадратов равна сумме первых членов умноженной на разность первого и второго члена». В третьем случае, используя данную формулу при сокращении дробей, можно сказать, что разность двух неотрицательных чисел представлена в виде произведения делителя и частного.

Пример:
$$\frac{2a-2b}{2a+2b} = \frac{\overline{2a}^2 - \overline{2b}^2}{\overline{2a+2b}} = \frac{(\overline{2a+2b})(\overline{2a-2b})}{\overline{2a+2b}} = \overline{2a} - \overline{2b}.$$

5. На начальном этапе изучения темы следует приводить примеры решений при выполнении арифметических операций над одночленами и многочленами с подробными записями и обоснованиями, заранее оговаривая требования к записи решения. Применяя правило умножения степеней, при приведении одночленов и многочленов к стандартному виду, на начальном этапе изучения темы, желательно, чтобы учащиеся расписывали решение подробно. Например: $6a^2bn \cdot 2ab^4n^2 = 12a^3b^5n^3$. Данная запись на начальном этапе изучения данной темы весьма затруднительна. Не все могут понять, как при умножении двух одночленов получились данные цифры. Рекомендуется расписать подробно, основываясь на свойство степени:

$$6a^2bn \cdot 2ab^4n^2 = 6a^2b^1n^1 \cdot 2a^1b^4n^2 = 6 \cdot 2 \cdot a^{2+1} \cdot b^{1+4} \cdot n^{1+2} = 12a^3b^5n^3.$$

Это делается для того, чтобы такие частные примеры как:

$b^2 \cdot b^2 = b \cdot b \cdot b \cdot b = b^4$ не вводили учащихся в заблуждение, что нужно перемножить показатели степеней, а основание оставить прежним.

6. При обучении теме «Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения», для наглядности и правильности решения следует приводить параллель между тождествами и числовыми равенствами. Данный факт полезно использовать для проверки правильности разложения на множители. Например, одной из самой распространенной

ошибкой является применение формулы квадрат суммы: $a + b^2 = a^2 + b^2$, что является грубой ошибкой. Возьмем за $a = 2, b = 3$ и подставим в данное тождество: $2 + 3^2 = 2^2 + 3^2$ или $25 = 13$ – это неверно.

7. Использовать средства наглядности, такие как: макеты, таблицы, схемы, условные обозначения и тд.

8. Выполняя разложение на множители различными способами, важно провести внимательный анализ выражения, найти более рациональные пути его разложения, выявить более правильные пути решения. Например, в учебнике алгебра 7 класс Ю.Н. Макарычева в параграфе «Разложение разности квадратов на множители» приводится задание, где нужно представить в виде произведения $2x + y^2 - x - 2y^2$. «Кто-то из учащихся скажет, что данные выражения нужно разложить по формулам: сумма и квадрат разности двух выражений, а кто-то, при внимательном анализе выражения, увидит формулу разности квадратов двух выражений» [17, С. 154]. Полезнее выполнить разложение на множители обеими способами, чтобы показать, что воспользовавшись формулой разность квадратов двух выражения, вычисления будут короче.

9. Обязательно нужно контролировать действия учащихся за выполнением заданий. Это нужно делать, как и учителю, так и ученикам. Большое значение в усвоении учащимися знаний, это находить свои ошибки и исправлять их. Если ученик совершил ошибку, не нужно торопиться указывать ему на нее в явном виде, лучше использовать следующий педагогический способ: «1) попросить перечитать еще раз текст задачи (вдруг учащийся упустил что-то важное); 2) сверить записи в тетради, в учебнике и на доске, вдруг это ошибка состоит лишь в неправильном переписывании условия; 3) вспомнить правило, формулу, свойства и проверить правильность их использования для решения данного задания; 4) провести решение задания в обратном порядке, если это возможно; 5) объяснить ученику его ошибку, объяснить ее сущность привести контрпример» [11]. Такой способ выяснения соб-

ственных ошибок и вычислений способствует выработке привычке у учащихся самостоятельно контролировать свою деятельность на уроке.

Рассмотрим методические рекомендации авторов учебников алгебры для 7 классов для общеобразовательных учреждений: *Ш.А. Алимова, [1]* и *Ю.Н. Макарычева [17]* и сделаем выводы, что: «1) изучение понятий «Одночлен и многочлен» начинается с введения определения степени с натуральным показателем и ее свойства. Свойства степени с натуральным показателем находят применение при умножении одночленов и возведении одночленов в степень; 2) важно выработать умение выполнять арифметические операции над одночленами многочленами и умение раскладывать многочлены на множители. Учащиеся должны понимать, что сумму, разность, произведение многочленов всегда можно представить в виде многочлена; 3) серьезное внимание следует уделить разложению многочленов на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя и с помощью группировки; 4) также важно выработать умение применять формулы сокращенного умножения в преобразованиях целых выражений в многочлены и в разложении многочленов на множители» [1; 17].

Таким образом, нами были выявлены и разработаны:

1. Методические приемы, которые способствуют сознательному усвоению учащимися темы «Одночлены и многочлены».

2. Рассмотрены методические рекомендации, как избежать совершения ошибок.

3. Рассмотрены методические рекомендаций авторов учебников алгебры для 7 классов для общеобразовательных учреждений: *Ш.А. Алимова* и *Ю.Н. Макарычева*.

4. Раскрыты алгебраический и функциональный подход к изучению линии тождественных преобразований по теме «Одночлены и многочлены».

§8. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Проводя анализ демонстративных вариантов для подготовки ОГЭ, нами были выделен набор задач из части 1 (B6, B12, B14) и части 2 (C1), в которых встречаются задания на применение понятий по теме «Одночлены и многочлены». «В данном наборе задач имеются некоторые типы задач, выделенные нами в 7 классе для решения которых нужно хорошо владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены», такие как: разложение многочленов на множители с помощью способов группировки, формул сокращенного умножения; выполнять деление многочленов, производить операцию умножения одночлена на многочлен, выносить общий множитель за скобки» [44]. Выделим типы задач ОГЭ по теме «Одночлены и многочлены». Ответы и указания к решению представлены в Приложении 4.

1. Задачи на выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами.

Задача 1 (B12). «Найдите значение выражения: $b - c^2 - c(c + 3)$, при $c = -\frac{1}{15}$ » [42].

Задача 1 также относится к типу задач на применение формул сокращенного умножения для преобразования выражений и их вычислений.

Задача 2 (B12). «Найдите значение выражения:

$$2x + 3y^2 - 3x \frac{4}{3}x + 4y, \text{ при } x = -1.038, y = \sqrt{3} \text{ » [34].}$$

2. Задачи на разложение многочленов на множители различными способами (вынесение множителя за скобки, способ группировки и др.).

Задача 3 (C1). «Разложите на множители $x^2y + 1 - x^2 - y$ » [34].

Задачи 1-3 являются типовыми заданиями и были рассмотрены в 7 классе. Далее приведем задания, которые направлены на применение понятий одночленов и многочленов и действий над ними.

3. Применение понятия разложения многочленов на множители при решении уравнений.

Задача 4 (С1). «Решите уравнение: $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$ » [34].

4. Задачи на применение формул сокращенного умножения при решении уравнений.

Задача 5 (С1). «Найдите корень уравнения $x + 3^2 = x + 8^2$ » [42].

Задача 6 (С1). «Решите уравнение: $x - 4^2 + x + 9^2 = 2x^2$ » [34].

5. Задачи на применение действий с многочленами при преобразовании рациональных выражений.

Задача 7 (В12). «Найдите значения выражения»:

$$\frac{a^2 - 36b^2}{6ab} \div \frac{1}{6b} - \frac{1}{a}, \text{ при } a = 5\frac{5}{17}, b = 5\frac{2}{17} \text{» [44, С. 28].}$$

Задача 8 (В12). «Найдите значение выражения: $\frac{4a}{a+b} \cdot \frac{ab+b^2}{16a}$, при $a = 9,2, b = 18$ » [42].

Задача 9 (В12). «Упростите выражение: $\frac{6}{a-1} - \frac{10}{a-1^2} \div \frac{10}{a^2-1} - \frac{2a+2}{a-1}$ » [34].

6. Применение понятий одночлена и многочлена и действий над ними при решении неравенств и их систем.

Задача 10 (С1). «Решите неравенство: $x - 3 - 2x + 3 < -7$ » [34].

7. Применение разложение многочленов на множители различными способами при решении неравенств и их систем.

Задача 11 (С1). «Решите неравенство $x - 3^2 < \sqrt{5}(x - 3)$ » [42].

8. Применение арифметических операций над одночленами и многочленами при преобразовании рациональных выражений.

Задача 12 (С1). «Найдите значение выражения $\frac{7a}{6c} - \frac{49a^2 + 36c^2}{42ac} + \frac{6c - 49a}{7a}$ при $a = 71, c = 87$. В ответе запишите найденное значение» [34].

Итак, нами было выделено 2 типовых вида задач, встречающиеся в 7 классе, и 6 типов задач, встречающиеся в основном государственном экзамене (ОГЭ), непосредственно связанные с темой «Одночлены и многочлены». Чтобы успешно справиться с данными заданиями: **часть 1:** линейные и

квадратные уравнения (B6), целые и рациональные выражения (B12), квадратные неравенства (B14); **часть 2:** алгебраические выражения, неравенства и их системы, уравнения и их системы (C1), требуют от учащихся данных знаний; учащиеся должны уметь выполнять арифметические операции над одночленами и многочленами, знать методы разложения многочленов на множители (чаще встречается метод группировки и вынесение общего множителя за скобки). Так же необходимо знать формулы сокращенного умножения, использовать понятия многочлена и одночлена для преобразования рациональных выражений, при решении неравенств и их систем, знать свойства степени многочленов с целым показателем.

§9. Системы задач по теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы

Чтобы составить систему задач, обратимся к источникам различных авторов. В учебном пособии Е.И. Лященко [16] автором выделяются следующие *особенности системы задач на усвоение понятия и его определения*: «1) задачи должны отражать практическую значимость изучаемого понятия и его важность для дальнейшего изучения новых тем; 2) в начале урока должны быть задачи на актуализацию новых знаний; 3) задачи должны отражать существенные признаки изучаемого понятия; 4) при решении задач, учащиеся должны сами уметь распознавать новое вводимое понятие; 5) в системе упражнений должны присутствовать задачи, которые помогают усвоить текст изучаемого определения; 6) в задачах должна содержаться символика, напрямую связанная с изучаемым понятием; 7) задачи должны способствовать установлению свойств данного понятия».

В учебном пособии З.П. Матушкиной отмечается, что одни авторы выдвигают дидактические требования к системе задач: научность, систематичность, последовательность и тд. Другие авторы конкретизируют требования к

системе задач в зависимости от цели ее создания: для сознательного и прочного усвоения понятия, для усвоения формулировок теорем и их доказательств, для формирования свойств изучаемых понятий. З.П. Матушкина выделяет критерии к системе текстовых задач, которые так же можно отнести к системе задач по теме «Одночлены и многочлены»:

«1. Задача должна быть по изучаемой теме, числовой материал должен соответствовать программе по математике.

2. Сложность задач должна варьироваться от уровня знаний учащихся.

3. Формулировка задач должна быть понятной и краткой для лучшего понимания учащимися.

4. Построение задач должно начинаться с более простого уровня сложности и переходить к наиболее сложным задачам» [21].

Учитывая рассмотренные требования к системе задач и упражнений, нами будут составлены системы задач по темам: «Одночлены. Арифметические операции над одночленами», «Многочлены. Арифметические операции над многочленами», «Разложение многочленов на множители» для учащихся 7 классов для школ с базовым уровнем изучения математики. Ответы и указания к решению представленных задач представлены в Приложении 5.

Система задач на тему «Одночлены. Арифметические операции над одночленами»

Задача 1. «Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $9уу^2у$; б) $0,15pq \cdot 4pq^2$; в) $-2x^3 \cdot 0,5xy^2$; г) $-8ab - 2,5 b^2$;

д) $10a^2b^2(-1,2a^3)$; е) $2m^3n \cdot 0,4mn$ » [17, С. 84].

Задача 2. «Приведите к стандартному виду одночлен и определите, какая у него степень: а) $6xhbxbbb \cdot 5xbx$; б) $\frac{3}{8} aab^4ac \cdot 1,6c^2$; в) $-2,4p^5 \cdot -2,5 np^2$;

г) $1\frac{5}{7}axy^7 \cdot \frac{7}{12}x^4y$; д) $2\frac{2}{3}k^2n \cdot -\frac{3}{16}kn^6$; е) $-\frac{1}{2}c^4y^5 \cdot 0,9c^2xy$;

ж) $2\frac{5}{11}a^6bc^2 \cdot \frac{22}{27}ab^3$; з) $-0,6x^9p^6 \cdot 11\frac{1}{9}x^7y^3p$ » [31, С. 109].

Задача 3. «Выполните деление:

а) $16abc$ и $8a$; б) $-42cdm$ и $12c$; в) $24pqr$ и $(-4pq)$; г) $-99xyz$ и $(-9x)$ » [24, С. 46].

Задача 4. «Вместо знаков «*» поставьте одночлены, подобные данным, и такие, коэффициенты которых в 3 раза больше, чем у данных:

а) $1,7x^2y^6$ и *; б) $c^3d^{12}z^5$ и *; в) * и $3,6a^2b^2c^9$; г) $\frac{1}{3}m^2n^8p^{14}$ и *» [24, С. 37].

Задача 5. «Представьте, если возможно, в виде квадрата или куба одночлена:

а) $16a^2b^4$; б) $9x^6y^2$; в) $8c^6x^9$; г) $-27a^{12}b^6$; д) $64a^6b^6$; е) $-64a^6b^6$ » [31, С. 110].

Задача 6. «Выполните действия:

а) $13x^2 + 20x^2$; б) $2,1z^3 + 3,05z^3$; в) $\frac{1}{2}p^7 + \frac{3}{7}p^7$; г) $\frac{1}{3}q^k + \frac{1}{4}q^k$ » [24, С. 38].

Задача 7. «Представьте одночлены в стандартном виде и выполните указанные действия: а) $3x \cdot 2y + 5x \cdot 2y + 6x \cdot 2y$;

б) $1,2a^2b + 3,2aba + 6,8a \cdot ab + 8,8baa$; в) $\frac{1}{2}xy^2x + \frac{1}{3}xyxy + \frac{1}{6}xy^2x$;

г) $1\frac{3}{5}mn^3r^8 + \frac{7}{10}n^2mr^5nr^3 + \frac{3}{20}mr^7n^2rn$ » [24, С. 39].

Задача 8. «Выполните умножение:

а) $-5a^2b \cdot (-6ab^2)$; б) $-17x^3y \cdot (-2x^2y^2)$; в) $41c^2d \cdot (-4cd)$; г) $-13m^2n^2p^3 \cdot (-2mn^2p)$ » [24, С. 42].

Задача 9. «Возведите в степень: а) $-6x^3y^3$; б) $-10x^2y^4$;

в) $-5ax^3$; г) $-2ax^3y^2$ » [24, С. 43].

Задача 10. «Упростите выражения: а) $\frac{2cy^3 \cdot 2 \cdot 8c^5y}{4c^2y^3}$; б) $\frac{9a^3b^4}{3a^2b^2 \cdot 27a^4b^9}$;

в) $\frac{3x^2c^3 \cdot 2 \cdot 9x^{15}c^4}{3x^2c^5}$; г) $\frac{7a^3b^3 \cdot -a^2b^3}{-2a^3b^3}$ » [24, С. 47].

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Одночлены. Арифметические операции над одночленами»: №1, 2 – на отработку понятия стандартный вид одночлена; №3, 6, 7 – на выполнение арифметических операций над одночленами; №4, 5 – на отработку понятия «подобные одночлены»; №8,

9 – на возведение одночлена в натуральную степень; №10 – на деление одночлена на одночлен. При подборе заданий на отработку арифметических операций над одночленами (сложение, вычитание, деление, умножение) больше подходит учебник А.Г. Мордковича, так как у данного автора выделены в учебнике отдельные параграфы на данные темы, в отличие от других.

Система задач на тему «Многочлены. Арифметические операции над многочленами»

Задача 11. «Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень:

- а) $1 - 3a + (a^2 + 2a)$; б) $y^2 - 5y + (-2y^2 + 5y + 1)$;
 в) $a^2 + 15a + 14 - (a^2 + 15a - 14)$; г) $2x^2 - 5x + (-x + 14)$;
 д) $p^2 + 2p + 7 - (p^2 + 3p + 18)$; е) $9k^3 + 13k^2 - (8 - 7k + 12k^2)$ »
 [31, С. 119].

Задача 12. «Представьте в виде многочлена стандартного вида и найдите значение выражения:

- а) $4y^2 - 5x^2 - 5x(x - 4y)$, при $x = 0,6, y = 0,75$;
 б) $b^2 + 5bc - 2c^2 + c(-5b^2 + 2bc + c^2)$, при $b = -0,45, c = -0,86$;
 в) $b^2 - a + 1 - a(a - b + 1)$, при $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}$;
 г) $x^2 - 5xy - y^2 - y(y^2 - xy - 5x^2)$, при $x = 0,27, y = -0,34$ »
 [24, С. 124].

Задача 13. «Найдите $p_1(x) + p_2(x)$, если:

- а) $p_1(x) = 2x^3 + 5, p_2(x) = 3x^3 + 7$; б) $p_1(x) = 6x^2 - 4, p_2(x) = 5x^2 - 10$;
 в) $p_1(x) = 4x^5 + 2x + 1, p_2(x) = x^5 + x - 2$; г) $p_1(x) = x^{11} + x^6 - 3, p_2(x) = 2x^{11} + 3x^6 + 1$ » [24, С. 52].

Задача 14. «Найдите многочлен, после подстановки которого вместо M следующее равенство окажется тождеством:

- а) $M + 5x^2 - 2xy = 6x^2 + 9xy - y^2$;
 б) $M - 4ab - 3b^2 = a^2 - 7ab + 8b^2$;

в) $4c^4 - 7c^2 + 6 - M = 0$ » [17, С. 110].

Задача 15. «Учащимся была предложена задача: найдите значение выражения $7a^3 - 6a^2b + 5ab^2 + 5a^3 + 7a^2b + 3ab^2 - (10a^3 + a^2b + 8ab^2)$, при $a = -0,25$. Один из учеников сказал, что в задаче не хватает данных. Прав ли он?» [17, С. 111].

Задача 16. «Запишите в виде многочлена:

а) $(c^2 - cd - d^2)(c + d)$; б) $(x - y)(x^2 - xy - y^2)$; в) $(4a^2 + a + 3)(a - 1)$;
г) $(3 - x)(3x^2 + x - 4)$ » [17, С. 125].

Задача 17. «Найдите значения выражений:

а) $a - 1 \quad a - 2 - (a - 5)(a + 3)$, при $a = -8$;
б) $a - 3 \quad a + 4 - (a + 2)(a + 5)$, при $a = -\frac{1}{6}$;
в) $a - 7 \quad a + 4 - (a + 3)(a - 10)$, при $a = -0,15$;
г) $a + 2 \quad a + 5 - (a + 3)(a + 4)$, при $a = -0,4$ » [24, С. 60].

Задача 18. «Докажите, что при всех натуральных значениях n значение выражения: а) $n \quad n + 32 - (n - 2)(n + 12)$ делится на 12;

б) $n + 8 \quad n + 9 - n(n - 7)$ делится на 24» [31, С. 134].

Задача 19. «Выполните действия:

а) $(3x^2y - 4xy^2) \div 5xy$; б) $(2ab + 6a^2b^2 - 4b) \div (-2b)$;
в) $(4x + 12y - 16) \div (-4)$; г) $(-a^5b^3 + 3a^6b^2) \div 4a^4b^2$ » [24, С. 69].

Задача 20. «Выясните, какой из данных многочленов может быть частным от деления многочлена $30a^4b^3 - 12a^2b^4$ на некоторый одночлен. Найдите делитель, если он существует:

а) $3a^3 - 1,2ab$; $30a^4b - 12ab^2$; б) $5b^3 - 2b^4$; $15a^2b - 4b$;
в) $30a^3b^2 - 12ab$; $6a^3b^2 - 3ab^3$; г) $15a^4b^3 - 6a^2b^4$; $3a^2 - 1,2b$ »
[24, С. 71].

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Многочлены. Арифметические операции над одночленами»: №11,12 – задачи на закрепление определения стандартного вида многочлена; №13-15 – задачи на сложение и вычитание многочленов; № 16-18 – задачи на выполнение умножения

многочлена на многочлен; № 19, 20 – задачи на деление многочлена на одночлен. При подборе заданий на отработку арифметических операций над многочленами (сложение, вычитание, умножение, деление многочлена на одночлен) удобнее использовать учебники А.Г. Мордковича и Ю.Н. Макарычева, так как арифметические действия над многочленами разбиты отдельно по параграфам, а в других учебниках они находятся в одной главе «Многочлены», т.е. не систематизированы, как в данных учебниках.

Система задач на тему «Разложение многочленов на множители»

Задача 21. «Разложите на множители:

- а) $3x^2 + 2x + 1 + y(x + y)$; б) $x^2 + 2x - d(x + 2)$; в) $m^2x - y^2 - (x - y)$;
г) $5p^2r - s^2 + 6q(r - s)$ » [24, С. 74].

Задача 22. «Найдите значения выражений, предварительно разложив их на множители:

- а) $3a^2 - 4a - b(a - 4)$ при $a = 5, b = 3$;
б) $x^2 - x - y + y(y - x)$ при $x = 2,3, y = 4,7$;
в) $2c^2 + d^2 - 3d^2 + d + 6(c + d)$ при $c = 2, d = 6$;
г) $p^2 - q^2 - q^2 - p - q - 4(q - p)$ при $p = 0,1, q = -8$ » [24, С. 75].

Задача 23. «Представьте в виде произведения одночлена и многочлена:

- а) $p^6 - p^8 + p^4$; б) $b^2 - b^7 + b^9$; в) $12a^2b - 180ab^2 - 30ab^3$;
г) $20x^4 - 25x^2y^2 - 100x^3$; д) $a^2bc - ab^2c - abc^2$; е) $c^3xy + c^2xy - cx^2y^2$ » [31, С. 129].

Задача 24. «Разложите на множители:

- а) $7c^2 - c^3 - c + 7$; б) $x^3 - 14x^2 - 2x + 28$; в) $3a + 3 - na - n$;
г) $6a^2 - 2ab - 3ac + bc$ » [24, С. 76].

Задача 25. «Представьте многочлен в виде произведения двух членов:

- а) $5a^3c + 10a^2 - 6bc - 3abc^2$; б) $8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a$ » [31, С. 137].

Задача 26. «Представьте многочлен в виде произведения двучлена и трехчлена:

а) $an^2 - cn^2 - ap + ap^2 - cp - cp^2$; б) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - b - a$;
в) $ac^2 - ax - bc^2 + cx + bx - c^3$; г) $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$
[31, С. 137].

Задача 27. «Представьте в виде произведения многочленов:

а) $a x^2 - y^2 - 5(x + y)$; б) $a^2 - 3a - 9b - 9b^2$; в) $2b^2 - 5b - 5c - 2c^2$;
г) $7 a - b - 4 a - b^2$; д) $x^2 - 5x - 10y - 4y^2$; е) $4a^2 + 2a - 9b^2 - 3b$
[31, С. 152].

Задача 28. «Замените знаки «*» такими одночленами, чтобы выполнялись равенства:

а) $a^2 + * + b^2 = a + b^2$; б) $* - 56a + 49 = 4a - 7^2$;
в) $b^2 + 20b + * = b + 10^2$; г) $* - 12c + * = 3c - 2^2$ » [24, С. 82].

Задача 29. «Разложите на множители выражение:

а) $a^2 + 6ab + 16b^2 - 6ab + 20b^2$;
б) $4 - 6y^3 + 4y^6 - 6y^3 - 5y^6$ » [31, С. 152].

Задача 30. «Разложите на множители:

а) $m + 3^3 - 8$; б) $c - 1^3 + 27$ » [24, С. 84].

Задача 31. «Разложите многочлен на множители:

а) $a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + 4b^2$; б) $8c^3 - d^3 + 4c^2 + 2cd + d^2$ » [24, С. 85].

Задача 32. «Пусть $x_1 + x_2 = 7, x_1 x_2 = 2$. Не находя значений x_1 и x_2 , вычислите:

а) $x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2$; б) $x_1^3 + x_2^3$; в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $x_1 + x_2^2$ » [24, С. 86].

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Разложение многочленов на множители»: № 21-23 – задачи на вынесение общего множителя за скобки; № 24-26 – задачи на применение способа группировки; № 27-29 – задачи на разложение многочлена с помощью формул сокращенного умножения; № 30-32 – задачи на разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов. Для составления системы задач по теме наиболее удобнее использовать учебники А.Г. Мордковича и Г.К. Муравина, так как в данных учебниках представлен наиболее большой набор зада-

ний на разложение многочленов на множители с помощью способа группировки, вынесения общего множителя за скобки и формул сокращенного умножения, и данные задания разбиты по соответствующим параграфам. В учебнике А.Г. Мордковича, в отличие от других авторов, отдельно представлен параграф на разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов.

Таким образом, в данном параграфе было рассмотрено:

1. Основные требования к системе задач авторов: Е.И. Лященко, З.П. Матушкиной.
2. Разработаны системы задач для 7 классов по темам «Одночлены. Арифметические операции над одночленами», «Многочлены. Арифметические операции над многочленами», «Разложение многочленов на множители».

Выводы по второй главе

1. Выявлены основные формы, методы и средства обучения. *При обучении теме «Одночлены и многочлены»* целесообразнее применять следующие методы обучения: работа с книгой, упражнения и выполнение самостоятельных работ. Целесообразнее совмещать в общеобразовательной практике организационные *формы*: фронтальная, групповая и индивидуальная. Также удобно использовать такие *средства обучения, как*: таблицы с формулами сокращенного, карточки, плакаты, различные презентации по теме урока.
2. Согласно анализа методической литературы, выделены два подхода по обучению теме «Одночлены и многочлены» - это алгебраический и функциональный, способствующие успешному усвоению материала. Нами были выделены методические приемы, способствующие сознательному усвоению учащимися темы «Одночлены и многочлены».
3. Выполнен анализ задач ОГЭ по теме «Одночлены и многочлены». Для этого нами были рассмотрены: демонстрационные варианты ФИПИ, об-

разовательный портал для подготовки к экзаменам, типовые экзаменационные варианты 2018 года под ред. И.В. Ященко. Нами было выделено 2 вида задач и 6 типов задач, связанные с применением понятий «Одночлены и многочлены». По всем типам задач представлены примеры и указания к их решению в Приложении 4.

4. Рассмотрены основные требования к системе задач авторов: Е.И. Лященко, З.П. Матушкиной. Разработаны системы задач по темам: «Одночлены. Арифметические операции над одночленами», «Многочлены. Арифметические операции над многочленами», «Разложение многочленов на множители». Ответы и указания к решению данных задач представлены в Приложении 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и результаты, полученные в результате исследования:

1. Проведен логико-математический анализ темы «Одночлены и многочлены» темы, выделено, что он включает в себя: знание учащимися понятий: «одночлен», «многочлен», «стандартный вид многочлена», «степень многочлена», формулы сокращенного умножения и свойства степени с натуральным показателем для преобразований выражений и их вычислений; их умение выполнять арифметические операции над одночленами и многочленами, раскладывать многочлены на множители различными способами.

2. Выявлены основные цели обучения теме «Одночлены и многочлены»: выработка умения выполнять действия над степенями с натуральными показателями, действия сложения, вычитания и умножения многочленов; раскладывать многочлены на множители различными способами и применять формулы сокращённого умножения для преобразований алгебраических выражений и их вычислений.

3. Выявлены основные требования к уровню подготовки учащихся 7-9 классов по учебникам *для общеобразовательных учреждений* следующих авторов: Ш.А. Алимов, Ю.Н. Макарычев, А.Г. Мордкович, Г.К. Муравин. Выявлены основные требования к уровню подготовки учащихся по учебникам *для учебных пособий для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики*. Данные требования отражены в Приложениях 1-2.

4. Выполнен анализ содержания теоретического материала по теме «Одночлены и многочлены» в различных учебниках *для общеобразовательных учреждений и классов с углубленным изучением математики*. Рассмотрены следующие аспекты: как различные авторы вводят понятие «одночлена» и «многочлена» в 7 классе; как темы, изучаемые в 8 классе взаимосвязаны и необходимы для применения понятий «одночлен» и «многочлен»; какие темы учащиеся должны знать, чтобы успешно сдать ОГЭ в 9 классе.

5. Выполнен анализ задачного материала по теме «Одночлены и многочлены» в учебниках алгебры 7-9 классов. Так же выполнен анализ задачного материала учебников для классов с углубленного изучения математики и выявлены основные типы задач. На каждый тип задач приведены примеры с решением, ответы на них представлены в Приложении 3.

6. Выявлены основные формы, методы и средства обучения. При обучении теме «Одночлены и многочлены» целесообразнее применять следующие методы обучения: работа с книгой, упражнения и выполнение самостоятельных работ; *формы обучения* - фронтальная, групповая и индивидуальная; *средства обучения* - таблицы с формулами сокращенного, карточки, плакаты, презентации по теме урока.

7. Согласно анализу методической литературы, выделены два подхода по обучению теме «Одночлены и многочлены» - это алгебраический и функциональный, которые способствуют успешному усвоению данной темы. Выделены методические приемы, способствующие сознательному усвоению учащимися темы «Одночлены и многочлены».

8. Выполнен анализ задач ОГЭ по теме «Одночлены и многочлены». Для этого нами были рассмотрены: демонстрационные варианты ФИПИ, образовательный портал для подготовки к экзаменам, типовые экзаменационные варианты 2018 года под ред. И.В. Яценко.

9. Рассмотрены основные требования к системе задач авторов: Е.И. Лященко, З.П. Матушкиной. Разработаны *системы задач* по темам: «Одночлены. Арифметические операции над одночленами», «Многочлены. Арифметические операции над многочленами», «Разложение многочленов на множители». Ответы и указания к решению данных задач представлены в Приложении 5.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш.А. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 255 с.: ил.
2. Алимов, Ш.А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 255 с.: ил.
3. Алимов, Ш.А. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 287 с.: ил.
4. Баум, И.В. Тождественные преобразования выражений [Текст]/ И.В. Баум, Ю.Н. Макарычев// Преподавание алгебры в 6-8 классах/ Сост. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 1980. – С. 70-95.
5. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.
6. Васильева, Г.Л. Методика изучения математики в основной школе [Текст]: курс лекций для организации самостоятельной работы студентов по вопросам частных методик/ Г.Л. Васильева. – Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2011. – 96 с.
7. Виленкин, Н.Я. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики/ Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Суворов, Ю.А. Дробышев, И.В. Дробышева, А.И. Кудрявцев; под ред. Н.Я Виленкин. – М.: Просвещение, 1998. – 235 с.
8. Виленкин, Н.Я. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для учащихся 9 классов с углубленным изучением математики/ Н.Я. Виленкин, Г.С.Сурвилло, А.С. Симонов, А.И. Кудрявцев,; под ред. Н.Я Виленкина. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 345 с.

9. Выготский, Л.С. Собрание сочинений: в 6-ти т. Т.1. Вопросы теории и истории психологии [Текст]/ Н.Я. Виленкин; под ред. А.Р. Лурия, М.Г. Ярошевского. – М.: Педагогика, 1982. –488 с.
10. Грудачева, А.Н. «Многочлены и действия над ними». Алгебра 7-ой класс [Электронный ресурс]. – Режим доступа: открытыйурок.рф/статьи/526363/ – Последнее обновление 06.05. 2018.
11. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя [Текст]/ Я.И. Груденов – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
12. Епифанова, Н.М. Методика обучения алгебре основной школы [Текст]: учебно-методическое пособие/ Н.М. Епифанова, О.П. Шарова. – Ярославль: изд-во ЯГПУ имени К.Д. Ушинского, 2006. – 83 с.
13. Кожобаев, К.Г. Актуальные проблемы преподавания математики [Электронный журнал]/ К.Г. Кожобаев// Международный журнал экспериментального образования. - 2012. - № 5. - С. 66-68. –Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20233051>. – Последнее обновление 30.01.2018.
14. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. ин-тов/ Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканин, Е.Л. Мокрушин, В. А. Оганесян и др. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.
15. Крючкова, В.В. Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены»/ В.В. Крючкова//Математика в школе. - 1984. - № 5. – С. 38–39.
16. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.
17. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 253 с.

18. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 284 с.

19. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2014. – 268 с.

20. Макарычев, Ю.Н. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса [Текст]: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк; под ред. Г.В. Дорофеева. – М.: Просвещение, 1998. – 203 с.

21. Матушкина, З.П. Методика обучения решению задач [Текст]: учебное пособие. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2006. – 154 с.

22. Методика изучения математики в основной школе [Текст]: курс лекций для организации самостоятельной работы по вопросам частных методик. – Пермь: Изд-во ПГПУ, 2011. – 83 с.

23. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 21-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

24. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – 21-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 268 с.

25. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.: ил.

26. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

27. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

28. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская, П.В. Семенов. – 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

29. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс [Текст]: методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 77 с.

30. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для классов с повышенным уровнем математической подготовки в общеобразовательных школах/ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев– 10-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 256 с.

31. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

32. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

33. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

34. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://oge.sdamgia.ru/>– Последнее обновление 06.05. 2018.

35. Поскребалова, Ю.М. Урок повторения о обобщения в 7-м классе по теме «Многочлены» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: открытыйурок.рф/статьи/512326/ – Последнее обновление 06.05. 2018.

36. Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс]: Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 8 апреля 2015 г. № 1/15). – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/проекты/413/файл/4587/ПООР_ООО_reestr_2015_01.doc – Последнее обновление 01.11.2017.

37. Салахова, И.Г. Обобщающий урок по теме «Формулы сокращенного умножения» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: открытыйурок.рф/статьи/634342/ – Последнее обновление 06.05. 2018.

38. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов/ Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208 с.

39. Саранцев, Г.И. Методология методики обучения математике [Текст]: научное издание/ Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 2001. – 144 с.

40. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математики. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов/ Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

41. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://минобрнауки.рф/документы/938>. – Последнее обновление 07.02.2017.

42. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://fipi.ru/>. – Последнее обновление 05. 05. 2018.

43. Чередов, И.М. Формы учебной работы в средней школе [Текст]: учебное издание/ И.М. Чередов. –М.: Просвещение, 1987- 160 с.

44. Яценко, И.В. ОГЭ 2018. Математика: типовые экзаменационные варианты. 36 вариантов [Текст] / под ред. Яценко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2018. – 240 с.
45. Douglas Downing Ph.D. Trigonometry the Easy Way (Easy Way Series). Barron's Educational Series Inc. – 2001. – 288 с.
46. Krathwohl, D.R., Bloom, B.S., & Masia, B.B. Taxonomy of educational objectives, the classification of educational goals/ handbook II: Affective domain. - New York, David McKay Co., 1964.
47. Thompson, P.W. The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings [Электронный ресурс] / Thompson, P.W., Carlson, M.P. & Silverman, J. J // Math Teacher Educ. – 2007. – № 4. – с.415-432, DOI:10.1007/s10857-007-9054-8. – Режим доступа: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-007-9054-8>. – Последнее обновление 15.05.2018.
48. Tutak, F. A. Critical pedagogy for critical mathematics education [Электронный ресурс] / Fatma Aslan Tutak, Elizabeth Bondy, Thomasenia L. Adams // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2011. – №42(1) . – с. 65-74, DOI: 10.1080/0020739X.2010.510221. – Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/232819503_Critical_pedagogy_for_critical_mathematics_education. - Последнее обновление 11.05.2018.
49. Towers, Jo. Teaching and learning mathematics in the collective/ Jo Towers , Lyndon C.Martin, Brenda Heater// The Journal of Mathematical Behavior, added 3.09.2013. –vol. 32, №3. – 424-433 p. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312313000461>. – Последнее обновление 01.02.2018.

Приложение 1

Таблица 1

Требования к знаниям и умениям по теме «Одночлены и многочлены»

учащихся 7 класса

Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др.[1]	
Учащиеся должны знать:	Учащиеся должны уметь:
<p>«1) понятия степень с натуральным показателем, одночлен; многочлен;</p> <p>2) свойства степени с натуральным показателем;</p> <p>3) правила приведения подобных слагаемых; сложение и вычитания многочленов; умножение многочлена на одночлен; умножение многочлена на многочлен, деление одночлена и многочлена на одночлен; разложения многочленов на множители;</p> <p>4) формулы разности квадратов, квадрат суммы, квадрат разности» [1].</p>	<p>«1) приводить одночлены к стандартному виду»;</p> <p>2) умножать одночлены;</p> <p>3) складывать, вычитать, умножать, делить одночлен и многочлен на одночлен;</p> <p>4) делить одночлен и многочлен на одночлен;</p> <p>5) выносить общий множитель за скобки;</p> <p>6) применять формулы разности квадратов, квадрат суммы, квадрат разности» [1].</p>
Ю.Н. Макарычев [17]	
<p>«1) понятие тождества и тождественных преобразований;</p> <p>2) понятие одночлена и многочлена;</p> <p>3) правила сложения, вычитания, умножения многочленов;</p> <p>4) формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности, разности квадратов;</p> <p>5) свойства степени с натуральным показателем;</p> <p>6) разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения;</p> <p>7) правила приведения подобных слагаемых» [17].</p>	<p>«1) выполнять элементарные знаково-символические действия: применять буквы для обозначения чисел, для записи общих утверждений;</p> <p>2) формулировать, записывать в символической форме и обосновывать свойства степени с натуральным показателем;</p> <p>3) применять свойства степени для преобразования выражений и вычислений;</p> <p>4) выполнять действия с многочленами;</p> <p>5) выполнять разложение многочленов на множители;</p> <p>6) выводить формулы сокращенного умножения, применять их в преобразованиях выражений и вычислениях;</p> <p>7) распознавать квадратный трехчлен, выяснять возможность разложения на множители, представлять квадратный трехчлен в виде произведения линейных множителей» [17].</p>

А.Г. Мордкович [23]	
<p>«1) понятие одночлена; сумма одночленов; 2) умножение одночленов; возведение одночлена в натуральную степень; деление одночлена на одночлен; 3) понятие многочлена; стандартный вид одночлена; сложение и вычитание многочленов; 4) формулы сокращенного умножения; 5) вынесение общего множителя за скобки; способ группировки; 6) разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения; 7) тождества» [23].</p>	<p>«1) выполнять сложение и вычитание одночленов; 2) умножение одночленов; 3) возведение многочлена в натуральную степень; 4) деление одночлена на одночлен; 5) выполнять сложение и вычитание многочленов; 6) умножение многочлена на одночлен; умножение многочлена на многочлен; 7) деление многочлена на одночлен; 8) выносить общий множитель за скобки; 9) раскладывать многочлены на множители с помощью формул сокращенного умножения; 10) раскладывать многочлены на множители с помощью комбинации различных приемов» [23].</p>
Г.К. Муравин, О.В. Муравина [31]	
<p>«1) понятие одночлена и многочлена; 2) свойства степени многочлена; 3) правила сложения, вычитания, умножения многочленов; 4) формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности, разности квадратов; 7) многочлены с одной переменной; 8) терминологию «показатель степени», «основание степени»; 9) знать определение многочлена и его степени; 10) знать формулы сокращенного умножения» [31].</p>	<p>«1) преобразовать целое выражение в многочлен; 2) раскладывать многочлен на множители; 3) пользоваться тождественными преобразованиями для упрощения выражений; 4) приводить многочлен к стандартному виду, называть степень многочлена; 5) применять формулы сокращенного умножения как для преобразования произведения в многочлен, так и для разложения многочлена на множители» [31].</p>

Приложение 2

Таблица 2

Содержание теоретического материала темы «Одночлены и многочлены» в различных учебниках алгебры 7 класса

Авторы учебников	Содержание учебного материала	Кол-во часов
Г.К. Муравин, О.В. Муравина [31].	«Действия со степенями. Одночлены. Сокращение дробей. Произведение одночлена на многочлен. Понятие многочлена. Преобразование произведения одночлена и многочлена. Вынесение общего множителя за скобки. Произведение многочленов. Преобразование произведения двух многочленов. Разложение на множители способом группировки. Формулы сокращенного умножения. Квадрат суммы, разности и разность квадратов. Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения» [31].	«Степень с натуральным показателем. Одночлены-14ч. Многочлены-23 ч.» [31].
Ю.Н. Макарычев [17].	«Одночлены. Одночлен и его стандартный вид. Умножение одночленов и возведение одночлена в степень. Многочлены и его стандартный вид. Сумма и разность многочленов. Сложение и вычитание многочленов. Умножение одночлена на многочлен. Вынесение общего множителя за скобки. Умножение многочлена на многочлен. Разложение многочлена на множители способом группировки. Доказательство тождеств» [17].	«Степень с натуральным показателем. Одночлены-12 ч. Многочлены-19 ч.» [17].
А.Г. Мордкович [23].	«Понятие одночлена и его стандартный вид. Сложение и вычитание одночленов. Умножение одночленов и возведение одночлена в натуральную степень. Деление одночлена на одночлен. Многочлены. Сложение и вычитание многочленов. Умножение многочлена на одночлен. Умножение многочлена на многочлен. Формулы сокращенного умножения. Деление многочлена на одночлен. Пояснение сути разложения многочлена на множители и для чего это нужно. Вынесение общего множителя за скобки. Способ группировки. Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения. Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов. Сокращение алгебраических дробей. Тождества» [23].	«Одночлены. Арифметические операции над одночленами-9 ч. Многочлены. Арифметические операции над многочленами-21 ч. Разложение многочленов на множители-26 ч.» [23].
Ш.А. Алимов [1].	«Одночлен. Стандартный вид одночлена. Умножение одночленов. Многочлены. Приведение подобных членов. Сложение и вычитание многочленов. Умножение многочлена на одночлен. Умножение многочлена на многочлен. Деление одночлена и многочлена на одночлен. Разложение многочленов на множители. Вынесение общего множителя за скобки. Способ группировки. Формулы сокращенного умножения. Применение нескольких способов разложения многочлена на множители. Алгебраические дроби» [1].	«Одночлены и многочлены-17 ч. Разложение многочленов на множители-17 ч.» [1].

Содержание теоретического материала линии «Тождественные преобразования» в различных учебниках алгебры 8 класса

Авторы учебников	Содержание учебного материала	Кол-во часов
Г.К. Муравин, О.В. Муравина [32].	«Рациональные выражения. Формулы сокращенного умножения. Формулы куба двучлена. Формулы суммы и разности кубов. Дробные выражения. Сокращение дробей. Умножение, деление и возведение дробей в степень. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми и разными знаменателями. Упрощение рациональных выражений. Дробные уравнения с одной переменной. Степень с целым показателем. Квадратные уравнения. Выделение полного квадрата. Решение квадратного уравнения в общем виде. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям. Системы двух уравнений с двумя переменными. Решение системы уравнений методом подстановки» [32].	«Рациональные выражения -27 ч. Степень с целым показателем – 16 ч. Квадратные уравнения - 21 ч.» [32].
Ю.Н. Макарычев [18].	«Рациональные дроби. Сумма и разность дробей. Произведение и частное дробей. Квадратные уравнения. Дробно рациональные уравнения. Числовые неравенства и их свойства. Неравенства с одной переменной и их системы. Степень с целым показателем и ее свойства» [18].	«Рациональные дроби - 23 ч. Квадратные уравнения - 21 ч. Неравенства – 20 ч. Степень с целым показателем - 6 ч.» [18].
А.Г. Мордкович [23].	«Алгебраические дроби. Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями. Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраических дробей в степень. Преобразование рациональных выражений. Первые представления о решении рациональных уравнений. Степень с отрицательным показателем. Квадратные уравнения. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи). Разложение квадрата трехчлена на линейные множители. Иррациональные уравнения. Неравенства. Рациональные неравенства и их системы» [23].	«Алгебраические дроби - 21 ч. Квадратные уравнения - 21 ч. Неравенства – 12 ч.» [23].
Ш.А. Алимов [2].	«Неравенства. Системы неравенств с одним неизвестным. Квадратные корни. Квадратные уравнения. Метод выделения полного квадрата. Уравнения, сводящиеся к квадратным. Квадратные неравенства» [2].	«Неравенства – 19 ч. Квадратные корни - 14 ч. Квадратные уравнения - 23 ч. Квадратные неравенства - 13 ч.» [2].

Содержание теоретического материала линии «Тождественные преобразования» в различных учебниках алгебры 9 класса

Авторы учебников	Содержание учебного материала	Кол-во часов
Г.К. Муравин, О.В. Муравина [33].	«Неравенства. Свойства неравенств, обе части которых неотрицательны. Неравенства с одной переменной и их системы. Линейные неравенства и их системы с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Корни многочленов. Квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным. Целые корни многочленов с целыми коэффициентами. Теорема Безу и следствия из нее. Разложение квадратного трехчлена на множители. Корни n-ой степени» [33]. На повторение: «Выражения», «Тождества», «Уравнения», «Неравенства» [33].	«1) общие свойства неравенств - 3 ч; 2) свойства неравенств, обе части которых неотрицательны - 3 ч; 3) линейные неравенства с одной переменной - 3 ч; 4) системы линейных неравенств с одной переменной - 3 ч; 5) решение неравенств методом интервалов - 2 ч; 6) квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным - 2 ч; 7) целые корни многочленов с целыми коэффициентами - 2 ч.» [33].
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова [19].	«Уравнения и неравенства с одной переменной. Уравнения с двумя переменными и их системы. Неравенства с двумя переменными. Степенная функция. Корни n-ой степени» [19].	«1) уравнения и неравенства с одной переменной - 14 ч; 2) уравнения и неравенства с двумя переменными – 17 ч.» [19].
А.Г. Мордкович [27].	«Рациональные неравенства и их системы. Линейные и квадратные неравенства (повторение). Рациональные неравенства. Системы рациональных неравенств. Системы уравнений. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций» [27].	«1) линейные и квадратные неравенства (повторение) – 3 ч; 2) рациональные неравенства – 5 ч; 3) системы рациональных неравенств – 4 ч; 4) системы уравнений – 15 ч.» [27].
Ш.А. Алимов [3].	«Степень с целым показателем. Арифметический корень натуральной степени. Свойства арифметического корня. Степень с рациональным показателем. Возведение в степень числового неравенства» [3].	«1) степень с целым показателем - 2 ч.; 2) арифметический корень - 4 ч.; 3) степень с рациональным показателем - 2 ч.; 4) возведение в степень числового неравенства- 2 ч.» [3].

Содержание теоретического материала
темы «Одночлены и многочлены» в различных учебниках
для классов с углубленным изучением математики

Авторы учебников	Содержание учебного материала	Кол-во часов
Ю.Н. Макарычева «Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса» [20].	«Нахождение произведения многочленов с помощью приема последовательного подсчитывания коэффициентов многочлена-произведения. Упрощение многочленов с помощью введения новых переменных. Разложение многочленов с помощью треугольника Паскаля. Преобразование многочленов с помощью формулы квадрата суммы нескольких слагаемых. Разложение многочлена на множители методом неопределенных коэффициентов. Разложение многочленов на множители с помощью формулы разности n -ых степеней» [20].	«1) приемы преобразования целого выражения в многочлен – 2 ч; 2) возведение двучлена в степень – 2 ч; 3) квадрат суммы нескольких слагаемых – 2 ч; 4) приёмы разложения многочлена на множители – 2 ч; 5) разность n -х степеней-2ч.» [20].
Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики для 8 класса» [7].	«Операции над многочленами. Стандартный вид многочлена. Сложение и вычитание многочленов. Умножение многочлена на одночлен. Деление многочлена на одночлен. Вынесение общего множителя за скобки. Умножение многочленов. Разложение многочленов на множители методом группировки. Формулы сокращенного умножения. Умножение суммы двух выражений на их разность. Возведение в квадрат суммы и разности двух выражений. Выделение полного квадрата из трехчлена. Возведение в куб суммы и разности двух выражений. Разложение на множители суммы и разности кубов. Формула для разложения на множители разности степеней. Формула квадрата суммы нескольких слагаемых. Деление многочлена на многочлен с остатком. Теорема Безу. Корни многочлена. Симметрические многочлены от двух переменных. НОД и НОК одночленов» [7].	«1) операции над многочленами - 7 часов; 2) формулы сокращенного умножения – 8 ч; 3) деление многочлена на многочлен с остатком- 2 ч; 4) теорема Безу. Корни многочлена- 2ч; 5) симметрические многочлены от двух переменных - 2 ч. 6) НОД и НОК одночленов-1 ч.» [7].

Продолжение Таблицы 5

Авторы учебников	Содержание учебного материала	Кол-во часов
<p>Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики для 9 класса»[8].</p>	<p>«Деление многочленов. Корни многочленов. Деление многочлена на многочлен с остатком. Теорема Безу. Корни многочлена. Схема Горнера. НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида» [8].</p>	<p>«1) деление многочлена на многочлен-1ч; 2) деление многочлена на многочлен с остатком -1 ч; 3) теорема Безу. Корни многочлена – 1 ч; 4) схема Горнера-1 ч; 5) НОД и НОК многочленов-1 ч.» [8].</p>

**Ответы и указания к решению систем задач из
§5. Анализ задачного материала по теме «Одночлены и многочлены»**

***Примеры упражнений по каждому типу задач из учебников
для общеобразовательных учреждений для 7 класса***

I. Применение понятий «одночлен», «многочлен», «степень многочлена», «стандартный вид многочлена».

Задача 1. «Выясните, являются ли данные выражения одночленами; если да, то укажите их коэффициенты и буквенные части:

а) $3xy$; б) $\frac{1}{2}a^2bc^3$; в) $-0,3c^5d^9$; г) $-2^3u^n z^n w^n$ » [23, С. 35].

Ответ: а) одночлен, 3-коэффициент, xy -буквенная часть;

б) одночлен, $\frac{1}{2}$ – коэффициент, a^2bc – буквенная часть; в) одночлен, $-0,3$ коэффициент, c^5d^9 - буквенная часть; г) одночлен, 2^3 - коэффициент, $u^n z^n w^n$ - буквенная часть.

Задача 2. «Найдите значение многочлена:

а) $x^2 - 0,3xy - y^2$ при $x = 5, y = -6$; б) $0,8a^2 + 5ab - 15b^2$ при $a = -5, b = -2$; в) $7x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7x + 2$ при $x = 10$;

г) $10000n + 1000m + 100p + 10k + 9$ при $n = 7, m = 6, p = 5, k = 9$ » [31, С. 118].

Ответ: а) -2 ; б) 10 ; в) 743872 ; г) 76599 .

II. Применение свойств степени с натуральным показателем при преобразовании одночленов.

Задача 3. «Записать выражение в виде степени с показателем 2. а) $c^2 d^{10}$; б) $a^4 b^6$; в) $25a^4$; г) $81m^2$.

Ответ: а) cd^5 ; б) $a^2 d^3$; в) $5a^2$; г) $9m^2$ » [1, С. 53].

III. Выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня одночленов и многочленов).

Задача 4. «Выполните действия:

а) $3x + 5x$; б) $6y + 7y$; в) $3p + 5p + p$; г) $7q + 9q + 4q$ » [24, С. 37].

Ответ: а) $8x$; б) $13y$; в) $9p$; г) $20q$.

Задача 5. «Выполните умножение:

а) $-11x^2y$ и $0,3x^2y^2$; б) a^2b и $-ab^3c$;

в) $4xy, -x^2$ и $-y^3$; г) $a^2x^5b, -0,6axb^2$ и $0,6a^2b^3$ » [17, С. 86].

Ответ: а) $-3,3x^4y^3$; б) $-a^3b^4c$; в) $4x^3y^4$; г) $-0,36a^5b^6x^6$.

IV. Применение формул сокращенного умножения для преобразования выражений и их вычислений.

Задача 6. «Преобразуйте в многочлен:

а) $(m + n)^2$; б) $c - d^2$; в) $x + 9^2$; г) $8 - a^2$; д) $a - 25^2$;

е) $40 + b^2$; ж) $0,2 - x^2$; з) $k + 0,5^2$ » [17, С. 142].

Ответ: а) $m^2 + 2mn + n^2$; б) $c^2 - 2cd + d^2$; в) $x^2 + 18x + 81$;

г) $64 - 16a + a^2$; д) $a^2 - 50a + 625$; е) $1600 + 80b + b^2$;

ж) $0,04 - 0,4x + x^2$; з) $k^2 + k + 0,25$.

V. Разложение многочленов на множители различными способами (вынесение множителя за скобки, способ группировки и др.)

Задача 7. «Разложить на множители:

а) $36x^2x^2y^2 - 1$; б) $x^2y^4 - 16$; в) $81a^6 - 49b^4$; г) $25a^2 - 9b^6$.

Ответ: а) $(6xy - 1)(6xy + 1)$; б) $9a^3 - 7b^2$ $9a^3 + 7b^2$;

в) $(xy^2 - 4)(xy^2 + 4)$; г) $5a - 3b^3$ $5a + 3b^3$ » [1, С. 86].

Задача 8. «Разложить на множители:

а) $2m$ $m - n$ $+ m - n$; б) $4q$ $p - 1$ $+ p - 1$; в) $2m$ $m - n$ $+ n - m$;

г) $4q$ $p - 1$ $+ 1 - p$ » [1, С. 84].

Ответ: а) $m - n$ $2m + 1$; б) $p - 1$ $4q + 1$;

в) $2m(m - n) - (m - n) = (m - n)(2m - 1)$;

г) $4q$ $p - 1$ $- p - 1 = p - 1$ $4q - 1$.

Данные понятия, которые приведены в *I-V типах* задач применяются в 7 классе при решении следующих заданий: решение текстовых задач на составление уравнений и систем уравнений. Приведем их примеры:

VI. Применение действий с многочленами при решении разнообразных задач.

Задача 9. «За 15 открыток, 10 конвертов и блокнот заплатили 36 р. Конверт в 4 раза дешевле блокнота и на 50 коп. дороже открытки. Сколько стоят открытка, конверт, блокнот?» [17, С. 117].

Решение: запишем условие задачи в виде таблицы (Табл. 6)

Таблица 6

Табличная запись условия задачи

	Цена	Кол-во	Стоимость
конверты	x	15	$15x$
открытки	$1,5x$	10	$15x$
блокноты	$1,5x+500$	1	$1,5x+500$

Всего 3600коп. По условию задачи: $15x - 50 + 10x + 1 \cdot 4x = 3600$,

$$15x - 750 + 10x + 4x = 3600,$$

$$29x = 4350, x = 150 \text{ коп.}$$

100р.- стоит конверт, $100 \cdot 1,5 = 150$ р.- открытка, $150 + 500 = 650$ р.- блокнот.

Ответ: 100коп.=1р - стоит открытка, 150коп.=1,5 р. - конверт, 650коп.=6,5 р. блокнот.

VII. Преобразование рациональных выражений.

Задача 10. «Выполнить действия:

а) $\frac{6}{a-b} - \frac{5}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a+11b}$; б) $\frac{3}{c} + \frac{3}{c+d} \cdot \frac{c}{18 \cdot 2c+d}$; в) $\frac{y-1}{y} \div \frac{y^2+1}{y^2+2y} - \frac{2}{y+2}$;

г) $\frac{m-2}{m-5} \div \frac{m^2+24}{m^2-25} - \frac{4}{m-5}$ » [1, С. 114].

Решение:

а) $\frac{6}{a-b} - \frac{5}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a+11b} = \frac{6}{a-b} - \frac{5 \cdot a-b}{a+b \cdot a+11b} = \frac{6}{a-b} - \frac{5a-b}{a+11b} = \frac{6a+6b-5a+5b}{a-b \cdot a+11b} = \frac{a+11b}{a-b \cdot a+11b} = \frac{1}{a-b}$

$$= \frac{a + 11b}{(a + b)(a + 11b)} = \frac{1}{a + b};$$

$$\text{б) } \frac{3}{c} + \frac{3}{c+d} \cdot \frac{c}{18 \cdot 2c+d} = \frac{3c+d+3c}{c \cdot c+d} \cdot \frac{c}{18 \cdot 2c+d} = \frac{3c+3d+3c}{18 \cdot c+d \cdot 2c+d} = \frac{3 \cdot 2c+d}{18 \cdot c+d \cdot 2c+d} =$$

$$= \frac{1}{6(c+d)};$$

$$\text{в) } \frac{y-1}{y} \div \frac{y^2+1}{y^2+2y} - \frac{2}{y+2} = \frac{y-1}{y} \div \frac{y^2+1}{y \cdot y+2} - \frac{2}{y+2} = \frac{y-1}{y} \div \frac{y^2+1-2y}{y \cdot y+2} = \frac{y-1}{y} \cdot \frac{y \cdot y+2}{y-1} =$$

$$= \frac{y+2}{y-1};$$

$$\text{г) } \frac{m-2}{m-5} \div \frac{m^2+24}{m^2-25} - \frac{4}{m-5} = \frac{m-2}{m-5} \div \frac{m^2+24}{m-5 \cdot m+5} - \frac{4}{m-5} = \frac{m-2}{m-5} \cdot \frac{m-5 \cdot m+5}{m^2+24-4m-20} =$$

$$= \frac{(m-2)(m+5)}{m^2-4m+4} = \frac{(m-2)(m+5)}{(m-2)^2} = \frac{m+5}{m-2};$$

Ответ: а) $\frac{1}{a+b}$; б) $\frac{1}{6(c+d)}$; в) $\frac{y+2}{y-1}$; г) $\frac{m+5}{m-2}$.

**Примеры упражнений по каждому типу задач из учебников
для общеобразовательных учреждений для 8 класса**

II. Применение понятий многочлена и одночлена и действий над ними при
решении уравнений, в том числе квадратных уравнений.

Задача 11. «Решить кубическое уравнение:

$$2x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0 \text{» [32, С. 117].}$$

Решение: разложим левую часть на множители:

$$2x^3 + x^2 - 6x - 3 = 2x^3 + x^2 - 6x + 3 = x^2 \cdot 2x + 1 - 3 \cdot 2x + 1 =$$

$$= (2x + 1)(x^2 - 3), 2x + 1 = 0 \text{ или } x^2 - 3 = 0. x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; \pm \sqrt{3}$.

III. Применение свойств степени многочленов с целым показателем при вы-
полнении вычислений и преобразования выражений.

Задача 12. «Упростите выражение:

а) $x^{-2} - a^{-2} \cdot a^{-1} - x^{-1} - 1$;

б) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 2xy + x^2 + y^2 - 1$;

в) $c^3 - 3c^2 + 3c - 1) 1 - 2c + c^2 - 1$ » [32, С. 73].

Решение: а) $x^{-2} - a^{-2} \cdot a^{-1} - x^{-1} - 1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{x} - 1 =$
 $= \frac{a^2 - x^2}{a^2 x^2} \cdot \frac{ax}{x - a} = \frac{a - x}{a^2 x^2} \cdot \frac{a + x}{x - a} = -\frac{a + x}{ax};$

б) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 2xy + x^2 + y^2 - 1 = \frac{x+y}{x+y} = x + y;$

в) $c^3 - 3c^2 + 3c - 1) 1 - 2c + c^2 - 1 = \frac{c-1}{c-1} = c - 1.$

Ответ: а) $-\frac{a+x}{ax}$; б) $x + y$; в) $c - 1$.

Примеры упражнений по каждому типу задач из учебников для общеобразовательных учреждений для 9 класса

II. Нахождение корней многочленов.

Задача 13. «Какие из чисел -1, 0, 2 являются корнями многочлена $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$ » [33, С. 72].

Решение:

1) $P(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 2 = -3 - 2 + 7 - 2 = 0,$

$x = -1$ корень многочлена;

2) $P(0) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 7 \cdot 0 - 2 = -2, x = 0$ не корень многочлена;

3) $P(2) = 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 - 2 = 24 - 8 - 14 - 2 = 0, x = 2$ корень многочлена.

Ответ: $x = -1, x = 2$.

Примеры упражнений по каждому типу задач из учебника Ю.Н. Макарычева «Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса»

1. Нахождения произведения многочленов используется прием последовательного подсчитывания коэффициентов многочлена-произведения.

Задача 14. «Найдите произведение многочленов $x^2 - 2x + 3$ и $2x^2 - 3x + 1$.

Решение: $1 \cdot 2x^4 + 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2x^3 + (1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 2)x^2 + (-2 \cdot 1 + 3(-3))x + 3 \cdot 1 = 2x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 11x + 3$.

Ответ: $2x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 11x + 3$ » [20, С.57].

2. Упрощение многочленов с помощью введения новых переменных.

Задача 15. «Упростите выражение:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 5abc \quad a^2 + b^2 + c^2 + 4abc - \\ - a^2 + b^2 + c^2 \quad a^2 + b^2 + c^2 - abc \text{ » [20, С. 58].}$$

Решение: введем новые переменные. Пусть $a^2 + b^2 + c^2 = x$, $abc = y$.

Тогда выражение примет вид: $x - 5y \quad x + 4y \quad -x(x - y)$,

$$x - 5y \quad x + 4y \quad -x \quad x - y = x^2 - xy - 20y^2 - x^2 + xy = -20y^2.$$

Произведем обратную замену вместо y подставив abc : $-20a^2b^2c^2$.

Ответ: $-20a^2b^2c^2$.

3. Разложение многочленов с помощью треугольника Паскаля.

Задача 16. «Упростите выражение:

$$x - 1^5 + 10x - 1^4 + 40x - 1^3 + 80x - 1^2 + 80x - 1 + 32 \text{ »}$$

[20, С. 62].

Решение: видим, что данное выражение похоже на многочлен, который получился при возведении двучлена $a + b$ в пятую степень, где $a = x - 1$,

$$b = 2.$$

$$x - 1 + 2^5 = x - 1^5 + 5x - 1^4 \cdot 2 + 10x - 1^3 \cdot 2^2 + \\ + 10x - 1^2 \cdot 2^3 + 5x - 1 \cdot 2^4 + 2^5 = x - 1^5 + 10x - 1^4 + \\ + 40x - 1^3 + 80x - 1^2 + 80x - 1 + 32.$$

Таким образом, данное выражение тождественно равно $x - 1 + 2^5$, то есть $x + 1^5$.

4. Преобразование многочленов с помощью формулы квадрата суммы нескольких слагаемых.

Задача 17. «Докажите, что при любых значениях a, b, c выражение $a^2 + b^2 + c^2 + 1 - 2(ab - bc + ca)$ принимает положительное значение» [20, С. 65].

Доказательство: $a^2 + b^2 + c^2 + 1 - 2ab - bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 + 1 - 2ab + 2bc - 2ca = (a - b - c)^2 + 1 > 0$. Ч.т.д.

5. Разложение многочлена на множители методом неопределенных коэффициентов.

Задача 18. «Представьте выражение в виде произведения:

$$(x + 2y + 1)(x + 2y - 5) - (x - 2y)(x - 2y + 4) + 5» [20, С. 70].$$

Решение: заметим, что буквенных выражения здесь только два - Двучлены $x + 2y$ и $x - 2y$.

Сделаем подстановку: $x + 2y = a$, $x - 2y = b$.

$$(a + 1)(a - 5) - b(b + 4) + 5.$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$(a + 1)(a - 5) - b(b + 4) + 5 = a^2 - 4a - 5 - b^2 - 4b + 5 = a^2 - 4a - b^2 - 4b = a^2 - b^2 - 4(a + b) = (a + b)(a - b - 4).$$

Произведем обратную замену:

$$(x + 2y + 1)(x + 2y - 5) - (x - 2y)(x - 2y + 4) + 5 = (x + 2y + x - 2y)(x + 2y - x - 2y - 4) = 2x(4y - 4) = 8x(y - 1).$$

Ответ: $8x(y - 1)$.

6. Разложение многочленов на множители с помощью формулы разности n -ых степеней.

Задача 19. «Разложите на множители $x^5 + y^5$ » [20, С. 75].

Решение: воспользуемся формулой для нечетных степеней

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y - x^2y^2 - xy^3 + y^4).$$

Ответ: $(x + y)(x^4 - x^3y - x^2y^2 - xy^3 + y^4)$.

**Примеры упражнений по каждому типу задач из учебника
для 8 класса Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для классов
с углубленным изучением математики»**

1. Формула квадрата суммы нескольких слагаемых.

Задача 20. «Раскройте скобки в выражении $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ » [7, С. 65].

Решение: используя формулу квадрата суммы нескольких слагаемых, получаем:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x^2 \cdot 2y^2 + 2x^2 \cdot 3z^2 + 2 \cdot 2y^2 \cdot 3z^2.$$

Выполним умножение одночленов и получим:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = x^4 + 4y^4 + 9z^4 + 4x^2y^2 + 6x^2z^2 + 12y^2z^2.$$

Ответ: $x^4 + 4y^4 + 9z^4 + 4x^2y^2 + 6x^2z^2 + 12y^2z^2$.

2. Деление многочлена на многочлен с остатком.

Задача 21. «Выполните деление многочлена:

$A(x) = 2x^6 - 3x^4 - 5x^3 + x - 6$ на многочлен $B(x) = x^4 + 3x^3 + 5$ и найдите остаток» [7, С. 67].

Решение: выполним данное деление «уголком», аналогично при делении многозначных чисел (Рис. 1).

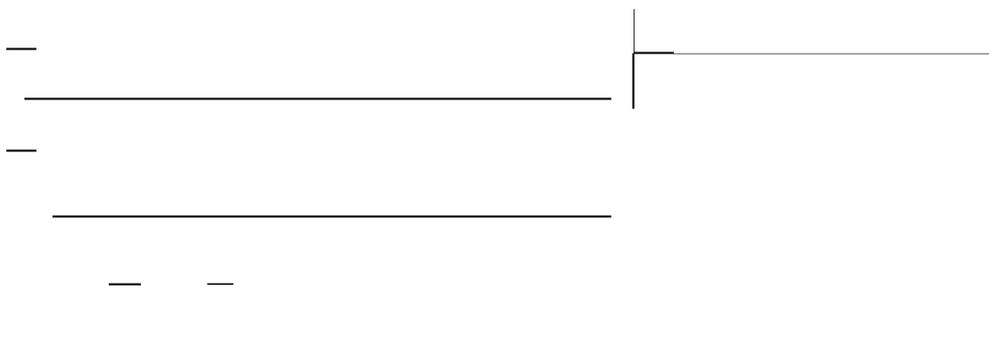


Рис. 1. Деление многочленов

$50x^3 - 10x^2 + 31x - 81$ - остаток.

Ответ: $50x^3 - 10x^2 + 31x - 81$.

3. Теорема Безу. Корни многочлена.

Задача 22. «Докажите, что многочлен: $A(x) = x^4 - 6x^3 + 7x + 18$ делится без остатка на $x - 2$ » [7, С. 68].

Доказательство: воспользуемся теоремой Безу.

Так как $A(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 + 18 = 0$, то остаток от деления $A(x)$ на $x - 2$ равен нулю. Ч.т.д.

4. Симметрические многочлены от двух переменных.

Задача 23. «Является ли многочлен $P(x, y) = 6x^4 - 3x^3y + 7xy^3 + 8y^4$ симметрическим?» [7, С. 70].

Решение: если выполняется равенство $P(x, y) = P(y, x)$, то многочлен $P(x, y)$ называют симметрическим.

Симметрическим многочленом к нему будет:

$$P(y, x) = 6y^4 - 3y^3x + 7yx^3 + 8x^4.$$

Ответ: данный многочлен является симметрическим.

5. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух одночленов.

Задача 24. «Найдите наибольший общий делитель одночленов $6a^2bc^7$ и $11a^6b$ » [7, С. 8].

Решение: в оба одночлена входят переменные a и b . В первом многочлене показатель степени a является 2, во втором - 6. Поэтому в НОД данная переменная входит с показателем 2. Переменная b в обоих многочленах с показателем 1.

$$\text{Таким образом, НОД}(6a^2bc^7; 11a^6b) = a^2b.$$

НОД одночленов определен лишь с точностью до коэффициента.

Правильными ответами также будут являться любые одночлены с буквенной частью a^2b . **Ответ:** a^2b .

Задача 25. «Найдите наименьшее общее кратное одночленов $6a^3b^4c^2$ и $8a^5b^4d$ » [7, С. 9].

Решение: в НОК данных одночленов входят переменные a, b, c, d .

Возьмем данные переменные с большим показателем.

НОК $6a^3b^4c^2; 8a^5b^4d = a^5b^4c^2d$. НОК одночленов определен лишь с точностью до коэффициента. **Ответ:** $a^5b^4c^2d$.

Примеры упражнений по каждому типу задач из учебника для 9 класса Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для классов с углубленным изучением математики»

1. *Схема Горнера для нахождения корней многочлена.*

Задача 26. «Найдите остаток от деления многочлена:

$A x = x^4 - 6x^3 + 8$ на $x + 2$ » [8, С. 147].

Решение: воспользуемся схемой Горнера (Схема 1). Составим таблицу из двух строк, в верхней строке перечисляем коэффициенты данного многочлена, коэффициент при старшей степени продублируем в нижней строчке, а перед ним записываем значение переменной $x = -2$, при котором вычисляется значение многочлена.

Используем следующее правило: крайнее справа число нижней строки умножаем на -2 и складываем с числом, стоящим над пустой клеткой (в первой клетке стоит число $-2 \cdot 1 + -6 = -8$, во второй клетке число $-2 \cdot -8 + 0 = 16$ и тд.).

	1	-6	0	0	8
-2	1	-8	16	-32	72

Схема 1. Схема Горнера

Число в последней клетке и есть остаток от деления многочлена на $x + 2$, $A -2 = 72$.

Ответ: 72.

2. *Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов. Алгоритм Евклида.*

Пример 27. «Найдите наименьшее общее кратное многочленов $A x = x^3 + x - 2$ и $B x = x^3 + x^2 - x - 1$ » [8, С. 155].

Решение: используя алгоритм Евклида, найдем НОК этих многочленов (Рис. 2).

Последний отличный от нуля остаток равен $4x - 4$,

значит НОД $A(x), B(x) = 4x - 4$.

Используем равенство: $\text{НОД } A(x), B(x) \cdot \text{НОК } A(x), B(x) = A(x) \cdot B(x)$.

$4x - 4 \cdot \text{НОК } A(x), B(x) = (x^3 + x - 2)(x^3 + x^2 - x - 1)$, откуда:

$$\begin{aligned} \text{НОК } A(x), B(x) &= \frac{x^3 + x - 2}{4x - 4} \cdot \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x - 4} = \\ &= \frac{x - 1}{4x - 4} \cdot \frac{x^2 + x + 2}{4x - 4} \cdot \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x - 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + x + 2}{4x - 4} \cdot \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x - 4} = \\ &= \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

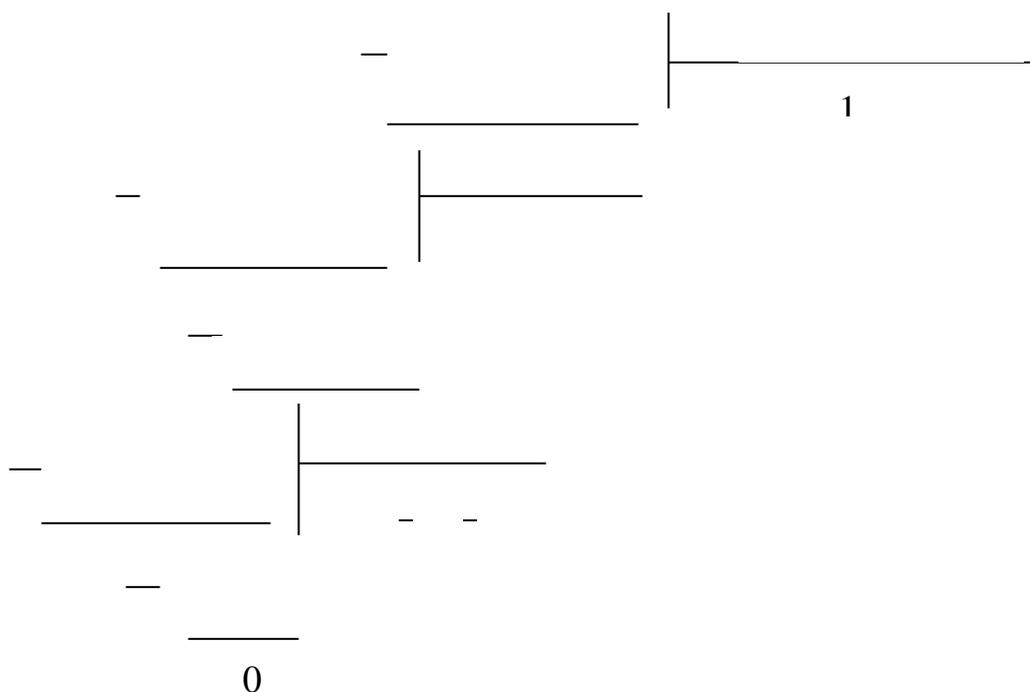


Рис.2. Алгоритм Евклида

Ответ: $\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

Ответы и указания к решению систем задач из §8. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Задача 1. Решение: 1) первую скобку раскроем по формуле квадрат разности, во второй скобке выполним *умножение одночлена на многочлен*:

$$36 - 12c + c^2 - c^2 + 3c,$$

2) далее раскроем скобки: $c^2 - 12c + 36 - c^2 - 3c = -15c + 36,$

3) подставим в полученное выражение значение $c = -\frac{1}{15}.$

$$-15 \cdot -\frac{1}{15} + 36 = 37.$$

Ответ: 37.

Задача 2. Решение: Упростим выражение.

$$2x + 3y^2 - 3x \frac{4}{3}x + 4y = 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x^2 - 12xy = 9y^2.$$

Подставим в полученное выражение наши значения:

$$9 \cdot 3^2 = 9 \cdot 9 = 81.$$

Ответ: 81.

Задача 3. Решение:

$$\begin{aligned} x^2y + 1 - x^2 - y &= x^2(y - 1) - y + 1 = (y - 1)x^2 - 1 = \\ &= (y - 1)(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

Ответ: $(y - 1)(x - 1)(x + 1).$

Задача 4. Решение: для решения данного уравнения нужно воспользоваться методом *разложения многочлена на множители способом группировки*.

$$x^3 + 4x^2 = 9x + 36, x^2(x + 4) - 9(x + 4) = 0,$$

$$(x + 4)(x^2 - 9) = 0, (x + 4)(x - 3)(x + 3) = 0,$$

$$x = -4$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

Ответ: $x = -4, x = -3, x = 3$.

Задача 5. Решение: перенесем все в одну сторону и воспользуемся формулой разность квадратов:

$$x + 3^2 = x + 8^2, x + 3^2 - x + 8^2 = 0,$$

$$(x + 3 - x + 8)(x + 3 + x + 8) = 0,$$

$$x + 3 - x + 8 \quad x + 3 + x + 8 = 0,$$

$$11 \quad 2x + 11 = 22x + 232 = 0, 2x = 232, x = 116.$$

Ответ: $x = 116$.

Задача 6. Решение: воспользуемся формулами квадрат суммы и разности двух величин $x - 4^2 + x + 9^2 = 2x^2, x^2 - 8x + 16 + x^2 + 18x + 81 = 2x^2,$

$$10x = -97, x = -9,7.$$

Ответ: $-9,7$.

Задача 7. Решение: 1) в числителе первой дроби воспользуемся формулой разность квадратов: $\frac{a^2 - 36b^2}{6ab} \div \frac{1}{6b} - \frac{1}{a} = \frac{(a-6b)(a+6b)}{6ab} \div \frac{1}{6b} - \frac{1}{a}$.

2) В скобках приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{(a-6b)(a+6b)}{6ab} \div \frac{1}{6b} - \frac{1}{a} = \frac{(a-6b)(a+6b)}{6ab} \div \frac{a-6b}{6ab} = \frac{(a-6b)(a+6b)}{6ab} \cdot \frac{6ab}{a-6b} =$$
$$= a + 6b.$$

3) подставим $a = 5\frac{5}{17}, b = 5\frac{2}{17}$:

$$5\frac{5}{17} + 6 \cdot 5\frac{2}{17} = \frac{90}{17} + \frac{522}{17} = \frac{612}{17} = 36$$

Ответ: 36.

Задача 8. Решение: в числителе второй дроби вынесем общий множитель за скобки $\frac{4a}{a+b} \cdot \frac{b}{16a} = \frac{4a \cdot b}{16a} = \frac{b}{4}$. Подставим наши значения в полученное выражение: $\frac{18}{4} = 4,5$.

Ответ: 4,5.

Задача 9. Решение: для упрощения данного выражения нужно уметь раскладывать многочлен на множители, применив при этом формулу разность квадратов.

$$1) \frac{10}{a-1} \div \frac{10}{a^2-1} = \frac{10(a^2-1)}{a-1 \cdot 10} = \frac{(a-1)(a+1)}{a-1} = \frac{a+1}{a-1};$$

$$2) \frac{6}{a-1} - \frac{a+1}{a-1} - \frac{2a+2}{a-1} = \frac{6-a-1-2a-2}{a-1} = \frac{3-3a}{a-1} = -3.$$

Ответ: -3.

Задача 10. Решение: раскроем скобки, приведем подобные слагаемые, разложим на множители:

$$x - 3 \quad 2x + 3 < -7, \quad 2x^2 - 3x - 2 < 0, \quad 2(x + 0,5)(x - 2) < 0.$$



Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак. Таким образом, получаем ответ:

$$-0,5 < x < 2.$$

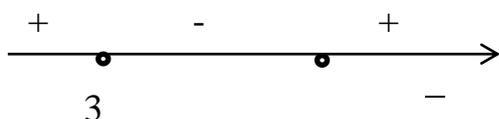
Ответ: $-0,5 < x < 2$.

Задача 11. Решение:

$$x - 3 < \sqrt{5}(x - 3),$$

$$x - 3 < \sqrt{5}x - 3\sqrt{5},$$

$$(x - 3)(x - 3 - \sqrt{5}) < 0, \quad x = 3, \quad x = 3 + \sqrt{5}.$$



Ответ: $(3; 3 + \sqrt{5})$.

Задача 12. Решение: приведем дроби к общему знаменателю

$$\begin{aligned} \frac{7a}{6c} - \frac{49a^2 + 36c^2}{42ac} + \frac{6c - 49a}{7a} &= \frac{7a \cdot 7a - 49a^2 - 36c^2 + 6c \cdot 6c - 49a \cdot 6c}{42ac} = \\ &= -\frac{49a \cdot 6c}{42ac} = -7. \end{aligned} \quad \text{Ответ: } -7.$$

Ответы и указания к решению к системе задач
§9. Системы задач по теме «Одночлены и многочлены»
в курсе алгебры основной школы

Задача 1: а) $9y^4$; б) $0,6p^2q^3$; в) x^4y^2 ; г) $20ab^3$; д) $-12a^5b^2$; е) $0,8m^4n^2$.

Задача 2: а) $30x^6b^4$, степень 10; б) $0,6a^4b^4c^3$, степень 11; в) $6p^7n$, степень 8;

г) ax^5y^8 , степень 14; д) $-\frac{1}{2}k^3n^7$, степень 10; е) $-\frac{9}{20}c^6xy^6$, степень 13;

ж) $2a^7b^4c^2$, степень 13; з) $-6\frac{2}{3}x^{16}p^7y^3$, степень 26.

Задача 3: а) $2bc$; б) $-3,5dm$; в) $-6r$; г) $11yz$.

Задача 4: а) $5,1x^2y^6$; б) $10,8a^2b^2c^9$; в) $3c^3d^{12}z^5$; г) $m^2n^8p^{14}$.

Задача 5: а) $4ab^2$; б) $3x^3y^2$; в) $2c^2x^3$; г) $-3a^4b^2$;

д) $64a^6b^6 = 2^6a^6b^6 = 2^{2 \cdot 3}a^{2 \cdot 3}b^{2 \cdot 3} = 2^2a^2b^2 = 4a^2b^2$;

е) $-64a^6b^6 = -4^3a^{2 \cdot 3}b^{2 \cdot 3} = -4a^2b^2$.

Задача 6: а) $33x^2$; б) $5,15z^3$; в) $\frac{13}{14}p^7$; г) $\frac{7}{12}q^k$.

Задача 7: а) $28xy$; б) $20a^2b$; в) x^2y^2 ; г) $2\frac{9}{20}mn^3r^8$.

Задача 8: а) $30a^3b^3$; б) $34x^5y^3$; в) $-164c^3d^2$; г) $26m^3n^4p^4$.

Задача 9: а) 1; б) $-100000x^{10}y^{20}$; в) $125a^3x^3$; г) $16a^4x^{12}y^8$.

Задача 10: а) $\frac{cy^4}{4}$; б) $3ab$; в) $\frac{x^9c^5}{3}$; г) $6\frac{a^2b^2}{8}$.

Задача 11: а) $a^2 - a + 1$ -степень 2; б) $-y^2 + 1$ -степень 2; в) 28-степень 0;

г) $2x^2 - 6x + 14$ -степень 2; д) $-p - 11$ - степень 1; е) $9k^3 + k^2 + 7k - 8$ - степень 3.

Задача 12: а) $4y^2 - 5x^2$, $4 \cdot 0,75 - 5 \cdot 0,6^2 = 0,45$; б) $b^3 + c^3$,
 $-0,45^3 + -0,86^3 = -0,727181$;

в) $b^2 - a^2 + b - a$, $-\frac{1}{3}^2 - \frac{2}{3}^2 + -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1\frac{1}{3}$;

г) $x^3 - y^3$, $0,27^3 - -0,34^3 = 0,058987$.

Задача 13: а) $5x^3 + 12$; б) $11x^2 - 14$; в) $5x^5 + 3x - 1$; г) $3x^{11} + 4x^6 - 2$.

Задача 14: а) $M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = 6x^2 - 5x^2 +$
 $+ 9xy + 2xy - y^2 = x^2 + 11xy - y^2$;

б) $M = a^2 - 7ab + 8b^2 + 4ab - 3b^2 = a^2 + -7ab + 4ab +$
 $+ 8b^2 - 3b^2 = a^2 - 3ab + 5b^2$;

в) $M = 4c^4 - 7c^2 + 6$.

Задача 15: Ученик, окажется прав в том случае, если переменная b сократится.

$$7a^3 - 6a^2b + 5ab^2 + 5a^3 + 7a^2b + 3ab^2 - 10a^3 + a^2b + 8ab^2 = \\ = 7a^3 + 5a^3 - 10a^3 - 6a^2b + 7a^2b - a^2b + 5ab^2 + 3ab^2 - 8ab^2 = 2a^3, \\ 2 \cdot -0,015625 = -0,03125.$$

Следовательно, ученик был не прав.

Задача 16: а) $c^3 - 2cd^2 - d^3$; б) $x^3 - 2x^2y + y^3$; в) $4a^3 - 3a^2 + 2a - 3$; г) $-3x^3 + 8x^2 + 7x - 12$.

Задача 17: а) $17 - a$, 25; б) $-6a - 24$, -23 ; в) $4a - 2$, $-2,6$; г) -2 .

Задача 18: а) $n \cdot n + 32 - n - 2 \cdot n + 12 = n \cdot n + n \cdot 22 - n \cdot n - 2 \cdot n + n \cdot 12 - 2 \cdot 12 = n^2 + 22n - n^2 - 2n + 12n - 24 = n^2 + 22n - n^2 + 2n - 12n + 24 = 0 \cdot n^2 + 12n + 24 = 12n + 24 = 12(n + 2)$ делится на 12, так как есть множитель 12.

б) $n + 8 \cdot n + 9 - n \cdot n - 7 = n \cdot n + 8 \cdot n + n \cdot 9 + 8 \cdot 9 - n \cdot n - n \cdot -7 = n^2 + 8n + 9n + 72 - n^2 + 7n = 0 \cdot n^2 + 24n + 72 = 24n + 72 = 24 \cdot n + 3$ делится на 24, так как есть множитель 24.

Задача 19: а) $3x^2y - 4xy^2 \div 5xy = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 0,6x - 0,8y$;

б) $2ab + 6a^2b^2 - 4b \div -2b = -a - 3a^2b + 2b$;

в) $4x + 12y - 16 \div -4 = -x - 3y + 4$;

г) $-a^5b^3 + 3a^6b^2 \div 4a^4b^2 = -0,25ab + 0,75a^2$.

Задача 20: а) $3a^3 - 1,2b$ – частное; $10ab^3$ – делитель;

б) нет; в) нет; г) $15a^4b^3 - 6a^2b^4$ – частное; $10a^2b^3$ – делитель.

Задача 21: а) $(a + b)(3x + y)$; б) $(x - y)(m - 1)$; в) $(r - s)(5p + 6q)$;

г) $(c + 2)(1 - d)$.

Задача 22: а) 0; б) 5,76; в) 224; г) 98,01.

Задача 23: а) $p^6 - p^8 + p^4 = p^4 \cdot p^2 - p^4 \cdot p^4 + p^4 \cdot 1 = p^4(p^2 - p^4 + 1)$;

б) $b^2 - b^7 + b^9 = b^2 \cdot 1 - b^2 \cdot b^5 + b^2 \cdot b^7 = b^2 \cdot (1 - b^5 + b^7)$;

в) $12a^2b - 180ab^2 - 30ab^3 = 6ab \cdot 2a - 30b \cdot 6ab - 6ab \cdot 5b^2 = 6ab(2a - 30b - 5b^2)$;

г) $20x^4 - 25x^2y^2 - 100x^3 = 5x^2 \cdot 4x^2 - 5x^2 \cdot 5y^2 - 5x^2 \cdot 20x = 5x^2(4x^2 - 5y^2 - 20x)$;

д) $a^2bc - ab^2c - abc^2 = abc \cdot a - abc \cdot b - abc \cdot c = abc(a - b - c)$;

е) $c^3xy + c^2xy - cx^2y^2 = cxy \cdot c^2 + cxy \cdot c - cxy \cdot xy = cxy(c^2 + c - xy)$.

Задача 24: а) $7c^2 - c^3 - c + 7 = 7c^2 + 7 - c + c^3 =$

$= 7 \cdot c^2 + 1 - c \cdot c^2 + 1 = (7 - c)(c^2 + 1)$;

$$\text{б) } x^3 - 14x^2 - 2x + 28 = x^3 - 2x + 28 - 14x^2 = x(x^2 - 2) - 14x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x - 14);$$

$$\text{в) } 3a + 3 - na - n = 3a + 3 + -n - na = 3a + 1 - n \cdot 1 + a = (1 + a)(3 - n);$$

$$\text{г) } 6a^2 - 2ab - 3ac + bc = 6a^2 - 2ab - 3ac - bc = 2a(3a - b) - c(3a - b) = (2a - c)(3a - b).$$

Задача 25: а) $5a^3c + 10a^2 - 6bc - 3abc^2 = 5a^3c + 10a^2 +$
 $= -6bc - 3abc^2 = 5a^2ac + 2 - 3bc \cdot 2 + ac = (2 + ac)(5a^2 - 3bc);$

$$\text{б) } 8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a = 8xy^3 - 24y^2 + -7axy + 21a =$$

$$= 8y^2xy - 3 - 7axy - 3 = (xy - 3)(8y^2 - 7a).$$

Задача 26: а) $an^2 - cn^2 - ap + ap^2 - cp - cp^2 = an^2 - cn^2 +$
 $+ -ap + cp + ap^2 - cp^2 = n^2(a - c) - p(a - c) + p^2(a - c) =$
 $= (a - c)(n^2 - p + p^2);$

$$\text{б) } ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - b - a = ax^2 + bx^2 + ay^2 + by^2 +$$

$$+ -b - a = x^2(a + b) + y^2(a + b) - a + b = (a + b)(x^2 + y^2 - 1);$$

$$\text{в) } ac^2 - ax - bc^2 + cx + bx - c^3 = ac^2 - bc^2 - c^3 + -ax + cx + bx =$$

$$= c^2(a - b - c) - x(a - b - c) = (a - b - c)(c^2 - x);$$

$$\text{г) } xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a = xy^2 - by^2 + y^2 + -ax + ab - a =$$

$$= y^2(x - b + 1) - a(x - b + 1) = (x - b + 1)(y^2 - a).$$

Задача 27: а) $a(x^2 - y^2) - 5(x + y) = a(x - y) \cdot (x + y) - 5(x + y) =$
 $= (x + y) \cdot (a(x - y) - 5) = (x + y) \cdot (ax - ay - 5);$

$$\text{б) } a^2 - 3a - 9b - 9b^2 = a^2 - 9b^2 + -3a - 9b = a^2 - 3b^2 +$$

$$+ -3a - 9b = a - 3b(a + 3b) - 3(a + 3b) = (a + 3b)(a - 3b - 3);$$

$$\text{в) } 2b^2 - 5b - 5c - 2c^2 = 2b^2 - 2c^2 + -5b - 5c = 2(b^2 - c^2) -$$

$$- 5(b + c) = 2(b - c)(b + c) - 5(b + c) = (b + c) \cdot (2(b - c) - 5) =$$

$$= (b + c)(2b - 2c - 5);$$

$$\text{г) } 7a - b - 4a - b^2 = 7a - b - 4a - b \cdot a - b =$$

$$= a - b(7 - 4a + 4b) = (a - b)(7 - 4a + 4b);$$

$$\text{д) } x^2 - 5x - 10y - 4y^2 = x^2 - 4y^2 + -5x - 10y = x^2 - 2y^2 -$$

$$- 5x + 2y = (x + 2y)(x - 2y - 5);$$

$$\begin{aligned} \text{е) } 4a^2 + 2a - 9b^2 - 3b &= 4a^2 - 9bb^2 + 2a - 3b = 2a^2 - 3b^2 + \\ &+ 2a - 3b = 2a - 3b \quad 2a + 3b + 2a - 3b = 2a - 3b \quad 2a + 3b \cdot 1 + \\ &+ 2a - 3b = (2a - 3b)(2a + 3b + 1). \end{aligned}$$

Задача 28: а) $2ab$; б) $16a^2$; в) 100 ; г) $9c^2, 4$.

$$\begin{aligned} \text{Задача 29: а) } a^2 + 6ab + 16b^2 - 6ab + 20b^2 &= a^2 + 6ab + 16b^2 - \\ - 6ab + 20b^2 &\cdot a^2 + 6ab + 16b^2 + 6ab + 20b^2 = \\ = a^2 + 6ab + 16b^2 - 6ab - 20b^2 &\cdot (a^2 + 6ab + 16b^2 + 6ab + 20b^2 = \\ = a^2 - 4b^2 \quad a^2 + 12ab + 36b^2 &= a^2 - 2b^2 \cdot a^2 + 2a \cdot 6b + 6b^2 = \\ = a - 2b \quad a + 2b \quad a + 6b^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 4 - 6y^3 + 4y^6 - 6y^3 - 5y^6 &= 4 - 6y^3 + 4y^6 - 6y^3 - 5y^6 \cdot \\ \cdot (4 - 6y^3 + 4y^6 + 6y^3 - 5y^6 &= y - 6y^3 + 4y^6 - 6y^3 + 5y^6 \cdot \\ \cdot 4 - 6y^3 + 4y^6 + 6y^3 - 5y^6 &= 4 - 12y^3 + 9y^6 \cdot 4 - y^6 = \\ = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3y^3 + 3y^3^2 \cdot 2^2 - &y^3^2 = 2 - 3y^3^2 \cdot 2 - y^3 \cdot 2 + y^3 \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Задача 30: а) } m + 3^3 - 8 &= (m + 3 - 2)(m + 3^2 + 2m + 3 + 4) = \\ = (m + 1)(m^2 + 8m + 19); \end{aligned}$$

$$\text{б) } c - 1^3 + 27 = (c - 1 + 3)(c - 1^2 - 3c - 1 + 9) = (c + 2)(c^2 - 5c + 7).$$

$$\begin{aligned} \text{Задача 31: а) } a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + 4b^2 &= a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + \\ + 4b^2 &= a + 2b \quad a^2 - 2ab + 4b^2 + a^2 - 2ab + 4b^2 = \\ = (a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 8c^3 - d^3 + 4c^2 + 2cd + d^2 &= a^3 + 8 - a^2 + 2a = \\ = a + 2 \quad a^2 - 2a + 4 + a \quad a + 2 &= a + 2 \quad a^2 - 2a + 4 + a = \\ = (a + 2)(a^2 - a + 4). \end{aligned}$$

$$\text{Задача 31: . а) } x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = x_1x_2 \quad x_1 + x_2 = 2 \cdot 7 = 14;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_1)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_1)(x_1 + x_1^2 - \\ - 3x_1x_1 &= 7 \cdot 7^2 - 6 = 301; \end{aligned}$$

$$\text{в) } x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_1 - 2x_1x_1 = x_1 + x_1^2 - 2x_1x_1 = 49 - 4 = 25;$$

$$\text{г) } x_1 + x_2^2 = 7^2 = 49.$$

Плакат на тему «Формулы сокращенного умножения»

$2a + b$ (двучлен), $5a^2b - 3ab^2 + 7c$ (трехчлен)

$6a^3b^3 - 5a - 7a + 3b^2 - 2a^3b^3 - 2b^2 = 4a^3b^3 - 12a + b^2$ (многочлен в стандартном виде)

Сложение и вычитание многочленов:

$$1) p_1 x = 2x^2 + 3x - 8, p_2 x = 5x + 2;$$

$$p x = p_1 x + p_2 x = 2x^2 + 3x - 8 + 5x + 2 = x^2 + 3x - 8 + 5x + 2 = 2x^2 + 8x - 6$$

$$2) p_1 a; b = a^2 + 2ab - b^2,$$

$$p_2 a; b = 2a^3 - a^2 - 3ab - b^2 + 5;$$

$$p a; b = p_1 a; b - p_2 a; b = a^2 + 2ab - b^2 - 2a^3 - a^2 - 3ab - b^2 + 5 = a^2 + 2ab - b^2 - 2a^3 + a^2 + 3ab + b^2 - 5 = a^2 + 2ab - b^2 - 2a^3 + a^2 + 3ab + b^2 - 5 = -2a^3 + 2a^2 - ab - 5.$$

Умножение многочлена на одночлен:

$$2a^2 - 3ab \cdot -5a = 2a^2 \cdot -5a - 3ab \cdot -5a = -10a^3 + 15a^2b$$

Умножение многочлена на многочлен:

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 5x + 1 \cdot 3x - 4 = \\ & = 2x^2 \cdot 3x + 2x^2 \cdot -4 - 5x \cdot 3x - 5x \cdot -4 + 1 \cdot 3x + 1 \cdot -4 = \\ & = 6x^3 - 8x^2 - 15x^2 + 20x + 3x - 4 = 6x^3 - 23x^2 + 23x - 4 \end{aligned}$$

Деление многочлена на одночлен:

$$6x^3 - 24x^2 \div 6x^2 = 6x^3 \div 6x^2 = 24x^2 \div 6x^2 = x - 4$$

$$8a^3 + 6a^2b - b \div 2a^2 = \frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2} \text{ (алгебраическая дробь)}$$