МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ТЕМЕ «НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	О.А. Фомичева (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)
Руководитель	Н.С. Симонова (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)
Консультант	Е.Ю. Аношина (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Известно, что задачи, в частности задачи повышенной трудности, играют большую роль в обучении, особенно математике, так как именно задачи, процессы их решения используются для глубокого усвоения теоретического материала и выработки основных умений и навыков, являются основным средством развития математического мышления учащихся.

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей организации подготовки обучающихся к решению задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы. Ключевым вопросом в данной работе является отыскание наиболее рационального метода обучения учащихся решению задач повышенной трудности и разработка методических рекомендаций по их использованию.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I посвящена рассмотрению функций задач в обучении математики. Раскрыты основные цели и требования к математической подготовке. Определены основные методы и приемы решения задач повышенной трудности и проведен анализ основных типов задач повышенной трудности.

В *главе II* представлены методические рекомендации по использованию задач повышенной трудности в курсе математики 5-6 классов и в курсе алгебры 7-9 классов. Выполнен анализ задач ОГЭ по теме исследования. Составлена система задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа» для обучающихся 5-6 классов и 7-9 классов.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты.

Список литературы содержит 49 наименований.

Объем работы составляет 60 страниц.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Teaching methods for advanced problem solving on "Natural and whole numbers" topic for a course on mathematics of the intermediate school".

It is known that the problem, particularly the advanced one, plays an important role in math teaching. The problems are the main means of development of mathematical thinking of students, and the problem-solving processes are used for deep assimilation of theoretical material and for the development of basic skills.

The aim of the bachelor's thesis is to identify the methodological features for the organization of students' training to solve advanced problems on "Natural and whole numbers" topic for a course on mathematics of the intermediate school.

The bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a list of 49 references, including 5 foreign sources, and appendixes.

The first part of the bachelor's thesis is devoted to the study of problems' functions in teaching of mathematics. The main goals and requirements for mathematical training are revealed. The basic methods and techniques for advanced problem solving are defined, and the main types of advanced problems are analyzed.

The second part presents the methodological recommendations for the use of advanced problems in a course on mathematics for 5th and 6th forms and in a course on algebra in forms 7-9. The problems of OGE (basic state exam) on the research topic were analyzed. The set of advanced problems on "Natural and whole numbers" topic for students in forms 5-6 and 7-9 was developed.

As the result of conducted research, the bachelor's thesis presents the most rational method of teaching students to solve advanced problems and develops recommendations for the use of these methods. Also, it develops a set of advanced problems on "Natural and whole numbers" topic for a course on mathematics of the intermediate school.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Обучение математике является важнейшей составляющей основного общего образования и призвано развивать логическое мышление и математическую интуицию учащихся, обеспечить овладение учащимися умениями в решении различных практических и межпредметных задач.

Как выделяет Н.Ю. Потапова [30, С. 43] основной целью учебного курса является обучение решению нестандартных задач по математике. Все, что нас окружает – это скрытые примеры и задачи.

Состояние математической подготовки учащихся характеризуется в первую очередь умением решать задачи. С другой стороны, задачи – это основное средство развития математического мышления учащихся. Не случайно в учебниках по математике нестандартным задачам отводится значительное место.

Задачи повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» встречаются во всех учебниках математики, а также их можно увидеть и в школьных олимпиадах по математике.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей организации подготовки обучающихся к решению задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методика организации подготовки обучающихся к решению задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности организации подготовки обучающихся к решению задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть функции задач в обучении математике.

2. Раскрыть основные цели и требования к математической подготовке в курсе математики 5-9 классов по теме «Натуральные и целые числа».

3. Определить основные методы и приемы решения задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-9 классов.

4. Провести анализ основных типов задач повышенной трудности в курсе математики 5-9 классов.

5. Разработать методические рекомендации по использованию задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы.

6. Выполнить анализ ОГЭ по теме исследования.

7. Составить систему задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-6 классов, в курсе алгебры 7-9 классов.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической и методической литературы; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики; обобщение и систематизация материала.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся решению задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы; определено содержание системы задач.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены системы задач по обучению учащихся задачам повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по организации обучения решению задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы.

2. Системы задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и Приложений.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения учащихся задачам повышенной трудности в курсе математики и алгебры в 5-9 классах. Изучены функции задач в обучении математике. Раскрыты основные цели и требования к математической подготовке в курсе математики и алгебры в 5-9 классах. Выявлены основные методы и приемы решения задач повышенной трудности по теме исследования. Выполнен анализ основных типов задач повышенной трудности в 5-9 классах.

В Главе II бакалаврской работы представлены методические рекомендации по использованию задач повышенной трудности в курсе математики 5-6 классов и в курсе алгебры 7-9 классов. Проведен анализ задач ОГЭ по теме исследования. Составлена система задач повышенной трудности по теме исследования для обучающихся 5-6 классов и 7-9 классов.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 49 наименования.

ГЛАВА I. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

§1. Функции задач в обучении математике

В обучении математике принято выделять, отмечает З.П. Матушкина [17, С.12], три основные функции задачи: познавательную, развивающую и дидактическую. Все задачи школьных учебников, отмечает она, подчиняются предложенной классификации.

Е.И. Куимова и др. [12, С.280-281] рассматривают обучающие, развивающие, воспитывающие и контролирующие функции задач, которые более подробно рассмотрим в этом параграфе.

Под *обучающими функциями задач*, отмечают авторы, понимают функции, которые: «направлены на формирование системы математических знаний, умений, навыков у обучающихся на различных этапах ее усвоения».

Развивающие функции задач – это «функции, которые направлены на развитие мышления учащихся, на формирование качеств, присущих научному мышлению, на овладение приемами эффективной умственной деятельности». В *развивающих функциях* можно выделить важнейшие цели, выделенные авторами: «умение доказать или опровергнуть то или иное математическое положение дедуктивным путем; умение планировать поиск решения задачи; умение формулировать определения математических понятий; умение быстро и правильно проводить вычисления с привлечением простейших вычислительных».

Под воспитывающими функциями задач понимают «функции, которые направлены на формирование нравственных качеств учащихся».

Е.И. Титова и др. [42, С. 697] формулируют *специальные контролирующие функции* задач: «на основе им соответствующих *специальных обучающих, развивающих и воспитывающих* функций».

Подведем итоги, мы рассмотрели функции задач в обучении математике (см. Рис. 1):

Рис. 1. Функции задач в обучении математике

В практике обучения математике воспитывающие функции задач редко выступают в качестве ведущих (в отличие от функций, обучающих или контролирующих), отмечает Н.П. Кострикина [9, С.6].

§2. Цели изучения математики в основной школе и требования к математической подготовке учащихся 5-9 классов по теме «Натуральные и целые числа»

В организации учебно-воспитательного процесса важную роль играют задачи. Заметим, что в обучении математике они являются и средством, и целью обучения, а также математического развития школьников.

Ознакомившись с рабочими программами О.В. Муравиной для 5-9 [26, С. 4] классов, можно увидеть *основные цели изучения математики* в соответствии с Федеральным образовательным стандартом основного общего образования [43]: «осознание значения математики… в повседневной жизни человека; формирование представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математической науки; формирование представлений о математики как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления».

Зинаида Николаевна Субботкина [36, С. 1] – учитель математики, МБОУ СОШ № 23 из города Астрахань написала статью, в которой выделила глобальную цель деятельности при изучении математики: «добиваться понимания роли математики в развитии цивилизации».

Изучая программы для общеобразовательных школ, гимназий и лицеев, составленных Г.М. Кузнецовой и Н.Г. Миндюк [11, С. 7-8], видим цели такие, как: «… систематическое развитие понятия числа, выработка умений выполнять устно и письменно арифметические действия над числами, переводить практические задачи на язык математики, подготовка учащихся к изучению систематических курсов алгебры и геометрии». А в 7-9 классе авторы относят к целям изучения математики: «развитие вычислительных и формально-оперативных алгебраических умений до уровня, позволяющего уверенно использовать их при решении задач математики, усвоение аппарата уравнений и неравенств как основного средства математического моделирования прикладных задач, осуществление функциональной подготовки школьников».

И.Л. Соловейчик [34, С. 10] рассматривает цели изучения натурального числа: «основная цель – систематизация и развитие знаний учащихся о натуральных числах; овладение алгоритмами записи и чтения больших чисел; рассмотрение и изучение свойств делимости; формирование первоначальных навыков решения комбинаторных задач». Г.М. Кузнецова [11, С. 32] выделяет аналогичные цели и добавляет к ним сравнение и округление целых чисел, изображение на координатной прямой.

И, наконец, рассмотрим *цели изучения целых чисел,* которые выделяет И.Л. Соловейчик [35, С. 17] в пособии для учителя 6 класса «Я иду на урок математики»: «мотивировка введения положительных и отрицательных чисел и формирование умений выполнять действия с целыми числами».

Рассмотрим требования к математической подготовке учащихся 5-6 и 7-9 классов по теме «Натуральные и целые числа».

В 5 классе на главу под названием «Натуральные числа и нуль» выделяют всего 27 часов в базовом уровне, или 33 часа для классов с повышенным уровнем математической подготовки. Примерное тематическое планирование мы увидели в Рабочих программах по математики для 5-9 классов О.В. Муравиной [26, С. 20].

И.И. Зубарева и А.Г. Мордкович [5, С. 6] выделяют следующие *требования к математической подготовке учащихся 5 класса:* «**Учащиеся должны иметь представление:** о числе и десятичной системе счисления, о натуральных числах, обыкновенных и десятичных дробях; об основных изучаемых понятиях (число, фигура, уравнение) как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать реальные процессы и явления. **Учащиеся должны уметь:** выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику; выполнять арифметические действия с натуральными числами, обыкновенными и десятичными дробями».

В рабочих программах О.В. Муравиной [26, С. 36] данное понятие включено в главу под названием «Отрицательные числа». На данную главу в базовом уровне выделяют 32 часа. Для классов с повышенным уровнем подготовки – 38 часов.

В методической рекомендации Н.Б. Истоминой [8, С. 217] представлена таблица требований к математической подготовки выпускников 6 класса. Что позволяет увидеть и изучить требования по конкретным темам.

И.И. Зубарева и А.Г. Мордкович [5, С. 9] выделяют *требования к математической подготовке учащихся 6 класса:* «**Учащиеся должны иметь представление:** о числе и числовых системах от натуральных до рациональных чисел. **Учащиеся должны уметь** использовать символический язык алгебры: выполнять тождественные преобразования простейших буквенных выражений, применять приобретенные знания в ходе решения задач».

Г.М. Кузнецова и Н.Г. Миндюк [11, С. 14] рассматривают *требования к математической подготовке учащихся 7-9 классов:* **«Учащиеся должны уметь:** выполнять несложные преобразования выражений, применяя ограниченный набор формул, связанных со свойствами степеней; решать простейшие показательные уравнения и неравенства; иметь представление о графическом способе решения уравнений».

О.В. Муравина [26, С. 10] в свою очередь разделяет требования к результатам обучения и освоению содержания программы в трех результатах сформированности: личностных, метапредметных, предметных.

§3. Методы и приемы решения задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-9 классов

Известно, что человеку в жизни приходится решать разнообразные задачи, и даже те, которые прежде никогда не встречались. Как пишет Н.П. Кострикина [10, С. 5]: «Школа должна научить выпускника находить пути к решению проблем, а это значит – формировать у учащихся способность к самостоятельному, творческому мышлению».

Как выделяют M. Voskoglou [49, С. 600] и A. Терро [48, С. 302] у детей при изучении множества натуральных и целых чисел могут возникнуть недопонимания самого понятия множества. Поэтому можно предположить, что у учащиеся могут возникнуть трудности при решении задач повышенной трудности. Чтобы исключить это нужно ознакомить учащихся с различными приемами и методами решения задач.

Выделим и опишем методы решения задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа».

Н.П. Кострикина [9, С.11] считает, что: «Особое внимание следует обращать на решение **задач арифметических способом,** так как именно решение задач арифметическим способом способствует развитию независимости, оригинальности мышления, изобретательности».

Метод полной и неполной индукции. При решении задач учащиеся путём перебора получают ответ. Но Н.П. Кострикина поясняет, что «Следует добиться понимания того, что полученный вывод является обоснованным, так как **метод полной индукции** является научным».

Д. Пойя [28, С.94] считает, что индукция раскрывает закономерности и связи, скрытые за внешними явлениями наблюдаемого - «ее наиболее известные средства – обобщение, специализация и аналогия».

Т.Н. Миракова [18, С. 56, 69,] отмечает использование методов: перебора, проб и ошибок, малых изменений.

Метод перебора знаком всем с начальной школы. «Сущность этого приема заключается в проведении определенным образом организованного разбора и анализа всех (или некоторых специально выбранных) случаев, которые потенциально возможны в ситуации, описанной в задаче».

Метод «Проб и ошибок». Учащиеся пользуются данным методом, когда нет более конструктивных идей. Автор поясняет данный метод как перебор, ошибки, вновь возвращение к задаче, много неудачно выбранный идей и случайный успех, который позволяет понять решение задачи.

Метод малых изменений. Суть метода**:** «…это эвристика, предполагающая последовательное сведение заданного в условии задачи объекта к требуемому за счет построения цепочки моделей. Каждая из этих моделей получается в результате незначительной, т.е. сохраняющей основные качественные характеристики самого объекта».

Опровергающий пример. Уже из названия можно понять сущность данного приема. В методическом пособии Ф.А. Бартенев [1, С. 29] рассматривает задачи, решаемые данным приемом: «Чтобы опровергнуть утверждение, достаточно указать, что по крайней мере один из рассматриваемых объектов не обладает этим свойством».

Выделим и опишем приемы решения задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа».

Отметим приемы, которые советует использовать Т.Н. Миракова [18, С.15, 24, 36, 49, 64] при решении задач повышенной трудности: введение вспомогательной неизвестной, принцип Дирихле, инверсия, рассмотрение крайних случаев и прием получения следствий, перефразирование.

Введение вспомогательной неизвестной. Суть приема заключается в следующем: «Если в выражение, равенство или неравенство входят переменные или выражения с определенной областью значений, то можно заменить одну или несколько переменных (выражений) выражениями, имеющими ту же область значений».

Принцип Дирихле. «Это утверждение, согласно которому в любой совокупности из n множеств, содержащих в общей сложности более n элементов, есть хотя бы одно множество, содержащее не менее двух элементов».

Инверсия. Под инверсией понимается перестановка или расположение членов выражения в другом порядке, который нарушает заданный, прямой порядок для того, чтобы получить новое выражение, которое тождественно равно данному и более удобно для выполнения дальнейших преобразований.

Ознакомимся с особым *случаем приема* рассмотрения частных случаев.

Рассмотрение крайних случаев - «на основе изучения поведения исследуемого объекта в крайних или предельных случаях, исходя из наибольших и наименьших значений, выявить область поиска решения задачи».

Прием получения следствий. Сущность этого приема состоит в том, что «раскрытие содержания исходных данных дает возможность получить некоторые выводы. А из полученных результатов – новые выводы и т.д».

Перефразирование. Особенность данного приема состоит в переходе к задаче, которая является равносильной, чаще всего алгоритмической, с помощью перевода текста начальной задачи на другой язык.

Итак, в курсе математики 5-9 классов можно использовать следующие методы и приемы (см. таблицу 1):

Таблица 1

Методы и приемы решения задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-6 классов

Методы решения задач	***Приемы решения задач***
арифметический способ	*инверсия*
метод полной и неполной индукции	*рассмотрение крайних случаев*
метод перебора	*принцип Дирихле*
метод «Проб и ошибок»	*введение вспомогательной неизвестной*
метод малых изменений	*перефразирование*
опровергающий пример	*прием получения следствий*

§4. Основные типы задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-9 классов

Задачи повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-9 классов могут быть использованы по четырем основным важнейшим направлениям - четырем блокам, выделенных нами. По каждому направлению выделены типы задач, которые используются или могут использоваться на уроках при изучении данной темы.

Выделим 4 важнейших направления – четыре блока по 5 классу:

Блок 5.1. Арифметические действия с натуральными числами *(задачи на изучение десятичной системы счисления и таблицы разрядов и классов, задачи на изучение сложения и вычитания натуральных чисел, задачи на изучение умножения и деления натуральных чисел, задачи на изучение чтения, записи и нумерации натуральных чисел, задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля при: сложении, вычитании, умножении и делении натуральных чисел, задания на использование всех арифметических действий с натуральными числами, задачи на приложения методом перебора).*

М.В. Егупова [4, С.35] отмечает, что с помощью задач на приложения мы можем достигнуть как ближайших целей обучения математике, так и отдаленных, связанных с глубиной и качеством полученных математических знаний.

Блок 5.2. Деление с остатком *(задачи на определение делителей и кратных, задачи на использование свойств делимости произведения, суммы и разности чисел, задачи на использование признаков делимости, задачи, связанные с простыми или составными числами, задачи на нахождение НОД и НОК чисел).*

Блок 5.3. Координатный луч *(задачи на сравнение натуральных чисел, задачи на нахождение координат точек, задачи на изображение точек на координатном луче, задачи на расположение чисел на координатном луче).*

Блок 5.4. Решение уравнений *(задачи на решение уравнений, которые имеют один корень, задачи на решение уравнений, которые не имеют корней, задачи на решение уравнений, которые имеют более одного корня, задачи на решение уравнений с использованием свойств арифметических действий, задачи на составление уравнений по условию задачи, задачи на соответствие уравнения условию задачи).*

Выделим 4 важнейших направления – четыре блока по 6 классу:

Блок 6.1. Арифметические действия с целыми числами *(задачи на изучение сложения и вычитания целых чисел, задачи на изучение умножения и деления целых чисел, задачи на изучение записи и нумерации целых чисел, задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля при: сложении целых чисел; вычитании целых чисел; умножении целых чисел; делении целых чисел, задания на использование всех арифметических действий с целыми числами).*

Блок 6.2. Делимость чисел *(задачи на определение делителей и кратных, задачи на использование свойств делимости произведения, суммы и разности чисел, задачи на использование признаков делимости, задачи, связанные с простыми или составными числами, задачи на нахождение НОД и НОК чисел).*

Блок 6.3. Координатная прямая и координатная плоскость *(задачи на сравнение целых чисел, задачи на нахождение координат точек, задачи на расположение чисел на координатной прямой, задачи на нахождение модуля числа, координатная плоскость).*

Блок 6.4. Решение уравнений *(задачи на решение уравнений, которые имеют один корень, не имеют корней, имеют более одного корня, задачи на решение уравнений с использованием тождества сокращенного умножения, задачи на составление уравнений по условию задачи, задачи на соответствие уравнения условию задачи, задачи на решение уравнений путем группировки, задачи на решение уравнений путем разложения на множители).*

Содержание блоков 5-6 класса раскрыто ниже в таблицах 3-10.

Выделим 4 важнейших направления – четыре блока по 7 классу:

Блок 7.1. Арифметические действия с целыми числами *(задачи на изучение формул сокращенного умножения, задачи на изучение свойств степени с натуральным показателем, задачи на изучение одночленов, задачи на изучение многочленов).*

Блок 7.2. Делимость чисел *(задачи на использование кратности чисел, задачи, связанные с простыми или составными числами, задачи на деление одночленов, задачи, связанные с упрощением выражений, задачи на нахождение НОД и НОК чисел).*

Блок 7.3. Координатная прямая и координатная плоскость *(задачи на расположение точек на координатной плоскости, задачи на сравнение целых чисел, задачи на нахождение модуля числа, задачи на нахождение координат точек).*

Блок 7.4. Решение уравнений и систем уравнений *(задачи на решение уравнений с одной переменной, задачи на решение уравнений с двумя переменными, задачи на составление уравнений по условию задачи, задачи на решение систем уравнений, задачи на решение уравнений с параметром, задачи на определение линейной функции и ее графика).*

Выделим 4 важнейших направления – четыре блока по 8 классу:

Блок 8.1. Арифметические действия с целыми числами *(задачи на преобразование суммы и разности многочленов, задачи на изучение одночленов, задачи на изучение многочленов, задачи, связанные со всеми арифметическими действиями с целыми числами).*

Блок 8.2. Делимость чисел *(задачи на использование кратности чисел, задачи, связанные с простыми или составными числами, задачи на использование свойств степени с целым показателем, задачи, связанные с упрощением выражений, задачи на нахождение НОД и НОК чисел).*

Блок 8.3. Координатная прямая и координатная плоскость *(задачи на расположение точек на координатной плоскости, задачи на сравнение целых чисел, задачи на нахождение модуля числа, задачи на использование свойств числовых неравенств).*

Блок 8.4. Решение уравнений и систем уравнений *(задачи на решение уравнений с одной переменной, задачи на составление уравнений по условию задачи, задачи на решение систем уравнений с двумя переменными, задачи на использование теоремы Виета, задачи на решение уравнений с двумя переменными, задачи на решение уравнений с тремя переменными).*

Выделим 4 важнейших направления – четыре блока по 9 классу:

Блок 9.1. Арифметические действия с целыми числами *(задачи на преобразование суммы и разности целых чисел, задачи на изучение квадрата и куба чисел, задачи на изучение одночленов и многочленов, задачи, связанные со всеми арифметическими действиями с целыми числами).*

Блок 9.2. Делимость чисел *(задачи на использование кратности чисел, задачи, связанные с простыми или составными числами, задачи на использование свойств степени с целым показателем, задачи, связанные с упрощением выражений).*

Блок 9.3. Решение неравенств *(задачи на решение линейных неравенств, задачи на решение квадратных неравенств, задачи на изучение множеств и операций над ними, задачи на решение систем неравенств).*

Блок 9.4. Решение уравнений и систем уравнений *(задачи на решение уравнений с одной переменной и в общем виде, задачи на изучение систем уравнений методом подстановки и алгебраического сложения, задачи, связанные с системами уравнений как математическими моделями).*

Содержание блоков 7-9 класса раскрыто ниже в таблицах 11-22.

Выводы по первой главе

1. Выделены важнейшие направления, по которым изучается данная тема – 4 блока; типы задач (уровневые: базовый, продвинутый и высокий) повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-9 классов.

2. Рассмотрены функции задач в обучении математике: обучающие функции задач; развивающие функции задач; воспитывающие и контролирующие функции задач.

3. Раскрыты основные цели изучения математики в основной школе и требования к математической подготовке в курсе математики 5-9 классов по теме «Натуральные и целые числа».

4. Определены основные методы (арифметический, метод полной и неполной индукции, метод перебора, метод «Проб и ошибок», метод малых изменений, опровергающий пример) и приемы (инверсия, рассмотрение крайних случаев, принцип Дирихле, введение вспомогательной неизвестной, перефразирование и прием получения следствий) решения задач повышенной трудности по данной теме.

5. Проведен анализ основных типов задач повышенной трудности в курсе математики 5-9 классов. Анализ показал, что существуют различные типы задач повышенной трудности, также различный уровень задач (показатель сложности).

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ТЕМЕ «НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»

§5. Методические рекомендации по использованию задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы

Н.П. Кострикина [9, С.11] отмечает, что из задач легко увидеть те, которые способствуют закреплению навыков и умений в процессе обучения и те, которые являются нестандартными задачами и поясняет, что нет универсального метода для решения нестандартных задач. Объясняется это тем, что данные задачи в какой-то степени являются неповторимыми.

Что же такое нестандартная задача? Как пишет Л.М. Фридман [45, С.48]: «нестандартные задачи – это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения».

После изучения иностранных статей [46, 47, 50], в которых рассказывается о сложности понимания математики учащимися, был сделан вывод, что методические рекомендации должны быть как можно тщательно подобраны и изучены.

Опишем методические рекомендации **по использованию задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа»** в 5-6 классах.

С.Б. Суворова [40, С.43, 67] советует предлагает решать с учащимися задачи устно, работу нужно будет проводить с наводящими советами для того, чтобы дети не допускали ошибок. При отработке навыков вычисления автор, обращает внимание на различные случаи перехода из разряда в разряд данные задачи учащиеся смогут решить с помощью *арифметического метода*: «сложение чисел с переходом через десяток (315 + 426), через сотню

(664 + 274), через десяток и сотню (548 + 277); вычитание чисел с раздроблением десятка (375 – 158), сотни (462 – 181), десятка и сотни (622 – 333)». Для отработки навыков умножения предлагается рассмотреть упражнения на умножение многозначного числа на однозначное, трёхзначного на двухзначные. Также и с делением.

В *6 классе* при рассмотрении умножения большое внимание нужно уделить правилам знаков. Как выделяет С.Б. Суворова [41, С.122] учащиеся должны заметить, что: «произведение будет положительным или отрицательным в зависимости от того, чётное или нечётное число отрицательных множителей входит в его состав».

Для усвоения учащимися правил действий с целыми числами и проверки законов сложения М.К. Потапов [30, С.59] выделяет набор задач повышенной трудности, одна из задач:

«$(-10) + (-9) + (-8) + (-7) + \ldots + 7 + 8 + 9 + 10 =$?»

Решение: « $-10 + -9 + -8 + -7 + \ldots + 7 + 8 + 9 + 10 =$

$$= (-10 + 10) + (-9 + 9) + \ldots + (-1 + 1) + 0 = 0$$

(здесь имеется 10 пар противоположных чисел, дающих в сумме 0, и число 0)». Заметим, что в данном примере автор использует прием под название *инверсия*.

С.Б. Суворова [40, С.45] поясняет, что важно, чтобы учащиеся запомнили, что в натуральном ряду есть наименьшее число, но нет наибольшего. При выполнении заданий на сравнение необходимо, чтобы звучал соответствующий комментарий, например: «число 5270 больше, так как в натуральном ряду (или при счёте) оно появляется позже; в числе 5270 есть разряд тысяч, а число 987 начинается с разряда сотен; в числе 5270 больше цифр; число 5270 четырёхзначное, а число 987 трёхзначное». Автор отмечает, что в начале работы с координатной прямой учащиеся должны работать на готовом чертеже, в дальнейшем можно рассмотреть более сложные задания без готового чертежа. Желательно, чтобы у учащихся сформировалось умение выбирать единичный отрезок.

Из рекомендаций по обучению решений уравнений можно заметить следующие методические рекомендации, которые выделяет С.Б. Суворова [40, С.93]: «целесообразно организовать реальную деятельность по уравниванию величин, рассматриваемых в условии задачи. Так, если объяснение проводить на задаче, разобранной в учебнике, то нужно положить на стол две пачки тетрадей и затем сообщить учащимся условие задачи». В методическом комментарии для нахождения наименьшего общего кратного двух чисел С.Б. Суворова [40, С.112] предлагает следующий способ обучения: «выписывается ряд чисел, кратных большему числу; первое число в этом ряду, которое делится и на второе из данных чисел, будет их наименьшим общим кратным».

М.К. Потапов [30, С.93] для закрепления решения задач с помощью уравнений выделяет текстовые задачи.

Опишем методические рекомендации **по использованию задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа»** в 7-9 классах.

В 7 классе вводится понятие свойств степени с натуральным показателем. Как подчеркивает С.Б. Суворова [39, С.128] материал по теме должен разбираться с активным участием учащихся. Учащиеся в свою очередь должны владеть формулировками свойств, которые даны в виде правил, уметь их записывать и доказывать. Стоит также обратить внимание, что при умножении степеней ученики часто теряют показатель, равный 1.

При изучении темы «Одночлены и многочлены» следует сообщить учащимся, что: «в пункте вводятся новые названия некоторых видов алгебраических выражений». С.Б. Суворова [39, С.143] предлагает решить учащимся некоторые задания для закрепления материала: «1) Выполните возведение одночлена в степень: $(3a)^3$; $(-a)^3$; $(-a\ 3\ )^2$; $(-5x\ 2\ y)^2$. 2) Представить в виде одночлена стандартного вида:

$$a^3 \cdot (-3a)^2; -(-2a)^2; (-a^3)^2; -b(-2b)^3».$$

При изучении свойств многочленов М.К. Потапов [29, С.50] предлагает решить некоторые задачи на упрощение выражений. Чтобы закрепить знания, можно рассмотреть такие примеры: «Упростите многочлен: $xyx - 2x^2y + 2x - 3x$. ***Решение:*** $xyx - 2x^2y + 2x - 3x = x^2y - 2x^2y +$ $+ \ 2 - 3 \ x = \ 1 - \ 2 \ x^2y - x =$ $-x^2y - x$».

Н.П. Кострикина [9, С.36] на закрепление свойств натуральных чисел предлагает решить задачу:

«Докажите, что если $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$, то $x = y = z$».

М.К. Потапов [29, С.18] рассматривает и доказывает несколько правил делимости натуральных чисел. Так же предложены задачи на доказательство, к которым приложено доказательство. Рассмотрим некоторые задачи, которые предлагает использовать автор.

Задача 1. «Натуральное число n делится на натуральное число p $(p > 1)$. Докажите, что число $n + 1$ не делится на p. *Доказательство.* По условию задачи натуральное число n делится на натуральное число $p(p > 1)$, т. е. существует такое натуральное число k, что $n = p \times k$. Предположим, что натуральное число n + 1 тоже делится на p, т. е. существует такое натуральное число r, **что** $n + 1 = p \times r$. Тогда разность чисел $n + 1$ **и** n равна 1 и, кроме того, справедливо равенство $1 = p \times r - p \times k = p(r - k)$. Из этого равенства следует, что число 1 делится на число p, которое больше 1, что невозможно. Следовательно, предположение, что $n + 1$ делится на p, неверно, т. е. $n + 1$ не делится на p, что и требовалось доказать». Мы видим из решения, что автор использует *метод от противного.* Учащиеся должны понимать, какое противоречие получено из этого.

С.Б. Суворова [37, С.56] при изучении свойств степени с целым показателем *в 8 классе* подчеркивает, что ход урока нужно начинать с того, что вспомнить степени с натуральным показателем и проиллюстрировать их применение; отметить, что все свойства распространяются и на степень с целым показателем, показать на примерах их доказательства.

Н.П. Кострикина [9, С.166] выделяет задачи на использование свойств натуральных чисел и сведений из теории делимости.

Задача 2 (предложенная автором в качестве закрепления свойств делимости чисел): «существует ли такое двузначное число, которое при делении на сумму квадратов его цифр дает в частном 2 и в остатке 6, а при делении на произведение цифр дает в частном 4 и в остатке 6?».

Решение автор предлагает с помощью *метода опровергающего примера,* доказав, что данное число не существует: «Пусть $xy = 10x + y$ – искомое двузначное число, тогда из условия задачи имеем систему уравнений:

$$10x + y = \ x^2 + y^2 \ \times 2 + 6,$$
$$10x + y = xy \times 4 + 6,$$

$x^2 + y^2 \ \times 2 = 4xy,\quad x^2 + y^2 = 2xy,$ т.е. $(x - y)^2 = 0,$ откуда $x = y.$

Подставив значение $x = y$ в одно из уравнений системы, получим уравнение $4x^2 - 11x + 6 = 0,$ откуда $x = 2$ ($x = \frac{3}{4}$ не удовлетворяет условию задачи). Получили число $xy = 22,$ которое не удовлетворяет второму условию задачи».

Из методических рекомендаций С.Б. Суворовой [37, С.114-115] узнаем, что у учащихся могут возникнуть проблемы при изучении координатной прямой и плоскости, которые связаны с плохим усвоением материала 5-6 класса по данной теме и поясняет, что следует убедиться, что учащиеся понимают, что расстояние от некоторой точки координатной прямой А(а) до начала отсчета равно модулю а. При изучении неравенств выделяется три смысловых фрагмента. *Первый фрагмент* – это алгоритм решения неравенств, *во втором* идет речь про равносильные уравнения и неравенства, и *третий фрагмент* – исследование линейных уравнений и неравенств.

При изучении теоремы Виета С.Б. Суворова предлагает ввести данное понятие с помощью исследовательской работы, а результат исследования учащиеся должны сформулировать в словесной форме и записать буквенные равенства. Также автор отмечает, что следует обратить внимание на типичные ошибки — это то, что они забывают проверить, имеет ли уравнение корни и рассматривая не приведённое квадратное уравнение, применяют к нему формулы Виета, выражающие соотношение между корнями и коэффициентами приведённого квадратного уравнения.

В 9 классе решение уравнений рассматривается уже со степенью больше, чем два. С.Б. Суворова [38, С.90] поясняет, что более простые задачи нужно решать методом разложения на множители, а более сложные уже методом замены переменной.

После изучения методических рекомендаций можем сделать вывод, что для того, чтобы успешно решать задачи повышенной трудности по определенным темам нужно добиться усвоения учащимися базового материала. Затем можно решать задачи более сложнее, к примеру с большими числами или действиями. И, наконец, если дети справились с данными задачами, то можно пробовать вводить задачи повышенной трудности по теме.

§6. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

В **части 1** основного государственного экзамена по теме исследования встречаются следующие основные типы задач, которые были выделены нами в бакалаврской работе.

Тип 1. Задачи на изучение сложения и вычитания целых чисел

Задача 1 [27]. В таблице приведены размеры штрафов, за превышение максимальной разрешенной скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации, установленные на территории России с 1 сентября 2013 года. Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 103 км/ч на участке дороги с максимальной разрешенной скоростью 60 км/ч?

1) 100 рублей; 2) 300 рублей; 3) 1000 рублей; 4) 2500 рублей.

Таблица 2

Размеры штрафов установленные на территории России с 1 сентября 2013 года

Превышение скорости (в км/ч)	11-20	21-40	41-60	61 и более
Размер штрафа (в руб.)	100	300	1000	2500

Решение: 103-60=43 (км/ч). ***Ответ:*** 3).

Тип 2. Задачи на расположение чисел на координатной прямой

Задача 2 [27]. На координатной прямой отмечено число a. Какое из утверждений для этого числа является верным?

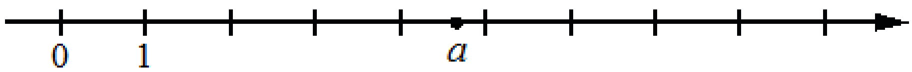


Рис. 2. Координатная прямая к задаче 2

1) $a-3>0$; 2) $6-a<0$; 3) $a-7>0$; 4) $4-a>0$.

Решение: оценим между какими натуральными числами находится число a. Число a находится между числами 4 и 5. Теперь проверим верность каждого равенства: 1) $a-3>0$, равенство верное; 2) $6-a<0$, неверное; 3) $a-7>0$, неверное; 4) 4) $4-a>0$, неверное. ***Ответ:*** 1).

Задача 3 [27]. На координатной прямой отмечены числа a и b.

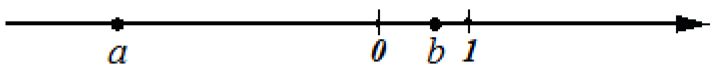


Рис.3. Координатная прямая к задаче 3

Какое из следующих чисел наибольшее? *В ответе укажите номер правильного варианта.* 1) $a+b$; 2) $-a$; 3) $2b$; 4) $a-b$.

Решение: на координатной прямой видно, что b больше, чем a. Делаем вывод, что a самое маленькое число и меньше 0: 1) $a+b$, отрицательное; 2) $-a$, отрицательное; 3) $2b$, положительное; 4) $a-b$, отрицательное. Одно из четырех выражений положительное, значит оно наибольшее. ***Ответ:*** 3).

Тип 3. Задачи на изучение свойств степени с целым показателем

Задача 4 [27]. В какое из следующих выражений можно преобразовать дробь $\frac{z^{-6}\times z}{z^{-3}}$.

$1)\, z^{-2};\quad 2)\, z^{-8};\quad 3)\, z^{3};\quad 4)\, z^{-1}.$

Решение: преобразуем числитель, затем сократим числитель и знаменатель на z^{-3}. Видим, что число с отрицательным показателем z^{-2}. ***Ответ:*** 1).

Задача 5 [44]. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $4^{-10} \times (4^3)^4$? $1)\, 16;\quad 2)\, \frac{1}{6};\quad 3) - 16;\quad 4)\, \frac{1}{64}.$

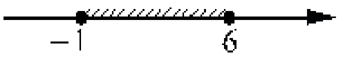
Решение: преобразуем число $(4^3)^4 = 4^{12}$. Знаем, что при умножении *степеней* с одинаковыми основаниями основание остаётся без изменений, а показатели *степеней складываются*. Получаем 4^2 и возводим число 4 в квадрат. $4^{-10} \times 4^{12} = 4^2 = 16$. ***Ответ:*** 1).

Задача 6 [44]. Какое из данных выражений при любых значениях n равно произведению 25×5^n? $1)\, 5^{2+n};\quad 2)\, 5^{2n};\quad 3) 125^n;\quad 4)\, 25^n.$

Решение: оценим выражение. Видим, что 25 можно записать как 5^2. Затем, так как основание теперь одинаковое, преобразуем выражение: $5^2 \times 5^n = 5^{2+n}$. ***Ответ:*** 1).

Тип 4. Задачи на решение квадратных неравенств

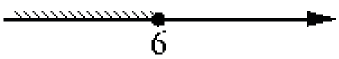
Задача 7 [44]. Укажите решение неравенства $(x+1)(x-6) \le 0$.

1) 

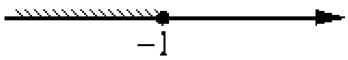
; **Рис.4. Отрезок [-1;6]**

2) 

; **Рис.5. Луч (-∞;-1]∪[6; ∞)**

3) 

; **Рис.6. Луч (-∞;6]**

4) 

. **Рис.7. Луч (-∞;-1]**

Решение: решим неравенство $x+1\quad x-6\ \le 0$ и найдем корни уравнения $x+1\quad x-6\ = 0,\ x_1 = 6, x_2 = -1$. Затем сделаем рисунок и выделим решение неравенства:

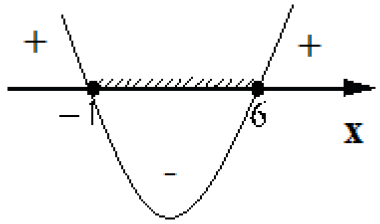


Рис. 8. Парабола

Ответ: 1).

В **части 2** основного государственного экзамена по теме исследования встречаются следующие основные типы задач, которые были выделены нами в бакалаврской работе.

Тип 1. Задачи на использование всех арифметических действий с целыми числами

Задача 8 [44]. Найдите значение выражения $(6\times 10^2)^3\times\ \ 13\times 10-5$.

Решение: $(6\times 10^2)^3\times\ \ 13\times 10-5\ \ = 600^3\times\ \ 130-5\ \ =$ $216\,000\,000\times\qquad\times 125 = 27\,000\,000\,000$. При решении не забываем про порядок действий выполнений выражения. ***Ответ:*** 27 000 000 000.

Тип 2. Задачи на изучение умножения и деления целых чисел

Задача 9 [44]. Принтер печатает одну страницу за 5 секунд. Сколько страниц можно напечатать на этом принтере за 7 минут?

Решение: для начала узнаем сколько секунд в 7 минутах:

1) $7\times 60 = 420$ (сек.) – в семи минутах; 2) $420:5 = 84$ (стр.) – напечатает принтер за 420 секунд или 7 минут. ***Ответ:*** 84 страницы.

Тип 3. Задачи на изучение свойств степени с целым показателем

Задача 10 [44]. Найдите значение выражения $\frac{8^3}{4^5}$.

Решение: представим числитель числом с основанием 4 и преобразуем $\frac{(4^2)^3}{4^5} = \frac{4^6}{4^5} = 4$. ***Ответ:*** 4.

Тип 4. Задачи на решение уравнений с одной переменной

Задача 11 [27]. Решите уравнение $7x-9 = 40$.

Решение: $7x-9=40, 7x=49, x=7$. ***Ответ:*** 7.

Задача 12 [44]. Решите уравнение $x^2-6x+5=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Решение: $x^2-6x+5=0,\ D=36-20=16,\ \overline{D}=4; x_{1,2}=\frac{6\pm4}{2}, x_1=5, x_2=1$. ***Ответ:*** 1.

Задача 13 [27]. Найдите корни уравнения $2x^2-10x=0$. *Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.*

Решение: вынесем за скобку $2x$, получаем: $2x(x-5)=0, x=0$ **и** $x=5$. ***Ответ:*** 05.

Итак, в первой части государственного экзамена содержатся задачи на: изучение сложения и вычитания целых чисел; расположение чисел на координатной прямой; изучение свойств степени с целым показателем; задачи на решение квадратных неравенств.

Во второй части основного государственного экзамена встречаются задачи на: использование всех арифметических действий с целыми числами; умножение и деление целых чисел; изучение свойств степени с целым показателем; решение уравнений с одной переменной.

Таким образом, в основном государственном экзамене по математике представлено большинство типов задач (на понимание и использование натуральных и целых чисел, на знание свойств, используемых в данных задачах) по теме «Натуральные и целые числа».

§ 7. Система задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-6 классов

К системам задач существуют различные требования, мы ознакомились с требованиями, которые выделяют Е.И. Лященко [13], Л.В. Виноградова [3] и Г.И. Саранцев [32]. Составлена система задач, удовлетворяющая требованиям Г.И. Саранцева. Автор отмечает необходимость упражнений для реализации каждого этапа работы. Система упражнений должна иметь большой объем и быть хорошо структурированной. Также Г.И. Саранцев отмечает необходимость формирования обобщенных умений.

Задачи должны быть направлены на:

— формирование предметных знаний и умений по этим темам;

— усвоение содержания основных понятий; методов (арифметический, полной и неполной индукции, малых изменений, опровергающий пример); приемов (инверсия, рассмотрение крайних случаев, принцип Дирихле, введение вспомогательной неизвестной, перефразирования, прием получения следствий) и идеи – расширения понятия числа.

Система задач повышенной трудности составлена по четырем основным направлениям – четырем блокам. По каждому блоку выделены типы задач, о которых говорилось ранее. Также система задач содержит три уровня: базовый уровень (3 б.), продвинутый уровень (4 б.) и высокий уровень (5 б.). Система задач повышенной трудности 5 класса приведена, ниже, в таблицах 3-6, 6 класса в таблицах 7-10. Решения, ответы и указания к заданиям можно увидеть в приложении.

Система задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5 класса составлена на основе учебников *и пособий* Г.К. Муравина [24], И.И. Зубаревой [6], С.Г. Манвелова [16], Н.Я. Виленкина [2], Т.Н. Мираковой [18] и Ф.А. Бартенева [1].

При составлении *Системы задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 6 класса* были использованы *пособия и* учебники по математике *6 класса* Г.К. Муравина [25], И.И. Зубаревой [7], Ф.А. Бартенева [1], С.Г. Манвелова [16] и Т.Н. Мираковой [18].

Таблица 3

Блок 5.1. Арифметические действия с натуральными числами, 5 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. А) Десятичная система счисления [24]. Запишите числа: 506305; 3612; 10006; 518200403 в столбик, расположив друг под другом цифры одноименных разрядов.	***Упр.1.5. Десятичная система счисления** [24] Запишите цифрами: 1) наименьшее пятизначное число; 2) наибольшее шестизначное число; 3) какое-нибудь число, которое больше миллиона.	****Упр.1.9. Четыре арифметических действия с натуральными числами** [18]. А) Между некоторыми цифрами 1,2, 3,4,5 поставить знаки действий и скобки так, чтобы значение выражения было равно 40; Б) Поставить скобки так, чтобы равенство было верным 9664 : 32 – 2 x195 – 37 x 5 = 3 000. **В) Нумерация натуральных чисел** [19]. Во сколько раз больше число, выраженное девятью единицами шестого разряда, чем число, выраженное тремя единицами второго разряда?
Упр.1.2. Сложение и вычитание натуральных [18] **чисел.** Как быстро вычислить: А) 1+3+5+7+9+…+99; Б) 99+95+91+…+7+3-1-5-…-89-93-97? В) Исключите лишнее слово: СУММА, РАЗНОСТЬ, МНОЖИТЕЛЬ, ЧАСТНОЕ.	***Упр.1.6. Сложение и вычитание натуральных чисел** [18]. Девять чисел записаны в виде таблицы из трех строк и трех столбцов. Складывая числа первой строки, ученик получил сумму 818, числа второй строки дали в сумме, по его подсчетам 819, а третьей строки – 917. Проделав те же вычисления для столбцов, ученик получил суммы – 185, 722 и 648. Правильны ли его вычисления?	
Упр.1.3. Умножение и деление натуральных чисел [18] А) Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно? Б) Найдите такое двузначное число, чтобы при делении этого числа на сумму его цифр получилось число, равное делителю.	***Упр.1.7. Умножение и деление натуральных чисел** [18] А) Один из двух множителей равен 12. Как изменится произведение, если второй множитель увеличить на 5? В) Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?	****Упр.1.10. Задачи на приложения - Метод перебора** [1] А) Найти сумму площадей всех различных прямоугольников, которые можно составить из 9 квадратов (не обязательно всех), если сторона каждого квадрата равна 1 см. Б) Сколькими способами можно уплатить 78 рублей, имея билеты трехрублевого и пятирублевого достоинства?
Упр.1.4. Чтение и запись натуральных чисел [18] Какие натуральные числа при зачеркивании последней цифры уменьшаются в целое число раз?	***Упр.1.8. Задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля** [16]. **А)** Для сложения чисел 1532 и 479 сначала прикинуть ожидаемый результат, выбрав для этого подходящую из сумм: 1500+480, 2000+480, 1500+500, 2000+500, а затем сложить числа 1532 и 479.	

Таблица 4

Блок 5.2. Деление с остатком, 5 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Признаки делимости [6] Найти сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке единицу.	***Упр.1.5. Признаки делимости** [24] Докажите, что два натуральных числа a и b обладают следующим свойством: либо a, либо b, либо a+b, либо a-b делится на 3.	****Упр.1.9. Признаки делимости** [24]. А) Какие цифры надо поставить вместо «окошек» в делимом, частном и остатке, если в результате деления получился наибольший из возможных остатков: 6■: 17 = ■ ост.■■ ? Б) Разделив число a на число b с остатком, получили выражение $a = bc + k$. Чему равно: 1) $a - bc$; 2) $a - k$; 3) k; 4) c.
Упр.1.2. Простые и составные числа [24] А) По формуле $a = bq + r$ найдите: 1) a, если $b = 23, q = 31, r = 21$. 2) q, если $a = 2427, b = 17, r = 13$. Б) Выполните деление с остатком 1) 139 169 на 45; 2) 168 627 на 54.	***Упр.1.6. Простые и составные числа** [18] А) Витя сказал своему другу Коле: «Я придумал пример на деление, в котором делимое, делитель, частное и остаток оканчиваются соответственно на 1, 3, 5 и 7». Коля сказал, что это невозможно. Кто прав?	
Упр.1.3. Делители и кратные [24] А) Исключите лишнее слово: ДЕВЯТЬ, ДВЕНАДЦАТЬ, ВОСЕМЬ, ПЯТНАДЦАТЬ; Б) Подумайте, что объединяет напечатанные заглавными буквами слова, и отметьте в нижнем ряду слово, которое к ним подходит: ЧЕТЫРЕ, ВОСЕМНАДЦАТЬ, СТО б) пять, б) одиннадцать, в) тридцать семь, г) нуль, д) один.	***Упр.1.7. А) Делители и кратные** [24] Написать общий вид всех нечетных чисел, больших 1 и не кратных 3. **Б)** Найдите наибольшее двузначное и наименьшее трехзначное числа, которые делятся на 3 без остатка. Запишите в формулу, по которой можно найти любое число, которое делится на 3 нацело.	****Упр.1.10. Делимость произведения, суммы и разности** [24] Найти все двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.
Упр.1.4. НОД и НОК чисел [2] Найдите: А) НОД (3780;7056); Б) 1) НОК (12;18); 2) НОК (24;18).	***Упр.1.8. Задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля** [16] 1) С помощью действий умножения и сложения проверить, получается ли при делении 255 на 17 частное 13 и остаток 4; 2) Выполнить деление с остатком 439:18 и сделать проверку.	

Таблица 5

Блок 5.3. Координатный луч, 5 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Расположение чисел на координатном луче [18] Подумайте, какому наибольшему числу единичных отрезков должно соответствовать одно деление координатного луча, чтобы можно было отметить данные числа, и отметьте их: А) 4, 12, 20, 24, 36; Б) 20, 30, 50, 80, 90.	***Упр.1.5. Расположение чисел на координатном луче** [18] 1) Какое из чисел, 5 или 15, расположено на координатном луче ближе к числу 11? 2) Назовите числа на координатном луче, которые удалены от числа 14 на 5 единиц. 3) Назовите какие-нибудь два числа на координатном луче, равноудаленные от числа 8.	****Упр.1.9. Изображение точек на координатном луче** [18] 1) Какой отрезок вы примете за единичный, если вам нужно отметить на координатном луче точки: А) A(25), B(40), C(62); Б) D(150), T(210), F(550); В) K(1200), L(1400), M(1650)? 2) Для каждого случая постройте координатные лучи и отметьте указанные точки.
Упр.1.2. Сравнение натуральных чисел [24, 2]. Как изменится значение выражения 7а, если, а: 1) увеличить на 1; 2) уменьшить на 2.	***Упр.1.6. Сравнение натуральных чисел** [18] В числе 48352 зачеркните такие две цифры, чтобы число, образованное оставшимися цифрами в том же порядке, было: а) наибольшим, б) наименьшим.	
Упр.1.3. Изображение точек на координатном луче [18] 1) Отметьте на координатном луче с единичным отрезком, равным 1 см, точки O(0); E(1); S(5); R(3); T(7); 2) На этом же луче отметьте точки, которые удалены от точки T на 2 единицы. Запишите координаты этих точек.	***Упр.1.7. Изображение точек на координатном луче** [6] Начертите луч. Отступив от начала луча вправо на четыре клетки, отметьте на нем число 2. Отметьте на луче числа: 1, 4, 7.	****Упр.1.10. Сравнение натуральных чисел** [18] А) Существует ли число, которое: 1) равно своему квадрату; 2) равно своему кубу; 3) больше своего квадрата; Б) 1) Сколько различных четырехзначных чисел можно составить, используя только цифры 8 и 0 или одну из них? 2) Сколько встречается цифра 7 в записи натуральных чисел от 1 до 100?
Упр.1.4. Нахождение координат точек [6] Отметьте на натуральном луче все натуральные числа, которые: А) меньше 9; Б) больше 10, но меньше 14.	***Упр.1.8. Задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля** [16]. Среди чисел 6778, $\frac{1}{4}$, 0, 1, 240 000, 25 321, 2533, 25 299 имеется четыре натуральных числа, меньших 25 321. Выписать их в порядке убывания.	

Таблица 6

Блок 5.4. Решение уравнений, 5 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Решение уравнений, которые имеют один корень [2] Решите уравнения: А) $x+37=85$; Б) $156+y=218$; В) $85-z=36$; Г) $m-94=18$.	***Упр.1.5. Решение уравнений, которые имеют один корень** [6] Решите уравнение: 1) $12x-4x=3248$; 2) $17y-y=1616$; 3) $y+19y=4040$.	****Упр.1.9. Решение уравнений, которые имеют один корень** [24] Зная, что частное чисел 4640 и 145 равно 32, назовите корень уравнения: 1) $z\times 32=4640$; 2) $4640:z=145$; 3) $y-7=32\times 145$; 4) $2x=4640:145$.
Упр.1.2. Решение уравнений с использованием свойств арифметических действий [6] Решите уравнение: 1) $7y+y-2y=24$; 2) $9x+x-9x=5$; 3) $4x+3x-7x=6$.	***Упр.1.6. Решение уравнений, которые имеют более одного корня** [24] Каким наибольшим числом можно заменить букву х, чтобы получилось верным равенство: $x< 563+337 \times 808-155956:307$?	
Упр.1.3. Решение уравнений, которые не имеют корней [6] Решите уравнение:$y\times 0=15$;	***Упр.1.7. Задачи на составление уравнений по условию задачи** [6] Сумма трех слагаемых равно 15731. Одно из них 6485, второе на 4163 меньше. Найдите третье слагаемое.	****Упр.1.10. А) Задачи на составление уравнений по условию задачи** [6] 1) Если к утроенному задуманному числу прибавить 15, то получится 177. Какое число задумано? 2) Если из удвоенного задуманного числа вычесть 48, то получится 244. Какое число задумано? **Б) Решение уравнений с использованием свойств арифметических действий** [16] А) Разложив число 750 на простые множители, ученик записал: $750=2\times 3\times 5\times 5\times 5$. Проверить умножением, верно ли выполнено это разложение. Б) Разложить число 252 на простые множители, а проверку выполнить умножением.
Упр.1.4. Задачи на соответствие уравнения условию задачи [6] Цена слив – х р., а алыча стоит на 7 р. дешевле. Запишите на математическом языке: А) за 2 кг слив и 6 кг алычи заплатили 54 р.; Б) за 6 кг алычи заплатили на 6 р. больше, чем за 2 кг слив.	***Упр.1.8. Задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля** [16] 1. Проверкой становить, какое из чисел – 12 или 18 – является корнем уравнения $144:x+129=137$. 2. Решить уравнение $2x=183-97$ и сделать проверку.	

Таблица 7

Блок 6.1. Арифметические действия с целыми числами, 6 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Сложение и вычитание целых чисел [16] Найти значение выражения: А) $-3+15-12+11-20$; Б) $7-15+9-16+13$; В) $8-(-5)$; Г) $11-25$; Д) $-10- \ -10$; Е) $0-8$.	***Упр.1.5. Сложение и вычитание целых чисел** [25] Найдите значение выражения рациональным способом: 1)$-1+2-3+4-\cdots-9+10-11$; 2) $-1+2-3+4-\cdots-99+100$.	****Упр.1.9. Сложение и вычитание целых чисел** [18, 1] Вычислить сумму А) $1^2+3^2+5^2+\cdots+101^2-2^2-4^2-\cdots-100^2$; Б) $-100-99-98-97-\cdots+100+101+102$.
Упр.1.2. Умножение и деление целых чисел [25] Определите, если возможно, четным или нечетным натуральным числом является показатель степеней n в верном неравенстве: 1) $(-3)^n>(-2)^n$; 2) $(-3)^n>2^n$; 3) $(-3)^n<(-2)^n$; 4) $3^n>2^n$.	***Упр.1.6. Умножение и деление целых чисел** [18] Можно ли написать подряд 17 целых чисел так, чтобы произведение любых четырех соседних чисел было отрицательно, а произведение всех чисел положительно?	
Упр.1.3. Запись и нумерация целых чисел [7] Даны числа: 2; 5; 7; 11. Перед ними нужно поставить знак + или – так, чтобы: А) получить два положительных и два отрицательных числа; Б) получить три положительных и одно отрицательное число.	***Упр.1.7. Запись и нумерация целых чисел** [18] Можно ли число 1234 представить в виде разности квадратов двух целых чисел?	****Упр.1.10. Все арифметических действий с целыми числами** [18] **«Проб и ошибок» метод** Подберите формулу общего члена последовательности -1, 0, 1, 0, -7, -28, -79, -192, … .
Упр.1.4. Все арифметических действий с целыми числами [18] Найдите значение выражения: А) $5\times \ -8 \ + \ -4 \ \times \ -2 \ - \ -7 \ \times 3$; Б) $-24+78+12-46 \ \times \ -13$; В) $-16 \ : \ -4 \ + \ -51 \ :3$;	***Упр.1.8. Задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля** [16] А) Столбик термометра опустился на 4 отметки ниже отметки +2. Какую температуру стал показывать термометр? Б) Столбик термометра поднялся на 5 делений выше отметки -2. Какую температуру стал показывать термометр?	

Таблица 8

Блок 6.2. Делимость чисел, 6 класс

Базовый уровень (3 б.)	**Продвинутый уровень (4 б.)**	**Высокий уровень (5 б.)**
Упр.1.1. НОД и НОК чисел [18] Найдите наибольший общий делитель чисел: а) 119 и 35; б) 232 и 68; в) 3431 и 876.	***Упр.1.5. НОД и НОК чисел** [18] Сумма двух натуральных чисел равна 153. Какое наибольшее значение может иметь НОД этих чисел?	****Упр.1.9. А) НОД и НОК чисел** [18]. Семь рыбаков ловили рыбу на озере. Первый рыбачил каждый день, второй – через день, третий – через 2 дня и т.д., седьмой – через 6 дней. Сегодня все рыбаки на озере. Через сколько дней все 7 рыбаков снова соберутся вместе на озере? **Б) Простые и составные числа** [18] Ученики одного класса в течении 7 месяцев собирали деньги для поездки на экскурсию. Было собрано 640 р. 1 к. Сколько учеников было в классе и сколько каждый вносил ежемесячно, если эти взносы были одинаковыми?
Упр.1.2. Простые и составные числа [18] А) Вставьте вместо точек нужное по смыслу слово. … число имеет более двух натуральных делителей (четное, простое, составное, натуральное). Б) Исключите лишнее слово: СЕМНАДЦАТЬ, ТРИ, СОРОК, ДВА.	***Упр.1.6. Простые и составные числа** [18, 1] А) Два простых числа называются близнецами, если они являются соседями в ряду всех нечетных чисел. Доказать, что всякое число, находящееся между близнецами и большее 4, делится на 6; Б) Пусть А – множество чисел вида $6n-1$, а Р – множество простых чисел. Верно или ложно высказывание: $A \subset P$, если $n \in N$.	
Упр.1.3. Признаки делимости [18] Найти цифры сотен и единиц числа 52*2*, если известно, что оно делится на 36.	***Упр.1.7. Признаки делимости** [18] Существует ли квадрат, у которого длина стороны – целое число, а площадь равна 201201201201?	****Упр.1.10. Свойства делимости произведения, суммы и разности чисел** [18, 1] А) Вместо звездочек поставить цифры так, чтобы семизначное число 30*0*03 делилось на 13. Найти все решения; Б) Имеются два набора чисел от 1 до 20. Из этих наборов составляются всевозможные суммы по два числа (слагаемые одной суммы берутся из разных наборов). Сколько среди этих сумм будет таких, которые делятся на 3?
Упр.1.4. Свойства делимости произведения, суммы и разности чисел [7] Представляя число в виде суммы, докажите, что: А) 777 777 делится на 7, на 77, на 11, на 777 и на 111; Б) 99 999 делится на 3, на 9; В) 123 123 делится на 123; Г) 111 333 делится на 111.	***Упр.1.8. Задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля** [16] А) Верно ли, что два числа взаимно просты, когда одно из них простое? Почему? Б) Известно, что одно из чисел 1040; 57; 171 является наибольшим общим делителем двух других. Выбрать его с пояснением.	

Таблица 9

Блок 6.3. Координатная прямая и координатная плоскость, 6 класс

<table>
<tr><th>Базовый уровень (3 б.)</th><th>Продвинутый уровень (4 б.)</th><th>Высокий уровень (5 б.)</th></tr>
<tr><td>Упр.1.1. Модуль числа [25]
А) Чему равны модули чисел:
$25, -25, -78, 5, 1, -9, 71.$
Б) Отметьте на координатной прямой числа, модули которых равны 2, 6, 0.</td><td>*Упр.1.5. Модуль числа [7]
Укажите (сделайте рисунок), где на координатной прямой расположены точки М(x), координаты которых удовлетворяют неравенству: А) $|x| > 0$, Б) $|x| \geq 0$, В) $|x| < 0$, Г) $|x| \leq 0$.</td><td rowspan="2">**Упр.1.9. Нахождение координат точек [1]
На числовой прямой отмечены четыре точки. Точке А соответствует число -3, точке В – число -5, точке С – число 6. Найти четвертое число, соответствующее точке К по следующему условию: если изменить направление числовой оси на противоположное, то сумма новых чисел, соответствующих «старым» точкам А, В, С и К, не изменится.</td></tr>
<tr><td>Упр.1.2. Нахождение координат точек [7]

Точка координатного луча А(8) – центр симметрии. Укажите точку, симметричную относительно этого центра точке: А) М(2); Б) N(5); В) К(10); Г) L(15).</td><td>*Упр.1.6. Нахождение координат точек [18]

Известно, что $a > b > c$. Как могут располагаться на координатной прямой точки А(a), В(b), С(c) относительно начала отсчета, если: а) $abc > 0$; б) $a + b + c < 0$?</td></tr>
<tr><td>Упр.1.3. Сравнение целых чисел [25]

Какой знак неравенства должен стоять между знаками многоточия: 1) $-378 \times -538 \ldots 0$;
2) $-678 \times 876 - 876 \ldots 0$.</td><td>*Упр.1.7. Сравнение целых чисел [25, 18]
А) Какую цифру можно поставить вместо *, чтобы получилось верное неравенство:
1) $-2671 < -267*$; 2) $-9*83 > -9132$.
Б) Что больше $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 20$ или $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000000$?</td><td rowspan="2">**Упр.1.10. А) Модуль числа [18]
Начало отсчета на координатной прямой перенесли в точку М(m), m – отрицательное число. Как изменились при этом: а) координаты всех точек этой прямой; б) модули чисел, меньших m. Существует ли число, модуль которого не изменился?
Б) Координатная плоскость [7]
Постройте треугольник, симметричный треугольнику АВС относительно оси ординат, и запишите координаты его вершин, если:
1) А(0;1), В(3;0), С(1;-2);
2) А(-3;4), В(-1;0), С(4;2).</td></tr>
<tr><td>Упр.1.4. Расположение чисел на координатной прямой [7]
А) Найдите расстояние между числами на координатной прямой:
1) А(-2) и В(2);
2) М(-15) и N(+15).

Б) Изобразите число b точкой координатной прямой, если 1) $b = 3$; 2) $-b = +4$;
3) $b = -2$; 4) $-b = -5$.</td><td>*Упр.1.8. Задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля [16]

А) Закончить предложение: «Из двух отрицательных чисел больше то, у которого…».
Б) Закончить предложение: «Любое отрицательное число меньше любого…».
В) Закончить предложение: «Из двух отрицательных чисел меньше то, у которого…».</td></tr>
</table>

Таблица 10

Блок 6.4. Решение уравнений, 6 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Решение уравнений, которые имеют один корень [16] Решить уравнение: А) $3x-2=5x-10$; Б) $2x+1=6x-7$;	***Упр.1.5. Решение уравнений, которые имеют более одного корня** [1] Существуют ли такие целые числа x и y, для которых одновременно имеют место равенства: $xy=4747$ и $x-y=-54$.	****Упр.1.9. А) Решение уравнений, которые имеют более одного корня** [18]**.** Доказать, что уравнение $3x^2-4y^2=13$ не имеет целых решений; **Б) Составление уравнений по условию задачи** [1]**.** Дано пятизначное число. Если приписать семерку впереди числа, то полученное шестизначное число будет в 5 раз больше шестизначного числа, у которого семерка приписана в конце. Найти это пятизначное число.
Упр.1.2. Решение уравнений путем группировки [1] Дана пропорция: $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x+4}{x+7}$. Найти x.	***Упр.1.6. Решение уравнений путем группировки** [1] А) Решить уравнение: $x^3+x^2+x+1=0$; Б) Найти натуральные k и n, если известно, что $kn^2-kn-n^2+n=94$.	
Упр.1.3. Составление уравнений по условию задачи [7]**.** В одном бидоне молока в 3 раза больше, чем в другом. Когда из одного бидона перелили в другой 5 л, молока в бидонах стало поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально? Решите задачу алгебраическим способом. Оформите решение так, чтобы было понятно откуда получилось уравнение.	***Упр.1.7. Решение уравнений путем разложения на множители** [1] Решить уравнения: 1) $a^3-a=0$; 2) $x^2+y^2-4x+4=0$.	****Упр.1.10. Тождества сокращенного умножения** [1] А) Решить уравнения: 1) $(x-7)^2-(x-1)^3=50-13x$; 2) $(x-2)^3=(x+6)^2-44$. Б) Доказать, что не существует целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству: $x^2+1974=y^2$.
Упр.1.4. Соответствие уравнения условию задачи [25]. Какое из уравнений: а) $8+x=4-x$ или б) $4+x=8-x$ соответствует условию задачи? Какое число нужно прибавить к 4 и вычесть из 8, чтобы получить равные числа?	***Упр.1.8. Задания, для обучения учащихся приемам самоконтроля** [16] Записать уравнение $-2x=18$. На какое число можно разделить обе части уравнения, чтобы найти его корень?	

§ 8. Система задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 7-9 классов

Система задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики ***7 класса*** составлена на основе учебников и методической литературы по математике 7 класса таких авторов, как: Г.К. Муравин [22], А.Г. Мордкович [19], Н.П. Кострикиной [9] и Т.Н. Мираковой [18], В. Серпинский [33] и Ф.А. Бартенев [1].

Система задач повышенной трудности 7 класса приведена в таблицах 11-14.

Система задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики ***8 класса*** составлена на основе задач из учебников и *пособий* по математике 8 класса таких авторов, как: Г.К. Муравин [23], А.Г. Мордкович [20], Ю.Н. Макарычев [14], Т.Н. Миракова [18] и Н.П. Кострикина [9], Ф.А. Бартенева [1], В. Серпинский [33].

Если в 7 классе в системе задач были представлены задания на изучение свойств степени с натуральным показателем, то в 8 классе учащиеся изучают степень с целым показателем. Так же стоит сказать, что подобраны задания на закрепление изученной в 8 классе теоремы Виета. В блоке 4 высокий уровень содержит также задания на нахождение корней уравнения не только с одной переменной, но и с двумя и даже тремя переменными.

Система задач повышенной трудности 8 класса приведена в таблицах 15-18.

Система задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе ***математики 9 класса*** составлена на основе задач из учебников по математике 9 класса таких авторов, как: А.Г. Мордкович [21], Ю.Н. Макарычев [15], В. Серпинский [33] и Н.П. Кострикина [9].

Система задач повышенной трудности 9 класса приведена в таблицах 19-22. Решения, ответы и указания к заданиям можно увидеть в приложении.

Таблица 11

Блок 7.1. Арифметические действия с целыми числами, 7 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Формулы сокращенного умножения [19] Преобразуйте квадрат двучлена в многочлен стандартного вида: 1) $(a+x)^2$; 2) $(b-y)^2$; 3) $(c+d)^2$; 4) $(m-n)^2$.	***Упр.1.5. Формулы сокращенного умножения** [18] Разложить на множители: $x^2-1+x \quad x^2-1+3x \quad +x^2$.	****Упр.1.9. Формулы сокращенного умножения** [18] 1) Докажите, что квадрат среднего из трех любых последовательных целых чисел больше произведения крайних; 2) При каком условии разность квадратов двух натуральных чисел будет простым числом?
Упр.1.2. Свойство степени с натуральным показателем [19] Вычислите: А) 2^n, если $n=1,4,5$; Б) $(-5)^n$, если $n=1,2,3$.	***Упр.1.6. Свойство степени с натуральным показателем** [18] Существуют ли натуральные числа x, y, для которых $x^5+y^5=33^6$?	
Упр.1.3. Одночлены [22] Какие из данных выражений являются одночленами: А) $2ab$; Б) $x+y$; В) a^2b^8; Г) m^2-n; Д) $-cb$; Е) -34; Ж) z; З) 0?	***Упр.1.7. Одночлены** [1] Вычислить при $x=7$: $(x-4)^{(x-5)^{(x-6)^{(x+6)^{(x+5)}}}}$	****Упр.1.10. Свойство степени с натуральным показателем** [18] 1) Сколько точных квадратов содержится в множестве чисел вида 2^a+4^b, где a и b – натуральные числа? 2) Доказать, что число $2p^{3k}+4p^k+10$ ни при каких натуральных p и k не может быть произведением последовательных натуральных чисел.
Упр.1.4. Многочлены [22] Преобразовать в многочлен стандартного вида: $3a^2-5a+7 \;+\; -2a^2+7a-9 \;-\; a^2+8a-5$.	***Упр.1.8. Многочлены** [18] Верно ли, что при любом натуральном n число n^3+5n-1 простое?	

Таблица 12

Блок 7.2. Делимость чисел, 7 класс

<table>
<tr><th>Базовый уровень (3 б.)</th><th>Продвинутый уровень (4 б.)</th><th>Высокий уровень (5 б.)</th></tr>
<tr><td>Упр.1.1. Кратность чисел [19]
Докажите, что значение выражения:
А) $17^6 + 17^5$ кратно 18;
Б) $3^{17} + 3^{15}$ кратно 30;
В) $42^8 + 42^7$ кратно 43;
Г) $2^{33} + 2^{20}$ кратно 72.</td><td>*Упр.1.5. Кратность чисел [18]

Доказать, что при любом натуральном n число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.</td><td rowspan="2">**Упр.1.9. А) Кратность чисел [18]
1) Докажите, что если число $7^{14} + 3 \times 14 - 1$ делится на 9, то и число $7^{15} + 3 \times 15 - 1$ тоже делится на 9.
2) Воспользовавшись выводом задачи 1, докажите, что число $7^{16} + 3 \times 16 - 1$ делится на 9.

Б) Простые и составные числа [33]
1) Является ли простым числом
$1 + 2^{3^{1991}}$?
2) Доказать, что числа 2k+1 и 9k+4 являются взаимно простыми.</td></tr>
<tr><td>Упр.1.2. Простые и составные числа [22]

Разложить на простые множители число 391.</td><td>*Упр.1.6. Простые и составные числа [22]

Разложить на простые множители число 1431.</td></tr>
<tr><td>Упр.1.3. Деление одночлена на одночлен [20]

Выполните деление одночлена на одночлен:
А) $a^3 : a^2$;
Б) $x^8 : x^3$;
В) $y^{20} : y^{18}$;
Г) $z^{54} : z^{50}$.</td><td>*Упр.1.7. Деление одночлена на одночлен [19]
Выполните деление одночлена на одночлен:
А) $44a^3b^2c^6 : 11a^2bc^5$;
Б) $198x^4y^4z^2 : 2x^4y^3z$;
В) $144m^8n^9k^4 : 12m^2n^7k$;
Г) $258p^8q^4r^{17} : 3p^6q^2r^{15}$.</td><td rowspan="2">**Упр.1.10. НОД и НОК чисел [9]

Наименьшее общее кратное двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 90, а их наибольший общий делитель равен 6. Найдите эти числа.</td></tr>
<tr><td>Упр.1.4. Упрощение выражения [19]

Упростите выражение:
А) $49z^{10}t^{14} : (7zt)^0$;
Б) $(-x^2y^3z)^4 : xyz$;
В) $55p^3q^4 : (5pq)^0$.</td><td>*Упр.1.8. Упрощение выражения [19]
Приведите многочлен к стандартному виду:
А) $4p^3 \times 2p + 3p^2 \times 4p + 2p^2 \times 2p^2 - 2p^3 \times 4$;
Б) $y \times 2y - 3y - y^2 - 5 + 2yy - y \times 5 + y \times 7y^2$.</td></tr>
</table>

Таблица 13

Блок 7.3. Координатная прямая и координатная плоскость, 7 класс

<table>
<tr><th>Базовый уровень (3 б.)</th><th>Продвинутый уровень (4 б.)</th><th>Высокий уровень (5 б.)</th></tr>
<tr><td>Упр.1.1. Расположение точек на координатной плоскости [19]
Замените символ * каким-либо числом так, чтобы:
А) точка А(5;*) принадлежала первому координатному углу; Б) точка В(*;3) принадлежала второму координатному углу; В) точка С(*;-7) принадлежала третьему координатному углу; Г) точка D(12;*) принадлежала четвертому координатному углу.</td><td>*Упр.1.5. Расположение точек на координатной плоскости [9]

Через точку А(3;4) проведены прямая, проходящая через начало координат, и окружность с центром в начале координат. Определить координаты второй точки пересечения прямой и окружности.</td><td rowspan="2">**Упр.1.9. Сравнение целых чисел [18]

1) Какое из чисел больше:
А) 63^5 или 8^{10}; Б) 15^6 или 7^{12}?
2) Верны ли неравенства:
А) $31^{11} < 17^{14}$; Б) $16^{12} < 63^7$?</td></tr>
<tr><td>Упр.1.2. Сравнение целых чисел [22]
Запишите число: 1) противоположное числу a; 2) следующее за натуральным числом n;</td><td>*Упр.1.6. Сравнение целых чисел [18]
Исключите лишнее выражение
$3^{10}, 2^7, (-4)^6, (-7)^5$.</td></tr>
<tr><td>Упр.1.3. Модуль числа [22]
Можно ли установить, какое из чисел больше, если:
1) модуль одного числа больше, чем модуль другого;
2) модуль одного из двух отрицательных чисел больше, чем модуль другого?</td><td>*Упр.1.7. Модуль числа [22]
1) Я задумал число. Прибавил к нему 10 и заметил, что при этом модуль числа не изменился. Какое число я задумал?
2) Я задумал число. Вычел из него 24 и получил число с тем же модулем, что и задуманное. Какое число я задумал?</td><td rowspan="2">**Упр.1.10. 1) Модуль числа [9]
Доказать, что модуль разности квадратов двух последовательных нечетных натуральных чисел равен удвоенной сумме этих чисел.

2) Нахождение координат точек [9]
Найти координаты точки пересечения прямых АВ и CD, если А(-5;2), В(7;2), С(1;-6), D(1;5).</td></tr>
<tr><td>Упр.1.4. Нахождение координат точек [19]. Найдите координаты вершин C и D квадрата ABCD, если известны координаты вершин А (3;1) и В(3;-4). Сколько решений имеет задача?</td><td>*Упр.1.8. Нахождение координат точек [19]
Квадрат со стороной 8 расположен так, что центр его находится в начале координат, а стороны параллельны осям координат. Определите координаты вершин квадрата.</td></tr>
</table>

Таблица 14

Блок 7.4. Решение уравнений и систем уравнений, 7 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Решение уравнений с одной переменной [19] Решите уравнение: А) $4x+20=0$; Б) $5x-15=0$; В) $9x+4x=-26$.	***Упр.1.5. Решение уравнений с одной переменной** [18] 1) Решить уравнение $x^3-6x^2+13x-10=0$; 2) Доказать, что уравнение $8x+7y=-3$ не имеет натуральных решений.	****Упр.1.9. А) Решение уравнений с одной переменной** [18, 1] 1) Решить уравнение $(7-x^2)^4+(9-x^2)^4=16$. 2) При каких натуральных n дробь $\frac{4n+7}{5}$ является целым числом? **Б) Задачи на составление уравнений по условию задачи** Масса 5 одинаковых яблок и 3 одинаковых груш такая же, как и масса 4 таких же яблок и 4 таких же груш. Что легче, яблоко или груша? **В) Системы уравнений** Решить системы уравнений: 1) $\begin{cases} x+y=10^{20}, \\ x-y=10^{19}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2a^3+3b^5=19, \\ 3a^3-4b^5=20. \end{cases}$
Упр.1.2. Решение уравнений с двумя переменными [19] Является ли пара чисел (1;1) решением линейного уравнения с двумя переменными: А) $7x+3y=10$; Б) $6x-2y=4$; В) $6x+8y=1$; Г) $15x-12y=3$?	***Упр.1.6. Решение уравнений с двумя переменными** [19] Найдите все пары натуральных чисел, которые удовлетворяют уравнению $x+y=15$.	
Упр.1.3. Задачи на составление уравнений по условию задачи [22] Переведите на математический язык условие задачи. Одно из чисел на 17 меньше, чем другое, а их сумма равна 75. Найдите наибольшее из этих чисел.	***Упр.1.7. Задачи на составление уравнений по условию задачи** [18] По заданию звена Вова купил 5 простых карандашей и 7 блокнотов. За всю покупку от заплатил 50 л. Сколько стоит один простой карандаш и один блокнот?	****Упр.1.10. А) Решение уравнений с параметром** [9] Решите уравнение: 1) $x-3 =7$; 2) $x+2 =9$; **Б) Линейная функция и ее график** График функции $y=kx$ проходит через точку М (6; -14). Как, не вычисляя коэффициента k, определить, проходит ли этот график через точку В (-9;21)?

Таблица 15

Блок 8.1. Арифметические действия с целыми числами, 8 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Преобразование суммы и разности многочленов [23] Докажите тождество: 1) $(2a+b)^3-(a-b)^2\ \ 8a+b\ \ =27a^2b$, 2) $\ a+2b)^3-(a+b)^2(a-8b\ \ =27ab^2$.	***Упр.1.5. Преобразование суммы и разности многочленов** [1] В трехзначном числе цифра сотен на 2 больше цифры единиц. Найти разность между этим числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.	****Упр.1.9. Многочлены** [1, 9] 1) Найти двузначное число, обладающее тем свойством, что куб суммы его цифр равен квадрату самого числа. 2) Если первую цифру четырехзначного числа, являющегося полным квадратом, уменьшить на 3, а последнюю увеличить на 3, то получится также полный квадрат. Найдите это число.
Упр.1.2. Одночлены [23] Впишите пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество: 1) $(a+\cdots)^3=a^3+3a^2x+\cdots+\cdots$; 2) $(\ldots-b)^3=\cdots-3c^2b+\cdots-b^3$; 3) $(\ldots+2a)^3=64+\cdots+\cdots+\cdots$; 4) $(a^3-\cdots)^3=\cdots-\cdots+3a^3c^2-\cdots$.	***Упр.1.6. Одночлены** [1] Каждое из чисел, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на квадрат первого числа. Доказать, что произведение первого, третьего, пятого и седьмого членов полученной последовательности равно четвертой степени четвертого числа.	
Упр.1.3. Многочлены [20] Разложите квадратный трехчлен на множители: $x^2+22x-23$.	***Упр.1.7. Многочлены** [19] Разложить на множители многочлен $x^3+11x-12$.	****Упр.1.10. Все арифметические действия с целыми числами** [18] 1) Сумма двух чисел больше их произведения, но меньше их разности. Выяснить, положительны или отрицательны эти числа.
Упр.1.4. Все арифметические действия с целыми числами [9] Найдите двузначное число, квадрат которого записан цифрами 0; 2; 3 и 5.	***Упр.1.8. Все арифметические действия с целыми числами** [19] Найти наименьшее натурально число, оканчивающееся цифрой 4 и обладающее тем свойством, что при перестановке этой цифры на первое место оно увеличивается в 4 раза.	

Таблица 16

Блок 8.2. Делимость чисел, 8 класс

<table>
<tr><th>Базовый уровень (3 б.)</th><th>Продвинутый уровень (4 б.)</th><th>Высокий уровень (5 б.)</th></tr>
<tr><td>Упр.1.1. Кратность чисел [20]
Одно из двух положительных чисел на 4 больше другого. Найдите эти числа, если их произведение равно 96.</td><td>*Упр.1.5. Кратность чисел [1]
Сколько различных делителей имеют следующие числа:
1) 3600;
2) 42^5?</td><td rowspan="2">**Упр.1.9. 1) Кратность чисел [18, 9]
1) Доказать, что a^3+3a^2+8a при любом натуральном а делится на 6.
2) Шестизначное число написано с помощью 30 нулей и 30 единиц. Докажите, что оно не может быть квадратом натурального числа.
3) Докажите, что сумма чисел от 1 до 1000 делится на 143.

2) НОД и НОК чисел
Найдите наибольший общий делитель всех шестизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторений).</td></tr>
<tr><td>Упр.1.2. НОД и НОК чисел [18]

Какое наименьшее количество любых натуральных чисел следует взять, чтобы среди них всегда нашлась такая пара чисел, разность которых делилась бы на 5?</td><td>*Упр.1.6. НОД и НОК чисел [9]

Найдите наибольший общий делитель всех девятизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений).</td></tr>
<tr><td>Упр.1.3. Свойство степени с целым показателем [14]
Найдите значение выражения:
1) $3^{-4}\times 3^6$;
2) $2^4\times 2^{-3}$;
3) $5^{-3}:5^{-3}$;
4) $(2^{-4})^{-1}$;
5) $3^{-4}\times(3^{-2})^{-4}$.</td><td>*Упр.1.7. Свойство степени с целым показателем [9, 14]

1) Какой цифрой оканчивается разность $43^{43}-17^{17}$?

2) Какой цифрой оканчивается сумма $54^{35}+28^{21}$?</td><td rowspan="2">**Упр.1.10. Простые и составные числа [33]

Доказать ошибочность утверждения о том, что из каждого натурального числа, записанного в десятичной системе счисления, можно изменив только одну его цифру, получить простое число.</td></tr>
<tr><td>Упр.1.4. Упрощение выражения [9]
Упростите выражение:
$70\times\ 71^9+71^8+71^7+\dots+71^2+71\ +1$.</td><td>*Упр.1.8. Упрощение выражения [23]
Упростите выражение и найдите его значение:
$$\frac{5!}{m(m+1)}\times\frac{m+1\ !}{m+1\ !3!}$$</td></tr>
</table>

Таблица 17

Блок 8.3. Координатная прямая и координатная плоскость, 8 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Расположение точек на координатной плоскости [9] На плоскости даны 5 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько различных прямых определяют пары этих точек?	***Упр.1.5. Расположение точек на координатной плоскости** [9] На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая. Сколько точек отмечено на плоскости, если известно, что всего проведено 45 прямых?	****Упр.1.9. Сравнение целых чисел** [9, 1] А) Доказать, что 1) $100\,002^4 > 9997^5$; 2) $31^{11} < 17^{14}$; 3) $76^8 > 10^{15}$. Б) Какое из чисел больше: $2^{3^{2^3}}$ или $3^{2^{3^2}}$?
Упр.1.2. Сравнение целых чисел [23] Сравните числа $(-93)^2$ и $(-89)^2$.	***Упр.1.6. Сравнение целых чисел** [23] Сравните числа $99!$ и 50^{99}.	
Упр.1.3. Модуль числа [23] Найдите значение переменной с, для которой верно равенство: 1) $c \ = c$; 2) $c\ = -c$.	***Упр.1.7. Модуль числа** [18] Существует ли такое число х, для которого $-x =\geq \ x$?	****Упр.1.10. 1) Модуль числа** [9, 20] Найдите наименьшее значение выражения $36^m - 5^n$, где m и n – натуральные числа. **2) Свойства числовых неравенств** Докажите неравенство: $a^2 + 2b^2 + 2ab + 2b + 2 > 0$.
Упр.1.4. Свойства числовых неравенств [20] Запишите на математическом языке следующее высказывание: А) Сумма чисел a и b больше их произведения; Б) Квадрат числа m меньше числа n; В) Утроенное число p больше, чем куб числа p.	***Упр.1.8. Свойства числовых неравенств** [20] Докажите, что: А) если $a > 2, b > 3,$ то $3a + 5b > 21$; Б) если $a < 2b, b < c,$ то $2a < 4c$; В) если $a > 3, b > 5,$ то $2a + 4b > 26$; Г) если $a \geq 5b, b \geq 2c,$ то $3a \geq 30c$.	

Таблица 18

Блок 8.4. Решение уравнений и систем уравнений, 8 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Решение уравнений с одной переменной [20] Решите уравнение: 1) $-x^2-5x+14=0$; 2) $-x^2+26x-25=0$.	***Упр.1.5. Решение уравнений с одной переменной** [20] Решите уравнение: 1) $(x-2)^2=3x-8$; 2) $x+4\quad 2x-1\ =x\ \ 3x+11$.	****Упр.1.9. 1) Решение уравнений с одной переменной** [18] Решить уравнение $x\ \ x+1\quad x+2\quad x+3\ =24$. **2) Решение уравнений с двумя переменными** Доказать, что если m и n – целые числа и $m^2-9n^2=6mn$, то $m=n=0$. **3) Решение уравнений с тремя переменными** Найти все целочисленные решения уравнения $x^3-2y^3-4z^3=0$.
Упр.1.2. Задачи на составление уравнений по условию задачи [23] Решите задачу: Одно из положительных чисел на 3 больше другого, а произведение этих чисел на 97 меньше суммы их квадратов. Найдите эти числа.	***Упр.1.6. Задачи на составление уравнений по условию задачи** [18] Число 392 разделили на натуральное число a и от частного отняли a, с полученной разностью проделали то же самое и с новым результатом проделали то же самое. В ответе получилось число a. Чему равно a?	
Упр.1.3. Решение систем уравнений с двумя переменными [23] 1) Решить способом сложения систему уравнений: $x+3y=6$, $2x+y=7$. 2) Решите способом подстановки систему линейных уравнений: $5x-y=4$, $9x-2y=5$.	***Упр.1.7. Задачи на составление уравнений по известным корням** [18] Составить такое квадратное уравнение, корнями которого были бы противоположные числа: 1) $a, -a$; 2) $a^2, -a^2$.	****Упр.1.10. Задачи на составление уравнений по условию задачи** [23] Решите задачу: Сумма двух положительных чисел равна 29. Квадрат одного из них меньше квадрата другого на 87. Найдите эти числа.
Упр.1.4. Теорема Виета [20] У какого из заданных квадратных уравнений сумма корней равна -6, а произведение корней равно -11: 1) $x^2-6x+11=0$, 2) $x^2+6x-11=0$, 3) $x^2-11x-6=0$, 4) $x^2+11x-6=0$.	***Упр.1.8. Теорема Виета** [18] Докажите, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корень, равный: А) 1, если $a+b+c=0$, Б) -1, если $a-b+c=0$.	

Таблица 19

Блок 9.1. Арифметические действия с целыми числами, 9 класс

Базовый уровень (3 б.)	**Продвинутый уровень (4 б.)**	**Высокий уровень (5 б.)**
Упр.1.1. Преобразование суммы и разности целых чисел [21] Докажите тождество: $b+c-2a \quad c-b \ + \ c+a-2b \quad a-c \ - \ a+b-2c \quad a-b \ = 0.$	***Упр.1.5. Преобразование суммы и разности целых чисел** [15] Докажите, что значение выражения $5+10^{n+1} \quad 1+10+\cdots+10^{n} \ +1$ при любом натуральном n можно представить в виде квадрата натурального числа.	****Упр.1.9. Преобразование суммы и разности целых чисел** [9] Взяли два различных натуральных числа. Эти число сложили, перемножили, вычли из большего данного числа меньшее и разделили большее на меньшее. Оказалось, что сумма всех четырех результатов равна 441. Найдите эти числа.
Упр.1.2. Квадрат и куб чисел [9] Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 45.	***Упр.1.6. Квадрат и куб чисел** [9] Трехзначное число x, кратное 5, можно представить в виде суммы куба и квадрата одного и того же натурального числа. Найдите число x.	
Упр.1.3. Одночлены и многочлены [21] Разложите на множители $x^2-17x+60.$	***Упр.1.7. Одночлены и многочлены** [15] Докажите, что многочлен не имеет отрицательных корней $x^4-4x^3-6x^2-3x+9$	****Упр.1.10. Все арифметические действия с целыми числами** [9] 1) Найдите наименьшее четырехзначное число, которое после умножения на 21 станет квадратом натурального числа; 2) Произведение 21m, в котором множитель m – четырехзначное число, можно представить в виде квадрата натурального числа. Найдите m.
Упр.1.4. Все арифметические действия с целыми числами [15] Сколько пятизначных чисел, в которых все цифры разные, можно составить из цифр: 1) 1, 3, 5, 7, 9; 2) 0, 2, 4, 6 8?	***Упр.1.8. Все арифметические действия с целыми числами** [9] Если четное число оканчивается цифрой, отличной о нуля, то четвертая степень этого числа оканчивается цифрой 6. Докажите это.	

Таблица 20

Блок 9.2. Делимость чисел, 9 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Кратность чисел [21] 1) На какое из указанных чисел не делится произведение $23^2 + 23 \times 26$? А) 23; Б) 7; В) 9; Г) 49. 2) На какое из указанных чисел делится произведение 213×65? А) 26; Б) 142; В) 45; Г) 39.	***Упр.1.5. Кратность чисел** [33] 1) Найти все натуральные числа n, для которых число $n^2 + 1$ делится на $n + 1$. 2) Докажите, что сумма двух простых чисел делится на 12, если их разность равна 2, а меньшее число больше 3.	****Упр.1.9. Кратность чисел** [33, 9] 1) Найти все натуральные числа $n > 1$, для которых число $1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ делится на n. 2) Найти все натуральные числа a, для которых число $a^{10} + 1$ делится на 10. 3) Докажите, что ни при каком натуральном n значение выражения $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169.
Упр.1.2. Простые и составные числа [33] Найти все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел.	***Упр.1.6. Простые и составные числа** [9] Какие простые числа могут быть делителями чисел вида $111 \ldots 11$?	
Упр.1.3. Свойство степени с целым показателем [21] Вычислите: $2^7 \times (2^2)^{-5} : (2^{-3})^3$.	***Упр.1.7. Свойство степени с целым показателем** [9] 1) Может ли сумма цифр натурального числа, являющегося точным квадратом, равняться 1991? 2) Может ли число вида $5^n - 1$ делится на $4^n - 1$?	****Упр.1.10. Простые и составные числа** [33] 1) Найти все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел; 2) Найти все натуральные числа n, для которых каждое из шести чисел $n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 13, n + 15$ является простым.
Упр.1.4. Упрощение выражения [21] Упростите выражение: 1) $\frac{(2a)^3 \times 4a^{-2}}{(4a^3)^2}$; 2) $\frac{3b^{-1} \times (9b^2)^3}{(3b^{-2})^4}$.	***Упр.1.8. Упрощение выражения** [15] Упростите выражение: 1) $\frac{2 \times 3^{n+2} - 5 \times 3^{n+1}}{3^{n-1}}$; 2) $\frac{10 \times 6^n}{2^{n+1} \times 3^{n-1}}$.	

Таблица 21

Блок 9.3. Решение неравенств, 9 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Линейные неравенства [21] Является ли данное число а решением данного неравенства: 1) $2x-5>9$; $a=-1, a=3$; 2) $2-6x<-10$; $a=-2, a=4$; 3) $7-3x<13$; $a=-15, a=4$; 4) $4x+5>17$; $a=-2, a=5$?	***Упр.1.5. Линейные неравенства** [21] Решите неравенство: 1) $x < 5$; 2) $x-2 \leq 3$; 3) $7x \leq 21$; 4) $x+3 < 4$.	****Упр.1.9. Квадратные неравенства** [21] Найдите такое натуральное значение параметра p, при котором во множестве решений неравенства $(7-x)(p-x)<0$: 1) содержится три натуральных числа; 2) не содержится ни одного целого числа.
Упр.1.2. Квадратные неравенства [15] Решите неравенство: 1) $x^2<16$; 2) $7x<x^2$.	***Упр.1.6. Квадратные неравенства** [21] Решите неравенство: 1) $4x^2-12x+9>0$; 2) $9x^2+12x+4<0$.	
Упр.1.3. Множества и операции над ними [21] Верно ли, что: 1) $-5 \in N$; 2) $-5 \in Z$.	***Упр.1.7. Множества и операции над ними** [21] Найдите пересечения $A \cap B$ множеств A и B: 1) A – множество всех натуральных чисел, кратных 10, $B = 1,2,3,\dots,41$; 2) $A = -11,-10,-9,\dots,-1,0,1,\dots,9$, B – множество целых чисел, кратных 10.	****Упр.1.10. Множества и операции над ними** [21] В записи " $* \in 4, \Delta, 9$ " вместо значков * и Δ можно поставить любые цифры, меньше 3. Будут получаться различные утверждения: $0 \in 4,0,9$, $1 \in 4,2,9$ и т.п. А) Сколько получится утверждений, в которых на первом месте стоит цифра 2? Б) Сколько получится утверждений, в которых на месте Δ стоит положительная цифра? В) Сколько всего утверждений получится?
Упр.1.4. Система неравенств [15] Решите систему неравенств: $x^2-2x-8<0,$ $x^2-9<0.$	***Упр.1.8. Система неравенств** [21] Решите систему неравенств: $x^2-8x+15 \geq 0,$ $x^2-6x+8 \geq 0.$	

Таблица 22

Блок 9.4. Решение уравнений и систем уравнений, 9 класс

Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.1.1. Решение уравнений с одной переменной [15] Решите уравнение: 1) $y^4 - y^3 - 16y^2 + 16y = 0$; 2) $p^3 - p^2 = p - 1$.	***Упр.1.5. Решение уравнений с одной переменной** [15] Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ с осями координат.	****Упр.1.9. Решение уравнений с одной переменной** [15, 9] Решите уравнение: 1) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$; 2) $718x^4 - 717x^2 - 1 = 0$; 3) Если в многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ вместо a, b, c и d подставлять числа -7, 4, -3 и 6 в каком угодно порядке, будут получаться многочлены с одной переменной, например: $-7x^3 + 4x^2 - 3x + 6$, $4x^3 - 7x^2 + 6x - 3$ и т.д. Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень.
Упр.1.2. Решение систем уравнений методом подстановки [21] $x^2 - 3y^2 = 4,$ $x + y = 6.$	***Упр.1.6. Решение систем уравнений методом подстановки** [9] $x + y \quad 8 - x \quad = 10,$ $x + y \quad 5 + y \quad = 20.$	
Упр.1.3. Решение систем уравнений методом алгебраического сложения [21] $x^2 - 2y^2 = -4,$ $x^2 + 2y^2 = 12.$	***Упр.1.7. Решение систем уравнений методом алгебраического сложения** [9] $xy = -12,$ $x^2 + y^2 + x - y = 18.$	****Упр.1.10. 1) Решение систем уравнений методом подстановки** [21, 9] $y^2 - 2xy - 3x^2 = 0,$ $x^3 + y^3 = 28.$ **2) Решение уравнений в общем виде** Докажите, что если уравнение n-й степени с целыми коэффициентами имеет целый корень, отличный от нуля, то он является делителем свободного члена.
Упр.1.4. Системы уравнений как математические модели [21] Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.	***Упр.1.8. Системы уравнений как математические модели** [21] Сумма двух натуральных чисел равна 50, а произведение на 11 меньше, чем разность их квадратов. Найдите эти числа.	

Выводы по второй главе

1. Представлены методические рекомендации по использованию задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы по 4 выделенным блокам. Установлено, что в 5-6 классах учащиеся как можно больше должны рассуждать вслух, дети должны проговаривать действия с целыми числами. В 7-9 классах материал должен разбираться с активным участием учащихся. Учащиеся в свою очередь должны владеть формулировками свойств, которые даны в виде правил, уметь их записывать и доказывать.

2. Выполнен анализ ОГЭ по теме исследования. Анализ показал, что в первой части государственного экзамена содержатся задачи на: изучение сложения и вычитания целых чисел; расположение чисел на координатной прямой; изучение свойств степени с целым показателем; задачи на решение квадратных неравенств. Во второй части основного государственного экзамена встречаются задачи на: использование всех арифметических действий с целыми числами; умножение и деление целых чисел; изучение свойств степени с целым показателем; решение уравнений с одной переменной.

3. Составлена система задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-6 классов. Система задач составлена в соответствии с основными требованиями по трем уровням (базовый, продвинутый, высокий).

4. Составлена система задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа» в курсе математики 7-9 классов. Система задач составлена в соответствии с основными требованиями по трем уровням (базовый, продвинутый, высокий).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделим основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Рассмотрены функции задач в обучении математике: обучающие функции задач; развивающие функции задач; воспитывающие и контролирующие функции задач.

2. Раскрыты основные цели изучения математики в основной школе и требования к математической подготовке в курсе математики 5-9 классов по теме «Натуральные и целые числа».

3. Определены основные методы (арифметический способ, метод полной и неполной индукции, метод перебора, метод «Проб и ошибок», метод малых изменений, опровергающий пример) и приемы (инверсия, рассмотрение крайних случаев, принцип Дирихле, введение вспомогательной неизвестной, перефразирование и прием получения следствий) решения задач решения задач повышенной трудности по данной теме.

4. Выделены важнейшие направления, по которым изучается данная тема – 4 блока; типы задач (уровневые: базовый, продвинутый и высокий) повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-9 классов. Проведен анализ основных типов задач повышенной трудности в курсе математики 5-9 классов. Анализ показал, что существуют различные типы задач повышенной трудности, также различный уровень задач (показатель сложности).

5. Представлены методические рекомендации по использованию задач повышенной трудности по теме «Натуральные и целые числа» в курсе математики основной школы по 4 выделенным блокам. Установлено, что в 5-6 классах учащиеся как можно больше должны рассуждать вслух, дети должны проговаривать действия с целыми числами. В 7-9 классах материал должен разбираться с активным участием учащихся. Учащиеся в свою

очередь должны владеть формулировками свойств, которые даны в виде правил, уметь их записывать и доказывать.

6. Выполнен анализ ОГЭ по теме исследования. Анализ показал, что в первой части государственного экзамена содержатся задачи на: изучение сложения и вычитания целых чисел; расположение чисел на координатной прямой; изучение свойств степени с целым показателем; задачи на решение квадратных неравенств. Во второй части основного государственного экзамена встречаются задачи на: использование всех арифметических действий с целыми числами; умножение и деление целых чисел; изучение свойств степени с целым показателем; решение уравнений с одной переменной.

7. Составлена система задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа» в курсе математики 5-6 классов. Система задач составлена в соответствии с основными требованиями по трем уровням (базовый, продвинутый, высокий).

8. Составлена система задач повышенной трудности по теме: «Натуральные и целые числа» в курсе математики 7-9 классов. Система задач составлена в соответствии с основными требованиями по трем уровням (базовый, продвинутый, высокий).

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартенев Ф.А. Нестандартные задачи по алгебре. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1976. – 93 с.
2. Виленкин Н.Я. Математика 5 класс. : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 280 с.: ил.
3. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с.
4. Егупова М.В. Изучение практических приложений геометрии в школе: учебно-методическое пособие. – М.МПГУ, 2011. – 46 с.
5. Зубарева А.Г. Программы. Математика. 5-6 классы. Алгебра. 7-9 классы. Алгебра и начала и начала математического анализа. 10-11 классы / авт.-сост. И.И. Зубарева и А.Г. Мордкович. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Мнемозина, 2009. – 63 с.
6. Зубарева И.И. Математика. 5 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 270 с.
7. Зубарева И.И. Математика. 6 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 8-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 264 с.
8. Истомина Н.Б. Уроки математики: 6 класс. Содержание курса. Планирование уроков. Методические рекомендации: пособие для учителей / Н.Б. Истомина, З.Б. Редько. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2007. – 224 с.: ил.
9. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.

10. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе математики 4-5 классов: Кн. для учителя. / Н.П. Кострикина – М.: Просвещение, 1986. – 94 с.

11. Кузнецова Г.М. Программы для общеобразоват. школ, гимназий, лицеев: Математика. 5-11 кл. / Сост. Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк. – 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2002. – 320 с.

12. Куимова Е. И., Куимова К. А., Титова Е. И. Функции задач в обучении математике // Молодой ученый. — 2014. — №12. — С. 280-281.

13. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

14. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

15. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.

16. Манвелов С.Г. Задания по математике на развитие самоконтроля учащихся: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1997. – 143 с.

17. Матушкина З.П. Методика обучения решению задач: Учебное пособие.- Курган: Изд-во Курганского гос.ун-та, 2006. – 154 с.

18. Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в V-VIII классах: пособие для учителя. – 87 с.

19. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – 17-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.

20. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – 12-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

21. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Алек-
120 сандрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская, П.В. Семенов. – 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

22. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

23. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

24. Муравин, Г.К. Математика. 5 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват.учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В.Муравина. – 11-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2010. – 325 с.

25. Муравин, Г.К. Математика. 6 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват.учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В.Муравина. – 7-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2011. – 324 с.

26. Муравина О.В. Рабочие программы. Математика 5-9 классы: учебно-методическое пособие / сост. О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2012. – 126, [2] с.

27. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru/. – Последнее обновление 20.05.2018.

28. Пойя Д. Как решать задачу. Пособие для учителей. – М.: Госучпедгиз, 1961. – 209 с.

29. Потапов М. К. Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М. : Просвещение, 2017. — 143 с. :

30. Потапов М. К. Математика. Методические рекомендации. 6 класс : пособие для учителей общеобразоват. учреждений / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2012. — 000 с.

31. Потапова Н. Ю. Решение нестандартных задач по математике с использованием информационных технологий // Школьная педагогика. — 2017. — №2.1. — С. 43-47.

32. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208 с.

33. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М., «Просвещение», 1968. – 162 с.

34. Соловейчик И.Л. Я иду на урок математики, 5 класс. / И.Л. Соловейчик // Кн. Для учителя. – М.: Издательство «Первое сентября», 2000. – 352 с.:ил.

35. Соловейчик И.Л. Я иду на урок математики, 6 класс. / И.Л. Соловейчик // Кн. Для учителя. – М.: Издательство «Первое сентября», 2002. – 320 с.:ил.

36. Субботкина З. Н. Роль обучения математике в образовательном процессе // Проблемы современной науки и образования / Problems of modern science and education – 2015. – 4 с.

37. Суворова С. Б. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс: учебное пособие для общеобразоват. организаций / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова и др.]. — М. : Просвещение, 2015. — 246 с.

38. Суворова С. Б. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс: учебное пособие для общеобразоват. организаций / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова и др.]. — М. : Просвещение, 2017. — 214 с.

39. Суворова С. Б. Методические рекомендации. 7 класс: учебное пособие для общеобразоват. организаций / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова и др.]. — М. : Просвещение, 2015. — 187 с. : ил. — ISBN 978-5-09-035910-8.

40. Суворова С.Б. Математика. Методические рекомендации. 5 класс: пособие для учителей общеобразоват. учреждений/ [С. Б.Суворова, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева, Л.О. Рослова.] — М. : Просвещение, 2013. – 200 с.

41. Суворова С.Б. Математика. Методические рекомендации. 6 класс: пособие для учителей общеобразоват. организаций / [С. Б. Суворова, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М. : Просвещение, 2013. — 000 с.

42. Титова Е. И., Чапрасова А. В. Воспитательные функции задач // Молодой ученый. — 2015. — №6. — С. 696-698. — URL

43. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/938. – Последнее обновление 07.02.2017.

44. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/. – Последнее обновление 20. 05. 2018.

45. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи / Л. М. Фридман, Е.Н. Турецкий. - М.: Просвещение, 1989. – 126 с.

46. Bonato M., Fabbri S., Umilta` C., and Zorzi M. The Mental Representation of Numerical Fractions: Real or Integer [Text] / M. Bonato // Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance. University of Oradea Publisher, 2007. – PP. 1410-1419.

47. Bresolin D. Optimal decision procedures for MPNL over finite structures, the natural numbers, and the integers [Text] / D. Bresolin // Elsevier. University of Oradea Publisher, 2013. – PP. 98-115.

48. Teppo A. Visual representations as objects of analysis: the number line as an example [Text] / A. Teppo // Springer. University of Oradea Publisher, 2013. – PP. 600-613.

49. Voskoglou M. and Kosyvas G. Analyzing students' difficulties in understanding real numbers [Text] / M. Voskoglou // Redimat. University of Oradea Publisher, 2012. – PP. 301-336.

50. Yua F., Ko K. On logarithmic-space computable real numbers [Text] / F. Yua // Elsevier. University of Oradea Publisher, 2012. – PP. 712-714.

Приложение

Решения, указания и ответы из п.7.1 «Типы задач». 5 класс

Решения задач к блоку 5.1

Упр.1.2. ***Ответ***: в) Множитель. ***Указание:*** а) Использовать группировку: $1+99 + 3+97 + 5+95 + \cdots + 49+51$. б) Использовать группировку: $(99-97)+(95-93)+\cdots+(7-5)+(3-1)$.

Упр.1.3. ***Ответ:*** а) 21 нулем, в) 832 рубля. ***Решение:*** б) поскольку частное равно делителю, то искомое двузначное число равно квадрату однозначного числа. Так как $3\times3=9$ – однозначное, а $4\times4=16$ – двузначное, то искомое число будет среди чисел: 16, 25, 36, 49, 64, 81 условию задачи удовлетворяет лишь число 81, так как $81{:}\ 8+1\ =9$. ***Указание:*** в) перефразировать задачу так: «Какова стоимость кухонного гарнитура, если ее половина равна 416 р.?».

Упр.1.4. ***Решение:*** все числа, оканчивающиеся на 0, и двузначные числа 11, 22, …, 99, 12, 24, 36, 48, 13, 26, 39, 14, 28, 15, 16, 17, 18, 19.

Упр.1.5.** ***Ответ: 1) 10 000; 2) 999 999; 3) 1 000 001; 4) 999 999 999 998.

Упр.1.6.** ***Решение: если бы вычисления ученика были правильны, то суммы чисел в строках и столбцах таблицы были бы равны. Но $818+819+917\neq185+722+648$. Значит, ученик ошибся.

Упр.1.7.** ***Указание: можно перефразировать задачу: «Что больше и на сколько 12а или 12(а+5)?». ***Решение:*** б) $16\times16=256$. В) если частное равно 6, а делитель в 6 раз больше частного, то делитель равен 36. Окончательно получаем, что делимое равно $36\times6=216$.

Упр.1.8.** ***Указание: данное задание решаем с помощью прикидки. Сложив 1532 и 479, получаем 2011, что примерно и ожидается после прикидки.

****Упр.1.9.** ***Ответ:*** а) $12{:}3+4\ \times5=40$, б) $(9664 : 32 - 2)\times(195 - 37\ \times5) = 3\,000$, в) 30000 раз.

****Упр.1.10.** ***Решение:*** А) пусть a и b – длины сторон прямоугольника. Если $a = 1$, то $b = 1;2;\dots;9$. Если $a = 2$, то $b = 2;3;4$. $a = 3$, то $b = 3$. Сумма площадей прямоугольников равна $1+2+\cdots+9 \; +2\times \; 2+3+4 \; +3\times3 = 72$ (кв. см). ***Ответ:*** Б) шесть способов: $3\times26; 3\times21+5\times3; 3\times16+5\times6; 3\times11+5\times9; 3\times6+5\times12; 3\times1+5\times15$.

Решения задач к блоку 5.2

Упр.1.1. ***Ответ:*** 1210. Указание: вычислить сумму $13+17+21+25+\cdots+81+85+89+93+97$.

Упр.1.2. ***Ответ:*** А) 1) 734, 2) 142.

Упр.1.3. ***Решение:*** «Восемь». Все остальные слова обозначают числа, кратные 3. Возможные ответы: 1) Словам, напечатанным заглавными буквами, подходит слово «нуль», так как числа 4, 18, 100 и 0 – четные, а числа 5, 11, 37, 1 – нечётные. 2) Число букв в каждом из слов «четыре», «восемнадцать», «сто» и в словосочетании «тридцать семь».

Упр.1.4. ***Решение:*** $3780 = 2^2\times3^3\times5\times7; 7056 = 2^4\times3^2\times7^2$. НОД $(3780;7056) = 2^2\times3^2\times7 = 252$. ***Ответ:*** 1) 36; 2) 72.

Упр.1.5.** ***Указание: если a не делится на 3 и b не делится на 3, то могут быть следующие случаи: а) a и b при делении на 3 дают остатки, равные 1; б) a и b при делении на 3 дают остатки, равные 2; в) одно из чисел a или b дает при делении на 3 остаток 1, а другое – 2.

Упр.1.6.** ***Решение: предположим, что такой пример на деление существует. Тогда делимое a, делитель b, частное q и остаток r – нечетные числа. Но из равенства $a = bq + r$ следует, что a – четное число. Полученное противоречие доказывает неверность высказанного предположения. Значит, Коля прав.

Упр.1.7.** ***Ответ: а) $6n\pm1, n\in N$, б) 111, $3n$, где n – натуральное число.

Упр.1.8.** ***Ответ: 1) Да; ***Решение:*** 2) при делении 439 на 18 получаем частное 24 и остаток 7. Решением обратной задачи выполняем проверку: $24 \times 18 + 7 = 439$.

****Упр.1.9.** ***Ответ:*** а) $67:17 = 3 \quad \text{ост.}16$, б) 1) k; 2) bc; 3) $\ a - k\ : b$.

****Упр.1.10.** ***Ответ:*** 11, 12, 15, 24 и 36.

Решения задач к блоку 5.3

Упр.1.1. ***Ответ:*** а) 4; б) 10.

Упр.1.2. ***Ответ:*** 1) увеличится на 7; 2) уменьшится на 14.

Упр.1.4. ***Ответ:*** а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8; б) 11, 12, 13.

Упр.1.5.** ***Ответ: 1) 5; 2) 9 и 19.

Упр.1.6.** ***Ответ: а) 852, б) 352.

Упр.1.8.** ***Решение: 2) сначала сравниваем каждое из чисел с 25 321, затем отобранные числа сравниваются между собой.

****Упр.1.10.** ***Ответ:*** А) 1) 0, 1; 2) 0, 2; 3) например, 0, 1; Б) 1) 20; 2) цифра 7 в разряде единиц и в разряде десятков встречается по 10 раз.

Решения задач к блоку 5.4

Упр.1.1. ***Ответ:*** а) 48; б) 62; в) 49; г) 112.

Упр.1.2. ***Ответ:*** 1) 4; 2) 5; 3) не имеет решения.

Упр.1.3. ***Решение:*** на нуль делить нельзя. В самом деле, рассмотрим уравнение: $\text{y} \times 0 = 15$. В результате деления 15 на 0 должно поучится число, произведение которого на 0 равно 15. Но произведение любого числа на нуль равно нулю. Значит, такого числа не существует, а деление на нуль не имеет смысла.

Упр.1.4. ***Ответ:*** а) $2\text{x} + 6(\text{x} - 7) = 54$; б) $6(\text{x} - 7) - 2\text{x} = 6$.

Упр.1.5.** ***Ответ: 1) 406; 2) 101; 3) 202.

Упр.1.6.** ***Ответ: 269 999.

Упр.1.7.** ***Решение: обозначим третье слагаемое буквой x, тогда сумма трех слагаемых – $(6485 + (6485 - 4163) + \text{x})$. По условию задачи сумма трех слагаемых равна 15731. Составим уравнение: $6485 + \ 6485 - 4163 \ +$

$x = 15731, 6485 + 2322 + x = 15731$; $8807 + x = 15731$;$x = 15731 - 8807$; $x = 6924. 6485 - 4163 = 2322, 6485 + 2322 = 8807, 15731 - 8807 = 6924.$ Итак, третье слагаемое равно 6924.

Упр.1.8.** ***Ответ: 1. 18. ***Решение:*** 2. $2x = 183 - 97$, $2x = 86$, а $x = 43$.

****Упр.1.9.** ***Ответ:*** 1) 145; 2) 32; 3) 4647; 4) 16.

****Упр.1.10.** ***Решение:*** 1) Пусть задуманное число х, тогда составим уравнение:$3x + 15 = 177$; $x = 177 - 15$; $3x = 162$; $x = 162:3$; $X = 54$. ***Ответ:*** 54. 2) Обозначим задуманное число х, тогда по условию задачи составим уравнение: $2x - 48 = 244$; $2x = 244 + 48$; $2x = 292$; $X = 292:2$; $X = 146$. ***Ответ:*** 146

Б) ***Ответ:*** А) Верное. ***Решение:*** Б) $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$. Обратным действием, т.е. вычислением значения произведения $2^2 \times 3^2 \times 7$, осуществляется проверка, в результате чего должны получить 252.

Решения, указания и ответы из п.7.2 «Типы задач». 6 класс

Решения задач к блоку 6.1

Упр.1.1. ***Ответ:*** а) -9, б) -2; в) 13; г) -14; д) 0; е) -8.

Упр.1.2. ***Ответ:*** 1) четным, 2) четным, 3) нечетным, 4) невозможно определить.

Упр.1.4. ***Ответ:*** а) 43; б) -260; в) -13.

Упр.1.5.** ***Ответ: 1) 4; 2) 50.

Упр.1.6.** ***Решение: да, можно. Например: 2, 2, 2, -3, 2, 2, 2, -3, 2, 2, 2, -3, 2, 2, 2, -3, 2.

Упр.1.7.** ***Решение: допустим, что $1234 = a^2 - b^2$, где a и b – целые числа. Тогда $1234 = a - b \quad a + b$.Рассмотрим четыре случая: а) a – четное, b – четное; б) a – четное, b – нечетное; в) a – нечетное, b – четное; г) a – нечетное, b – нечетное. В случаях б) и в) числа $a - b$ и $(a + b)$ нечетны, значит, их произведение нечетно и не может равняться четному числу 1234.

В случаях, а) и г) числа $a-b$ **и** $(a+b)$ четны, значит, их произведение делится на 4 и не может равняться числу 1234, на 4 не делящемуся.

Упр.1.8.** ***Ответ: А) -2, Б) +3.

****Упр.1.9.** ***Решение:*** а) Используя группировку членов данного выражения, получим $1^2 + 101^2 - 100^2 + 99^2 - 98^2 + \dots + 3^2 - 2^2 = 201 + 197 + \dots + 9 + 5 + 1 = \frac{201+1}{2} \times 51 = 5151$; Б) так как $-100 + 100 = -99 + 99 = \dots = -1 + 1 = 0$, то рассматриваемая сумма равна $102 + 101 = 203$.

****Упр.1.10.** ***Ответ:*** $a_n = n^2, n \in N$.

Решения задач к блоку 6.2

Упр.1.1. ***Указание:*** учащиеся обычно сразу учитывают техническую сложность вычисления НОД (3431;876) путем разложения чисел на простые множители, выполняют задание 3(в) методом последовательного деления с остатком.

Упр.1.2. ***Ответ:*** а) составное; б) «Сорок» - единственное составное число среди простых.

Упр.1.3. ***Ответ:*** искомым числом может быть 52128 или 52524.

Упр.1.5.** ***Указание: Искомый наибольший общий делитель должен быть делителем числа 153, отличным от 153.

Упр.1.6.** ***Решение: а) Пусть числа m и n – близнецы и $3 < m < k < n$, тогда k – четное число, т.е. кратно 2. Числа m, k и n – три последовательных натуральных числа. Значит, одно из них делится на 3. Но поскольку ни m, ни n не делятся на 3, то k делится на 3. Тогда, если k делится на 2 и на 3, то k делится на 6. Б) Составив таблицу видим, что уже при $n = 6$ мы получили составное число.

Таблица 23

Простые и составные числа

n	1	2	3	4	5	6			
$6n-1$	5	11	17	23	29	$35 = 5 \times 7$			

Упр.1.7.** ***Решение: 201201201201 делится на 3, но не делится на 9, то оно не может быть квадратом целого числа.

Упр.1.8.** ***Решение: А) Неверно. Например, 7 и 14 не является взаимно простыми, хотя 7 – число простое. Б) 171, и 1040 не могут быть общими делителями, так как на них не делится нацело число 57. Остается число 57, которое и должно быть наибольшим общим делителем чисел 171 и 1040, что можно проверить вычислением.

****Упр.1.9.** ***Ответ:*** а) 420 дней. ***Указание:*** Данная задача равносильна следующей: «Найти наименьшее общее кратное чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7». Б) каждый месяц учащиеся вносили $64001:7 = 9143$ коп., то 9143 произведение числа учеников класса на ежемесячный взнос. Число 9143 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел: $9143 = 9143 \times 1$ и $9143 = 223 \times 41$. Исходя из условий задачи, получаем, что в классе 41 ученик и каждый вносил ежемесячно 2 р. 23 к.

****Упр.1.10.** ***Ответ:*** а) 3 000 803, 3 020 303, 3 030 703, 3 050 203, 3 060 603, 3 080 103, 3 090 503. Б) 15.

Решения задач к блоку 6.3

Упр.1.1. ***Ответ:*** а) 25, 25, 78, 5, 1, 9, 71; б) 2, -2, 6, -6, 0.

Упр.1.2. ***Ответ:*** а) 14; б) 11; в) 6; г) 1.

Упр.1.3. ***Ответ:***

1) $-378 \times -538 > 0$; 2) $-678 \times 876 - 876 = 0$.

Упр.1.4. ***Ответ:*** а) 1) 4; 2) 30. Б) 2) $b = -4$; 4) $b = 5$.

Упр.1.6.** ***Ответ: возможны лишь два случая: $a > b > c$ или

$$a > b > c > 0.$$

Упр.1.7.** ***Ответ: 1) $-2671 < -2670$; 2) $-9083 > -9132$.

Решение: б) имеем

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 20 > 2 \times 5 \times 10 \times 11 \times \ldots \times 20 > 10^{12}$ и

$1 + 2 + 3 + \cdots + 1000000 < 1000000 \times 1000000 = 10^{12}$.

Итак, $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 20 > 1 + 2 + 3 + \cdots + 1000000$.

****Упр.1.9.** ***Решение:*** при изменении направления числовой оси знак каждого числа (кроме, конечно, нуля) изменяется на противоположный. Так как при этом сумма не изменилась, то она может быть равной только нулю. Следовательно, искомое четвертое число равно $0-(-5-3+6)=2$.

****Упр.1.10. Ответ:** а) увеличились на |m|; б) уменьшились на |m|; Существует. Это $\frac{m}{2}$.

Решения задач к блоку 6.4

Упр.1.1. ***Ответ:*** а) 4, б) 2.

Упр.1.2. ***Ответ:*** $x=5$.

Упр.1.3. ***Решение:*** можно составить уравнение: $3x-5=x+5$, $3x-x=5+5$, $2x=10$, $x=10:2$, $x=5$. По условию задачи в первом бидоне было в 3 раза больше, значит, в первом бидоне было 15 литров молока. ***Ответ:*** в одном бидоне было 5 л, а в другом – 15 л молока.

Упр.1.4. ***Ответ:*** 1) б); 2) а).

Упр.1.5.** ***Решение: Произведением xy целых чисел x и y может быть равным 4747 только в четырех случаях:$1\times 4747, 47\times 101$, -1×-4747 и -47×-101. Проверкой убеждаемся, что оба условия выполняются только в тех случаях, когда $x=47$ и $y=101$ или $x=-101$ и $y=-47$.

Упр.1.6.** ***Решение: а) $x+1\quad x^2+1\ =0$. Так как $x^2+1>0$, то $x+1=0$, $x=-1$. *Б)* $n-1\ n\ k-1\ =1\times 2\times 47$. Это равенство в области натуральных чисел возможно, очевидно, только при $n=2$ и $k=48$.

Упр.1.7.** ***Ответ: 1) 0 или 1 или -1; 2) $x=2$ и $y=0$.

Упр.1.8.** ***Ответ: -2.

****Упр.1.9.** ***Решение:*** а) предположим противное: пусть существуют целые числа x_0 и y_0, удовлетворяющие уравнению $3x^2-4y^2=13$. Тогда имеет место равенство $3({x_0}^2-1)-4{y_0}^2=10$. Нетрудно заметить, что x_0 – нечетное число, поэтому $({x_0}^2-1)$ делится на 4, следовательно, и 10 должно быть кратным 4. Полученное противоречие доказывает неверность высказанного предположения. Б) Если приписать семерку впереди него, то получится $7 \times 10^5 + x$. Если приписать семерку в конце его, то получим число $10x + 7$. По условию $7 \times 10^5 + x = 5\ 10x + 7$, получим: $x = 14\,285$.

****Упр.1.10.** ***Ответ:*** 1) 0 или 2. ***Решение:*** 2) перенеся все члены в левую часть уравнения, получим после несложных преобразований: $x^2\ \ x - 7\ = 0$.

Решения, указания и ответы из п.8.1 «Типы задач». 7 класс

Решения задач к блоку 7.1

Упр.1.1. ***Ответ:*** 1) $a^2 + 2ax + x^2$; 2) $b^2 - 2by + y^2$; 3) $c^2 + 2cd + d^2$; 4) $m^2 - 2mn + n^2$.

Упр.1.2. ***Ответ:*** а) 2, 16, 32; б) -5, 5, -5.

Упр.1.3. ***Ответ:*** а), в), д), е), ж), з).

Упр.1.4. ***Решение:***

$$3a^2 - 5a + 7\ \ +\ \ -2a^2 + 7a - 9\ \ -\ \ a^2 + 8a - 5\ \ =$$

$$= 3a^2 - 2a^2 - a^2 - 5a + 7a - 8a + 7 - 9 + 5 = -6a + 3.$$

Упр.1.5.** ***Указание: ввести подстановку a=-12b.

Ответ: $(x^2 - 1 + 2x)^2$.

Упр.1.6.** ***Ответ: да, существуют. Например: $x = 66, y = 33$.

Упр.1.7.** ***Ответ: при $x = 7$ данное выражение равно $3^{2^1} = 9$.

Упр.1.8.** ***Ответ: неверно.

Например, при n=6 число $6^3 + 5 \times 6 - 1 = 245$ делится на 5, 7^2.

****Упр.1.9.** ***Указание:*** 1) обозначить данные числа как $n - 1, n, n + 1$, где $n \in Z$. ***Ответ:*** 2) если их сумма – число простое, а модуль разности равен 1.

****Упр.1.10.** ***Решение:*** 1) положив, a=2b+3, будем иметь $2^{2b+3} + 4^b = 2^{2b}\ \ 2^3 + 1\ \ = 2^{2b} \times 9 = (2^{2b} \times 3)^2$, и, следовательно, в данном множестве чисел бесконечно много точных квадратов.

Указание: 2) для упрощения рассуждений здесь удобно использовать подстановку $p^k = a,$ и затем представить полученный трехчлен $2a^3 + 4a + 10$ в виде $(3a^3 + 3a + 9) - \ a - 1 \ a \ a + 1 \ + 1$.

Решения задач к блоку 7.2

Упр.1.2. ***Решение:*** подбирать простые множители здесь долго, однако можно воспользоваться тем, что данное число на 9 меньше, чем число 400, которое является квадратом числа 20. Дальнейшее решение сложностей не представляет: $391 = 400 - 9 = 20^2 - 3^2 = \ 20 - 3 \ \ 20 + 3 \ = 17 \times 23$. Числа 17 и 23 являются простыми.

Упр.1.3. ***Ответ:*** а) а; б) x^5; в) y^2; г) z^4.

Упр.1.4. ***Ответ:*** а) $49z^{\mathbf{10}}t^{\mathbf{14}}$; б) $x^7y^{\mathbf{11}}z^3$; в) $55p^3q^4$.

Упр.1.5.** ***Указание: если $11^{n+2} + 12^{2n+\mathbf{1}} = 133a,$ где а – целое число, то $11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11 \times 133a - 11 \times 12^{2n+\mathbf{1}} + 12^2 \times 12^{2n+\mathbf{1}}$.

Упр.1.6.** ***Решение: $1431 = 1600 - 169 = \ 40 - 13 \ \ 40 + 13 \ = 53 \times 27$. ***Ответ:*** 53 и 27.

Упр.1.7.** ***Ответ: а) $4abc$; б) $99x^2yz$; в) $12m^6n^2k^3$; г) $86p^2q^2r^2$.

Упр.1.8.** ***Ответ: а) $12p^4 + 4p^3$; б) $7y^3 + 3y^2 - 8y - 5$.

****Упр.1.9.** ***Решение:*** 1) для доказательства этого факта положим, что число $7^{\mathbf{14}} + 3 \times 14 - 1 = 9k,$ где $k \in N,$ и воспользуемся подстановкой $7^{\mathbf{14}} = 9k - 3 \times 14 + 1 = 9k - 41$. Получим: $7^{\mathbf{15}} + 3 \times 15 - 1 = 7 \times 7^{\mathbf{14}} + 44 = 7 \ \ 9k - 41 \ + 44 = 9 \ \ 7k - 27 \ $. Следовательно, рассматриваемое число делится на 9. Б) 1) число $3^{\mathbf{1991}}$ кратко 3, обозначим его 3m, тогда данное число можно записать в виде $2^{3m} + 1 = (2^m)^3 + 1 = \ 2^m + 1 \ \ 2^{2m} - 2^m + 1 \ $. Отсюда, так как каждый множитель – натуральное число, более 1, то $2^{3m} + 1$ – число составное. Значит, и число $1 + 2^{3^{\mathbf{1991}}}$ тоже составное. 2) числа $2k + 1$ и $9k + 4$ являются взаимно простыми, так как $9(2k + 1) - 2(9k + 4) = 1$. Так как $9k + 4 = 4(2k - 1) + (k + 8)$ и $2k - 1 = 2(k + 8) - 17$, то $(9k + 4;\ 2k - 1) = (2k - 1;\ k + 8) = (k + 8;\ 17)$. Если $k \equiv 9 \ mod 17$, то $(k + 8;\ 17) = 17$. В противном же случае $17 \nmid k + 8$ и, следовательно, $(k+8;\ 17)=1$. Следовательно, $(9k+4;\ 2k-1)=17$, если $k\equiv 9(mod17)$ и $(9k+4;\ 2k-1)=1$, если $k\not\equiv 9\ \ mod17$.

****Упр.1.10.** ***Решение:*** зная правило нахождения НОК и НОД чисел с помощью разложения их на простые множители, легко находим способ решения: 1) Представим НОК – число 90 – в виде произведения простых множителей: $90=2\times 3\times 3\times 5$. 2) Так как НОД искомый чисел равен 6, а друг на друга они не делятся (ни одно из чисел не равно 6), то одно из них равно $6\times 3=18$, а другое - $6\times 5=30$. ***Ответ:*** 18 и 30.

Решения задач к блоку 7.3

Упр.1.1. ***Ответ:*** а) 8; б) -8; в) -3; г) -1.

Упр.1.2. ***Ответ:*** 1) -a; 2) n+1.

Упр.1.3. ***Ответ:*** 1) нет, например, $-7\ >\ -5\ ,-7<-5$; 2) можно, из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Упр.1.4. ***Ответ:*** 1) вершины C и D справа от отрезка AB, тогда C(8;-4), D(8;1); 2) вершины C и D слева от отрезка AB, тогда C(-2;-4), D(-2;1).

Упр.1.5.** ***Ответ: (-3;-4). ***Замечание:*** для обоснования использовать признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

Упр.1.6.** ***Решение: $(-7)^5$ – единственное отрицательное число среди положительных чисел.

Упр.1.7.** ***Ответ: 1) задумано число -5; 2) задумано число 12.

Упр.1.8.** ***Ответ: A(4;4), B(4;-4), C(-4;-4), D(-4;4).

****Упр.1.9.** ***Решение:*** 1) а) $63^5<64^5=8^{10}$. Значит, $63^5<8^{10}$; б) $15^6<16^6=4^{12}<7^{12}$. Итак, $15^6<7^{12}$. 2) а) $31^{11}<32^{11}=2^{55}<2^{56}=16^{14}<17^{14}$. Следовательно, данное неравенство верно; б) нет.

****Упр.1.10. 1)** ***Решение:*** пусть 2n-1 и 2n+1 – два последовательных нечетных натуральных числе. Имеем: $(2n-1)^2-(2n+1)^2\ =\ -8n\ =8n$, $2\ \ \ 2n-1\ +\ 2n+1\ \ =8n$. Утверждение доказано. **2)** ***Ответ:*** (1;2).

Решения задач к блоку 7.4

Упр.1.1. ***Ответ:*** а) -5; б) 3; в) -2.

Упр.1.2. ***Ответ:*** а) да; б) да; в) нет; г) да.

Упр.1.3. ***Ответ:*** $2x - 17 = 75$.

Упр.1.4. ***Ответ:*** в).

Упр.1.5. 1)** ***Указание: подстановка $y = x - 2$ приводит к исключению из данного кубического уравнения члена, содержащего переменную во второй степени. ***2) Решение:*** предположим, что существуют такие натуральные числа x_0 **и** y_0, что имеет место равенство $8x_0 + 7y_0 = -3$. Тогда $(8x_0 + 7y_0)$ – число натуральное и оно равно -3. Противоречие.

Упр.1.6.** ***Ответ: (1:14), (2;13), (3;12), (4;11), (5;10), (6;9), (7;8), (8;7), (9;6), (10;5), (11;4), (12;3), (13;2), (14;1).

Упр.1.7.** ***Ответ: карандаш стоит 3 коп., а блокнот – 5 коп.

Упр.1.8.** ***Ответ: 3 и 0 или -3 и 1. ***Указание:*** показать, что решение заданной системы сводится к решению совокупности систем уравнений:

$$\begin{matrix} x = 3, \\ x + 6y = 3, \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x = -3, \\ x + 6y = 3. \end{matrix}$$

****Упр.1.9.** 1) ***Указание:*** после замены переменной $y = 8 - x^2$ исходное уравнение приводится к виду $(y+1)^4 + (y-1)^4 = 16$ или $y^4 + 6y^2 - 7 = 0$. 2) ***Решение:*** пусть k такое целое число, что при некотором натуральном n дробь $\frac{4n+7}{5} = k$. Если $4n + 7 = 5k$, то $4(n+3) = 5(k+1)$, а поэтому $n + 3$ должно делиться на 5, ведь НОД $(4,5) = 1$. Следовательно, $n + 3 = 5p$, где $p \in N$. ***Ответ:*** б) массы одинаковы. В) 1) $x = 55 \times 10^{18}, y = 45 \times 10^{18}$; 2) $a = 2$ и $b = 1$.

****Упр.1.10.** ***Решение:*** а) На основании определения модуля числа имеем: $x - 3 = \begin{matrix} x - 3, \text{если } x \geq 3, \\ 3 - x, \text{если } x < 3. \end{matrix}$ Поэтому имеем: $x - 3 = 7$ или $3 - x = 7$, откуда $x = 10$ или $x = -4$. Аналогично решаем б) $x + 2 = 9$. $x = 7$ **или** $x = -11$.

Б) ***Указание:*** переформулировать задачу так: «Выяснить, верна ли пропорция $\frac{-14}{6} = \frac{21}{-9}$.

Решения, указания и ответы из п.8.2 «Типы задач». 8 класс

Решения задач к блоку 8.1

Упр.1.2. ***Ответ:*** 1) $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3x^2a + x^3$; 2) $(c-b)^3 = c^3 - 3c^2b + 3b^2c - b^3$;

3) $(4+2a)^3 = 64 + 96a + 96a^2 + 8a^3$; 4) $(a^3-c)^3 = a^9 - 3a^6c + 3a^3c^2 - c^3$.

Упр.1.3. ***Ответ:*** $x^2 + 22x - 23 = \; x - 1 \;\; x + 23$.

Упр.1.4. ***Решение:*** так как ни цифрой 2, ни цифрой 3, ни единственным нулем квадрат целого числа оканчиваться не может, то может оканчиваться только цифрой 5. Тогда предпоследняя цифра 2. Значит квадрат двузначного числа 3025, искомое число 55.

Упр.1.5.** ***Решение: пусть x – цифра десятков, а y – цифра сотен трехзначного числа. Тогда цифра единиц будет y-2, а потому искомое число равно $100y + 10x + y - 2 - 100 \;\; y - 2 \;\; - 10x - 2 = \cdots = 198$.

Упр.1.6.** ***Указание: решение задачи сводится к доказательству тождества: $a \times a^5 \times a^9 \times a^{13} = a^{28} = (a^7)^4$.

Упр.1.7** ***Ответ: $x - 1 \;\; x^2 + x + 12$. ***Указание:*** представить данный многочлен в виде суммы двух многочленов: $x^3 + 11x - 12 = \; x^3 - x \; + \; 12x - 12$.

Упр.1.8.** ***Решение этой задачи представляет собой цепочку следствий, вытекающих из данных условий. Сначала находится первая цифра искомого числа, потом вторая, третья и т.д. В ходе этих рассуждений выясняется, что искомое натуральное число, обладающее указанным в задаче свойством, равно 102564.

****Упр.1.9.** ***Решение:*** 1) пусть x – сумма цифр двузначного числа y. По условию $x^3 = y^2$. Это равенство в натуральных числах возможно, очевидно, только тогда, когда $x = z^2$ и $y = z^3$, причем $z \in N$. Так как сумма цифр двузначного числа не больше 18, то $z^2 \leq 18$, а поэтому $z \leq 4$. Перебором убеждаемся, что имеется единственное число, удовлетворяющее условиям задачи: 27. 2) Пусть данное число равно a^2, а измененное число b^2, тогда $a^2 - 3000 + 3 = b^2$, или $a^2 - b^2 = 2997$, откуда $(a - b) \times (a + b) = 2997 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 37$. Ясно, что $a + b$ больше 37, а из условия задачи следует, что $a + b$ меньше 200 (a и b – двузначные числа). Следовательно, $a + b = 3 \times 37 = 111$, $a - b = 3 \times 3 \times 3 = 27$. Тогда $2a = 138, a = 69$,

$a^2 = 7761$.

****Упр.1.10.** ***Решение:*** пусть a и b – числа, удовлетворяющие условию задачи. Так как $a + b < a - b$, то $b < 0$. Отсюда если $ab < a + b$ и $b < 0$, то $a > 0$, иначе $ab > 0 > a + b$. Итак, $b < 0$ b $a > 0$.

Решения задач к блоку 8.2

Упр.1.1. ***Решение:*** из условий задачи получаем уравнение:

$$\begin{cases} x = y + 4; \\ xy = 96. \end{cases} \rightarrow y(y + 4) = 96; \rightarrow y^2 + 4y - 96 = 0; D = 16 + 496 = 400; y_{1,2} = \frac{-4 \pm 20}{2}; y = 8, x = 12.$$

Ответ: 8 и 12.

Упр.1.2. ***Решение:*** разобьем множество натуральных чисел на 5 классов: к первому классу отнесем все числа, которые при делении на 5 дают остаток, равный 0, ко второму классу – остаток, равный 1 и т.д. Разность двух чисел, которые принадлежат одному классу, делится на 5, а разность двух чисел, принадлежащих разным классам, на 5 не делится. Если возьмем шесть чисел, то среди них обязательно найдутся два числа, которые принадлежат одному классу, и их разность делится на 5.

Упр.1.3. ***Решение:*** 1) $3^{-4} \times 3^{6} = 3^{6-4} = 3^{2} = 9$; 2) $2^{4} \times 2^{-3} = 2^{4-3} = 2^{\mathbf{1}} = 2$; 3) $5^{-3} : 5^{-3} = 1$; 4) $(2^{-4})^{-\mathbf{1}} = 2^{4} = 16$; 5) $3^{-4} \times (3^{-2})^{-4} = 3^{-4} \times 3^{8} = 3^{8-4} = 3^{4} = 81$.

Упр.1.4. ***Решение:*** обозначим число 71 для краткости через а. Тогда

$$a-1 \quad a^{9}+a^{8}+a^{7}+\cdots+a^{2}+a+1 \quad +1=$$

$$= \quad a^{\mathbf{10}}+a^{9}+a^{8}+\cdots+a^{3}+a^{2}+a \quad - \quad a^{9}+a^{8}+a^{7}+\cdots+a^{2}+a+1 \quad +1=$$

$a^{\mathbf{10}}$. Следовательно, данное выражение равно $71^{\mathbf{10}}$.

Упр.1.5.** ***Решение: 1) $4+1 \quad 2+1 \quad 2+1 \quad = 45$ делителей. ***Ответ:*** 2) 216 делителей.

Упр.1.6.** ***Решение: пусть НОД рассматриваемых чисел больше 9. Обозначим его d. Тогда разность любых двух рассматриваемых чисел должны делиться на d. Однако разность чисел 123 456 798 и 123 456 789, равная 9, не делится на d. Следовательно, 9 – НОД этих чисел.

Упр.1.7.** ***Решение: число 43 оканчивается цифрой 3, 43^{2} – 9, 43^{3} – 7, 43^{4} –1. Значит, последние цифры в дальнейших степенях числа 43 будут повторяться: 3, 9, 7, 1 и т.д. Так как $43^{3} = 43^{4\times\mathbf{10}+3} = (43^{4})^{\mathbf{10}} \times 43^{3}$, а $(43^{4})^{\mathbf{10}}$ оканчивается единицей, то 43^{43}, как и 43^{3}, оканчивается цифрой 7. Аналогично устанавливаем, что последние цифры степеней $17^{\mathbf{1}}, 17^{2}, 17^{3}, 17^{4}$ равны соответственно 7, 9, 3, 1, т.е. Следовательно, разность $43^{43} = 17^{\mathbf{17}}$ оканчивается нулем. 2) 54^{35} заканчивается на 4; $8^{2} = 64$; $4 \times 8 = 32; 2 \times 8 = 16; 6 \times 8 = 48$; и т.д. то есть, $28^{4n+\mathbf{1}}$ заканчивается на 8 $\rightarrow 54^{35} + 28^{2\mathbf{1}}$ заканчивается на $4 + 8 = 12$.

Упр.1.8.** ***Ответ: 20.

Упр.1.9. 1) ***Указание:*** представить выражение в виде суммы $a^3 + 3a^2 + 8a = (a^3 + 3a^2 + 2a) + 6a = a(a+1)(a+2) + 6a$ и показать, что каждое слагаемое этой суммы делится на 6. ***Решение:*** 2) сумма цифр данного числа 30, поэтому оно делится на 3 и не делится на 9. Так как натуральное число, большее 1, может быть квадратом натурального числа только в том случае, когда в его каноническое разложение входят простые множители только с четными показателями, то данное число не может быть квадратом натурального числа (его каноническое разложение содержит число 3, но не содержит 3^2). 3) сумму первых 1000 натуральных чисел можно записать в виде $(1+1000) + (2+999) + \cdots + (500+501)$. Каждое слагаемое этой суммы равно $1001 = 143 \times 7$, т.е. делится на 143, и поэтому вся сумма делится на 143. **2)** ***Решение:*** докажем, что рассматриваемые числа не имеют НОД, большего 9. Действительно, если наибольший общий делитель этих чисел, больший 9, то разность любых двух из них делится на d. Однако разность чисел 123 465 и 123 456, равная 9, не делится на d. Следовательно, НОД рассматриваемых чисел равен 3.

Упр.1.10. ***Решение:*** 3|201, 7|203, 5|205, 2|207 и 11|209. Неизвестно, можно ли получить простое число из каждого натурального число посредством изменения двух его цифр. Зато легко доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких, что изменением одной (какой-либо) цифры числа n нельзя получить из него простое число. Таковы, например, числа n=2310k-210, где k=1, 2, 3, …, так как в этом случае нужно было бы изменить последнюю цифру числа n (т.е. нуль), очевидно, на одну из цифр: 1, 3, 7 или 9; при этом, как легко проверить, 11|n+1, 3|n+3, 7|n+7, 3|n+9 и, таким образом, при изменении одной цифры числа n мы всегда получаем составное число.

Решения задач к блоку 8.3

Упр.1.1. ***Ответ:*** 10.

Упр.1.2. ***Ответ:*** $(-93)^2 > (-89)^2$.

Упр.1.4. ***Ответ:*** а) $a + b > ab$; б) $m^2 < n$; в) $3p > p^3$.

Упр.1.5.** ***Решение: задача сводится к решению в натуральных чисел уравнения $\frac{x)x-1)}{2} = 45$, где x – число отмеченных на плоскости точек. Имеем $x^2 - x - 90 = 0$, откуда $x_1 = 10, x_2 = -9$. Условию задачи удовлетворяет лишь один корень $x = 10$. ***Ответ:*** 10 точек.

Упр.1.6.** ***Ответ: $99! < 50^{99}$.

Упр.1.7.** ***Ответ: да, существует. Это 0.

Упр.1.8.** ***Решение: А) если $a > 2, b > 3, \rightarrow 3a > 6, 5b > 15 \rightarrow 3a + 5b > 6 + 15 \rightarrow 3a + 5b > 21$; Б) если $a < 2b, b < c, \rightarrow a < 2b, 2b < 2c \rightarrow a < 2c, 2a < 4c$; В) если $a > 3, b > 5, \rightarrow 2a > 6, 4b > 20 \rightarrow 2a + 4b > 6 + 20 \rightarrow 2a + 4b > 26$; Г) если $a \geq 5b, b \geq 2c, \rightarrow 3a \geq 15b, 15b \geq 30c \rightarrow 3a \geq 30c$.

****Упр.1.9.** а) ***Решение:*** 1) $100\,002^4 > 100\,000^4 = 10^{20} = (10^4)^5 = 10\,000^5 > 9997^5$; 2) 31^{11} меньше, чем $32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55}$. Кроме того, 17^{14} больше, чем $16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56}$, больше, чем 2^{55}, а поэтому больше, чем 31^{11}. Б) ***Решение:*** поскольку, с одной стороны, $2^{3^8} > 2^{3^7 \times 2} = 4^{3^7} > 3^{3^7}$, а с другой стороны, $3^7 > 3^6 > 729 > 2^9$, то $3^{3^7} > 3^{2^9}$. Следовательно, первое из данных в задаче чисел больше второго.

****Упр.1.10. 1)** ***Решение:*** $36^m - 5^n$ оканчивается цифрой 1, а $5^n - 36^m$ – нулем. Из $36^m - 5^n = 1$ следует, что $\ 6^m - 1 \ \ 6^m + 1 \ = 5^n$, а тогда степень числа 5 делится на число $6^m + 1$, оканчивающееся цифрой 7, чего не может быть. Из равенства $5^n - 36^m = 9$ следует, что 5^n делится на 9. Это неверно. $36 - 5^2 = 11$, то 11 и есть наименьшее значение рассматриваемого выражения. **2)** ***Решение:*** $a^2 + 2b^2 + 2ab + 2b + 2 = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2b + 1 + 1 = (a + b)^2 + (b + 1)^2 + 1 > 0$;

Решения задач к блоку 8.4

Упр.1.1. ***Решение:*** 1) $-x^2 - 5x + 14 = 0, a = -1, b = -5, c = 14. D = b^2 - 4ac = 25 + 56 = 81 > 0$, 2 решения. $x_{1,2} = \frac{-b\pm \overline{D}}{2a} = \frac{5\pm 9}{-2}, x_1 = -7, x_2 =$

$2.2) -x^2+26x-25=0, a=-1, b=26, c=-25. D=b^2-4ac=676-$ $100=576>0,$ 2 решения. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-26\pm 24}{-2}, x_1=1, x_2=25.$

Упр.1.2. ***Решение:*** $x(x+3)+97=x^2+(x+3)^2$. ***Ответ:*** 8 и 11.

Упр.1.3. ***Ответ:*** 1) (3;1), 2) (3;11).

Упр.1.4. ***Решение:*** 1) $x_1+x_2=6, x_1\times x_2=11$; 2) $x_1+x_2=-6, x_1\times x_2=-11$; 3) $x_1+x_2=11, x_1\times x_2=-6$; 4) $x_1+x_2=-11, x_1\times x_2=-6$. ***Ответ:*** 2).

Упр.1.5.** ***Решение: 1) $(x-2)^2-3x+8=0, x^2-7x+12=0, a=1, b=-7, c=12$. $D=b^2-4ac=49-48=1>0,$ 2 решения.$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{7\pm 1}{2}, x_1=4, x_2=3$. 2) $(x+4)(2x-1)-x(3x+11)=0, -x^2-4x-4=0, a=-1, b=-4, c=-4. D=b^2-4ac=16-16=0,$ 1 решение.

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{-2}=-2.$$

Упр.1.6.** ***Решение: по условию задачи $((392:a-a):a-a):a-a=-a$, откуда $(392:a-a):a-a=0$ или $a^3+a^2-392=0,$ т.е. $a^2(a+1)=392.$ Значит, 392 делится на квадрат натурального числа. Но так как $392=2^3\times 7^2$, то оно делится лишь на квадраты чисел 2,7 и 14. Простым перебором убеждаемся, что $a=7$.

****Упр.1.9. 1)** ***Ответ:*** -4; 1. ***Указание:*** привести уравнение к виду $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=24$ и использовать подстановку $y=x^2+3x$. **2)** ***Решение:*** рассматривая уравнение $m^2-9n^2=6mn$ как квадратное относительно m, находим, что его дискриминант равен $18n^2$. Чтобы это уравнение имело целочисленные решения необходимо, чтобы $18n^2=k^2$, где $k\in Z$. Так как $n\in Z$, то это возможно только в случае, когда $n=0$. Отсюда $m=0$. **3)** ***Ответ:*** $x=0, y=0, z=0$. ***Указание:*** выразить одночлен x^3 через переменные y и z и показать, что числа x, y и z четные, обладающие тем свойством, что сколько бы их не делили на 2, в частности всегда будут получаться целые числа.

****Упр.1.10.** *Ответ:* 13 и 16.

Решения, указания и ответы из п.8.3 «Типы задач». 9 класс

Решения задач к блоку 9.1

Упр.1.2. ***Решение:*** по условию $x^2 - y^2 = 45$, где x **и** y – искомые натуральные числа. Так как $x^2 - y^2 = 45$, а $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$, то задача сводится к решению в натуральных числах следующих систем уравнений: $\begin{matrix} x - y = 1; & x - y = 3; & x - y = 5; \\ x + y = 45; & x + y = 15; & x + y = 9. \end{matrix}$

Ответ: $23;22$, $9;6$,$(7;2)$.

Упр.1.3. ***Ответ:*** $x^2 - 17x + 60 = \ x - 3 \quad x - 12$.

Упр.1.4. ***Ответ:*** 1) 120; 2) 96.

Упр.1.6.** ***Решение: пусть n – такое натурального число, что $x = n^3 + n^2 = n^2 \ \ n + 1$. Так как по условию x кратно 5, то x должно оканчиваться нулем или 5. Из равенства $x = n^2(n + 1)$ заключаем, что x оканчивается нулем. (Произведение $n^2(n + 1)$ при $n = 1, 2, 6, 7$ оканчивается цифрой 2, при $n = 3, 8$ – цифрой 6, при $n = 4, 5, 9, 10$ – нулем.) Условию задачи удовлетворяет лишь $n = 5$ **и** $n = 9$, так как при $n = 4$ число x двузначное, при $n \geq 10$ x – число четырехзначное. Следовательно, $x = 5^2 \ \ 5 + 1 \ = 150$ **или** $x = 9^2 \ \ 9 + 1 \ = 810$. Действительно, $150 = 5^3 + 5^2; 810 = 9^3 + 9^2$. ***Ответ:*** 150; 810.

Упр.1.7.** ***Доказательство: $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = (x^2 - 3)^2 - 4x^3 - 3x$. При $x < 0$: $(x^2 - 3)^2 \geq 0, -4x^3 > 0, -3x > 0$ значит, при $x < 0 x^2 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 > 0$.

Поэтому многочлен $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9$ не имеет отрицательных корней.

Упр.1.8.** ***Решение: если четное число оканчивается цифрой 2, 4, 6 или 8, то четвертая степень этого числа оканчивается цифрой 6, так как числа $2^4, 4^4, 6^4$ **и** 8^4 оканчиваются цифрой 6.

****Упр.1.9.** ***Решение:*** пусть a – меньшее число, na – большее. По условию имеем уравнение $a+na\ \ +na^2+\ \ na-a\ \ +\frac{na}{a}=441$, откуда $2na+na^2+n=441, n\ \ a^2+2a+1\ \ =441, n(a+1)^2=441=3^2\times 7^2$.

Задача сводится к решению в натуральных числах систем уравнений:

$$\begin{matrix} n=3^2, \\ (a+1)^2=7^2 \end{matrix} \quad \textbf{или} \quad \begin{matrix} n=7^2, \\ (a+1)^2=3^2, \end{matrix} \text{Откуда} \quad \begin{matrix} n=9, \\ a=6, \end{matrix} \quad \textbf{или} \quad \begin{matrix} n=49, \\ a=2. \end{matrix}$$

****Упр.1.10.** ***Решение:*** так как $21=3\times 7$ (3 и 7 – простые числа), то, чтобы произведение 21m (m – искомое число) удовлетворяло условию задачи, необходимо, чтобы выполнялось равенство $21m=21\times 21a$, где a – квадрат такого наименьшего натурального числа, что 21a – число четырехзначное. Перебором находим a: $a=7^2$; m найдем из равенства $m=21a$. ***Ответ:*** 1029.

2) ***Ответ:*** $m\in\ \ 21\times 7^2; 21\times 8^2; 21\times 9^2; \ldots; 21\times 21^2\ \ $.

Решения задач к блоку 9.2

Упр.1.1. ***Ответ:*** 1) В); 2) Г).

Упр.1.3. ***Ответ:*** 64.

Упр.1.4. ***Ответ:*** 1) $2a^{-5}$; 2) $27b^{13}$.

Упр.1.5.** ***Решение: n=1. Действительно, $n^2+1=n\ \ n+1\ \ -\ \ n-1\ \ $, то из $n+1 \backslash n^2+1$ следует, что $n+1 \backslash n-1$, а последнее для натуральных n возможно лишь тогда, когда $n-1=0$, т.е. когда $n=1$. 2) пусть p и q – данные простые числа, причем $p-q=2$. Тогда $p+q=2(q+1)$. Значит $p+q$ делится на 4, так как q нечетно ($q+1$ четно). При делении на 3 число q может давать остатки 1 или 2, т.е. $q=3k+1$ **или** $q=3k+2$. Первое невозможно, иначе $p=q+2=3k+3$, т.е. p не является простым. Следовательно, $q=3k+2, p+q=2\ \ 3k+3\ \ =2\times 3\ \ k+1\ \ $, т.е. p+q делится на 3 и на 12 (так как p+q делится и на 4).

Упр.1.6.** ***Решение: пусть p – простое число, отличное от 2 и 5. Рассмотрим $p+1$ число: $1, 11, 111, \ldots, 111\ldots11$. По крайней мере два из них дают при делении на p одинаковые остатки. Тогда их разность 11…1100…0 делится на p. Но поскольку p отлично от 2 и 5, то 11…11 делится на p. Значит делителями рассматриваемых чисел могут быть все простые числа, кроме 2 и 5.

Упр.1.7.** ***Решение: 1) если n^2 $(n \in N)$ равна 1991, то она не делится на 3, следовательно, и число n не делится на 3, т.е. при делении на 3 оно дает остаток 1 или 2. Но тогда n^2 при делении на 3 дает остаток 1. Однако остаток от деления на 3 числа 1991 равен 2. Следовательно, сумма цифр числа, являющегося точным квадратом, не может равняться 1991.

2) если n четное, то число $\mathbf{4}^n$ оканчивается цифрой 6, поэтому число $\mathbf{4}^n - \mathbf{1}$ оканчивается цифрой 5, т.е. делится на 5. Если n нечетное, то $\mathbf{4}^n - \mathbf{1}$ делится на 3 ($\mathbf{3} = \mathbf{4^1} - \mathbf{1}$). Так как число $5^n - \mathbf{1}$ не делится ни на 5, ни на 3, то $5^n - \mathbf{1}$ не делится на $\mathbf{4}^n - \mathbf{1}$.

Упр.1.8.** ***Ответ: 1) 9; 2) 15.

****Упр.1.9.** ***Решение:*** 1) искомые числа – все нечетные числа > 1. Действительно, если n – нечетное число > 1, то $\frac{n-1}{2}$ есть натуральное число и для $k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, как легко заметить, $n | k^n + (n-k)^n$ (так как $-k)^n = -k^n$. Следовательно, $n | 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$. Пусть теперь n – четное число и пусть 2^s – высшая степень двойки, делящая n (число s натуральное). Так как $s < 2^s$, то для четных k, очевидно, $2^s | k^n$, для нечетных же k (число которых в последовательности $1, 2, \ldots, n-1$ **равно** $\frac{n}{2}$) на основании теоремы Эйлера имеем $2^{k^{s-1}} \equiv 1 \ mod\, 2^s$, так что и $k^n \equiv 1 \ mod\, 2^s$ (ибо $2^{s-1}\ n$,откуда $1^n + 3^n + \cdots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \ mod\, 2^s$. Поэтому, учитывая, что $2^n + 4^n + \cdots + (n-2)^n \equiv 0 \ mod\, 2^s$, имеем $1^n + 2^n + \cdots + +(n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \ mod\, 2^s$. Если теперь предположить, что $n | 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$, то так как $2^s|n$, мы получим сравнение $0 \equiv \frac{n}{2}\ mod\, 2^s$, из которого следует $2^s|\frac{n}{2}$ и $2^{s+1}|n$, что противоречит определению числа s. Итак, если n четное, то $n \nmid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$. 2) Если a – натуральное число, r – остаток от деления числа a на 10, то $a^{10}+1$ делится на 10 тогда и только тогда, когда число $r^{10}+1$ делится на 10. Таким образом, вместо r мы должны брать только числа 0, 1, …, 9, для которых число $a^{10}+1$ делится на 10, суть натуральные числа вида $10k+3$ и $10k+7$, где $k=0,1,2,\ldots$. ***Решение:*** 3) $n^2+5n+16=169k$, где k и n – натуральные числа, имеет решение. Имеем $n^2+5n+16-169k=0, D = 25 - \ 16-169k\ = 4\times169k-39 = 13\times\ 52k-3\ $. Очевидно, что D не является квадратом натурального числа, поскольку D кратно 13, но не кратно $13^2 (52k-3$ не делится на 13). Следовательно, уравнение $n^2+5n+16=169k$ не имеет не только натуральных, но и рациональных решений ни при каких натуральных n и k. Получили противоречие с предположением. Следовательно, утверждение задачи доказано.

****Упр.1.10.** ***Решение:*** пусть r есть одновременно и сумма, и разность двух простых чисел. Число r, очевидно, должно быть больше двух, и поэтому r есть нечетное простое число. Далее, так как r есть и сумма, и разность двух простых чисел, то одно из них должно быть нечетным, а другое четным, т.е. числом 2.

Решения задач к блоку 9.3

Упр.1.1. ***Ответ:*** 1) нет, нет; 2) нет, да; 3) нет, да; 4) нет, да.

Упр.1.2. ***Решение:*** $x^2<16$; $x^2-16<0$; $y=x^2-16$ графиком функции является парабола, у которой ветви направлены вверх, найдем точки пересечения графика с Осью Ox: $x^2-16=0$; $x^2=16$; $x=\pm4\ \to\ x^2=16$ при $x\in\ -4;4\ $. 2) $7x<x^2$; $x^2-7x>0$ графиком функции является парабола, у которой ветви направлены вверх, найдем точки пересечения графика с Осью Ox: $x_1=0$; $x_2=7$; $\to 7x<x^2$ при $x\in\ -\infty;0\ \cup\ 7;+\infty\ $.

Упр.1.3. ***Ответ:*** 1) неверно; 2) верно.

Упр.1.4. ***Решение:*** $\begin{matrix} x^2-2x-8<0, \\ x^2-9<0. \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (x-4)(x+2)<0, \\ x\ <3. \end{matrix} \rightarrow -2<x<3.$

Упр.1.5.** ***Ответ: 1) $-5<x<5$; 2) $-1\leq x\leq 5$; 3) $-3\leq x\leq 3$; 4) $-7<x<1$.

Упр.1.6.** ***Решение: 1) $(2x-3)^2>0, x$ – любое; 2) $(3x+2)^2<0,$ нет решений.

Упр.1.7.** ***Ответ: 1) 10, 20, 30, 40; 2) -10, 0.

Упр.1.8.** ***Решение: $\begin{matrix} x^2-8x+15\geq 0, \\ x^2-6x+8\geq 0. \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (x-3)(x-5)\geq 0, \\ (x-4)(x-2)\geq 0. \end{matrix} \rightarrow$

$\begin{matrix} x\geq 5; x\leq 3, \\ x\leq 2; x\geq 4. \end{matrix} \rightarrow x\geq 5; x\leq 2.$

****Упр.1.9.** ***Ответ:*** $1)\ p=11, p=3;\ 2)\ p=8, p=6, p=7.$

****Упр.1.10.** ***Ответ:*** а) если на первом месте 2, то выбор из трех элементов на одно место = 3; б) 6; в) 9.

Решения задач к блоку 9.4

Упр.1.1. ***Решение:*** $y^4-y^3-16y^2+16y=0;\ y^3\ \ y-1\ \ -16\ \ y-1\ \ =0;\ y\ \ y^2-16\ \ \ y-1\ \ =0;\ y\ \ y-4\ \ \ y+4\ \ \ y-1\ \ =0;$ ***Ответ:*** 0, 4, -4, 1.

$2)\ p^3-p^2=p-1.$ ***Решение:*** $p^3-p^2=p-1;\ p^2\ \ p-1\ \ -\ \ p-1\ \ =0;\ \ p-1\ \ \ p^2-1\ \ =0.$ ***Ответ:*** 1, -1.

Упр.1.2. ***Решение:*** $\begin{matrix} x^2-3y^2=4, \\ x+y=6. \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -2y^2-12y+32=0, \\ x=6-y. \end{matrix} \rightarrow$

$\begin{matrix} x=14, \\ y=-8. \\ x=4, \\ y=2. \end{matrix} \rightarrow\ \ 14;-8\ \ \text{и}\ \ 4;2\ \ .$

Упр.1.3. ***Решение:***

$$\begin{matrix} x^2-2y^2=-4, \\ x^2+2y^2=12. \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x^2-2y^2=-4, \\ 2x^2=8. \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x^2=4, \\ y^2=4. \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=\pm 2, \\ y=\pm 2. \end{matrix}$$

Упр.1.4. ***Решение:*** пусть ab – искомое 2-е число, тогда:

$$\begin{cases} a^2+b^2=13, \\ 10a+b-9=10b+a. \end{cases} \to \begin{cases} 9a-9b=9, \\ a^2+b^2=13. \end{cases} \to \begin{cases} a=1+b, \\ a^2+b^2=13. \end{cases}$$

$1+b^2+2b=13; b^2+2b-12=0,$ по т. Виета: $b_1=-3, b_2=2$. По смыслу задачи $b>0 \to b=2 \to a=3,$ искомое число $10\times 3+2=32$. ***Ответ:*** 32.

Упр.1.5.** ***Решение: $y=x^3-6x^2+11x-6$. График пересекает ось Oy при $x=0; \to$ $y=-6; \to$ График пересекает ось Oy в точке $(0;-6)$. График пересекает ось Ox при $y=0; \to x^3-6x^2+11x-6=0;$ легко увидеть, что $x_1=1; \to x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)=0; \to x_1=2, x_2=2, x_3=3; \to$ График пересекает ось Ox в точках (1;0), (2;0), (3;0).

Упр.1.6.** ***Решение: из условия следует, что $x\neq -y, x\neq 8, y\neq -5$. Разделив второе уравнение системы на первое $(x\neq 8, y\neq -y)$, будем иметь: $\frac{5+y}{8-x}=2,$ **откуда** $y=11-2x$. Подставим значение $y=11-2x$ в одно из уравнений системы (например, в первое): $x+(11-2x)(8-x)=10,$ откуда

$x^2-19x+78=0, x_1=6, x_2=13, y_1=11-2x_1=-1, y_2=11-2x_2=-15$.

Упр.1.7.** ***Решение: сложив второе уравнение с первым, умноженным на -2, будем иметь: $x^2+y^2-2xy+(x-y)-42=0,\ (x-y)^2+(x-y)-42=0,$ откуда имеем $x-y=-7$ **или** $x-y=6$. Имеем две системы:

$$\begin{cases} x-y=-7, \\ x(-y)=12; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=6, \\ x(-y)=12; \end{cases}$$

Последняя из них не имеет действительных решений. $z^2+7z+12=0,\ z_1=-3, z_2=-4,$ причем $z_1=x, z_2=-y$ или $z_2=x, z_1=-y$. Следовательно, $x=-3, y=4$ **или** $x=-4, y=3$.

Упр.1.8.** ***Решение: пусть a и b искомые натуральные числа, тогда:

$$\begin{cases} a+b=50, \\ ab+11=a^2-b^2, \end{cases} \to \begin{cases} a=50-b, \\ 50b-b^2+11=2500+b^2-b^2-100b, \end{cases}$$

$b^2-150b+2489=0, D=b^2-4ac=22\,500-9\,956=12544,$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{150 \pm 112}{2}, b_1 = 131 \text{ посторонний корень }, b_2 = 19. a = 50 - 19 = 31.$$

****Упр.1.9. 1)** ***Решение:*** $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x-1)(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) = (x-1)(x-2)(x^2 + 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$. ***Ответ:*** 1, 2, -2, -3. ***2) Решение:*** $(718x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0;\ 718x^2 + 1 > 0 \rightarrow x^2 = 1, x = \pm 1$. 3) ***Доказательство:*** все многочлены, о которых идет речь в задаче, имеют общий корень $x = 1$. Действительно, при $x = 1$ значение данного многочлена равно $a + b + c + d$, что при заданных значениях a, b, c и d тождественно равно нулю $(-7 + 4 - 3 + 6 = 0)$ независимо от порядка расположения коэффициентов многочлена. Утверждение доказано.

****Упр.1.10. 1)** ***Решение:*** если $x = 0$, то $y = 0$; если $x \neq 0$, то обе части первого уравнения системы почленно можно разделить на x^2 и затем ввести новую переменную $z = \frac{y}{x}$: $y^2 - 2xy - 3x^2 = 0$, $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} - 3 = 0, z^2 - 2z - 3 = 0, z_1 = 3, z_2 = -1$. $\frac{y}{x} = 3$, т.е. $y = 3x$, либо $\frac{y}{x} = -1$, т.е. $y = -x$. В итоге получаем совокупность двух систем уравнений: $\begin{cases} y = 3x, \\ x^3 + y^3 = 28; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x, \\ x^3 + y^3 = 28; \end{cases}$ получим: $x^3 + (3x)^3 = 28, 28x^3 = 28, x = 1$. Итак, $x = 1$, а поскольку $y = 3x$, получаем $y = 3$. Подставив $-x$ вместо у во второе уравнение второй системы, получим уравнение $x^3 + (-x)^3 = 28$, которое не имеет корней. Значит, вторая система не имеет решений. ***Ответ:*** (1;3).

2) ***Доказательство:*** пусть $ax^n + bx^{n-1} + \cdots + kx + l = 0$ – уравнение n-ой степени с целыми коэффициентами, имеющее целый корень x_0.

Тогда справедливо тождество

$$a{x_0}^n + b{x_0}^{n-1} + c{x_0}^{n-2} + \cdots + kx_0 + l = 0,\ x_0(a{x_0}^{n-1} + b{x_0}^{n-2} + + c{x_0}^{n-3} + \cdots + k) = -l \quad (1).$$

Так как левая часть тождества (1) делится на x_0 ($a{x_0}^{n-1} + b{x_0}^{n-2} + c{x_0}^{n-3} + \cdots + k$ – целое число), то и его правая часть делится на x_0, т.е. x_0 является делителем свободного члена l.