МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПО ТЕМЕ «КВАДРАТНЫЕ КОРНИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Б А К А Л А В Р С К А Я   Р А Б О Т А

Направление подготовки бакалавра: 44.03.05 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математика и информатика*

Студент В.В. Назаров ___________
Научный
Руководитель: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Тема «Квадратные корни» является одной из традиционных тем школьного курса алгебры основной школы. Ее изучение базируется на знаниях и умениях учащихся о рациональных числах, полученных в курсе математики 6 класса. Совершенствование навыков выполнения операций над рациональными числами происходит в курсе алгебры 7 класса.

Значимость и место изучения темы «Квадратные корни» в курсе алгебры 8 класса связана с необходимостью дальнейшего расширения множества рациональных чисел и введения иррациональных чисел. Мотивацией изучения темы может служить известная *практическая задача* о нахождении стороны (длины стороны) квадрата по его заданной площади, для решения которой известных ранее чисел недостаточно.

Кроме того, при решении многих геометрических задач, задач по физике, химии и биологии возникает необходимость решения уравнений, содержащих квадратные корни. Поэтому важно знать правила действий с квадратными корнями и научиться преобразовывать выражения, их содержащие.

Обратимся к истории возникновения понятия квадратного корня и его обозначения, составленную на основе следующих источников [9] [30].

Современная форма знака квадратного корня $\sqrt{x}$ и $\sqrt[n]{x}$ появилась не сразу. Эволюция знака радикала длилась почти пять веков, начиная с XIII в., когда итальянские и некоторые европейские математики впервые называли квадратный корень латинским словом Radix (корень) или сокращенно R.

В XV в. Н.Шюке писал $R^2 12$ вместо $\sqrt{12}$. Современный знак корня произошел от обозначения, приминаемого немецкими математиками XV-XVI вв., называвшие алгебру — наукой «Косс», а математиков -алгебраистов «коссистами». (Математики XII-XV вв. писали все свои труды исключительно на латинском языке. Они называли неизвестное — res (вещь).

Итальянские математики перевели слово res как cosa. Последний термин заимствовали немцы, от которых и появилось коссисты и косс.)

В XV в. некоторые немецкие коссисты для обозначения квадратного корня пользовались точкой перед выражением или числом. В скорописи эти точки заменялись черточками, а позже они перешли в символ Один такой знак означал обычный квадратный корень. Если нужно было обозначить корень четвертой степени, то применялся сдвоенный знак знак.

Остается только гадать, как именно обозначался корень восьмой степени. Если брать аналогию с четвертой степенью, то этот знак должен был отождествлять трехкратное извлечение квадратного корня, то есть для этого нужно было поставить три квадратика. Однако, это обозначение занято кубическим корнем.

Скорее всего, впоследствии от таких обозначений как раз и образовался знак V, близкий по записи к знакомому школьникам современному знаку, но без верхней черты. Впервые этот знак был замечен в немецкой алгебре «Красивый и быстрый счет при помощи искусных правил алгебры». Автором этого труда был преподаватель математики из Вены, уроженец Чехии Криштоф Рудольф. Книга пользовалась большим успехом и постоянно переиздавалась на протяжении всего XVI в. и после аж до 1615г. Знаком корня, предложенного Криштофом пользовались А.Жирар, С.Стевин (он писал показатель корня справа от знака радикалда в кружке: V (2) или V (3).

В 1626 г. нидерландский математик А.Жирар видоизменил знак корня Рудольфа и ввел совсем близкое к современному обозначение. Такая форма записи начала вытеснять прежний знак R. Однако некоторое время знак корня писали разрывая верхнюю черту, а именно так: $\sqrt{a+b}$.

И только в 1637 году Рене Декарт соединил горизонтальную черту с галочкой, применив новое обозначение в своей книге «Геометрия». Но и здесь не было точной копии современной формы. Запись Декарта несколько отличалась от той, к которой мы с вами привыкли, одной деталью. У него было записано: $\sqrt{C+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, где буква С, поставленная сразу после радикала, указывала на запись кубического корня. В современном виде это выражение выглядело бы так: $\sqrt[3]{C+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$.

Самое близкое к современному написанию радикала применял Ньютон в своей «Универсальной арифметике» (1685г.) Впервые запись корня, полностью совпадающая с сегодняшней, встречается в книге французского математика Ролля «Руководство алгебры», вышедшей в 1690г. Только через некоторое время после ее написания, математики планеты приняли, наконец, единую и окончательную форму записи квадратного корня [9].

Проблема исследования: каковы методические особенности обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры 8 класса основной школы?

Объектом исследования является процесс обучения алгебре учащихся основной школы.

Предмет исследования – методическая система обучения теме «Квадратные корни».

Цель бакалаврской работы – раскрыть методическую систему обучения теме «Квадратные корни».

Задачи исследования:

1. Выделить основные цели и задачи обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы (целевой компонент методической системы).

2. Проанализировать содержание темы «Квадратные корни» в учебниках алгебры основной школы (содержательный компонент методической системы).

3. Изучить различные формы, методы и средства обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы (организационный

компонент методической системы).

4. Сформулировать методические рекомендации по обучению теме «Квадратные корни».

Методы исследования: анализ научно-методической литературы, программ по математике, школьных учебников алгебры по теме исследования, анализ, систематизация и обобщение материала.

Практическая значимость данной работы заключается в том, что в ней представлена методическая система обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы и сформулированы методические рекомендации, которые могут быть использованы учителями математики, а также бакалаврами в период педагогической практики в школе.

Представленные результаты и выводы бакалаврской работы могут быть положены в основу дальнейшей разработки методики обучения учащихся теме «Квадратные корни».

На защиту выносится: методическая система обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы.

Структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «КВАДРАТНЫЕ КОРНИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Основные цели и задачи обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) [32] отмечено, что изучение предметной области «Математика» должно обеспечить:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

4) овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

В программе по математике [4, С. 68] автор выделяет следующие цели и задачи изучения темы «Квадратные корни»:

Расширение множества рациональных чисел, введение понятия иррационального и действительного числа, изучение квадратных корней и действий с ними.

В результате изучения темы учащиеся должны **знать**:

1. Определение периодических и непериодических бесконечных десятичных дробей.
2. Функцию $y=x^2$, ее свойства и график.
3. Понятие квадратного корня
4. Свойства арифметических квадратных корней.
5. Множество действительных, рациональных и иррациональных чисел.

В результате изучения темы учащиеся должны **уметь**:

1. Обращать обыкновенную дробь в десятичную и обратно.
2. Сравнивать действительные, рациональные и иррациональные числа.
3. Уметь строить график функции $y=x^2$.
4. Вносить и выносить множитель из-под знака корня.
5. Выполнять действия с квадратными корнями.

В программе по математике [5, С. 72] автор выделяет следующие цели и задачи изучения темы «Квадратные корни» (к учебнику Макарычева):

Систематизировать сведения о рациональных числах и дать представление об иррациональных числах, расширив тем самым понятие числа; выработать умение выполнять простейшие преобразования выражений, содержащих квадратные корни.

В результате изучения темы учащиеся должны **знать**:

1. Натуральные, целые, рациональные, иррациональные и действительные числа.
2. Модуль числа $|a|$.
3. Арифметический квадратный корень и его свойства.
4. Функцию $y=\sqrt{x}$, ее свойства и график.

В результате изучения темы учащиеся должны **уметь**:

1. Решать простейшие квадратные уравнения.

2. Вносить и выносить множитель из-под знака корня.
3. Находить приближенные значения квадратных корней.
4. Извлекать квадратный корень из степени числа.
5. Преобразовывать иррациональные выражения.

В программе по математике [6, С. 76] автор выделяет следующие цели и задачи изучения темы «Квадратные корни» в учебнике Алимова:

Систематизировать сведения о рациональных числах и дать представление об иррациональных числах, расширив тем самым понятие числа; выработать умение выполнять простейшие преобразования выражений, содержащих квадратные корни.

В результате изучения темы учащиеся должны **знать**:

1. Понятие арифметического квадратного корня.
2. Действительные числа

В результате изучения темы учащиеся должны **уметь н**аходить квадратный корень из степени, произведения и дроби.

В статье С. Минаевой [2, С. 4-7] отмечается, что изучение раздела «Квадратные корни» имеет следующие цели: научить выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни; на примере квадратного и кубического корня сформировать начальные представления о корне n-й степени.

В примерной основной образовательной программе основного общего образования от 8 апреля 2015 г. [37] сказано, что выпускник должен научиться в 8 классе (для использования в повседневной жизни, при изучении других предметов и обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом уровне):

1. Оперировать на базовом уровне понятиями: натуральное число, целое число, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанная дробь, рациональное число, арифметический квадратный корень.
2. Оценивать значение квадратного корня из положительного целого числа.

3. Распознавать рациональные и иррациональные числа.
4. Сравнивать числа.
5. Понимать смысл записи числа в стандартном виде.
6. Решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения.
7. Изображать решения неравенств и их систем на числовой прямой.

Выпускник получит возможность научиться в 8 классе для обеспечения возможности успешного продолжения образования *на базовом и углубленном уровнях:*

1. Оперировать понятиями: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, иррациональное число, квадратный корень, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел.
2. Выполнять вычисления, в том числе с использованием приемов рациональных вычислений.
3. Сравнивать рациональные и иррациональные числа.
4. Представлять рациональное число в виде десятичной дроби.
5. Выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни.
6. Выделять квадрат суммы или разности двучлена в выражениях, содержащих квадратные корни.

§2. Методический анализ содержания обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы

Базовые (известные из школьного курса математики 5-6 и курса алгебры 7 классов) знания:

– понятие рационального числа;
– понятие множества рациональных чисел и его обозначения;

– основные действия (операции) с рациональными числами;

– функция $y = x^2$.

Новые (вводимые) знания:

– понятие квадратного корня из числа;

– понятие арифметического квадратного корня;

– свойства арифметических квадратных корней;

– внесение и вынесение множителя из под знака корня;

– действия с квадратными корнями.

Анализ содержания темы «Квадратные корни» в различных учебниках алгебры 8 класса представлен в Таблицах 1- 4.

В учебнике Ю.Н. Макарычева [3] выделяется больше чем в других часов на изучение раздела «Квадратные корни», весь раздел разделен на 4 параграфа. Затронута тема изучения приближенного нахождения квадратных корней, но пропущена тема периодических десятичных дробей.

В учебнике Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [1] на раздел «Квадратные корни» выделено чуть меньше 18 часов, раздел состоит из 2 параграфов, затронута тема периодических десятичных дробей, но нет приближенного нахождения квадратных корней. В учебнике Никольского [3] раздел «Квадратные корни» состоит всего из одного параграфа и 5 пунктов, многие темы и понятие не представлены.

В учебнике Г.В. Дорофеева [14] включена тема посвященная теореме Пифагора, отсутствующая во всех вышеуказанных. Здесь также затронуто изучение кубического корня.

Во всех учебниках изучение раздела начинается с действительных и иррациональных чисел, но у каждого автора свой подход. Потом идет изучение непосредственно квадратного корня и арифметического квадратного корня, свойств и действий над ними.

Таблица 1

Авторы учебника	Название глав и параграфов	Кол-во часов
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова [3]	§4. Действительные числа 9. Рациональные числа 10. Иррациональные числа §5. Арифметический квадратный корень 11. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень. 12. Уравнение x^2=a. 13. Нахождение приближенных значений квадратного корня. 14. Функция y=$\sqrt{x}$ и ее график. §6. Свойства арифметического квадратного корня. 15. Квадратный корень из произведения и дроби. 16. Квадратный корень из степени. §7. Применение свойств арифметического квадратного корня 17. Вынесение множителя из-под знака корня. Внесение множителя под знак корня. 18. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни.	5 2 3 7 2 2 1 2 4 2 1 3 1 1
Всего		23

Таблица 2

Авторы учебника	Название глав и параграфов	Кол-во часов
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [1]	§5. Действительные числа 14. Рациональные и иррациональные числа. 15. Периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби. §6. Квадратные корни. 16. Функция y=x^2 и ее график. 17. Понятие квадратного корня. 18. Свойства арифметических квадратных корней. 19. Внесение и вынесение множителя из-под знака корня. 20. Действия с квадратными корнями.	5 2 3 13 2 2 3 2 4
Всего		18

Таблица 3

Авторы учебника	Название глав и параграфов
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин [2]	§3. Квадратные корни 3.1 Понятие квадратного корня. 3.2 Арифметический квадратный корень. 3.3 Квадратный корень из натурального числа. 3.4 Приближенное вычисление квадратных корней. 3.5 Свойства арифметических квадратных корней.

Таблица 4

Авторы учебника	Название глав и параграфов	Кол-во часов
Г.В. Дорофеев [14]	2.1 Задача о нахождении стороны квадрата 2.2 Иррациональные числа 2.3 Теорема Пифагора 2.4 Квадратный корень (алгебраический подход) 2.5 Свойства квадратных корней 2.6 Преобразование выражений, содержащих квадратные корни 2.7 Кубический корень	2 2 2 2 3 3 2
Всего		18

Изучение темы «Квадратные корни» на базе учебника алгебры за 8 класс авторов Муравиных [1].

В начале дается расширение множества рациональных чисел, вводятся понятия иррационального и действительного числа, рассматривается переход от обыкновенной дроби к десятичным и обратно. На рациональные и иррациональные числа отводится 2ч.

В пункте 14. «Рациональные и иррациональные числа» рассказана история их возникновения и цель изучения темы. Определения даны на основании примеров, отношений длин отрезков.

Определение 1: *если два отрезка имеют общую меру, которая в m раз укладывается в одном отрезке и n раз в другом, то их отношение* $\frac{m}{n}$*, является рациональным числом* [1, С. 79].

Определение иррационального числа дано на примере 1:

Пример 1: *$d^2 = (\frac{m}{n})^2=2$. Отсюда $(\frac{m}{n})^2=2$. Знаменатель дроби, стоящей в левой части равенства, отличен от единицы, поэтому, что бы дробь оказалась равной целому числу, она должна сокращаться на n^2. Но натуральные числа m и n не имеют общих делителей, поэтому нет общих делителей и у их квадратов. Значит, равенство $\frac{m^2}{n^2}=2$ неверно, т.е. число d дробным не является* [1, С. 80].

Пример доказал, что число d не является рациональным числом, это означает, что диагональ квадрата не имеет общей меры с его стороной, число d является иррациональным числом.

Следующий пункт посвящен периодическим и непериодическим дробям, вводится понятие периода и обосновывается неизбежность появления периода при переводе. На этот пункт отводится 3ч.

В параграфе 15, идет изучение периодических и непериодических десятичных дробей, рассматривается тема приближенного нахождения корня к рациональным и иррациональным числам. Затем на рассмотренных примерах даны определения конечной и бесконечной десятичной дроби.

Пример 2: *Переведем* $\frac{1}{3}$ *в десятичную дробь, получается : 0,33333… Цифру «3», которая бесконечно повторяется в записи называют периодом, а саму дробь называют периодической.*

Свойство 1: *любое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби (верно и обратное утверждение).*

Определение 2: *Любое иррациональное число записывается бесконечной непериодической десятичной дробью, а любая бесконечная непериодическая десятичная дробь является иррациональным числом* [1, С. 85].

Определение 3: *Бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным, а бесконечная непериодическая десятичная дробь – иррациональным числом.*

После идет переход непосредственно к изучению темы «Квадратные корни». Изучение начинается с параграфа «Функция $y=x^2$ и ее график». Идет повторение материала о функциях и графиках. Отводится 2ч.

Сперва строится график функции $y=x^2$ по точкам в декартовой системе координат, проводится ее исследование и дается название графика:

Определение 4: *график функции* $y=x^2$ *называют параболой* [1, С. 90].

Переход к понятию квадратного корня происходит через решение квадратного уравнения x^2=a, аргументирует это тем, что такой метод позволяет объяснить природу термина. Отводится 2ч.

В следующем 17 пункте вводится понятие квадратного корня.

Определение 5: *Корни уравнения $x^2=a$ называют квадратными корнями из числа а.*

Определение 6: *Неотрицательное число, квадрат которого равен а, называют арифметическим квадратным корнем из а и обозначают* $\sqrt{\mathrm{a}}$. [1, С. 94].

Вводится знак радикала «√» и дается история его возникновения.

Затем авторы переходят к изучению свойств арифметических квадратных корней, в этом пункте начинается отработка умений преобразовывать выражения с квадратными корнями. Отводится 3ч.

В 18 параграфе даны свойства арифметических квадратных корней:

Свойство 2: *Для любого числа а* $\sqrt{\mathrm{a}^2}=a$ [1, С. 99].

Свойство 3: *Для любых неотрицательных чисел а и b:* $\sqrt{ab}=\sqrt{a} * \sqrt{b}$ [1, С. 100].

После изучается и отрабатывается тема внесения и вынесения множителя из-под знака корня. Продолжается работа с квадратными корнями. Как отмечают авторы, у учеников могут возникнуть трудности в преобразовании буквенных выражений, потому что, именно в этой ситуации существенен знак модуля при вынесении множителя из-под знака корня. Отводится 2ч.

В 19 параграфе изучается внесение и вынесение множителя из мод знака корня, дано свойство:

Свойство 4: *При неотрицательных значениях b* $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}*\sqrt{b}=|a|*\sqrt{b}$ [1, С. 105].

Далее авторы переходят к действиям с квадратными корнями, в этом пункте, практикуясь в основном в преобразовании числовых выражений, школьники углубляют знания по данной теме. Изучение можно разбить на две части:

1. Работа с квадратными корнями из чисел.
2. Преобразование буквенных выражений.

Такая модель изучения не задает последовательность изучения, можно сказать, что вторая часть хоть и полезна на данном этапе, но все же осуществляет пропедевтику материала 9 класса, где будет специально изучаться преобразование буквенных выражений с радикалами. Отводится 4ч.

В 20 и заключительном параграфе изучаются действия с квадратными корнями. Вспоминаются изученные ранее свойства и используют их в преобразовании числовых выражений. Рассмотрены такие действия, как: освобождение от иррациональности в знаменателе, разложение на множители, упрощение выражения.

Всего на изучение раздела авторы отводят 19 часов, после каждого раздела происходит проверочная или самостоятельная работа, в конце главы контрольная работа.

Изучение темы «Квадратные корни» на базе учебника алгебры за 8 класс автора Ю.Н. Макарычева [3].

Изучение главы «Квадратные корни» начинается с повторения действительных чисел.

Сначала идет напоминание основных сведений о множестве натуральных чисел, делимости натуральных чисел и рассмотрение типичных задач по теме. Отводится 2 ч.

Затем отводится один урок на повторение основных сведений о целых числах и рассмотрение типичных задач, а после урок, посвященный множеству рациональных чисел.

Дальше следует урок, на котором дается понятие об иррациональных числах и множестве действительных чисел.

После проведения упомянутых выше уроков, начинается непосредственное изучение квадратных корней, отводится 2 урока, на которых рассматриваются понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня. Затем 2 урока посвящены решению простейших квадратных уравнений $x^2=a$ и далее 1 урок, на котором изучается нахождение приближенных значений квадратных корней.

Следующие 2 урока отводятся на рассмотрение функции $y=\sqrt{x}$, её свойств и графика.

Далее следуют уроки, которые можно отнести к свойствам арифметического квадратного корня. На 1 уроке рассматриваются свойства квадратного корня из произведения и дроби, следующий урок - извлечение квадратного корня из степени числа.

На этом этапе автор предлагает отвести несколько уроков на контрольную работу и ее проверку, а потом перейти к урокам, которые относятся к применению свойств арифметического квадратного корня.

1 урок на рассмотрение и отработку навыков внесения и вынесения множителя из-под знака корня. Затем урок, на котором рассматриваются основные приемы преобразования иррациональных выражений.

В заключении автор предлагает провести итоговую контрольную работу по теме «Квадратные корни». Всего на изучение данного раздела отводится 23 часа.

А теперь рассмотрим рекомендации С. Минаевой [14, С. 4-7] *по введению понятия квадратного корня на уроках алгебры по учебнику Г.В. Дорофеева в 8 классе:*

1. Задача о нахождении стороны квадрата (2 урока)

Для введения понятия квадратного корня используется характерный для данного курса содержательный подход, выдвигающий на первый план мотивационный и смысловой аспекты. Материал излагается следующим образом: учащимся известна формула $S=a^2$, с помощью которой по стороне квадрата *a* можно вычислить его площадь *S;* но в математике есть формула и для решения обратной задачи — нахождения стороны квадрата *a* по заданной площади S, которая записывается так: $a=\sqrt{S}$. Символом $\sqrt{S}$ обозначена сторона квадрата, площадь которого равна S. Если, например, $S = 100$, то $a = \sqrt{100}$. Так как $100 = 10^2$, то $a = \sqrt{100} = 10$.

Чтобы учащиеся усвоили новый символ, можно предложить несколько вопросов типа: пусть площадь квадрата равна 81 $м^2$: запишите, используя символ $\sqrt{}$, выражение для стороны этого квадрата; чему равна длина стороны квадрата?

Переходя с геометрического языка на алгебраический, значение символа $\sqrt{S}$ можно описать так: $\sqrt{S}$ — это *неотрицательное число, квадрат которого равен S*. (Ведь длина отрицательным числом выражаться не может!) Таким образом, мы приходим к «рабочей» формулировке, которой и будем пользоваться при нахождении значений квадратных корней.

Обращаем внимание учителя на то, как читается символ $\sqrt{S}$: *квадратный корень из S*. Прилагательное «арифметический» здесь является лишним, так как в этом месте темы мы работаем только с положительными корнями. Однако позже термин использоваться будет.

2. *Иррациональные числа (2 урока)*

В этом пункте можно выделить два аспекта: идейный и практический. *Идейный* заключается в первом знакомстве с иррациональными числами; *практический* - в формировании умения оценивать «неизвлекающиеся» корни, находить их приближенные значения как с помощью оценки, так и с помощью калькулятора.

К необходимости введения иррациональных чисел учащиеся приходят в результате рассмотрения уже знакомой задачи о нахождении стороны квадрата по его площади.

В учебнике на рисунке 2.10 изображены два квадрата. Один из них – единичный, его площадь равна 1 кв. ед. У второго квадрата стороной служит диагональ первого, и его площадь вдвое больше. (В самом деле, маленький квадрат состоит из двух равных треугольников, а большой - из четырех таких же треугольников.) Значит, площадь большого квадрата равна 2 кв. ед. А какова длина стороны этого квадрата? Обозначим ее через а. Используя знак квадратного корня, можно записать, что $a=\sqrt{2}$.

Учащиеся до сих пор имели дело только с «извлекающимися» корнями. Нужно дать им пару минут на то, чтобы они и в данном случае попытались извлечь корень, чтобы убедиться, что значение $a = 1$ - недостаточно, а если взять а = 2, то это уже слишком много; попытались бы подобрать десятичную дробь и увидели, что $1{,}4^2 < 2$, а $1{,}5^2 > 2$.

Далее проводится достаточно несложное доказательство того, что нет ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равен 2 (с. 73 учебника). Таким образом, нет рационального числа, точно выражающего длину стороны нашего квадрата.

Хотелось бы, чтобы учащиеся осознали поразительность открытия, к которому пришли математики древности (отрезок есть, а длины у него нет!), а также то, что этот факт дал толчок развитию математики (потребовалось ввести в употребление новые числа!).

Учащимся сообщается, что число, выражающее длину стороны квадрата, площадь которого равна 2 кв. ед., относится к классу так называемых иррациональных чисел:

$\sqrt{2}$ - это положительное иррациональное число, квадрат которого равен 2, то есть верно равенство $(\sqrt{2})^2=2$. Они должны уметь называть и другие иррациональные числа вида $\sqrt{a}$ и выполнять преобразования типа $(\sqrt{a})^2=a$ для конкретных положительных значений а, причем в обе стороны.

Итак, первое знакомство с иррациональными числами подчинено достаточно узкой цели: оно происходит в связи с изучением квадратных корней и обеспечивает, прежде всего, потребности этой темы. Кроме информации, описанной выше (а именно: среди рациональных чисел нет числа, выражающего длину стороны квадрата, площадь которого равна 2; помимо рациональных чисел есть еще и так называемые иррациональные числа; к иррациональным относятся все числа вида $\sqrt{a}$, если a не является квадратом целого или дробного числа), учащиеся узнают, что существует бесконечно много иррациональных чисел другой природы (пример - число z), что иррациональные числа могут быть и отрицательными, и что на практике их заменяют (приближенно) десятичными дробями. Более основательные сведения об иррациональных и действительных числах учащиеся получают во «втором проходе» в курсе 9-го класса.

Для демонстрации принципиальной возможности нахождения десятичного приближения иррационального числа вида $\sqrt{a}$ в учебнике используется метод оценки: находятся приближенные значения с недостатком и избытком, выраженные последовательными целыми числами (то есть с точностью до 1), последовательными десятичными дробями с одним знаком после запятой (то есть с точностью до 0,1) и т. д. Основу этого метода составляет утверждение: если a и b — положительные числа и $a^2<b^2$, то $a<b$. Алгебраическое доказательство этой теоремы пока не приводится, но зато дается естественное для данного курса и совершенно очевидное геометрическое обоснование: если площадь одного квадрата меньше площади другого квадрата ($a^2<b^2$), то и сторона первого квадрата меньше стороны второго квадрата ($a < b$).

3. *Теорема Пифагора (2 урока)*

В основу доказательства теоремы Пифагора, приведенного в учебнике, положены геометрические соображения.

На рисунке 2.19 (с. 83) построены два квадрата — со сторонами, равными гипотенузе треугольника c и сумме его катетов a и b. Из рисунка ясно, что площадь малого квадрата (то есть c^2) равна разности площади большого (то есть $(a + b)^2$) и площадей четырех одинаковых прямоугольных треугольников (то есть $4*\frac{ab}{2}$). С помощью несложных преобразований равенства $c^2= (a+b)^2 -4*\frac{ab}{2}$ — приходим к нужному результату $c^2=a^2+b^2$.

В связи с применением теоремы Пифагора для вычисления длины гипотенузы прямоугольного треугольника по его катетам (пример 1 на с. 84) в учебнике упоминаются «пифагоровы тройки». Заметим, что хотя их бесконечно много, тройка, составленная из последовательных натуральных чисел, только одна.

Желательно, чтобы построение с помощью циркуля и линейки отрезков с иррациональными длинами (или точек на координатной прямой с иррациональными абсциссами) было не просто разобрано по тексту учебника (с. 85), но и реально выполнено каждым учеником у себя в тетради. Такую работу можно предложить, например, в качестве домашнего задания. Учеников надо предупредить, что чертеж должен быть аккуратным, достаточно крупным и легко «читаемым».

Проведем анализ задачного материала в учебниках и выделим основные типы задач используемых в теме «Квадратные корни».

В статье [14, С.4-7] выделены упражнения по теме «Квадратные корни» из учебника Г.В. Дорофеева, охватывающие все существенные аспекты этого вводного фрагмента темы.

Основное назначение упражнений № 217-227 - это овладение новым понятием, выработка умения использовать знак радикала. Обращается внимание на задания № 222, 223 и 227. Умение перейти от равенства вида $\sqrt{a}$=b к равенству $b^2 = a$ и наоборот требуется очень часто.

Упражнения № 228-233 - на вычисление значений числовых и буквенных выражений, содержащих квадратные корни. Учащиеся должны усвоить, что знак корня, как и скобки, является группирующим символом. В упражнениях № 234-237 и № 241-245 дальнейшее развитие получает начатая ранее (и чрезвычайно важная с точки зрения приложений) работа с формулами. Теперь это формулы, содержащие радикалы или требующие использования радикалов при выражении какой-либо переменной через другие. Такие задания часто вызывают у учащихся затруднения, поэтому частично их можно выполнить при изучении следующих пунктов. Кроме того, к ним полезно возвращаться.

Задания № 238 и 239 из группы Б на этом этапе относятся к числу сложных; они, безусловно, не для всех школьников.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно выполнить задания группы А, а также, при возможности, № 241 и 244.

Рассмотрим пример из учебника: Найти приближенное значение $\sqrt{60}$.

Решение: Квадрат числа заключен между двумя «точными» квадратами - числами 49 и 64:

$49<(\sqrt{60})^2$, то есть $7^2<(\sqrt{60})^2<8^2$.

Значит как $7^2<(\sqrt{60})^2$, то $7<\sqrt{60}$;

так как $(\sqrt{60})^2<8^2$, то $\sqrt{60}<8$.

Значит $7<\sqrt{60}<8$. Очевидно, что $\sqrt{60}$ ближе к 8, чем к 7, то есть $\sqrt{60} \approx 8$.

Рассмотренный способ нахождения приближенного значения корня, в силу своей громоздкости, имеет, в основном, теоретическое значение; учащимся достаточно лишь уметь указывать два целых числа, между которыми заключено значение данного корня. А при решении задач предполагается широкое использование калькулятора.

Упражнения к пункту предназначены, прежде всего, для осознанного восприятия этого сложного для учащихся материала (№ 246-251). Кроме того, использование калькулятора позволяет, с помощью наблюдений, прийти к некоторым теоретическим обобщениям, например к выводу о возрастании значения корня с увеличением подкоренного выражения (№ 252-254).

В образце к упражнению № 262 показаны приемы сравнения, которыми должны овладеть учащиеся. Упражнения № 265 и 266 направлены на формирование умения выполнять преобразование выражений, содержащих квадратные корни, с использованием равенства $(\sqrt{a})^2=a$, где $a\geq 0$.

В классах с невысоким уровнем подготовки достаточно упражнений группы А. Вообще, в этом блоке дана представительная группа заданий, которой вполне можно ограничиться.

Упражнение №257.

Способ I. С помощью калькулятора находим приближенные значения корней:

$$\sqrt{5} \approx 2{,}24; \sqrt{6} \approx 2{,}45; \sqrt{7} \approx 2{,}65.$$

Значит, каждое из данных чисел принадлежит отрезку с концами в точках 2 и 3, и располагаются они на этом

отрезке в таком порядке: $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$.

Далее:

число $\sqrt{5}$ принадлежит отрезку с концами в точках 2,2 и 2,3;

число $\sqrt{6}$ принадлежит отрезку с концами в точках 2,4 и 2,5;

число $\sqrt{7}$ принадлежит отрезку с концами в точках 2,6 и 2,7.

Способ II. К тому же результату приходим с помощью оценки. Например, для $\sqrt{5}$ имеем:

$2^2<(\sqrt{5})^2<3^2$, то есть $2<\sqrt{5}<3$;

$2{,}2^2<(\sqrt{5})^2<2{,}3^2$, то есть $2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$.

Упражнение №259. Очевидно, что точке *K* соответствует число $\sqrt{0{,}4}$, так как $0< \sqrt{0{,}4}< 1$. Точно так же легко понять, что число $\sqrt{3}$ — лишнее, так как на отрезке с концами x=1 и x 2 точка не отмечена.

Сложнее с точкой *L:* ведь каждое из оставшихся чисел $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ располагается на отрезке с концами 2 и 3. Но точка *L* расположена в левой половине отрезка, значит число, которое ей соответствует, должно быть меньше 2,5.

Ответ почти очевиден: это $\sqrt{5}$. Но все же какое-то объяснение необходимо. Можно обратиться к калькулятору, а можно рассуждать так: $2{,}5^2= 6{,}25$; так как $(\sqrt{5})^2 < 2{,}5^2$, то $\sqrt{5} < 2{,}5$.

Упражнение №270. а) Сначала находим, что $8< \sqrt{73{,}25} < 9$, а затем сравниваем числа 8,5 и $\sqrt{73{,}25}$. Так как $8{,}5^2= 72{,}25<73{,}25$, то $8{,}5< \sqrt{73{,}25}$, и значит, число $\sqrt{73{,}25}$ ближе к 9.

При решении задач, естественно, предполагается использование калькулятора. В классах с невысоким уровнем подготовки из группы А можно ограничиться заданиями № 275-280 (они отвечают уровню обязательных требований), а также рассмотреть задачу-исследование № 291.

Упражнение №286. Задача решается с опорой на рисунок 2.27 учебника. Из наглядных соображений ясно, что отрезок наибольшей длины — это диагональ параллелепипеда. Сравним длину диагонали с длиной трости. Сначала найдем длину диагонали основания l:

$l=\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{80^2+30^2} = \sqrt{7300}$ (см).

Теперь найдем длину диагонали параллелепипеда *d:*

$d=\sqrt{(\sqrt{7300})^2+50^2} = \sqrt{9800}$ (см).

Так как $\sqrt{9800}<\sqrt{10000}=100$, то трость данных размеров поместить в коробку нельзя.

Упражнение №290. Геометрически выражение $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$можно истолковать как длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, измерения которого a, b и *c.* В самом деле, из прямоугольного треугольника *LMN* имеем, что

$LM=\sqrt{a^2+b^2}$.

А из прямоугольного треугольника *KLN* получим, что

$NM=\sqrt{c^2+(\sqrt{a^2+b^2})^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

По неравенству треугольника $\sqrt{a^2+b^2+c^2}<c+\sqrt{a^2+b^2}$; но из тех же соображений $\sqrt{a^2+b^2}<a+b$. Значит $\sqrt{a^2+b^2+c^2}<a+b+c$.

Упражнение №291. а) $AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $AD=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$;

$AE=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$; $AF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ и.т.д.

в) Например

$\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1^2}$; $\sqrt{13}=\sqrt{3^2+2^2}$; $\sqrt{17}=\sqrt{4^2+1^2}$.

Но можно и иначе. Так, отрезок длиной $\sqrt{10}$ получить по следующему алгоритму:

$\sqrt{10}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}$.

В учебнике по алгебре за 8 класс [1] авторы Муравины предлагают изучение раздела начинать со следующих упражнений:

Упражнение №215. Проходит ли график функции $y=x^2$ через точку:
A(-2;4) B(-3,5;12) C(23;529) D(-6,5;42,25).

Ответ: A-да, B-нет C-да D-да.

В пункте 17 приведены упражнения на вычисление квадратного корня

Пример 3. Вычислить $\sqrt{11025}$. Решение происходит через разложение числа 11025 на простые множители. $11025=3^2*5^2*7^2$. $\sqrt{11025}=\sqrt{3^2*5^2*7^2}=\sqrt{(3*5*7)^2}=3*5*7=105$

Ответ: 105.

В пункте 18 вводятся свойства арифметических квадратных корней и задачи на их применение, упрощение подкоренных выражений и их вычисление.

Пример 4. (стр.100) Упростить $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$. $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2$.

Ответ: $\sqrt{5}-2$.

Пример 5. Вычислить $\sqrt{0,64*16*625}$. $\sqrt{0,64*16*625}=$
$\sqrt{0,64}*\sqrt{16}*\sqrt{625}=0,8*4*25=80$. Ответ 80.

Пример 6. Вычислить $\sqrt{\frac{16}{49}}$. $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}}=\frac{4}{7}$.

Ответ: $\frac{4}{7}$.

В 19 пункте рассмотрены упражнения на внесение и вынесение множителя из-под знака корня, так же затронуты задачи на сравнение значений выражений.

Пример 7. Вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{120*90}$. Разложим числа 120 и 90 на простые множители:

$120=2^3*3*5$, $90=2*3^2*5$. Отсюда $120*90=2^4*3^3*5^2$.

$\sqrt{120*90}=\sqrt{2^4*3^3*5^2*3}=2^2*3*5*\sqrt{3}=60\sqrt{3}$.

Ответ: $60\sqrt{3}$.

Пример 8. (стр. 105) Упростить выражение $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{12}}$. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{25*3}}{\sqrt{4*3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{2}=2{,}5$. .

Ответ: 2,5.

Пример 9. (стр. 105) Внести множитель под знак корня: $5\sqrt{0{,}4}$.

$5\sqrt{0{,}4}=\sqrt{5^2*0{,}4}=\sqrt{25*0{,}4}=\sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Пример 10. (стр. 106) Сравнить значения выражений $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$.

$3\sqrt{2}=\sqrt{9*2}=\sqrt{18}$ и $2\sqrt{3}=\sqrt{4*3}=\sqrt{12}$. $3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$.

20 пункт посвящен действиям с квадратными корнями, преобразованию дробей с квадратными корнями, упрощению выражений, освобождению от иррациональности.

Пример 11. (стр. 108) Преобразовать дробь $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{54}}$ так, чтобы ее знаменатель не содержал радикала. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{54}}=\sqrt{\frac{2}{54}}=\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{1}{3^3}}=\sqrt{\frac{3}{3^4}}=\frac{\sqrt{3}}{3^2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Пример 12. (стр. 109) Упростить выражение $\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\sqrt{150}=5\sqrt{6}$ $\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$ $\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{6}\sqrt{6}$

$\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}-\frac{1}{3}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}=(5-4-\frac{1}{3}-\frac{1}{6})\sqrt{6}=\frac{1}{2}\sqrt{6}$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Пример 13. (стр. 109) Освободить дробь $\frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}$ от иррациональности в знаменателе. $\frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}=\frac{6(\sqrt{13}+\sqrt{10})}{(\sqrt{13}-\sqrt{10})(\sqrt{13}+\sqrt{10})}=\frac{6(\sqrt{13}+\sqrt{10})}{\sqrt{13}^2-\sqrt{10}^2}=\frac{6(\sqrt{13}+\sqrt{10})}{13-10}=$

$=2(\sqrt{13}+\sqrt{10})$.

Ответ: $2(\sqrt{13}+\sqrt{10})$.

§3. Формы, методы и средства обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы

В данном параграфе проведем анализ практического опыта изучения темы на основе опубликованных статей и учебно-методических пособий.

В статье С. Минаевой [14, С. 4-7] отмечается, что понятие квадратного корня «возникает» в изучаемом курсе при обсуждении двух задач - геометрической (о нахождении длины стороны квадрата по его площади) и алгебраической (о количестве корней уравнения вида $x^2 = a$, где a - произвольное число). В связи с рассмотрением первой задачи учащиеся получают начальные представления об иррациональных числах.

В содержание главы автор включил нетрадиционный для алгебры вопрос - теорему Пифагора. Это сделано с целью демонстрации естественного применения квадратных корней для отыскания длин отрезков, построения отрезков с иррациональными длинами и точек с иррациональными координатами. При этом не имеет принципиального значения, где учащиеся впервые услышат о теореме Пифагора - в курсе геометрии или в курсе алгебры.

Так же автор утверждает, что важнейшим результатом обучения, помимо идейных аспектов, является умение выполнять некоторые преобразования выражений, содержащих квадратные корни (прежде всего числовых).

Учащиеся знакомятся также с понятием кубического корня; одновременно с этим у них формируются начальные представления о корне n-й степени.

Наконец, через систему упражнений учащиеся получают представление о графиках зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

На протяжении всей темы автор предполагает активное использование калькулятора, причем не только в качестве инструмента для извлечения корней, но и как средство, позволяющее проиллюстрировать некоторые теоретические идеи. В связи с необходимостью применения калькулятора для извлечения кубических корней вводится другое обозначение корня из положительного числа: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

В статье В. Ольхова [12, С. 4] обращается внимание на то, что при изучении раздела «Квадратные корни» нужно особое внимание уделить преобразованию сложного радикала. Автор предлагает следующую методику, приведя пример индивидуальной формы работы с учеником при изучении темы:

Ученику математического класса было предложено по теореме Виета найти подбором корни в уравнении $x^2 - 7x + 10 = 0$, что он сделал без особого труда: $X_1 = 5$, $X_2 = 2$ (даже немного обиделся простоте вопроса).

Потом было предложено упростить выражение $\sqrt{7 \pm 2\sqrt{10}}$. Здесь следует усмотреть под радикалом полный квадрат.

Предварительно записав громоздкую формулу

$\sqrt{\mathrm{A} \pm \sqrt{\mathrm{B}}}$=$\frac{\sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}}{2} \pm \frac{\sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}}{2}$, (1)

он подставил в нее конкретные числовые значения и получил

$\frac{\sqrt{7+\sqrt{49-40}}}{2} \pm \frac{\sqrt{7-\sqrt{49-40}}}{2}$=$\sqrt{5} \pm \sqrt{2}$.

А ведь существует прямая аналогия с предыдущим примером 7=5 + 2, 10=5*2, т. е.

$\sqrt{7 \pm 2\sqrt{10}}$=$\sqrt{5 + 2 \pm 2\sqrt{5} * \sqrt{2}}$=$\sqrt{(\sqrt{5} \pm \sqrt{2})^2}$=$\sqrt{5} \pm \sqrt{2}$

После этого ученик уже самостоятельно решил несколько примеров:

$\sqrt{6 \pm 4\sqrt{2}}=\sqrt{6 \pm 2\sqrt{8}} = \sqrt{4 + 2 \pm 2\sqrt{4} * \sqrt{2}}=2\pm\sqrt{2}$,

$\sqrt{13 \pm \sqrt{48}}=\sqrt{13 \pm 2\sqrt{12}} = \sqrt{12 + 1 \pm 2\sqrt{12} * 1}=\sqrt{12} \pm 1$,

$\sqrt{18 \pm \sqrt{128}}=\sqrt{18 \pm 2\sqrt{32}} = \sqrt{16 + 2 \pm 2\sqrt{16} * \sqrt{2}}=4\pm\sqrt{2}$,

$\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}}=\sqrt{7 \pm 2\sqrt{12}} = \sqrt{4 + 3 \pm 2\sqrt{4} * \sqrt{3}}=2\pm\sqrt{3}$

и сказал, что теперь ему понятно, как возникла формула (1), хотя специально ее запоминать необязательно. $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}= \sqrt{A \pm 2\sqrt{\frac{B}{4}}}$.

Составим уравнение:

$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0, x_1 = \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}, x_2 = \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$;

$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}= \sqrt{A \pm 2\sqrt{\frac{B}{4}}}=\sqrt{x_1 + x_2 \pm 2 * \sqrt{x_1 x_2}}=\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$,

где A>0, B>0, A^2-B>0, причем формула упрощение, когда A^2-B – точный квадрат.

Упражнение 1. Показать, что $\sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}} = 3$;

$\sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 12 + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}} = 1 + \sqrt{3}$

Автор статьи [10, С. 52-56], В.И. Седакова предлагает простые методы, позволяющие быстро в уме выполнять такие действия, как извлечение квадратных корней. Эти методы могут повысить продуктивность на уроках, ведь устные и полу устные упражнения дают возможность изучить на уроке большой по объему материал, позволят учителю судить о готовности класса к изучению нового материала. Этот материал полезен будущим учителям-математикам.

Одной из основных задач преподавания курса математики в школе является формирование у учащихся сознательных и прочных вычислительных навыков. Вычислительные навыки – важная составляющая математических навыков. Особенно тема устного счета актуальна при проведении государственной итоговой аттестации (ОГЭ) и единого государственного экзамена (ЕГЭ), где использование вычислительных приборов не допускается.

В сочетании с другими формами работы устные упражнения позволяют создать условия, при которых активизируются различные виды деятельности учащихся: мышление, речь, моторика. Вот почему необходимо на каждом уроке математики отводить до 10 минут для упражнений с устными вычислениями. Формирование вычислительных навыков – сложный и систематический процесс. Он состоит из следующих этапов:

Первый этап формирования навыка – овладение умением.

Второй этап – этап автоматизации умения. Автоматизация умения заключается в том, чтобы получать результаты при выполнении упражнений устно, практически не производя записей, пометок и т.д.

Представим прием устного счета в теме «Квадратные корни» для учащихся. Извлечение квадратного корня из многозначного натурального числа. Вначале запишем *алгоритм извлечения квадратного корня* в общем виде, который можно использовать при работе с натуральными числами.

1. Разобьем число на группы (справа налево, начиная с последней цифры), включая в каждую группу по две рядом стоящие цифры. При этом может оказаться в последней группе одна цифра (если в числе нечетное количество цифр) и две цифры – если число цифр четное. Количество групп в таком числе показывает количество цифр результата.

2. Подбираем наибольшую цифру, такую, чтобы ее квадрат не превосходил числа, находящегося в последней группе (считая справа налево); это цифра – первая цифра результата.

3. Возведем первую цифру результата в квадрат, вычтем полученное число из последней группы, припишем к найденной разности справа предпоследнюю группу. Получится некоторое число А. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число а. Теперь подберем такую цифру х, чтобы произведение числа а на х не превосходило числа А. Цифра х – вторая цифра результата.

4. Произведение числа а на х вычтем из числа А, припишем к найденной разности справа третью группу, получится некоторое число В. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число b. Теперь подберем такую наибольшую цифру у, чтобы произведение числа by на у не превосходило числа В. Цифра у – третья цифра результата.

5. Следующий шаг правила повторяет 4-й шаг. Это продолжается до тех пор, пока не используется самая первая группа числа.

Пример 14. Продемонстрируем данный алгоритм на более простом примере, результат которого очевиден. Вычислим $\sqrt{144}$. Из таблицы квадратов натуральных чисел в пределах двух десятков известно, что $\sqrt{144} = 12$. В числе 144 справа налево отделяем две цифры, 1/44. Получили две группы цифр, поэтому в результате получится двузначное число. Подбираем число, квадрат которого не превышает числа, стоящего во второй группе (считаем справа налево), это число 1. В нашем случае таким числом будет число 1, т.к. его квадрат равен единице. Значит, в ответе в разряде десятков будет число 1. Из числа 144 вычтем полученное число десятков, в остатке получим число 44.

$$\begin{array}{r} (1\cdot 2)2 \\ 2 \\ \hline 44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ 1 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 0 \end{array}$$

Определим цифру единиц в ответе. Для этого слева умножим полученную цифру десятков на 2, получим 2. Подберем такое число, при умножении которого самого на себя и на полученное число 2 получится 44. Таким числом является 2, следовательно, при извлечении квадратного корня из 144 получим число 12.

Подбираем цифры ответа 1_2. Ответ: $\sqrt{144}$=12.

Пример 15. Рассмотрим процесс извлечения квадратных корней из пятизначного числа 75654.

Подбираем цифры ответа 2_3_4 Ответ: $\sqrt{54756}$=234.

$$\begin{array}{r} (2\cdot2)3 \\ \underline{3} \\ 129 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (23\cdot2)4 \\ \underline{4} \\ 1856 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 54756 \\ \underline{4} \\ 147 \\ \underline{129} \\ 1856 \\ \underline{1856} \\ 0 \end{array}$$

Выводы по первой главе

В 1 главе были рассмотрены основные цели и задачи обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы на основе ФГОС ООО и программ по математике. Анализ теоретического и задачного материала в учебниках алгебры за 8 класс по теме показал, что авторы учебников используют разные подходы к введению как самого понятия квадратного корня, так и к системе упражнений, ориентированных на формирование умений вычислять квадратные корни и упрощать числовые выражения. Анализ практического опыта изучения темы «Квадратные корни» на основе статей и учебно-методических пособий позволяет сделать вывод о том, что тема достаточно трудная для учащихся. Однако с помощью соответствующих упражнений и специальной методики можно добиться прочного усвоения понятия квадратного корня и его основных свойств.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «КВАДРАТНЫЕ КОРНИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 4. Задачи по теме «Квадратные корни», ориентированные на базовый уровень знаний и умений в курсе алгебры основной школы

Все задачи по теме «Квадратные корни», представленные в учебниках алгебры 8 класса можно условно объединить в 4 группы:

Группа 1. Задачи на нахождение значения выражений, содержащих квадратные корни.

Группа 2. Задачи на решение квадратных уравнений с использованием арифметического квадратного корня.

Группа 3. Задачи на упрощение и сравнение выражений, содержащих квадратные корни.

Группа 4. Задачи на извлечение квадратного корня.

Рассмотрим примеры задач:

Группа 1. *Задачи на нахождение значения выражений, содержащих квадратные корни.*

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{12{,}25} - 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}25}$

б) $\sqrt{-9^2}$

в) $\sqrt{-16{,}2}$.

Решение:

а) Из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$, т.к. $3{,}5 > 0$ и $3{,}5^2 = 12{,}25$; $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, т.к. $0{,}5 > 0$ и $0{,}5^2 = 0{,}25$.

$2 \cdot 3{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 7 - 0{,}05 = 6{,}95$

б) $\sqrt{-9^2} = 9$, т.к. $\sqrt{-9^2} = |-9| = 9$

в) Данное выражение не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа является неотрицательным числом.

Ответ: а) 6,95; б) 9; в) выражение не имеет смысла

Пример 2. Исключить иррациональность из знаменателя:

$$a)\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$б)\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$

$$в)\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

Решение:

$$a)\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1(\sqrt{3}+2)}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}$$

$$б)\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}=$$

$$=\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$$

$$в)\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}{5-7}=$$

$$=\frac{5-2\sqrt{35}+7}{-2}=\frac{12-2\sqrt{35}}{-2}=\frac{-2(\sqrt{35}-6)}{-2}=\sqrt{35}-6$$

(Используется новый способ избавления от иррациональности в знаменателе дроби - умножение на сопряженное).

Ответ:

а) $2+\sqrt{3}$

б) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$

в) $\sqrt{35}-6$

Группа 2. *Решение квадратных уравнений с использованием арифметического квадратного корня*

Пример 3. Найдите значение х в выражении $\sqrt{10x-14}=11$.

Решение:

$$\sqrt{10x-14}=11$$

$$\left(\sqrt{10x-14}\right)^2=11^2$$

$$10x-14=121$$

$$10x=121+14$$

$$10x=135$$

$$x=135:10$$

$$x=13{,}5$$

Проверка:

$$\sqrt{10\cdot 13{,}5-14}=\sqrt{135-14}=\sqrt{121}=11$$

Ответ: x = 13,5.

Пример 4. Найдите значение x в выражении $4\sqrt{x}=1$.

Решение:

$$4\sqrt{x}=1$$

$$\sqrt{x}=\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{1}{16}$$

Проверка:

$$4\cdot\sqrt{\frac{1}{16}}=4\cdot\frac{1}{4}=1.$$

Ответ: $x=\frac{1}{16}$.

Группа 3. В данной группе объединим задачи на упрощение выражений.

Пример 5. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Решение:

Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби, нужно числитель и знаменатель этой дроби умножить на сумму, если в знаменателе стоит разность или числитель и знаменатель этой дроби умножить на разность, если в знаменателе стоит сумма.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{3-2}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{6}+3-2+2\sqrt{6}-3}{1}=4\sqrt{6}$$

Ответ: $4\sqrt{6}$

Пример 6. Упростите выражение: $4\sqrt{2}+\sqrt{8}$

Решение:

$$4\sqrt{2}+\sqrt{8}=4\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}=4\sqrt{2}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

Ответ: $6\sqrt{2}$

Пример 7. Упростить выражение:

$$2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}$$

Решение:

$$2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}=2\sqrt{4\cdot 2}+0{,}5\sqrt{16\cdot 2}-\frac{1}{3}\sqrt{9\cdot 2}=$$

$$=2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+0{,}5\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=$$

$$=2\cdot 2\sqrt{2}+0{,}5\cdot 4\sqrt{2}-\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{2}=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

(Используется теорема об извлечении арифметического квадратного корня из произведения).

Ответ: $5\sqrt{2}$

Группа 4. В данной группе предложим задачи на извлечение квадратного корня.

Пример 8. Извлеките корень из выражения $\sqrt{\frac{25a^6}{49}}$

Решение:

Воспользуемся теоремой об извлечении арифметического квадратного корня из дроби.

$$\sqrt{\frac{25a^6}{49}} = \frac{\sqrt{25a^6}}{\sqrt{49}}$$

$$\sqrt{\frac{25a^6}{49}} = \frac{\sqrt{25a^6}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{25a^6}}{7}$$

Воспользуемся теоремой об извлечении арифметического квадратного корня из произведения.

$$\sqrt{\frac{25a^6}{49}} = \frac{\sqrt{25a^6}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{25a^6}}{7} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{a^6}}{7}$$

Далее используем следующую теорему : для любого числа а справедливо равенство $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\sqrt{\frac{25a^6}{49}} = \frac{\sqrt{25a^6}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{25a^6}}{7} = \frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{a^6}}{7} = \frac{5\cdot\sqrt{(a^3)^2}}{7} = \frac{5\cdot|a^3|}{7} = \frac{5}{7}|a^3|$$

Ответ:

Если а ≥0, то $\frac{5}{7}|a^3| = \frac{5}{7}a^3$

Если а < 0, то $\frac{5}{7}|a^3| = -\frac{5}{7}a^3$

Пример 9. Внести множитель под знак корня (буквами обозначены положительные числа):

1) $a\sqrt{a}$

2) $\frac{1}{x^2}\sqrt{3x^5}$

Решение:

1) $a\sqrt{a} = \sqrt{a^2}\sqrt{a} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^3}$

(Используется теорема об извлечении арифметического квадратного корня из произведения в обратную сторону).

2) $\frac{1}{x^2}\sqrt{3x^5} = \sqrt{\frac{1}{x^4}}\sqrt{3x^5} = \sqrt{\frac{1}{x^4}3x^5} = \sqrt{\frac{3x^5}{x^4}} = \sqrt{3x}$

(Используется теорема об извлечении арифметического квадратного корня из произведения в обратную сторону).

Ответ:

1) $\sqrt{a^3}$

2) $\sqrt{3x}$

Пример 10. Извлечь корень:

1) $\sqrt{\frac{121x^4}{64}}$

2) $\sqrt{\frac{400}{a^2}}$, где a < 0

Решение:

1) $\sqrt{\frac{121x^4}{64}} = \frac{\sqrt{121x^4}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{121}\sqrt{x^4}}{8} = \frac{11\sqrt{(x^2)^2}}{8} = \frac{11|x^2|}{8} = \frac{11x^2}{8} = 1\frac{3}{8}x^2$

2) $\sqrt{\frac{400}{a^2}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{a^2}} = \frac{20}{|a|} = \frac{20}{-a} = -\frac{20}{a}$

(Используется теорема об извлечении арифметического квадратного корня из дроби, теорема об извлечении арифметического квадратного корня из произведения и теорема: $\sqrt{a^2} = |a|$).

Ответ:

1) $1\frac{3}{8}x^2 - \frac{20}{a}$

В статье [14, С. 16-18] предложены многовариантные дидактические материалы (Задания в карточках), нацеленные на упрощение числовых выражений с корнями. Они несомненно окажут помощь учителю математики при организации самостоятельной или проверочной работы. Приведем задания вариантов.

Вариант 1

1. Упростите: $\sqrt{3\frac{1}{3}} * \sqrt{4} * \sqrt{4\frac{2}{3}} * \sqrt{5\frac{1}{3}} * \sqrt{6} * \sqrt{6\frac{2}{3}}$.
2. Упростите: $\sqrt{1\frac{7}{11}} - \sqrt{1\frac{3}{22}} + \sqrt{2\frac{5}{22}} - \sqrt{3\frac{15}{22}}$.
3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$49\sqrt{\frac{4}{7}}+\frac{73\sqrt{7}}{4\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

4. Упростите выражение $\sqrt{28-6\sqrt{19}}+\sqrt{28+6\sqrt{19}}$.
5. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{27}-\sqrt{2}}*\sqrt{\sqrt{27}+\sqrt{2}}$.
6. Упростите выражение $6+4\sqrt{4{,}5}+\frac{6\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}$.
7. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{\sqrt{97-56\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}{\sqrt{97+56\sqrt{3}}}$$

8. Вычислите:

$$\sqrt{32}*\sqrt{32+\sqrt{992}} * \sqrt{32+\sqrt{992+\sqrt{922}}} * \sqrt{32-\sqrt{992+\sqrt{922}}}.$$

9. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)(\sqrt{75}-\sqrt{27}).$$

10. Упростите выражение

$$-\frac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} - \frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$$

и докажите, что полученное число является корнем уравнения $x^2 - 20 = 0$.

Вариант 2

1. Упростите: $\sqrt{7\frac{1}{2}} * \sqrt{5} * \sqrt{15} * \sqrt{12\frac{1}{2}} * \sqrt{10} * \sqrt{17\frac{1}{2}}$.

2. Упростите: $\sqrt{3\frac{15}{22}}-\sqrt{2\frac{10}{11}}+\sqrt{1\frac{7}{11}}-\sqrt{1\frac{3}{22}}$.

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$30\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{89\sqrt{7}}{4\sqrt{6}+\sqrt{7}}.$$

4. Упростите выражение $\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{11+4\sqrt{7}}$.

5. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{72}-\sqrt{8}}*\sqrt{\sqrt{72}+\sqrt{8}}$.

6. Упростите выражение 2+2$\sqrt{4{,}5}$-$\frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{7}-\sqrt{14}}$.

7. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{49-20\sqrt{6}}}-\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{49+20\sqrt{6}}}$$

8. Вычислите:

$$\sqrt{31}*\sqrt{31+\sqrt{930}}*\sqrt{31+\sqrt{930+\sqrt{930}}}*\sqrt{31-\sqrt{930+\sqrt{930}}}.$$

9. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{1-\sqrt{5}}-\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{5}-\sqrt{125}).$$

10. Упростите выражение

$$-\frac{1}{\sqrt{47+10\sqrt{22}}}-\frac{1}{\sqrt{47-10\sqrt{22}}}$$

и докажите, что полученное число является корнем уравнения $x^2-\frac{100}{9}=0$.

Вариант 3

1. Упростите: $\sqrt{3\frac{1}{2}}*\sqrt{7}*\sqrt{10\frac{1}{2}}*\sqrt{17\frac{1}{2}}*\sqrt{14}*\sqrt{21}$.

2. Упростите: $\sqrt{2\frac{5}{22}}-\sqrt{1\frac{7}{11}}+\sqrt{3\frac{15}{22}}-\sqrt{2\frac{10}{11}}$.

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$12\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{17\sqrt{7}}{2\sqrt{6}+\sqrt{7}}.$$

4. Упростите выражение $\sqrt{15-4\sqrt{11}}+\sqrt{15+4\sqrt{11}}$.

5. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{52}-\sqrt{3}}*\sqrt{\sqrt{52}+\sqrt{3}}$.

6. Упростите выражение 3+10$\sqrt{4{,}5}$+$\frac{3\sqrt{14}}{2\sqrt{7}-\sqrt{14}}$.

7. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{20-6\sqrt{11}}}{\sqrt{49-20\sqrt{6}}}-\frac{\sqrt{20+6\sqrt{11}}}{\sqrt{49+20\sqrt{6}}}$$

8. Вычислите:

$$\sqrt{13}*\sqrt{13+\sqrt{156}}*\sqrt{13+\sqrt{156+\sqrt{156}}}*\sqrt{13-\sqrt{156+\sqrt{156}}}.$$

9. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{5}}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{45}-\sqrt{80}).$$

10. Упростите выражение

$$-\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$$

и докажите, что полученное число является корнем уравнения $x^2-4=0$.

Вариант 4

1. Упростите: $\sqrt{4\frac{1}{2}}*\sqrt{3}*\sqrt{6}*\sqrt{7\frac{1}{2}}*\sqrt{9}*\sqrt{10\frac{1}{2}}.$
2. Упростите: $\sqrt{3\frac{10}{13}}-\sqrt{2\frac{10}{13}}+\sqrt{4\frac{12}{13}}-\sqrt{1\frac{3}{13}}.$
3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$30\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{27\sqrt{5}}{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}.$$

4. Упростите выражение $\sqrt{25-4\sqrt{21}}+\sqrt{25+4\sqrt{21}}.$
5. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{28}-\sqrt{3}}*\sqrt{\sqrt{28}+\sqrt{3}}.$
6. Упростите выражение $6+6\sqrt{12{,}5}-\frac{-6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}.$
7. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{161-72\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{161+72\sqrt{5}}}$$

8. Вычислите:

$$\sqrt{29}*\sqrt{29+\sqrt{812}}*\sqrt{29+\sqrt{812+\sqrt{812}}}*\sqrt{29-\sqrt{812+\sqrt{812}}}.$$

9. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}-\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)(\sqrt{18}+\sqrt{32}).$$

10. Упростите выражение

$$\frac{1}{\sqrt{30+8\sqrt{14}}}-\frac{1}{\sqrt{30-8\sqrt{14}}}$$

и докажите, что полученное число является корнем уравнения $x^2 - 14 = 0$.

Ответы:

В-1. 1. $\frac{160\sqrt{42}}{9}$. **2.** $-\frac{11}{\sqrt{22}}$. **3.** $14\sqrt{7}$+$4\sqrt{35}-7$. **4.** $2\sqrt{19}$. **5.** 5. **6.** $12\sqrt{2}$ **7.** $8\sqrt{15}-28$. **8.** 32. **9.** -12. **10.** -$2\sqrt{5}$.	**В-3. 1.** $\frac{1029\sqrt{5}}{2}$. **2.** $\frac{2}{\sqrt{22}}$. **3.** $4\sqrt{6}$-$2\sqrt{42}-7$. **4.** $2\sqrt{11}$. **5.** 7. **6.** $12\sqrt{2}$ **7.** $4\sqrt{66}-30$. **8.** 13. **9.** 10. **10.** 2.
В-2. 1. $\frac{375\sqrt{35}}{2}$. **2.** $\frac{2}{\sqrt{22}}$. **3.** $6\sqrt{5}$-$4\sqrt{42}+7$. **4.** $2\sqrt{7}$. **5.** 8. **6.** $\sqrt{2}$ **7.** $4\sqrt{30}-10$. **8.** 31. **9.** 10. **10.** -$\frac{10}{3}$.	**В-4. 1.** $\frac{81\sqrt{35}}{2}$. **2.** $\frac{5}{\sqrt{13}}$. **3.** $10\sqrt{3}$+$4\sqrt{10}+5$. **4.** $2\sqrt{21}$. **5.** 5. **6.** $21\sqrt{2}$ **7.** $8\sqrt{15}-18$. **8.** 29. **9.** 4. **10.** -$\sqrt{14}$.

В статье Е.А. Удовиченко [36] представлен открытый урок, нацеленный на решение прикладных задач с использованием квадратных корней.

Целью урока является показ использования квадратных корней при решении задач физического, экономического, географического содержания, знакомство с графическим представлением зависимости $\sqrt{x}$.

Ход урока состоит из устной, самостоятельной работы, решения задач и домашнего задания.

1. Устная работа. На решение каждого из следующих заданий ученикам предлагается затратить не более 10 секунд.

1). $\frac{\sqrt{7}*\sqrt{7}*\ldots*\sqrt{7}}{7^5}=1$

Сколько множителей в числителе? Ответ : 10.

2). Что больше: А или В, если:

А=$\sqrt{5}*\sqrt{137}*\sqrt{6}$

В=$\sqrt{10}*\sqrt{138}*\sqrt{3}$

Ответ: В больше А.

3). Чему равно а , если $10\sqrt{a}$=а$\sqrt{10}$

Ответ: 10, 0.

4). Вычислите: $\sqrt{33^2 44^2}$. Ответ: 55.

1.2. Площадь одного квадрата равна 24 дм^2, а другого 6 дм^2. Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго?
Ответ: в 2 раза.

1.4. Период Т качания математического маятника равен $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения. Сравните периоды качания маятников, длины которых относятся как 4:1.
Ответ: 2:1.

2. Самостоятельная работа. Ученикам предлагается у себя в тетрадях упростить выражение, написанное на доске.

$$\frac{\sqrt{n^2o}}{4\sqrt{o}}(k-l-a)\sqrt{(p+u)^2}\left(\frac{\sqrt{k}+\sqrt{l+a}}{\sqrt{k}-\sqrt{l+a}}-\frac{\sqrt{k}-\sqrt{l+a}}{\sqrt{k}+\sqrt{l+a}}+g\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}((\sqrt{h}+\sqrt{z+e})^2+\left(\sqrt{h}-\sqrt{z+e}\right)^2\right)$$

Ответ: |n|*|p+u|*$\sqrt{k}$*$\sqrt{l+a}$+g+h+z+e.

3. Решение задач. Решение разнотиповых задач на квадратные корни.

Задание № 1.

Имеется кусок картона в форме прямоугольного треугольника. Длина одного из катетов равна 15 см. Какой длины должен быть второй катет, чтобы из прямоугольника можно было вырезать квадрат площади S? Решите задачу в общем виде, вычислите катет при S=1 дм^2 .

Ответ: $a=\frac{b*\sqrt{S}}{b-\sqrt{S}}$, a=30см.

Задание № 2.

Задача Эйлера (для молодых предпринимателей). Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 яиц, одна - больше, чем другая: обе выручили одинаковую сумму. Первая сказала тогда второй: “Будь у меня твои яйца, я выручила бы за них 15 крейцеров”. Вторая ответила: “А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них 6 и 2/3 крейцера”. Сколько яиц было у каждой?
Крейцер - мелкая разменная монета Австро-Венгрии и южной Германии,

обращавшаяся до конца 19 в.

(Решение задачи приводит к пропорции, а её решение - к вычислению квадратного корня).

Пусть вторая имела в k раз больше яиц, чем первая, т.е.

1-ая – x яиц по ka кр.,

2-ая – kx яиц по a кр..

Так как они выручили одинаковую сумму денег, то, вероятно, 2-ая продавала их в k раз дешевле, чем первая.

Если бы перед началом торговли они поменялись яйцами, то 2-ая продала x яиц по a кр., и выручила бы xa кр.,

а 1-ая продала бы kx яиц по ka кр., т.е. выручила бы k^2xa кр., т.е. выручила бы денег в k^2 раз больше, чем 2-ая.

Из этого следует такое отношение их выручек:

k^2:1=15:6$\frac{2}{3}$, k^2=$\frac{9}{4}$, k=$\sqrt{\frac{9}{4}}$, k=$\frac{3}{2}$

Применяя это отношение к 100 яйцам, получим, что у 1-ой было (100:5)3 = 60 яиц, у 2-ой – 40яиц.

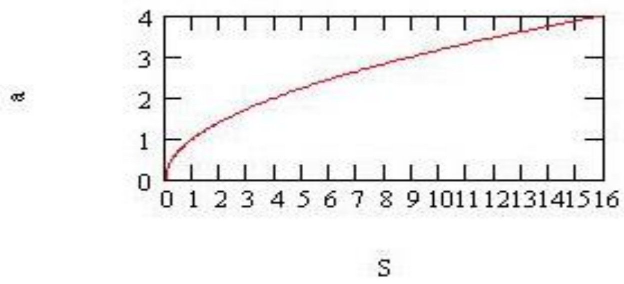
Ответ: 60 и 40 яиц.

4. Практическая работа. Ученикам дается логическая задача повышенной трудности.

Переходим к хозяйственным делам. Представьте себе, что Вы - директор хозяйства, занимающегося выращиванием лекарственных трав. Вы знаете, что должны засадить лекарственными культурами квадратные площади 25 м^2 , 16 м^2 , 9 м^2 , 4 м2 , 1 м^2. Ваша задача найти линейные размеры данных участков и построить зависимость стороны участка от его площади, считая, что значение площади изменяется непрерывно от 0 до 16 м^2 .

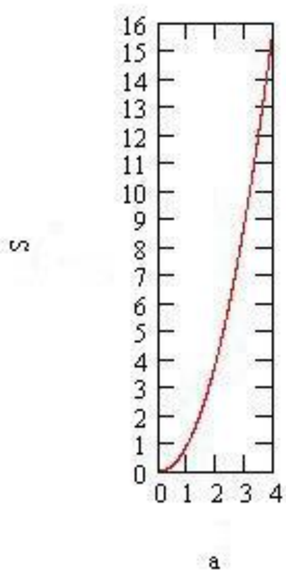
S	0	1	4	9	16
a	0	1	2	3	4

$a = \sqrt{S}$



Теперь перед вами стоит обратная задача. Сформулируйте её сами. (Надо узнать площадь квадратных участков, если мы знаем их линейные размеры: 1 м, 2 м, 3 м, 4 м. Переведем условия задачи на математическую модель и построим график зависимости S от a, считая, что a меняется непрерывно от 0 до 4 .)

a	0	1	2	3	4
S	0	1	4	9	16



$S=a^2$

5. Задание на дом.

Вам надо сравнить полученные графики, построив их в одной системе координат и заменив название конкретных величин на y и x соответственно. В помощь вам предлагаются следующие вопросы:

Что вы можете сказать о расположении графиков по отношению друг к другу?

Сравните области определения и области значений данных функций.

Каковы свойства функции $y = x^2$ при $x > 0$?

Каковы свойства функции $y = \sqrt{x}$?

Найдите значения этих функций при $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

При каких значениях x справедливо неравенство $\sqrt{x} > 1, \sqrt{x} < 1$.

Что вы можете сказать о значении каждой из функций при $x \to \infty$.

§ 5. Задачи по теме «Квадратные корни», ориентированные на подготовку к итоговой аттестации и сдаче ОГЭ по математике

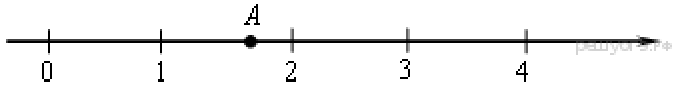
В этом параграфе мы проведем анализ задач, используемых в основном государственном экзамене по математике в 9 классе, включающих квадратные корни.

Проведя анализ заданий, представленных в банке заданий на сайте ФИПИ можно выделить следующие типы заданий:

Задания на числовые неравенства, координатная прямая. Числа на прямой.

В этом типе задач, представлена числовая прямая, на ней отмечена точка и даны числа, нужно вычислить к какому числу принадлежит эта точка.

Пример 11 [35, № 205776]. Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой A?



В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $\sqrt{2}$

2) $\sqrt{3}$

3) $\sqrt{7}$

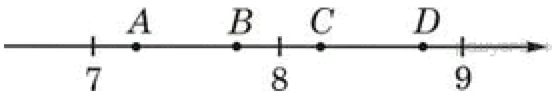
4) $\sqrt{11}$

Решение. Возведём в квадрат числа $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{11}$: $\sqrt{2}^2=2$ $\sqrt{3}^2=3$ $\sqrt{7}^2=7$ $\sqrt{11}^2=11$:

Число A^2 лежит между числами $1^2=1$ и $2^2=2$ и ближе к числу 2^2 . Поэтому точкой отмечено число $\sqrt{3}$.

Правильный ответ указан под номером 2.

Пример 12 [18, № 314146]. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$.



Какая это точка?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) точка *A*

2) точка *B*

3) точка *C*

4) точка *D*

Решение.

Возведём в квадрат числа $\sqrt{77}$, 7, 8, 9:

$\sqrt{77}^2=77$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$.

Число 77 лежит между числами 64 и 81 и находится ближе к числу 81, поэтому $\sqrt{77}$ соответствует точке *D*.

Правильный ответ указан под номером 4.

Задания с числами, вычислениями и алгебраическими выражениями. Задания на вычисления.

Пример 13 [38, № 137272]. Найдите значение выражения $\frac{2\sqrt{6}^2}{36}$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $\frac{2}{3}$

2) $\frac{1}{3}$

3) 2

4) 4

Решение.

Последовательно получаем:

$\frac{2\sqrt{6}^2}{36}$=$\frac{2^2*(\sqrt{6})^2}{36}$=$\frac{4*6}{6*6}=\frac{4}{6}=\frac{2*2}{3*2}=\frac{2}{3}$

Правильный ответ указан под номером 1.

Пример 14 [35, № 137285]. Найдите значение выражения $5\sqrt{11}$*$2\sqrt{2}$*$\sqrt{22}$.

Решение.

Упростим выражение, разложив подкоренные выражения на множители и вынесем за знак корня полные квадраты чисел:

$5\sqrt{11}$*$2\sqrt{2}$*$\sqrt{22}$=5$*$ $\sqrt{11}$*2$*$ $\sqrt{2}$*$\sqrt{2*11}$=5*2*$\sqrt{2}$*$\sqrt{2}$*$\sqrt{11}$*$\sqrt{11}$=

=5*2*2*11=220.

Ответ: 220

Пример 15 [35, № 317389]. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{8}}$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) 5

2) $25\sqrt{8}$

3) $5\sqrt{8}$

4) 40

Решение.

Найдём значение выражения:

$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{8}}$=$\sqrt{\frac{200}{8}}$=$\sqrt{25}$=5.

Правильный ответ указан под номером: 1.

Пример 16 [35, № 318630]. Чему равно значение выражения $(3\sqrt{2})^2$?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) 6

2) 12

3) 18

4) 36

Решение.

Используем свойства степени:

$(3\sqrt{2})^2=3^3*(\sqrt{2})^2=9*2=18.$

Правильный ответ указан под номером: 3.

Пример 17 [18, № 337782]. Найдите значение выражения $(\sqrt{23}+1)^2$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $22+2\sqrt{23}$

2) 22

3) $24+2\sqrt{23}$

4) $24+\sqrt{23}$

Решение.

Применим формулу квадрата суммы:

$(\sqrt{23}+1)^2=\sqrt{23}^2+2*\sqrt{23}*1+1^2=24+2\sqrt{23}$

Правильный ответ указан под номером: 3.

Задания связанные с числами.

Пример 18 [38, № 28]. Значение какого из выражений является числом рациональным?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $(\sqrt{6}-3)\,(\sqrt{6}+3)$

2) $\frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{10}}$

3) $\sqrt{3}*\sqrt{5}$

4) $(\sqrt{6}-3)^2$

Решение.

Упростим каждое выражение.

1) $(\sqrt{6}-3)\ (\sqrt{6}+3)$=6-9=3

2) $\frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{10}}$=) $\frac{5*\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$=0,5*$\sqrt{10}$

3) $\sqrt{3}$*$\sqrt{5}$=$\sqrt{15}$

4) $(\sqrt{6}-3)^2$=15-6$\sqrt{6}$

Рациональным является значение первого выражения.

Пример 19 [38, № 137268]. Расположите в порядке возрастания числа: $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$; 5,5.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1. $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$; 5,5.
2. 5,5; $3\sqrt{3}$; $\sqrt{30}$.
3. $3\sqrt{3}$; 5,5; $\sqrt{30}$
4. $3\sqrt{3}$; $\sqrt{30}$; 5,5;

Решение.

Возведём каждое из чисел в квадрат: $(\sqrt{30})^2 = 30$; $(3\sqrt{3})^2$=9*3=27; $(5{,}5)^2$=30.25.

Сравним квадраты заданных чисел: $(3\sqrt{3})^2$<$(\sqrt{30})^2$<$(5{,}5)^2$

Следовательно, $3\sqrt{3}$<$\sqrt{30}$<5,5

Правильный ответ указан под номером 4.

Пример 20 [18, № 311750]. Укажите наибольшее из следующих чисел:

В ответе укажите номер правильного варианта.

1)$\sqrt{18}$

2) $2\sqrt{6}$

3) 5

4) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$

Решение.

Чтобы ответить на вопрос, возведём в квадрат числа $\sqrt{18}$, $2\sqrt{6}$, 5, $\sqrt{5}+\sqrt{6}$

$\sqrt{18}^2$=18,($2\sqrt{6})^2$=24, 5^2=25, $(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2$=5+6+2$\sqrt{30}$.

Поскольку $\sqrt{30}$<6, $2\sqrt{30}$<12 имеем: $11+2\sqrt{30}<23<25$. Таким образом, наибольшее число 5.

Правильный ответ указан под номером 3.

Пример 21 [38, № 314246]. Сравните числа $\sqrt{67}+\sqrt{61}$ и 16.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $\sqrt{67}+\sqrt{61} < 16$

2) $\sqrt{67}+\sqrt{61} > 16$

3) $\sqrt{67}+\sqrt{61} = 16$

Решение.

В силу цепочки неравенств

$\sqrt{67}+\sqrt{61} < 16 \leftrightarrow (\sqrt{67}+\sqrt{61})^2<16^2 \leftrightarrow 67+2\sqrt{67*61}+61<256 \leftrightarrow \sqrt{67*61}<64 \leftrightarrow 4087<4096$, первое число меньше второго.

Правильный ответ указан под номером 1.

Квадратные корни встречаются в задачах на расчеты по формуле:

Пример 22 [18, № 46]. Период колебания математического маятника T (в секундах) приближенно можно вычислить по формуле $T=2\sqrt{l}$, где l — длина нити (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника (в метрах), период колебаний которого составляет 3 секунды.

Решение.

Подставим в формулу значение :

T: $2\sqrt{l}=3 \leftrightarrow 4l=9 \leftrightarrow l= 2{,}25$ м.

Ответ: 2,25.

Так же квадратные корни можно встретить в более сложных задания экзамена:

Задания с алгебраическими выражениями, уравнениями, неравенствами и их системами

Пример 23 [35, № 338086]. Решите уравнение $x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8$

Решение.

Последовательно получаем:

X^2-2x+$\sqrt{3-x}$=$\sqrt{3-x}$+8↔x^2-2x-8=0↔(x-4)(x+2)=0↔$\begin{cases} x=-2 \\ x=4 \end{cases}$

Поскольку подкоренное выражение не может быть меньше нуля, область допустимых значений исходного уравнения ограничивается неравенством 3-x≥0↔x≤3 значит, решением уравнения является только x=-2.

Ответ: −2.

Пример 24 [38, № 311237]. Решите неравенство ($\sqrt{3}$-1,5)(3-2x)>0.

Решение.

1) Определим знак разности $\sqrt{3}$-1,5. Так как 1,5=$\sqrt{2,25}$ и $\sqrt{3}$>$\sqrt{2,25}$, то $\sqrt{3}$-1,5>0 .

2) Получаем неравенство 3-2x>0. Отсюда x<1,5.

Ответ: (-∞;1,5) .

Пример 25 [18, № 340850]. Решите неравенство $(x-3)^2$<$\sqrt{5}$(x-3).

Решение.

Преобразуем исходное неравенство: (x-3)(x-3-$\sqrt{5}$)<0, откуда 3<x<3+$\sqrt{5}$.

Ответ: (3; 3+$\sqrt{5}$).

Пример 26 [35, № 311255]. Упростите выражение $\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2}*\sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2}*\sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{10-4}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 27 [38, № 311599]. Какое из чисел больше: $\sqrt{6}$+$\sqrt{10}$ или 3+$\sqrt{7}$?

Решение.

Найдем квадраты чисел:

$(\sqrt{6}+\sqrt{10})^2=16+2\sqrt{60}=16+\sqrt{240}$

$(3+\sqrt{7})^2=16+6\sqrt{7}=16+\sqrt{252}$.

Так как , $\sqrt{252}$>$\sqrt{240}$ то $(3+\sqrt{7})^2$ > $(\sqrt{6}+\sqrt{10})^2$.

Учитывая, что $\sqrt{6}$+$\sqrt{10}$ и 3+$\sqrt{7}$ — положительные числа, получаем, что

$3+\sqrt{7} > \sqrt{6}+\sqrt{10}$.

Ответ: $3+\sqrt{7}$.

Задачи на построение кусочно-непрерывной функции.

Пример 28 [38, № 311559]. Постройте график функции $y=\frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$ и найдите все значение k, при которых прямая y=kx имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

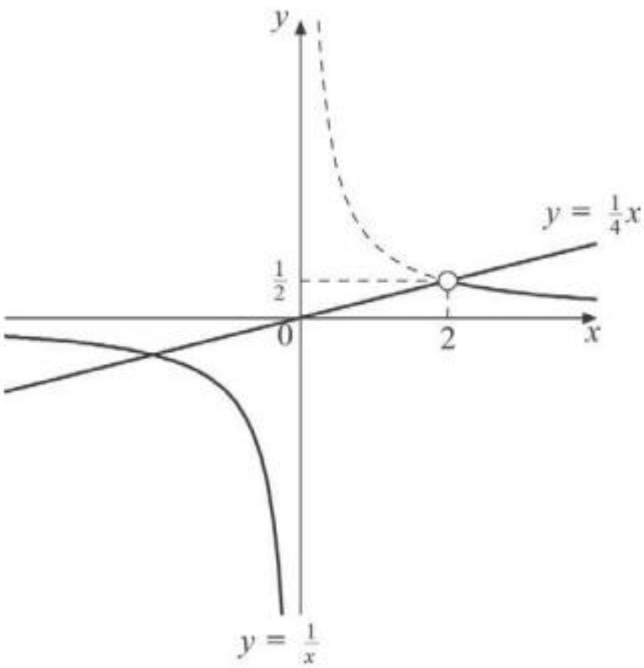
Решение.

Найдем область определения функции:

$X^2-2x>0$, $x\in(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$.

Поскольку $\frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2}=\frac{x-2}{x^2-2x}=\frac{1}{x}$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y=\frac{1}{x}$.

График изображён на рисунке.



Прямая y=kx имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k\in[\frac{1}{4};\ +\infty)$.

Ответ: $k\in[\frac{1}{4};\ +\infty)$.

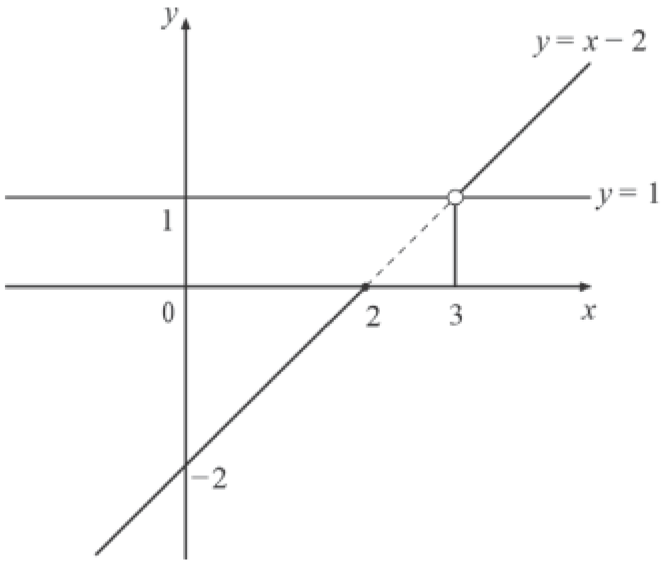
Пример 29 [35, № 311565]. Постройте график функции y=$\frac{(\sqrt{x^2-5x+6})^2}{x-3}$ и найдите все значения a, при которых прямая y=a не имеет с графиком данной функции общих точек.

Решение.

Найдём область определения функции:

x^2-5x+6≥0; x∈(-∞;2]∪[3;+∞) и x-3≠0.

Значит, функция определена при x∈(-∞;2]∪[3;+∞) . Поскольку $\frac{(\sqrt{x^2-5x+6})^2}{x-3} = \frac{x^2-5x+6}{x-3} = x-2$, получаем, что на области определения функция принимает вид y=x-2. График изображён на рисунке.

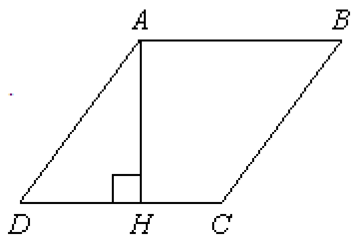


Прямая y=a не имеет с графиком данной функции общих точек при a∈(0;1].

Ответ: a∈(0;1].

Квадратный корень в геометрических задачах на вычисление. Встречается в задачах с использованием теоремы Пифагора.

Пример 30 [18, № 341285]. Высота *AH* ромба *ABCD* делит сторону *CD* на отрезки *DH*=12 и *CH*=3. Найдите высоту ромба.



Решение.

Поскольку *ABCD* — ромб, $AD = DC = DH + HC = 15$.

Треугольник *ADH* прямоугольный, поэтому: AH=$\sqrt{AD^2 - DH^2}$=9

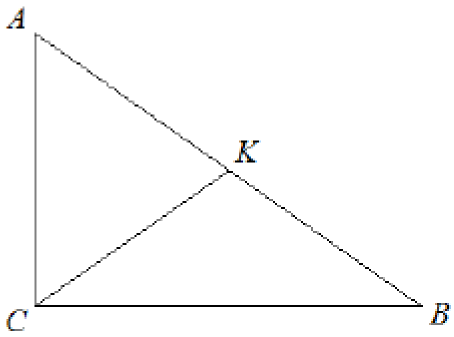
Ответ: 9.

Пример 31 [35, № 50]. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: AC=6, BC=8. Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.

Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине:

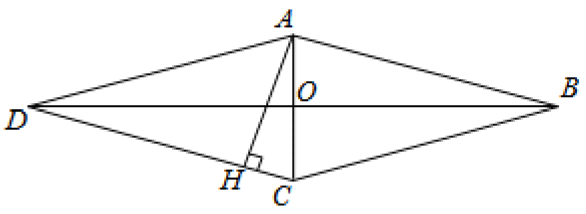
CK=$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2}$=$\frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5$



Ответ: 5.

Пример 32 [18, № 339388]. Высота *AH* ромба *ABCD* делит сторону *CD* на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Решение.



Введём обозначения как показано на рисунке. Угол ODC и CAH равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим треугольники COD и ACH они прямоугольные, углы ODC и CAH равны, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\frac{OD}{AH} = \frac{OC}{CH} = \frac{DC}{AC}$. Диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам: Получаем:

$\frac{\frac{1}{2}AC}{CH} = \frac{CD}{AC} \leftrightarrow AC=\sqrt{2CH}\leftrightarrow AC=4\sqrt{29}$.

Из прямоугольного треугольника используя теорему Пифагора найдём АН:

АН=$\sqrt{AC^2 - CH^2}$=$\sqrt{464 - 64} = \sqrt{400} = 20$.

Ответ: 20.

Выводы по второй главе

Во II главе, был проведен анализ школьных учебников и частных методик, выделены и объединены в группы задачи по теме «Квадратные корни». Затем проведен анализ задач, включающих квадратные корни в заданиях основного государственного экзамена по математике в 9 классе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены методические особенности обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры 8 класса основной школы, был проведен анализ научно-методической литературы, программ по математике, школьных учебников алгебры по теме исследования, анализ, систематизация и обобщение материала. Выполнены задачи исследования:

1. Выделить основные цели и задачи обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы (целевой компонент методической системы).

2. Проанализировать содержание темы «Квадратные корни» в учебниках алгебры основной школы (содержательный компонент методической системы).

3. Изучить различные формы, методы и средства обучения теме «Квадратные корни» в курсе алгебры основной школы (организационный компонент методической системы).

Цель работы – раскрыть методическую систему обучения теме «Квадратные корни» выполнена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра 8 класс. Учебник. / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина – М.: Дрофа, 2006.
2. Алгебра 8 класс. Учебник. / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин– М.: Просвещение, 2006.
3. Алгебра 8 класс. Учебник. / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др. /под ред. С.А. Теляковского – М.: Просвещение, 2012.
4. Алгебра 8 класс. Методические рекомендации. / Г.К. Муравин, О.В. Муравина – М.: Дрофа, 2007.
5. Алгебра 8 класс. Поурочные разработки по алгебре. / А.Н. Рурукин– М.: ВАКО, 2012.
6. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7-9 классы: пособие для учителей общеобразовательных учреждений / (составитель Т.А. Бурмистрова). – М.: Просвещение, 2011.
7. Алгебра: Для 8 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло, А.С. Симонов, А.И. Кудрявцев; Под. ред. Н.Я. Виленкина. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 2007. - 367 с.
8. Алгебра: Учеб. для 8 кл. сред.шк. / Ю.Н. Макарычев [и др.]. -М.: Мнемозина, 2008. - 447 с.
9. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система знаний: пособие для учителя / под редакцией А.Г. Асмолова. – М.:Просвещение, 2010.-159с.
10. Вестник Челябинского государственного педагогического университета. 2015. № 5
11. Виноградавторова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе/ Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: «Феникс», 2005.
12. Газета Математика/ В. Ольхов //1996. № 43
13. Газета Математика/ Ю.Г. Разбеглова //1997. № 5

14. Газета Математика/С. Минаева //2003. № 2

15. Газета Математика/ Многовариантные дидактические материалы //2003. № 14

16. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов (учебное пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики).-М.: Просвещение, 1996.

17. Геометрия 7 – 9: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 2005.

18. ГИА 2013. Математика: сборник заданий: 9 класс/ В.В.Корчагин, М.Н.Корчагина. - М.:Эксмо, 2012.

19. Колмогоров А.Н. Геометрия: учеб. пособие для 6-8 кл. сред. школы/А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов; под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1981.

20. Лысенко Ф.Ф. Подготовка к итоговой аттестации под ред.– Ростов-на-Дону: «Легион», 2008.

21. Мельникова Н.Б. Геометрия в 7 классе: пособие для учителей/Н.Б. Мельникова, Т.М. Мищенко, Л.Ю. Чернышева. – М.: Просвещение, 1984.

22. Методика и технология обучения математике. Курс лекций / под. ред. Н.Л. Стефановой и Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.

23. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений/В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А., В.А. Панчищина и др./под ред. В.А. Гусева. – М.: Академия, 2004.

24. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика / сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – Гл. 12, 16.

25. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики / Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1977. – С. 146 – 188.

26. Мордкович А.Г. Алгебра 8кл.: В двух частях. Ч.2: Задачник для общеобразовательных учреждений/ А.Г.Мордкович, Т.Н.Мишустина,

Е.Е.Тульчинская. – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2010.

27. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 кл.: В двух частях. Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. - 6-е изд. - М.: Мне-мозина, 2004. - 192 с.

28. Примерная программа основного общего образования по математике, рекомендованная Министерством образования и науки РФ / Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – 2-е изд. стереотип. – М.: Дрофа, 2008. – 128 с.

29. Программы. Математика. 5 – 6 классы. Алгебра 7 – 9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы / авт. - сост. И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2009. – 63 с.

30. Программы общеобразовательных учреждений. Математика. / Т.А. Бурмистрова – М.: Просвещение, 235

31. Саранцев Г.И. Перед встречей с доказательством/Г.И. Саранцев //Математика в школе. – 2004. – № 9. – С. 41. 5.6. Смилга В. Как начиналась геометрия/В. Смилга// Квант. – 1992. – № 2. – С. 11.

32. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2011.-48с.

33. Федеральный компонент государственного стандарта основного общего образования по математике / Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – 2-е изд. стереотип. – М.: Дрофа, 2008. – 128 с.

34. Шалашова М.М. Современные средства оценивания результатов обучения /учебно-методическое пособие/. – Арзамас, АГПИ, 2005

35. Сайт Открытый банк заданий по математике [Электронный ресурс] http://www.mathgia.ru/

36. Сайт педагогических идей «Первое сентября» [Электронный ресурс] http://festival.1september.ru/

37. Сайт учебно-методических комплексов по математике для 1-11 классов Г.К.Муравина и О.В.Муравиной

[Электронный ресурс] http://muravin2007.narod.ru/

38. Федеральный институт педагогических измерений

[Электронный ресурс] http://fipi.ru/