

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий  
(наименование института полностью)  
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»  
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»  
(код и наименование направления подготовки, специальности)  
«Математика»  
(направленность (профиль)/специализация)

## БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ  
ПРЯМЫЕ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	<u>Е.С. Щепеткова</u> (И.О. Фамилия)	_____ (личная подпись)
Руководитель	<u>О.А. Кузнецова</u> (И.О. Фамилия)	_____ (личная подпись)
Консультант	<u>С.А. Гудкова</u> (И.О. Фамилия)	_____ (личная подпись)

**Допустить к защите**

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева \_\_\_\_\_ (личная подпись)  
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Тольятти 2018

## АННОТАЦИЯ

*Цель* бакалаврской работы - выявить методические особенности обучения обучающихся теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы и разработать методические рекомендации по обучению данной теме в 7-9 классах.

Тема «Перпендикулярные прямые» является одной из основных тем курса геометрии 7 класса, в последующих классах используется для решения задач.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

*Глава I* бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения учащихся теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы. Выявлены основные цели по теме исследования в курсе геометрии основной школы, а также требования к знаниям и умениям обучающихся по данной теме. Выявлены формы, методы и средства обучения данной теме в курсе геометрии основной школы.

*В Главе II* выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов данной темы в курсе геометрии основной школы. Сформулированы методические рекомендации по данной теме в курсе геометрии основной школы.

*Список литературы* содержит 31 наименований.

*Объем работы* составляет 51 страниц.

## **ABSTRACT**

The purpose of the bachelor's thesis is to identify methodological specifics of organizing the students teaching to on the topic «Perpendicular straight lines» in the course of geometry of the secondary school. The main task of the bachelor's thesis is to develop methodological recommendations on organizing the teaching topic "Perpendicular straight lines" for students of 7-9 grades.

The bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion and a list of references.

Chapter I of the bachelor's work reveals the theory of teaching for students topic «Perpendicular straight lines» in the course of geometry of the secondary school. We analyze goals of teaching to the solving problems on the construction of a triangle, and study requirements for the knowledge, skills of students on the topic of the research. We cover different forms, methods and resources on the topic of the research.

In Chapter II we also analyze the content of theoretical and problem materials on the topic of research in the course of geometry of the secondary school. The methodical recommendations have been formulated for the course of geometry of the secondary school.

The list of literature contains 51 items.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ</b> .....	8
§1. Понятие логико-математического анализа темы школьного курса геометрии на примере темы «Перпендикулярные прямые».....	8
§2. Цели обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы .....	10
§3. Основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии 7-9 классов.....	13
§4. Формы, методы и средства обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы.....	15
Выводы по первой главе.....	19
<b>ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ</b> .....	21
§5. Анализ содержания теоретического материала темы «Перпендикулярные прямые» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов.....	21
§6. Анализ задачного материала по теме «Перпендикулярные прямые» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов.....	25
§7. Методические рекомендации по обучению теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы .....	38
Выводы по второй главе.....	45
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	46
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	48

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** Тема «Перпендикулярные прямые» является одной из основных тем курса геометрии 7 класса, в последующих классах используется для решения задач.

Понятие перпендикулярных прямых используется в большинстве геометрических задач [27]. Иногда, перпендикулярность прямых в задачах известна из условия, а в некоторых случаях, перпендикулярность прямых необходимо доказать [29].

Обозначение перпендикуляра впервые было введено в 1634 году в работах французского астронома и математика Пьера Эригона. В своем многотомном труде он обобщил все математические знания. Он был автором нескольких математических обозначений, среди которых наиболее долгоживущим оказался знак перпендикулярности:  $\perp$ .

Перпендикулярность прямых, является базовым для таких понятий, как высота треугольника, высота четырехугольника, касательная к окружности, прямоугольная система координат, перпендикулярность векторов, расстояние от точки до прямой, которые используются при решении задач в основном государственном экзамене: в первой части задания 15-19 и во второй части задания 24-26.

**Проблема исследования** состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы.

**Объект исследования:** процесс обучения геометрии в основной школе.

**Предмет исследования:** методика обучения учащихся теме «Перпендикулярные прямые» на уроках геометрии в основной школе.

**Цель исследования:** выявить методические особенности обучения обучающихся теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основ-

ной школы и разработать методические рекомендации по обучению данной теме в 7-9 классах.

**Задачи исследования:**

1. Рассмотреть понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса геометрии (на примере темы «Перпендикулярные прямые»).

2. Выявить основные цели и задачи обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы.

3. Представить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии 7-9 классов.

4. Выявить формы, методы и средства обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы.

5. Выполнить анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Перпендикулярные прямые» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов.

6. Представить методические рекомендации по обучению теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ методической литературы, анализ школьных учебников, программ и учебных пособий, изучение опыта работы учителей математики.

**Теоретическая значимость** исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения школьников теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы.

**Практическая значимость** работы заключается в том, что в ней представлены методические рекомендации по обучению теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы, которые могут быть использованы учителями математики на уроках геометрии и алгебры и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

**На защиту выносятся:** методические рекомендации по обучению решению задач по теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы.

**Бакалаврская работа** состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

**Во введении** сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

**Глава I** бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы. Выявлены основные цели и задачи по обучению теме исследования в курсе геометрии основной школы, а также требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме. Рассмотрены формы, методы и средства обучения данной теме в курсе геометрии основной школы.

**В Главе II** представлены методические аспекты обучения учащихся решению задач на построение треугольников в курсе геометрии основной школы. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов по данной теме в курсе геометрии основной школы. Описаны методические рекомендации по теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

**Список литературы** содержит 51 наименование.

# ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

## §1. Понятие логико-математического анализа темы школьного курса геометрии на примере темы «Перпендикулярные прямые»

Логико-математический анализ содержания темы в методической литературе каждый автор рассматривает по-разному. С точки зрения Е.И. Лященко логико-математический анализ является частью логико-дидактического анализа. Н.Л. Стефанова, наоборот, рассматривает понятие логико-математического анализа более широко и включает логико-дидактический анализ как его часть.

На примере выше упомянутых авторов, определим, что они подразумевают под понятиями логико-математический анализ и логико-дидактический анализ.

Е.И. Лященко в своей книге включает логико-математический анализ в логико-дидактический анализ. Поэтому сначала рассмотрим, что входит в логико-дидактический анализ, по мнению данного автора. «Это определение цели обучения теме; логический и методический анализы содержания темы; постановка основных учебных задач и выбор учебно-познавательных действий; отбор основных средств, методов и приемов обучения; определение форм контроля и оценки процесса и результата учебной деятельности учащихся» [14, С.166].

Покажем, что Е.И. Лященко пишет о логико-математическом анализе: «Логический анализ темы, прежде всего, сводится к установлению логической организации учебного материала в ней с учетом специфики аксиоматического метода» [14, С.168]. Автор выделяет три метода подготовки к теме:



на содержательной основе, дедуктивный подход к построению курса, построение на дедуктивной основе.

Установив методы подготовки, следует выявить, как доказываются утверждения, какие понятия вводятся, какой уровень логической строгости в доказательствах, какие методы и теоретические утверждения применяются для решения задач.

Так мы можем сказать, что с помощью логико-математического анализа можно ответить на вопрос: «О чем мы узнаем в данной теме?» и выяснить для чего были проведены те или иные преобразования, исследования, доказательства, понять для чего применялись используемые методы и приемы.

Теперь рассмотрим, что под определением логико-математического анализа предполагает Н.Л. Стефанова:

«- цели обучения предложенной теме и результаты, полученные после обучения;

- понимание, для чего и каким понятиям даются определения, умение формулировать и применять их;

- знание того, какие математические утверждения, помимо определений, присутствуют в теме, их разновидности – теоремы, правила, формулы и т.д.;

- понимание, как данные определения рассматриваются в учебниках – на примерах, доказательствах, рисунках и так далее и их восприятие;

- понимание роли геометрического и алгебраического материала предложенного в учебниках и особенности применения этого материала теме;

- умение решать, оформлять, выделять методы решения типовых задач школьного курса» [21, С.86].

Далее Н.Л. Стефанова поясняет, что «логико-дидактический анализ проводится на основе логико-математического анализа и включает в себя: постановку основных учебных задач и выбор соответствующих познавательных действий; отбор основных методов, средств и приемов обучения теме;

определение форм контроля и оценки результата деятельности учащихся» [21, С.87].

Определяя понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса геометрии на примере темы «Перпендикулярные прямые», выберем в качестве основной методическую работу Н.Л. Стефановой.

В следующих параграфах, мы рассмотрим и выполним логико-математический анализ на примере темы «Перпендикулярные прямые».

Для начала выделим только *понятия темы*:

- определение перпендикулярных прямых;
- понятие перпендикуляр;
- обозначение перпендикулярных прямых;
- свойства перпендикулярных прямых.

Логико-математический анализ – основа методики обучения, который помогает учителю в подготовке к уроку, так как включает в себя анализ учебной литературы, формулировку цели, выбор форм, методов и средств обучения и оценки этого выбора.

## **§2. Цели обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы**

Согласно «*Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования*» [24] предметные результаты изучения области «Математика», раздел «Геометрия» должны выражать:

- овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений;
- формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геомет-

рии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач;

- развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин.

Т.А. Бурмистрова в сборнике рабочих программ по геометрии [4] выделяет общие цели изучения курса геометрии для освоения образовательной программы основного общего образования и делит их на три направления: личностные, метапредметные и предметные. Выделим цели, относящиеся к теме «Перпендикулярные прямые».

*Личностные:* умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи; развитие инициативы, находчивости, активности при решении геометрических задач; способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

*Метапредметные:* развитие умения адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, её объективную трудность и собственные возможности её решения; умение осознанно находить наиболее эффективный способ выполнения учебной задачи; умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и выводы; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение; умение понимать и применять математические средства наглядности (рисунки, чертежи и другие) для иллюстрации, интерпретации, аргументации.

*Предметные:* усвоение систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, а также на наглядном уровне — о простейших пространственных телах, умение применять систематические знания о них для решения геометрических и практических задач.

В методическом пособии по учебнику А.Г. Мерзляка [7] выделяются следующие цели изучения параграфа «Перпендикулярные прямые».

*Предметные:* «познакомить учащихся с определением перпендикулярных прямых, перпендикулярных отрезков; ввести понятия перпендикуляра, расстояния от точки до прямой; изучить свойства «прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку, лежащую на данной прямой»» [7, С. 25].

*Личностные:* формировать интерес к изучению темы и желание приобретения знания и умения.

*Метапредметные:* формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, строить логическое рассуждение.

Учитель математики Л.Ф. Кожевникова [13] при обучении теме «Перпендикулярные прямые» выделяет следующие цели: обнаруживать сходства и различия объектов; выявлять и излагать учебную проблему совместно с учителем; вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем; проявляют способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

Учитель математики Т.А. Вертикова [10], составляя конспект урока по теме «Перпендикулярные прямые», рассматривает следующие цели обучения: познакомить учащихся с определением перпендикулярных прямых и их свойствах; формирование умений и навыков анализировать пройденный материал и использовать его для решения задач; понимать значимость изучаемых понятий; развитие познавательной активности и самостоятельности получения знаний; воспитание интереса к предмету.

Таким образом, при изучении темы «Перпендикулярные прямые» можно достичь следующих целей: «положить основу знаний для изучения в будущем материала связанного с данной темой; применять полученные знания при решении задач, формировать навыки и умения их решения; развивать интерес к предмету, память, воображение, концентрацию, логическое мышле-

ние; помощь в решение различных вопросов и задач в смежных дисциплинах и в повседневной жизни» [8, С. 320].

### **§3. Основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии 7-9 классов**

Проведя анализ «*Примерной основной образовательной программы основного общего образования*» [19] мы выяснили, что тема «Перпендикулярные прямые» дается в общем виде вместе с другими простейшими темами геометрии в разделе «Отношения».

Учащиеся 7-9 классов, чтобы обеспечить возможность успешно продолжить образование на *базовом и углубленном уровне*, должны свободно оперировать понятием перпендикулярные прямые. В повседневной жизни и при изучении других предметов они должны уметь использовать полученные знания для решения различных задач [28].

В методических рекомендациях к учебнику А.В. Погорелова в результате изучения темы обучающиеся должны: «изображать, обозначать и видеть на чертежах и рисунках перпендикулярные прямые, перпендикуляр к прямой; знать и объяснять определение перпендикулярных прямых, перпендикуляра к прямой; формулировать, понимать и доказывать теорему «о прямой, перпендикулярной данной»; решать задачи с использованием теоремы «о прямой, перпендикулярной данной»; применять метод доказательства от противного» [17, С. 64].

В своих методических рекомендациях Л.С. Атанасян [3] рассматривает следующие требования: учащиеся должны *уметь* формулировать понятие перпендикулярных прямых и обосновывать утверждение о том, что «две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются», уметь решать задачи на доказательство по теме.

Т.М. Мищенко в планируемых результатах изучения параграфа «Перпендикулярные прямые» в учебнике Л.С. Атанасяна [16] выделяет, что ученики по итогам должны знать:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках перпендикулярные прямые;
- формулировать определение перпендикулярных прямых;
- формулировать и доказывать утверждение о двух прямых, перпендикулярных третьей;
- решать задачи с применением свойств перпендикулярных прямых.

В поурочные разработки к учебнику В.Ф. Бутузова выделены следующие основные требования к учащимся: «учащиеся должны уметь формулировать понятие перпендикулярных прямых, использовать обозначение перпендикулярности двух прямых, объяснить, что такое перпендикуляр, проведенный из точки к прямой; уметь четко формулировать и доказывать теоремы «о существовании и единственности перпендикуляра к прямой»» [6, С. 13].

Авторы школьного учебника геометрии И.М. Смирнова и В.А. Смирнов в документе «Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов» [20] говорят о планируемых результатах обучения геометрии в основной школе.

Выделим предполагаемые знания, умения и навыки, относящиеся к теме «Перпендикулярные прямые». Выпускники основной школы после изучения курса геометрии по теме исследования должны:

- знать основные геометрические понятия, отношения между ними;
- знать формулировки основных свойств и теорем;
- уметь пользоваться чертежными инструментами для изображения, построения геометрических фигур;
- применять знания по теме для решения задач.

Е.В. Буцко в методическом пособии к учебнику А.Г. Мерзляка определяет следующие планируемые результаты: «учащийся научится распознавать и строить перпендикулярные прямые и отрезки, находить расстояние от точки до прямой, формулировать и доказывать свойство прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку, лежащую на данной прямой» [7].

Проанализировав основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Перпендикулярные прямые» в методических пособиях разных авторов, мы можем сделать вывод о том, что большинство из них выделяют схожие требования. Учащиеся должны *уметь* распознавать и изображать на рисунках перпендикулярные прямые, *знать и формулировать* определения темы, *уметь* доказывать теоремы по теме и использовать их в решении задач.

#### **§4. Формы, методы и средства обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы**

В данном параграфе главная задача – выявить формы, методы и средства обучения по данной теме. Но для начала так же определим сами понятия *форм, методов и средств* обучения.

Рассмотрим *формы обучения*, которые играют важнейшую роль в формировании учебного процесса. В методическом пособии А.А. Темербекова, предлагается следующее определение форм обучения: «виды учебных занятий, способы организации учебной деятельности учителя и учеников, направленные на овладение учащимися знаниями, умениями и навыками, на воспитание и развитие их в процессе обучения» [23, С. 62]. Представленное определение не является единственным для форм обучения, каждый автор в методической литературе трактует его по-своему.

Далее приведем три основные формы учебной деятельности на уроке, сложившиеся в современной методике:

*Фронтальная форма обучения* подразумевает то, что педагог управляет учебной деятельностью всего класса, перед которым поставлена одна либо несколько общих задач, кроме того он определяет общую для всех учеников скорость работы. Но в свою очередь, так как данная скорость ориентирована на среднего школьника, то одни обучающиеся («слабые») отстают, другие («сильные») выполняют задание быстрее и теряют интерес к выполнению задач.

*Индивидуальная форма обучения* не подразумевает взаимодействия учеников между собой, а предполагает самостоятельное выполнение на уроке общих заданий для всего класса. Подчеркнем, что индивидуальная форма обучения считается самой старой и классической организационной формой обучения [30].

*Групповая форма обучения* учитывает, что педагог формирует и контролирует работу нескольких групп класса. В данные группы входят ученики с разными учебными способностями, и это определяет более продуктивный взаимообмен информацией согласно теме урока. Учитель управляет выделенными группами напрямую, и кроме того через назначенных им помощников в каждой группе. В ходе урока группа учеников работает без помощи учителя, внутри группы ведутся обсуждения по теме урока и совместная проверка итогов работы, при необходимости учитель оказывает группе помощь по выполнению заданию.

На данный момент основной формой организации учебной работы в школе все так же является *урок*, который обладает немалыми достоинствами. «Урок логически законченный, целостный, ограниченный определенными рамками времени отрезок учебно-воспитательного процесса» [23, С. 63].

Далее рассмотрим, какое понятие в педагогике дается *методу обучения*.

Стоит отметить, что понятие метода обучения претерпевало изменение в течение всей истории развития педагогики и обучения математике, опреде-



ление метода обучения рассматривалось с различных точек зрения и подходов [22, С. 60].

В методической литературе *метод* определяется как «система последовательных действий, которые приводят к достижению результата, соответствующего намеченной цели» [21, С. 145].

Н. Л. Стефанова, и другие авторы формулируют следующее определение *метода обучения*: «это способ взаимодействия учителя и учащихся, который направлен на достижение целей образования, воспитания и развития учеников в ходе обучения» [21, С. 146].

Существуют довольно много различных *классификаций методов обучения*. Подход к выбору методов обучения – дело творческое, но должно быть основано на понимание теории обучения.

Приведем классификацию, основанную *на характере познавательной деятельности*:

- объяснительно-иллюстративные методы (лекция, беседа, рассказ, иллюстрация, демонстрация и другие);
- репродуктивный метод (постоянное повторение нового материала на основе правила или образца, решение задач по заданному алгоритму);
- проблемный метод (проблемные, познавательные задачи);
- частично-поисковые методы (эвристический и исследовательский методы обучения).

Например, *рассказ*, как метод обучения, играет второстепенную роль в математике. Данный метод предполагает, например, объяснение, как строятся прямые углы на местности. С помощью рассказа предпочтительно сообщить информацию о значении перпендикулярных прямых в науке и жизни.

*Средства обучения* – это неотъемлемая часть методов обучения. Они включают в себя разнообразные учебные и наглядные материалы, технические и демонстрационные инструменты и многое другое. При успешном выборе, они гарантируют реализацию принципа наглядности и способствуют

увеличению производительности учебного процесса. Выбор средств обучения определяется конкретными задачами, поставленными на уроке.

*Средства обучения* разделяются на:

- зрительные (наглядные): учебники и учебные пособия, раздаточный материал, плакаты, чертежи, таблицы и так далее;
- слуховые (аудиальные) средства;
- зрительно-слуховые (аудиовизуальные) средства: мультимедийные учебники, слайды, компьютеры, учебные фильмы и другие.

В результате применения перечисленных средств можно сократить время достижения поставленной цели обучения.

В геометрии главное место занимают визуальные средства, например, *чертежи, плакаты, макеты фигур* [31]. В связи с обеспечением общеобразовательных школ компьютерной оснащённостью, получают распространение визуальные средства, такие как *презентации* по различным темам уроков.

«При применении визуальных средств, следует придерживаться следующих условий:

- используемая наглядность обязана отвечать возрасту учеников;
- средства должны применяться в меру и показывать их нужно только в определенные моменты урока;
- следует четко выделять основное, при демонстрации средств;
- подробно обдумывать объяснения, предоставляемые в процессе показа объектов;

демонстрируемые средства должны быть четко согласованы с содержанием материала урока;

- визуальные средства обязаны быть хорошо видны ученикам во всем классе;
- ученики должны быть заинтересованы в представленных материалах по уроку и нахождению нужных данных в них» [15, С. 256].

Можно сделать вывод, что учителю следует строить процесс обучения так, чтобы у учащихся возникло желание приобрести новые знания по геометрии. По этой причине каждый раз при подготовке к уроку учитель встречается с проблемой выбора тех или иных форм, методов и средств обучения.

На уроке по теме «Перпендикулярные прямые» можно применить фронтальную и индивидуальную формы обучения вместе и так же отдельно друг от друга. Например, фронтальная форма будет применяться на первом уроке при введении нового материала, а к индивидуальной форме можно прибегнуть на втором уроке при закреплении пройденного материала и решении задач по данной теме. При изучении данной темы в применении групповой формы нет необходимости.

Каждый метод обучения нельзя применять отдельно от других, они все взаимосвязаны и дополняют друг друга. Так же данный метод может быть эффективным при изучении одной темы, но не иметь правильного воздействия при рассмотрении другой.

Учитель должен уметь использовать тот или иной метод, а иногда и несколько методов одновременно на протяжении всего урока. Выбор методов будет зависеть от разных аспектов, таких как ограничение урока по времени, характера темы или разбираемых задач, восприятие учениками данного материала.

Все вышеперечисленные в работе методы обучения также могут использоваться на уроках по теме «Перпендикулярные прямые». Они делают процесс изучения темы более увлекательным и разнообразным. Наглядные средства обучения улучшают восприятие материала и имеют большое значение при изучении данной темы.

#### Выводы по первой главе

1. По-разному вводится Логико-математического анализа содержания темы школьного курса геометрии на примере темы «Перпендикулярные прямые» в методической литературе на примере Е.И. Лященко и Н.Л. Стефона-

ва. Произведен сравнительный анализ взглядов и подход авторов к определению логико-математического анализа.

2. Раскрыты цели обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы. Изучены государственные стандарты основного общего образования, методические пособия. Выявлено, что тема способствует развитию мыслительной деятельности учеников, интереса к изучению темы и желание приобретения знаний и умений. В ходе изучения теме у учеников развивается воображение, концентрация, логическое мышление, самостоятельность получения знаний, понимание смысла поставленной задачи, развитие инициативы, находчивости, активности.

3. Определены основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы. После обучения данной темы ученики должны: изображать, обозначать и находить на чертежах и рисунках перпендикулярные прямые, формулировать определение перпендикулярных прямых, формулировать и доказывать теоремы, решать задачи с применением свойств перпендикулярных прямых.

4. Рассмотрены формы, методы и средства обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы. Выделены две формы обучения – фронтальная и индивидуальная. Установлено, что применение различных методов обучения способствует концентрации внимания обучающихся и развитию их познавательной активности во время урока; выбор методов будет зависеть от: ограничения по времени, характера темы и понимания учениками данного предмета. Наглядные средства обучения улучшают восприятие и понимание материала по данной теме.

## ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

### §5. Анализ содержания теоретического материала темы «Перпендикулярные прямые» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов

Ниже представлен анализ содержания теоретического материала темы «Перпендикулярные прямые» в учебниках геометрии 7 класса. Для анализа были отобраны учебники из федерального перечня, рекомендуемых при реализации обязательной части основной образовательной программы [25]: «Геометрия. 7 класс» А.Д. Александрова, «Геометрия. 7-9 классы» Л.С. Атанасяна, «Геометрия. 7 класс» В.Ф. Бутузова, «Геометрия. 7-9 классы» А.В. Погорелова, «Геометрия. 7-9 классы» И.Ф. Шарыгина. А так же учебник: «Геометрия ч.1. Планиметрия» А.П. Киселева.

*Базовые знания (известные из школьного курса математики 5-6 классов):*

- понятия «прямая», «отрезок», «луч»;
- определение понятия угла и его видов.

*Вводимые (новые) знания:*

- определение перпендикулярных прямых;
- понятие перпендикуляр;
- обозначение перпендикулярных прямых;
- свойства перпендикулярных прямых.

Большинство авторов связывают тему «Перпендикулярные прямые» с темой «Углы». Она является главной в параграфе либо ей отведен небольшой пункт в нем. Так же некоторые авторы разделяют *понятия «Перпендикулярные прямые» и «Перпендикуляр»* в различных параграфах, другие не произ-

водят разделения, объединяя эти понятия в одном параграфе. Теперь рассмотрим подробнее каждый учебник.

В учебнике «Геометрия. 7 класс» А.Д. Александрова [1, С. 69] понятие «Перпендикулярные прямые» впервые встречается в Главе 1. «Начала геометрии», пункт 3.6. «Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые». Данное определение вертикальным углам, автор так же лишь знакомит, как он сам уточняет, с традиционным *понятием взаимно перпендикулярных прямых* и вводит знак перпендикулярности.

Данный автор, разделяет понятия «Перпендикулярные прямые» и «Перпендикуляр». В Главе 2. Треугольники. Пункт 4.6. Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра [1, С.100] автор напоминает ученикам, понятие «Перпендикулярных прямых». И вводит *определение перпендикуляра*, так же доказывает *утверждение о единственности перпендикуляра* и выделяет, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Эти два утверждения доказываются способом от противного. Так же в конце пункта 4.6 дается справка для развития о происхождении слова «перпендикуляр».

Л.С. Атанасян в учебнике «Геометрия. 7-9 классы» знакомит с темой «Перпендикулярные прямые» в Главе 1, §6. Перпендикулярные прямые [2, С. 22]. Автор включает в параграф 3 пункта: 1. «Смежные и вертикальные углы», 2. «Перпендикулярные прямые» и 3. «Построение прямых углов на местности». Во втором пункте дается *определение перпендикулярных прямых*, их обозначение и так же доказывается, что «две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются» [2, С. 23]. Формулировка отличается от определения А.Д. Александрова. Уточняется, что для построения используют чертежный угольник и линейку, и что это начальные геометрические сведения.

Далее связь с темой встречается в Главе 2, §2. «Медианы, биссектрисы и высоты треугольника» [2, С.32]. В данном параграфе, Атанасян отдельно выделяет пункт 16 «Перпендикуляр к прямой», и в отличие от А.Д. Алексан-

дрова, впервые вводит понятие «Теорема», приводит теорему о единственности перпендикуляра и доказывает ее. В учебники А.Д. Александрова эта теорема рассматривается как утверждение.

В учебнике А.В. Погорелова теоретического материала по теме «Перпендикулярные прямые» сравнительно больше, чем у других авторов. Но, как и у большинства авторов, пункт «Перпендикулярные прямые» рассматривается вместе с темой «Смежные и вертикальные углы». После изучения вертикальных углов в пункте 16 «Перпендикулярные прямые» [18, С. 23-24] автор дает определение, какие прямые называются перпендикулярными, вводит знак их обозначения, здесь же в отличие от А.Д. Александрова и Л.С. Атанасяна вводит *теорему о единстве перпендикуляра* и ее доказательство.

В пункте 30 из теоремы «Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей», автор выделяет следствие, что «две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны» [18, С. 42-43], не используя это понятие в пункте «Перпендикулярные прямые» и не доказывая его, как в других учебниках.

Так же в пункте 32 из свойства углов образованных при пересечении двух прямых секущей, выделяет следствие, что «если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой» [18, С. 45]. В учебниках других авторов данного следствия нет.

Погорелов выделяет отдельный пункт 36 [18, С. 48-49] о *существовании и единственности перпендикуляра к прямой*. Дает формулировку теоремы и приводит ее доказательство. Также в этом пункте дается определение, что «длина перпендикуляра называется расстоянием от точки до прямой» и разбирается задача по этому определению.

В учебники геометрии автора В.Ф. Бутузова в Главе 1 выделяется §4. «Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр к прямой». В пункте 9 [5, С. 26] данного параграфа дается *определение перпендикулярности прямых*, их обозначение, *понятие перпендикуляра к прямой*. Так же автор вводит понятия

«Теорема» и «Доказательство». Приводит первую *теорему о существовании перпендикуляра к прямой* и ее доказательство. Здесь же *теорему о единственности перпендикуляра к прямой*. Автор делает замечание, что данные теоремы можно объединить в одну. В.Ф. Бутузов рассматривает все вопросы по теме «Перпендикулярные прямые» сразу в одном параграфе.

В учебнике 7 класса И.Ф. Шарыгина впервые вводит понятие перпендикулярные прямые и их обозначение в §2.3. «Плоские углы», пункт «Перпендикулярные прямые». Там же доказывается *теорема о симметрии перпендикулярных прямых*: «Если две прямые, лежащие в плоскости, перпендикулярны, то при симметрии относительно одной из них вторая прямая переходит сама в себя» [26, С.49] и важная, как уточняет автор, *теорема о единственности перпендикуляра*. Из теоремы следует, что «две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не могут пересечься» [26, С. 51]. Автор обращает внимание, что *теорема о единственности перпендикуляра* подсказывает способ построения прямой, перпендикулярной данной.

Теперь, для сравнения с современными авторами, рассмотрим учебник А. П. Киселева «Геометрия. Ч. 1: Планиметрия» 1962 года [12, С. 14-16]. Автор рассматривает тему «Перпендикулярные прямые» в параграфе «Углы» в пункте «Перпендикуляр и наклонная». Формулирует понятие перпендикуляр (не перпендикулярные прямые), вводит обозначение взаимно перпендикулярных прямых. Следующим пунктом доказывает утверждение, что «из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один».

Можно заметить, что многие авторы придерживаются детального разбора темы «Перпендикулярные прямые», выделяя по ней отдельные параграфы и пункты, разъясняя и доказывая подробно все определения и теоремы.



В целом подход авторов к теме схож между собой, почти у всех теме отводится 1 час на изучение темы, имеются различия лишь в формулировке определений и теорем и их расположение в параграфах учебника.

Тема «Перпендикулярные прямые» служит основой для изучения в дальнейшем таких тем как: высота треугольника, высота четырехугольника, касательная к окружности, построение перпендикулярной прямой с помощью циркуля и линейки. Эта тема, как пишут многие авторы «одна из важнейших и традиционных тем геометрии» [9, С. 30]. Полностью изучается в 7 классе, а в 8 и 9 классе ученики уже пользуются полученными знаниями и закрепляют их при решении.

## **§6. Анализ задачного материала по теме «Перпендикулярные прямые» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов**

По данной теме задач сравнительно не много, так как на изучение темы отводится всего 1 час. Рассмотрим предложенные авторами задачи.

Здесь можно выделить, только два типа: задачи на построение перпендикуляров и прямых углов и задачи на доказательство с использованием отношения «Перпендикулярность прямых».

Задача первого типа приводится только в учебнике Л.С. Атанасяна.

Л.С Атанасян [2, С. 24-27] для начала после параграфа выделяет «Практические задания» и дает задание на построение перпендикулярных прямых. Он единственный из авторов предлагает задание такого типа.

**Задача 1.** «Начертите неразвернутый угол  $MON$  и отметьте точку  $P$  внутри угла и точку  $Q$  – вне его. С помощью чертежного угольника и линейки через точки  $P$  и  $Q$  проведите прямые, перпендикулярные к прямым  $OM$  и  $ON$ » [2, С. 24].

Решение (рис. 1):

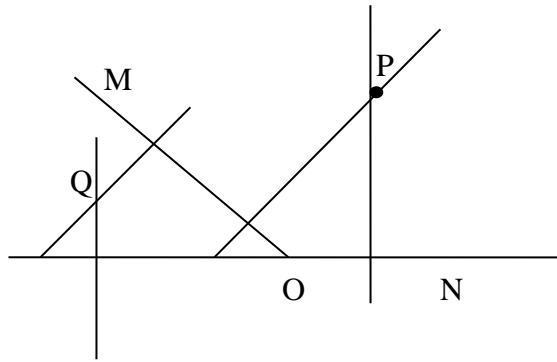


Рисунок 1. Построение перпендикулярных прямых

Далее автор предлагает для решения задачу второго типа на доказательство, где ученики должны применить свойство, пройденное в параграфе.

**Задача 2.** «Через точку  $A$ , не лежащую на прямой  $a$ , проведены три прямые, пересекающие прямую  $a$ . Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой  $a$ » [2, С. 25].

Доказательство:

Допустим,  $b \perp a$ ,  $c \perp a$ ,  $d \perp a$ , тогда прямые  $b, c, d$  не должны пересекаться. Но по условию  $b, c, d$  - проходят через одну точку  $A$ . Значит, что все три прямые не могут быть перпендикулярны  $a$ . Следовательно, только одна из трех прямых может быть перпендикулярна  $a$  (рис. 2).

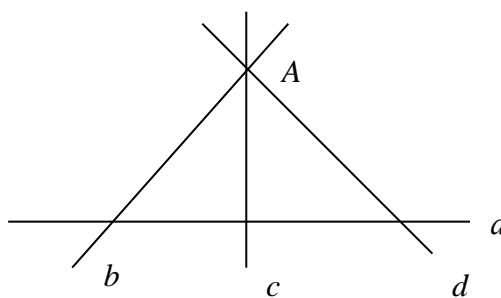


Рисунок 2. Чертеж к задаче 2

Это все задачи в учебнике Л.С Атанасян по теме «Перпендикулярные прямые» разобранные после параграфа. После в «Дополнительных задачах к главе» автор приводит две задачи на доказательство, но уже на уровень сложнее.

**Задача 3.** «Докажите, что если биссектрисы углов  $ABC$  и  $CBD$  перпендикулярны, то точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  лежат на одной прямой» [2, С.27].

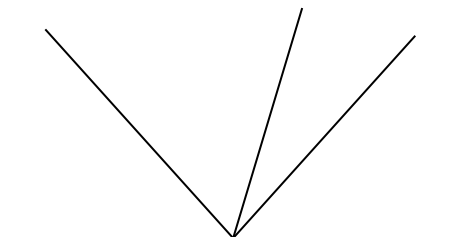


Рисунок 3. Чертеж к задаче 3

Доказательство (рис. 3):

$$\angle EBN = 90^\circ;$$

$$\angle EBN = \angle EBC - \angle CBN;$$

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD;$$

$$\angle ABD = \angle ABN + \angle NBC;$$

$$\angle CBD = \angle CBE + \angle EBD;$$

Так как  $\angle ABN = \angle NBC$  и  $\angle CBE = \angle EBD$ , значит

$$\angle ABD = \angle ABN + \angle NBC + \angle CBE + \angle EBD, \text{ отсюда следует } \angle ABD = \angle NBC + \angle NBC + \angle CBE + \angle CBE;$$

$$\angle ABD = 2\angle NBC + 2\angle CBE;$$

$$\angle ABD = 2(\angle NBC + \angle CBE);$$

$$\angle ABD = 2\angle NBE;$$

$$\angle ABD = 2 \cdot 90^\circ;$$

$\angle ABD = 180^\circ$  - развернутый угол; следовательно, точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  лежат на одной прямой.

**Задача 4.** «Даны две пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$  и точка  $A$ , не лежащая на этих прямых. Через точку  $A$  проведены прямые  $m$  и  $n$  так, что  $m \perp a$ ,  $n \perp b$ . Докажите, что прямые  $m$  и  $n$  не совпадают» [2, С. 27].

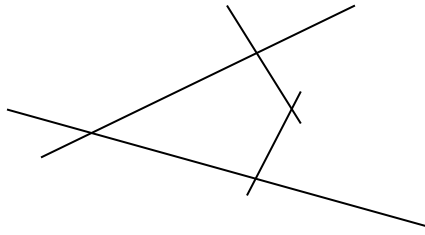


Рисунок 4. Чертеж к задаче 4

Доказательство (рис. 4):

- 1) предположим, согласно условию задачи, что точки  $m$  и  $n$  совпадают, то есть лежат на одной прямой  $l$ ;
- 2) тогда получаем  $l \perp a$  и  $l \perp b$ , то есть одна прямая перпендикулярна двум различным прямым  $a$  и  $b$ ;
- 3) значит,  $a$  и  $b$  не пересекаются согласно утверждению: «Две прямые, перпендикулярны к третьей, не пересекаются» - а это противоречит условию;
- 4) наше предположение не верно,  $m$  и  $n$  не совпадают.

Рассмотрим учебник А.В. Погорелова [18, С. 27], автор разделяет задачи по пунктам параграфов. В Пункте 16 «Перпендикулярные прямые» для решения приведены две задачи, первая на доказательство перпендикулярности прямых с применением свойств углов и вторая задача устная на владение и понимание чертежных инструментов.

**Задача 5.** «Докажите, что если три из четырех углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равны, то прямые перпендикулярны» [18, С. 27].

Доказательство:

$\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4$  - вертикальные.

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  - смежные,

$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$  - смежные.

Так как  $\angle 1 = \angle 2$ , то  $\angle 1 = \angle 2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ ,

$\angle 1 = \angle 3 = 90^\circ, (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ)$ .

Так как  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 90^\circ$ , то  $\angle 4 = 360^\circ - 90^\circ \cdot 3 = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$ . Значит, прямые перпендикулярны, что и требовалось доказать.

**Задача 6.** «Как с помощью линейки проверить, являются ли прямым угол в чертежном угольнике» [18, С. 27].

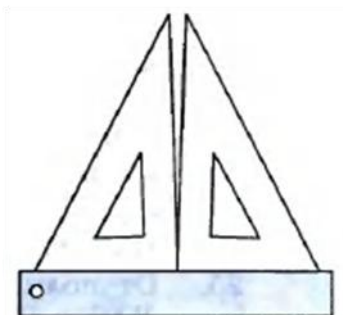


Рисунок 5. Чертежные угольники

Решение (рис. 5):

Приложить два чертежных угольника друг к другу прямыми углами, поставить на линейку (ровную поверхность). Если стороны угольников совпадают (соединятся), то угольники правильные (углы прямые).

У В.Ф. Бутузова в параграфе, тема «Перпендикулярные прямые» объединена с темой «Углы», поэтому он дает большую задачу включающую все понятия пройденные в параграфе. Рассмотрим ее часть, относящуюся к теме «Перпендикулярные прямые».

**Задача 7** [5, С. 29].

в) На рисунке 6 прямые  $OA$  и  $OB$ , а так же  $OC$  и  $OD$  взаимно перпендикулярны. Докажите, что  $\angle AOC = \angle BOD$ .

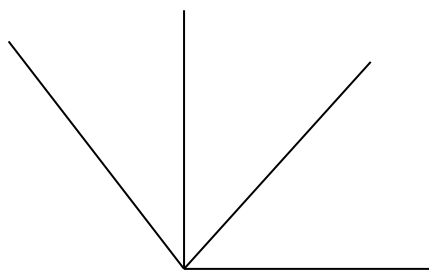


Рисунок 6. Чертеж к задаче 7

Доказательство:

1. Так как  $OA \perp OB$ , то  $\angle AOB = 90^\circ$ .

Так как  $OC \perp OD$ , то  $\angle COD = 90^\circ$ . Значит,  $\angle AOB = \angle COD$ .

2. Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов. Значит,  $\angle AOB = \angle AOD + \angle BOD$ ,  $\angle COD = \angle AOC + \angle AOD$ .

3. Так как  $\angle AOB = \angle COD$ , то  $\angle AOD + \angle BOD = \angle AOC + \angle AOD$ ,  $\angle BOD = \angle AOC$ , что и требовалось доказать.

Так же автор, в разделе дополнительные задачи к главе, предлагает две задачи, одна из которых усложненного уровня (под знаком \*), так же на доказательство.

**Задача 8.** «Докажите, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны» [5, С. 30].

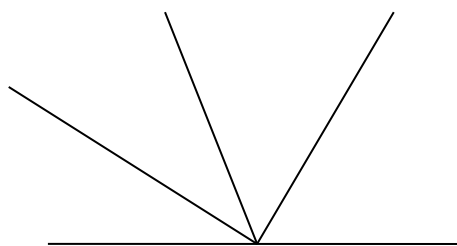


Рисунок 7. Чертеж к задаче 8

Доказательство (рис. 7):

1) сумма смежных углов равна  $180^\circ$ :  $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ ;

2)  $OK$  - биссектриса  $\angle BOC$ , то есть  $\angle BOK = \angle KOC = \frac{1}{2} \angle BOC$ .

$ON$  - биссектриса  $\angle AOB$ , то есть  $\angle AON = \angle NOB = \frac{1}{2} \angle AOB$ ;

3)  $\angle NOK = \angle NOB + \angle BOK = \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle BOC =$

$= \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ , то есть  $OK \perp ON$ , что и требова-

лось доказать.

**Задача 9.** «Из точки  $M$  проведены перпендикуляры  $MH$  и  $MK$  к двум пересекающимся прямым. Докажите, что точки  $M, H$  и  $K$  не лежат на одной прямой» [5, С. 30].

Доказательство (рис.8):

Допустим, что точки  $M, H$  и  $K$  принадлежат прямой  $HK$  и  $\angle HMK = 180^\circ$ .

В учебнике В.Ф. Бутузова согласно «второму замечанию к *теореме о единственности перпендикуляра* к прямой следует, что две прямые перпендикулярные к одной и той же прямой, не пересекаются» [5, С. 28].

Но по условию прямые  $OH$  и  $OK$  пересекаются в точке  $O$ , значит отрезки  $MH$  и  $MK$  не лежат на одной прямой, то есть  $\angle HMK \neq 180^\circ$ , точки  $M, H$  и  $K$  не лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

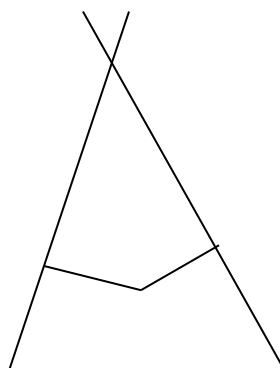


Рисунок 8. Чертеж к задаче 9.

Автором И.Ф. Шарыгиным [26, С. 52] разбираются задачи, такого же типа, что и других. В его учебнике приводятся задачи, связанные с темой «Углы», присутствует так же задача на применение *теоремы* «О единственности перпендикуляра».

**Задача 10.** На рисунке 9 угол 1 равен углу 2, а угол 3 равен углу 4. Докажите, что луч  $EF$  перпендикулярен прямой  $LP$ , луч  $MF$  перпендикулярен  $KF$ .

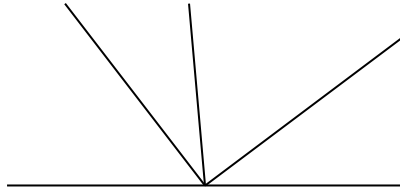


Рисунок 9. Чертеж к задаче 10

Доказательство:

1. Пусть:

$$\angle 1 + \angle 2 = 2x, \angle 1 = \angle 2 = x;$$

$$\angle 3 = \angle 4 = 2y, \angle 3 + \angle 4 = 2y;$$

2.  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$  т.к.  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \angle LFP$  - развернутый (по рисунку).

Значит:

$$2x + 2y = 180^\circ;$$

$$x + y = 90^\circ;$$

$\angle EFL = \angle 2 + \angle 3 = x + y = 90^\circ$ , отсюда следует  $\angle EFL = 90^\circ$ ,  $EF \perp LP$ , что и требовалось доказать.

3.  $\angle MFK = \angle 2 + \angle 4 = x + y = 90^\circ$ , отсюда следует  $\angle MFK = 90^\circ$ ,  $MK \perp KF$ , что и требовалось доказать.

**Задача 11.** Углы  $LFE$  и  $EFP$  – прямые. Докажите, что точки  $L, F, P$  лежат на одной прямой.

Доказательство:

$\angle EFL$  и  $\angle EFP$  проходят через общую точку  $F$ . По теореме через любую точку плоскости, проходит лишь одна прямая, которая перпендикулярна данной:

$LF \perp EF$  и  $PF \perp EF$  (по условию), отсюда следует  $LF$  и  $PF$  - одна прямая.

Следует, что  $L, P, F$  принадлежат  $LP$ , что и требовалось доказать.

**Задача 12.** Сумма двух вертикальных углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна  $180^\circ$ . Что можно сказать об этих прямых?

Решение:



Так как вертикальные углы равны, то каждый угол будет равен  $90^\circ$ , отсюда следует, что прямые перпендикулярны.

**Задача 13.** На рисунке 10 угол  $DOK$  составляет  $\frac{1}{3}$  угла  $KOC$ ,  $OK$  — биссектриса угла  $AOD$ . Найдите угол  $BOD$ . Докажите, что  $AB$  перпендикулярна  $CD$ .

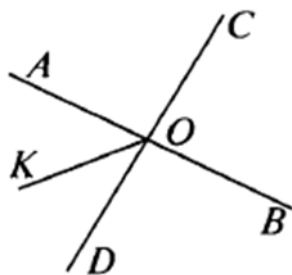


Рисунок 10. Чертеж к задаче 13

Доказательство:

1)  $\angle DOK$  и  $\angle KOC$  — смежные (по рисунку 10);

$\angle DOK = 180^\circ - \angle KOC$ ,  $\angle DOK = \frac{1}{3}\angle KOC$  отсюда следует, что

$$\frac{1}{3}\angle KOC = 180^\circ - \angle KOC;$$

$$\frac{4}{3}\angle KOC = 180^\circ$$

$$\angle KOC = \frac{180^\circ \cdot 3}{4} = 135^\circ;$$

$$\angle DOK = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ;$$

2)  $\angle DOB$  и  $\angle DOA$  — смежные;

$$\begin{aligned} \angle BOD &= 180^\circ - \angle DOA = 180^\circ - 2\angle DOK \text{ (так как } OK \text{ - биссектриса)} \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ; \end{aligned}$$

3)  $\angle AOD = 2\angle DOK = 90^\circ$ ,  $\angle BOD = 90^\circ$ ;

$\angle AOC$  и  $\angle AOD$  — смежные, следует, что  $\angle AOC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ;

$\angle COB$  и  $\angle DOB$  — смежные, следует, что  $\angle COB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ;

значит,  $AB \perp CD$ , что и требовалось доказать.

«Перпендикулярные прямые» является одной из основных и базовых тем в школьном курсе геометрии. В последующих темах она используется

при изучении таких понятий как: высота треугольника, построение перпендикулярных прямых с помощью циркуля и линейки, высоты четырехугольников, касательная к окружности.

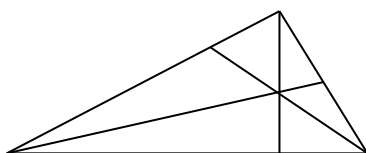
Рассмотрим несколько простейших задач, с использованием данных понятий из учебника Л.С. Атанасяна.

**Задача 14.** «Начертите  $\triangle ABC$  с тремя острыми углами и  $\triangle MNP$ , у которого  $\angle M$  тупой. С помощью чертежного угольника проведите высоты каждого треугольника» [2, С. 36].

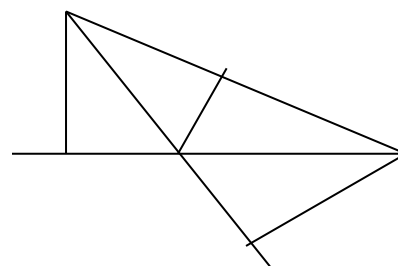
Решение (рис. 11):

а)  $BM, AN, CK$  – высоты;

б)  $BM, AN, CK$  – высоты.



а)



б)

Рисунок 11. Построение высот треугольников

**Задача 15.** «Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный» [2, С. 36].

Решение (рис. 12):

$BM$  - медиана и высота.

$AM = CM, BM$  – общая,  $\angle AMB = \angle CMB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AMB = \triangle CMB$  (по двум сторонам и углу между ними)  $\Rightarrow AB = BC$ .

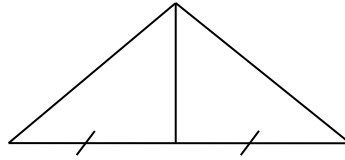


Рисунок 12. Треугольник

**Задача 16.** «Дана прямая  $a$  и точка  $M$ , не лежащая на ней. Постройте прямую, проходящую через точку  $M$  и перпендикулярную к прямой  $a$ .

Решение:

Построим окружность с центром в данной точке  $M$ , пересекающую данную прямую  $a$  в двух точках, которые обозначим буквами  $A$  и  $B$  (рис. 13). Затем построим две окружности с центрами  $A$  и  $B$ , проходящие через точку  $M$ . Эти окружности пересекаются в точке  $M$  и еще в одной точке, которую обозначим буквой  $N$ . Проведем прямую  $MN$  и докажем, что эта прямая - искомая, то есть она  $\perp$  к прямой  $a$ .

$\triangle AMN$  и  $\triangle BMN$  равны по трем сторонам и поэтому  $\angle 1 = \angle 2$ .  $\Rightarrow$  отрезок  $MC$  ( $C$  — точка пересечения прямых  $a$  и  $MN$ ) является биссектрисой равнобедренного  $\triangle AMB$ , а значит, и высотой.

Таким образом,  $MN \perp AB$ , то есть  $MN \perp a$ » [2, С. 47].

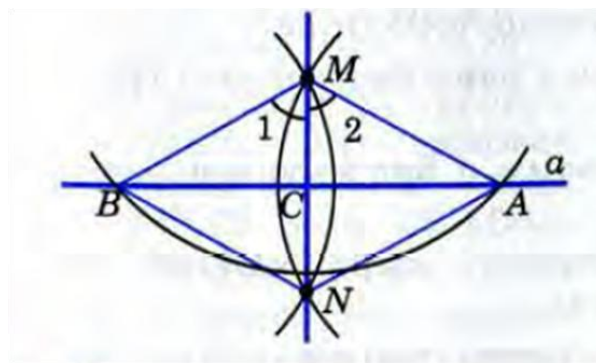


Рисунок 13. Построение перпендикулярных прямых с помощью циркуля и линейки

**Задача 17.** «Докажите, что параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ делит его угол пополам» [2, С. 112].

Решение (рис. 14):

а) так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $AO = OC$  и  $BO = OD$ , и учитывая, что диагонали перпендикулярны, то  $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOA$  (по двум катетам). Следовательно  $AB = BC = CD = DA$ , то есть  $ABCD$  — ромб;

б) если диагональ  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  является биссектрисой его  $\angle A$ , то в  $\triangle ABD$   $AO$  — медиана и биссектриса, и значит  $\triangle ABD$  — равнобедренный, следовательно  $AB = AD$ , а так как  $AD = BC$  и  $AB = DC$ , то все стороны параллелограмма равны, то есть  $ABCD$  — ромб.

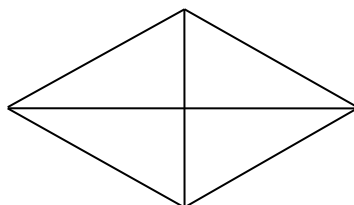


Рисунок 14. Параллелограмм

**Задача 18.** «Является ли четырехугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину» [2, С. 112]?

а) нет, не является (рис. 15, а));

б) нет, не является (рис. 15, б));

в)  $ABCD$  — параллелограмм ( $2^\circ$ , пункт 43 учебника),  $AC = BD \Rightarrow ABCD$  — прямоугольник (пункт 47 учебника),  $AC \perp BD \Rightarrow ABCD$  — ромб (задача 17, а))  $\Rightarrow AB = BC = CD = DA$ . Следовательно,  $ABCD$  — квадрат (рис. 15, в)).

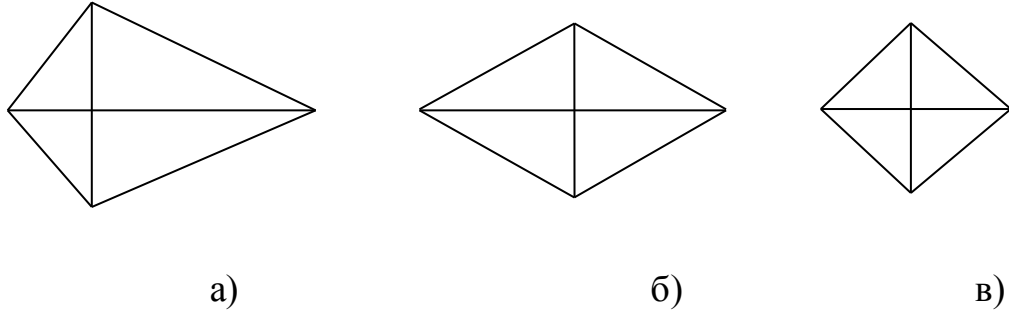


Рисунок 15. Четырехугольники

**Задача 19.** «Дана окружность с центром  $O$  радиуса 4,5 см и точка  $A$ . Через точку  $A$  проведены две касательные к окружности. Найдите угол между ними, если  $OA = 9$  см» [2, С. 166].

Решение (рис. 16):

$\triangle AOB$  и  $\triangle AOC$  – прямоугольные ( $\angle B$  и  $\angle C$  прямые по условию). Гипотенуза  $OA = 9$  см в два раза больше катетов  $OB = OC = 4,5$  см. Следовательно,  $\angle OAB = \angle OAC = 30^\circ$ . Значит,  $\angle BAC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ .

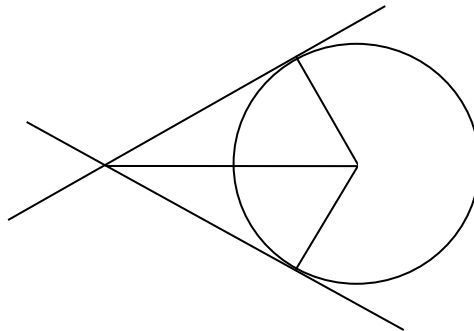


Рисунок 16. Окружность

Проведя анализ задачного материала, можно сделать вывод, что задач по теме «Перпендикулярные прямые» в школьных учебниках геометрии уделяется недостаточно времени и их не так много. Так же все задачи у авторов схожи между собой по содержанию.

## §7. Методические рекомендации по обучению теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы

Из рассмотренных ранее учебников геометрии 7-9 классов таких авторов, как А.Д. Александров, Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, А.В. Погорелов, И.Ф. Шарыгин и А.П. Киселева, за основу в работе был взят учебник Л.С. Атанасяна.

Л.С. Атанасян в курсе геометрии 7 класса выделяет параграф «Перпендикулярные прямые», на его изучение отводит 2 часа. Стоит отметить, что сам параграф поделен на отдельные пункты, один из которых раскрывает данную тему [2, С.22].

А. Л. Вернер в методических рекомендациях отмечает, что данный параграф является одним из традиционных и фундаментальных в курсе геометрии [9, С.24].

После изучения пункта «Смежные и вертикальные углы», далее Л.С. Атанасян предлагает ввести *понятие «Перпендикулярные прямые»* с помощью заранее подготовленного плаката (чертежа на доске) по рисунку 42 (рис. 17) учебника [3, С. 20].

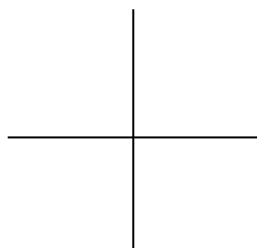
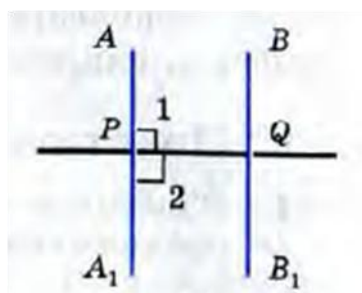


Рисунок 17. Чертеж двух  $\perp$  прямых

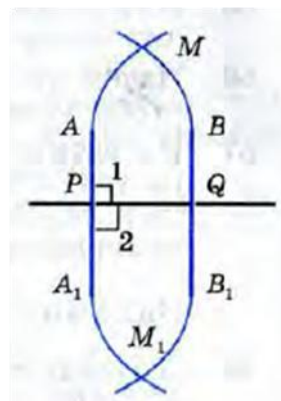
Автор рекомендует, «что лучше, когда ученики самостоятельно обосновывают, используя свойства вертикальных и смежных углов, обосновали, что если при пересечении двух прямых, один из образовавшихся углов прямой, то остальные углы также прямые. Для закрепления понятия на уроке ре-

комендуется выполнить практическое задание 57» [3, С. 20] (Данное задание рассмотрено в §6., Задача 1).

Л.С. Атанасян уточняет: «разумно, чтобы учитель сам привел доказательство утверждения *две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются*» [2, С. 23]. Т.М. Мищенко отмечает, что в основе доказательства лежит идея построения, т.е. доказательство – конструктивно [16, С. 35]. Поэтому, в процессе рассуждения предлагается использовать рисунок 43 (б, в) (рис. 18) учебника [2, С. 23], изображенный на картоне, и на прикрепленной поверх картона кальке, которую можно перегнуть по прямой  $PQ$ , так что лучи  $PA$  и  $QB$  наложатся на лучи  $PA_1$  и  $QB_1$ .



б)



в)

Рисунок 18. Чертежи б), в) для доказательства утверждения

Автор поясняет, что в доказательстве данного утверждения используется *метод рассуждения от противного*, однако говорить об этом методе на уроке и заострять на нем внимание учащихся пока несвоевременно.

Далее в методических рекомендациях выделяется, что для более сильных учеников можно задать вопрос: «могут ли прямые  $AA_1$  и  $BB_1$ , перпендикулярные к данной прямой, пересечься в некоторой точке этой прямой (рис. 19)» [3, С. 20]?

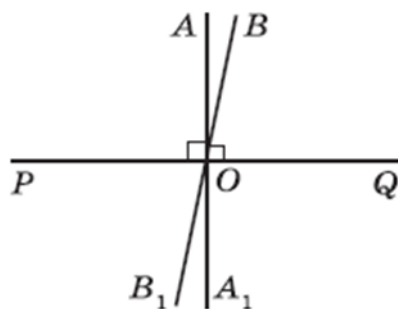


Рисунок 19. Чертеж к вопросу

Затем полезно решить устно задачу 70 (данная задача приведена в §6, Задача 2.).

Завершить изучение темы предлагается беседой о построении прямых углов на местности (п.13 учебника) [2, С. 23].

Следующее автор рекомендует в качестве *домашнего задания*:

Во-первых, еще раз прочитать пункты 11-13.

Во-вторых, вопросы для повторения к Главе 1:

19. «Какие прямые называются перпендикулярными» [2, С. 26]?

20. «Объясните, почему две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются» [2, С. 26].

21. «Какие приборы применяют для построения прямых углов на местности» [2, С. 26]?

Л.С. Атанасян выделяет следующее назначение второго урока - повторить пройденный материал. При проведении урока используются дополнительные задачи к главе. По теме перпендикулярные прямые, решаются только задачи 85, 86, и они предназначены для индивидуальной работы сильных учеников (данные задачи рассмотрены в §6, Задача 3 и Задача 4).

Так же в рекомендациях приводятся карточки для устного опроса учащихся. Теме «Перпендикулярные прямые» отводится следующий вариант:

#### «Вариант 5

1. Какие прямые называются перпендикулярными? Каким свойством обладают две прямые, перпендикулярные к третьей?



2. Начертите прямую  $a$  и отметьте точку  $M$ , не лежащую на ней. С помощью чертежного угольника проведите через точку  $M$  прямую, перпендикулярную к прямой  $a$ .

3. Начертите тупой угол  $ABC$  и отметьте точку  $D$  вне его. С помощью чертежного угольника через точку  $D$  проведите прямые, перпендикулярные к прямым  $AB$  и  $BC$ » [3, С. 21].

В предложенной итоговой контрольной работе по Главе 1 в методических рекомендациях Л.С. Атанасяна, задач по данной теме не представлено, как уточняет автор в связи с простотой темы.

Н.Ф. Гаврилова в поурочных разработках к учебнику Л.С. Атанасяна рекомендует, «при изучение нового материала, основываться на знаниях учащихся, пройденных в курсе математики 6 класса и предлагает дать ученикам следующие упражнения» [11, С. 41]:

«- Какие прямые называются перпендикулярными? (Две прямые называются перпендикулярными, если при пересечении они образуют четыре прямых угла.)

- Запишите, используя математические символы, «прямая  $AB$  перпендикулярна прямой  $CD$ ».  $AB \perp CD$ .  $\angle AOC = \angle COB = \angle BOD = \angle AOD = 90^\circ$  (рис. 20).

- Пересекаются ли две прямые, перпендикулярные третьей? (Нет.)» [11, С. 41]. (Н.Ф. Гаврилова уточняет, что учащиеся сами могут вспомнить, что такие прямые параллельны.)

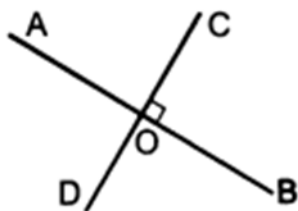


Рисунок 20. Чертеж к упражнению

Далее автор предлагает доказать *свойство*, «что две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются (пункт 12 учебника), уточняя, что свойство лучше доказать учителю» [11, С. 41].

Пункт 13 «Построение прямых углов на местности» рекомендует прочитать дома.

Для закрепления изученного материала Н.Ф. Гаврилова, так же как и Л.С. Атанасян предлагает «выполнить практическое задание 57 и решить задачу 70, и так же при наличии свободного времени решить следующие задачи» [11, С.42]:

**Задача 20.** «Два тупых угла имеют общую сторону, а две другие стороны взаимно перпендикулярны. Найдите величину тупого угла, если известно, что тупые углы равны» [11, С. 42].

Указание (рис. 21):

$$\angle AOB = \angle AOC. BO \perp OC, \text{ значит } \angle BOC = 90^\circ.$$

$$2 \cdot \angle AOB = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ, \angle AOB = 135^\circ.$$

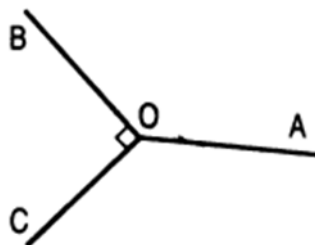


Рисунок 21. Чертеж к задаче 20

**Задача 21.** «Из вершины развернутого угла проведены два луча, которые делят его на три равные части. Докажем, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла» [11, С. 42].

Решение (рис. 22):

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 60^\circ$ .  $OK$  – биссектриса  $\angle BOC$ , тогда  $\angle COK = \angle BOK = 30^\circ$ , следовательно,  $\angle DOK = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ ,  $\angle AOK = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ , т.е.  $OK \perp OA, OK \perp OD$ .

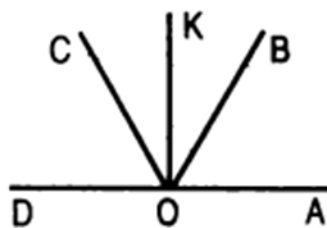


Рисунок 22. Чертеж к задаче 21

**Задача 22.** Углы  $AOB$  и  $BOC$  смежные,  $OM$  - биссектриса  $\angle AOB$ , луч  $ON$  принадлежит внутренней области угла  $BOC$  и перпендикулярен  $OM$ . Является ли  $ON$  биссектрисой угла  $BOC$ ? Почему?

Решение (рис. 23):

$\angle AOB$  и  $\angle BOC$  смежные, значит  $\angle AOB = 180^\circ - \angle BOC$ , а так как  $OM$  - биссектриса  $\angle AOB$ , то  $\angle BOM = \angle MOA = \frac{1}{2} 180^\circ - \angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BOC$ . Так как  $ON \perp OM$ , то  $\angle MON = 90^\circ$ , а  $\angle BOM = 90^\circ - \angle BON$ . Получили, что  $\angle BOM = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BOC = 90^\circ - \angle BON$ , откуда следует  $\frac{1}{2} \angle BOC = \angle BON$ , т.е.  $ON$  является биссектрисой  $\angle BOC$ .

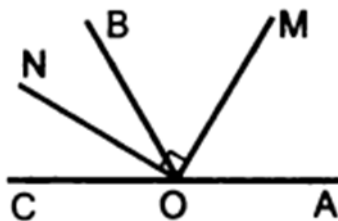


Рисунок 23. Чертеж к задаче 22

В домашнем задании Н.Ф. Гаврилова рекомендует к прочтению пунктов 12-13 и задач из учебника, что и Л.С. Атанасян и Т.М. Мищенко, но так же добавляет задачи 48 и 49 из рабочей тетради к учебнику.

Задача 48 [11, С. 43]. Прямые  $KM$  и  $BC$  пересекаются в точке  $O$ ,  $\angle COM = 89^\circ$ . Перпендикулярны ли прямые  $KM$  и  $BC$ ? Объясните ответ.

Решение:

«Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными, если они образуют четыре прямых угла» [2, С. 22]. По условию задачи  $\angle COM = 89^\circ$ , то есть он не прямой, поэтому прямые  $KM$  и  $BC$  не перпендикулярны.

Ответ: нет.

Задача 49 [11, С.44]. Прямая  $b$  пересекает стороны угла  $C$  в точках  $A$  и  $B$ . Могут ли обе прямые  $CA$  и  $CB$  быть перпендикулярными к прямой  $b$ ?

Решение:

Предположим, что  $CA \perp b$  и  $CB \perp b$ , тогда две прямые, перпендикулярные к  $b$ , пересекаются в точке  $C$ , что невозможно. Следовательно, обе прямые  $CA$  и  $CB$  быть перпендикулярными к прямой  $b$  не могут.

В.Ф. Бутузов [6, С. 12] предлагает ввести *понятия перпендикулярных прямых и перпендикуляра, проведенного из точки к прямой*, в соответствии с учебником, используя рисунки из параграфа или плакаты (чертежи на доске) по этим рисункам.

Далее автор предлагает объяснить учащимся *понятия теоремы и доказательства теоремы*. Отмечает, что в дальнейшем при изучении геометрии, им придется постоянно иметь дело с теоремами.

Так же при *доказательстве теоремы о существовании перпендикуляра к прямой* полезно указать, что в доказательстве используется известное ранее *свойство смежных углов*, и что в дальнейшем доказательства теорем будут опираться на известные ранее факты.

Проводя доказательство теоремы о единственности перпендикуляра к прямой, так же следует акцентировать внимание учеников на уже известных им фактах, которые используются в доказательстве, например, что через две точки проходит только одна прямая.

Доказательство теоремы проводится методом от противного. Автор так же, как и Л.С. Атанасян уточняет, что особо акцентировать внимание на этом не стоит, так как более детальное рассмотрение этого метода будет прово-

даться в дальнейшем. Но в качестве примера можно будет привести доказательство данной теоремы.

Таким образом, можно увидеть, что изучение данной темы, как говорят авторы, вполне традиционно. На первом уроке разбирается определение перпендикулярных прямых, а так же приведенные в параграфах свойства и теоремы. Доказательство свойств и теорем во всех случаях разбирается полностью учителем. Приводятся примеры решения задач. Так же вводится новый метод решения задач. На втором уроке проводится закрепление материала, пройденного на прошлом уроке, с помощью решения задач по теме.

#### Выводы по второй главе

1. Проведен анализ содержания теоретического и задачного материала темы «Перпендикулярные прямые» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов. В ходе анализа было выяснено, что данная тема изучается лишь в 7 классе, на ее изучение отводится 1 час. Она является основанием, для изучения последующих тем программы и решения задач. В результате проведенного анализа можно отметить, что все авторы связывают тему «Перпендикулярные прямые» с темой «Углы». Также А.Д. Алексанров и Л.С. Атанасян разделяют понятие перпендикулярных прямых и понятие перпендикуляра в различных параграфах, другие же, не производят разделения, объединяя понятия в одном параграфе. Задачного материала не так много, но он полностью раскрывает тему.

2. Изучены методические рекомендации по теме «Перпендикулярные прямые» учебников 7 класса. Построение урока происходит в классической манере. Установлено, что начинать урок следует с введения новых понятий по теме, и закреплять тему решением задач. Особое внимание, уделять свойствам, которые используются при решении задач.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. По-разному вводится Логико-математического анализа содержания темы школьного курса геометрии на примере темы «Перпендикулярные прямые» в методической литературе на примере Е.И. Лященко и Н.Л. Стефнова. Произведен сравнительный анализ взглядов и подход авторов к определению логико-математического анализа.

2. Раскрыты цели обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы. Изучены государственные стандарты основного общего образования, методические пособия. Выявлено, что тема способствует развитию мыслительной деятельности учеников, интереса к изучению темы и желание приобретения знаний и умений. В ходе изучения теме у учеников развивается воображение, концентрация, логическое мышление, самостоятельность получения знаний, понимание смысла поставленной задачи, развитие инициативы, находчивости, активности.

3. Определены основные требования к знаниям и умениям обучающихся по теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы. После обучения данной темы ученики должны: изображать, обозначать и находить на чертежах и рисунках перпендикулярные прямые, формулировать определение перпендикулярных прямых, формулировать и доказывать теоремы, решать задачи с применением свойств перпендикулярных прямых.

4. Рассмотрены формы, методы и средства обучения теме «Перпендикулярные прямые» в курсе геометрии основной школы. Выделены две формы обучения – фронтальная и индивидуальная. Установлено, что применение различных методов обучения способствует концентрации внимания обучающихся и развитию их познавательной активности во время урока; выбор методов будет зависеть от: ограничения по времени, характера темы и понима-

ния учениками данного предмета. Наглядные средства обучения улучшают восприятие и понимание материала по данной теме.

5. Проведен анализ содержания теоретического и задачного материала темы «Перпендикулярные прямые» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов. В ходе анализа было выяснено, что данная тема изучается лишь в 7 классе, на ее изучение отводится 1 час. Она является основанием, для изучения последующих тем программы и решения задач. В результате проведенного анализа можно отметить, что все авторы связывают тему «Перпендикулярные прямые» с темой «Углы». Также А.Д. Алексанров и Л.С. Атанасян разделяют понятие перпендикулярных прямых и понятие перпендикуляра в различных параграфах, другие же, не производят деления, объединяя понятия в одном параграфе. Задачного материала не так много, но он полностью раскрывает тему.

6. Изучены методические рекомендации по теме «Перпендикулярные прямые» учебников 7 класса. Построение урока происходит в классической манере. Установлено, что начинать урок следует с введения новых понятий по теме, и закреплять тему решением задач. Особое внимание, уделять свойствам, которые используются при решении задач.

Подводя итоги исследовательской работы можно сказать, что поставленные задачи достигнуты.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.Д. Геометрия. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Д. Александров и др. – М.: Просвещение, 2013. – 176 с.
2. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 383 с.
3. Атанасян, Л.С. Геометрия. Методические рекомендации. 7 класс. [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др. – М.: Просвещение, 2015 – 95 с.
4. Бурмистрова, Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7-9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразоват. учреждений / Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2014. – 95 с.
5. Бутузов, В.Ф. Геометрия. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовниченко. – М.: Просвещение, 2010. – 127
6. Бутузов, В.Ф. Геометрия. Поурочные разработки. 7 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 112 с.
7. Буцко, Е.В. Геометрия: 7 класс : методическое пособие / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Вентана-Граф, 2016. – 128 с.
8. Великих, А.С. Обучение учащихся основной школы необходим и достаточным условиям на уроках планиметрии [Электронный ресурс] / А.С. Великих // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. – 2016. – Т.2. № 1. – С. 319-322. – Режим доступа: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_26737390\\_45241067.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_26737390_45241067.pdf). – Последнее обновление 10.05.2018.



9. Вернер, А.Л. Геометрия. Методические рекомендации. 7 класс [Текст]: учеб. Пособие для общеобразоват. организаций / А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 132 с.
10. Вертикова, Т.А. Урок геометрии по теме «Перпендикулярные прямые». 7 класс [Электронный ресурс] / Т.А. Вертикова // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2018. – Режим доступа: <http://открытыйурок.рф/статьи/522355/> – Последнее обновление 17.04.2018.
11. Гаврилова, Н.Ф. Универсальные поурочные разработки по геометрии: 7 класс [Текст] / Н.Ф. Гаврилова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ВАКО, 2010. – 304 с.
12. Киселев А. П. Геометрия. Ч. 1 : Планиметрия : учебник для 6—9 кл. семилет. и сред. школы / под ред. и с доп. проф. Н. А. Глаголева. — 21-е изд. — М.: Учпедгиз, 1962. — 184 с.
13. Кожевникова, Л.Ф. План-конспект урока по теме «Перпендикулярные прямые». 7 класс [Электронный ресурс] / Л.Ф. Кожевникова // Социальная сеть работников образования «Наша сеть» – Режим доступа: <https://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/2016/04/20/urok-po-teme-perpendikulyarnye-pryamye-v-7-klasse>. – Последнее обновление 16.04.2018.
14. Лященко, Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математике [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.
15. Мишин В. И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. Пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. Спец. / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. - 416 с.
16. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 7 класс [Текст]: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2016.– 158, [2] с.

17. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 7 класс [Текст]: к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2014.– 206 [2] с.
18. Погорелов, А. В. Геометрия. 7–9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.
19. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2017/03/primernaja-osnovnaja-obrazovatel'naja-programma-osnovogo-obshchego-obrazovanija.pdf> . – Последнее обновление 20.04.2018.
20. Смирнова, И.М. Сайт учебно-методических комплексов по геометрии для 5-11 классов [Электронный ресурс] / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов – Режим доступа: <http://www.geometry2006.narod.ru/>. – Последнее обновление 17.04.2018.
21. Стефанова, Н. Л. Методика и технология обучения математике [Текст]: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
22. Суховиенко Е. А. Теория и методика обучения математике: общая методика / Е. А. Суховиенко, З. П. Самигуллина, С. А. Севостьянова, Е. Н. Эрентраут. – Челябинск: Изд-во «Образование», 2010. – 65 с.
23. Темербекова, А.А. Методика обучения математике [Текст]: учебное пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 512 с.
24. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от

17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://минобрнауки.рф/документы/938>. – Последнее обновление 09.04.2018.

25. Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования [Электронный ресурс]. - Режим доступа: [фпу.рф/upload/Приложение\\_к\\_Приказу\\_№253\\_от\\_31\\_марта\\_2014.pdf](http://фпу.рф/upload/Приложение_к_Приказу_№253_от_31_марта_2014.pdf) - Последнее обновление 10.04.2018.

26. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 462 с.

27. Alexander, D. Elementary geometry for college students. 5th ed. / Daniel C. Alexander, GERALYN M. KOEBERLEIN. – Belmont: Brooks/Cole, Cengage learning, 2011. – 605 p.

28. Chiteú C., Trifu S. Organizational forms in didactic activity [Text] / C. Chiteú, S. Trifu // Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2014. – PP. 299-304.

29. David, A. Brannan, Matthew, F. Esplen, Jeremy, J. Gray Geometry: second edition / A. Brannan David, F. Esplen Matthew, J. Gray Jeremy. – New York: Cambridge university Press, 2012. – 587pp.

30. Lang, S. Geometry. 2nd ed. / Serge Lang, Gene Murrow. - New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1988. - 391 p.

31. Libeskind S. Euclidean and Transformational Geometry: A Deductive Inquiry. – Jones & Bartlett Publishers, 2007. – 371 p.