МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	Д.П. Лапин (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)
Руководитель	И.В. Антонова (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)
Консультант	Е.Ю. Аношина (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью работы является выявление методических особенностей обучения учащихся теме «Системы уравнений» в курсе алгебры основной школы и разработка систем задач по теме исследования.

Тема «Системы уравнений» изучается в основной школе с 7 класса. Многие математические модели построены на основе ситуаций из реальной жизни, одной из таких моделей являются системы уравнений. Системы уравнений – это инструмент для решения многих задач из смежных дисциплин, связанных с математикой. Задачи по теме «Системы уравнений» включены в основной государственный экзамен.

Работа состоит из введения и двух глав.

Глава I бакалаврской работы раскрывает теоретические основы обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы. Также в этой главе выявлены основные цели и задачи, устанавливаемые в процессе обучения данной теме в курсе алгебры основной школы, требования к знаниям и умения учащихся по данной теме. Выполнен анализ теоретического и задачного материалов по теме исследования.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы. Сформулированы методические рекомендации по обучению решению систем алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме исследования. Разработаны системы задач по обучению учащихся теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

Список литературы содержит 35 наименований.

Объем работы составляет 68 страниц.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "The method of teaching to the solution of systems of algebraic equations in a course of the algebra of the intermediate school".

The topic "Systems of equations" is studied in the intermediate school from the 7th form. Many mathematical models are based on situations from real life; one of such models is the system of equations. Systems of equations are a tool for solving many problems from adjacent disciplines related to mathematics. Problems of the topic "Systems of equations" are included in basic state exam.

The aim of the work is to reveal the methodological features of teaching students the topic of "Systems of equations" in a course on algebra of the intermediate school and to develop the set of problems on the topic of the research.

The bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a list of 44 references, including 5 foreign sources, and appendixes.

The first part of the work contains the theoretical foundations of teaching the topic of "Systems of algebraic equations" in a course on algebra of the intermediate school. Also in this chapter, the main goals and tasks set in the course of teaching this topic are identified; the requirements for the knowledge and skills of students are indicated. The analysis of theoretical and problem materials on the research topic is carried out.

The second part presents the methodological aspects of teaching students the topic of "Systems of algebraic equations" in a course on algebra of the intermediate school. Methodological recommendations for teaching the solution of systems of algebraic equations in a course on algebra of the intermediate school are formulated. The problems of OGE (basic state exam) on the topic of the research are considered. Systems of problems on teaching students the topic of "Systems of algebraic equations" in a course on algebra of the intermediate school have been developed.

The list of literature contains 35 items. *The volume of work* is 68 pages.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Системы уравнений встречаются в древних текстах II тысячелетия до н. э. Системы уравнений применяли для решения задач в Вавилоне и Египте. Уже тогда люди умели составлять своеобразные системы уравнений и решать их. Многие системы становились громоздкими, и их запись в общем виде была трудной к восприятию. Решение этой проблемы предложил в 1675 г. немецкий математик Г.В. Лейбниц (1646 – 1716) – он ввёл нижние индексы при буквах.

Вместе с тем, отметим, что тема «Системы уравнений» изучается в основной школе начиная с 7 класса. Многие математические модели построены на основе ситуаций из реальной жизни, одной из таких моделей являются системы уравнений.

Системы уравнений – это инструмент для решения многих задач из смежных дисциплин, связанных с математикой.

Кроме того, одним из вопросов методики преподавания математики в основной школе является вопрос методики формирования у учащихся умений и навыков решения и составления систем уравнений.

С понятием системы учащиеся встречаются в основной школе при изучении тем «Прямоугольная система координат», «Система исчисления» и т. д. Одним из значений слова «Система», которое можно встретить в различных источниках, выступает следующее определение: «Система – множество элементов, состоящих в отношениях и связях друг с другом, образующих целостность и единство».

Задачи по теме «Системы уравнений» включены в основной государственный экзамен: задание 14 и задание 21 (раздел «Алгебраические выражения, уравнения, неравенства и их системы»).

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Системы уравнений» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Системы уравнений» на уроках алгебры основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Системы уравнений» в курсе алгебры основной школы и разработать системы заданий по теме исследования.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики (на примере темы «Системы алгебраических уравнений»).

2. Выявить основные цели и задачи обучения системам алгебраических уравнений в курсе математики основной школы.

3. Представить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

4. Выполнить анализ содержания теоретического и задачного материала темы «Системы алгебраических уравнений» в учебниках алгебры 7-9 классов.

5. Выявить формы, методы и средства обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

6. Представить методические рекомендации по обучению системам алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы.

7. Рассмотреть задачи ОГЭ по данной теме.

8. Разработать системы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ методической литературы; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены методические рекомендации по обучению учащихся решению систем алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы и системы задач по теме исследования, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению учащихся решению систем алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы.

2. Системы задач по теме «Система алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы раскрывает теоретические основы обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы. Выявлены основные цели и задачи обучения данной теме в курсе математики основной школы, определены требования к знаниям и умения учащихся по данной теме. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов по теме исследования.

В Главе II представлены методические основы обучения учащихся теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы. Выявлены формы, методы и средства обучения данной теме в курсе алгебры основной школы. Представлены методические рекомендации по обучению решению систем алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме исследования. Разработаны системы задач по обучению учащихся теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 35 наименований. Объем работы составляет 66 страниц.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики (на примере темы «Системы алгебраических уравнений»)

Логико-математический анализ темы рассматривается в методической литературе с различных точек зрения. Е.И. Лященко [9] описывает логико-математический анализ как часть логико-дидактического анализа. Н.Л. Стефанова [28] же наоборот выделяет логико-математический анализ как более широкое понятие.

Прежде всего, отметим, что понимают под логико-математическим и логико-дидактическим анализами указанные авторы.

Н.Л. Стефанова пишет, что в ходе логико-математического анализа описывают:

- цели обучения данной теме и результаты, полученные по окончанию её обучения;

- определения, применяемые в теме и понятия, через которые эти определения задаются;

- математические утверждения в теме, не являющиеся определениями и их виды (теоремы, формулы и т.д.), вводимые и доказываемые в учебниках;

- роль и задачи геометрического и алгебраического материалов, приводимых в учебниках и их особое место в рассматриваемой теме;

- решение, методы решения и оформление решения задач, которые рассматриваются в школьной программе.

О логико-дидактическом анализе, в работе автора говорится, что его выполнение основывается на логико-математическом анализе и содержит:

- учебные задачи и выбор правильных сопутствующих познавательных действий;

- приёмы, средства и методы при обучении данной теме;

- формы контроля и формы оценки результатов учебной деятельности.

Е.И. Лященко [9] описывает логико-математический анализ, как элемент, входящий в логико-дидактический, поэтому сначала опишем что такое содержит логико-дидактический анализ в пособии данного автора: цели обучения теме; логико-математический анализ темы; выделение задач и применение учебно-познавательных действий; приёмы, методы и средства обучения; контроль, его формы, оценка обучения и результатов обучения.

Как пишет автор, логико-математический анализ сводится к определению понятной и обоснованной организации материала, основанной на специфике аксиоматического метода. Им выделяются три допустимых подхода к этой задаче – на содержательной основе, дедуктивный подход
к построению курса и построение курса на дедуктивной основе.

Вместе с этим, отметим, что математический анализ даёт нам ответ на вопрос: «О чём можно узнать, при изучении данной темы?» И помогает определить, почему были выполнены те или иные преобразования, схемы исследований и доказательств.

При определении понятия логико-математического анализа содержания темы школьного курса математики (на примере темы «Системы алгебраических уравнений школьного курса математики») остановимся на подходе Н.Л Стефановой.

Далее, в следующих параграфах, мы подробнее рассмотрим элементы логико-математического анализа и выполним его на примере темы «Системы алгебраических уравнений школьного курса математики».

Так, к основным вводимым понятиям данной темы можно отнести: уравнение первой степени с двумя неизвестными; решение уравнения первой степени с двумя неизвестными; понятие системы уравнений; решение системы уравнений; решение уравнения первой степени с двумя неизвестными; методы решения систем уравнений; равносильные, однородные, симметрические системы уравнений.

Отметим, что умение учителя математики грамотно выполнять логико-математический анализ тем школьного курса математики помогает ему при подготовке к уроку или циклу уроков по определенной теме, так как включает в себя анализ программ, учебников и учебных пособий, выбор определенных форм, методов и средств обучения.

После проведения логико-математического анализа темы, рассмотрим далее другие вопросы, связанные с методикой ее обучения учащихся.

§2. Цели обучения и основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе математики основной школы

Тема «Системы алгебраических уравнений» рассматривается в учебниках алгебры в 7 классе, и является важной при обучении математике. Изучая данную тему в школе, ученики не только учатся решать системы уравнений, но и приобретают навыки по построению математических моделей. Поэтому важность умения решать системы уравнений трудно недооценить. Кроме того, внимание системам уравнений уделяется и в старших классах.

В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования, изучение такой дисциплины, как математика, должно давать следующие результаты:

1. Реальные процессы и явления ученик должен уметь описывать и изучать с помощью метода, формируемого представлением о математике.

2. Ученик должен уметь работать с учебным математическим текстом, используя математическую терминологию, грамотно и красиво выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений.

3. Знание языка алгебры в символах, обретение навыков тождественных преобразований, умение решать уравнения, неравенств и их систем, а также умение исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры и интерпретировать полученный результат – тоже один из важных результатов изучения математики.

4. Овладение навыком представления статистики и статистических данных; формирование знаний о работе с реальными жизненными ситуациями, отображёнными в статистике, и анализе таких ситуаций; развитость умений пользоваться информацией, представленной в таблицах, графиках и диаграммах.

5. Умение применять все полученные знания для решения задач на практике и для выполнения заданий из смежных дисциплин.

В сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой [1] выделены следующие результаты изучения темы «Уравнения и системы уравнений»:

1. Умение решать рациональные уравнения и системы уравнений с двумя переменными.

2. Умение решать текстовые задачи, применяя уравнения и их системы, как важнейшие математические модели для описания реальных ситуаций.

3. Умение правильно применять графические материалы для исследования уравнений, исследования и решения систем уравнений с двумя переменными.

4. Овладение специальными приёмами решения уравнений и их систем; применение аппарата уравнений для решения задач из математики и ответвляющихся дисциплин – и причём делать это с уверенностью.

5. Применение графических представлений для исследования уравнений и их систем, содержащих буквенные коэффициенты.

После изучения данной темы в школьном курсе математики основной школы учащиеся должны:

- знать: способы решения уравнений, применяемых в решении систем уравнений; методы решения систем уравнений; приёмы проведения тождественных преобразований выражений, входящих в систему.

- уметь: применять знания о решении систем уравнений разными методами при их решении; применять тематическую терминологию и свободно оперировать понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства; выполнять проверку для числовых равенств; решать системы несложных уравнений; проверять, является ли найденный результат решением уравнения (системы уравнений); изображать графически решение систем уравнений [28].

Отметим, что в примерной программе основного общего образования [22] говорится, что в ходе обучения данной теме учащиеся научатся составлять и решать уравнения и их системы при решении задач, возникающих также в других учебных предметах.

Так же в документе указано, что, освоив данную линию, ученик получит возможность научиться, для продолжения образования *на базовом и углублённом уровнях,* следующему:

1. Оперировать более сложными понятиями, такими как: система уравнений, корень уравнения, решение системы уравнений, равносильные

уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств).

2. Находить решения систем линейных уравнений.

3. Находить решения систем квадратных уравнений.

4. Находить решения систем уравнений, содержащих простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

5. Решать несложные системы линейных уравнений с параметрами.

В повседневной жизни эти умения помогут при:

1. Составлении и решении систем линейных и квадратных уравнений.

2. Оценке истинности результатов, полученных в ходе решения систем линейных и квадратных уравнений.

3. Выборе соответствующих систем уравнений для составления верной математической модели для решения задачи, основанной на реальной ситуации или прикладной задачи.

4. Отработке умений интерпретирования полученных результатов при решении системы уравнений.

В пособии для учителей к учебникам Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворовой, И.С. Шлыковой говорится, что основная цель изучения системы уравнений с двумя переменными – ознакомить учащихся с понятиями «Линейное уравнение с двумя переменными», «график линейного уравнения с двумя переменными» и «система линейных уравнений».

В работе [29] отмечается, что при обучении решению уравнений, неравенств и их систем в 8 классе большое внимание уделяется неравенствам и их системам. В 9 классе, где обобщаются знания по решению систем уравнений, основной целью является выработка умений по решению простейших систем, содержащих уравнения второй степени с двумя переменными, и текстовых задач с применением систем уравнений.

Таким образом, рассмотрев в данном параграфе цели обучения системам алгебраических уравнений и основные требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме, необходимо выполнить анализы теоретического и задачного материалов по ней.

§3. Анализ содержания теоретического материала по теме «Системы алгебраических уравнений» в учебниках алгебры 7-9 классов

В учебниках алгебры разных авторов [3-5; 10-12; 14-20] изучение материала по системам уравнений и его содержание имеют отличия. Имеет отличия и порядок изучения основной терминологии. Но у большинства авторов прослеживается схожая стратегия, по которой строится структура программы.

Базовые знания (известные из школьного курса математики 5-6 классов): координата точки на координатной плоскости; понятие переменной; числовые выражения и буквенные выражения; понятие уравнения; понятия прямой и обратной пропорциональных зависимостей; уравнения первой степени; корень уравнения; решение линейного уравнения с одним неизвестным. *Вводимые (новые) знания:* уравнение первой степени с двумя неизвестными; решение уравнения первой степени с двумя неизвестными; понятие системы уравнений; решение системы уравнений; решение уравнения первой степени с двумя неизвестными; методы решения систем уравнений; равносильные, однородные, симметрические системы уравнений.

Ниже будет представлен анализ содержания теоретического материала по системам уравнений в Приложении 1 (Таблица 1) по учебникам алгебры 7 класса.

В учебнике А.Г. Мордковича в 7 классе [14] приводится понятие линейного уравнения с двумя переменными – это является первой ступенью к подведению учеников к понятию систем уравнений. Далее ученики подробнее изучают системы уравнений, метод подстановки и метод алгебраического сложения. Также рассматривается графический способ решения систем, но сам способ не выделяется отдельным параграфом. Автор учебника знакомит учеников со способом решения задач с помощью систем уравнений, рассматривая математические модели реальных ситуаций, решаемых через системы уравнений. Он выделяет случаи, когда системы несовместны, неопределённы. Отметим, что все эти понятия рассматриваются в рамках обучения линейным уравнениям в самом начале курса – 11-14 параграфы.

Автор учебника алгебры для 7 класса Ю.М. Колягин приводит материал по теме гораздо позднее – параграфы 33-37. Причём материал по данной теме представлен более подробно – введение в главу начинается с детального рассмотрения понятия системы уравнений: от значения фигурной скобки в её записи, до примеров их решения. Графический способ решения систем уравнений выделяется отдельным параграфом. Методика введения понятий по теме в указанных учебниках не имеет существенных отличий.

У автора Ю.Н. Макарычева в алгебре 7 класса тема «Система уравнений», где так же рассматриваются только линейные системы уравнений, разбита на два больших параграфа (15-16 параграфы) – в первом осуществляется введение самого понятия: автор разбивает параграф на три подпункта, рассматривая понятия линейного уравнения с двумя переменными, график уравнения с двумя переменными и в третьем пункте вводится понятие системы уравнений. Второй параграф посвящён способам решения этих систем уравнений.

Рассмотрим учебник алгебры 7 класса С.М. Никольского. В нем тема «Системы линейных уравнений» рассмотрена наиболее подробно. В этот параграф включены такие пункты, как «Равносильность уравнений и систем уравнений»; «Системы уравнений первой степени с тремя неизвестными». В дополнении к главе приведён Метод Гаусса для решения систем уравнений.

Г.К. Муравин наоборот в 7 классе [18] начинает рассматривать теоретический материал с понятия уравнения, и во втором параграфе третий пункт посвящён системам уравнений. Теоретический материал раскрыт сжато, приведены примеры систем уравнений и текстовых задач, которые решаются с помощью систем уравнений. Дополнительные сведения по решению систем уравнений приводится в некоторых номерах по ходу изучения материала.

Большинство авторов учебников алгебры 7 класса придерживаются одной последовательности изучения темы «Системы уравнений». Отличия есть только в количестве часов на ее изучение.

В учебнике Ю.М. Колягина на обучение данной теме выделяется 13-17 часов; у Г.К. Муравина 3-4 часа; у Ю.Н. Макарычева – 16-17 часов; у А.Г. Мордковича – 12-16 часов на изучение темы; в учебнике Никольского 12-17 часов в зависимости от варианта изучения.

Далее ниже в Приложении 2 (Таблица 2) представим содержание теоретического материала по теме «Системы уравнений» в различных учебниках алгебры 8 класса.

В учебниках Ю.Н. Макарычева и А.Г. Мордковича 8 класса тема «Системы уравнений» не выносятся в качестве отдельной темы. В учебниках алгебры 8 класса Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина добавляется тема «Решение простейших систем, содержащих уравнение второй степени» в главах, посвященных обучению квадратным уравнениям.

Отметим, что в учебнике алгебры 7 класса Г.К. Муравина понятие системы уравнений подробно не рассматривается. Приводятся только примеры решения систем уравнений. В 8 же классе в учебнике этого автора рассматриваются системы уравнений, содержащие квадратное уравнение, и на их примерах происходит изучение темы «Системы уравнений». Также показаны методы решения систем уравнений и рассмотрено решение задач с помощью систем уравнений.

Вторым учебником, в котором содержится тема «Системы уравнений» является учебник Г.В. Дорофеева и др. Авторы посвящают целую главу изучению систем линейных уравнений, как это было у других авторов в 7 классе. Приводится соответствующий материал и вводится понятие системы уравнений, рассматривается понятие уравнения, графический метод решения систем уравнений; описываются такие методы решения систем уравнений, как методы сложения и подстановки.

Отметим, что некоторые авторы учебников 8 класса вводят понятие систем уравнений с помощью квадратных уравнений, другие в 8 классе только начинают рассматривать тему «Системы уравнений». В учебнике Ш.А. Алимова выделяется 3 часа на обучение теме «Системы уравнений»; в учебнике Г.К. Муравина – 6 часов. Ю.Н. Макарычев, как и А.Г. Мордкович, не выделяет данную тему в 8 классе отдельно. В учебнике Ю.М. Колягина отводится на её изучение 7-9 часов, а в учебнике Г.В. Дорофеева – 20-24 часа.

Рассмотрим содержание теоретического материала по теме «Системы уравнений» в 9 классе в Приложении 3 (Таблица 3).

В учебнике алгебры для 9 класса Ю.Н. Макарычева раскрывается содержание темы «Системы квадратных уравнений» и «Решение систем квадратных уравнений», которые были уже изучены 8 классе у некоторых других авторов. Автором рассматриваются системы квадратных уравнений и методы их решения – графический метод и метод подстановки. Позже в конце главы в рубрике «Для тех, кто хочет знать больше» приводятся и другие методы их решения – метод сложения, метод введения новой переменной.

В учебнике алгебры 9 класса Ш.А. Алимова описываются системы уравнений, содержащие уравнения второй степени. Автор более полно раскрыл данную тему. Приводятся системы уравнений второй степени с параметром и системы уравнений, содержащие три переменные.

Рассматриваются методы решения систем уравнений, содержащих квадратные уравнения – метод подстановки, метод введения новой переменной, метод алгебраического сложения и способ решения системы с применением теоремы Виета. Рассмотрены некоторые виды задач, которые решаются с помощью систем уравнений, содержащих квадратные уравнения.

Г.В. Дорофеев в учебнике алгебры 9 класса, подобно Ю.Н. Макарычеву, вводит системы квадратных уравнений, их методы решения и описывает решение задач на применение систем уравнений, содержащих квадратные уравнения, а также в пункте с припиской «Для тех, кому интересно» рассматривает системы уравнений с параметром.

У автора учебника алгебры для 9 класса А.Г. Мордковича наиболее широко раскрыта тема «Система уравнений». Отдельно рассматриваются не только системы уравнений и методы их решения, но и вводятся такие понятия, как однородные системы уравнений, симметрические системы уравнений, иррациональные системы уравнений и системы уравнений с модулями. Автор подробно описывает различные примеры решения систем уравнений.

Авторы учебников алгебры 9 класса Ю.М. Колягин и Г.К. Муравин не выделяют данную тему в отдельные параграфы. Только в некоторых параграфах, например «Системы неравенств», упоминаются системы уравнений, но они не являются целью их изучения.

Отметим, что в учебнике Г.К. Муравина и др. данная тема неглубоко рассматривается в учебниках 7-го и 9-го классов.

Отметим, что содержание темы «Системы уравнений» отличается у авторов разных учебников 7-9 классов, так у Мордковича в 9 классе начинается изучение систем уравнений с модулями. В учебнике Ш.А. Алимова выделяется 9 часов на обучение системам уравнений; у Ю.Н. Макарычева 10/16 часов; у А.Г. Мордковича 18/20 часов, в учебнике Г.В. Дорофеева – 10/14 часа. В учебниках Ю.М. Колягина и Г.К. Муравина тема «Системы уравнений» не выделяются в 9 классе отдельно.

§4. Анализ задачного материала по теме «Системы алгебраических уравнений» в учебниках алгебры основной школы

Отметим, что анализ учебников математики 5-6 классов показал, что в них имеют место задачи *пропедевтического характера* по данной теме. Так, в учебниках С.М. Никольского и А.Г. Мордковича встречаются подобные задачи: «Найдите значение выражения $3x - 2y$ при $x = -1, y = -4$».

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры основной школы различных авторов (А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, Ю.Н. Макарычев), нами были выделены следующие *виды систем алгебраических уравнений*: системы линейных уравнений с двумя переменными (7 класс); системы линейных уравнений с тремя переменными (7 класс); системы уравнений с двумя переменными, содержащие уравнения второй степени (8 класс); системы уравнений с тремя переменными, содержащие уравнения второй степени (9 класс); системы уравнений с параметром (9 класс); однородные системы уравнений (9 класс); симметрические системы уравнений (9 класс); иррациональные системы уравнений (9 класс); системы уравнений с модулем (9 класс).

Приведём типы задач в соответствии с выделенными видами систем алгебраических уравнений.

Системы линейных уравнений с двумя переменными, 7 класс

1. Нахождение решения системы двух уравнений.

Пример 1 (учебник С.М. Никольского).

Решить систему уравнений: $\begin{matrix} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 2x - 2y - 4 = 0. \end{matrix}$

Комментарий: выразив одну переменную в первом уравнении системы и подставив ее во второе, получаем: $x = 1, y = -1$. **Ответ:** $1; -1$.

2. Нахождение количества решений системы уравнений.

Пример 2 (учебник Ю.Н. Макарычева).

Сколько решений имеет система уравнений: $\begin{cases} 8x + 20y = 3, \\ 2x + 5y = 16. \end{cases}$

Комментарий: из каждого уравнения выражаем **перемену** y:

$$y = -0{,}4x + 0{,}15,$$
$$y = -0{,}4x + 3{,}2$$

Прямые, являющиеся графиками линейных функций в системе уравнений, параллельны, так как их угловые коэффициенты одинаковы. Отсюда следует, что данная система уравнений не имеет решений.

Ответ: система уравнений не имеет решений.

3. Определение того, является ли пара чисел x и y решением системы уравнений.

Пример 3 (учебник Ю.Н. Макарычева [10]). Является ли пара чисел $x = 3, y = 1$ решением системы уравнений: $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$

Комментарий: подставляем значения в систему, заменяя переменные. Если результатом буду два верных равенства, то данная пара является решением системы уравнений: $\begin{cases} 3 + 1 = 4, \\ 2 \cdot 3 - 1 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4, \\ 5 = 2. \end{cases}$

Второе равенство в системе не является верным, значит данная пара чисел не является решением исходной системы. **Ответ:** пара чисел $x = 3,\ y == 1$ **не является** решением системы уравнений.

4. Составление системы уравнений, решением которой служит пара чисел x и y.

Пример 4 (учебник А.Г. Мордковича [14]). Составить какую-либо систему из двух уравнений, решением которой будет пара чисел (0;6).

Комментарий: составляем отдельно 2 верных равенства с данными числами, затем представляем запись в виде $ax + by = c$ и записываем их в систему уравнений: $\begin{gathered} 8\cdot 0+4\cdot 6=24, \\ -7\cdot 0+6\cdot 6-35=1. \end{gathered}$ Заменим пару чисел (0;6) на пару чисел $(x;y)$. **Ответ:** $\begin{gathered} 8x+4y=24, \\ -7x+6y-35=1. \end{gathered}$

5. Нахождение нескольких решений системы уравнений.

Пример 5 (учебник Ю.Н. Макарычева [10]).

Решить систему уравнений: $\begin{gathered} 5x+2y=-18, \\ 15x+6y=-54. \end{gathered}$

Комментарий: выразив из каждого уравнения y, получим, что система уравнений состоит из двух одинаковых уравнений: $\begin{gathered} y=-2{,}5x-9, \\ y=-2{,}5x-9. \end{gathered}$

Это, в свою очередь, говорит о том, что графики этих двух функций совпадают, и система имеет несколько решений (а именно: бесконечное множество решений – при любых значениях x значения y будут совпадать).

Ответ: система имеет бесконечное множество решений.

Системы линейных уравнений с тремя переменными, 7 класс

1. Нахождение решения системы трёх уравнений.

Решить систему уравнений: $\begin{gathered} 2x-3y+z-1=0, \\ 3x-4y-z+2=0, \\ x-y+z=0. \end{gathered}$

Комментарий: Выразив одну переменную в третьем уравнении системы и подставив её в первое и второе уравнения системы, имеем: $x=y-z$.

Откуда получаем: $\begin{gathered} 2\ \ y-z\ \ -3y+z-1=0, \\ 3\ \ y-z\ \ -4y-z+2=0, \\ x=y-z. \end{gathered}$ Теперь решим следующую систему уравнений: $\begin{gathered} 2\ \ y-z\ \ -3y+z-1=0, \\ 3\ \ y-z\ \ -4y-z+2=0. \end{gathered}$ => $\begin{gathered} -y-z-1=0, \\ -y-4z+2=0. \end{gathered}$ Из последней системы находим пару чисел вида $\ y;z\ $, где $\ 0;-1\ $ – её решение. Подставляем найденные значения переменных y и z в третье уравнение исходной системы уравнений с тремя переменными. После того, как выразим значение x $(x=1)$, записываем в ответе решение системы уравнений – упорядоченную тройку чисел $\ x;y;z\ $. **Ответ:** $\ 1;0;-1\ $.

Системы уравнений с двумя переменными, содержащие уравнения второй степени, 8 класс

Пример (учебник Ю.М. Колягина).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x-y=2. \end{cases}$

Комментарий: запишем первое уравнение системы следующим образом: $(x-y)(x+y)=16$. Подставляя значение из второго уравнения имеем: $\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$ Решая систему методом сложения получим ответ $x=5, y=3$.

Ответ: $(5;3)$.

Симметрические системы уравнений, 9 класс

1. Нахождение количества решений системы уравнений.

Пример 1 (учебник Г.В. Дорофеева [5]).

Выяснить, сколько решений имеет система уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ xy=1. \end{cases}$

Комментарий: отметим, что графиком первого уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3. После того, как выразим y во втором уравнении, станет ясно, что это уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1;1)$. Очевидно, что такие графики пересекутся в двух точках в I координатной четверти и в двух точках в III координатной четверти. **Ответ:** Система имеет 4 решения.

2. Нахождение всех решений системы уравнений.

Пример 2 (учебника Г.В. Дорофеева [5]).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=-3. \end{cases}$

Комментарий: выражаем из второго уравнения системы одну из переменных и подставляем полученное значение в первое уравнение: $x^2+\left(-\frac{3}{x}\right)^2=10$. После упрощения получим: $x^4-10x^2+9=0$. Это уравнение имеет корни: $x_1=3, x_2=-3, x_3=1, x_4=-1$. Найдем соответствующие значения переменной y при подстановке значений x во второе уравнение системы. **Ответ:** $3;1\ ,\ -3;1\ ,\ 1;-3\ ,\ -1;3$.

3. Нахождение координат точек пересечения графиков, заданных уравнениями.

Пример 3 (учебник Г.В. Дорофеева [5]). Вычислите координаты точек пересечения параболы и прямой:

$$y = x^2 - 5x \text{ и } y = x - 8$$

Комментарий: составим систему уравнений, состоящую из данных уравнений и решим её: $\begin{matrix} y = x^2 - 5x, \\ y = x - 8. \end{matrix}$ Подставляем значение y в первое уравнение системы и решаем полученное уравнение: $x - 8 = x^2 - 5x$; $x^2 - 6x + 8 = 0$. Корнями этого уравнения являются: $x_1 = 2, x_2 = 4$.

Найдём соответствующие значения переменной y, подставив значения переменной x во второе уравнение. **Ответ:** $2; -6\ , (4; -4)$.

Однородные системы уравнений, 9 класс

1. Составление системы уравнений, такой, чтобы она имела: два решения, одно решение, не имела решений.

Пример (учебник Г.В. Дорофеева [5, С.162]). Составьте такую систему уравнений, чтобы она имела одно решение.

Комментарий: Воспользуемся, например, особенностями графика уравнения параболы. Зададим такие уравнения, чтобы графики не пересекались.

К примеру, мы можем задать два уравнения, графики которых бы имели вершину в одной точке, а ветви были бы направлены в противоположные стороны: $\begin{matrix} y = x^2, \\ y = -x^2. \end{matrix}$ Можно и преобразовать данную систему, перенося левые и правые части, чтобы система и имела вид ***однородной системы***, но в любом случае данная система уравнений будет иметь одно решение.

Иррациональные системы уравнений, 9 класс

1. Нахождение решений систем уравнений, содержащих иррациональные уравнения.

Пример (учебник Г.В. Дорофеева [5]).

Решить систему уравнений: $\begin{matrix} y = \overline{x}, \\ x - 2y = 3. \end{matrix}$

Комментарий: для решения этой системы уравнений подставим значение y из первого уравнения во второе и введём новую переменную $t = \overline{x}$. Получим уравнение: $t^2 - 2t - 3 = 0$.

Решая его, мы находим значения переменной t, где $t = \overline{x}$. Подставляем значение $\overline{x}$ в первое уравнение системы и находим решения исходной системы уравнений. Так как одно из значений x отрицательное, то система имеет одно решение. **Ответ:** $3;\ \overline{3}$.

Системы уравнений с модулем, 9 класс

1. Нахождение решений систем уравнений с модулем.

Пример (учебник Г.В. Дорофеева [5]).

Решить систему уравнений: $\begin{matrix} y = x , \\ y = x^2. \end{matrix}$

Комментарий: после раскрытия знака модуля, система распадается на равносильные системы уравнений: $\begin{matrix} y = x, \\ y = x^2, \\ x \geq 0. \end{matrix}$ или $\begin{matrix} y = -x, \\ y = x^2, \\ x < 0. \end{matrix}$ А конечным решением станет объединение решений полученных систем.

Решение первой системы уравнений – $0;0$, $1;1$, решение второй системы уравнений – $0;0$, $-1;1$. Объединение этих решений даёт нам решение исходной системы уравнений. **Ответ:** $0;0$, $1;1$, $-1;1$.

Системы уравнений с параметром, 9 класс

1. Нахождение значений параметра а, при которых система уравнений имеет единственное решение.

Пример 1 (учебник Г.В. Дорофеева [5]). Найти значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{matrix} x - y = a, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{matrix}$ имеет единственное решение.

Комментарий: выражаем из первого уравнения системы уравнений переменную и подставляем значение во второе уравнение, получим:

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 8 = 0$$

Так как квадратное уравнение имеет единственный корень в том и только в том случае, когда дискриминант D равен нулю, имеем:

$$D = a^2 - 2(a^2 - 8) = -a^2 + 16.$$

Приравняв найденное значение к нулю находим значение a. **Ответ:** ± 4.

2. Нахождение значений параметра а, при которых система уравнений имеет два (три) решения.

Пример 2 (учебник Г.В. Дорофеева [5]).

Найти значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x| + a, \end{cases}$ содержащая уравнение с модулем, имеет два (три) решения.

Комментарий: рассмотрим равносильные системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = x + a, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad \textbf{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = -x + a, \\ x < 0. \end{cases}$$

Первая система будет иметь решение при $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, причём при $a = \pm\sqrt{2}$, система будет иметь единственное решение.

После решения второй системы уравнений имеем, что решения системы уравнений существуют при $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. И также при $a = \pm\sqrt{2}$, система будет иметь единственное решение, но значение x будет противоположным значению из первой системы.

Ответ: при $a = \{-2; 2\}$ система уравнений имеет два решения; при $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ – имеет три решения.

3. Нахождение значений а, при которых система уравнений имеет решение; имеет два решения.

Пример 3 (учебник Г.В. Дорофеева [5, С. 181]).

Найти значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ y = x^2 + a \end{cases}$ имеет одно решение; имеет два решения.

Комментарий: Подставим значение y в первое уравнение системы: $x^2 + a = 1 - x^2$. Решаем его относительно x: $2x^2 + a - 1 = 0$. Выразив x, получаем что: $x_1 = -\sqrt{\frac{1-a}{2}}, x_2 = \sqrt{\frac{1-a}{2}}$.

При $a = 1$ оба значения x равны 0, а значит система будет иметь один единственный корень $0;1$, при $a > 1$ подкоренное выражение будет равно отрицательному числу, а значит система не будет иметь решений, при $a < 1$ будем иметь $x_1 = -x_2$, т.е. система будет иметь два решения.

Ответ: при $a \in 1;+\infty$ система уравнений не имеет решений; при $a = 1$ система уравнений имеет единственное решение; при $a \in -\infty;1$ – имеет два решения.

Кроме того, в статье *учителя математики С.С. Варломовой* выделяются типы систем уравнений, рассматриваемые в школьном курсе алгебры, которые в основном выделяются в 9 классе. Рассмотрим, каким образом выделенные автором задачи представлены в школьных учебниках.

1. Системы, содержащие одно линейное уравнение.

В изучении данного типа систем основой является метод подстановки. Таким образом, более сложное уравнение системы сводится к уравнению с одной переменной. После этого легко найти и вторую переменную, подставив значение первой в линейное уравнение.

Задача 1 (7 класс, А.Г. Мордкович).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9. \end{cases}$

Комментарий: автор учебника рассматривает метод сложения для решения систем уравнений, мы можем воспользоваться этим методом, заметив, что оба уравнения содержат противоположные коэффициенты при

y. $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 12x = 24. \end{cases}$ => $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ x = 2. \end{cases}$ Подставим найденное значение x в первое уравнение и найдём y: $\begin{cases} 4 + 11y = 15, \\ x = 2. \end{cases}$ => $\begin{cases} 11y = 11, \\ x = 2. \end{cases}$ => $\begin{cases} y = 1, \\ x = 2. \end{cases}$ Таким образом, решением системы является пара чисел $(x;y)$. **Ответ:** $(2;1)$.

Задача 2 (7 класс, С.М. Никольского).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 5x + y - 15 = 0, \\ x - 2y - 14 = 0. \end{cases}$

Комментарий: представим систему в следующем виде: $\begin{cases} y = 15 - 5x, \\ 11x - 44 = 0. \end{cases}$ Находим из второго уравнения x и подставляем в первое – получаем пару чисел $(x;y)$, являющуюся решением системы уравнений. **Ответ:** $(4;-5)$.

Анализируя задачный материал, уже на этом этапе можно заметить интересное отличие: в учебнике С.М. Никольского все системы приведены в общем виде: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$

На наш взгляд, это полезно в первую очередь тем, что учит учащихся приводить уравнение к общему виду. Это поможет им в дальнейшем, например, когда ученики перейдут к изучению квадратичных уравнений.

Вместе с этим, в записях, приведённых у А.Г. Мордковича есть свои преимущества – научившись видеть решения в уравнениях, записанных по-разному, ученики будут обладать гибкостью в решении систем уравнений.

Теперь рассмотрим примеры данного типа уравнений в учебниках алгебры 8 класса. Обратимся к учебникам алгебры 8 класса Никольского С.М. и Колягина Ю.М.

Задача 3 (8 класс, Ю.М. Колягин).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 - y^2 = 21. \end{cases}$

Комментарий: выразим в первом уравнении системы уравнений x и подставим его значение во второе. Так как у нас в квадрат будет теперь возводиться сразу выражение, вместо переменной, то раскроем полученный квадрат разности: $\begin{cases} x = 7 - y, \\ 49 - 14y + y^2 - y^2 = 21. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y, \\ -14y = -28. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: $(5;2)$.

Рассмотрим учебник алгебры 8 класса С.М. Никольского. Он рассматривает системы уравнений, содержащие квадратичные уравнения, а также системы из трёх линейных уравнений. Системы из трёх линейных уравнений тоже подходят для рассмотрения, ведь решаются путём выделения переменных и их подстановки в остальные уравнения

Задача 4 (8 класс, С.М. Никольский).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + z = 1, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Такие системы уравнений решаются с помощью выделения двух переменных через одну и ту же переменную в некоторых двух уравнениях. Эти значения подставляются в оставшееся третье и дальше остаётся лишь подставлять полученные численные значения обратно в первые два уравнения: $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ z = 1 - x, \\ y = 3 - x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (3 - x) + (1 - x) = 2, \\ z = 1 - x, \\ y = 3 - x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ z = -1, \\ y = 1. \end{cases}$

Таким образом, решение найдено – это упорядоченная тройка чисел $(x;y;z)$ равная в нашем случае $(2;1;-1)$

Системы, содержащие одно линейное, можно встретить и в 9 классе, только авторы, рассматривавшие системы с квадратичными уравнениями в 8 классе, уделяют время на изучение других тем, а авторы, которые в 8 классе не уделяли этому внимание, как раз вводят тему в 9 классе.

Ю.Н. Макарычев и Г.В. Дорофеев вводят тему «Квадратичные системы уравнений». Приведём примеры из учебников.

Задача 5 (9 класс, Г.В. Дорофеев).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + 3y^2 = 9 - xy. \end{cases}$

Задача 6 (9 класс, Ю.Н. Макарычев).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} y = 0{,}5x^2 - 2, \\ y - x = 2. \end{cases}$

Таким образом, мы видим, что эти авторы меньше всего уделают внимание данной теме в своих учебниках, в то время как другие авторы, после изучения темы в 8 классе больше к ней не возвращаются.

2. Системы, решаемые с помощью введения новой переменной.

В случае, когда уравнения имеют общие части, позволяющие заменить исходные переменные на более удобные новые. К примеру, заменить выражение $\frac{1}{x+y-1}$ в обоих уравнениях системы на новую переменную u, а выражение $\frac{1}{x-y+1}$ на переменную v в системе: $\begin{cases} \frac{1}{x+y-1} + \frac{1}{x-y+1} = 2, \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{4}{x-y+1} = 7 \end{cases}$ решить систему $\begin{cases} u + v = 2, \\ 3u + 4v = 7. \end{cases}$

После решения новой системы и возвращения к старым переменным будет легко решено исходное.

Главной проблемой таких систем является то, что данные замены не всегда легко увидеть школьникам в начале изучения темы.

В 7 классе возможные случай, когда встречается такой тип систем уравнений, это системы вида: $\begin{cases} \frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} = c_1, \\ \frac{a_2}{x} + \frac{b_2}{y} = c_2. \end{cases}$

Тогда, применяется замена $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$, и уравнение решается как линейное.

3. Однородные системы.

Однородными системами уравнений называются те, в которых уравнения имеют свободный член равный нулю. В том же конспекте С.С. Варломой рассматривается следующий способ решения: одно из уравнений решается относительно одной из двух переменных (т.е. вторая переменная считается «некоторым числом»), полученный результат (или результаты, если оба уравнения не линейные) подставляют во второе уравнение и снова решается уравнение с одной переменной, как это делается в первом типе рассмотренных систем уравнений.

Задача 1 (7 класс, А.Г. Мордкович).

Решить систему уравнений: $\begin{matrix} 3x+4y=0, \\ 2x+3y=1. \end{matrix}$

Комментарий: Упростим уравнения в системе уравнений $\begin{matrix} x=-\frac{4}{3}y, \\ \frac{1}{3}y=1. \end{matrix}$

Выражаем y и подставляем в первое уравнение: $\begin{matrix} x=-4, \\ y=3. \end{matrix}$ **Ответ:** $(-4;3)$.

Задача 2 (7 класс, С.М. Никольский).

Решить систему уравнений: $\begin{matrix} x-2y=0, \\ 2x-3y-7=0. \end{matrix}$

Комментарий: Упростим уравнения в системе уравнений и выразим переменные: $\begin{matrix} x=2y, \\ 4y-3y-7=0. \end{matrix}$ => $\begin{matrix} x=2y, \\ y=7. \end{matrix}$ => $\begin{matrix} x=14, \\ y=7. \end{matrix}$ **Ответ:** $14;7$.

Задача 3 (8 класс, С.М. Никольский).

Решить систему уравнений: $\begin{matrix} xy=5, \\ x-y=0. \end{matrix}$

Комментарий: выразим переменные в каждом уравнении $\begin{matrix} x^2=5, \\ x=y. \end{matrix}$

Ответ: $\sqrt{5};\ \sqrt{5}$; $-\sqrt{5};-\sqrt{5}$.

Так же мы обратили внимание что у С.М. Никольского в 8 классе отсутствуют сложные однородные системы.

Задача 4 (8 класс, Ю.М. Колягин).

Решить систему уравнений: $\begin{matrix} x^2-y^2=0, \\ 4+xy=0. \end{matrix}$

Комментарий: выразим переменную x во втором уравнении системы уравнений и умножаем первое уравнений на y^2 (отметим, что $y\neq 0$):

$$\begin{cases} 16 - y^4 = 0, \\ x = -\dfrac{4}{y}, \\ y \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - y \quad 2 + y \quad 4 + y^2 \quad = 0, \\ x = -\dfrac{4}{y}, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

$4 + y^2 = 0$ не имеет решений. Не будем рассматривать это выражение в поиске корней. Находим значения y в первом уравнении и подставляем во второе. Условие третьего неравенства соблюдается всегда, поэтому имеем:

$$y_{1,2} = \pm 2, x_{1,2} = \mp 2$$

Ответ: $2;-2$; $-2;2$.

Задача 5 (9 класс, Ю.Н. Макарычев).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

Задача 6 (9 класс, Г.В. Дорофеев).

Решить систему уравнений: $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 6y = 0. \end{cases}$

4. Симметрические системы.

Это такие системы, при замене в которых x на y, система не меняется.

$$\begin{cases} P \; x, y \; = 0, \\ Q \; x, y \; = 0. \end{cases}$$

Где левая часть – симметрические многочлены от x и y: $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$

Эта система является простейшей такого вида.

Для решения большинства сложных симметрических систем применяется замена переменных из простейшей симметрической системы уравнений: $x + y = u$, $xy = v$.

Как и при изучении предыдущих типов систем уравнений мы начали с учебников 7 класса. Учебники, к которым мы обращались ранее, не содержат примеров, содержащих симметрические системы.

В 8 классе уже можно встретить симметрические системы. Проиллюстрируем примерами два часто встречающихся случая в учебнике С.М. Никольского.

Задача 1 (8 класс, С.М. Никольский).

Решить систему уравнений: $\begin{gathered} x+y=3, \\ xy=0. \end{gathered}$

Комментарий: если вместо x мы подставим y, и наоборот, то система не изменится – значит, данная система уравнений симметрическая.

Чтобы её решить, выразим в первом уравнении одну из переменных, а значение подставим во втором: $\begin{gathered} y=3-x, \\ x\ \ 3-x\ \ =0. \end{gathered}$

Находим решения второго уравнения, каждое из решений подставляем в первое и получим две пары чисел $x_1;y_1$, $(x_2;y_2)$. Обе пары чисел будут искомыми решениями системы: $x_1=0, x_2=3$; $y_1=3, y_2=0$.

Ответ: $0;3$; $3;0$.

На данный тип систем уравнений в учебнике алгебры 8 класса С.М. Никольского приводится довольно много задач на отработку решения симметрических систем уравнений. Однако, в его учебнике нет симметрических систем уравнений, содержащих уравнения второй степени.

Такие системы, встречаются почти с самых первых примеров в учебнике алгебры 8 класса Колягина Ю.М.

Задача 2 (8 класс, Ю.М. Колягин).

Решить систему уравнений: $\begin{gathered} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{gathered}$

Комментарий к решению задачи приведён в Приложении 4.

Ответ: $-4;-3$; $-3;-4$; $3;4$;$(4;3)$.

Приведём примеры из учебников алгебры 9 класса.

Задание 3 (9 класс, Ю.Н. Макарычев).

Решить систему уравнений: $\begin{gathered} x^2+y^2=5, \\ x+y=-3. \end{gathered}$

Задание 4 (9 класс, Г.В. Дорофеев).

Решить систему уравнений: $\begin{gathered} x^2+y^2=101, \\ x+y=11. \end{gathered}$

Симметрические системы, содержащие квадратичные уравнения имеют несколько общих видов и решаются по определённой схеме.

Таким образом, в этом параграфе нами выделены основные виды систем уравнений и выявлены методы их решения.

Выводы по первой главе

Подводя итоги по первой главе, отметим, что было раскрыто содержание темы «Системы алгебраических уравнений» в курсе математики основной школы и выполнены следующие поставленные задачи исследования:

1. Определено понятие логико-математического анализа содержания темы «Системы алгебраических уравнений», рассмотренное с учетом подходов Н.Л. Стефановой и Е.И. Лященко. Так же было выделено понятие логико-дидактического анализа тем школьного курса математики, которое тесно связано с понятием их логико-математического анализа. Выделены их отличия.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения системам алгебраических уравнений в курсе математики основной школы. Были рассмотрены федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования и сборник рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой.

3. Представлены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе математики основной школы.

4. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Системы алгебраических уравнений» в учебниках алгебры 7-9 классов основной школы. Описана типология заданий в учебниках разных авторов.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Формы, методы и средства обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы

В этом параграфе нашей задачей станет рассмотрение форм, методов и средств обучения теме исследования, как и сказано в его названии. Но прежде всего, важно определить сами понятия ***формы***, ***методы*** и ***средства*** обучения.

К примеру, важность форм обучения заключается в том, что деятельность ученика в процессе обучения всегда осуществляется в тех или иных формах обучения. И что же такое форма обучения? Б. Т. Лихачев в своём учебном пособии [8] говорит, что «форма обучения представляет собой целенаправленную, четко организованную, содержательно насыщенную и методически оснащенную систему познавательного и воспитательного общения, взаимодействия, отношений учителя и учащихся… результатом этого взаимодействия является профессиональное совершенствование учителя, усвоение детьми знаний, умений и навыков, развитие их психических процессов и нравственных качеств». Помимо этого определения мы встречали и другие, например, формы обучения, как виды учебных занятий, способы, с помощью которых можно организовать учебную деятельность школьников и которые направлены на то, чтобы ученики в полной мере овладели знаниями, навыками и умениями. Другими словами, определение не одно и в разных источник трактуется по-разному.

В современной дидактике сложились три основные формы учебной деятельности на уроке: фронтальная, индивидуальная и групповая [28].

Учитель Е.Е. Алексеева упоминает, что при обучении теме «Системы уравнений» в 7 классе на различных типах занятий (введение нового материала, контроль и т.д.) ею также были применены различные формы обучения в ходе преподавания - фронтальная, индивидуальная, групповая.

Фронтальная форма обучения предполагает, что учитель руководит учебной деятельностью всего класса, перед которым поставлена одна или несколько общих задач, также он устанавливает единый для всех обучающихся темп работы. Это в свою очередь имеет недостаток – так как данный темп ориентирован на среднего школьника, некоторые обучающиеся («слабые») отстают от заданного темпа, другие («сильные») выполняют задание быстрее остальных, таким образом, у них остается свободное время.

Индивидуальная форма обучения используется с целью оптимальной занятости обучающихся на уроке. Так данная форма не предполагает взаимодействия школьников друг с другом, а подразумевает самостоятельное выполнение на уроке одинаковых заданий для всего класса.

Групповая форма обучения предусматривает, что учитель организует и управляет деятельностью нескольких групп класса. В данные учебные группы входят обучающиеся с различными способностями, что определяет наиболее плодотворный обмен информацией по теме урока. Учитель руководит данными группами непосредственно, а также опосредованно через помощников, назначенных им же. В ходе урока школьники работают самостоятельно, в группе проводятся обсуждения по теме урока и взаимопроверка результатов, при необходимости преподаватель дает группе указания по заданию.

Автор статей учитель В.И. Мохова характеризует *коллективный способ обучения*, как форму обучения, включающую в себя взаимодействие нескольких организационных форм: индивидуальную, парную, групповую и коллективную. Обучение осуществляется путем общения в динамических парах (парах сменного состава), когда каждый учит каждого, то есть все обучающиеся по очереди выполняют функции учителя.

В основу коллективного способа обучения автор включает следующие принципы: стремление достичь высоких конечных результатов; непрерывная передача друг другу полученных знаний; взаимовыгодные деловые отношения между учениками; дифференцированный способ работы: каждый работает в меру своих возможностей и способностей.

М.Е. Пенькова – автор статьи «Алгоритмы в математике», иллюстрирует пример *индивидуальной формы* обучения. Учитель демонстрирует алгоритм работы с системой для ответа на вопрос «Сколько решений имеет система?», после чего даёт детям самостоятельно выполнить некоторые задания по теме, используя данный алгоритм [21].

Е.А. Слабченко в статье «Активные формы обучения на уроках математики» акцентирует внимание на *Групповую форму*. С помощью математико-патриотической игры она вовлекает в урок детей, дав им настрой на достижение победы, работая в команде. Решая математические задания, где так же отрабатываются и знания по теме «Системы уравнений», дети находят разгадки, которые продвигают команду к победе [26].

Фронтальная форма – та форма, которая является ведущей на уроке учителя математики Н.В. Стрельца «Решение задач с помощью систем уравнений» (по мотивам задач из литературных произведений). Учитель с помощью задач из литературных произведений вовлекает в работу класс и курирует занятие таким образом, чтобы ученики как отрабатывали знания по теме, так и развивались в другой дисциплине – литературе. Сочетание получилось необычным и интересным.

Рассмотрим разнообразные классификации методов и выделим одну из них, оптимально подходящую для использования в педагогической практике и обеспечения эффективности обучающе-познавательного процесса.

Б.Т. Лихачёв [8] выделяет следующие классификации по: соответствию методов обучения логике общественно-исторического познания; соответствию методов обучения специфике изучаемого материала и форм мышления; их роли и значению в развитии сущностных сил, психических процессов, духовно-творческой активности; их соответствию возрастным особенностям детей; способам передачи и получения информации; степени эффективности их идейно-воспитательного воздействия; основным этапам обучающе-познавательного процесса.

В соответствии с основными этапами обучения вычленяются следующие группы методов обучения: **методы этапа восприятия первичного усвоения**; методы этапа **усвоения-воспроизведения**, в состав которых входят методы собственно воспроизведения, закрепления, диагностики и получения обратной информации; методы этапа **учебно-творческого выражения**. Эти поэтапные группы методов обучения, индивидуально освоенные учителем, становятся основой его творческой методической системы.

Отметим, что методы всех трех этапов обучающего познания (восприятия-усвоения, усвоения-воспроизведения, воспроизведения-выражения) взаимосвязаны между собой и в живом обучающем процессе вступают в активное, взаимодополняющее взаимодействие; они обретают специфику в процессе преподавания науки, в изучении явлений искусства, в освоении трудовых процессов; эффективность методов возрастает, когда в методическом взаимодействии учителей и учащихся используются технические средства обучения, обучающие машины; в целях повышения обучающе-воспитательной эффективности методов обучения, их адаптации к собственной индивидуальности и особенностям детского коллектива каждый учитель создает из них свою творческую, глубоко продуманную и прочувствованную методическую систему.

Кроме того, по характеру учебно-познавательной деятельности и организации содержания материала Г.И. Саранцевым выделены следующие методы обучения: индуктивно-репродуктивный, индуктивно-эвристический, индуктивно-исследовательский, дедуктивно-репродуктивный, дедуктивно-эвристический, дедуктивно-исследовательский, обобщённо-репродуктивный, обобщённо-эвристический, обобщённо-исследовательский.

Процессы обучения и воспитания представляют собой сложные системы взаимодействия: учитель – метод – знания, личный опыт общественных отношений – способы самовоспитания [8].

Методы обучения тесно связаны со средствами обучения. Чаще всего в понятие *средства обучения* включают учебные, а также наглядные пособия, технические средства, демонстрационные устройства и так далее [13].

При разумном использовании на уроке разнообразных средств обучения обучающимся легче воспринимать и усваивать математические знания. В противном случае, при слишком частом их использовании, у обучающегося может произойти задержка развития абстрактного мышления, а также привести к затруднению решения задачи, которая требует развитого пространственного представления.

Классификация средств обучения подразделяется на: зрительные (наглядные) такие как: учебники и учебные пособия, раздаточный материал, плакаты, чертежи, таблицы и так далее; слуховые (аудиальные) средства; зрительно-слуховые (аудиовизуальные) средства: мультимедийные учебники, слайды, компьютеры, учебные фильмы и так далее.

Как отмечает В.А. Сластенин [27], подбор средств обучения для урока зависит, прежде всего, от целей, поставленных учителем на уроке, методов учебной работы, также возраста обучающихся, а не только от материальной оснащенности школы.

В алгебре наиболее распространены визуальные средства, например, *презентации*. Как известно, на уроке математики важной частью является не только изложение учителем нового материала, но и заинтересованность каждого обучающегося в получении данных знаний.

Опытный учитель никогда не будет придерживаться одного какого-либо метода обучения. Использование того или иного метода, а иногда и применение нескольких методов на протяжении урока, будет зависеть от характера темы или разбираемого вопроса, также от подготовленности обучающихся по данному предмету, от наличия предоставляемого времени для изучения темы.

Поэтому стоит помнить, что комплексное использование методов обучения на уроке поможет разнообразить учебно-познавательную деятельность. Это поспособствует привлечению обучающихся к активному участию в поиске решения задачи, самостоятельного вывода, доказательства и так далее.

Таким образом, знания обучающихся окажутся более прочными и сознательными, если они будут приобретаться в процессе активной учебно-познавательной деятельности, а не только путем пассивного восприятия.

При обучении решению задач по теме «Системы уравнений» в курсе алгебры основной школы могут использоваться все три формы обучения, как в отдельности, так и в совокупности. Например, фронтальная форма, чаще всего, применяется на первом уроке при введении нового материала. К индивидуальной и групповой формам обучения учителя обращаются при отработке умений и навыков по теме «Методы решения систем уравнений», при решении задач на первом и последующих уроках, в ходе самостоятельной работы.

Все вышеперечисленные в этом параграфе методы обучения также могут использоваться на уроках по теме «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций». Они делают урок разнообразнее и интереснее. В свою очередь, наглядные средства обучения облегчают восприятие и усвоение учениками материала по данной теме.

§6. Методические рекомендации по обучению теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы

Изучив теоретический и задачный материалы в первой главе, нами было установлено, что учебник алгебры А.Г. Мордковича наиболее полно раскрывает тему «Системы уравнений». Обратимся к методической литературе по его учебникам [23-25].

В 7 классе, по словам автора А.Н. Рурукина, тема «Системы уравнений» вводится на 28 уроке. Первые два занятия по данной теме должны быть посвящены введению в тему и изучению основных понятий. Автор выделяет, что целью этих первых занятий должно быть введение понятия о системе двух линейных уравнений и её решений.

Ход уроков, как отмечает автор, должен быть следующим: 1. Сообщение темы и цели уроков; 2. Изучение нового материала; 3. Задание на уроках;
4. Контрольные вопросы; 5. Задание на дом; 6. Творческие задания; 7. Подведение итогов уроков.

В начале урока, как отмечается автором [23], следует напомнить о понятиях **линейного уравнения с двумя переменными**, где в равенстве $ax + +by + c = 0$ $a \neq 0, b \neq 0$ $x, y -$ переменные (неизвестные). Пара чисел $(x; y)$, обращающая $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство, называется **решением уравнения**. **График** линейного уравнения $ax + by + c = 0$ является **прямой линией**, а координаты любой точки на этой прямой будут решением данного уравнения.

Далее вводится само новое понятие **системы двух линейных уравнений**. Пара чисел $x; y$, которая одновременно удовлетворяет первому и второму уравнениям в системе $\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{matrix}$ называется **решением системы уравнений**.

После этого автор в методической литературе к учебнику А.Г. Мордковича [23, С. 92-94] рекомендует рассмотреть следующие примеры:

Пример 1 [23, С. 92]. Решить систему уравнений: $\begin{matrix} 2x - y - 3 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{matrix}$

Комментарий к решению приведён в Приложении 4.

Далее, ***Примерах 2-4*** предлагается рассмотреть системы уравнений с параметром.

Пример 2 [23, С. 93]. При каких значениях a система уравнений имеет единственное решение: $\begin{matrix} 2a - 1\ \ x + 3y = 7a + 1, \\ a + 2\ \ x + 2y = 5a - 3. \end{matrix}$

Комментарий: чтобы найти это значение параметра a, следует воспользоваться схемой (пунктом 1), которая была выделена выше. Следует записать условие единственности решения и решить пропорцию: $\frac{2a-1}{a+2} \neq \frac{3}{2}$.

Используя свойство пропорции, выясняем, что $a \neq 8.$ Тогда, данная система имеет единственное решение при всех значениях a, кроме $a = 8$.

Пример 3 [23, С. 94]. При каких значениях a система уравнений несовместна: $\begin{matrix} 2a - 1\ \ x + 3y = 7a + 1, \\ 2a + 1\ \ x + 5y = 5a - 3. \end{matrix}$

Комментарий: способ тот же – записываем условие несовместности системы из первого примера: $\frac{2a-1}{2a+1} = \frac{3}{5} \neq \frac{7a+1}{5a-3}$, применяя свойство пропорции выясняем, что при $a = 2$, данная система является несовместной.

Пример 4 [23, С. 94]. При каких значениях a система уравнений неопределенна: $\begin{matrix} 2a - 1\ \ x + 3y = 7a + 1, \\ a + 1\ \ x + 6y = 11a + 5. \end{matrix}$

Комментарий: как и в предыдущих примерах, записываем условие, которое нужно проверить (условие неопределённости): $\frac{2a-1}{a+1} = \frac{3}{6} = \frac{7a+1}{11a+5}$ и решаем пропорцию. При $a = 1$, данная система неопределённа.

На уроках рекомендуется выполнить следующие номера из задачника 7 класса А.Г. Мордковича: № 11.1 (а, в); 11.3 (а); 11.6; 11.9 (а, в); 11.11 (б); 11.14 (в); 11.16 (а); 11.17 (б); 11.18 (в); 11.20 (а).

Автор предлагает список контрольных вопросов, которые следует задать перед подведением итогов урока. 1. Понятие решения системы уравнений с двумя переменными. 2. Что значит решить систему уравнений? 3. Количество решений системы уравнений, и способы их определения. 4. Общий вид системы линейных уравнений с двумя переменными. 5. Условие единственности. 6. Условие несовместности. 7. Условие неопределённости.

Задание на дом: № 11.1 (б, г); 11.3 (б); 11.7; 11.9 (б, г); 11.11 (г); 11.14 (б); 11.16 (б); 11.17 (а); 11.18 (г); 11.20 (б).

Далее приводится список творческих заданий и в конце следует подвести итоги урока.

Уроки 30-32 – на них изучаются методы решения систем уравнений. Методы подстановки и алгебраического сложения. Цели этих уроков так и звучат – рассмотреть способ подстановки/алгебраического сложения для решения систем уравнений.

На 30 уроке после повторения пройденного материала и проверки домашнего задания, вводится новый материал – во-первых, А.Н. Рурукин сразу говорит о введении понятия **равносильных систем уравнений** – это те системы уравнений, которые имеют одни и те же решения или не имеют решений.

Пример 1 [23, С. 97].

а) две системы уравнений $\begin{array}{r} 2x+3y=7, \\ 4x+5y=13. \end{array}$ и $\begin{array}{r} 3x-2y=4, \\ 7x-9y=5. \end{array}$ равносильны, т.к. имеют одно и то же решение (2; 1);

б) две системы уравнений $\begin{array}{r} 3x-2y=5, \\ -6x+4y=7. \end{array}$ и $\begin{array}{r} 2x+5y=6, \\ -4x-10y=8. \end{array}$ равносильны, т.к. каждая из них не имеет решений.

С помощью преобразований, систему уравнений заменяют более простой, равносильной системой, для нахождения её решений. Способ подстановки – один из распространённых способов решения системы уравнений. Автор предлагает пример, где рассматривается этот случай.

Пример 2 [23, С. 97]. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases}$

Комментарий: выражаем из первого уравнения переменную y и подставим её значение во второе уравнение. Получим вторую систему уравнений, равносильную первой. В ней появится уравнение с одной переменной, откуда: $x = 1$. Подставляем это значение в оставшееся уравнение и находим значение y. Пара чисел $(1; 2)$ – решение обеих систем уравнений, так как они равносильные. Данный способ называется **методом подстановки.**

Автор рассматриваемой методической литературы [23] предоставляет даже алгоритм, которым можно воспользоваться для **решения системы уравнений методом подстановки**: выражение из одного уравнения системы одну переменную через другую; подстановка полученного выражения вместо переменной в другом уравнении; решение полученного уравнения с одной переменной; нахождение соответствующего значения второй переменной; запись решения системы уравнений (найденной пары чисел).

Пример 3 [23, С. 98]**.** Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 2x - 5y = 3. \end{cases}$

Комментарий: одна из переменных выражается через вторую, а далее по вышеприведённому алгоритму находим решение – $\left(\frac{37}{23}; \frac{1}{23}\right)$. Отмечается, что данным способом решается и система уравнений с параметром.

Пример 4 [23, С. 98]. При каких значениях параметра a решением системы уравнений будет неотрицательная пара чисел: $\begin{cases} 2x - y = -3, \\ 3x + 2y = 7a - 1. \end{cases}$

Комментарий: по тому же алгоритму работаем с этой системой и находим, что при $a \geq 1$ пара чисел является неотрицательной.

Задание на урок: № 12.2 (а, г); 12.7 (а, б); 12.10 (в, г); 12.12; 12.16 (а, г); 12.21 (в); 12.22 (г); 12.24; 12.26 (б); 12.27 (а); 12.28 (в).

Контрольные вопросы: Определение равносильных систем уравнений. Суть метода подстановки в решении системы уравнений.

Задание на дом: № 12.2 (б, в); 12.7 (в, г); 12.10 (а, б); 12.13; 12.16 (б, в); 12.21 (г); 12.22 (в); 12.25; 12.26 (а); 12.27 (б); 12.28 (г).

Так же творческие задания представлены списком, в данной литературе [23, С. 99], после которых следует подведение итогов.

Занятия 31-32 – уроки на которых по методической литературе идёт изучение следующего метода решения систем уравнений (метода алгебраического сложения).

Так же после сообщения темы и цели урока учитель должен повторить закреплённый ранее материал. Далее так же вводится новый материал, **способ сложения – метод решения системы уравнений, при котором система заменяется равносильной, где одно из уравнений содержит только одну переменную**.

И так же, как на предыдущих уроках автор предлагает примеры, с которых следует начать изучение этого метода:

Пример 1 [23, С. 100]. Решить систему уравнений: $\begin{matrix} 3x+2y=8, \\ 4x-2y=6. \end{matrix}$

Комментарий: сложив коэффициенты при переменных x, y получим новую систему, которая дальше будет решена методом подстановки: $\begin{matrix} 7x=14, \\ 4x-2y=6. \end{matrix}$ Две эти системы равносильны, значит решение одной из них станет и решением другой.

Пример 2 [23, С. 101]. Решить систему уравнений: $\begin{matrix} 3x-5y=9, \\ 2x-7y=17. \end{matrix}$

Комментарий: для решения этой системы методом сложения нужно будет умножить уравнения на такие числа, чтобы какие-нибудь два коэффициента были противоположными.

Пример 3 [23, С. 101]. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 6x + 5y = 7, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$

Пример 4 [23, С. 102]. При каких значениях параметра a величина $2x_0 + y_0 \geq 0$ в системе уравнений: $\begin{cases} 2x + 3y = 5a + 4, \\ 4x + 5y = 9a + 6. \end{cases}$

Далее по задачнику А.Г. Мордковича рекомендуется выполнить на уроке следующие задания: № 13.2 (а); 13.5 (в); 13.9 (а, г); 13.12 (а); 13.13 (г); 13.15 (б); 13.16 (а); 13.17 (б); 13.18 (а).

Контрольные вопросы, рекомендованные автором перед подведением итогов занятия: Главная задача при решении систем методом сложения. Пояснить на примере, как решать систему уравнений методом сложения.

Задание на дом: № 13.2 (б); 13.5 (а); 13.9 (б, в); 13.12 (б); 13.13 (в); 13.15 (г); 13.16 (б); 13.17 (а); 13.18 (б).

Список творческих заданий и подведение итогов занятий последние пункты в проведении уроков.

Итоги изучения данной темы автор рекомендует проводить с помощью контрольной работы и зачёта, которые проводятся после двух уроков, на которых решаются текстовые задачи по теме «системы уравнений».

Зачётная работа, в рассматриваемом поурочном планировании [23, С. 116], представлена следующим образом: два равносильных варианта, задания в которых разделены на «блоки сложности» – А, В и С. За все выполненные задания можно получить определённое количество баллов. Оценки соответственно ставятся в соответствии с набранными баллами.

Далее в 8 классе, как мы и писали ранее в первой главе, тема систем уравнений в учебнике А.Г. Мордковича не расширяется. Линия уравнений в 8 классе и по поурочному планированию к этому учебнику [24] посвящается изучению квадратичных уравнений, иррациональных уравнений и методам их решения.

Поэтому переходим к рассмотрению поурочных разработок А.Н. Рурукина, И.А. Масленниковой и Т.Г. Мишиной по учебнику А.Г.

Мордковича 9 класса [25] Согласно авторам, уроки 17-20 должны быть посвящены повторению знаний об уравнениях с двумя переменными, о видах и типах уравнений, изученных в 8 классе и их системах.

Введение нового, для девятого класса, материала начинается на 21-22 уроках, цель которых рассмотреть способы решения нелинейных систем уравнений. В данном поурочном планировании говорится, что для решения систем нелинейных уравнений, используются три основных метода.

К уже известным методам подстановки и алгебраического сложения теперь добавляется метод введения новой переменной. Проиллюстрируем примером из рассматриваемой методической литературы метод введения новой переменной, так как он является новым в 9 классе для решения систем уравнений.

Пример 1 [25, С. 86]. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 5\frac{2x-y}{x+y}+4\frac{x+y}{2x-y}=9, \\ 3x^2-15y^2=-33. \end{cases}$

Комментарий к решению приведён в Приложении 4.

Авторы поурочного планирования по учебнику А.Г. Мордковича 9 класса [25], как и в методической литературе 7 и 8 классов, предлагают **Контрольные вопросы**, **Задания на урок** и **Задания на дом** перед подведением итогов занятия.

Контрольные вопросы: Описание метода подстановки для решения нелинейных систем уравнений. Описание метода алгебраического сложения для решения нелинейных систем уравнений. Описание метода введения новой переменной для решения нелинейных систем уравнений.

Задания на уроках: № 6.1 (б); 6.3 (а); 6.5 (б); 6.7 (а, г); 6.8 (б); 6.9 (г); 6.10 (б); 6.13 (а); 6.14 (в); 6.15 (а); 6.16 (б); 6.20 (а); 6.21 (б); 6.22 (а); 6.23 (б).

Задания на дом: № 6.1 (г); 6.3 (б); 6.5 (г); 6.7 (б, в); 6.8 (г); 6.9 (б); 6.10 (г); 6.13 (б); 6.14 (г); 6.15 (б); 6.16 (г); 6.20 (б); 6.21 (в); 6.22 (б); 6.23 (а).

Подведем итоги по изучению темы «системы уравнений» в 7-9 классах. В 9 классе тема заканчивается на стандартной контрольной работе и зачёте, которым предшествуют уроки 23-24 «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций». И так же предшествуют уроки 25-26, на которых закрепляются знания о системах уравнений, путём систематизации их типов.

Хотелось бы выделить схему, применяемую для решения текстовых задач и систематизация типов систем уравнений, представляющую собой следующее поэтапное разделение: первый этап – составление математической модели; второй этап – работа с составленной моделью; третий этап – ответ на вопрос задачи.

Далее приводятся примеры от авторов, на которых можно рассмотреть данную схему. Отметим, что авторы приводят удобные пояснения по каждому примеру, в решении самих задания и в описании отдельных этапов.

Задания на уроках: № 7.1, 7.5, 7.12, 7.16, 7.18, 7.22, 7.29, 7.38, 7.44, 7.49.

Задания на дом: № 7.2, 7.8, 7.13, 7.17, 7.19, 7.23, 7.30, 7.39, 7.45, 7.50.

Представим типы систем уравнений, выделенные в учебнике А.Г. Мордковича 9 класса. В конце уроков 25-26 («Основные типы систем уравнений») приводятся только творческие задания [25, С. 103].

Типы систем нелинейных уравнений [25]: *системы, содержащие одно линейное уравнение; системы, которые с помощью замен сводятся к линейным; однородные системы; симметричные системы.*

Завершая параграф, проведём анализ статьи учителя математики А.В. Забелина [6].

Как говорит А.В. Забелин, сейчас умение ориентироваться в информации – один из важнейших навыков для ученика. Конкретно умение получать знания, анализировать и т.п. составляют этот навык. На материале темы «Системы уравнений» А.В. Забелин рассматривает один из приёмов, для работы с данной темой. Автор статьи говорит, что при этом закладывается такое качество знаний, как обобщенность.

С основными общими методами решения систем уравнений учеников знакомят уже в 7 классе. Автор статьи выделяет метод подстановки, метод сложения и метод уравнивания коэффициентов. На материале темы «Системы рациональных уравнений» обычно предполагается отработка тех же методов, но с целью научить школьников применять их в решении систем другого вида. Так же в учебниках математики 8-9 классов встречается и введение дополнительных методов в ходе изучения темы.

А.В. Забелин говорит в своей статье, что в реальной практике ученик должен сам выбрать, каким способом будет решать данную ему систему. По словам автора, анализ методической литературы показал, что в ней (методической литературе) процесс анализа системы и выбора более удобного способа решения не является предметом специального усвоения. Проблема в том, что вместо этого ученик упражняется в применении изученных методов к конкретной данной ему системе. Как результат, ученик не всегда владеет полной системой знаний и умений, с помощью которых можно построить наиболее эффективный способ решения заданной системы.

Автор в своей статье описывает такую систему, в которой он с коллегами предпринял попытку сформировать те самые знания и умения, которых, по его словам, не хватает при изучении темы «Системы уравнений».

Так как одним из компонентов является анализ заданной системы на наличие решений, то один из первых уроков автор рекомендует посвятить именно этому вопросу. Так же выделены общие приёмы решения, которые автор связывает со школьными методами. Подводя итог отметим принципы, по которым строится система знаний в данной статье: порядок заданий фиксирован, он выполняет направляющую функцию; каждая следующая система связана с предыдущими заданиями и рассуждениями, но в своих нескольких идеях несёт логическое развитие темы; переменные в системах варьируются; помимо заданий, где система уравнений задана, предлагаются и творческие задания, связанные с придумыванием тех или иных систем.

§7. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Изучив Банк заданий и сборники заданий ОГЭ [30], мы выделили некоторые типы задач по теме исследования, встречающиеся на сайте Федерального института педагогических измерений.

В первой части ОГЭ системы уравнений встречаются в заданиях, где от учащегося требуется непосредственно решить ту или иную систему уравнений. Во второй же части – это задачи, где от учащегося требуется составить и решить систему уравнений.

Теперь подробнее рассмотрим типы систем уравнений, встречающихся в *первой части* ОГЭ:

1. Системы уравнений с двумя переменными, содержащие в каждом из уравнений одну переменную второй степени:

Задание 1. Решить систему уравнений: $\begin{matrix} 3x^2 + y = 6, \\ 4x^2 - y = 1. \end{matrix}$

Решение: Для решения этой системы уравнений можно применить *метод алгебраического сложения*, чтобы избавиться от одной переменной. Тогда, нам останется решить уравнение: $7x^2 = 7; x_{1,2} = \pm 1$. Подставим полученные значения в одно из уравнений исходной системы и найдём значения второй переменной y: $y_{1,2} = 3$. **Ответ:** $-1;3\ ,\ 1;3$.

Задание 2. Решить систему уравнений: $\begin{matrix} 3x^2 - y = 11, \\ 2x^2 + y = 9. \end{matrix}$

Решение: Точно так же, как и в первом примере эта система решается *методом алгебраического сложения*. Избавившись от одной переменной, мы находим значение другой: $5x^2 = 20; x_{1,2} = \pm 2$. Подставим полученные значения в одно из уравнений исходной системы и найдём значения второй переменной y. **Ответ:** $-2;1$, $2;1$.

2. *Системы уравнений с двумя переменными, содержащие одно из уравнений второй степени и уравнения, в которых одна из переменных выражена через другую:*

Задание 1. Решить систему уравнений: $$\begin{aligned} 3x^2 - 2x &= y, \\ 3x - 2 &= y. \end{aligned}$$

Так как одна переменная уже выражена, то удобнее всего будет применить *метод подстановки* для решения этой системы. Тогда, первое уравнение будет представлять собой квадратичное уравнение с одной переменной: $3x^2 - 2x = 3x - 2$. Находим корни с помощью дискриминанта: $3x^2 - 5x + 2 = 0$; $D = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$; $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 1$.

Так же, как и в предыдущих примерах, подставим эти значения в одно из уравнений системы (удобнее будет подставить во второе уравнение) и найдём значения второй переменной y. **Ответ:** $\frac{2}{3};0$, $2;4$.

Задание 2. Решить систему уравнений: $$\begin{aligned} 2x^2 - 5x &= y, \\ 2x - 5 &= y. \end{aligned}$$

Снова, после применения *метода алгебраического сложения*, первое уравнение будет представлять собой квадратичное уравнение с одной переменной: $2x^2 - 5x = 2x - 5$. Корни равнения $2x^2 - 7x + 5 = 0$: $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{2}$. Подставляем значения x в одно из уравнений и находим значения второй переменной y. **Ответ:** $1;-3$, $\frac{5}{2};0$.

3. *Системы уравнений с двумя переменными, содержащие уравнения второй степени:*

Задание 1. Решить систему уравнений: $$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 31, \\ 2x^2 + 6y^2 &= 31x. \end{aligned}$$

Выразим из первого уравнения x^2 и подставим значение во второе уравнение, т.е. решим систему уравнений *методом подстановки*. Тогда, второе уравнение будет представлено в следующем виде: $2\ \ -3y^2+31\ \ +6y^2=31x$, откуда: $x=2$. Подставим полученное значение в первое уравнение, и найдём все значения y: $y_{1,2}=\pm 3$. **Ответ:** $2;-3\ \ ,\ \ 2;3\ \ .$

Задание 2. Решить систему уравнений: $\begin{matrix} 2x^2+y^2=36, \\ 8x^2+4y^2=36x. \end{matrix}$

В этой системе уравнений нужно выразить переменную y^2 в первом уравнении. И, применив *метод подстановки*, запишем второе уравнение в следующем виде: $8x^2+4\ \ -2x^2+36\ \ =36x$. Подставим полученное значение $x=4$ в первое уравнение, и найдём все значения y: $y_{1,2}=\pm 2$.

Ответ: $4;-2\ \ ,\ \ 4;2\ \ .$

Кроме того, рассмотрим несколько примеров заданий на системы уравнений из *второй части ОГЭ*:

Задание 1. Решить уравнение: $x^2-25\ \ ^2+\ \ x^2+3x-10\ \ ^2=0.$

Решение: как известно, квадрат любого числа – неотрицательное число. Сумма двух таких чисел равно нулю, если только оба эти числа равны одновременно равны нулю. Тогда, данное *уравнение сводится к* следующей *системе*: $\begin{matrix} x^2-25=0, \\ x^2+3x-10=0. \end{matrix}$ Из первого уравнения получаем, что: $x_{1,2}=\pm 5$. Из второго: $x^2+3x-10=0$, откуда $x_3=-5, x_4=2$. Решением системы уравнений является такое значение, которое одновременно удовлетворяет всем уравнениям системы. $x=-5$ как раз и является таким значением.

Ответ: -5.

Задание 2. Решить уравнение: $\frac{2x^2+7x+3}{x^2-9}=1.$

Решение: уравнение равносильно следующей системе: $\frac{2x^2+7x+3}{x^2-9} = 1,$ $x^2 - 9 \neq 0.$

Которая, в свою очередь, может быть представлена в виде: $x^2 + 7x + 12 = 0,$
$x \neq -3,$
$x \neq 3.$

Решаем первое уравнение в системе: $x^2 + 7x + 12 = 0$, откуда: $x_1 = -4, x_2 = -3.$ Важно учесть условие в системе, что $x \neq -3.$ **Ответ:** -4.

Подводя итоги, покажем выделенные *типы систем уравнений* в заданиях ОГЭ: системы уравнений с двумя переменными, содержащие в каждом из уравнений одну переменную второй степени; системы уравнений с двумя переменными, содержащие одно из уравнений второй степени и уравнения, в которых одна из переменных выражена через другую; системы уравнений с двумя переменными, содержащие уравнения второй степени.

Задания первой части ОГЭ направлены, в основном, на отработку методов подстановки и алгебраического сложения. Задания на системы уравнений из второй части ОГЭ направлены на проверку более глубоких знаний учащихся по данной теме. Так, от учащихся требуется не просто знать и применять методы решения систем уравнений, но также и проводить анализ текста задания. К примеру, не все задания второй части подразумевают под собой применение знаний по теме «Системы уравнений».

Следует отметить, что в первой главе мы выделяли типологию заданий и виды систем уравнений. В данном параграфе видно, что напрямую связи с типологией заданий из учебников не прослеживается. Задания на тему «Системы уравнений» могут и вовсе не встретиться в первой части, а быть заменены, к примеру, на системы неравенств. Но исследовав банк заданий [30], можно сказать, что, если системы уравнений и встречаются в варианте ОГЭ, то они будут соответствовать одному из трёх выделенных выше типов.

Говоря о второй части ОГЭ, и вовсе нельзя говорить о какой-либо типологии заданий или видах систем уравнений, так как некоторые можно решить, как используя системы уравнений, так и решить без их применения.

§8. Системы задач по теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы

К системам задач существуют различные требования.

В учебном пособии Е.И. Лященко [9] выделены требования к системам задач на усвоение понятия и его определения, на усвоение теоремы и ее доказательства, на усвоение правил.

Г.И. Саранцев приводит требования к системам задач на формирование понятий, на усвоение теоремы и ее доказательства.

Л.В. Виноградова в учебном пособии выделяет следующие принципы отбора и составления систем упражнений: Принцип систематичности. В системе задач должны присутствовать упражнения на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного, упражнения, связывающие новый факт с ранее изученным материалом, и упражнения на систематизацию изученного материала. Принцип последовательности. Упражнения располагаются в порядке возрастания сложности: от менее сложного к более сложному. Принцип прочности. Данный принцип проявляется в наличии однотипных упражнений.

С учетом рассмотренных различных требований к системам упражнений, нами были составлены системы задач, удовлетворяющие требованиям Л.В. Виноградовой, на следующие темы: «Линейные системы уравнений», «Квадратичные системы уравнений», «Системы уравнений как модели реальных ситуаций», составленные с учётом методов решения систем уравнений.

Система задач на тему «Линейные системы уравнений»

Метод подстановки

Задача 1 [23, С. 97]. Решить систему уравнений: $\begin{array}{c} 2x + y = 4, \\ 3x - 2y = -1. \end{array}$

Выразим x и y: $\begin{array}{c} y = 4 - 2x, \\ 7x = 7. \end{array}$ Откуда: $x = 1, y = 2$. **Ответ:** $1; 2$.

Задача 2 [23, С. 98]. Решить систему уравнений: $\begin{array}{c} 3x + 4y = 5, \\ 2x - 5y = 3. \end{array}$

В таких задачах, в отличие от первого вида, перед решением системы нужно выразить какую-либо переменную: $\begin{array}{c} x = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}y, \\ y = \frac{1}{23}. \end{array}$ После чего подставляем найденное значение y в первое уравнение системы и находим x.

Ответ: $\frac{37}{23}; \frac{1}{23}$.

Задача 3 [23, С. 98]. Найти значения параметра a, при которых решением системы уравнений $\begin{array}{c} 2x - y = -3, \\ 3x + 2y = 7a - 1 \end{array}$ будет пара неотрицательных чисел. Из уравнения, не содержащего параметр, выражаем переменную, чтобы подставить полученное значение во второе уравнение: $\begin{array}{c} y = 2x + 3, \\ 7x = 7a - 7. \end{array}$ Таким образом имеем, что решением будет всегда пара чисел $a - 1; 2a + 1$.

Заметим, что x при положительных значениях a всегда меньше y. Чтобы решение системы представляло собой неотрицательную пару чисел, достаточно показать, когда неотрицательным будет значение x. Тогда, $a - 1 \geq 0$, откуда $a \geq 1$ – при этих значениях решением будет неотрицательная пара чисел. **Ответ:** при $a \in [1; +\infty)$ – решением системы уравнений является неотрицательная пара чисел.

Метод алгебраического сложения

Задача 4 [23, С. 100]. Решить систему уравнений: $\begin{array}{c} 3x + 2y = 8, \\ 4x - 2y = 6. \end{array}$

После сложения двух уравнений системы, необходимо решить следующее уравнение: $7x = 14$, откуда: $x = 2$. Подставим полученное значение в одно из уравнений системы и найдём значение y. $y = 1$.

Ответ: $2;1$.

Задача 5 [23, С. 101]. Решить систему уравнений: $\begin{array}{c} 3x - 5y = 9, \\ 2x - 7y = 17. \end{array}$

Чтобы избежать больших решений с дробями, как случилось во второй задаче этого параграфа, если они могут вызвать путаницу в ходе решения, то можно уравнять коэффициенты двух переменных в уравнениях системы уравнений: $\begin{array}{c} 6x - 10y = 18, \\ -6x + 21y = -51. \end{array}$ Эта система равносильна исходной, поэтому решив её, мы найдём решение и исходной системы уравнений.

Ответ: $-2;-3$.

Задача 6 [23, С. 102].

Найти значения параметра a, при которых величина $2x_0 + y_0 \geq 0$, где $x_0;y_0$ – решение системы уравнений: $\begin{array}{c} 2x + 3y = 5a + 4, \\ 4x + 5y = 9a + 6. \end{array}$

Применим стратегию из предыдущего номера. Умножим первое уравнение на -2 и сложим уравнения полученной системы. После этого нам нужно будет решить следующее уравнение: $y = a + 2$. Это и есть величина y_0.

Подставив в одно из уравнений исходной системы полученное значение, найдём значение второй переменной, тогда: $2x_0 + y_0 = 2\ a - 1\ +\ a + 2$.

Исходя из вопроса задания, нужно решить следующее неравенство: $2\ a - 1\ +\ a + 2\ \geq 0$. **Ответ:** при $a \in [0;+\infty)$ – условие $2x_0 + y_0 \geq 0$ верно.

Система задач на тему «Квадратичные системы уравнений»

Метод подстановки

Задача 1 [17, С. 69]. Решить систему уравнений: $\begin{array}{c} x + 3y = 5, \\ xy = 2. \end{array}$

Легко выразить переменную x из первого уравнения: $\begin{aligned} x &= -3y + 5, \\ xy &= 2. \end{aligned}$

Тогда, подставив значение x во второе уравнение получаем, что $y = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. После подстановки этих значений в первое уравнение – находим соответствующие значения второй переменной. **Ответ:** $10; -\sqrt{\frac{5}{3}}\ ,\ 0; \sqrt{\frac{5}{3}}\ .$

Задача 2 [25, С. 72] (с методом введения новой переменной).

Решить систему уравнений: $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25, \\ xy &= 12. \end{aligned}$

В этой системе удобнее уже выражать из второго уравнения. Важно отметить, что $y \neq 0$ и тогда: $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25, \\ x &= \frac{12}{y}. \end{aligned}$ После того, как мы подставим выраженное значение во второе уравнение, нам нужно будет решить следующее уравнение: $\frac{12}{y}\ ^2 + y^2 = 25$. Умножим всё уравнение на знаменатель первого слагаемого и введем новую переменную $t = y^2$. Тогда, нам нужно решить теперь такое уравнение: $t^2 - 25t + 144 = 0$. Его корни $t_{1,2} = \frac{25 \pm 7}{2}$. Возвращаясь к старым переменным, имеем: $y_{1,2} = \pm 3, y_{3,4} = \pm 4$.

Подставим полученные значения во второе уравнение последней системы и найдём все решения. **Ответ:** $-4; -3\ ,\ -3; -4\ ,\ 3; 4\ ,\ 4; 3\ .$

Задача 3 [25, С. 84]. При всех значениях параметра a определить число решений системы уравнений (метод подстановки): $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x + y &= a. \end{aligned}$

Как ранее, при использовании метода подстановки, выражаем одну из переменных в более простом уравнении системы: $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x &= a - y. \end{aligned}$ Подставляем полученное выражение в первое уравнение. После подстановки нам нужно будет решить следующее уравнение (относительно y): $a - y\ ^2 + y^2 = 1$. Найдём значение дискриминанта этого уравнения:

$$D = 4a^2 - 8a^2 + 8 = -4a^2 + 8.$$

Число решений будет зависеть от значения дискриминанта. Другими словами, необходимо определить когда $D < 0$; $D = 0$; $D > 0$. Подставляем полученное значение дискриминанта, решаем неравенства и получаем следующий ответ. **Ответ:** при $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ – система уравнений не имеет решений; при $a \in (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ – система уравнений имеет единственное решение; при $a \in (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ – система имеет два решения.

Метод алгебраического сложения

Задача 4 [25, С. 85].

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3(x+1)^2 - 2(y+3)^3 = 10, \\ 5(x+1)^2 + 2(y+3)^3 = 22. \end{cases}$

После применения метода сложения в решении данной системы, нужно будет решить следующее уравнение: $8(x+1)^2 = 32$. Применим формулу сокращённого умножения и решим обычное квадратичное уравнение. Имеем: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$. Подставляем найденные значения в одно из уравнений системы и находим соответствующее значение y. **Ответ:** $(1; -2)$, $(-3; -2)$.

Метод введения новой переменной

Задача 5 [17, С. 71]. Решить систему уравнений (метод введения новой переменной): $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2{,}5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Введём новую переменную $t = \frac{x}{y}$, и тогда, первое уравнение системы можно переписать в более простом виде: $t + \frac{1}{t} - 2{,}5 = 0$. Для решения этой системы отметим, что $t \neq 0$ и умножим всё уравнение на t. Решив уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$ находим, что $t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$.

Возвращаясь к старым переменным, имеем, что нужно решить следующую совокупность систем:

$$x = 2y,$$
$$x^2 - y^2 = 3.$$
$$y = 2x,$$
$$x^2 - y^2 = 3.$$

Первая система имеет решения: $2;1$ и $-2;-1$. Вторая же система решения не имеет, откуда получаем, что решение совокупности совпадает с решением первой системы из совокупности. **Ответ:** $2;1$, $-2;-1$.

Система задач на тему «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций»

Следующие задачи направлены на иллюстрацию применения линейных и квадратичных систем уравнений в решение задач, основанных на реальных ситуациях. Для удобства, они решены методом подстановки, но также можно применить их для отработки и других методов решения систем уравнений.

Задача 1 [23, С. 104]. *В трёх тетрадях и четырёх блокнотах вместе 108 страниц. В двух блокнотах столько же страниц, сколько их в трёх тетрадях. Сколько страниц в каждой тетради и в каждом блокноте?*

Этапы решения приведены в Приложении 5.

Ответ: 12 стр. – кол-во страниц в каждой тетради; 18 стр. – кол-во страниц в каждом блокноте.

Задача 2 [25, С. 90]. *Периметр прямоугольного треугольника равен 30 см, а его гипотенуза равно 13 см. Найти стороны этого треугольника.*

Этапы решения приведены в Приложении 5.

Ответ: катеты треугольника равны 5 см и 12 см.

Задача 3 [25, С. 93]. *Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время – мотоциклист со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста в 20 км от пункта А. Прибыв в В, мотоциклист через 36 мин выехал обратно и встретился с велосипедистом спустя 3 ч 20 мин после выезда велосипедиста из А. Найти скорость велосипедиста.*

Этапы решения приведены в Приложении 5.

Ответ: 15 км/ч.

Выводы по второй главе

1. Выявлены формы, методы и средства обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы. Установлено, например, что к индивидуальной и групповой формам обучения учителя обращаются при отработке умений и навыков по теме «Методы решения систем уравнений» при решении задач на первом и последующих уроках, в ходе самостоятельной работы. При обучении учащихся алгебре наиболее распространены визуальные средства, например презентации.

2. Представлены методические рекомендации по обучению системам алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы. Для решения этой задачи мы воспользовались поурочными разработками по учебнику А.Г. Мордковича.

3. Были рассмотрены задачи ОГЭ по данной теме. Мы проанализировали банк заданий ОГЭ и рассмотрели встречающиеся в них виды систем уравнений. Также отметили особенности и отличия заданий ОГЭ в сравнении с типологией заданий по теме «Системы уравнений» в учебниках алгебры 7-9 классов.

4. Разработаны системы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов. Системы и задачи в них были составлены с учетом методов решения систем уравнений. В каждой системе задач подобраны задания на применение основных методов решения систем уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Определено понятие логико-математического анализа содержания темы «Системы алгебраических уравнений», рассмотренное с учетом подходов Н.Л. Стефановой и Е.И. Лященко. Так же было выделено понятие логико-дидактического анализа тем школьного курса математики, которое тесно связано с понятием их логико-математического анализа. Выделены их отличия.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения системам алгебраических уравнений в курсе математики основной школы. Были рассмотрены федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования и сборник рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой.

3. Представлены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе математики основной школы.

4. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Системы алгебраических уравнений» в учебниках алгебры 7-9 классов основной школы. Описана типология заданий в учебниках разных авторов.

5. Выявлены формы, методы и средства обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы. Установлено, например, что к индивидуальной и групповой формам обучения учителя обращаются при отработке умений и навыков по теме «Методы решения систем уравнений» при решении задач на первом и последующих уроках, в ходе самостоятельной работы. При обучении учащихся алгебре наиболее распространены визуальные средства, например презентации.

6. Представлены методические рекомендации по обучению системам алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы. Для решения

этой задачи мы воспользовались поурочными разработками по учебнику А.Г. Мордковича.

7. Были рассмотрены задачи ОГЭ по данной теме. Мы проанализировали банк заданий ОГЭ и рассмотрели встречающиеся в них виды систем уравнений. Также отметили особенности и отличия заданий ОГЭ в сравнении с типологией заданий по теме «Системы уравнений» в учебниках алгебры 7-9 классов.

8. Разработаны системы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов. Системы и задачи в них были составлены с учётом методов решения систем уравнений. В каждой системе задач подобраны задания на применение основных методов решения систем уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

2. Гиганова, И.А. Методика изучения систем линейных уравнений и неравенств в школьном курсе математики / И.А. Гиганова // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2013. – № 5. – С. 382 – 383. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21958132.

3. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.

4. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.

5. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.

6. Забелин А.В. Обучение общему приёму решения систем уравнений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/556054/. – Последнее обновление 10. 03. 2018.

7. Звавич, Л.И. Алгебра. 7 класс. Дидактические материалы [Текст]: учеб. пособие / Л.И. Звавич, Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 159 с.

8. Лихачёв Б.В. Педагогика [Текст]: Курс лекций – СПб.: Владос, 2010. – 648 с.

9. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

10. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.

11. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

12. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с

13. Метельский, Н.В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы [Текст]: учеб. пособие для вузов. / Н.В. Метельский – 2-е изд., перераб. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 256с.

14. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

15. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс [Текст]: методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 77с.

16. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

17. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

18. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

19. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

20. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

21. Пенькова М.Е. Алгоритмы в математике: Открытый урок. Первое сентября [Электронный ресурс]. – Режим доступа: – http://открытыйурок.рф/статьи/602939/

22. Примерная основная образовательная программа основного общего образования: Протокол федерального учебно-методического объединения по общему образованию от 08.04.2015 г. № 1/15. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: – http://3329.edusite.ru/DswMedia/

23. Рурукин А.Н. Алгебра. 7 класс. Поурочные разработки. К УМК А.Г. Мордковича [Текст]: методическое пособие для учителя – М: ВАКО, 2014. – 256 с.

24. Рурукин А.Н. Алгебра. 8 класс. Поурочные разработки. К УМК А.Г. Мордковича [Текст]: методическое пособие для учителя / А.Н. Рурукин, С.В. Сочилов, Ю.М. Зеленский. – М: ВАКО, 2010. – 352 с.

25. Рурукин А.Н. Алгебра. 9 класс. Поурочные разработки. К УМК А.Г. Мордковича [Текст]: методическое пособие для учителя / А.Н. Рурукин, И.А. Масленникова, Т.Г. Мишина. – М: ВАКО, 2011. – 288 с.

26. Слабченко Е.А. Активные формы обучения на уроках математики: Открытый урок. Первое сентября [Электронный ресурс]. – Режим доступа: – http://открытыйурок.рф/статьи/418345/

27. Сластенин, В.А. Педагогика [Текст]: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 576 с.

28. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математики. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов/ Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др. – М.: Дрофа, 2005. – с. 276.

29. Суворова, С.Б. Алгебра. Методические рекомендации 8 класс [Текст]: учебное пособие для общеобразовательных организаций/ С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова. – М.: Просвещение, 2015. - 244 с.

30. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/. – Последнее обновление 03. 05. 2018.

31. Hawkes, H.E. First course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. - Boston: Ginn and company, 1910. – 334 p.

32. Hawkes, H.E. Second course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. - Boston: Ginn and company, 1911. – 263 p.

33. Schoenfeld, Alan H. ed. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-makingin – New York: MacMillan, 1992. – 370 p.

34. Tomson D. Mathematics Teacher Training. In R: Teaching mathematics: retrospective and perspectives. Lithuania: Palanga, 2015, May 7-9. p – 137.

35. Tomson D. Role of Mathematics in Curriculum. In R: Teaching mathematics: retrospective and perspectives. Lithuania: Palanga, 2015, May 7-9. p – 162.

Приложение 1

Таблица 1

Содержание теоретического материала по теме «Систем уравнений», 7 класс

Авторы учебников	**Содержание материала по теме «Системы уравнений»**
А.Г. Мордкович	Система и решения системы линейных уравнений с двумя переменными. Взаимосвязь уравнений вида $ax + by + c = 0$ и функций вида $y = kx + m$. Решение систем методом подстановки и методом алгебраического сложения. Выделение алгоритма решения системы методом подстановки. Рассмотрение систем уравнений, как метода решения задач реальных жизненных ситуаций (построение и решение систем)
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин	Система и решения системы линейных уравнений с двумя переменными. Решение систем способом подстановки и способом сложения. Графический способ решения систем уравнений. Решение задач с помощью систем уравнений.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова	Система и решения системы линейных уравнений с двумя переменными. Взаимосвязь уравнений вида $ax + by + c = 0$ и функций вида $y = kx + m$. Решение систем способом подстановки и способом сложения. Решение задач с помощью систем уравнений.
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин	Система и решения системы линейных уравнений с двумя переменными. Способ подстановки. Способ уравнивания коэффициентов (тот же способ алгебраического сложения). Равносильность уравнений и систем уравнений. Решение задач с помощью систем уравнений. Системы уравнений с тремя неизвестными.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина	Решение задач с помощью систем уравнений. Введение теории в общих чертах при рассмотрении примеров в параграфе.

Приложение 2

Таблица 2

Содержание теоретического материала по теме «Систем уравнений», 8 класс

Авторы учебников	**Содержание материала по теме «Системы уравнений»**
Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин	Система уравнений с двумя переменными, содержащая квадратное уравнение. Соотнесение системы уравнений с Теоремой Виета.
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова	Система уравнений с двумя переменными, содержащая квадратное уравнение. Соотнесение системы уравнений с Теоремой Виета. Метод сложения и метод подстановки, применительно к системам уравнений, содержащим квадратные уравнения. Метод выделения полного квадрата. Метод введения нового переменного. Решение задач с помощью систем уравнений, содержащих квадратные уравнения.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина	Система и решения системы линейных уравнений с двумя переменными. Решение систем методом подстановки. Решение задач с помощью систем уравнений.
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева	Система и решения системы линейных уравнений с двумя переменными. Решение систем способом подстановки и способом сложения. Графический способ решения систем уравнений. Решение задач с помощью систем уравнений. Задачи на координатной плоскости и их решение через системы уравнений.

Приложение 3

Таблица 3

Содержание теоретического материала по теме «Систем уравнений», 9 класс

Авторы учебников	**Содержание материала по теме «Системы уравнений»**
Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин	Повторение изученного материала по теме «Системы уравнений» за 8 класс. Применение Теоремы Виета при решении системы уравнений. Пример решения системы уравнений с тремя переменными, содержащей квадратное уравнение. Пример решения системы уравнений с параметром. Решение задач на составление и решение систем уравнений.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова	Системы квадратных уравнений. Графический способ решения системы квадратных уравнений. Решение систем квадратных уравнений способом подстановки. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени.
А.Г. Мордкович	Однородные системы. Симметрические системы. Иррациональные системы. Системы с модулями. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций.
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева	Графический способ решения систем уравнений, содержащих уравнения второй степени. Способ подстановки и способ сложения при решении систем уравнений, содержащих квадратные уравнения. Решение задач на составление и решение систем уравнений. Системы уравнений с параметром.

Приложение 4

Комментарии к решению отдельных задач работы

§4. Анализ задачного материала по теме «Системы алгебраических уравнений» в учебниках алгебры основной школы.

Задача 2.

Комментарий: выразим из второго уравнения y и подставим в первое уравнение: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = \frac{12}{x}. \end{cases}$ => $\begin{cases} x^2 + \frac{144}{x^2} = 25, \\ y = \frac{12}{x}. \end{cases}$ Для дальнейшего решения, отметим, что $x^2 \neq 0$, а значит $x \neq 0$. Умножим первое уравнение на x^2 и введём новую переменную $t = x^2$, тогда: $\begin{cases} t^2 + 144 = 25t, \\ y = \frac{12}{x}. \end{cases}$ Решим первое уравнение с помощью дискриминанта: $t^2 - 25t + 144 = 0$; $D = 49$; $t_{1,2} = \frac{25 \pm 7}{2}$; $t_1 = 9, t_2 = 16$. Так как мы вводили переменную $t = x^2$, то получаем следующие значения x: $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = 3, x_4 = 4$.

Подставив каждое из этих значений во второе уравнение исходной системы, получаем 4 значения y, соответствующих каждому значению x: $y_1 = -3, y_2 = -4, y_3 = 4, y_4 = 3$. Решениями исходной системы уравнений станут четыре пары упорядоченных чисел.

§6. Методические рекомендации по обучению теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

Пример 1 (С. 42).

Комментарий: для этой системы А.Н. Рурукин рекомендует применить графический метод. То есть построить графики каждого уравнения, тогда, точка пересечения этих графиков станет решением системы уравнений.

Сразу следует отметить, что графический метод – не самый надёжный, поскольку не всегда может быть удобно определять координаты точки пересечения на координатной плоскости.

Здесь же автор рекомендует поднять на обсуждение вопрос о **количестве решений** системы двух линейных уравнений: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ В данном поурочном планировании выделяется следующая схема определения количества решений системы:

1. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет **единственное решение**.

2. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система **не имеет решений**, так как графики уравнений будут параллельны. Такая система будет называться **несовместимой**.

3. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет **бесконечно много решений**, так как графики уравнений будут совпадать. Такая система будет называться **неопределённой**.

§6. Методические рекомендации по обучению теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

Пример 1 (С. 48).

Комментарий: так как метод введения новой переменной не является принципиально новым, то сложность вызывает только выбор замены, например, в этой системе удобной заменой будет: $\frac{2x-y}{x+y} = t$. И первое уравнение системы уже будет выглядеть так: $5t + \frac{4}{t} = 9$. Отмечаем, что $t \neq 0$ и далее решаем уравнение $5t^2 - 9t + 4 = 0$. Его корни $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{4}{5}$.

Возвращаясь к старым переменным, мы получаем следующую совокупность: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ 3x^2 - 15y^2 = -33. \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ 3x^2 - 15y^2 = -33. \end{cases} \end{array}\right.$ Обе системы далее решаются известным методом подстановки, и первая система имеет решения $(2\sqrt{11};\sqrt{11})$, $(-2\sqrt{11};-\sqrt{11})$, а вторая система – $(3;2)$, $(-3;-2)$.

Так как эти две системы уравнений получены в ходе решения изначальной системы второй степени, то решением изначальной будут все четыре решения: $(2\sqrt{11};\sqrt{11})$, $(-2\sqrt{11};-\sqrt{11})$, $(3;2)$, $(-3;-2)$.

Приложение 5

Этапы решения задач §8. Системы задач по теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы

Задача 1.

Первый этап – составление математической модели.

Пусть x – кол-во страниц в каждой тетради, а y – кол-во страниц в каждом блокноте. Первое уравнение $3x + 4y = 108$ – общее количество страниц, а из второй части задачи следует что $2y = 3x$. Таким образом, можем составить модель задачи: $\begin{gathered} 3x + 4y = 108, \\ 2y = 3x. \end{gathered}$

Второй этап – работа с составленной моделью.

Очень удобно, что одно из слагаемых первого уравнения уже выражено во втором. После применения метода подстановки нужно будет решить следующее уравнение: $2y + 4y = 108$. Откуда получаем $y = 18$, а после подстановки этого значения во второе уравнение системы находим $x = 12$.

Третий этап – ответ на вопрос задачи.

Решением системы является пара чисел $12;18$. Значит в каждой тетради 12 страниц, а в каждом блокноте 18 страниц.

Задача 2.

Первый этап – составление математической модели.

Пусть x см и y см – катеты треугольника. Выразим периметр треугольника с помощью уравнения: $x + y + 13 = 30$. Это всё что дано в условии задачи, но вспомним о Теореме Пифагора и запишем следующее уравнение: $x^2 + y^2 = 13^2$. Запишем уравнения в одной системе для выполнения обоих условий: $\begin{gathered} x + y + 13 = 30, \\ x^2 + y^2 = 13^2. \end{gathered}$

Второй этап – работа с составленной моделью.

Представим систему уравнений в следующем виде: $\begin{cases} y = 17 - x, \\ x^2 + (17 - x)^2 = 169. \end{cases}$ Находим значения x из второго уравнения: $x^2 - 17x + 60 = 0$. $x_1 = 5, x_2 = 12$ – решения этого уравнения. Решая далее систему методом подстановки находим соответствующие значения второй переменной: $y_1 = 12, y_2 = 5$.

Третий этап – ответ на вопрос задачи.

Система уравнений имеет два решения: $(5;12)$, $(12;5)$. Какой из катетов первый, а какой второй – не важно, записать ответ на задачу можно просто.

Задача 3.

Первый этап – составление математической модели.

Пусть x (км/ч) – скорость велосипедиста, t (ч) – время, через которое мотоциклист выехал из пункта А после велосипедиста. $\frac{20}{x}$ (ч) – время пути велосипедиста до первой встречи, время мотоциклиста – $\frac{2}{5}$ (ч). Из условия задачи первое уравнение: $\frac{20}{x} - \frac{2}{5} = t$.

Вторая встреча произошла через $\frac{10}{3}$ (ч) после выезда велосипедиста из А. $\frac{10}{3}x$ (км) – расстояние которое он проехал за это время. Учитывая время мотоциклиста в пути, сумма расстояний, пройденных велосипедистом и мотоциклистом до второй встречи, равно удвоенному расстоянию между пунктами А и В. Тогда, второе уравнение системы будет иметь следующий вид: $\frac{10}{3}x + 50\left(\frac{41}{15} - t\right) = 140$. Для решения задачи нужно решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{20}{x} - \dfrac{2}{5} = t, \\ \dfrac{10}{3}x + 50\left(\dfrac{41}{15} - t\right) = 140. \end{cases}$$

Второй этап – работа с составленной моделью.

Очень удобно, что при моделировании задачи мы уже выразили время через скорость и теперь достаточно подставить значение t во второе уравнение. После применения метода подстановки нужно будет решить следующее уравнение: $\frac{10}{3}x + 50 \ \frac{41}{15} - \ \frac{20}{x} - \frac{2}{5} \ = 140$. После того как мы упростим уравнение, оно будет иметь следующий вид: $x^2 + 5x - 300 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -20$ и $x_2 = 15$.

Третий этап – ответ на вопрос задачи.

Вопрос задачи стоял в поиске скорости велосипедиста. Значит найдя x, продолжать решение системы не требуется. А ответ $x_1 = -20$ не имеет смысла, так как скорость не может быть отрицательной.