МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент Ю.А. Попова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель И.В. Антонова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант Е.Ю. Аношина ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявления методических особенностей обучения решению текстовых задач на движение в основной школе, разработка систем задач по теме исследования.

Одним из важных вопросов методики обучения математике является вопрос о формировании у учащихся умений и навыков решения текстовых задач. Многие учащиеся испытывают затруднения в отыскании способа решения задач на движение. По мнению ряда исследователей, причина этих затруднений связана с неумением школьников анализировать условие задачи, в котором представлена её сюжетная составляющая: описан процесс движения, движущиеся объекты, указаны характеристики движения и числовые значения величин. Умение решать задачи - один из основных показателей уровня развития учащихся.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению задач на движение. Раскрыто понятие текстовой задачи, рассмотрены её типы. Описаны этапы работы над задачей. Выполнен анализ теоретического и задачного материалов по данной теме в учебников разных авторов.

В *главе II* представлены методические рекомендации по обучению решению задач на движение. Рассмотрены задачи ОГЭ по данной теме. Разработаны системы задач по обучению учащихся теме «Задачи на движение» в курсе алгебры основной школы.

Список литературы содержит 51 наименование.

Объем работы составляет 89 страниц.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Teaching methods for solution of the text-based problems about the movement in a course on algebra of the intermediate school".

The issue of how to develop students' skills and habits to solve text-based problems is one of the issues of math teaching methodology. Most students face up with difficulties while finding the solution for the problems about the movement. According to the experts' opinion, the reason of such difficulties is students' fault in analysis of the problem statement which has plot component: the movement process and moving objects are described, and movement characteristics and numeric values are noted. The ability to solve problems is one of the main indicators of students' progress.

The aim of the bachelor's thesis is to reveal methodological features of teaching the solution of text-based problems about the movement in the intermediate school and to develop the set of problems on the research topic.

In the scope of this work we solved the following tasks: the analysis of the content of theoretical and problem material in the textbooks of algebra and the developing of a set of problems on the research topic.

The bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a list of 36 references, including 5 foreign sources, and 50 appendixes.

The first part of the work is dedicated to the theoretical basis of teaching the solution of problems about the movement. The study reveals the meaning of text-based problem and its types. Solution stages are described. Theoretical and problem material of textbooks of different authors is analyzed.

The second part presents methodological recommendations for teaching the solution of text-based problems about the movement. OGE (basic state exam) problems on the discussed topic are studied. The set of problems for teaching students the topic of "Problems about the movement" for a course on algebra of the intermediate school is developed.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Согласно федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования (ФГОС ООО) результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать формирование у учащихся представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем им описывать и изучать реальные процессы и явления, а также их умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат.

В математике решение задач выступает как объект изучения, так и как метод развития личности школьника. Поэтому в ней решение задач должно оставаться основным видом учебной деятельности обучающихся.

Текстовая задача является одним из заданий контрольно-измерительных материалов общего и единого государственного экзамена (ОГЭ, ЕГЭ). Обучение школьников решению задач предусмотрено в курсе математики основной школы. Текстовые задачи формируют у учащихся умение анализировать ситуацию, систематизировать и классифицировать ее условия. Одним из важных вопросов методики обучения математике является вопрос формирования у учащихся умений и навыков решения текстовых задач. Современные представления о сущности задач и их основных функциях в обучении математике сформировались под влиянием работ Ю.М. Колягина [16], Е.И. Лященко [18], Д. Пойа [35], Г.И. Саранцева [38], Л.М. Фридмана [43] и др. Большинство авторов понимают задачу как задание, которое должен выполнить субъект, при этом опираясь на указанные условия и следствия, вытекающие из них.

Текстовая задача нередко оказывается для ученика самой трудной задачей, так как кроме теоретических знаний, им необходимо иметь жизненный опыт и интуицию. Многие учащиеся испытывают серьезные трудности в отыскании способа решения задач на движение. По мнению ряда исследователей, причина этих затруднений заключается в неумении школьников анализировать условие задачи, в котором представлена её сюжетная составляющая: описан процесс движения, движущиеся объекты, указаны характеристики движения и числовые значения величин.

Умение решать задачи это один из основных показателей уровня развития учащихся. Оно имеет большое практическое значение в будущей жизни учеников.

Задачи на движение включены в основной государственный экзамен: задание № 22 (модуль «Алгебра»).

Всё вышесказанное определяет актуальность исследования.

Кроме того, актуальность темы исследования обусловлена *противоречием,* которое сформировалось к настоящему времени, между необходимостью обучения решению задач на движение в курсе алгебры основной школы в соответствии с требованиями ФГОС ООО и состоянием методики обучения их решения в основной школе.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся решению задач на движение в основной школе.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения школьников решению задач на движение на уроках алгебры в основной школе.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся 7-9 классов решению текстовых задач на движение и разработать системы задач по теме исследования.

Задачи исследования:

1. Раскрыть понятие текстовой задачи на движение и рассмотреть её типы.
2. Описать этапы работы над текстовой задачей на движение.
3. Изучить основные требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме.
4. Проанализировать содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках алгебры разных авторов.

5. Представить типологию задач на движение в учебниках алгебры 7-9 классов.

6. Описать методические рекомендации по обучению решения задач на движение в основной школе.

7. Провести анализ задач ОГЭ по теме исследования.

8. Разработать системы задач по теме «Задачи на движение» в курсе алгебры основной школы.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ педагогической и методической литературы, школьных программ; сравнительный анализ школьных учебников по теме исследования; изучения опыта работы учителей математики; обобщение и систематизация материала.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем рассмотрено понятие текстовой задачи на движение и её место в обучении математике; описаны типы текстовых задач на движение и методы их решения; выявлены методические особенности обучения учащихся решению задач на движение в основной школе.

Практическая значимость исследования заключена в разработке систем задач и методических рекомендаций по обучению учащихся основной школы решению задач на движение, которые могут использоваться в практической работе учителя математики и студентами при прохождении педагогической практики.

На защиту выносится: методические рекомендации по обучению учащихся 7-9 классов решению текстовых задач на движение и системы задач по теме исследования.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, противоречие, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению текстовых задач на движение в курсе алгебры основной школы. В ней раскрыто понятие текстовой задачи, рассмотрены её типы. Описаны этапы работы над текстовой задачей. Изучены основные требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме. Проанализировано содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках алгебры разных авторов. Представлена типология задач на движение в учебниках алгебры 7-9 классов.

В **Главе II** представлены методические основы обучения учащихся решению текстовых задач на движение в курсе алгебры основной школы. В ней представлены методические рекомендации по обучению решения задач на движение. Рассмотрены задачи ОГЭ по данной теме исследования. Разработаны системы задач по обучению учащихся теме «Задачи на движение» в курсе алгебры основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 51 наименование.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие текстовой задачи на движение и ее типы

В пособии Л.В. Виноградовой отмечается, что «задачи в обучении математике занимают важное место: это и цель, и средство обучения. Умение решать задачи – показатель обученности и развития учащихся» [7, С. 32].

Что такое задача? До настоящего времени нет общепринятой трактовки самого понятия *задачи.* Сравним различные определения этого понятия:

1. Задача – это цель, заданная при определенных условиях (А.Н. Леонтьев).
2. Задача характеризуется наличием цели, стремлением получить ответ, с учетом имеющихся условий и требований (Педагогическая энциклопедия).
3. Задача – всякая знаковая модель проблемной ситуации (Л.М. Фридман).

Анализируя структуры различных трактовок понятия задачи можно заменить, что понятие рассматривается под различными углами зрения и наполнены различным содержанием.

Л.В. Виноградова отмечает, что *в первом определении* подчеркивается объективный характер задачи. Структура задачи рассматривается с точки зрения компонентов деятельности, в которой должен быть восстановлен, найден способ деятельности – достижение определенного результата при определенных условиях. *Во втором определении* задача рассматривается как ситуация, в которой действует субъект. Задача не просто объективно существует, но существует по отношению к кому-нибудь. Похожее определение задачи характерно для работ Ю.М. Колягина: «Без субъекта нет задачи. То, что для одних является задачей, для других может ею не быть» [38, С. 121]. *Третье определение* подчеркивает различие в понятиях задача и проблемная ситуация. Как отмечает Л.М. Фридман, «проблемная ситуация возникает тогда, когда субъект в своей деятельности, направленной на некий объект, встречает какое-то затруднение, преграду. Однако, проблемная ситуация – это не просто затруднение, а осознанное субъектом затруднение, способ устранения которого он желает найти. Значит, задача есть модель ситуации, элементом которой является субъект, осознавший затруднение в своей деятельности» [43].

Вместе с этим, определение задачи чаще всего используется «для обозначения ситуации, включающей цель и условия для её достижения. Для него характерны две стороны: объективная и субъективная. К первой относятся предмет действия, требование, место в системе задач, логическая структура решения задачи и т.д., ко второй – способы и средства решения» [38, С. 127].

В пособии Ю.М. Колягина отмечается, «решить задачу – это значит преобразовать данную проблемную ситуацию в соответствующую ей стационарную ситуацию или установить, что такое преобразование в данных условиях (которые могут быть и субъективными) невозможно» [16, С. 50].

Понятие текстовой задачи настолько многогранно, что выстроить их классификацию в виде единого «дерева» вряд ли возможно. Поэтому текстовые задачи классифицируются по различным основаниям [4]:

– по количеству действий, выполняемых для решения задачи: простые и составные;

– по способу решения: арифметический, алгебраический, геометрический, графический;

– по специфике языка: текстовые, сюжетные, абстрактные;

– по характеру требований: задачи на доказательство, вычисление, построение, исследование и др.;

– по отношение к теории: стандартные и нестандартные;

– по условию (содержанию): задачи на работу, движение, проценты, стоимость, смеси и сплавы, прогрессии и др.

Кроме того, Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой и др. [26, С. 43] выделена типология текстовых задач *по методам их решения*: арифметический, алгебраический, геометрический. Вместе с этим, рассматриваются *эвристические методы решения* текстовых задач («метод подбора и догадки»); также *метод полной индукции* и др. В рамках определенного метода решения задач существуют различные *способы их решения*.

Так, в пособии авторов *в качестве способов решения задач арифметическим методом* указаны: способ приведения к единице; способ отношений, способ обратности, способ исключения неизвестных, способ пропорционального деления и т.д. Отмечается, что *при алгебраическом методе* осуществляется перевод сюжета задачи на математический язык на основе изученных учащимися зависимостей между величинами, построение математической модели задачи и ее решение в рамках полученной модели, интерпретация искомого результата в сюжет задачи и формулировка ее ответа; *при геометрическом методе* – применение геометрических объектов и их свойств при решении различных задач в рамках определенной математической модели: метод площадей («двумерные диаграммы»), метод подобия, метод сравнения длин отрезков («отрезочные диаграммы»).

В работе Л.С. Капкаевой [17] также подробно рассмотрены алгебраический, геометрический и графический (графико-геометрический) *методы решения задач*.

Примеры решения задач на движение данными методами будут подробно описаны нами в §7 работы.

В методической литературе обычно выделяют следующие виды задач на движение:

– движение в одном направлении: вдогонку и с отставанием;

– движение в противоположном направлении;

– встречное движение;

– движение по замкнутой трассе;

– движение по воде.

Учителя математики Л.А. Пасечник и Е.И. Белова представляют следующую классификацию текстовых задач на движение:

1) по количеству движущихся объектов: задачи на движение одного человека (велосипедиста, машины); на движение двух и более участников;

2) по направлению движущихся объектов: встречное движение; движение в противоположном направлении; движение в одном направлении;

3) по времени начала движения: одновременное начало движения; разновременное начало движения;

4) по характеру движения: движение из одного пункта в другой с остановкой; движение с возвращением в пункт отправления;

5) в зависимости от траектории движения: движение по прямой трассе; движение по замкнутой траектории;

6) движение по водному пути: движение по течению; движение против течения; движение в стоячей воде.

Таким образом, под текстовой задачей мы будем понимать «описание некоторой ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения» [16, С. 48].

§2. Этапы работы над текстовой задачей на движение

Решение задач состоит из отдельных этапов. Одни и те же задачи могут решаться разными учащимися по-разному. Исследования показали, что процесс решения задачи имеет *инвариантные свойства.*

К *компонентам процесса решения задач* обычно относят: 1) условия задачи, которые преобразуются во время решения; 2) приемы, влияющие на процесс решения; 3) знания из области решаемой задачи, или аналогичной ей; 4) опыт в решении задач [8, С. 119].

Каждый этап процесса решения задачи складывается из элементарных действий или операций, которые должны формироваться у учащихся. Выделяют определенные этапы работы над задачей (Схема 1).

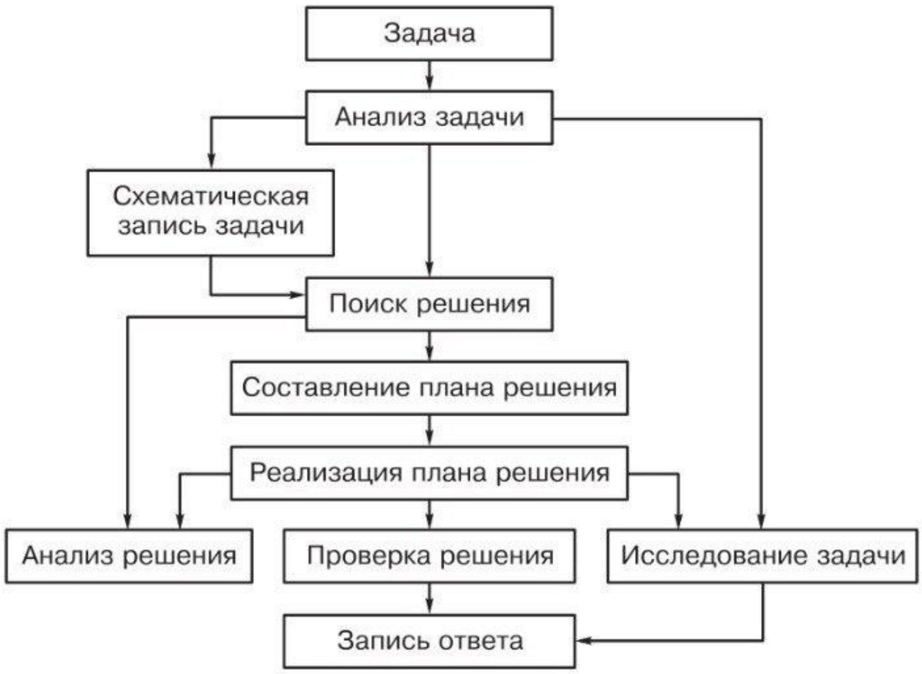

Схема 1. Этапы работы над текстовой задачей.

Поиск решения задачи является наиболее трудным для учащихся. Им нужно научиться понимать суть задачи, проводить её анализ и делать схематическую запись. Рассмотрим каждый из этапов.

I. Анализ задачи и её схематическая запись.

Анализ задачи включает в себя следующие умения: определять количество элементов в условии задачи; выявлять величины; фиксировать зависимости между величинами; выделять и фиксировать искомые величины [14, С. 175].

Выполнению *анализа задачи* помогают следующие *приемы*:

1. Чаще всего учащиеся начинают решать задачу в форме постановки вопросов и поиска ответов на них в тексте задачи. Данный прием позволяет учащимся усвоить задачную ситуацию и понять, что дано и что требуется найти.

2. Рисунки, схемы помогают лучше проводить анализ. Если анализ задачи затруднен, его можно представить в виде легко обозримой схемы – модели задачи [8, С. 128]. «Моделью может служить: *линейная или столбчатая диаграмма; отрезок с составляющими его частями; таблица; отрезок или луч с положением на нем движущихся объектов в различные момент времени; графики равномерного движения;* и другое» [14, С. 176].

Далее на примере задачи на движение покажем, как осуществляется ее анализ и схематическая запись.

Задача 1. «Поезд прошёл путь в 780 км. Первую часть пути он прошёл за 4 ч. Затем, заметив, что он запаздывает, увеличил скорость на 3 км/ч и с этой скоростью прошёл оставшуюся часть пути за 2 ч. Какова была первоначальная скорость поезда?» [8]

При схематической записи задачи на движение «обычно показывается отрезок или луч, на нем положения движущихся тел в разные моменты времени» [14, С. 187]. Так, краткую запись к задаче 1 можно схематично изобразить следующим образом (Рис. 1):

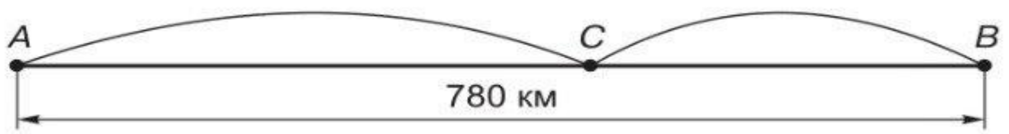

Рис. 1. Схематическая запись задачи 1.

После данного рисунка данные задачи можно внести в таблицу.

Таблица 1

Табличная запись решения задачи 1

Участок	$\boldsymbol{v}$**, км/ч**	$\boldsymbol{t}$**, ч**	$\boldsymbol{S}$**, км**
1	x	4	$4x$
2	$x+3$	2	$2x(x+3)$

Модель рассмотренной задачи можно записать в виде уравнения: $4x + 2x\ \ x + 3\ \ = 780$.

Отметим, что решая задачи на движение, можно принять все расстояние за единицу, если в задаче не указаны единицы длины.

Существует *четыре способа решения текстовых задач*: арифметический, алгебраический, геометрический и графический. В решении задач на движение чаще всего используются арифметический и алгебраический способы [14, С. 178].

II. Поиск решения и составление плана решения задачи.

Для реализации данного этапа ученик должен владеть следующими умениями: переводить отношения между величинами на математический язык, по равенству устанавливать зависимости между величинами, записывать отношения между величинами с помощью формул.

Чтобы *решать задачу алгебраическим способом*, нужно уметь выполнять ещё два действия: выбирать неизвестные величины, через которые можно выразить другие величины и выбирать условия, на основе которых составляется уравнение.

Поиск решения задачи обычно завершается ***формулировкой плана решения***.

Задача 2. «Из Москвы в Ленинград отправился пассажирский поезд, скорость которого равна 80 км/ч. Спустя 20 мин, из Ленинграда в Москву отправился скорый поезд, скорость которого равна 90 км/ч. Через сколько часов после выхода поезда из Москвы произойдёт встреча, если считать расстояние от Москвы до Ленинграда равным 650 км?» [14]

Так, в задаче 2 план решения может быть следующим.

1. Найти расстояние, которое прошёл пассажирский поезд за 20 мин.

2. Найти расстояние между поездами через 20 мин после выхода пассажирского поезда.

3. Найти время движение пассажирского поезда после 20 мин езды и до места встречи.

4. Найти искомое время [14, С. 180].

III. Реализация плана решения.

Выполнение плана решения задачи выполняется учеником целиком или по частям, устно или письменно. Запись решения текстовой задачи арифметическим методом может выполняться по-разному: по вопросам, с помощью формулы, составлением выражения, с развернутым или кратким пояснением, без пояснений, с полным или кратким ответом и т.д.

IV. Анализ и проверка решения.

Проверять результат решения задачи можно следующим образом: 1) решается обратная задача, т.е. задача в которой неизвестное становится известным и наоборот; 2) задача решается другим способом; 3) проверить на соответствие результата условию задачи; 4) выполняется прикидка результата.

Анализ найденного решения осуществляется с целью выяснить возможность обобщить полученный результат, проверить возможность конкретизировать полученный результат.

V. Запись ответа.

Запись ответа обычно не вызывает затруднений у учащихся. Но, нужно стремиться к такой записи ответа, которая была бы понятна и давала бы возможность дальнейшей работы с ней [8, С. 152].

Таким образом, решение задач способствует формированию различных приемов умственной деятельности учащихся [14, С. 183]; основными этапами решения текстовой задачи являются: анализ задачи, поиск решения и составление его плана, реализация данного плана решения и запись ответа.

§3. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Задачи на движение»

Отметим, что текстовые задачи на движение рассматривались с обучающимися в начальной школе, а также в курсе математики 5-6 классов.

Так, в Примерной программе основного общего образования по учебным предметам в разделе Математика в пункте «Текстовые задачи», указывается, что: «выпускник научится в *5-6 классах* (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования *на базовом уровне*):

– решать несложные сюжетные задачи разных типов на все арифметические действия;

– строить модель условия задачи (в виде таблицы, схемы, рисунка), в которой даны значения двух из трёх взаимосвязанных величин, с целью поиска решения задачи;

– осуществлять способ поиска решения задачи, в котором рассуждение строится от условия к требованию или от требования к условию;

– составлять план решения задачи;

– выделять этапы решения задачи;

– интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи;

– знать различие скоростей объекта в стоячей воде, против течения и по течению реки;

– решать задачи на нахождение части числа и числа по его части;

– решать задачи разных типов (на работу, на покупки, на движение), связывающих три величины, выделять эти величины и отношения между ними;

– решать несложные логические задачи методом рассуждений.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

– выдвигать гипотезы о возможных предельных значениях искомых величин в задаче (делать прикидку)» [37, С. 56].

По теме «Задачи на движение» учащиеся 5-6 классов должны:

знать компоненты задачи (скорость, время, расстояние) и формулы, по которым они находятся, а также типы задач (виды движения по суше: встречное, в одном направлении, в противоположном направлении; виды движения по воде: по течению, против течения, в стоячей воде);

уметь оперировать основными понятиями, составлять математическую модель задачи и переводить её условие на математический язык, а также находить способы и методы решения задачи.

При обучении решению задач на движение у учащихся 5-6 классов выделяют следующие понятия:

- «скорость сближения», «скорость удаления»;
- «собственная скорость объекта»;
- «скорость течения реки»;
- «скорость объекта по течению», «скорость объекта против течения».

Рассмотрим основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Задачи на движение» в курсе алгебры основной школы.

В Примерной программе основного общего образования отмечается, что «выпускник научится в *7-9 классах* (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования *на базовом уровне*):

– решать несложные сюжетные задачи разных типов на все арифметические действия;

– строить модель условия задачи (в виде таблицы, схемы, рисунка или уравнения), в которой даны значения двух из трёх взаимосвязанных величин, с целью поиска решения задачи;

– осуществлять способ поиска решения задачи, в котором рассуждение строится от условия к требованию или от требования к условию;

– составлять план решения задачи;

– выделять этапы решения задачи;

– интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи;

– знать различие скоростей объекта в стоячей воде, против течения и по течению реки;

– решать задачи разных типов (на работу, на покупки, на движение), связывающих три величины, выделять эти величины и отношения между ними;

– решать несложные логические задачи методом рассуждений.

В повседневной жизни и при изучении других предметов: выдвигать гипотезы о возможных предельных значениях искомых в задаче величин (делать прикидку)» [37, С. 63].

Вместе с этим, в Примерной программе основного общего образования указывается, что выпускник получит возможность научиться в *7-9 классах* (для успешного продолжения образования *на углублённом уровне*):

– «решать простые и сложные задачи, а также задачи повышенной трудности и выделять их математическую основу;

– распознавать разные виды и типы задач;

– использовать разные краткие записи как модели текстов сложных задач и задач повышенной сложности для построения поисковой схемы и решения задач, выбирать оптимальную для рассматриваемой в задаче ситуации модель текста задачи;

– различать модель текста и модель решения задачи, конструировать к одной модели решения сложных задач разные модели текста задачи;

– знать и применять три способа поиска решения задач (от требования к условию и от условия к требованию, комбинированный);

– выделять этапы решения задачи и содержание каждого этапа;

– уметь выбирать оптимальный метод решения задачи и осознавать выбор метода, рассматривать различные методы, находить разные решения задачи, если возможно;

– анализировать всевозможные ситуации взаимного расположения двух объектов и изменение их характеристик при совместном движении (скорость, время, расстояние), при решении задач на движение двух объектов как в одном, так и в противоположных направлениях, конструировать новые ситуации на основе изменения условий задачи при движении по реке;

– исследовать всевозможные ситуации при решении задач на движение по реке, рассматривать разные системы отсчёта;

– объяснять идентичность задач разных типов, связывающих три величины (на работу, на покупки, на движение), выделять эти величины и отношения между ними, применять их при решении задач, конструировать собственные задач указанных типов;

– овладеть основными методами решения сюжетных задач: арифметический, алгебраический, перебор вариантов, геометрический, графический, применять их в новых по сравнению с изученными ситуациях.

В повседневной жизни и при изучении других предметов: решать задачи на движение по реке, рассматривая разные системы отсчёта; конструировать задачные ситуации, приближенные к реальной действительности» [37, С. 78].

Таким образом, решение текстовых задач повышает их вычислительную культуру, способствует глубокому усвоению ими функциональной зависимости, а также развивает мышление и логику учащихся. Навыки решения текстовых задач помогают им лучше ориентироваться в реальных проблемных ситуациях. Так же следует отметить, что в 5-6 классах учащиеся решают задачи на движение в основном арифметическим методом. Кроме того, в 6 классе они знакомятся с алгебраическим методом их решения. В 7-9 классах все задачи на движение основываются на решении алгебраическим методом (с помощью уравнений, систем уравнений); учащиеся знакомятся с видами задач на движение, которые не встречались им в 5-6 классах, такими как: задачи на движение по окружности, по вертикальной траектории.

§4. Анализ содержания теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках алгебры разных авторов

В данном параграфе рассмотрим теоретический материал *общеобразовательных учебников* алгебры 7-9 классов авторов А.Г. Мордковича [28; 30;

32]; Ю.Н. Макарычева и др. [20; 22; 24]; Г.В. Дорофеева и др. [9-11]; Ш.А. Алимова и др. [1-3] и *учебников для углубленного изучения алгебры* авторов А.Г. Мордковича [29; 31; 33] и Ю.Н Макарычева и др. [21; 23; 25].

В Таблице 2 представлено содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» *в учебниках 7 класса.*

Таблица 2

Содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках алгебры 7 класса

Авторы учебника	Содержание учебного материала
А.Г. Мордкович [28]	Математический язык. Математическая модель. Составление математической модели. Работа с составленной моделью. Решение задач с помощью систем двух линейных уравнений с двумя переменными.
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др. [9]	Решение задач с помощью пропорций. Алгебраический способ решения задач. Решение задач с помощью уравнений. Решение задач с помощью уравнений (многочленов).
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др. [20]	Решение задач с помощью уравнений. Решение задач с помощью систем уравнений.
Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. [1]	Решение задач с помощью уравнений. Решение задач с помощью систем уравнений.
А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев (для классов с углубленным изучением математики) [29]	Математический язык. Математическая модель. Задачи на составление линейных уравнений с одной переменной. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций.
Ю.Н. Макарычев и др. (для классов с углубленным изучением математики) [21]	Решение задач с помощью уравнений. Решение задач с помощью систем уравнений.

В учебнике алгебры А.Г. Мордковича 7 класса учащиеся впервые знакомятся с текстовой задачей на движение в параграфе 3 «Что такое математическая модель». Автор показывает этапы работы с математической моделью и выделяет три этапа: «1) составление математической модели; 2) работа с математической моделью и 3) ответ на вопрос задачи». В данном параграфе представлены в общем виде задачи на движение в противоположном и в одном направлении.

Кроме того, в учебнике автора встречаются задачи на движение в параграфе 4 «Линейные уравнения с одной переменной». Здесь учащимся предлагается решить задачи на встречное движение, движение в одном направлении, движение по воде.

В параграфе 14 «Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций» автор не приводит решенную задачу на движение, они представлены лишь для самостоятельного решения учащихся.

В учебнике Ш.А. Алимова и др. 7 класса в параграфе 8 «Решение задач с помощью уравнений» Главы II рассматриваются три этапа решения задачи: составление уравнения по условиям задачи; решение уравнения; проверка результата и запись ответа. Также в параграфе содержится одна подробно разобранная задача на движение по воде, на примере которой автор показывает все три этапа решения задачи. В параграфе 37 «Решение задач с помощью систем уравнений» предлагаются решение задачи на движение по воде. Решение задачи начинается с введения обозначений, переменных x и y, после чего составляется система уравнений с двумя неизвестными, далее приводится решение данной системы уравнений и запись ответа.

В учебнике Ю.Н. Макарычева и др. 7 класса в пункте 8 «Решение задач с помощью уравнений» параграфа 3 Главы I описываются этапы решения текстовой задачи, но решение задач на движение не предусматривается. В пункте 45 «Решение задач с помощью систем уравнений» параграфа 16 Главы VI так же раскрываются этапы решения задач с помощью систем уравнений. Разобранные задачи на движение в пункте не содержатся.

В учебнике Г.В. Дорофеева и др. 7 класса задачи на движение начинают рассматривать с параграфа 3 Главы II «Решение задач с помощью пропорций». Рассматривается задача на движение пешехода, которая представляется в виде пропорции. Глава IV «Уравнения» начинается с параграфа «Алгебраический способ решения задач», в котором не рассмотрена ни одна задача на движение. В параграфе 4 этой же главы «Решение задач с помощью уравнений» авторы представляют решение задачи по этапам. Глава VI «Многочлены» так же содержит параграф «Решение задач с помощью уравнений». В нем предложены 2 разобранные задачи на движение навстречу и вдогонку, где подробно описываются этапы решения задачи и представляет математическую модель одной из задач.

В учебнике алгебры А.Г. Мордковича 7 класса для классов с углубленным изучением математики автор, так же как и в учебнике для общеобразовательных учреждений, рассматривает понятия математического языка и математической модели, и выделяет этапы работы с моделью. В параграфе 5 Главы I «Задачи на составление линейных уравнений с одной переменной» автор описывает методику решения двух задач на движение: движение по воде и на встречное движение, где подробно описаны все три этапа работы с математической моделью. В параграфе 40 Главы VIII «Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций» представлено решение задачи на движение по окружности.

В учебнике Ю.Н. Макарычева и др. 7 класса для классов с углубленным изучением математики в параграфе 8 пункте 19 главы IV «Решение задач с помощью уравнений» авторы выделяют этапы решения задачи, но примеры решения задач на движение не представлены. В параграфе 18 пункте 48 Главы VIII «Решение задач с помощью систем уравнений» не рассматривается подробное решение задач на движение.

В Таблице 3 представлено содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках *8 класса.*

В учебнике А.Г. Мордковича 8 класса основной задачный материал учебника содержится в параграфе 28 «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций» Главы IV.

Автор дает понятия рациональных уравнений и выражений, и показывает методику решения двух задач на движение. Решение задач рассмотрено по 3 этапам: «1) составление математической модели; 2) работа с математической моделью и 3) ответ на вопрос задачи». К выполненному решению автор делает комментарии.

Таблица 3

Содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках алгебры 8 класса

Авторы учебника	Содержание учебного материала
А.Г. Мордкович [30]	Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций.
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др. [10]	Решение задач в теме «Алгебраические дроби». Решение задач с помощью квадратных уравнений. Решение задач с помощью систем уравнений.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др. [22]	Решение задач на движение с помощью квадратных уравнений. Решение задач на движение с помощью рациональных уравнений.
Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. [2]	Решение задач с помощью квадратных уравнений.
А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев (для классов с углубленным изучением математики) [31]	Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций.
Ю.Н. Макарычев и др. (для классов с углубленным изучением математики) [23]	Решение задач с помощью квадратных уравнений. Решение задач с помощью дробно-рациональных уравнений.

В учебнике Г.В. Дорофеева и др. 8 класса задачи на движение встречаются в параграфе 8 «Решение уравнений и задач» Главы I «Алгебраические дроби», примеры задач на движение не разбирается. В параграфе 4 «Решение задач» Главы III задачи на движение решаются с помощью квадратных уравнений. Для решения задач на движение по вертикальной траектории авторы используют формулу для нахождения высоты, с которой падает тело. В параграфе 6 «Решение задач с помощью систем уравнений» Главы IV предлагаются примеры решения двух текстовых задач с учетом этапов их решения, примеры задач на движение не приводятся.

В учебнике Ш.А. Алимова 8 класса задачи на движения рассматриваются только в параграфе 31 «Решение задач с помощью квадратных уравнений» Главы IV. Автор показывает методику решения двух видов задач на движение.

В учебнике Ю.Н. Макарычева 8 класса в параграфе 3, в пункте 7 «Преобразование рациональных выражений» содержание данной темы раскрывается на примере задачи на движение туда и обратно. В параграфе 8, в пункте 23 «Решение задач с помощью квадратных уравнений» показана методика решения задачи на движение по вертикальной траектории. Автор использует формулу на нахождение высоты, на которую брошено тело, составляет квадратное уравнение и решает его. В параграфе 9, в пункте 26 «Решение задач с помощью рациональных уравнений» подробно представлено решение задачи на движение по воде.

В учебнике А.Г. Мордковича 8 класса для классов с углубленным изучением математики задачи на движение впервые встречаются в параграфе 5 «Первые представления о рациональных уравнениях» Главы I. Основной задачный материал учебника содержится в параграфе 28 «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций» Главы IV. Автор дает понятие рациональных уравнений и выражений и описывает примеры решения двух задач на движение. Решение задач рассмотрено по 3 этапам: составление математической модели, работа с составленной моделью, ответ на вопрос задачи. К выполненному решению автор делает комментарии.

В учебнике Ю.Н. Макарычева и др. 8 класса для классов с углубленным изучением математики задачи на движение встречаются в параграфе 9 пункте 30 Главы IV «Решение задач с помощью квадратных уравнений». Рассматриваются этапы решения задачи с помощью квадратных уравнений. Приведено решение задачи на движение по вертикальной траектории, где используется формула для нахождения высоты, которое достигает тело через какое-то время, и представляется зависимость на координатной плоскости, для наглядности. В той же главе параграфе 11 пункте 35 «Решение задач с помощью дробно-рациональных уравнений» авторы не рассматривают задачи на движение.

В Таблице 4 представлено содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках *9 класса*.

Таблица 4

Содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках алгебры 9 класса

Авторы учебника	**Содержание учебного материала**
А.Г. Мордкович [32]	Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций.
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др. [11]	Решение задач с помощью уравнений. Решение задач с помощью систем уравнений.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др. [24]	Решение задач с помощью систем уравнений второй степени.
Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. [3]	Решение задач с помощью систем уравнений.
А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев (для классов с углубленным изучением математики) [33]	Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций.
Ю.Н. Макарычев и др. (для классов с углубленным изучением математики) [25]	Решение задач по теме «Уравнения второй степени с двумя переменными и их системы».

В учебнике Ш.А. Алимова и др. 9 класса в Главе I есть параграф «Решение задач с помощью систем уравнений», в котором нет как задач на движение, так и задач для самостоятельного решения.

В учебнике Г.В. Дорофеева и др. 9 класса задачи на движение рассматриваются в Главе III «Уравнения и системы уравнений» в пунктах 4 и 6, оба пункта – «Решение задач». В пункте 4 задачи решаются с помощью уравнений, а в пункте 6 – с помощью систем уравнений с двумя переменными. В пункте 4 подробно разбирается пример решения задачи на движение по воде.

В учебнике Ю.Н. Макарычева и др. 9 класса задачи на движение рассматриваются в параграфе 7, в пункте 20 «Решение задач с помощью систем уравнений второй степени». Разобранных примеров решения задач на движение в учебнике по этой теме нет.

В учебнике А.Г. Мордковича 9 класса в параграфе 7 «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций» Главы II подробно разбирается пример решения задачи на движение, где выделяются три этапа ее решения, описанные по данному учебнику выше.

В учебнике А.Г. Мордковича 9 класса для классов с углубленным изучением математики в параграфе 7 «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций» Главы II подробно разбираются примеры решения задачи на движение и задачи на нахождение средней скорости, в которых автор описывает каждый этап решения задач и приводит необходимые комментарии.

В учебнике Ю.Н. Макарычева и др. 9 класса для классов с углубленным изучением математики задачи на движение рассматриваются в параграфе 8, в пункте 22 Главы III «Решение задач». Автор описывает пример решения задачи на движение вдогонку.

Таким образом, анализируя материал учебников 7-9 классов, можно отметить, что в комплекте учебников А.Г. Мордковича не все виды задач на движение рассмотрены в достаточном количестве; имеются задачи на движение разного уровня сложности; решение задач на движение с помощью квадратных уравнений не рассматривается. В учебниках Ю.Н. Макарычева и др. не приводятся задачи на движение в противоположном направлении и по окружности; количество текстовых задач на движение недостаточно для того, чтобы учащиеся научились применять различные способы их решения. Кроме того, решение задач на движение с помощью квадратных уравнений не в полном объеме раскрыто у всех авторов учебников; задач для самостоятельного решения приведено недостаточно; в учебниках А.Г. Мордковича решение данных задач не рассматривается. В учебниках Ш.А. Алимова и др. представлены различные способы решения задач на движение; но рассмотрены не все виды задач; количество текстовых задач на движение недостаточно; в 9 классе тема «Решение задач на движение» отсутствует, что естественным образом может отразиться на подготовке учащихся к ОГЭ по данной теме. В учебниках Г.В. Дорофеева и др. представлены все видов задач на движение, приводится большое количеством данных задач.

§5. Типология задач на движение в учебниках алгебры 7-9 классов

В данном параграфе рассмотрим задачный материал учебников алгебры для общеобразовательных классов и классов с углубленным изучением математики авторов А.Г. Мордковича [28-33]; Ю.Н. Макарычева и др. [20-25]; Г.В. Дорофеева и др. [9-11]; Ш.А. Алимова и др [1-3].

На основе анализа теоретического материала можно выделить следующие виды задач, рассматриваемые в учебниках 7-9 классов: *движение в противоположном направлении; движение в одном направлении; встречное движение; движение по воде; движение по окружности; движение «туда и обратно»; движение по вертикальной траектории.*

Рассмотрим указанные виды задач на движение из учебников *7 класса*:

– *движение в одном направлении;*

Задача № 14.23 [27]. «Путь по морю от города *A* до города *B* на 60 км короче, чем по шоссе. Теплоход проходит путь от *A* до *B* за 5 ч, а автомобиль – за 3 ч. Найдите скорости теплохода и автомобиля, если известно, что скорость теплохода составляет 40% скорости автомобиля».

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 5).

Табличная запись решения задачи №14.23

Таблица 5

	V	t	S
Теплоход	x км/ч	5 ч	5x
Автомобиль	y км/ч	3 ч	3y

Пусть x – скорость теплохода, а y – скорость автомобиля. Составим систему уравнений: $\begin{matrix} 3y - 5x = 60; \\ x = 0{,}4y. \end{matrix}$

$3y - 5 \cdot 0{,}4y = 60 \rightarrow y = 60.$

Имеем: 60 км/ч – скорость автомобиля, тогда $x = 0{,}4 \cdot 60 = 24.$

Итак, 24 км/ч – скорость теплохода. **Ответ:** 24 км/ч; 60 км/ч.

– *встречное движение;*

Задача № 773 [9]. «Расстояние между городами *A* и *B* равно 244 км. Из *A* в *B* выехал автобус, а через 36 мин ему навстречу из *B* в *A* выехал автомобиль со скоростью, большей скорости автобуса на 30 км/ч. Через 2ч после своего выезда автомобиль встретил автобус. Найдите скорость автомобиля».

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

Автомобиль х км/ч Автобус (х-30) км/ч

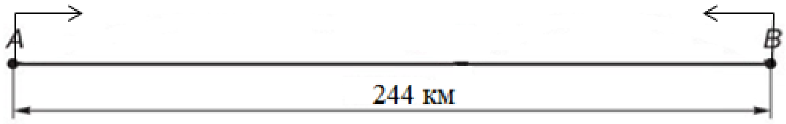

Рис. 2. Схематическая запись задачи №773.

Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 6).

Таблица 6

Табличная запись решения задачи №773

	V	t	S
Автобус	х-30 км/ч	2 ч + 36 мин	244 км
Автомобиль	х км/ч	2 ч	

Пусть х – скорость автомобиля, тогда х-30 – скорость автобуса, 36 мин - это 3/5 часа. Составим уравнение: $2\frac{3}{5}\ x-30\ +2x=244$.

$4\frac{3}{5}x-78=244,\qquad 4{,}6x=322,\qquad x=70.$

Ответ: 70 км/ч.

– *движение по воде;*

Задача № 110 (1) [1]. «Лодка шла против течения реки 4,5 ч и по течению 2,1 ч. Найти скорость лодки в стоячей воде, если она прошла всего 52,2 км, а скорость течения реки равна 3 км/ч».

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 7).

Таблица 7

Табличная запись решения задачи №110(1)

	V	t	S
По течению	(х+3) км/ч	2,1 ч	52,2 км
Против течения	(х-3) км/ч	4,5 ч	

Пусть x – собственная скорость лодки, тогда x-3 – скорость лодки против течения, x+3 – скорость лодки по течению. Составим уравнение:

$$2{,}1\ \ x+3\ \ +4{,}5\ \ x-3\ \ =52{,}2 \to 2{,}1x+6{,}3+4{,}5x-13{,}2=52{,}2;$$

$$6{,}6x=59{,}4; \qquad x=9.$$

Имеем, 9 км/ч – скорость лодки в стоячей воде. **Ответ:** 9 км/ч.

– *движение по окружности;*

Задача № 14.27 [27]. «По окружности, длина которой 100 см, движутся равномерно две точки. Они встречаются через каждые 4 с, двигаясь в противоположных направлениях, и через каждые 20 с, двигаясь в одном направлении. Найдите скорости этих точек».

Решение. Пусть x – скорость первой точки, y – скорость второй точки. Тогда (x+y) – скорость сближения при движении в противоположном направлении, а (x-y) – скорость удаления при движении в одном направлении. Составим систему уравнений: $\begin{matrix} 4\ \ x+y\ \ =100; \\ 20\ \ x-y\ \ =100. \end{matrix} \to \begin{matrix} x+y=25; \\ x-y=5. \end{matrix}$

Получаем $2x=30 \to x=15, y=10.$

Итак, 15 см/с – скорость первой точки, 10 см/с – скорость второй точки.

Ответ: 15 см/с и 10 см/с.

– *движение «туда и обратно».*

Задача № 40.44 [28, С. 192]. «Путь от туристической базы до моря пролегал сначала в гору, а потом с горы. От турбазы до моря туристы шли в гору 45 мин и с горы 40 мин, а обратно – в гору 1 ч 15 мин, а с горы 24 мин. Найдите длину каждого участка пути, если путь в одну сторону равен 6,4 км.»

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

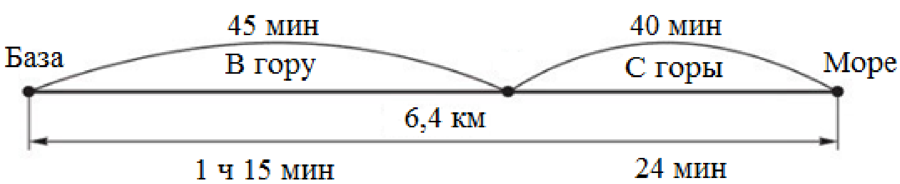

Рис. 3. Схематическая запись задачи №40.44.

Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 8).

Таблица 8

Табличная запись решения задачи №40.44

	V	t		S
В гору	x км/ч	45 мин	1 ч 15 мин	6,4 км
С горы	y км/ч	40 мин	24 мин	

Пусть туристы идут в гору со скоростью x км/ч, а с горы – y км/ч. Составим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 1\frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y; \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 6{,}4. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{4}x + \frac{4}{15}y = 0; \\ 9x + 8y = 76{,}8. \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} 15x - 8y = 0; \\ 9x + 8y = 76{,}8. \end{cases}$ Получаем $24x = 76{,}8 \rightarrow x = 3{,}2$; $8y = 48 \rightarrow y = 6$.

3,2 км/ч – скорость туристов в гору, 6 км/ч – с горы. Теперь найдем путь в гору и с горы. $\frac{3}{4} \cdot 3{,}2 = 2{,}4$ **км – путь в гору**; $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ **км – путь с горы. Ответ:** 2,4 км и 6 км.

Таким образом, можем сделать вывод что, задачи на движение в 7 классе в основном решаются алгебраическим методом: либо с помощью уравнений, либо с помощью систем уравнений с двумя переменными.

Рассмотрим указанные виды задач на движение из учебников *8 класса:*

– *движение в противоположном направлении;*

Задача № 28.20 [29, С. 187]. «Два парохода одновременно вышли из порта: один на север, другой на восток. Через 2 ч расстояние между ними оказалось равным 60 км. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого».

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

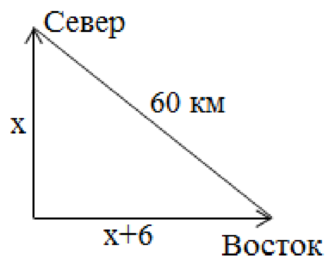

Рис. 4. Схематическая запись задачи №28.20.

Пусть скорость первого парохода x км/ч, тогда (x+6) км/ч – скорость второго. За 2 ч первый пароход прошел 2x км, второй – 2(x+6) км и через 2 часа расстояние между ними стало 60 км, отсюда (по теореме Пифагора):

$$(2x)^2 + (2(x+6))^2 = 60^2$$

$$4x^2 + 4x^2 + 48x + 144 = 3600 \to 8x^2 + 48x - 3456 = 0 \ :8$$

$$x^2 + 6x - 432 = 0$$

$$D = 36 + 1728 = 1764;$$

$x_1 = \frac{-6-42}{2} = \frac{-48}{2} = -24$ (не удовлетворяет условию); $x_2 = \frac{-6+42}{2} = \frac{36}{2} = 18.$

18 км/ч – скорость первого парохода, тогда 18+6=24 км/ч – скорость второго парохода. **Ответ:** 18 км/ч и 24 км/ч.

– *движение в одном направлении;*

Задача № 621 [22]. «Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 720 км увеличил скорость, с которой шел по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 9).

Таблица 9

Табличная запись решения задачи №621

	V	t	S
План	x км/ч	$\frac{720}{x}$	720 км
Факт	x+10 км/ч	$\frac{720}{x+10}$	720 км

Пусть x – скорость по расписанию. Так как время по плану на 1 ч больше, составим уравнение: $\frac{720}{x} - \frac{720}{x+10} = 1.$

$$720(x+10) - 720x = x(x+10) \to 720x + 7200 - 720x = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x - 7200 = 0,\ D = 100 + 28800 = 28900;$$

$x_1 = \frac{-10-170}{2} = -90$ (не удовлетворяет условию); $x_2 = \frac{-10+170}{2} = 80.$

80 км/ч – скорость поезда по расписанию. **Ответ:** 80 км/ч.

– *встречное движение;*

Задача № 173 [10, С. 51]. «Из пункта А в пункт В выехал автобус со скоростью 40 км/ч. Через 4 часа из В в А выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Расстояние от А до В равно 250 км. На каком расстоянии от пункта А автомобиль и автобус встретились?»

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 10).

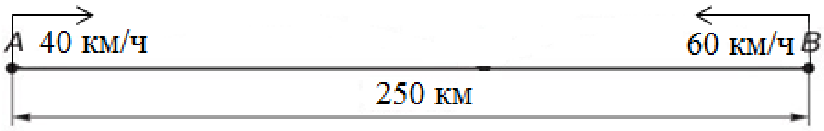

Рис. 5. Схематическая запись задачи №173.

Таблица 10

Табличная запись решения задачи №173

	V	t	S
Автобус	40 км/ч	(х+4) ч	250 км
Автомобиль	60 км/ч	х ч	

Пусть х – время в пути автомобиля, а (х+4) – автобуса. Составим уравнение: $40\ x+4\ +60x=250\rightarrow 40x+160+60x=250;$ $100x=90;$ $x=0{,}9.$ Итак, 0,9 ч – ехал автомобиль, тогда 4,9 – автобус.

$4{,}9\cdot 40=196$ км **– проехал автобус**. **Ответ:** на 196 км от пункта А.

– *движение по воде;*

Задача № 27.24 [29, С. 166]. «Расстояние 210 км катер проходит по течению реки на 4 ч быстрее, чем против течения. Определите собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 11).

Таблица 11

Табличная запись решения задачи №27.24

	V	t	S
По течению	(х+3) км/ч	$\frac{210}{x+3}$	210 км
Против течения	(х-3) км/ч	$\frac{210}{x-3}$	210 км

Пусть x км/ч – собственная скорость катера. Тогда (x+3) км/ч – скорость по течению, (x-3) км/ч – против течения. Составим уравнение:

$$\frac{210}{x-3}-\frac{210}{x+3}=4\rightarrow 210\ \ x+3\ \ -210\ \ x-3\ \ -4x^2+36=0;$$

$$210x+630-210x+630-4x^2+36=0;\quad 4x^2=1296;\quad x_{1,2}=\pm 18.$$

18 км/ч – собственная скорость катера. **Ответ:** 18 км/ч.

– *движение «туда и обратно».*

Задача № 789 [22, С. 221]. «Мотоциклист проехал от села до озера 60 км. На обратном пути он уменьшил скорость на 10 км/ч и поэтому израсходовал времени на 0,3 ч больше. Сколько времени затратил мотоциклист на обратный путь?»

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 10).

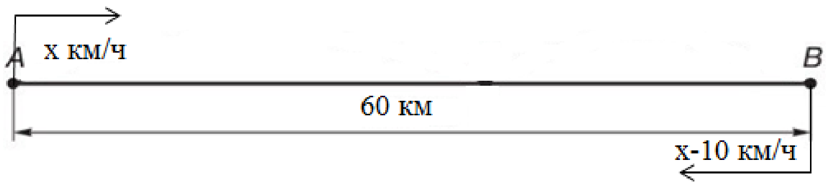

Рис. 6. Схематическая запись задачи 789.

Таблица 12

Табличная запись решения задачи №789

	V	t	S
Туда	x км/ч	$\frac{60}{x}$	60 км
Обратно	(x-10) км/ч	$\frac{60}{x-10}$	60 км

Пусть x км/ч – скорость мотоциклиста от села до озера, тогда обратная скорость (x-10) км/ч. Составим уравнение: $\frac{60}{x-10}-\frac{60}{x}=0,3;$

$$60x-60\ \ x-10\ \ -0,3x^2+3x=0\rightarrow 0,3x^2-3x-600=0\ \ \cdot\frac{10}{3};$$

$$x^2-10x-2000=0.$$

$$D=100+8000=8100;$$

$x_1 = \frac{10-90}{2} = \frac{-80}{2} = -40$ (не удовлетворяет условию); $x_2 = \frac{10+90}{2} = \frac{100}{2} = 50$.

50 км/ч – скорость от села до озера. Тогда $\frac{60}{50-10} = \frac{6}{4} = 1{,}5$ **ч** затратил мотоциклист на обратный путь. **Ответ:** 1,5 ч.

Отметим, что можем сделать вывод что, задачи на движение в 8 классе в основном решаются алгебраическим методом: либо с помощью рациональных уравнений, либо с помощью квадратных уравнений. Так же в учебниках присутствуют задачи на движение, которые решаются с помощью уравнений и систем уравнений.

Рассмотрим указанные виды задач на движение из учебников *9 класса:*

– *движение в противоположном направлении;*

Задача № 461 [24]. «Из некоторого пункта вышли одновременно два отряда. Один направился на север, другой – на восток. Спустя 4 ч расстояние между отрядами было равно 24 км, причем первый отряд прошёл на 4,8 км больше, чем второй. С какой скоростью прошёл каждый отряд?»

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

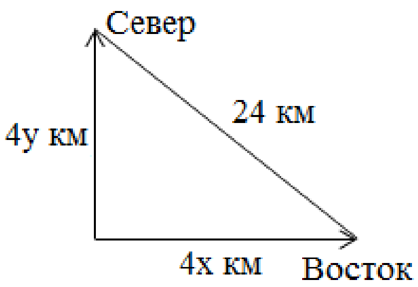

Рис. 7. Схематическая запись задачи № 461.

Пусть х км/ч – скорость отряда, идущего на восток, тогда у км/ч – идущего на север. По теореме Пифагора получаем, $(4x)^2 + (4y)^2 = 24^2$. Разница между расстояниями, пройденными первым и вторым отрядом $4x - 4y = 4{,}8$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}(4x)^2 + (4y)^2 = 24^2;\\ 4x - 4y = 4{,}8;\end{cases} \rightarrow \begin{cases}16x^2 + 16y^2 = 576;\\ x - y = 1{,}2;\end{cases} \rightarrow x = y + 1{,}2;$$

$$16(y + 1{,}2)^2 + 16y^2 - 576 = 0 \rightarrow 16(y^2 + 2{,}4y + 1{,}44) + 16y^2 - 576 = 0$$

$$16y^2 + 38{,}4y + 23{,}04 + 16y^2 - 576 = 0$$

$$32y^2 + 38{,}4y - 552{,}96 = 0 \quad \cdot 100 \rightarrow 3200y^2 + 3840y - 55296 = 0 \quad :320$$

$$10y^2+12y-172{,}8=0 \quad :320$$
$$D=144+6912=7056;$$

$y_1=\frac{-12-84}{2}=-48$ (не удовлетворяет условию); $y_2=\frac{-12+84}{2}=36$.

Итак, 36 км/ч – скорость второго отряда, тогда 36+1,2=37,2 км/ч – скорость первого отряда. **Ответ:** 36 км/ч и 37,2 км/ч.

– *движение в одном направлении;*

Задача № 427 [11]. «Из города в поселок, расстояние до которого 40 км, одновременно выехали автобус и автомобиль. Скорость автомобиля на 30 км/ч больше скорости автобуса, а поэтому он пришел в поселок на 40 мин раньше автобуса. Какова скорость автобуса?»

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 13).

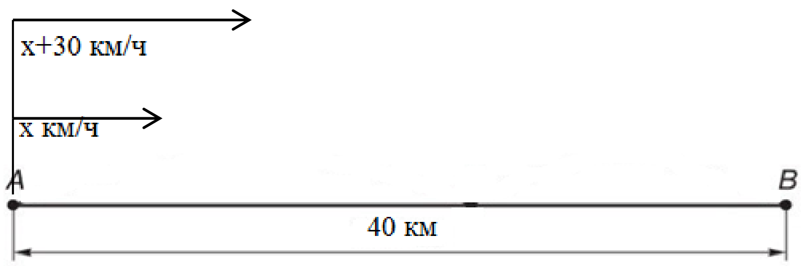

Рис. 8. Схематическая запись задачи №427.

Таблица 13

Табличная запись решения задачи №427

	V	t	S
Автобус	x км/ч	$\frac{40}{x}$	40 км
Автомобиль	(x+30) км/ч	$\frac{40}{x+30}$	40 км

Пусть x км/ч – скорость автобуса, тогда скорость автомобиля (x-10) км/ч. Автомобиль пришел в поселок раньше на $40\text{ мин}=\frac{2}{3}\text{ч}$.

Составим уравнение: $\frac{40}{x}-\frac{40}{x+30}=\frac{2}{3}$.

$$120\ x+30\ -120x-2\ x^2+30x\ =0,$$

$$120x + 3600 - 120x - 2x^2 - 60x = 0$$

$$3600 - 2x^2 - 60x = 0 \quad :(-2) \rightarrow x^2 + 30x - 1800 = 0$$

$$D = 900 + 7200 = 8100;$$

$x_1 = \frac{-30-90}{2} = \frac{-120}{2} = -60$ (не удовлетворяет условию); $x_2 = \frac{-30+90}{2} = 30$.

30 км/ч – скорость автобуса. **Ответ:** 30 км/ч.

– *встречное движение;*

Задача № 7.1 [31]. «Из двух городов, расстояние между которыми 700 км, одновременно навстречу друг другу отправляются два поезда и встречаются через 5ч. Если второй поезд отправится на 7 ч раньше первого, то они встретятся через 2 ч после отправления первого поезда. Найдите скорость каждого поезда».

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 14).

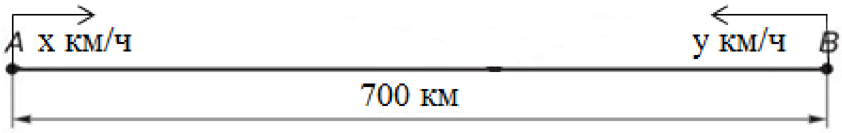

Рис. 9. Схематическая запись задачи №7.1.

Таблица 14

Табличная запись решения задачи №7.1

	V	t		S
1 поезд	x км/ч	5 ч	2 ч	700 км
2 поезд	y км/ч	5 ч	9 ч	

Пусть x км/ч – скорость 1 поезда, y км/ч – 2-го. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 700; \\ 2x + 9y = 700; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 140; \\ 2x + 9y = 700. \end{cases} \rightarrow x = 140 - y;$$

$$2(140 - y) + 9y = 700 \rightarrow 280 - 2y + 9y = 700$$

$$7y = 420 \rightarrow y = 60$$

60 км/ч – скорость 2 поезда, тогда 140-60=80 км/ч – скорость 1-го.

Ответ: 80 км/ч и 60 км/ч.

– *движение по воде;*

Задача № 475 [25, С. 144]. «Расстояние между двумя пристанями 60 км. Теплоход проходит это расстояние по течению и против течения за 5,5 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде и скорость течения, если одна из них больше другой на 20 км/ч.»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 15).

Таблица 15

Табличная запись решения задачи №475

	V	t	S
По течению	х+у км/ч	5,5 ч	60 км
Против течения	х-у км/ч		60 км

Пусть х км/ч – собственная скорость теплохода, а у км/ч – скорость течения. Составим систему уравнений: $\begin{cases} x-y=20; \\ \frac{60}{x+y}+\frac{60}{x-y}=5{,}5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=20; \\ \frac{60}{x+y}+3=5{,}5; \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} x-y=20; \\ \dfrac{60}{x+y}=2{,}5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=20; \\ x+y=24. \end{cases} \rightarrow 2x=44 \rightarrow x=22, y=2.$$

22 км/ч – скорость теплохода, 2 км/ч – скорость течения.

Ответ: 22 км/ч и 2 км/ч.

Анализ учебников алгебры 9 класса показал, что задачи на движение в них могут решаться алгебраическим методом: с помощью систем уравнений второй степени и систем уравнений, содержащих рациональные уравнения.

Кроме того, в Приложении 1 нами представлена таблица, раскрывающая вопрос наличия задач на движение, решаемых алгебраическим методом, в учебниках алгебры 7-9 классов.

Отметим, что в учебниках А.Г. Мордковича для общеобразовательных учреждений и учебниках для классов с углубленным изучением математики тема «Решение задач с помощью квадратных уравнений и с помощью систем уравнений второй степени» отдельно не рассматривается, в то время как в учебниках Ю.Н. Макарычева рассматриваются все темы, связанные с решением задач на движение. Г.В. Дорофеев рассматривает все темы, за исключением темы «Решение задач с помощью уравнений второй степени». Тема «Решение задач с помощью уравнений и систем уравнений» изучается по учебникам данного автора в 7-8 классах и повторяется в 9-ом классе. В учебниках Ш.А. Алимова не рассматриваются темы «Решение задач с помощью рациональных уравнений» и «Решение задач с помощью систем уравнений второй степени».

Вместе с этим, в Приложениях 2-4 нами представлены таблицы, раскрывающие вопрос различных видов задач на движение в учебниках алгебры 7-9 классов.

Отметим, что, в учебниках алгебры для общеобразовательных учреждений 7-9 классов в основном рассмотрены такие виды задач на движение как: встречное движение, движение в одном направлении, движение «туда и обратно», движение по воде. Задачи на движение по окружности и на движение в противоположном направлении чаще встречаются в учебниках для классов с углубленным изучением математики.

Таким образом, подводя итог анализа типологии задач на движение в учебниках алгебры 7-9 классов, можем выделить виды задач, которые авторы рассматривают чаще других: *движение в одном направлении; встречное движение; движение по воде.* Данные виды задач можно встретить во всех учебника алгебры, рассмотренных нами. Что нельзя сказать о задачах на *движение в противоположном направлении*, *движение по окружности*, так же *движение «туда и обратно».* Задачи на движение решаются в основном алгебраическим методом: с помощью *уравнений; систем уравнений; квадратных уравнений; рациональных уравнений; систем уравнений второй степени.*

Выводы по первой главе

1. Раскрыто понятие текстовой задачи на движение, приведены виды текстовых задач на движение. Под текстовой задачей мы понимаем описание определенной ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения.

2. Описаны этапы работы над текстовой задачей на движение. Так, методической литературе выделены основные 4 этапа работы над задачей: анализ задачи, поиск решения и составление его плана, реализация данного плана решения и запись ответа. Данные этапы так же рассматриваются авторами школьных учебников алгебры 7-9 классов при решении задач.

3. Изучены основные требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме. Установлено, что решение текстовых задач повышает вычислительную культуру учащихся, способствует глубокому усвоению функциональных зависимостей, а также развивает их мышление и логику.

4. Проанализировано содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках алгебры разных авторов. Так, определено, что задачи на движение решаются в основном алгебраическим методом: с помощью уравнений; систем уравнений; квадратных уравнений; рациональных уравнений; систем уравнений второй степени; в учебниках чаще встречаются задачи на движение в одном направлении; встречное движение; движение по воде.

5. Представлена типология задач на движение в учебниках алгебры 7-9 классов.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§6. Пропедевтика обучения решению текстовых задач на движение обучающихся основной школы

Задачи на движение впервые вводятся в 3 классе. Учащиеся знакомятся с таким понятиями как скорость, время, расстояние, а также с такими как расстояние, пройденное за единицу времени, отрезок пути, пройденный за определенное время [45, С. 58].

Так как решение задач на движение вызывает определенные трудности у учащихся начальных классов, то Н.Б. Истомина рекомендует использовать следующие приемы:

– «интерпретация текста задачи с помощью таблицы или чертежа;

– сравнение результатов решения задач, в которых меняется одна из величин;

– составление и решение обратных задач;

– анализ текста задачи с лишними или недостающими данными;

– приемы творческой работы над условием задачи» [15, С. 227].

М.А. Бантова подчеркивает важность подготовительной работы по обучению решению задач на движение, которая должна обеспечивать все условия для успешного освоения материала всеми учащимися в классе. На данной ступени обучения решению задач на движение или иных видов у учащихся начальных классов должна быть создана готовность к выбору арифметических действий, то есть они должны усвоить связи, на основе которых выбираются арифметические действия [4, С. 16].

В курсе алгебры 5-9 классов задачи на движение решаются в основном двумя методами: *арифметическим и алгебраическим*.

Арифметический метод наиболее часто применяется в решении текстовых задач в начальной школе. Данный способ характеризуется тем, что значение неизвестной величины находится с помощью составления числового выражения и нахождения его значения.

Алгебраический метод вводится при решении задач в 5-6 классах. Характеризуется данный метод тем, что при решении задач используются уравнения, составляемые по условию задачи.

Опишем пропедевтическую работу по обучению решению задач алгебраическим методом, составленную З.П. Матушкиной [27].

Автором выделены следующие основные этапы данной работы: «на *первом этапе* задача учителя состоит в том, чтобы систематически и целенаправленно формировать важные математические навыки у учащихся. На *втором этапе* должное внимание уделяется выявлению зависимостей между величинами, представленными в условии задачи и переводу этих зависимостей на математический язык» [27, С. 138].

Рассмотрим *первый этап пропедевтики* по обучению решению текстовых задач на движение обучающихся основной школы.

На этом этапе у обучающихся должны быть сформированы такие умения, как:

– внимательное чтение текста задачи;

– проведение первичного анализа текста задачи – выделение условия и вопроса задачи;

– оформление краткой записи условия задачи;

– выполнение рисунка и чертежа по условию задачи.

Представим различные приемы в работе учителя для формирования вышеописанных умений, составленные З.П. Матушкиной:

1. Формирование умения читать текст задачи.

Автором обращается внимание на то, что при формировании данного умения учителю необходимо показывать учащимся образец правильного чтения текста задачи; проводить работу над текстом задачи, которая направлена на усвоение ее содержания. Это значит, что задачу можно представлять по-разному – текстом, рисунком или краткой записью условия задачи. Рекомендуется использовать и различные приемы работы над текстом задачи, например, изменение числовых данных и сюжета задачи; изменение числовых данных или сюжета задачи.

2. Формирование умения выделять условие и вопрос задачи.

З.П. Матушкина для формирования данного умения предлагает выявлять роль вопроса задачи в нахождении способа решения данной задачи, обращать внимание на точность и ясность формулировки ее вопроса, если требуется - переформулировать вопрос задач. Автором рекомендуется к условию задачи формулировать один или несколько вопросов; для ответа на вопрос задачи - находить необходимые данные, также составлять задачу по вопросу и формулировать по нему одну или несколько задач.

3. Формирование умения оформлять краткую запись условия задачи.

В данном случае З.П. Матушкиной предлагается оформлять краткую запись в виде таблицы, схемы или в виде строки/столбца. После составления краткой записи необходимо её прочитывать. По краткой записи нужно формулировать условие задачи.

4. Формирование умения выполнять рисунки или чертежи по условию задачи.

Основными приемами для формирования данного умения автор указывает чтение рисунка, выполненного по условию задачи, и составление задачи по рисунку или чертежу. Также рекомендуется использовать задания, требующие выполнения соответствующего рисунка по условию задачи. Отмечается, что рисунок или чертеж обязательно должен быть наглядным, четким, на нём должны быть отражены все данные из текста задачи; данные и искомые должны соответствовать условию задачи.

По мнению З.П. Матушкиной, умение грамотно выполнять чертеж или рисунок способствует формированию общих подходов к решению задач у учащихся.

Рассмотрим *второй этап пропедевтики* по обучению решению текстовых задач на движение обучающихся основной школы.

На этом этапе рекомендуется обратить внимание на понимание учащимися, как выражение представлять словесно, изменению величин задачи и представления их в виде выражения или уравнения.

Этого можно достичь только с помощью упражнений, которые используются на подготовительном этапе изучении темы, соответственно, данные упражнения должны быть несложными для учащихся; их количество должно быть достаточным для формирования указанных умений [27, С. 139].

Приведем из методической литературы задачи на движение, после прочтения которых учащимся необходимо ответить на определенные вопросы.

Задача 1 [27, С. 139]. Велосипедист за час проходит расстояние в 3 раза больше, чем пешеход. Сколько километров в час проходит каждый из них, если сумма их скоростей равна 24 км/ч?

Задания: 1. Назовите величины, которые связаны зависимостями: одна больше другой в 3 раза; одна меньше другой в 3 раза. *2.* Если пешеход проходит x км, то, как можно охарактеризовать выражения: $3x, 3x + x$? Какое из представленных величин известно по условию задачи?

Задача 2 [27, С. 139]. Среди бегунов проводились эстафеты. Бегун М. выиграл на … эстафет …, чем проиграл. Число проигранных бегуном М. эстафет в … числа эстафет, проведенных вничью. Сколько проведено эстафет, если ничьих было на …, чем проигрышей?

Задание. Заполните пропуски в тексте задачи с помощью справочного материала. *Справочный материал:* Бегун М. выиграл 16 эстафет, проиграл 6 и сыграл вничью 2.

Задача 3 [27, С. 139]. Гребец для выигрыша в чемпионате города должен выиграть 8 заплывов. За каждый выигранный он получается 5 баллов, а за проигранный заплыв отнималось 3 балла. Сколько заплывов выиграл гребец, если получил он 24 балла?

Задание. Установите, к решению каких из приведенных ниже уравнений сводится решения задачи:

а) $5x-3\ \ 8-x\ \ =24$; б) $5x=24$; в) $5\ \ 8-x\ \ -3x=24$;

г) $5x-3\ \ 8+x\ \ =24$; д) $5x+3\ \ 8-x\ \ =24$.

Задача 4 [27, С. 140]. С противоположных концов дорожки длиной 100 м бегут навстречу друг другу две девочки. Через сколько секунд они встретятся, если начнут бег одновременно и если одна пробежит 4 м/с, а другая 3 м/с?

Задание. Дополните до уравнения приведенное выражение, к которому сводится решение задачи: а) $4x+\ldots=100$; б) $100\ldots=3x$; в) $\ldots 4x=\ldots$

Решения данных задач не требуют задания, представленные к задачам.

Описанные выше задания по второму этапу пропедевтики обучения текстовых задач на движение делятся на следующие группы:

1) задачи типа 1 и 2, где у учащихся формируется умение видеть различные зависимости между величинами в рассматриваемой задаче;

2) задачи типа 3 и 4, с помощью решения которых у них формируется умение видеть в алгебраическом выражении или формуле определенное ее содержание, то есть математическую модель этой задачи.

Таким образом, приведенная работа учителя на этапе пропедевтики по обучению решению задач на движение показывает, что данные задачи выступают не только как цель обучения и как средство обучения, но и как предмет изучения. Необходимо добиваться прочного усвоения учащимися 5-6 классов решения задач различными методами: как арифметическим, так и алгебраическим (составлением уравнений) [27, С. 140].

§7. Методические рекомендации по обучению решения текстовых задач на движение в курсе алгебры основной школы

Уместно будет привести высказывание педагога-математика Д. Пойа [36]: «Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности.

Поэтому первая и самая главная обязанность курса математики средней школы состоит в подчеркивании *методической стороны процесса решения задач*».

Для практики обучения математике в школе, отмечает Ю.М. Колягин [16], характерно: «*несовершенство методики обучения решению задач и методики обучения математике через задачи, проявляющееся* в обучении школьников решению задач преимущественно по образцу, в отсутствии целенаправленной работы учителя по формированию у школьников умения критически оценивать ход решение задачи и т.д.»

Анализируя типичные трудности, возникающие у учащихся при решении задач на движение, Н.Я Виленкин и Л.Г Петерсон приходят к выводу о том, что многие учащиеся не до конца понимают, какие изменения происходят при движении объектов [5].

По мнению В.И. Крупича [12], *«сложность текстовой алгебраической задачи* определяется ее структурой, которая выявляется с помощью соответствующего приема, состоящего в следующем. Выполнить анализ задачи, указав: 1) название величин, содержащихся в задаче; 2) основное отношение, реализованное в задаче; 3) количество задачных ситуаций, имеющихся в задаче; 4) известные и неизвестные величины в задачных ситуациях; 5) связь между соответствующими неизвестными величинами; 6) искомую величину».

Л.О. Денищева [8] пишет, что «процесс обучения решению текстовых задачи в 7-9 классах построен так, что сначала учащиеся осваивают эту деятельность в пределах одной темы, а затем – на этапе обобщения и систематизации в пределах более крупного раздела». Как показывает практика, существенные затруднения возникают у учащихся при переводе задачи на математический язык.

Автор рекомендует в начале изучения курса алгебры в 7 классе выявить у учащихся степень владения умением интерпретировать данные задачи. Для этого приводится таблица, аналогичная таблице, приведенной в учебнике А.Г. Мордковича для 7 класса.

Таблица 16

Таблица для выработки у учащихся 7 класса умения интерпретировать данные задачи

№	Задачная ситуация	Математическая модель
1	Скорость первого тела равна скорости второго тела	$x = y$
2	Скорость первого тела больше скорости второго тела на 3 км/ч	$x = y + 3$ или $x - y = 3$
3	Скорость первого тела меньше скорость второго тела на 2 км/ч	$x + 2 = y$ или $y - x = 2$
4	Скорость первого тела в 4 раза больше скорости второго тела	$x = 4y$
5	Скорость первого тела в 3 раза меньше скорости второго тела	$y = 3x$
6	Если первое тело увеличит свою скорость на 3 км/ч, а второе уменьшит свою скорость в 3 раза, то их скорости будут равны	$x + 3 = \frac{y}{3}$
7	Первое тело за 3 ч проходит то же расстояние, что второе за 4ч	$3x = 4y$
8	Если первое тело уменьшит скорость на 2 км/ч, то за 4 ч оно пройдет то же расстояние, что второе за 5 ч	$x - 2\ \cdot 4 = 5$

По мнению Л.О. Денищевой, цель этих несложных упражнений – формировать у учащихся умение составлять математические модели задачных ситуаций, связанных с разностным или кратным сравнением величин, а так же определить уровень сформированности у учащихся данного умения.

Алгебраические задачи помимо арифметического и алгебраического метода могут решаться *геометрическим и графическим* методами.

Так, Л.С. Капкаева в пособии [17] рассматривает вопрос интеграции алгебраического и геометрического методов решения текстовых задач.

Отмечается, что *геометрический метод* решения алгебраических задач, идущий от наглядных представлений, способствует реализации принципа наглядности в обучении математике. При решении алгебраических задач геометрическим методом ключевым понятием являются *геометрические модели* (линейные и двумерные диаграммы, графические модели, чертежи фигур, рассматриваемых в задаче). Они позволяют не только понять смысл задачи, но и выявить скрытые зависимости между величинами, что позволяет увидеть различные пути её решения.

Автор отмечает, что «при решении текстовых задач учащиеся начальных и 5-6 классов используют, в основном, геометрические модели двух видов: отрезок и его части, линейную диаграмму. В 1-3 классах чаще применяются готовые модели, в 5-6 классах ученики самостоятельно строят такие модели.

В курсе алгебры 7 класса можно выделить два основных вида задач, решаемых с помощью одномерных диаграмм: *1) задачи, в которых даны отношения значений величин и отражена одна ситуация в данный момент времени; 2) задачи, в которых даны отношения значений величин и отражены две ситуации: первоначальная и конечная.*

Исходя из того, что многие геометрические факты уже знакомы учащимся, обучение использованию двумерных диаграмм в курсе алгебры следует начинать в 7 классе при изучении темы «Решение задач с помощью уравнений». Следует рассматривать два пути решения задачи: с помощью уравнения (без чертежа) и с помощью двумерной диаграммы» [17, С. 43].

Приведем пример задачи, которую можно использовать в 7 классе на этапе формирования умения решать задачи на движение геометрическим методом.

Задача 1 [17, С. 61]. «Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 15 км/ч прошла по течению реки 35 км, а против течения 25 км. На путь по течению реки она затратила столько же времени, сколько на путь против течения. Какова скорость течения реки?»

Решение. Сначала с учащимися рассматривается алгебраический метод решения данной задачи.

I. Алгебраический метод. Пусть x км/ч – скорость течения реки. Тогда $(15+x)$ км/ч – скорость моторной лодки по течению реки, а $(15-x)$ – скорость против течения. Составим уравнение: $\frac{35}{15+x}=\frac{25}{15-x}$.

$$35\ \ 15-x\ \ =25(15+x),\qquad 525-35x=375+25x$$

$$60x=150,\quad x=2{,}5.$$ **Ответ:** 2,5 км/ч.

II. Геометрический метод. Л.С. Капкаева пишет, что учителю нужно объяснить, что «произведение двух величин будем изображать отрезками значения разных величин, но отрезки будет располагать на перпендикулярных прямых так, чтобы они являлись сторонами прямоугольника. Тогда площадь прямоугольного треугольника будет соответствовать произведению рассматриваемых величин, а полученное изображение будем называть *двумерной диаграммой*, так как стороны прямоугольника изображают значения двух величин, и задействованы два измерения» [17, С. 65].

Выполним схематическую запись данной задачи. Пусть сторона AB прямоугольника ABCD изображает скорость лодки по течению, тогда AD – время движения лодки по течению (Рис. 10). Пусть x км/ч – скорость течения реки, а t – время движения лодки по течению, тогда $AB=15+x,\ AD=t$. Площадь прямоугольника ABCD – расстояние, пройденное лодкой по течению: $S_1=AB\cdot AD,\ S_1=35$.

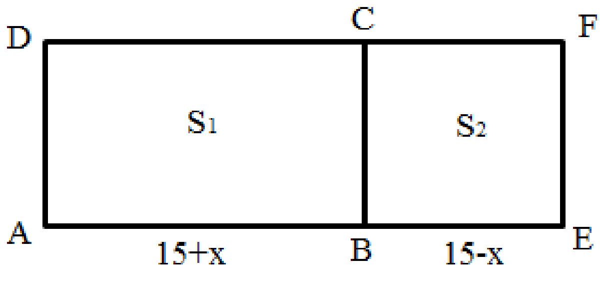

Рис. 10. Схематическая запись задачи №1.

Пусть отрезок BE ($BE<AB, BE=15-x$) изображает скорость лодки против течения реки, тогда высота EF – время движения лодки против течения реки, $EF=AD=t$.

Площадь прямоугольника BEFC – расстояние, пройденное лодкой против течения реки: $S_2 = BE \cdot FC$, $S_2 = 25$. Площадь прямоугольника AEFD определяет весь путь, пройденный моторной лодкой: $S = S_1 + S_2 =
= 35 + 25 = 60$. С другой стороны $S = AE \cdot EF, AE = \ 15 + x \ + \ 15 - x \ =
= 30, EF = t,$ тогда $60 = 30t, t = 2$.

Имеем: 2 часа лодка шла по течению реки и столько же против течения.

$35 : 2 = 17{,}5$ км/ч – скорость лодки по течению $\rightarrow 17{,}5 - 15 = 2{,}5$ км/ч – скорость течения реки. **Ответ:** 2,5 км/ч.

Л.С. Капкаева указывает, что «в 8 классе обучение использованию двумерных диаграмм можно вести при решении задач на составление дробных рациональных уравнений. Различие с задачами 7-го класса в том, что при решении задач геометрическим методом в 7 классе одна из площадей S_1 или S_2 была известна, а другая неизвестна, тогда как при решении аналогичных задач в 8 классе обе площади S_1 и S_2 неизвестны» [17, С. 67].

Задача 2 [17, С. 67]. «Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 720 км увеличил скорость, с которой должен был идти по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?»

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи. Пусть площадь прямоугольника ABCD соответствует расстоянию, которое должен пройти поезд. Пусть $AB = x$ – скорость поезда по расписанию, AD – время движения поезда по расписанию. $S_{ABCD} = AB \cdot AD == 720$.

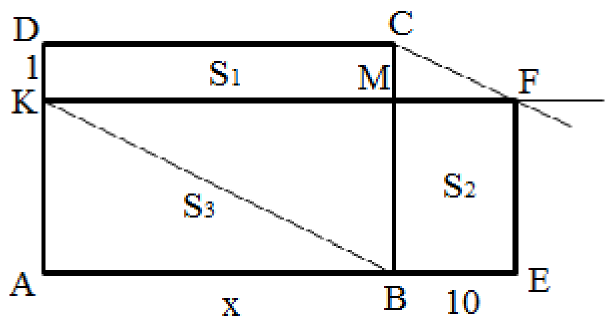

Рис. 11. Схематическая запись задачи №2.

$$S_{ABCD} = S_{AEFK} = 720,$$

$$S_1 = S_2 \text{ , так как } S_1 + S_3 = S_2 + S_3 \cdot S_1 = x \cdot 1 = x, S_2 = 10 \cdot EF,$$

$$EF = \frac{S_{AEFK}}{AE} = \frac{720}{x+10}, \text{тогда } S_2 = 10 \cdot \frac{720}{x+10} = \frac{7200}{x+10}.$$

Так как площади S_1 и S_2 равны, то имеем: $x = \frac{7200}{x+10}$, $x^2 + 10x - 7200 = 0$.

По теореме Виета находим корни уравнения $x_1 = 80, x_2 = -90$ (второй корень не подходит по смыслу задачи).

Ответ: 80 км/ ч – скорость поезда по расписанию.

При решении текстовых задач на равномерные процессы целесообразно использовать графики линейных функций.

Автор отмечает, что в 8 классе у учителя есть возможность обучать учащихся решению задач на встречное движение *графико-геометрическом методом.* К данным задачам в 8 класса можно отнести задачи на составление дробно-рациональных уравнений и в 9 классе – на системы уравнений второй степени с двумя неизвестными.

Задача 3 [17, С. 85]. «Из пунктов А и В навстречу друг другу вышли два путника. Первый вышел из пункта А в 8 часов и пришел в пункт В в 17 часов. Второй вышел из пункта В в 9 часов и пришел в пункт А в 20 часов. Успели ли путники встретиться до 13 часов?»

Решение.

I. Графико-геометрический способ.

Предлагается нарисовать траектории движения путников (Рис.12).

Рис. 12. Схематическая запись к задаче №3.

Спроецировав точку C пересечения траекторий на ось времени, получим время встречи путников. Оно приближенно равно 13,4 часа. Мы не можем утверждать, что точно нашли время, но на вопрос задачи мы можем ответить однозначно: до 13 часов путники встретиться не успеют.

II. Арифметический способ.

1. Первый путник был в пути 9 часов; второй - 11 часов.
2. Весь путь от A до B будем считать равным 99 условным единицам.
3. Скорость движения первого путника равна $99 : 9 = 11$ у.е./час; второго - $99 : 11 = 9$ у.е./час.
4. До 9 часов первый путник двигался один и прошел 11 у.е. пути. В 9 часов расстояние между путниками было равно $99 - 11 = 88$ у.е.
5. Скорость сближения после 9 ч равна $9 + 11 = 20$ у.е./час.
6. Время движения до встречи $88 : 20 = 4,4$ часа.
7. Время встречи $9 + 4,4 = 13,4$ часа.

Ответ: до 13 часов путники встретиться не успеют.

На основе анализа теоретического и задачного материала учебников алгебры 7-9 классов разных авторов нами за основу был взят учебник Г.В Дорофеева и др. [9-11].

Далее нами будут представлены методические рекомендации по обучению решения текстовых задач на движение, описанные по учебнику Г.В Дорофеева для основной школы на основе пособия С.Б. Суворовой и др. [39-41].

Методические рекомендации по 7 классу

Глава 4 «Уравнения» начинается с пункта «Алгебраический способ решения задач». Данный пункт назначен на 40-ой урок.

Назначение пункта – объяснить сущность алгебраического метода решения задач.

Цели урока: разъяснить правила решения задач арифметическим и алгебраическим методами и различия между ними; вывести алгоритм решения задач алгебраическим методом; развивать у учащихся навык составления уравнений для алгебраического метода решения задач.

В ходе урока учащимся предлагается рассмотреть ход решения любой задачи алгебраическим методом и вывести алгоритм ее решения:

1) какую-либо неизвестную величину обозначить переменной;

2) через эту переменную выразить остальные неизвестные величины в соответствии с условием задачи;

3) исходя из условия задачи, составить уравнение, связывающее все неизвестные;

4) решить полученное уравнение;

5) ответить на вопрос задачи.

Все задания этого пункта предлагают только на составление уравнений, без решения. В классах с невысоким уровнем подготовки можно обойтись задачами из раздела А.

В пункте 4 «Решение задач с помощью уравнений» автор поясняет, что введение алгебраического метода решения задач не означает, что учащиеся должны отказаться от прежних приемов рассуждений при решении задач, которыми они овладели ранее. Важно, чтобы учащиеся сами понимали, что в сложных ситуациях алгебраический метод является более простым.

Учащиеся знают, что по одному и тому же условию задачи можно составить разные уравнения. На данном этапе учащиеся понимают, что уравнения с дробями решать сложнее. Теперь они стараются избавиться от дробей, чтобы получить более простое уравнение.

Некоторые советы («Целое лучше дроби», «Плюс лучше минуса») в учебнике Г.В. Дорофеева [9] помогают получить более простое уравнение. Данные советы нужно обсуждать на примерах.

Следующую задачу автор предлагает решить, составив уравнение двумя способами.

Задача № 404 [9]. «Андрей доехал на велосипеде от реки до деревни и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От реки до деревни он ехал со скоростью 10 км/ч, а на обратном пути его скорость была 15 км/ч. Чему равно расстояние от реки до деревни?»

Решение. *I способ.*

Пусть расстояние от реки до деревни равно x км. Имеем уравнение

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{15}=1$$

II способ. Пусть на путь от реки до деревни Андрей затратил x ч, тогда на обратный путь он затратил (1-x) ч. Имеем уравнение $10x=15(1-x)$.

Глава 7 «Многочлены» содержит пункт «Решение задач с помощью уравнений». Даная тема намечена на 86-ой урок.

Ранее учащиеся научились преобразовывать выражения и, применяя их к решению уравнений, они смогут решать более сложные в «техническом отношении» задачи. Важная часть данного пункта – продвижение в обучении решению текстовых задач. Здесь делается акцент на моделирование условий задач с помощью рисунков, чертежей, схем. Схема и рисунки делают условие задачи наглядным и облегчают процесс составления уравнения.

Рассмотрим задачу *на движение по замкнутой траектории.*

Задача № 805 [9]. «Два спортсмена бегут навстречу друг другу по круговой дорожке, длина которой 1 км. Скорость одного из них 140 м/мин, а другого – 160 м/мин. В некоторый момент времени они встречаются. Через сколько минут они встретятся в следующий раз?»

Решение.

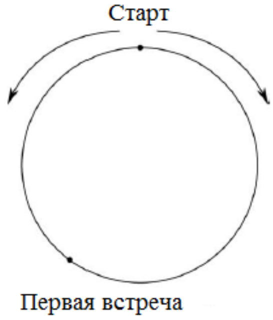

Рис. 13. Схематическая запись №805.

Нарисуем круговую дорожку, отметит точку встречи, покажем стрелками направление движение спортсменов и отметим точку новой встречи.

Методические рекомендации по 8 классу

Пункт «Решение уравнений и задач» впервые встречается в Главе I «Алгебраические дроби» и предполагается на 17-18 уроки.

Основной целью пункта является развитие у учащихся умений решать уравнения, а также применять алгебраический метод для решения текстовых задач.

Особенностью, в отличие от уравнений в 7 классе, является наличие дробных коэффициентов. С помощью опыта, который они приобрели в 7 классе, учащиеся помнят, что, прежде всего, нужно избавляться от дробей при решении уравнении.

С.Б. Суворова рекомендует: при решении задач составлять математические модели (схемы, чертежи, таблицы), при составлении уравнений придерживаться правила «Целое лучше дроби».

Отмечается, что составление уравнения по условию задачи – это самостоятельная учебная цель, и ей необходимо уделять достаточно времени и внимания. Иногда можно ограничиваться составлением уравнения.

Задача № 170 [10]. «Сергей ходит от дома до стадиона пешком со скоростью 4 км/ч. Однажды он отправился из дома в обычное время, но поехал на велосипеде со скорость 12 км/ч. На стадион он приехал на 15 мин раньше обычного. Чему равно расстояние от дома до стадиона?»

Решение. *I способ.*

Пусть x км – расстояние от дома до стадиона. Тогда имеем уравнение:

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$$

Решая уравнение, получим $x = 15$.

Ответ: 15 км.

II способ. Пусть x ч – время на путь от дома на стадиона пешком. Тогда имеем уравнение $4x = 12(x - \frac{1}{4})$.

Пункт «Решение задач» встречается далее в Главе III «Квадратные уравнения». Учащиеся знакомятся с *решением задач с помощью квадратных уравнений.*

До сих пор при решении задач алгебраическим методом выделялось два этапа: 1 – составление уравнения и 2 – его решение. Корень уравнения оказывался и решением задачи.

При решении задач с помощью квадратных уравнений ситуация меняется – корень уравнения не всегда может удовлетворять условия. Поэтому в этом случае необходим еще один этап – *соотнесение корней уравнения с условием задачи*.

Так же в данном пункте для учащихся вводится новый термин: «*математическая модель*». И для всех задач теперь моделью будет служить квадратное уравнение.

Подчеркивается, что сложность решения задач обусловлена комплексным характером работы, выполняемую учеником: нужно верно составить уравнение, решить его и сопоставить корни с условием задачи. Поэтому не всегда необходимо решать уравнение, можно обойтись его составлением, а решение, например, дать учащимся на дом.

Задача №471 [10]. «Две дороги пересекаются под прямым углом. От перекрёстка одновременно отъехали два велосипедиста, один в южном направлении, а другой в восточном. Скорость второго была на 4 км/ч больше скорости первого. Через час расстояние между ними оказалось равным 20 км. Определите скорость каждого велосипедиста».

Решение.

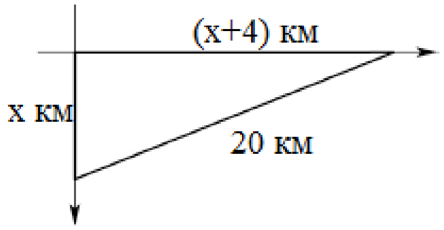

Рис. 14. Схематическая запись задачи №471.

Выполним схематическую запись данной задачи. Пусть x км/ч – скорость одного велосипедиста, x+4 км/ч – скорость второго. По теореме Пифагора получим уравнение $x^2 + +(x+4)^2 = 20^2$.

Его корни $x_1 = 12$ и $x_2 = -16$. Один из корней не соответствует условию задачи. Скорость не может быть отрицательной. В ответе не забыть указать две скорости, первого и второго велосипедиста.

Глава IV «Системы уравнений» содержит пункт «Решение задач с помощью систем уравнений». В данном пункте новым является то, что составляя математическую модель задачи, можно вводить столько переменных, сколько неизвестных в условии. При переводе на математический язык получаем систему уравнений, которую потом решаем.

Методика проведения данного урока аналогична с той, что проводится при решении задач с помощью уравнений. Помимо вышеперечисленных этапов также добавляются уже составление системы уравнений – правильно ввести переменные, и найти в итоге все переменные, отвечающие условию задачи. На первых парах изучения темы можно ограничиться лишь составлением системы.

Рассмотрим одну из задач.

Задача №675 [10]. «Туристский маршрут от станции к озеру идет сначала в гору, а затем с горы. При подъеме туристы идут со скоростью 3 км/ч, а при спуске – 6 км/ч. Путь от станции к озеру занимает 3,5 ч, а обратный путь – 4 ч. Найдите длину маршрута».

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 17,18).

Таблица 17

Табличная запись решения задачи №675

Путь к озеру	V км/ч	$\boldsymbol{t}$ ч	S км
Подъем	x	3	$\frac{x}{3}$
Спуск	y	6	$\frac{y}{6}$

Получим уравнение: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 3{,}5$

Таблица 18

Табличная запись решения задачи №675

Обратный путь	V км/ч	t ч	S км
Подъем	у	3	$\frac{y}{3}$
Спуск	х	6	$\frac{x}{6}$

Получим уравнение: $\frac{y}{3}+\frac{x}{6}=4$. Имеем систему: $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=3{,}5\\ \frac{y}{3}+\frac{x}{6}=4.\end{cases}$

Решив систему, далее найти значения x и y, и ответить на поставленный вопрос. Но есть и другое решение.

Задача требует найти длину маршрута, т.е. значение выражение $x+y$. Сложив уравнения составленной системы, получим, что $3x+3y=45$, а значит $x+y=15$. Получается, что длина маршрута равна 15 км.

Методические рекомендации по 9 классу

Глава III «Уравнения и системы уравнений» содержит два пункта «Решение задач». В первом из них учащиеся решают задачи при помощи уравнений, во втором – при помощи систем уравнений.

В пункте Решение задач с помощью уравнений новым является только то, что уравнения, которые получаются при составлении по условию задачи, являются дробными. Навыки по решению дробных уравнений учащиеся получили в предыдущем пункте, все остальные рекомендации по решению задач с помощью уравнений аналогичны тем, что были представлены в 7-8 классах.

Задача № 419 [11]. «Велосипедист проехал 7 км по шоссе и 5 км по проселочной дороге, затратив на весь путь 1 ч. По проселку он ехал со скоростью, на 4 км/ч меньшей, чем по шоссе. С какой скоростью велосипедист ехал по шоссе?»

Решение. Пусть х км/ч – скорость велосипедиста. Тогда получим уравнение: $\frac{7}{x}+\frac{5}{x-4}=1$. Корни этого уравнения – 14 и 2. Но, так как, по условию скорость велосипедиста, ехавшего по шоссе на 4 км/ч больше, чем по проселочной дороге, то есть $x > 4$. **Ответ:** 14 км/ч.

В пункте Решение задач с помощью систем уравнений новым является характер этапа интерпретации решения системы, в котором полученные два решения во многих задачах являются одним и тем же решением с точки зрения задачи. Все остальные рекомендации по решению задач с помощью уравнений аналогичны тем, что были представлены в 7-8 классах.

Задача № 482 [11]. «Расстояние между пунктами А и В равно 15 км. Два велосипедиста выехали из этих пунктов навстречу друг другу, встретились через 30 мин и, не останавливаясь, продолжила путь. Первый велосипедист прибыл в пункт В на 25 мин раньше, чем второй в пункт А. Найдите скорость каждого велосипедиста».

Решение. Пусть x км/ч – скорость первого велосипедиста, а y км/ч – скорость второго. $\mathbf{30\ мин} = \frac{1}{2}\ \mathbf{ч}, 25\ \mathbf{мин} = \frac{5}{12}\ \mathbf{ч}$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{15}{x+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{15}{y} - \dfrac{15}{x} = \dfrac{5}{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ \dfrac{3}{y} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Система имеет два решения:

$$\begin{matrix} x_1 = 18 \\ y_1 = 12 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} x_2 = 120 \\ y_2 = 90. \end{matrix}$$

Второе решение не удовлетворяет условию. **Ответ:** 18 км/ч и 12 км/ч.

Изучив методические рекомендации С.Б. Суворовой и др. по учебнику Г.В Дорофеева для основной школы, можно сказать, что автор уделяет теме «Решение задач» достаточное внимание. Наиболее сложным, по мнению автора, является этап составления математической модели (уравнения, системы уравнений) по условию задачи. На отработку данного этапа предоставлена хорошая система задач. Предлагается постепенно подводить учащихся к алгебраическому методу решению задач с арифметического метода. Через опыт решения задач учащиеся должны осознать рациональный выбор алгебраического метода решения задач, особенно при переходе к сложным задачам. Часто автор предлагает решать задачи двумя методами, или составлять уравнение двумя способами, что также скажется на лучшем понимании и осознании условия задачи.

Таким образом, при обучении решению задач на движение необходимо уделять внимание переводу условия задачи на математический язык. Так как тема «Решение задач» встречается на протяжении всей основной школы, следует систематически проверять у учащихся уровень сформированности умения решать задачи. На уроках целесообразно применять несложные упражнения, которые можно включать перед основным этапом решения задач – составление уравнений или систем уравнений по условию задачи.

§8. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Нами были выделены задачи, встречающиеся в ***части 1(задании 7)*** основного государственного экзамена по теме исследования. Приведем их.

Задача 1 [33]. «Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 150 км/ч, проезжает мимо столба за 18 секунд. Найдите длину поезда в метрах».

Решение. $150\cdot\frac{18}{3600} = 150\cdot\frac{1}{200} = 0{,}75\text{ км} = 750\text{м}$. **Ответ:** 750.

Задача 2 [33]. «Автомобиль проехал 17 километров за 15 минут. Сколько километров он проедет за 18 минут, если будет ехать с той же скоростью?»

Решение. Скорость автомобиля равна $\frac{17}{15}$ км/мин. Получим:

$\frac{17}{15}\cdot 18 = \frac{17\cdot 6}{5} = 20{,}4$ км. **Ответ:** 20,4.

Выделим основные типы задач в ***части 2 (задании 22)***. Ответы и указания к их решению приведены в Приложении 5.

1. *Встречное движение.*

Задача 3 [45]. «Расстояние между городами А и В равно 730 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 85 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 390 км от города A. Ответ дайте в км/ч».

Задача 4 [45]. «Из городов A и B навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 12 часов раньше, чем велосипедист приехал в A, а встретились они через 2 часа 30 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?»

2. Движение по замкнутой траектории.

Задача 5 [33]. «Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 15 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 6 км/ч меньше скорости второго.»

Задача 6 [45]. «Два мотоцикла стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 15 км/ч больше скорости другого?»

3. Движение «туда и обратно».

Задача 7 [45]. «Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 209 км. Отдохнув, он отправился обратно в A, увеличив скорость на 8 км/ч. По пути он сделал остановку на 8 часов, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B.»

Задача 8 [33]. «Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 27 км. Турист прошёл путь из A в B за 8 часов, из которых спуск занял 3 часа. С какой скоростью турист шёл на спуске, если его скорость на подъёме меньше его скорости на спуске на 1 км/ч?»

4. *Движение в одном направлении.*

Задача 9 [45]. «Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего по платформе параллельно путям со скоростью 3 км/ч навстречу поезду, за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах».

Данная задача направлена на нахождение длины поезда.

Задача 10 [42]. «Первые 550 км автомобиль ехал со скоростью 110 км/ч, следующие 150 км - со скоростью 50 км/ч, а последние 180 км - со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути».

Задача направлена на нахождение средней скорости.

Задача 11 [33]. «Расстояние между городами A и B равно 120 км. Город C находится между городами A и B. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 36 минут следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он проехал половину пути из C в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C».

Задача 12 [33]. «Два человека одновременно отправляются из одного и того же места по одной дороге на прогулку до опушки леса, находящейся в 4 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,7 км/ч, а другой — со скоростью 4,5 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?»

Задача 13 [33]. «Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 21 км/ч. Через час после него со скоростью 15 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 9 часов после этого догнал первого».

5. *Движение по воде*

Задача 14 [42]. «Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.»

Задача 15 [33]. «Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта В вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт В, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?»

Задача 16 [42]. «Рыболов проплыл на лодке от пристани некоторое расстояние вверх по течению реки, затем бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно через 5 часов от начала путешествия. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?»

Итак, в первой части ОГЭ содержатся лишь простейшие текстовые задачи на движение (движение в одном направлении), направленные на: нахождение средней скорости движущегося тела, нахождение длины поезда. Данные задачи решаются арифметическим методом. Во второй части ОГЭ встречаются задачи на: встречное движение, движение в одном направлении (в том числе на нахождение: средней скорости, длины поезда), движение «туда и обратно», движение по замкнутой траектории, движение по воде. Задачи из 2 части в основном решаются алгебраическим методом.

Таким образом, проанализировав материал основного государственного экзамена, можно сказать, что в нем встречаются не все виды задач на движение, выделенные нами ранее. Так, в нем не представлены задачи на «движение в противоположном направлении»; большое количество задач имеется на «движение по воде».

§9. Системы задач по теме «Задачи на движение» в курсе алгебры основной школы

К системам задач существуют различные требования [7; 19; 39].

Г.И. Саранцев приводит в [39] требования к системам задач на формирование понятий, на усвоение теоремы и ее доказательства.

Л.В. Виноградова в учебном пособии [7] выделяет следующие принципы отбора и составления систем упражнений: *принцип систематичности; принцип последовательности; принцип прочности.*

Выделим требования к системе упражнений из работы М.Р. Леонтьевой и С.Б. Суворовой [19], направленной на организацию усвоения приемов решения текстовых задач: *«система упражнений должна:*

– давать возможность учащимся активного участвовать в конструировании приема решения задач;

– обеспечить усвоение и повторение каждого из приемов, входящих в качестве составных частей в формируемый прием;

– строиться по принципу систематичности, постепенного нарастания сложности (причем она должна содержать число заданий, достаточное для достижения требуемого уровня владения приемом);

– формировать умение выяснять, возможно или нет применение того или иного приема в рассматриваемой ситуации;

– содержать задания комплексного характера, выполнение которых требует распознания типа задачи и выбор способа ее решения».

Рассмотрим системы задач на движение для учащихся 9 классов с учетом их видов и методов решения, составленные в соответствии с требованиями М.Р. Леонтьевой и С.Б. Суворовой [19].

Задачи на движение «туда и обратно»

Задача 1 [9, №397]. «На дорогу от дома до работы и обратно у Андрея уходит 90 мин. Обратный путь занимает у него на 10 мин больше, чем путь на работу. Сколько минут Андрей добирается до работы и сколько минут он едет домой?»

Решение.

1) $90 - 10 = 80$ (мин.) – на дорогу от дома до работы и обратно без разницы в 10 мин.

2) $80 : 2 = 40$ (мин.) – на дорогу от дома до работы.

3) $40 + 10 = 50$ (мин.) – на дорогу от работы до дома.

Ответ: 40 мин и 50 мин.

Задача 2 [17, С. 86]. «Турист прошел расстояние от станции до совхоза и обратно за 5 часов. От станции до совхоза он шел со скоростью 4 км/ч, а обратно со скоростью 6 км/ч. Чему равно расстояние от станции до совхоза?»

Решение.

I. *Алгебраический метод*

Пусть х км – расстояние от станции до совхоза. Составим уравнение: $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 5$, $6x + 4x = 120$, $x = 12$. **Ответ:** 12 км.

II. *Графический метод*

График движения туриста от станции до совхоза строится в системе координат tAS (Рис. 15).

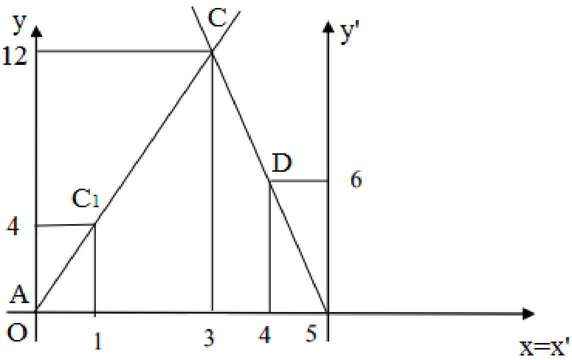

Рис. 15. Схематическая запись задачи № 2.

Здесь неизвестно расстояние, пройденное туристом, но известно время, затраченное им на весь путь туда и обратно. Поэтому в качестве второй системы координат можно рассматривать систему, в котором началом служит точка B, а осью абсцисс прямая AB в направлении от B к A. Оси BS' и AS' сонаправлены и имеют одинаковые масштабы. BD – график движения туриста от совхоза до станции. Ордината точки C пересечения графиков показывает расстояние от станции до совхоза.

Ответ: 12 км.

Задача 3 [10, №675]. «Туристский маршрут от станции к озеру идёт сначала в гору, а затем с горы. При подъеме туристы идут со скоростью 3 км/ч, а при спуске – 6 км/ч. Путь от станции к озеру занимает 3,5 ч, а обратный путь – 4 ч. Найдите длину маршрута».

Решение. Пусть x км – путь в гору, а y км – с горы. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{6}=3{,}5 \\ \frac{y}{3}+\frac{x}{6}=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+y=21 \\ 2y+x=24 \end{cases} \rightarrow y=21-2x; 2(21-2x)+x=24 \rightarrow$$

$\rightarrow 42-3x=24 \rightarrow x=6$, тогда $y=21-12=9$.

Имеем $x+y=6+9=15$ км – длина маршрута. **Ответ:** 15 км.

Задача 4 [34]. «Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 60 км. Отдохнув, он отправился обратно в A, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B.»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 19).

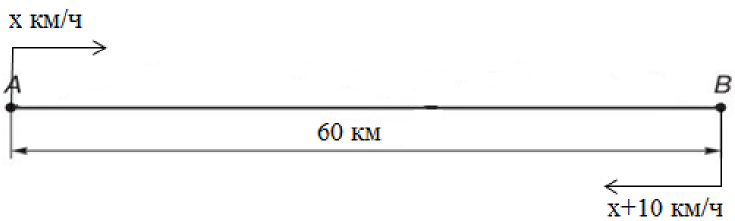

Рис. 16. Схематическая запись задачи №4.

Таблица 19

Табличная запись решения задачи №4

	V	t	S
Туда	x км/ч	$\frac{60}{x}$	60 км
Обратно	(x+10) км/ч	$\frac{60}{x+10}$	60 км

Пусть велосипедист едет со скоростью x км/ч туда, а обратно со скоростью x+10 км/. Составим уравнение: $\frac{60}{x} = \frac{60}{x+10} + 3$.

$$60\ x+10\ = 60x + 3x(x+10)$$

$$3x^2 + 30x - 600 = 0 \rightarrow x^2 + 10x - 200 = 0.$$

Решая уравнение, получим два корня $x_1 = 10, x_2 = -20$ (не соответствует условию задачи). **Ответ:** 10 км/ч.

Задача 5 [17, С. 116]. «Автомобиль прошёл с некоторой скоростью путь от А до В длиной 240 км. Возвращаясь обратно, он прошел половину пути с той же скоростью, а затем увеличил её на 10 км/ч. В результате на обратный путь было затрачено на $\frac{2}{5}$ ч меньше, чем на путь от А до В. С какой скорость шел автомобиль из А в В?»

Решение.

I этап. Построение двумерной диаграммы (Рис. 17).

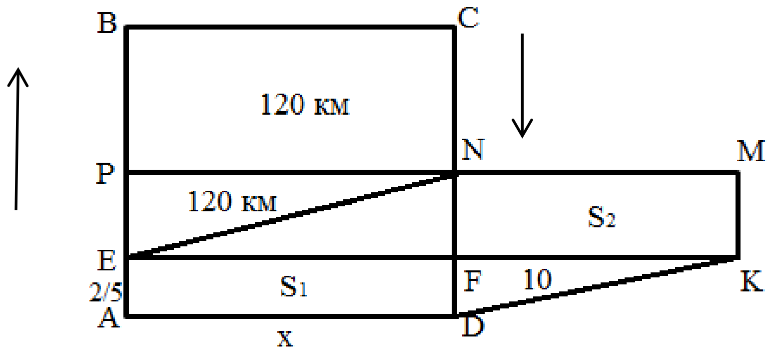

Рис. 17. Схематическая запись задачи №5.

Пусть S_{ABCD} – путь от А до В. $S_{ABCD} = 240$. $AD = x$ – скорость автомобиля от А о В. $S_{PBCN} = 120$ - первая половина пути. $PM = x + 10$ – скорость автомобиля после увеличения на 10 км/ч. $EA = \frac{2}{5}$ – на столько часов меньше автомобиль затратил на обратный путь.

II этап. $S_1 = S_2$. $S_1 = \frac{2}{5}x$, $S_2 = 10 \cdot MK$,

$MK = \frac{120}{x+10}$, поэтому имеем: $\frac{2x}{5} = \frac{1200}{x+10}$ или $\frac{x}{5} = \frac{600}{x+10}$, откуда $x_1 = 50$, $x_2 = -60$ (не соответствует условию задачи), поэтому $AD = 50$.

Ответ: 50 км/ч – скорость автомобиля из А в В.

Отметим, что задача 1 решается арифметическим методом, задача 2 – графическим и алгебраическим методами, задачи 3-4 – алгебраическим, задача 5 – геометрическим методом.

Задачи на встречное движение

Задача 6 [10, №173]. «Из пункта А в пункт В выехал автобус со скоростью 40 км/ч. Через 4 ч из В в А выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Расстояние от А до В равно 250 км. На каком расстоянии от пункта А автомобиль и автобус встретились?»

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

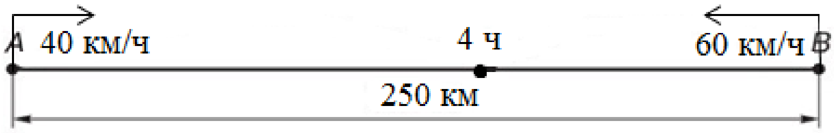

Рис. 18. Схематическая запись задачи №6.

1) $40 \cdot 4 = 160$ (км) – проехал автобус за 4ч.
2) $250 - 160 = 90$ (км) – осталось до пункта В.
3) $40 + 60 = 100$ (км/ч) – скорость сближения объектов.
4) $90 : 100 = 0{,}9$ (ч) = 54 мин. – время в пути автом. до встречи.
5) $60 \cdot 0{,}9 = 54$ (км) – проедет автомобиль до встречи.
6) $40 \cdot 0{,}9 + 160 = 196$ (км) – проедет автобус до встречи.

Ответ: 196 км.

Задача 7 [34]. «Из пунктов А и В, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от А. Найдите скорость пешехода, шедшего из А, если известно, что он шёл со скоростью, на 1 км/ч большей, чем пешеход, шедший из В, и сделал в пути получасовую остановку».

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

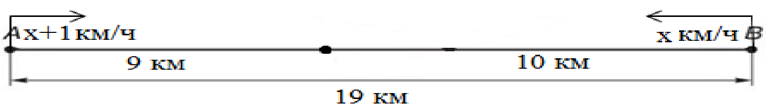

Рис. 19. Схематическая запись задачи №7.

Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 20).

Таблица 20

Табличная запись решения задачи №7

	$\boldsymbol{v}$**, км/ч**	$\boldsymbol{t}$**, ч**	$\boldsymbol{S}$**, км**
1	$x+1$	$\frac{9}{x+1}$	9
2	x	$\frac{10}{x}$	10

Пусть х км/ч – скорость пешехода, вышедшего из В, тогда (х+1) км/ч – скорость пешехода, вышедшего из А. Составим уравнение:$\frac{10}{x}-\frac{9}{x+1}=0{,}5.$

$$10\;\;x+1\;\;-9x=0{,}5x\;\;x+1\;\;\rightarrow x+10=0{,}5x^2+0{,}5x\rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}5x^2-0{,}5x-10=0\rightarrow x^2-x-20=0$$

Уравнение имеет два корня $x_1=5$ **и** $x_2=-4$ (не соответствует условию задачи). Тогда скорость пешехода, шедшего из А = $5+1=6$ км/ч.

Ответ: 6 км/ч.

Задача 8 [11, №482]. «Расстояние между пунктами А и В равно 15 км. Два велосипедиста выехали из этих пунктов навстречу друг другу, встретились через 30 мин и, не останавливаясь, продолжили путь. Первый велосипедист прибыл в пункт В на 25 мин раньше, чем второй – в пункт А. Найдите скорость каждого велосипедиста».

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 21).

Таблица 21

Табличная запись решения задачи №8

	V	$\boldsymbol{t}$	S
1	х км/ч	0,5 ч	15 км
2	у км/ч	0,5 ч	

Пусть х км/ч – скорость первого велосипедиста, а у км/ч – скорость второго. 30 **мин** $=\frac{1}{2}$ **ч**, 25 **мин** $=\frac{5}{12}$ **ч.**

Имеем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{15}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{15}{y} - \frac{15}{x} = \frac{5}{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{3}{y} - \frac{3}{x} = \frac{1}{12} \end{cases}.$

Система имеет два решения:

$$\begin{matrix} x_1 = 18 \\ y_1 = 12 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} x_2 = 120 \\ y_2 = 90. \end{matrix}$$

Второе решение не удовлетворяет условию. **Ответ:** 18 км/ч и 12 км/ч.

Задача 9 [38]. «В 8 часов утра из пункта А в пункт В вышел путник, планируя прийти туда в 21 час. В 9 часов утра того же дня из пункта В вышел второй путник, планируя прийти в пункт А в 19 часов. В 11 часов первый путник сделал непредвиденную остановку на 2 часа и, увеличив скорость, пришел в пункт В, как и планировал, в 21 час. На сколько раньше встретились бы путники, если бы первый путник шел без остановок?»

Решение.

1. Нарисуем траектории движения путников. На рисунке пунктиром изображена траектория с учетом двухчасовой остановки. С - планируемая точка встречи, D – действительная точка встречи (Рис. 20).

2. Спроецировав точки С и D на ось времени, можно заметить, что встреча произойдет действительно позже и приблизительно на 40 минут.

Найдем точное решение задачи, заметив предварительно, что, не видя траекторий движения, мы не можем определенно сказать, повлияла ли остановка первого путника на время встречи. Ведь принципиально возможны три случая: встреча произошла до остановки, встреча произошла во время остановки, встреча произошла после остановки. Если мы не рисуем траекторий, то должны рассматривать решение для каждого случая. При этом в двух случаях из возможных трех решения не будет.

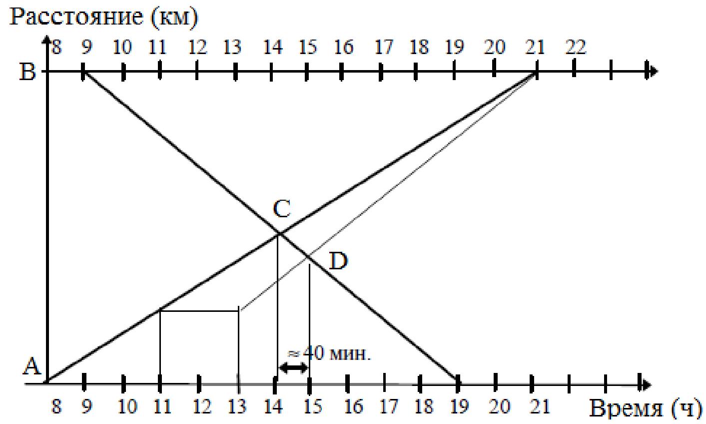

Рис. 20. Схематическая запись задачи №9.

Найдем точное решение задачи *арифметическим способом*, используя график траекторий. Рассчитаем сначала время встречи, если движение происходило так, как было запланировано.

1. Первый путник шел 13 часов, второй 10 часов.
2. Предположим, что весь путь равен 130 км.
3. Тогда скорость первого равна 10 – км/ч, второго – 13 км/ч.
4. До 9 часов первый путник шел один и прошел 10 км пути. Ему осталось пройти 120 км пути.
5. Скорость сближения путников после 9 часов равна $10 + 13 = 23$ км/ч.
6. Время движения до встречи $120 : 23 = 5\frac{5}{23}$ часа, поэтому время встречи равно $14\frac{5}{23}$ часа или приблизительно 14 часов 13 минут.

Рассчитаем теперь время действительной встречи.

1. До 13 часов первый путник шел 3 часа и прошел 30 км пути. Ему осталось еще пройти 100 км пути за 8 часов. Значит, скорость его движения после остановки равна $100 : 8 = 12{,}5$ км/ч.
2. До 13 часов второй путник шел 4 часа и прошел 52 км пути.
3. В 13 часов расстояние между первым и вторым путниками было равно $130 - 30 - 52 = 48$ км пути.
4. Скорость сближения путников после 13 часов равна 25,5 км/ч.

5. Время движения до встречи после 13 часов равно $48 : 25{,}5 = 1\frac{15}{17}$ часа или приблизительно 1 час 53 минуты. Встреча путников произойдет приблизительно в 14 часов 53 минуты. Таким образом, реальная встреча произошла позже планируемой на $\frac{260}{391}$ часа или приблизительно на 40 минут.

Ответ: путники встретились бы раньше приблизительно на 40 минут.

Отметим, что задача 6 решается арифметическим методом, задачи 7-8 – алгебраическим методом, задача 9 – графическим и арифметическим методами.

Задачи на движение в одном направлении

Задача 10 [38]. «Два путника вышли одновременно из пункта А в пункт В. Один из них шел со скоростью 6 км/час, а другой шел со скоростью 4 км/час. Через какое время и на каком расстоянии от пункта А первый путник должен повернуть обратно, чтобы встретить второго ровно через 3 часа после выхода их из пункта А?»

Решение.

I. *Графический способ*

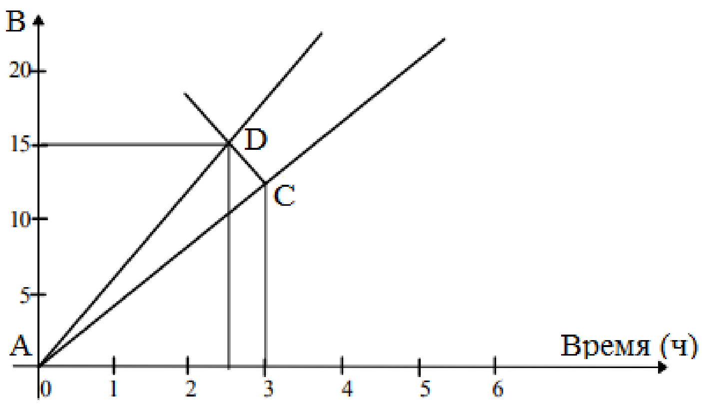

Рис. 21. Схематическая запись задачи №10.

Точка С – место встречи путников, точка D – момент поворота первого путника (Рис. 21). Получаем, что первый путник должен повернуть назад через 2,5 ч после выхода на расстоянии 15 км от пункта А.

II. *Арифметический способ*

1. За 3 часа первый путник пройдет 12 км, а второй – 18 км.

2. Первый путник прошел лишние 6 км, так как он шел от точки встречи до точки поворота и обратно. Значит точка встречи находится на расстоянии 3 км от точки D.

3. Расстояние от А до D равно 15 км. Это расстояние первый путник пройдет за 2,5 ч. **Ответ:** через 2,5 часа на расстоянии 15 км.

Задача 11 [17, С. 118]. «Из города А в город В выехал автобус. Спустя 0,5 ч вслед за ним выехал автомобиль. Через 1,1 ч после своего выхода он оказался впереди автобуса на 2 км. Найдите скорость автобуса, если известно, что она на 20 км/ч меньше скорости автомобиля».

Решение. I этап. Построение двумерной диаграммы (Рис. 22).

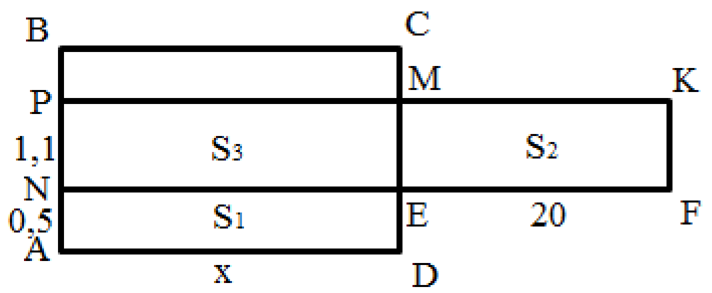

Рис. 22. Схематическая запись задачи №11.

Пусть S_1 определяет путь, пройденный автобусом за 0,5 ч. $AD = x$ – скорость автобуса, AN – время его движения до выхода автомобиля, $AN = 0{,}5$.

$(S_1 + S_3)$ определяет путь, пройденный автобусом за 1,6ч. $(S_2 + S_3)$ определяет путь, пройденный автомобилем за 1,1ч.

II этап. По условию задачи автомобиль обогнал автобус, поэтому $S_2 + S_3 > S_1 + S_3$, откуда $S_2 > S_1$, причем $S_2 - S_1 = 2$ или $S_1 = S_2 - 2$. $S_2 = 20 \cdot 1{,}1 = 22$, $S_1 = 22 - 2 = 20$, но $S_1 = 0{,}5x$, откуда $x = 20 : 0{,}5 = 40$.

Ответ: 40 км/ч – скорость автобуса.

Задача 12 [9, №179]. «Два велосипедиста одновременно выехали с базы на велотрек, куда им надо прибыть к определенному времени. Первый ехал со скоростью 15 км/ч и успел приехать за 5 мин до назначенного времени. Второй ехал со скоростью 12 км/ч и опоздал на 4 мин. На каком расстоянии от велотрека находится база?»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 22).

Таблица 22

Табличная запись решения задачи №12

	V	t	S
1	15 км/ч	$(x-5)$ мин	$15(x-5)$ км
2	12 км/ч	$(x+4)$ мин	$12(x+4)$ км

Пусть x мин – время, назначенное на дорогу к велотреку, тогда $(x-5)$ мин – время 1 велосипедиста, а $(x+4)$ мин – время второго. Составим уравнение: $15\ x-5\ =12(x+4)$.

$$15x-75=12x+48 \rightarrow 3x=123 \rightarrow x=41 \text{ (мин)}.$$

Время первого велосипедиста: $41-5=36$ (мин) $=\frac{3}{5}$ ч. $\rightarrow 15\cdot\frac{3}{5}=9$ км – расстояние от базы до велотрека. **Ответ:** 9 км.

Задача 13 [34]. «Расстояние между городами А и В равно 120 км. Город С находится между городами А и В. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 36 минут следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он проехал половину пути из С в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С.»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 23).

Таблица 23

Табличная запись решения задачи №13

От А до С	V	t	S
Автомобиль	v км/ч	(t+0,6) ч	$v(t+0{,}6)$ км
Мотоциклист	75 км/ч	t ч	75t км

Пусть v км/ч – скорость автомобиля, t ч – время, за которое мотоциклист проезжает от А до С. Имеем: $v\ t+0{,}6\ =75t \rightarrow v=\frac{75t}{t+0{,}6}$.

Так как весь путь от А до В автомобиль прошел за время равное $\frac{3}{2}t + 0{,}6$, получим:

$$v\ \frac{3}{2}t + 0{,}6\ = 120\ \rightarrow\ \frac{75t}{t+0{,}6}\ 1{,}5t + 0{,}6\ = 120$$

$$112{,}5t^2 + 45t = 120t + 72 \rightarrow 112{,}5t^2 - 75t - 72 = 0$$

$$D = 5625 + 32400 = 38025;\quad \overline{D} = 195.$$

$x_1 = \frac{75+195}{225} = 1{,}2;\ \ x_2 = \frac{75-195}{225}$ – посторонний корень.

За 1,2 ч мотоциклист прошел от А до С. Значит весь путь от А до С $75 \cdot 1{,}2 = 90$ км. **Ответ:** 90 км.

Отметим, что задача 10 решается арифметическим и графическим методом, задача 11 – геометрическим методом, задачи 12-13 – алгебраическим методом.

Задачи на движение по воде

Задача 14 [17, С. 110]. «На школьных соревнованиях по плаванию один ученик проплыл некоторое расстояние по течению реки за 24 с и то же расстояние против течения за 40 с. Определить собственную скорость пловца, считая её постоянной от начала и до конца заплыва, если скорость течения реки равна 25 см/с.»

Решение. I этап. Построение двумерной диаграммы (Рис. 23).

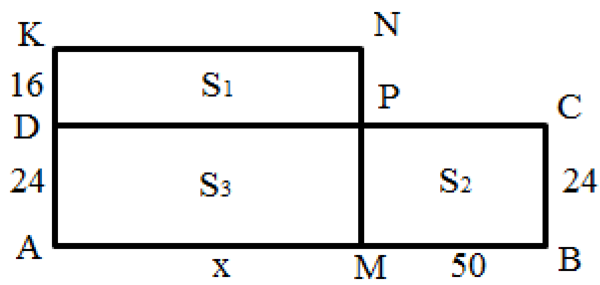

Рис. 23. Схематическая запись к задаче №14.

Пусть S_{ABCD} определяет путь (см), который проплыл ученик по течению реки. AB – скорость пловца по течению реки (см/с). AD – время движения пловца по течению реки (с). AM – скорость пловца против течения реки (см/с). Разность между скоростью пловца по течению реки и скоростью против течения равна удвоенной скорости течения, то есть $AB - AM = MB = 25 \cdot 2 = 50$. S_{AMNK} определяет путь, который проплыл ученик против течения реки.

II этап. По условию задачи ученик проплыл одинаковое расстояние по течению и против течения, поэтому $S_{ABCD} = S_{AMNK}$. Пусть $AM = x$, тогда имеем: $40x = 24\ x + 50\ \rightarrow 16x = 1200 \rightarrow x = 75$. Собственная скорость пловца – $75 + 25 = 100$ (см/с).

Ответ: 100 см/с.

Задача 15 [34]. «Рыболов проплыл на лодке от пристани некоторое расстояние вверх по течению реки, затем бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно через 6 часов от начала путешествия. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 5 км/ч?»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 24).

Таблица 24

Табличная запись решения задачи №15

	V	**t**	**S**
По течению	5+2=7 км/ч	6 ч	x км
Против течения	5-2=3 км/ч		x км

Пусть x км – пройденный путь. Составим уравнение:

$\frac{x}{7} + \frac{x}{3} + 2 = 6,\quad 3x + 7x + 42 = 126,\quad 10x = 8 \rightarrow 4x = 8{,}4$ (км) - проплыл рыболов.

Ответ: 8 км.

Задача 16 [11, №431]. «Прогулочный маршрут на лодках включал движение по течению реки на расстояние 10 км и против течения реки на расстояние 6 км. Скорость течения реки 1 км/ч. Какой должна быть собственная скорость лодки, чтобы поездка заняла 2 ч, включая 15-минутную стоянку?»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 25).

Таблица 25

Табличная запись решения задачи №16

	V	t	S
По течению	х+1 км/ч	1,75 ч	10 км
Против течения	х-1 км/ч		6 км

Пусть х км/ч – скорость лодки. Составим уравнение: $\frac{10}{x+1}+\frac{6}{x-1}=1{,}75$.

$$10\ x-1\ \ +6\ x+1\ \ =1{,}75(x+1)(x-1)$$

$$16x-4=1{,}75x^2-1{,}75\rightarrow 1{,}75x^2-16x+2{,}25=0$$

$$D=256-15{,}75=240{,}25;\quad \overline{D}=15{,}5.$$

$x_1=\frac{16+15{,}5}{3{,}5}=9;\ \ x_2=\frac{16-15{,}5}{3{,}5}=\frac{1}{7}$ – (мало для реальной скорости).

9 км/ч – собственная скорость лодки. **Ответ:** 9 км/ч.

Задача 17 [24, С. 144]. «Расстояние между двумя пристанями 60 км. Теплоход проходит это расстояние по течению и против течения за 5,5 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде и скорость течения, если одна из них больше другой на 20 км/ч.»

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 26).

Таблица 26

Табличная запись решения задачи №17

	V	t	S
По течению	х+у км/ч	5,5 ч	60 км
Против течения	х-у км/ч		60 км

Пусть х км/ч – собственная скорость теплохода, а у км/ч – скорость течения. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y=20; \\ \dfrac{60}{x+y}+\dfrac{60}{x-y}=5{,}5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=20; \\ \dfrac{60}{x+y}+3=5{,}5; \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x-y=20; \\ \dfrac{60}{x+y}=2{,}5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=20; \\ x+y=24. \end{cases} \rightarrow 2x=44 \rightarrow x=22, y=2.$$

22 км/ч – скорость теплохода, 2 км/ч – скорость течения.

Ответ: 22 км/ч и 2 км/ч.

Отметим, что задача 14 решает геометрическим методом, задача 15-17 – алгебраическим методом.

Задачи на движение в противоположном направлении

Задача 18 [31, С. 187]. «Два парохода одновременно вышли из порта: один на север, другой на восток. Через 2 ч расстояние между ними оказалось равным 60 км. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого».

Решение. Выполним схематическую запись данной задачи.

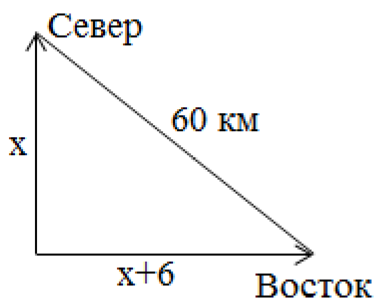

Рис. 24. Схематическая запись задачи №18.

Пусть скорость первого парохода x км/ч, тогда (x+6) км/ч – скорость второго парохода. За 2 ч первый пароход прошел 2x км, второй – 2(x+6) км и через 2 часа расстояние между ними стало 60 км, отсюда (по т. Пифагора):

$$(2x)^2+(2\ \ x+6\ \ )^2=60^2$$

$$4x^2+4x^2+48x+144=3600$$

$$8x^2+48x-3456=0\ \ :8$$

$x^2+6x-432=0$, $D=36+1728=1764$;

$x_1=\frac{-6-42}{2}=\frac{-48}{2}=-24$ (не удовлетворяет условию); $x_2=\frac{-6+42}{2}=\frac{36}{2}=18$.

18 км/ч – скорость первого парохода, тогда 18+6=24 км/ч – скорость второго парохода. **Ответ:** 18 км/ч и 24 км/ч.

Задача 19 [24, №461]. «Из некоторого пункта вышли одновременно два отряда. Один направился на север, другой – на восток. Спустя 4 ч расстояние между отрядами было равно 24 км, причем первый отряд прошёл на 4,8 км больше, чем второй. С какой скоростью прошёл каждый отряд?»

Решение.

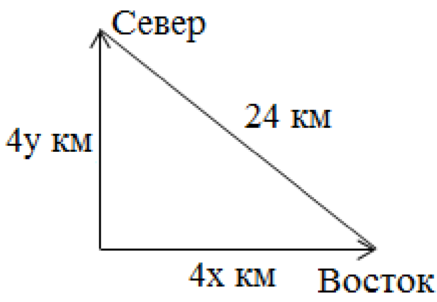

Рис. 25. Схематическая запись задачи №19.

Пусть х км/ч – скорость отряда, идущего на восток, тогда у км/ч – идущего на север. По теореме Пифагора получаем, $(4x)^2 + (4y)^2 = 24^2$. Разница между расстояниями, пройденными первым и вторым отрядом $4x - 4y = 4{,}8$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (4x)^2 + (4y)^2 = 24^2; \\ 4x - 4y = 4{,}8; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16x^2 + 16y^2 = 576; \\ x - y = 1{,}2; \end{cases}$$

$$x = y + 1{,}2$$

$$16(y+1{,}2)^2 + 16y^2 - 576 = 0 \rightarrow 16\ y^2 + 2{,}4y + 1{,}44\ + 16y^2 - 576 = 0$$

$$16y^2 + 38{,}4y + 23{,}04 + 16y^2 - 576 = 0$$

$$32y^2 + 38{,}4y - 552{,}96 = 0 \quad \cdot 100$$

$$3200y^2 + 3840y - 55296 = 0 \quad :320 \rightarrow 10y^2 + 12y - 172{,}8 = 0 \quad :320$$

$$D = 144 + 6912 = 7056;$$

$y_1 = \frac{-12-84}{2} = -48$ (не удовлетворяет условию); $y_2 = \frac{-12+84}{2} = 36.$

36 км/ч – скорость второго отряда, тогда 36+1,2=37,2 км/ч – скорость первого отряда. **Ответ:** 36 км/ч и 37,2 км/ч.

Отметим, что задачи 18-19 решаются алгебраическим методом.

Задачи на движение по окружности

Задача 20 [46]. «Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 21 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 120 км/ч, и через 45 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч».

Решение. За 45 минут первый автомобиль проехал на круг, то есть на 21 км больше первого. Значит первый автомобиль каждую минуту проезжает на $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ км больше, чем второй. Тогда за час он проезжает на $\frac{7}{15} \cdot 60 = 28$ км больше, чем второй. Поэтому скорость второго автомобиля на 28 км/ч меньше первого и равна $120 - 28 = 92$ км/ч. **Ответ:** 92 км/ч.

Задача 21 [34]. «Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 15 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 6 км/ч меньше скорости второго».

Решение. Пусть x км/ч — скорость первого бегуна, тогда (x+6) км/ч — скорость второго бегуна. Из условия известно, что второй бегун пробежал круг за $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ часа, при этом через час после старта первому бегуну оставался 1 км до окончания первого круга, составим уравнение:

$\frac{3}{4}\ \ x + 6\ \ - x = 1,\ \frac{1}{4}x = -\frac{7}{2},\ \ x = 14.$

Скорость первого бегуна 14 км/ч. **Ответ:** 14 км/ч.

Задача 22 [28, №14.27]. «По окружности, длина которой 100 см, движутся равномерно две точки. Они встречаются через каждые 4 с, двигаясь в противоположных направлениях, и через каждые 20 с, двигаясь в одном направлении. Найдите скорости этих точек».

Решение. Пусть x – скорость первой точки, y – скорость второй точки. Тогда (x+y) – скорость сближения при движении в противоположном направлении, а (x-y) – скорость удаления при движении в одном направлении. Составим систему уравнений:

$$\begin{array}{l} 4\ \ x + y\ \ = 100; \\ 20\ \ x - y\ \ = 100. \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x + y = 25; \\ x - y = 5. \end{array}$$

Получаем $2x = 30 \to x = 15, y = 10$. Имеем: 15 см/с – скорость первой точки, 10 см/с – скорость второй точки.   **Ответ:** 15 см/с и 10 см/с.

Выводы по второй главе

1. Рассмотрена пропедевтическая работа по обучению решения текстовых задач на движение. Её основная часть проводится в начальной школе и в 5-6 классах, когда учащиеся только знакомятся с понятием текстовая задача и с методами решения задач. Представлены различные приемы для формирования у учащихся умений по решению задач на движение.

2. Описаны методические рекомендации по обучению решения задач на движение в основной школе. Рассмотрены геометрический и графический методы решения задач на движение в 7-9 классах. Основная сложность для учащихся при решении задач на движение – перевод условия задачи на математический язык.

3. Проанализированы задач ОГЭ по теме исследования. В нем встречаются не все виды задач на движение. Задачи из ОГЭ решаются чаще всего двумя методами: арифметически и алгебраическим.

4. Разработана система задач по теме «Задачи на движение» для учащихся 9 классов. Системы задач представлены на следующие виды: «Задачи на встречное движение», «Задача на движение в одном направлении», «Задачи на движение в противоположном направлении», «Задачи на движение туда и обратно», «Задачи на движение по замкнутой траектории», «Задачи на движение по воде». Задачи из данных систем решаются арифметическим, алгебраическим, геометрическим и графическим методами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

1. Раскрыто понятие текстовой задачи на движение, приведены виды текстовых задач на движение. Под текстовой задачей мы понимаем описание определенной ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения.

2. Описаны этапы работы над текстовой задачей на движение. Так, методической литературе выделены основные 4 этапа работы над задачей: анализ задачи, поиск решения и составление его плана, реализация данного плана решения и запись ответа. Данные этапы так же рассматриваются авторами школьных учебников алгебры 7-9 классов при решении задач.

3. Изучены основные требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме. Установлено, что решение текстовых задач повышает вычислительную культуру учащихся, способствует глубокому усвоению функциональных зависимостей, а также развивает их мышление и логику.

4. Проанализировано содержание теоретического материала по теме «Задачи на движение» в учебниках алгебры разных авторов. Так, определено, что задачи на движение решаются в основном алгебраическим методом: с помощью уравнений; систем уравнений; квадратных уравнений; рациональных уравнений; систем уравнений второй степени; в учебниках чаще встречаются задачи на движение в одном направлении; встречное движение; движение по воде.

5. Представлена типология задач на движение в учебниках алгебры 7-9 классов.

6. Рассмотрена пропедевтическая работа по обучению решения текстовых задач на движение. Её основная часть проводится в начальной школе и в 5-6 классах, когда учащиеся только знакомятся с понятием текстовая за-

дача и с методами решения задач. Представлены различные приемы для формирования у учащихся умений по решению задач на движение.

7. Описаны методические рекомендации по обучению решения задач на движение в основной школе. Рассмотрены геометрический и графический методы решения задач на движение в 7-9 классах. Основная сложность для учащихся при решении задач на движение – перевод условия задачи на математический язык.

8. Проанализированы задач ОГЭ по теме исследования. В нем встречаются не все виды задач на движение. Задачи из ОГЭ решаются чаще всего двумя методами: арифметически и алгебраическим.

9. Разработана система задач по теме «Задачи на движение» для учащихся 9 классов. Системы задач представлены на следующие виды: «Задачи на встречное движение», «Задача на движение в одном направлении», «Задачи на движение в противоположном направлении», «Задачи на движение туда и обратно», «Задачи на движение по замкнутой траектории», «Задачи на движение по воде». Задачи из данных систем решаются арифметическим, алгебраическим, геометрическим и графическим методами.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш. А. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для Общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В.Сидоров. — 18-е изд. — М.: Просвещение, 2011. — 224 с.

2. Алимов, Ш. А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для Общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В.Сидоров. — 19-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 255 с.

3. Алимов, Ш. А. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для Общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В.Сидоров. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 287 с.

4. Бантова, М.А. Методика преподавания математики в начальных классах: учеб. пособие для школ. отд-ний пед. уч-щ/ М.А Бантова, Г.В Бельтюкова. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1984. – 335 с.

5. Виленкин, Н.Я. Использование координатного луча для решения задач на движение/ Н.Я. Виленкин, Л.Г. Петерсон// Математика в школе. - 1984.– № 1.

6. Виноградова, Е.П. Математика: текстовые задачи и методы их решения: учеб.-метод. пособие. – Орск: Издательство ОГТИ, 2007. – 94 с.

7. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – С. 32-58.

8. Денищева, Л. О. Теория и методика обучения математике в школе [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л. О. Денищева, А. Е. Захарова, И. И. Зубарева и др. ; под редакцией Л. О. Денищевой. - 2-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 247 с.

9. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.

10. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.

11. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.

12. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.

13. Жохов, В.И. Преподавание математике в 5-6 классах. Методические рекомендации учителю к учебникам Н.Я Виленкина и др. –М. – 1999. - 157 с.

14. Иванова, Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе [Текст]: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева. - 2-е изд., испр. и доп. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с.

15. Истомина, Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах: учеб. пособие для студ. сред. и высш. учеб. заведений. – 3-е изд. – М.: «Академия», 2000. – 288 с.

16. Капкаева Л.С. Интеграция алгебраического и геометрического методов при обучении математике в школе: учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов; Мордов. гос. пед. инт. – Саранск, 2003. – 179 с.

17. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике, Ч. 1. – 1977. – С. 35-56.

18. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. – М.:Просвещение, 1988. – 223 с.

19. Леонтьева, М.Р. Упражнения в обучении алгебре [Текст]: Кн. для учителя / М.Р. Леонтьева, С.Б. Суворова. – М.: Просвещение, 1985. – 128 с.

20. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.

21. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс. Углубленное изучение. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – М.: Просвещение, 2013. – 336 с.

22. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

23. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс. Углубленное изучение. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

24. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 21-е изд. - М.: Просвещение, 2014. – 271 с.

25. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс. Углубленное изучение. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 7-е изд. - М.: Просвещение, 2008. – 447 с.

26. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов математ. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова.. – М.: Дрофа, 2007. - 320 с.

27. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для стдентов пед. ин-тов по физ. – мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

28. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

29. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. Углубленное изучение. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебн. для учащихся общеобразоват. учрежд./ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 191 с.

30. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

31. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. Углубленное изучение. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебн. для учащихся общеобразоват. учрежд./ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 10-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2013. – 256 с.

32. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

33. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. Углубленное изучение. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебн. для учащихся общеобразоват. учрежд./ А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 255 с.

34. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru/. – Последнее обновление 20.05.2018.

35. Оганесян, В.А. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учебное пособие / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. -368 с.

36. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1959. – 208 с.

37. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам / ОДОБРЕНО Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 8 апреля 2015 г. № 1/15.

38. Рудин В.Н. Графическое решение текстовых задач: учеб. пособие по мат. для учит. и учащ. – Томск, 1995. – 56 с.

39. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. – Саранск: Тип. «Красс. Окт.», 1999. – 208 с.

40. Суворова, С.Б.. Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс: пособие для учителей общеобразоват. организаций / С. Б. Суворова, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова. – М. : Просвещение, 2015. – 185 с.

41. Суворова, С.Б.. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс: пособие для учителей общеобразоват. организаций / С. Б. Суворова, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова. – М. : Просвещение, 2015. – 244 с.

42. Суворова, С.Б.. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс: пособие для учителей общеобразоват. организаций / С. Б. Суворова, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова. – М. : Просвещение, 2015. – 214 с.

43. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/. – Последнее обновление 20.05.2018.

44. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е.Н., Турецкий. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

45. Халидов, М.М. Теория и практика обучения младших школьников решению математических задач/ М.М. Халидов, В.М. Мукина// Начальная школа. – 2006. - № 9. – С. 57 – 59.

46. Ященко, И.В. ОГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2018. – 240 с.

47. Arslana C., Yavuza G., Deringol-Karatasa Y. Attitudes of elementary school students towards solving mathematics problems [Text] / Journal of Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2014. - PP. 557 - 562.

48. Phonapichat P., Wongwanich S., Sujiva S. An analysis of elementary school students’ difficulties in mathematical problem solving [Text]/ P. Phonapichat// Journal of Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2014. - PP. 3169-3174.

49. Roheni, Herman T., Jupri A. Scientific Approach to Improve Mathematical Problem Solving Skills Students of Grade V [Text] / Roheni // Journal of Physics: Conference Series 895, 2017.

50. Sağlama Y., Dost S. Preservice Science and Mathematics Teachers' Beliefs about Mathematical Problem Solving [Text] / Y. Sağlama // Journal of Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2014. - PP. 303-306.

51. Yavuz G., Erbay H.N. The analysis of pre-service teachers' beliefs about mathematical problem solving [Text] / G. Yavuz // Journal of Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2015. - PP. 2687 - 2692.

Приложение 1

Наличие задач на движение, решаемых алгебраическим методом, в учебниках алгебры 7-9 классов

	А.Г Мордкович			*Ю.Н Макарычев*			*Г.В Дорофеев*			*Ш.А. Алимов*			*А.Г Мордкович**			*Ю.Н Макарычев**		
Темы	**7**	**8**	**9**	**7**	**8**	**9**	**7**	**8**	**9**	**7**	**8**	**9**	**7**	**8**	**9**	**7**	**8**	**9**
Решение задач с помощью уравнений	1	-	-	4	-	-	7	-	4	3	-	-	6	-	-	4	-	-
Решение задач с помощью систем уравнений	2	-	5	3	-	-	-	3	2	3	-	2	5	-	6	4	-	-
Решение задач с помощью квадратных уравнений	-	-	-	-	2	-	-	3	-	-	3	-	-	-	-	-	3	-
Решение задач с помощью рациональных уравнений	-	3	-	-	3	-	-	3	-	-	-	-	-	4	-	-	3	-
Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	-	-	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3

***** - учебники для классов с углубленным изучением математики

Приложение 2

Наличие различных видов задач на движение в учебниках алгебры 7 класса

Название тем учебника	Виды задач на движение	Номера задач	Кол-во задач
А.Г. Мордкович			
§ 3. «Что такое математическая модель».	движение в противоположном направлении; движение в одном направлении.	10,11	2
§ 4. «Линейные уравнения с одной переменной».	встречное движение, движение в одном направлении, движение по воде.	20,26,29,30,31,35	6
§ 14. «Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций».	движение по воде – 5 задач; встречное движение – 3 задачи; движение в одном направлении – 4 задачи; движение по окружности – 1 задача.	1,2,3,4,5,6,14,23, 24,25,26,27,37	13
Ю.Н. Макарычев и др.			
Гл. I, § 3, п. 8 «Решение задач с помощью уравнений».	движение по воде; движение в одном направлении	155,156	2
Гл.VI, § 16, п. 45 «Решение задач с помощью систем уравнений».	движение в одном направлении – 5 задач; движение по воде – 1 задача; встречное движение – 2 задачи.	1108,1109,1110, 1111,1112,1113, 1177,1178	8
Ш.А. Алимов и др.			
Гл. II, §8 «Решение задач с помощью уравнений».	движение по воде – 4 задачи; движение в одном направлении – 4 задачи; встречное движение – 2 задачи.	110(1,2), 111(1,2), 112(1,2), 114(1,2), 115(1,2)	10
Гл. VI, §37 «Решение задач с помощью систем уравнений».	движение по воде – 2 задачи; встречное движение – 1 задача; движение в одном направлении – 1 задача.	663, 664, 670, 679	4
Г.В. Дорофеев и др.			
Гл. II, §3 «Решение задач с помощью пропорций».	движение в одном направлении.	191,199,230	3
Гл. IV, §4 «Решение задач с помощью уравнений».	движение в одном направлении – 8 задач; движение туда и обратно – 4 задачи.	402(1,2),404,405, 406,407,408,409, 410,416(1,2),424	12
Гл. VI, «Решение задач с помощью уравнений».	встречное движение – 9 задач; движение в одном направлении – 7 задач; движение по воде – 6 задач.	760(а,б),761,762 (а,б),763(а,б),764 (а,б),765(а,б),766 (а,б),773,774,775, 776,777,778,779, 780,781,803,804, 805	22

Ю.Н. Макарычев и др. (для углубленного изучения)			
Гл. IV, §8, п.19 «Решение задач с помощью уравнений»	движение по воде – 3 задачи; встречное движение – 3 задачи; движение в одном направлении – 5 задач.	584,585,586,587, 595,596,597,598, 599,600,601	11
Гл. VIII, §18, п.48 «Решение задач с помощью систем уравнений»	движение по воде – 5 задач; встречное движение – 4 задачи; движение в одном направлении – 1 задача; движение туда и обратно – 1 задача.	1286,1288,1289, 1290,1291,1292, 1293,1294,1300, 1302,1304	11
А.Г. Мордкович (для углубленного изучения)			
Гл. I, §5 «Задачи на составление линейных уравнений с одной переменной»	движение по воде – 4 задачи; встречное движение – 4 задачи; движение в одном направлении – 3 задачи.	18,19,20,21,22,23, 24,25,26,27,28	11
Гл. VIII, §40 «Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций»	движение по воде – 5 задач; встречное движение – 3 задачи; движение в одном направлении – 2 задачи; движение туда и обратно – 2 задачи; движение по окружности – 1 задача.	34,35,36,37,38,39, 40,41,42,43,44,45, 47	13

Приложение 3

Наличие различных видов задач на движение в учебниках алгебры 8 класса

Название тем учебника	Типы задач	Номера задач	Кол-во задач
А.Г. Мордкович			
Гл. I, § 7 «Первые представления о рациональных уравнениях».	движение по воде – 2 задачи; движение в одном направлении – 4 задачи.	22,23,24,25,26,27	6
§ 27 «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций».	движение в одном направлении – 7 задач; движение по воде – 9 задач; движение туда и обратно – 5 задач.	1,2,3,5,6,7,8,9,10, 11,12,13,16,18,19, 20,21,22,23,24,25	21
Ю.Н. Макарычев и др.			
§ 3, п. 7 «Преобразование рациональных уравнений».	движение в одном направлении – 3 задачи.	171,173,178	3
§ 9, п. 26 «Решение задач с помощью рациональных уравнений».	движение в одном направлении – 4 задачи; движение по воде – 3 задачи; движение туда и обратно – 2 задачи.	618,619,620,621, 627,628,629,634, 635	9
Ш.А. Алимов и др.			
Гл. IV, §31 «Решение задач с помощью квадратных уравнений».	движение по воде – 1 задача; движение в одном направлении – 3 задачи.	480,481,485,488	4
Г.В. Дорофеев и др.			
Гл. I, §8 «Решение уравнений и задач».	движение в одном направлении - 5 задач; встречное движение – 1 задача; движение по воде – 1 задача.	170,171,172,173, 178,179,182	7
Гл. III, §4 «Решение задач».	движение в одном направлении – 1 задача; движение по вертикальной траектории – 5 задач.	471,474(а,б), 475(а,б),476	6
Гл. IV, §6 «Решение задач с помощью систем уравнений».	движение в одном направлении – 3 задач; движение по воде – 1 задача.	664(а,б),675, 680(а,б)	4
А.Г. Мордкович (для углубленного изучения)			
Гл. IV, §28 «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций»	движение по воде – 13 задач; встречное движение – 4 задачи; движение в одном направлении – 13 задач; движение туда и обратно – 3 задачи; движение в противоположном направлении – 1 задача.	5,6,7,8,9,10,11,12, 13,14,15,16,17,18, 19,20,21,22,23,24, 25,26,27,28,29,30, 31,32,33,34,35,36, 37,38	34

Ю.Н. Макарычев и др. (для углубленного изучения)			
Гл. IV, §9, п. 30 «Решение задач с помощью квадратных уравнений»	-	-	0
Гл. IV, §11, п. 35 «Решение задач с помощью дробно-рациональных уравнений»	движение по воде – 4 задачи; встречное движение – 1 задача; движение в одном направлении – 5 задач; движение туда и обратно – 2 задачи.	788,789,790,791, 793,794,795,799, 801,804,805,806	12

Приложение 4

Наличие различных видов задач на движение в учебниках алгебры 9 класса

Название тем учебника	Типы задач	Номера задач	Кол-во задач
А.Г. Мордкович			
Гл. II, § 7 «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций».	движение по воде – 5 задач; движение в одном направлении – 4 задачи. встречное движение – 4 задачи.	1,2,3,16,17,34,35, 36,37,39,41,42,48	13
Ю.Н. Макарычев и др.			
§ 7, п. 20 «Решение задач с помощью систем уравнений второй степени».	движение в противоположном направлении – 1 задача; встречное движение – 1 задача; движение в одном направлении – 2 задачи.	461,472,473,474	4
Ш.А. Алимов и др.			
Гл. I «Решение задач с помощью систем уравнений».	движение по воде – 1 задача.	60	1
Г.В. Дорофеев и др.			
Гл. III, п. 4 и п.6 «Решение задач».	движение в одном направлении – 13 задач; встречное движение – 3 задачи; движение по воде – 5 задач.	416(а,б),417(а,б), 419(а,б),420(а,б), 422,425(а,б),426, 427,428,428,432, 439,480,481,482, 483	21
А.Г. Мордкович (для углубленного изучения)			
Гл. II, §14 «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций»	движение по воде – 2 задачи; встречное движение – 10 задач; движение в одном направлении – 9 задач; движение туда и обратно – 2 задачи; движение по окружности – 3 задачи.	1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21, 22,23,24,25,26	26
Ю.Н. Макарычев и др. (для углубленного изучения)			
Гл. III, §8, п. 22 «Решение задач»	движение по воде – 3 задачи; встречное движение – 1 задача; движение в одном направлении – 4 задачи.	475,476,477,478, 479,494, 495,496	8

Приложение 5

Ответы и указания к решению задач ОГЭ

Задача 3.

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 27).

Таблица 27

Табличная запись решения задачи №3

	V	t	S
1-й автом.	х км/ч	$\frac{390}{x}$	390 км
2-й автом.	85 км/ч	4 ч	340 км

Пусть скорость первого автомобиля х км/ч. Составим уравнение: $\frac{390}{x} - 4 = 2 \to \frac{390}{x} = 6 \to x = 65$.

65 км/ч – скорость первого автомобиля. **Ответ:** 65 км/ч.

Задача 4.

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 28).

Таблица 28

Табличная запись решения задачи №4

	V	t	S
Мотоциклист	х км/ч	$\frac{1}{x}$ ч	1
Велосипедист	у км/ч	$\frac{1}{y}$ ч	1

Пусть скорость мотоциклиста х км/ч, велосипедиста – у км/ч. Расстояние от А до В обозначим за 1. Составим систему уравнений:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 12; \\ 2{,}5\ \ x + y\ \ = 1; \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{l} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 12; \\ y = 0{,}4 - x. \end{array} \to \frac{1}{0{,}4 - x} - \frac{1}{x} = 12$$

$$x - 0{,}4 + x = 12x(0{,}4 - x) \to 2x - 0{,}4 = 4{,}8x - 12x^2$$

$$12x^2 - 2{,}8x - 0{,}4 = 0$$

$$D = 7{,}84 + 19{,}2 = 27{,}04; \quad \overline{D} = 5{,}2.$$

$$x_1 = \frac{2{,}8+5{,}2}{24} = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{2{,}8-5{,}2}{24}$$ – посторонний корень.

Имеем, $x = \frac{1}{3} \to \frac{1}{y} - 3 = 12 \to \frac{1}{y} = 15$ ч. **Ответ:** 15 ч.

Задача 5.

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 29).

Таблица 29

Табличная запись решения задачи №5

	V	t	S
1 бегун	х км/ч	1 ч	1х км
2 бегун	х+6 км/ч	$\frac{3}{4}$ ч	$\frac{3}{4}(x+6)$ км

Пусть скорость первого бегуна х км/ч, тогда второго - х+6 км/ч. Составим уравнение: $\frac{3}{4}\ x+6\ -1x = 1 \to -\frac{1}{4}x = -\frac{7}{2} \to x = 14$.

Итак, 14 км/ч – скорость первого бегуна. **Ответ:** 14 км/ч.

Задача 6. Решение. Решим задачу арифметическим способом.

1) $16:2 = 8$ (км) – больше, поравняются мотоциклисты, когда один проедет на полкруга больше другого.

2) $15:60 = 0{,}25$ (км) – за каждую минуту один из мотоциклистов проезжает больше.

3) $8:0{,}25 = 32$ (мин) – потребуется этому мотоциклисту, чтобы проехать на 8 км больше. **Ответ:** 32 мин.

Задача 7.

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 30).

Таблица 30

Табличная запись решения задачи №9

	V	t	S
Туда	х км/ч	$\frac{209}{x}$ ч	209 км
Обратно	х+8 км/ч	$\frac{209}{x+8}$ ч	209 км

Пусть автомобиль туда хал со скоростью x км/ч, а обратно со скоростью x+8 км/ч. Составим уравнение: $\frac{209}{x} - \frac{209}{x+8} = 8$.

$$209\ x+8\ \ -209x = 8x(x+8) \rightarrow 209x + 209\cdot 8 - 209x = 8x^2 + 64x$$

$$8x^2 + 64x - 209\cdot 8 = 0 \rightarrow x^2 + 8x - 209 = 0$$

$$D = 64 + 836 = 900;\quad \overline{D} = 30.$$

$x_1 = \frac{-8+30}{2} = 11;\quad x_2 = \frac{-8-30}{2}$ – посторонний корень.

Имеем, 11 км/ч – скорость велосипедиста из А в В. **Ответ:** 11 км/ч.

Задача 8.

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 31).

Таблица 31

Табличная запись решения задачи №10

	V	***t***	***S***
Подъем	x-1 км/ч	5 ч	27км
Спуск	x км/ч	3 ч	

Пусть скорость на спуске равна x км/ч, а на подъеме x-1 км/ч. Составим уравнение: $5\ \ x-1\ \ +3x = 27;\quad 8x = 32;\quad x = 4$.

Имеем, 4 км/ч – скорость туриста при спуске. **Ответ:** 4 км/ч.

Задача 9. Решение. $75+3\ \ \cdot\frac{30}{360} = 0{,}65$ км $= 650$ м. **Ответ:** 650 м.

Задача 10. Решение. Решим арифметическим способом.

1) Найдем, сколько времени затратил автомобиль на весь путь:

$$\frac{550}{110} + \frac{150}{50} + \frac{180}{60} = 5 + 3 + 3 = 11 \text{ ч.}$$

2) Весь путь: $550 + 150 + 180 = 880$ км.

3) Найдем среднюю скорость автомобиля на всем пути: $\frac{880}{11} = 80$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

Задача 11.

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 32).

Таблица 32

Табличная запись решения задачи №11

От А до С	V	t	S
Автомобиль	v км/ч	(t+0,6) ч	$v(t+0{,}6)$ км
Мотоциклист	75 км/ч	t ч	75t км

Пусть v км/ч – скорость автомобиля, t ч – время, за которое мотоциклист проезжает от А до С. Имеем: $v\ t+0{,}6\ =75t\rightarrow v=\frac{75t}{t+0{,}6}$.

Так как весь путь от А до В автомобиль прошел за время равное $\frac{3}{2}t+0{,}6$, получим: $v\ \frac{3}{2}t+0{,}6\ =120$

$$\frac{75t}{t+0{,}6}\ 1{,}5t+0{,}6\ =120\rightarrow 112{,}5t^2+45t=120t+72$$

$$112{,}5t^2-75t-72=0$$

$$D=5625+32400=38025;\quad \overline{D}=195.$$

$$x_1=\frac{75+195}{225}=1{,}2;\quad x_2=\frac{75-195}{225} - \text{посторонний корень.}$$

Итак, за 1,2 ч мотоциклист прошел от А до С. Значит весь путь от А до С $75\cdot1{,}2=90$ км. **Ответ:** 90 км.

Задача 12. Решение. Решим задачу арифметическим способом.

1) Найдем, через сколько часов придет на опушку второй человек:

$$\frac{4}{4{,}5}=\frac{8}{9}\text{ ч.}$$

2) Найдем, сколько км за это время пройдет первый человек:

$$\frac{8}{9}\cdot2{,}7=2{,}4\text{ км.}$$

3) До пушки первому человеку останется пройти: $4-2{,}4=1{,}6$ км.

4) Найдем, через сколько они встретятся, так как второй теперь движется навстречу первому: $\frac{1{,}6}{2{,}7+4{,}5}=\frac{1{,}6}{7{,}2}=\frac{2}{9}$ ч.

5) За это время первый человек ещё пройдет: $2{,}7\cdot\frac{2}{9}=0{,}6$ км.

6) В общем, он пройдет от точки отправления: $2{,}4+0{,}6=3$ км.

Ответ: 3 км.

Задача 13. Решение.

Время, когда первый велосипедист начал движение будем считать началом отсчета.

Пусть v км/ч – скорость третьего велосипедиста, а t ч – время когда он догнал второго. К этому моменту, второй велосипедист уже проедет $15(t-1)$ км, а третий - $v(t-2)$ км. Таким же образом получается, что к моменту времени, когда третий догонит первого, первый проедет $21(t+9)$ км, а третий, так как был в пути на два часа меньше, проедет $v(t+7)$ км. Составим систему уравнений: $\begin{cases} 15(t-1)=v(t-2); \\ 21(t+9)=v(t+7). \end{cases}$

Умножим первое уравнение на $(t+7)$, а второе на $(t-2)$. Вычтем из второго уравнения первое: $21(t^2+7t-18)-15(t^2+6t-7)=0$.

$$21t^2+147t-378-15t^2-90t+105=0$$

$$6t^2+57t-273=0 \to 2t^2+19t-91=0$$

$$D=361+728=1089; \quad \sqrt{D}=33.$$

$$x_1=\frac{-19+33}{4}=3{,}5; \quad x_2=\frac{-19-33}{4} - \text{посторонний корень.}$$

Подставляем 3,5 во второе уравнение: $21 \cdot 12{,}5 = v \cdot 10{,}5 \to v=25$.

Ответ: 25 км/ч.

Задача 14.

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 33).

Таблица 33

Табличная запись решения задачи №14

	V	***t***	***S***
По течению	x+3 км/ч	5 ч	36 км
Против течения	x-3 км/ч		36 км

Пусть x км/ч – скорость лодки. Составим уравнение: $\frac{36}{x+3}+\frac{36}{x-3}=5$.

$$36(x-3)+36(x+3)=5(x+3)(x-3)$$

$$36x - 108 + 36x + 108 = 5x^2 - 45$$

$$5x^2 - 72x - 45 = 0, \qquad D = 5184 + 900 = 6084; \quad \overline{D} = 78.$$

$$x_1 = \frac{72+78}{10} = 15; \quad x_2 = \frac{72-78}{10} \text{ – посторонний корень.}$$

Итак, 15 км/ч – собственная скорость лодки. **Ответ:** 15 км/ч.

Задача 15. Решение.

Пусть x км/ч – скорость плота и течения. Тогда $4x - x = 3x$ – скорость катер против течения, а $4x + x = 5x$ – скорость катера по течению.

Так как скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению в 5 раз больше скорости плота, то получаем, что, если плот до встречи проплыл S км, следовательно катер в 3 раза больше – $3S$, а после встречи катер – $3S$, плот в пять раз меньше - $\frac{3S}{5}$. Тогда получается плот пройдет всего $S + \frac{3S}{5} = \frac{8S}{5}$.

Таким образом, получим отношение пройденного пути плотом ко всему пути: $\frac{\frac{8S}{5}}{4S} = \frac{2}{5}$. **Ответ:** $\frac{2}{5}$.

Задача 16.

Решение. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы (Табл. 34).

Таблица 34

Табличная запись решения задачи №16

	V	***t***	***S***
По течению	6+2=8 км/ч	5 ч	х км
Против течения	6-2=4 км/ч		х км

Пусть х км – пройденный путь. Составим уравнение: $\frac{x}{8} + \frac{x}{4} + 2 = 5$;

$x + 2x + 16 = 40; \quad 3x = 24; \quad x = 8.$

Имеем, 8 км проплыл рыболов. **Ответ:** 8 км.