МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Б А К А Л А В Р С К А Я   Р А Б О Т А

Направление подготовки бакалавра : 44.03.05 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математика и информатика*

Студент Л.А. Кузовенко ___________

Научный
Руководитель: к.п.н., доцент кафедры
алгебры и геометрии Н.С. Симонова ___________

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 2
Глава 1. Теоретические основы обучения элементам теории множеств в курсе алгебры основной школы 9
§1. Основные понятия теории множеств 9
1.1.Исторические моменты возникновения теории множеств 9
1.2.Числовые множества школьной математики 13
1.3. Отношение включения множеств и операции над множествами в школьной математике 15
1.4. Мощность множества.. 19
§2. Анализ программ по теме исследования 22
2.1. Анализ научно- методической литературы для 5- 6 классов 22
2.2. Анализ научно- методической литературы для 7- 9 классов 23
Глава 2. Методические основы обучения элементам теории множеств в курсе алгебры основной школы, 5-9 класс 26
§3 Методические особенности обучения элементам теории множеств......... 26
3.1. Развитие логического мышления учащихся.................................... 26
3.2. Особенности мышления школьников 28
3.3. Развивающее и проблемное обучение на уроках алгебры................ 31
§4 Системы заданий по теме «Элементы теории множеств в курсе алгебры основной школы» 35
4.1. Системы заданий по теме «Элементы теории множеств» в 5- 6 классах 35
4.2. Системы заданий по теме «Элементы теории множеств» в 7- 9 классах средней школы 44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 59
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ... 60
ПРИЛОЖЕНИЕ 66

ВВЕДЕНИЕ

Множество - одно из основных понятий современной математики. Это понятие не сводится к другим понятиям и не определяется [14, С. 1-17].

Актуальность темы исследования: Теория множеств - раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств. Теория множеств лежит в основе большинства математических дисциплин. Понятие множества является одним из фундаментальных, неопределяемых, математических понятий [23, С. 32].

В основе практически всех основных понятий лежат множества-простые совокупности объектов.

До второй половины XIX века понятие «множества» не рассматривалось в качестве математического («множество книг на полке», «множество человеческих добродетелей» и т. д. - всё это чисто бытовые обороты речи). Положение изменилось, когда немецкий математик русского происхождения Георг Кантор, считающийся одним из величайших умов человечества, разработал свою программу стандартизации математики, в рамках которой любой математический объект должен был оказываться тем или иным «множеством».

Например, натуральное число, по Кантору, рассматривалось как множество, которое состоит из одного элемента другого множества, называемого «натуральным рядом». В свою очередь, «ряд» представляет собой множество, удовлетворяющее аксиомам Пеано (XIX в, автор: Джозеппе Пеано). При этом Кантор давал общему понятию «множества», которое он рассматривал в качестве центрального для математики, мало что определяющее определения вроде «множество есть многое, мыслимое как единое», и т. д. Что вполне подчеркивало называние программы Кантора не «теорией множеств» (этот термин появился много позднее), а учением о множествах (Mengenlehre).

Влияние символических и знаковых средств обучения (моделей, схем и тд.) на усвоение ребенком математики, положительно влияет на умственное развитие ребенка, являясь чувственно-наглядной основой для перехода к новому, более высокому логико-абстрактному уровню мышления. Именно теоретико-множественный подход является такой основой.

Многие крупные математики - в частности, Готлоб Фреге, Рихард Дедекинд и Давид Гильберт - поддержали Кантора в его намерении перевести всю математику на теоретико-множественный язык. В частности, теория множеств стала фундаментом теории меры и интеграла, топологии и функционального анализа [17, с. 74].

Своеобразность школьного обучения может не принимать теоретико-множественный подход к построению школьной алгебры, но при этом использовать простейшие теоретико-множественные понятия и их обозначения (модели), как вспомогательные средства в обучении алгебре.

Утверждение о том, что простейшие элементы теоретико-множественного языка малодоступны школьникам и бесполезны в их обучении, противоречит уже существующему опыту их разумного применения.

Использование теоретико-множественных моделей имеет особое значение для развития логических структур мышления детей.

Введение теоретико-множественного языка в школе по мнению П. Сагымбековой [50, С. 194] имеет ряд преимуществ:

1. Содержание алгебры не может быть определено без учета внутреннего строения самой алгебры.

2. Теоретико-множественные идеи пронизывают весь школьный курс алгебры, позволяют учащимся овладеть математическим стилем мышления, т.е. таким мышлением, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным

образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения.

3. Теория множеств - «язык» алгебры, а «язык» – это один из важнейших объектов изучения.

4. Возможность использования теоретико- множественных понятий с наглядной демонстрацией делает преподавание алгебры простым, ясным, естественным.

5. Человеческому мышлению свойственно трактовать то или иное собрание предметов, объединенное каким-либо признаком, как самостоятельный объект, разбивать объект на части по какому-либо признаку, находить закономерности и т.д.

6. Теоретико-множественный «язык» позволяет представить и усвоить абстрактные логические понятия и их взаимосвязь.

В настоящее время в школьном курсе математики данная тема входит в содержание *стохастической линии*, которая является одной из ведущих в соответствии с действующим государственным образовательным стандартом. Причем особое место в нем отводится таким операциям над множествами, как пересечение и объединение множеств, которые используются при решении систем и совокупностей уравнений и неравенств при дальнейшем изучении математики в общеобразовательной школе.

Вопросы, связанные с изучением понятия *множества* и *операций над множествами*, вызывают у учащихся некоторые сложности в процессе применения их при решении различных задач школьного курса математики.

Наконец, формулировка многих понятий школьной математики становится проще при использовании языка теории множеств. Следует отметить, что роль теории множеств в школьной математике больше сводится к использованию языка этой теории, чем к попытке обосновать на ней всю школьную математику, - излишне педантичное использование понятий теории множеств может сделать некоторые разделы школьной математики слишком абстрактными и непонятными для учащихся. Как числовые множества, так и геометрические фигуры рассматривались в математике и до появления общей теории множеств. При этом, однако, геометрические фигуры рассматривались как целостные совокупности, а не как множества составляющих их точек. Этому способствовало то, что изучаемые в элементарной математике фигуры задаются конечными наборами точек, и достаточно было задать два конца отрезка, чтобы о нем можно было говорить, не упоминая о множестве точек, из которых он состоит (было принято считать, что эти точки расположены на отрезке, но что он отличен от их совокупности). Однако лишь, теоретико-множественная точка зрения на математику позволила рассматривать множества, состоящие из геометрических фигур, например, множество всех прямых на плоскости или множество всех концентрических окружностей [54, С. 52-53].

Таким образом, актуальность темы исследования определяется:

- модернизацией содержания математического образования на современном этапе развития школы;

- необходимостью полноценного изучения важнейших элементов теории множеств в курсе алгебры основной школы;

- недостаточной разработанностью методики преподавания изучаемого материала в курсе алгебры основной школы.

Проблема исследования: каковы методические особенности изучения элементов теории множеств в курсе алгебры основной школы?

Объект исследования: процесс обучения алгебре учащихся основной школы.

Предмет исследования: методика обучения элементам теории множеств в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования состоит в разработке концепции формирования предметных знаний и умений по теме «Элементы теории множеств в курсе алгебры основной школы» и её применения к построению методики обучения элементам теории множеств в курсе алгебры основной школы.

Гипотеза исследования: если выделить основные понятия темы «Элементы теории множеств в курсе алгебры основной школы» и разработать соответствующие им системы задач, а также методику их реализации, то это будет способствовать повышению качества математических знаний учащихся и формирования у них умения логически мыслить.

Задачи исследования:

1. Выделить основные понятия элементов теории множеств в школьном курсе алгебры.

2. Проанализировать опыт включения элементов теории множеств в курс алгебры основной школы.

3. Выделить методические особенности обучения элементам теории множеств в курсе алгебры основной школы.

4. Разработать системы задач по теме «Элементы теории множеств в курсе алгебры основной школы» и методику их реализации.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: анализ научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по методике обучения элементам теории множеств в курсе алгебры основной школы и соответствующие системы задач, которые могут быть использованы учителями математики основной школы и студентами педагогических направлений подготовки в ходе педагогической практики.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения элементам теории множеств. Рассмотрены исторические аспекты развития основных понятий теории множеств. Представлен анализ программы и школьных учебников по теме. Выявлены методические особенности изучения темы в курсе алгебры основной школы. Разработаны методические рекомендации по изучению данной темы учащимися 5-9-х классов.

В главе II представлены методические материалы по методике обучения элементам теории множества в курсе алгебры основной школы. Разработаны системы упражнений по теме исследования для учащихся 5-6-х и 7-9-х классов.

Структура дипломной работы: введение, две главы, заключение, список литературы и приложение.

Глава 1. Теоретические основы обучения элементам теории множеств в курсе алгебры основной школы

§1. Основные понятия теории множеств

1.1. Исторические моменты возникновения теории множеств

Понятие множества обычно принимается за одно из исходных (аксиоматических) понятий, то есть не сводимое к другим понятиям, а значит и не имеющее определения. Однако можно дать описание множества, например, в формулировке Георга Кантора: «Под «множеством» мы понимаем соединение в некое целое M определённых хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества M)» [11, С. 35].

Понятие множества на момент своего появления в XIX веке казалось достаточно простым и ясным, чтобы с легкостью объединить многие разделы алгебры. Несмотря на это, развитие теории множеств повлекло за собой неожиданности и парадоксы, что привело к необходимости создания аксиом, которые сформировали бы ее логичный и прочный фундамент [4, С. 76].

Это интересное определение, поскольку в нем сделан упор на философском аспекте множества: объекты формируют множество только потому, что кто-то рассматривает их как единое целое [55, С. 2].

Мысленное представление объектов как единого целого заключается в смене отношения. Когда мы сосредотачиваем внимание на чем-то, обращаем внимание только на определенные вещи, то формируем множество. Об этом же думал и Георг Кантор - возможно, первый мастер теории множеств, давший следующее определение: *«Под множеством мы понимаем соединение в некое целое определенных хорошо различимых предметов нашего созерцания или нашего мышления».*

В математической логике и дискретной математике часто употребляемый синоним множества - алфавит.

История теории множеств тесно связана с понятием бесконечности, в частности, с понятием истинной бесконечности, и с необходимостью создавать математические объекты с бесконечным множеством элементов. Несмотря на то, что начала теории множеств определил Бернард Больцано (1781-1848), создание теории в целом единогласно приписывается Георгу Кантору (1845-1918) [18, С. 268].

Можно сказать, что теория множеств берет начало в 1874 году, когда Кантор опубликовал в журнале Крелля работу под названием Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen («Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел») [47, С.10].

С 1874 г. по 1897 г. (главным образом в 1872-1884 гг.) Георг Кантор опубликовал ряд работ, в которых были систематически изложены основные разделы теории множеств. В этих работах он не только ввёл основные понятия теории множеств, но и обогатил математику рассуждениями нового типа, которые применил для доказательства теорем теории множеств, в частности впервые к бесконечным множествам. Поэтому общепризнано, что теорию множеств создал Георг Кантор [6, С. 84].

В 1903 году Бертран Рассел (1872-1970) показал, что теория множеств Кантора является непоследовательной. Это поставило под сомнение возможность использования понятия множества без каких-либо ограничений. Даже сам Кантор осознавал трудности, к которым приводило существование множества всех множеств, сформулировав проблемное определение множества, которое содержит само себя в качестве элемента. Георг Кантор подчеркнул: *«Множество, есть многое, мыслимое нами как единое»* [20, С. 8].

Однако вскоре теория Эрнста Цермело (1908) и ее уточнения, разработанные Френкелем (1922), Сколемом (1923), фон Нейманом (1925) и другими авторами, сформировали фундамент, на котором и строится теория множеств в ее нынешнем виде.

Множество может быть замкнутым и незамкнутым, полным и пустым, упорядоченным и неупорядоченным, счётным и несчётным, конечным и бесконечным. Более того, как в наивной, так и в формальной теориях множеств любой объект обычно считается множеством.

Основы теории множеств были заложены Бернардом Больцано, который сформулировал некоторые из её принципов. Он определил множества конечные и бесконечные, понятие взаимно однозначного соответствия, понятие предельной точки и последовательности («Парадоксы бесконечного», 1850) [1, С.104].

Как и все математические теории, теория множеств имеет собственный язык и особые правила записи. Введение двух особых множеств, универсального и пустого, вкупе с определением операций объединения, пересечения и дополнения над множествами позволяет ввести алгебраическую структуру - булеву алгебру, которая имеет чрезвычайно большое теоретическое и практическое значение [8, С. 43]. Джордж Буль (1815-1864) в 1847 году написал небольшой труд «Математический анализ логики», оказавший значительное влияние на философский мир и ознаменовавший начало смещения логики в сторону алгебры, а не метафизики. Булева алгебра основана на теории множеств, сумма в ней приравнивается к объединению множеств, а произведение - к пересечению множеств. За нуль было принято пустое множество, а за единицу («единицу» при умножении) - универсальное множество. Таким образом, множества можно складывать и перемножать аналогично целым числам. Буль показал, что эти операции над множествами эквивалентны математическим символам и действиям, использующимся в символической логике [45, С. 95].

В нашей стране крупнейшая *школа теории функций и множеств* была создана ещё в 1911 г. в Москве. Её главой и вдохновителем стал несколько позже знаменитый математик, академик *Н.Н. Лузин* (1883 - 1950), внесший большой вклад в теорию множеств [10, с.215-222].

Важнейших результатов добились и его ученики М. Я. Суслин, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин, академик П.С. Александров, академик П.С. Новиков и другие советские ученые [9, С. 208].

Однако в работах русского математика Мириманова предлагалось не ограничиваться одними только множествами, которые не принадлежат сами себе, как делал это Кантор, но допустить операции и с самопринадлежащими множествами, логика этих операций отлична от интуитивно обычных представлений [11, С. 54].

Множества принято обозначать заглавными латинскими буквами. Объекты, которые образуют множество, называют элементами множества и для обозначения элементов используют, как правило, малые буквы латинского алфавита [31, С. 11].

Множество может быть задано перечислением всех его элементов или списком. В этом случае элементы множества записывают внутри фигурных скобок, например: A = { 1, 2, a, x } или B = { река Нил, город Москва, планета Уран} [32, С. 86].

Если элементов множества бесконечно много, то используют многоточие, например множество всех натуральных чисел записывается так: N = {1; 2; 3; …} [55, С. 9].

Первая сложность теории множеств заключается в самом определении того, что же такое множество. После того как мы преодолеем это препятствие, на нашем пути не возникнет никаких затруднений [19, С. 88].

Ученику столь же мало рассказывают, что такое число и что такое два, сколь мало разъясняют при изображении фигур на доске, что такое точка,- столь же мало требуется разъяснять, что такое множество [56, С. 189].

Понятие множества X элементов x предполагается известным. Синонимами множества являются: совокупность, собрание, объединение и т.п. [52, С. 16]. Если $x_1, x_2 \ldots$ есть элементы множества X, то употребляется запись X= $\{x_1, x_2 \ldots\}$.

Множество X задано, если относительно каждого x известно, является ли x элементом множества X, или же x не является элементом множества X. Природа элементов множества может быть произвольной.

Пример 1 [30, С. 4]**.**

A = {м, а, т, е, и, к} - обозначает множество A букв, которые использовались для записи слова *«математика»*. Вместо букв могут использоваться животные, люди, музыкальные инструменты и так далее.

1.2. Числовые множества школьной математики

Мы встречаемся в школьном курсе математики с разными *числовыми множествами*, элементами которых являются числа той или иной природы (натуральные, целые, дробные, рациональные, иррациональные, действительные, комплексные, алгебраические и др.). Можно говорить о множестве учащихся в классе, деревьев в лесу, корней данного уравнения, точек на данном отрезке и т.п. Желая подчеркнуть, что в понятии множества самое важное – это идея объединения элементов каким-либо общим признаком, Георг Кантор писал: *«Под многообразием или множеством я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить, как единое»* [48].

Если отвлечься от природы и порядка элементов, то два конечных множества могут отличаться между собой только *количеством* своих элементов. Для сравнения таких двух множеств не обязательно пересчитывать их элементы. Достаточно поставить их элементы во *взаимно однозначное соответствие*. Если это можно полностью осуществить, то количество элементов одного из них (и понятно какого) больше другого [9, С. 205].

Приведем наиболее важные *примеры числовых множеств,* рассматриваемых в школьной математике [53, С. 50]:

а) С каждым уравнением f (x) $=$ φ (x) связаны множество А, на котором выражения f (x) и φ (x) числовое значение, и множество Т чисел, удовлетворяющих этому уравнению.

б) Неравенства вида $a \leq x \leq b, a <\leq x < b, a < x \leq b, a < x < b$ задают числовые промежутки. При этом, когда учащиеся знакомы лишь с рациональными числами, числа, а и Ь должны быть рациональны, а в качестве решений неравенств рассматриваются лишь рациональные числа (на некоторых этапах обучения - лишь натуральные числа). Но после введения множества действительных чисел числовые промежутки рассматриваются как состоящие из всех действительных чисел, удовлетворяющих соответствующим неравенствам. Наряду с числовыми промежутками рассматривают числовые лучи (т. е. бесконечные числовые промежутки). Они задаются неравенства-ми вида $a \leq x, x \leq a, x < a$. В частности, числовыми лучами являются множества· $R.$ и R_{-}, состоящие соответственно из положительных и из отрицательных действительных чисел, а также множества R, U {O} и R_ U {O} (первое из них часто обозначают R0).

в) Более сложную структуру, чем числовые промежутки, имеют подмножества $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{I}$, состоящие соответственно из рациональных и иррациональных чисел. Эти подмножества всюду плотны в R, т. е. любой числовой промежуток имеет непустое пересечение как с Q, так и с $\boldsymbol{I}$.

г) Ряд числовых множеств можно получить, объединяя и пересекая описанные выше множества (например $Q \cap [a, b] -$ множество рациональных трех чисел числовых на отрезке$[a; b]$, а $[a; b] \cup [c; d] \cup [e; f] -$ объединение трех числовых промежутков). В школьной математике чаще всего приходится иметь дело с пересечением и объединением лишь конечных совокупностей промежутков. Но в тригонометрии при решении неравенств встречаемся и с объединениями бесконечных совокупностей промежутков. Например, решение неравенства $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ имеет следующий вид:

$$\bigcup_{n\in\boldsymbol{Z}}\left[-\frac{5\pi}{6}+2n\pi;\ -\frac{\pi}{6}+2n\pi\right].$$

д) Различные подмножества можно указать в множестве C комплексных чисел. Поскольку комплексные числа изображаются точками плоскости, то любая плоская геометрическая фигура задает некоторое множество комплексных чисел. Отметим, в частности, подмножество T, состоящее из таких чисел z, что $|z|$ = 1.

1.3. Отношение включения множеств и операции над множествами в школьной математике

Авторы пособия для студентов «*Современные основы школьного курса математики*» Н. Я. Виленкин и др. отметили некоторые факты об отношении включения и операциях над множествами [54, С. 52, 54]:

1. Отношение включения в применении к изучаемым в школе множествам позволяет устанавливать иерархию понятий. Например, при изучении четырехугольников встречаются с понятиями параллелограмма, трапеции, равнобочной трапеции, ромба, прямоугольника, квадрата.

2. При конструировании различных объектов школьной математики широко используются операции над множествами. Почти все числовые множества, получаемые в школьной математике, могут быть получены из (замкнутых) лучей и всего множества R с помощью операций объединения и пересечения конечных совокупностей множеств, а также перехода к дополнению. Например, отрезок [a, b] является пересечением лучей $[-\infty, b]$ и $[a, +\infty]$, открытый луч $[a, \infty]$ $-$дополнением в $\boldsymbol{R}$ к лучу $[-\infty, a]$. Интервал $[a, b]$ -это пересечение лучей $[-\infty, b]$и $[a, +\infty]$, 0a отдельная точка {a} - пересечение лучей $[-\infty, a]$ и $[a, +\infty]$.

Определение 1.

Одно из основных понятий математики – множества. Когда говорят о множестве, то объединяют в одну группу предметы или понятия по какому-либо признаку и рассматривают эту группу объектов как одно целое [2, С. 247].

Наиболее часто встречающиеся числовые множества обозначают так [20, С. 9]:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел;

C – множество комплексных чисел.

Для графического изображения множеств используются диаграммы Эйлера – Венна. Круги Эйлера изображают множества условно, т.к. круг содержит бесконечное множество точек, в то время как множество, которое он может изображать, может быть конечным [43, С. 63].

Великий математик 18 века Л. Эйлер предложил изображать множества кругами, а элементы множеств – точками внутри этих множеств [40, С. 93].

Джон Венн (1834-1923) был преподавателем логики и теории вероятностей в Кембриджском университете.

Венн разработал простую систему диаграмм, облегчающую понимание определенных операций на множествах, но никто и представить не мог, что его имя будет известно студентам половины земного шара.

Диаграммы Венна включают рамку, обозначающую универсальное множество U с которым будем работать (рисунок 1):

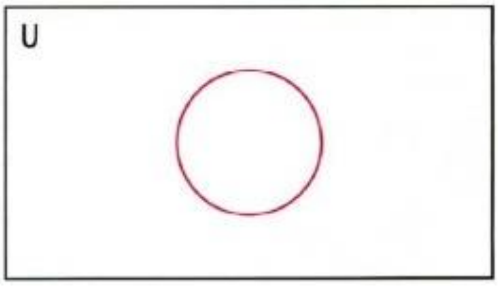


Рис. 1.

В этой рамке внутренняя часть круга представляет данное множество (вместо круга может использоваться любая замкнутая кривая).

Определение 2.

Макарычев Ю. Н. отмечает важную особенность понятия множества. Хотя в русском языке слово «множество» обычно отождествляют со словом «много», в математике, говоря о множестве, не предполагают, что множество содержит много элементов. Так, множество делителей числа 1 состоит из одного *элемента* – числа 1, т.е. это множество – ***конечное.*** Множество общих кратных чисел 2 и 3 является ***бесконечным***, т.е. содержит *бесконечно много* элементов [30, С. 4].

В математике встречаются множества, в которых нет ни одного элемента, например, множество чисел, делящихся на нуль. Понятно, почему такое множество называется ***пустым.***

Определение 3.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается ≪ ∅ ≫.

Пример 2.

В квартире проживает некоторое множество людей. Это множество может состоять из 5 человек, 3 человек, одного человека. Возможен даже такой случай, что в квартире никто не проживает (в данный момент квартира пуста). В этом случае говорят, что множество жильцов, проживающих в квартире,- *пустое множество* [30, С. 4].

Диаграммы очень удобны, потому что с их помощью можно наглядно представить, например, объединение двух множеств А и В (выделено синим цветом)(рисунок 2):

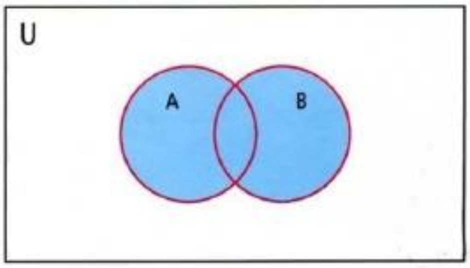


Рис. 2.

Для множеств определены две операции, аналогичные сумме и произведению: это объединение и пересечение множеств соответственно. Объединение двух множеств, обозначаемое символом ∪, - это множество, содержащее в себе все элементы исходных множеств. Например, если А = {a, b, c, d, 1, 2} и В = {1, 2, 3}, то А∪В = {a, b, c, d, 1, 2, 3 } [29, С. 77].

Определение 4.

Объединением множеств А и В (обозначение А∪В) называется множество элементов *x* таких, что *x* принадлежит хотя бы одному из двух множеств А или В. Символически это можно записать следующим образом: $A \cup B = \{x | x \in A \cup x \in B\}$.

Пересечение множеств (выделено красным):

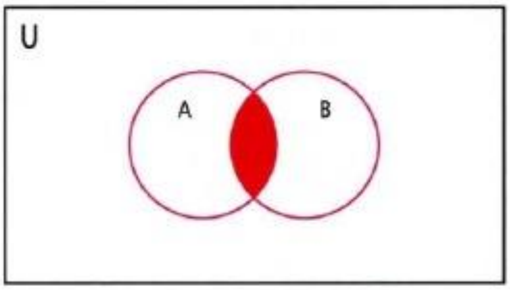


Рис. 3.

Определение 5.

Пересечением множеств А и В (обозначение А∩В) называется множество, состоящее из элементов *x*, которые принадлежат и множеству А и множеству В (рис. 3): $A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$.

Определение 6.

Разностью двух множеств A и B называют такое множество, в которое входят все элементы из множества A, не принадлежащие множеству B [40, С. 6] (рисунок 4)

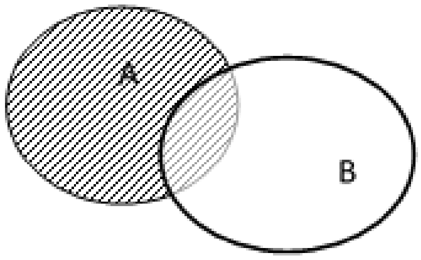


Рис. 4.

Определение 7.

Абсолютным дополнением множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A, т.е. множество $\bar{A}$ = U\A, где U - универсальное множество (рис. 5):

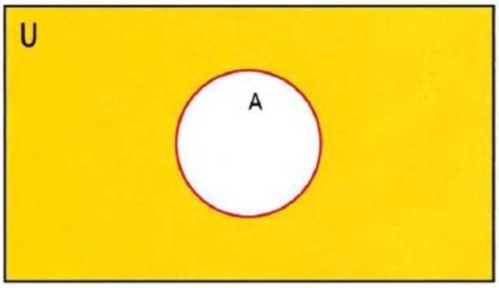


Рис. 5.

Пример 3.

Если U = { a, b, c, d, e, f, g, h }, A = { c, d, e },
B = { a, c, e, f, h }, то A∪B = { a , c, d, e, f, h }, A∩B = { c, e },
A\B = {d}, $\bar{A} = \{a, b, f, g, h\}$. [26]

Определение 8.

Множество A называют ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B.

Соотношение между множествами A и B в этом случае записывают с помощью знака «⊂».

Пример 4.

Равенство двух чисел $a = b$ означает, что a и b являются одним и тем же числом. Так, например, $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Аналогично и равенство множеств $A = B$ означает, что множества A и B состоят из одних и тех же элементов или они оба являются пустыми множествами.

Отмечается, что два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов или вообще не содержат элементов [23, С.99].

1.4. Мощность множества

Если отвлечься от природы и порядка элементов, то два конечных множества могут отличаться между собой только *количеством* своих элементов. Для сравнения таких двух множеств не обязательно пересчитывать их элементы. Достаточно поставить их элементы во *взаимно однозначное соответствие*. Если это можно полностью осуществить, то количество элементов одного из них (и понятно какого) больше другого [9, С. 205].

Именно этот *принцип установления взаимно однозначного соответствия между элементами двух множеств* и положил Г. Кантор в начале 70-х годов прошлого века в основу сравнения и *исследования бесконечных множеств*. Если между элементами двух любых множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества имеют одну и ту же *мощность*, или они *равномощны*, или *эквивалентны*. Кантор писал, что мощность совпадает с количеством элементов.

Более поразительным оказалось другое открытие, сделанное Кантором в 1873г. Все три множества – *натуральных чисел, рациональных чисел, алгебраических чисел* – имеют *одну и ту же* *мощность*, иначе говоря, *множество рациональных чисел и множество алгебраических чисел* являются *счетными множествами*.

Пример 5.

В качестве примера многие математики приводят парадокс гостиницы с бесконечным числом номеров, придуманный немецким математиком Давидом Гильбертом. Все номера гостиницы пронумерованы от 1 и далее в порядке возрастания. В сезон отпусков гостиница оказалась полностью заполнена, к радости ее владельца. Однако внезапно китайский туроператор прислал срочное сообщение: на следующий день должно приехать множество китайских путешественников. Для всех них нужно найти номера, но никого из уже заселившихся постояльцев выселять нельзя. Владелец отеля прекрасно знает математику и без труда нашел решение. Он попросил всех постояльцев переехать в комнату, номер которой в два раза больше, чем номер прежней комнаты. В гостинице снова появилось бесконечное число комнат, и всем новоприбывшим путешественникам хватило мест. Счастливый владелец гостиницы с бесконечным числом номеров продолжает работу благодаря своим знаниям бесконечности.

Кантор открыл, что *не все бесконечные множества равномощны*, что существуют разные степени бесконечности. Действительно, так как мощность действительных чисел больше мощности множества натуральные чисел. Вообще доказывается, что любое несчетное множество имеет большую мощность, чем всякое счетное множество.

В 1874 г. Кантор поставил вопрос: можно ли установить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и точками отрезка? В Геттингене на праздновании столетия Гаусса он обратился с этим вопросом к виднейшим математикам. Никто не ответил: «Да»! Но ведь и сам Кантор, имевший доказательство в руках, с трудом верил ему. Он писал Дедекинду: «Я это вижу, но я этому не верю» (1877). Кантор определял мощность множества М как такое свойство, которое остается после абстрагирования от качества элементов множества и от их порядка. Чтобы подчеркнуть этот факт двойного абстрагирования, он ввел символ $\overline{\overline{M}}$. (В русской литературе употреблялось выражение «размер области») [25, С.176; 1, С. 107].

До Кантора считалось, что *прямая содержит меньше точек, чем плоскость*. Однако в 1878 г. Кантор доказал, что в единичном квадрате не больше точек, чем в единичном отрезке, указав способ установления взаимно однозначного соответствия между точками отрезка и квадрата.

Таким образом, *мощность двумерного континуума оказалась равной мощности континуума одного измерения*. Аналогично можно доказать, что континуумы $3, 4, \dots, n, \dots$ бесконечного счетного множества измерений имеют такую же мощность, как и одномерный континуум [9, С 206]. Кантор ввел и символ эквивалентности множеств $\sim$.

«О множествах, которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, говорят, что они имеют одинаковую мощность или что они являются эквивалентными».

Говоря языком алгебры, если мощности замкнутых множеств различаются, то одно из них является строгим подмножеством другого. С открытыми все иначе. Хотя простые числа - это лишь малая часть множества целых положительных чисел, его все равно можно назвать равномощным по отношению к последнему (тот же алеф-нуль). Точно так же целые числа образуют лишь малую часть рациональных чисел (к ним также относятся и дробные). Однако рациональные числа также формируют бесконечное множество класса алеф-нуль [22, С. 99].

Определение 9.

Бесконечное множество, имеющее ту же мощность, что и мощность натуральных чисел, называется счетным множеством.После определения счетного множества приводится определение замкнутого множества относительно данной операции. [3, с. 16].

§2. Анализ программы и учебников по теме исследования

2.1. Анализ научно- методической литературы для 5- 6 классов

В соответствии с действующим государственным образовательным стандартом для 5-6 классов [46, С. 4]:

1. *Основным содержанием обязательных тем* являются следующие вопросы: *множество; элемент множества; пустое множество; подмножество; объединение и пересечение множеств; иллюстрация отношений между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна*.

2. *Учащиеся 5-6 классов должны уметь*: *приводить примеры конечных и бесконечных множеств; находить объединение и пересечение конкретных множеств; приводить примеры несложных классификаций из различных областей жизни; иллюстрировать теоретико-множественных понятия с помощью кругов Эйлера.*

Как показали результаты *анализа действующих учебников математики* 5 класса, тема «Множества» в пятом классе не рассматривается, данную тему начинают изучать в шестом классе.

Кроме того, Н. Акимова в статье «Изучение множеств в младших классах» отмечает, что основы статистики и вероятности становятся сегодня равноправной составляющей нашего обязательного школьного образования. Не во все учебники включены эти темы [2, С. 247].

В методическом пособии К. И. Нешкова, В. Н. Рудницкой, А.Д. Семушина, описан метод введения понятия *«Множества»* в младших классах. Так, например, в первой главе *«Натуральные и дробные числа»* детям вводятся понятия числа, затем отрезка и говорится о том, что все отрезки состоят из конечного множества точек, а основные свойства множества объясняются через *«шкалы», «луч», «прямую»* [41].

В статье «Методика арифметики в 6 классе» А.В. Шевкина предлагается примерное тематическое планирование по *учебнику Арифметика в 6 классе*, в которое входят темы «Круговые диаграмма» (2 часа), изучаемые в разделе «Отношения, пропорции, проценты», и «Столбчатые диаграммы и графики» (3 часа) – в разделе «Обыкновенные и десятичные дроби». Отдельно тема «Множества» в учебнике математике 6 класса автора А.В. Шевкина не рассматривается [56, С. 95].

В статье «Математика-6» Г.В. Дорофеева предлагается примерное тематическое планирование по учебнику для 6 класса, в которое входят темы «Столбчатые и круговые диаграммы» (4 часа), изучаемые в разделе «Таблицы и диаграммы». Отдельно тема «Множества» в учебнике 6 класса под редакцией Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина не рассматривается [16, С. 3].

Материалы по изучению данной темы представлены в *учебнике 6 класса Г.К. Муравина и О.В. Муравиной*. Муравин в своем учебнике ≪Алгебра 6≫ приводит только основные определения понятий множества, удовлетворяющие федеральному государственному образовательному стандарту. Например, автор учебника приводит определения понятий множества, конечного и бесконечного множества, пустого множества, подмножества, а также операции над множествами, таких, как пересечение и объединение множеств.

В программе курса математики для 5-11 классов общеобразовательных учреждений по данному учебнику указано, что при изучении темы «Множества» рассматриваются следующие вопросы: *1) понятие множества; 2) элементы множества; 3) подмножества; 4) пустое множество; 5) объединение и пересечение множеств; 6) круги Эйлера.*

Основная цель изучения темы «Множества» – выработать умение извлекать информацию из круговых и столбчатых диаграмм.

Тема «Множества» в 5-6 классах имеет развивающее значение. Знания, полученные в результате её изучения, не подлежат итоговой оценке [37, С.12].

2.2. Анализ научно- методической литературы для 7- 9 классов

В соответствии с действующим государственным образовательным стандартом *основным содержанием обязательных тем* для 7-9 классов являются следующие вопросы [47, С. 19] : *множество, элемент множества; задание множеств перечислением элементов, характеристическим свойством; стандартные обозначения числовых множеств; пустое множество и его обозначение; подмножество; объединение и пересечение множеств, разность множеств; иллюстрация отношений между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна; закон Моргана; понятие о классификации*.

В ходе изучения данных тем, в соответствии с действующим государственным образовательным стандартом, *учащиеся 7-9 классов должны уметь* [46, С.12]: *приводить примеры конечных и бесконечных множеств; находить объединение и пересечение конкретных множеств, разность множеств; приводить примеры несложных классификаций; использовать теоретико-множественную символику и язык при решении задач в ходе изучения различных разделов курса*.

В учебнике для 7 классов Ю.Н. Макарычева подробно изложен материал на тему «Множества». В его учебнике приведены определения элемента множества, пустого множества и подмножества. В учебниках Г.К. Муравина, А.Г. Мордковича [33] и Г.В. Дорофеева тема «Множества» рассматривается в таких темах, как «Сравнение чисел», «Решение уравнений», «Уравнения и системы уравнений», а также темы «Множество точек на координатной прямой» и «Множество точек на координатной плоскости».

В учебнике для 8 класса, ***для общеобразовательных классов,*** подробно изложен материал в учебнике *Ю.Н. Макарычева* [30, С.3].

В *учебнике Г.К. Муравина, К.С. Муравина* тема «Множества» рассматривается только при изучении тем «Решение квадратных уравнений» и «Системы двух уравнений с двумя переменными и их системы», «Уравнения и системы уравнений».

В учебнике «Алгебра 7» *Г.К. Муравина, К.С. Муравина и О.В. Муравиной* [38] тема «Множества» конкретно не рассматривается, но часто используется при рассмотрении таких тем: «Сравнение чисел», «Решение уравнений», «Уравнения с двумя переменными и их системы», «Уравнения и системы уравнений».

А.Г. Мордкович [34] *в своём учебнике* рассматривает тему «Множество действительных чисел». *В учебнике С.М. Никольского* [42] приводится определение понятия «Множества», при помощи координатной оси Ox. ***Для классов с углубленным изучением математики*** тема «Множества» изложена подробна в *учебнике Н.Я. Виленкина*. В учебнике рассмотрены темы «Множества. Операции над множествами», «Характеристическое свойство множества», «Числовые множества», «Множества точек на плоскости», «Подмножества», «Пересечение множеств», «Объединение множеств», «Разность множеств», «Алгебра множеств». Н.Я. Виленкин приводит все определения по теории множеств [5, С. 3].

И в учебнике *дополнительные главы к школьному учебнику Ю.Н. Макарычева* тема рассматривается в двух параграфах «Множества и операции над ними», «Бесконечные числовые множества». Ю.Н. Макарычев в дополнительных главах к школьному учебнику тему «Множества» рассматривает только, при изучении таких тем, как «Равносильность уравнений и неравенств», «Уравнения и неравенства с одной переменной», «Уравнения с двумя переменными и их системы» и «Неравенства с двумя переменными и их системы» [30, С. 3].

Материалы по изучению данной темы представлены в *учебнике 9 класса А.Г. Мордковича и Н.П. Николаева* [35, с. 36].

В программе курса математики для 5-11 классов общеобразовательных учреждений по данному учебнику указано, что тема «Множества и операции над ними» представлена в отдельной главе «Рациональные неравенства и их системы».

В соответствии с программой А.Г. Мордковича по теме «Множества и операции над ними» учащиеся должны уметь: оценивать логическую правильность рассуждений, использовать примеры для иллюстраций, извлекать информацию, представленную на диаграммах и строить диаграммы.

В программе А.Г. Мордковича указано, что на тему «Множества и операции над ними» на изучение её, отводится 4 часа и одна контрольная работа. *Основная цель изучения темы «Множества»* – выработать умение извлекать информацию из круговых и столбчатых диаграмм [33, С. 24].

Глава 2. Методические основы обучения элементам теории множеств в курсе алгебры основной школы, 5-9 класс

§3. Методические особенности обучения элементам теории множеств

3.1. Развитие логического мышления учащихся

Под развитием учащихся подразумевается их переход от одного качественного состояния к другому более высокого уровня. В результате у учащихся появляются новообразования в структуре их учебной деятельности; например – новые интеллектуальные умения (сравнивать, рассуждать и т.д.).

Колягин Ю. М. и Луканкин Г.Л. утверждают, что исследованиями педагогов- психологов установлено, что с понятием множество ребенку приходится сталкиваться на каждом шагу в своей повседневной деятельности. Дома, в детском саду, на прогулке ребенок постоянно общается с различными множествами предметов, производит над ними различные операции, сам участвует в этих операциях или наблюдает за ними. При этом он исподволь познает многие свойства жизненных явлений явно математического характера. Так, уже в процессе игры дети сравнивают игрушки или множества игрушек по различным признакам, проводят над ними различные операции («отложим такие, как этот…», «возьмем все без…», «сложим из…», «поставим это перед тем…» т.п.). Это является необходимым условием сознательного усвоения таких важных математических понятий, как натуральное число и арифметические действия. Таким образом, построение арифметики натуральных чисел в тесной связи с понятием множества наиболее полно использует конкретный опыт ребенка, обеспечивает наивысшую степень наглядности, способствует усвоению математических понятий на основе уже сложившихся у ребенка представлений [24, С. 33].

Специфика алгебры такова, что изучение этого предмета, пожалуй, наиболее сильно влияет на умственное развитие учащихся. Но умственная деятельность учеников является очень сложной, многокомпонентной. Один из основных её компонентов – мышление, развитие которого есть важнейшая задача общего образования. Мышление обладает рядом признаков, среди которых в первую очередь выделяют логичность. Логическое мышление – непротиворечивое, обоснованное, последовательное мышление, протекающее в форме рассуждений [21, С. 33-48 , С. 4].

Воспитание логического мышления в значительной степени происходит на уроках алгебры. Неслучайно алгебру называют прикладной логикой; поскольку именно в алгебре ученик с наибольшей полнотой может увидеть демонстрацию почти всех законов логики.

Таким образом, одна из важнейших целей обучения алгебре – развитие логического мышления учащихся. Развитие логического мышления учащихся происходит в процессе формирования и совершенствования уровней, форм и операций мышления, выработки умений и навыков по их применению в познавательной и учебной деятельности, а также умений осуществлять перенос приёмов мыслительной деятельности из одной области знаний в другую.

Таким образом, если нам удастся установить влияние использования элементов теории множеств на совершенствование уровней, форм и операций мышления, то можно говорить о таком использовании как средстве усиления развития логического мышления школьников.

В первом случае рассуждение осуществляется на основе восприятия и действий с конкретными предметами, во втором случае рассуждение осуществляется с опорой на картинки, схемы, символические записки и т.д. При абстрактном мышлении отвлекаются от всяких конкретных предметов, схем и т.п., и рассуждают в уме. Из этой характеристики уровней мышления следует основная линия его развития -» … от практического мышления, скованного конкретной ситуацией, к отвлеченному, абстрактному мышлению, безгранично расширяющему сферу познания, позволяющему выходить далеко за пределы непосредственного чувственного опыта» [4, С. 37].

3.2. Особенности мышления школьников

Особенностью мышления школьников является тесное взаимодействие трех уровней мышления: наглядно-действенного, наглядно-образного и абстрактного. Однако если первые два уже достигли достаточно высокого уровня развития, то последний только начинает себя проявлять [15, С. 34].

Для алгебры специфичен абстрактный уровень мышления, однако он нисколько не уменьшает значение других уровней. Задача обучения алгебре детей школьного возраста должна заключатся не в том, чтобы заставить ребенка как можно быстрее пройти все стадии в развитии мышления, а в том чтобы обеспечить наиболее полное использование возможностей мышления имеющихся у ученика, для перехода к самому высокому абстрактному уровню мышления.

Новообразованием в сфере развития наглядно-образного мышления в данном возрасте, и соответственно, переход к более высокому уровню, является «появление сознательного отношения к символическим и знаковым средствам психической деятельности, способности к усвоению деятельности моделирования». Моделирование - это метод исследования, который предполагает создание искусственных или естественных моделей имитирующих существенные свойства оригинала [17, С. 41, 112].

Из определения важны две характеристики: модель замещает объект изучения; находится с ним в определенных отношениях.

Таким образом - моделирование - это процесс создания моделей и работы с ними. Он характеризуется определенной степенью абстрагирования, т.к. деятельность моделирования заключается в кодировании (обозначении) признаков, отношений предметов составлении модели отношений, выполнении нового действия с моделью и декодировании информации (переноса ее на реальные предметы). Деятельность моделирования позволяет отделить в сознании детей признаки предмета друг друга, сравнить предметы только по одному выделенному признаку.

Это положение согласно теории поэтапного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина, отнесено к этапу отработки действия в материализованном плане [4, С. 25; 27, С. 7].

Таким образом, процесс моделирования влияет на формирование логического мышления школьников. Развитие логического мышления школьников должно преследовать цель наиболее полного использования возрастных особенностей мышления для перехода к абстрактному уровню мышления.

Одна из трудностей перехода к самому высокому уровню состоит в том, что недооценивается имеющаяся у детей тенденции к абстрагированию. Всякий контакт с абстрактным рассматривается как трудный и весьма нежелательный. На самом деле это не так. Тенденция к абстрагированию преобладает в играх детей. Дети не боятся абстракции.

Рисовать конкретные объекты, вместо того чтобы изображать их точками – это бесполезный этап, тормозящий обучение детей алгебре. Способ представления объектов точками позволяет быстро перейти от конкретной ситуации к модели.

Точки – не дети, но они обозначают детей. Нет никакой опасности говорить: «Это ребенок», показывая на точку, которая его обозначает, точно так же, как алгебр говорит: «Точка А», вместо «Точка, обозначаемая буквой А».

На уроках мадам Фредерик дети моделируют отношения между объектами действий языком стрелок (графов), которые помогают им сформулировать ответ, т.к. при помощи стрелок ученики ясно представляют то, о чем они говорят или что объясняют. Интересно, что дети сами предлагают изображать отношения стрелками, демонстрируя этим свою активную способность к абстракции.

Ребенок, плохо выражающий свои мысли, без затруднения воспринимает абстрактный язык графов в качестве средства для моделирования хорошо знакомых ситуаций, разумеется, при условии постоянного контакта с реальностью.

Под нестандартными задачами рассматриваем задачи определённых видов, которые в настоящее время всё в большем количестве предлагаются в учебниках в разделе “занимательные задачи” или “задачи повышенной трудности”. Следовательно, надо учить детей поискам решения таких задач и решать их. Отсутствие методических рекомендаций вызывает определённую трудность у учителя, именно, именно при обучении поиску решения этих задач (чаще всего эти задачи учитель опускает или удовлетворяется правильным ответом одного – двух учеников не требуя при этом объяснений) [13, С. 35].

Организовать поиск решения таких задач, так чтобы большинство детей в классе смогли решить данную задачу очень сложно. Но решать такие задачи необходимо, так как они влияют на развитие мышления учащихся. Следовательно, данная тема остаётся на сегодняшний день актуальной.

Современный этап развития общества выдвигает особые требования к школьному образованию: школа должна формировать человека не только обладающим определённым набором знаний, но и умеющим творчески применять их.

Поиск новых путей совершенствования обучения, прежде всего, направлены на то, чтобы разрешить противоречие между постоянно растущим объёмом знаний и ограниченными сроками школьного образования. [18, С. 32].

3.3. Развивающее и проблемное обучение на уроках алгебры

Одним из путей разрешения данного противоречия является совершенствование развивающего обучения, прежде всего на развитие творческих способностей детей. Любое обучение в той или иной мере развивает. Развивающее обучение – это такое обучение, в котором развитие детей школьного возраста выступает важнейшей целью, оно специально организуется [7, С. 5].

Основным принципом развивающего обучения является проблемность. Проблемным называется такое обучение, при котором усвоение знаний и этап формирования интеллектуальных навыков происходит в процессе относительно самостоятельного решения системы задач – проблем, протекающего под общим руководством учителя [12, С. 6]. Такое обучение оказывает значительное воздействие на умственное развитие школьников, так как соответствует самой природе мышления как процесса, направленного на открытие новых для человека закономерностей, путём решения познавательных и практических проблем.

Проблема – это ситуация, требующая от субъекта некоторого действия, направленного на нахождение неизвестного на основе использования его связей с известными, в условиях, когда субъект не обладает способом (алгоритмом) этого действия.

Уровень математической подготовки учащихся характеризуется в первую очередь умением решать задачи. На уроках алгебры школьники решают много различных задач, однако большинство из них носят тренировочный характер, являясь задачами на «известный вид». Далеко не все из них в процессе обучения являются проблемными.

В соответствии с терминологией проблемного обучения, проблемной при обучении алгебре является задача, способ решения которой ученику не известен. Такие задачи называются нестандартными. Одна и та же задача может быть стандартной или нестандартной, в зависимости от того, обучал ли учитель решению аналогичных задач учащихся или нет. Решение нестандартных задач вызывает у учеников, как правило, наибольшие затруднения [44, С. 266].

Однако правильно организованный процесс поиска решения задачи помогает ребёнку преодолеть трудности, разрешить противоречия между имеющимися знаниями и требованиями задачи, приводит в состояние активности его самостоятельную мыслительную деятельность, которая способствует формированию новых свойств личности, положительных качеств ума и тем самым оказывает влияние на сдвиг в умственном развитие. Учителя используют нестандартные задачи, но видят их роль лишь в формировании интереса учащихся к алгебре. Системно, планомерной работой, именно по обучению решению нестандартных задач, в школе не наблюдается.

В алгебре решаются не любые задачи, а лишь математические и сводимые к ним. Но умение решать математические задачи оказывает огромное влияние на общее умение решать задачи, и тот, кто умеет решать математические задачи, сумеет решить и другие (житейские, производственные, научные и т.д.), а с такого рода задачами человек встречается ежедневно. Поэтому научить решать задачи чрезвычайно важно.

В алгебре решаются собственно математические задачи, объектами которых являются какие-либо математические объекты, понятия (решение уравнений, неравенств и т.д.) и практические задачи, сводимые к математическим задачам, объектами которых являются реальные предметы или явления (о движении машин, о размерах реальных предметов и т.д.)

Для сведения практических задач к математическим, реальные объекты, рассматриваемые в этих задачах, заменяются соответствующими математическими объектами (точками, числами, отрезками и т.д.) и тем самым получается модель практической задачи – математическая задача.

Модель – объект, который служит для получения знаний о другом объекте - оригинале и находится с ним в определённых отношениях.

Математические объекты лишены любых вещественных (материальных) и энергетических характеристик, имея лишь одну характеристику: эти объекты находятся в определённых отношениях друг с другом, в отношениях количественных, пространственных и им подобных. Идеальными являются знаково-символические модели – запись каких-либо особенностей закономерностей оригинала с помощью математического языка.

В настоящее время сложилась концепция алгебры, которую характеризуют следующим тезисом: в основе всей алгебры лежит чистая теория множеств [51, С. 46].

Этот принцип даёт возможность рассматривать математические объекты и отношения между ними с позиций данной теории.

Возникает вопрос: каким образом, в связи с каким материалом можно использовать элементы теории множеств на уроках алгебры и как такое использование может отразиться на уровне развития логического мышления школьников.

§4. Системы заданий по теме «Элементы теории множеств в курсе алгебры основной школы»

4.1. Системы заданий по теме «Элементы теории множеств» в 5- 6 классах

Отметим, что система упражнений включает в себя [47, С. 129]:

1) устные задачи на понятие множества;

2) задачи на понятие элемента множества;

3) задачи на понятие пустого множества;

4) задачи на понятие подмножества;

5) задачи на пересечение и объединение множеств;

6) задачи на иллюстрацию отношений между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Процесс решения таких задач соответствует описанной схеме.

1. Устные задачи на понятие множества

2. Приведите примеры множеств, которые встречаются в жизненных ситуациях.

3. B – множество четных чисел. Зная это, запишите с помощью символов следующие предложения: 1) число 20 четное; 2) число 17 не является четным.

4. Дайте название множеству: 1) 1, 2, 3, 4, …; 2) 2, 4, 6, 8, …; 3) 10, 20, 30, 40.

5. Как называется: 1) множество птиц; 2) множество цветов; 3) множество лошадей.

6. Запишите множество цифр, с помощью которых записаны числа: 1) 140576; 2) 223301; 3) 10001110.

7. $\{1; 0; 7; 3\}$ - множество цифр числа A, $\{1; 0; 3; 4\}$– множество цифр числа B. Можно ли утверждать, что число A меньше числа B?

8. {5; 9; 8; 7; 6} – множество цифр числа C, $\{9, 8, 7, 1\}$- множество цифр числа D. Можно ли утверждать, что число C больше числа D?

9. Напишите множество натуральных чисел a, при которых верно равенство $\frac{a}{13} < \frac{8}{13}$.

9.Прочитайте запись [30, С. 6]:

а) 43 ∈ N

б) -3 ∈ Z

в) $\frac{3}{4}$ ∈ Q

г) 1,2 ∉ Z

10.Поставьте вместо звездочки знак ∈ или ∉ так, чтобы получилось верное высказывание [30, С. 6]:

а) 24 * N

б) 49 * Z

в) – 17 * N

г) – 23 * Q

Ответы:

1. Множество машин, множество цветов, множество городов, множество цифр.

2. 1) $20 \in \{B\}$; 2) $17 \notin \{B\}$.

3. 1) множество натуральных чисел; 2) множество четных чисел; 3) множество чисел, делящихся на 10.

4. 1) стая; 2) букет; 3) стадо.

5. 1) $\{0; 1; 4; 5; 6; 7\}$; 2) $\{0; 1; 2; 3\}$; 3) $\{0; 1\}$.

6. «нельзя», т.к. множества A и B имеют одинаковое количество элементов.

7. «можно», т.к. множество C имеет больше элементов, чем множество D.

8. $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

9. *а)* число 43 принадлежит множеству N (множество натуральных чисел); *б)* -3 принадлежит множеству Z (множество целых чисел); *в)* $\frac{3}{4}$ принадлежит множеству Q (множество рациональных чисел); *г)* 1,2 не принадлежит множеству Z (множество целых чисел)

10. *а)* 24 ∈ N; *б) 49 ∈ Z;* *в)* -17 ∉ N; *г)* – 23 ∈ Q.

2.Задачи на понятие элемента множества

1. Назовите три элемента множества: *а)* четырехугольников; *б)* деревьев.

2. Сколько элементов в множестве: *а)* цифр; *б)* сторон треугольника; в) букв в алфавите русского языка.

3. Задайте перечислением элементов следующие множества: *а)* однозначных простых чисел; *б)* двузначных четных чисел, меньших 20; *в)* однозначных чисел кратных 3.

4. P – множество натуральных чисел, больших 7 и меньших 14. Выясните, принадлежат или не принадлежат этому множеству числа 13, 10, 5, 7, 14. Ответ запишите, используя знаки ∈ и ∉.

5. Множество A состоит из чисел 3 и 5, а множество B – из чисел 4, 6 и 8. Составьте множество дробей, числители которых принадлежат множеству A, а знаменатели – множеству B. Сколько элементов в множестве этих дробей?

6. Пусть K– множество всех натуральных чисел, для которых справедливо неравенство $-7 < x \leq 5$. Выпишите все элементы данного множества.

7. Задайте перечислением всех элементов множества, заданные с помощью свойства: *а)* $A = \{x \in N | x < 5\}$; *б)* $C = \{x \in Z | 0 < x \leq 5\}$.

8. Перечислите элементы множеств, заданных характеристическим свойствами: *а)* $A = \{x \in N | -2 < x < 5\}$; *б)* $B = \{x \in N | x = 3k + 5, k \in Z, x < 16\}$.

9.Найдите множество натуральных делителей числа:

а) 12 *в)*385

б) 40 *г)*73

10. Сколько элементов содержит:

а) множество простых двузначных чисел;

б) множество простых делителей числа 1001.

Ответы:

1. *а)* Квадрат, трапеция, ромб; *б) сосна, дуб, береза.*
2. *а)* ∞; *б)* 3; *в)* 33.
3. *а)* $\{1; 2; 3; 5; 7\}$; *б)* $\{10; 12; 14; 16; 18\}$; *в)*$\{3; 6; 9\}$.
4. $7 < p < 14$, следовательно $13 \in \{P\}; 10 \in \{P\};\ 7 \notin \{P\}; 5 \in \{P\};\ 14 \notin \{P\}$
5. $A = \{3; 5\}$ и $B = \{4, 6, 8\}$ следовательно $\frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}$
6. $\text{К} = \{-6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
7. *а)* $A = \{1; 2; 3; 4\}$; *б)* $C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
8. *а)* $A = \{1; 2; 3; 4\}$; *б)* $\{1; 2; 3\}$.
9. *а)*{1; 2; 3; 4; 6; 12}; *б)*{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40}; *в)*{1; 5; 7; 11; 35; 55; 77; 385}; *г)*{1; 73}.
10. *а)*{11; 13; 17; 19} *б)*{1; 7; 11; 13}.

3.Задачи на понятие пустого множества

1. Существуют ли: *а)* треугольники, у которых углы не равны; *б)* млекопитающие имеющие шесть ног; *в)*числа, которые больше 10, но меньше 1.

2. Назовите два примера пустого множества.

3. Какие из множеств являются пустыми:

а) $2x = 4, x \in$ N

б) $x + 2 = 0, x \in$ N

в)$1 + 2 = x, x \in$ N

г) $x + 5 = x, x \in$ N

4. Даны числа : 7, 3, 15, 17, 9. Запишите множества :

а) N – множество натуральных чисел;

б) множество четных чисел;

в) множество отрицательных чисел;

г) множество чисел кратных 3.

5. Существуют ли правильные треугольники, у которых углы не равны?

6. Как называется множество нечетных чисел, делящихся на 4?

7. Укажите среди следующих множеств пустое: а) множество параллелограммов с неравными смежными сторонами; б) множество целых корней уравнения $x^2 - 2x + 1 = 0$?

8. Какие из следующих множеств пустые: а) множество корней уравнения $|-5x| = 0$; б) множество корней уравнения $|8x - 9| = -5$?

Ответы:

1. *а)* не существует правильных треугольников, у которых углы не равны; *б)* не существует млекопитающих, у которых шесть ног; *в)* не существует чисел, которые больше 10, но меньше

2. *а)* множества корней уравнения $0 * x = 1$; *б)* множество натуральных чисел, меньших;

3. *б) ; г)*

4. *а)* $\{3; 9; 15; 17\}$; *б)*$\{\emptyset\}$; *в)*$\{\emptyset\}$; *г)*$\{3; 9\}$.

5. Нет, у правильных треугольников все углы равны, т.е. множество всех неравных углов в правильном треугольнике называется пустым множеством.

6. Пустое множество.

7. *а)* пустое множество ; *а)* и *б)* пустые множества.

8. $\emptyset$.

4. Задачи на понятие подмножества

1. Приведите примеры подмножеств.

2. Даны два множества: множество девочек и множество мальчиков данного класса. Какому множеству принадлежат оба эти множества?

3. Пусть M – множество значений выражения $3{,}5 + 9a$ при $a \in \{0{,}5; 1\}$. Запишите все подмножества M.

4. Выпишите все подмножества множества натуральных делителей числа 10.

5. В чем ошибочность следующих утверждений: а) *если элементы множества А принадлежат другому множеству В, то А является подмножеством множества В; б) Если два множества содержат одни и те же элементы, то они равны?*

6. Даны множества: A – множество целых чисел; B – множество четных чисел; C – множество нечетных чисел; D – множество чисел, кратных 3; E – множество чисел, кратных 6; T – множество чисел, оканчивающихся цифрой 0; K – множество чисел, которые при делении на 8 дают в остатке 5; F – множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно; M – множество чисел, кратных 2 и 5 одновременно. Имеются ли среди данных множеств равные множества? Укажите, какие их множества являются подмножествами других множеств. Ответы на вопросы запишите с помощью символов.

7. Является ли множество A подмножеством множества B, если: 1) A – множество натуральных четных чисел, B – множество натуральных чисел; 2) A – множество делителей числа 12, B–множество делителей числа 18.

8. Объясните, почему множество $X = \{2, 4, 6\}$ является подмножеством множества $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, а множество $Z = \{4, 6, 12\}$нет.

9. Дано множество $A = \{5, 10, 15, 25, \dots\}$. Запишите два множества, равные множеству A.

10. Пусть A – множество всех равносторонних треугольников, а B – множество всех равноугольных треугольников. Верно ли что всякий равноугольный треугольник является равносторонним?

Ответы:

1. Люди – множество, а подмножество – это мужчины, женщины и дети.

2. Множество всего класса.

3. Решение: $3{,}5 + 9 * 0{,}5 = 8$; $3{,}5 + 9 * 0 = 3{,}5$; $3{,}5 + 9 * 1 = 12{,}5$; $8; 3{,}5; 12{,}5$ - являются подмножествами данного множества.

4. $\{2; 5\}$ – подмножество натуральных делителей числа 10.

5. Ошибочность нет.

6. $\{B\} \in \{A\}; \{C\} \in \{A\}; \{D\} \in \{A\}; \{E\} \in \{A\}; \{T\} \in \{A\}; \{F\} \in \{A\}; \{M\} \in \{A\}; \{B\} \in \{F\}; \{D\} \in \{F\}$.

7. $A = \{1; 2; 3; 4; \dots\}, B = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$ - да является; 2) $A = \{2; 4; 6; 12\}, B = \{2; 3; 6; 18\}$ - да является.

8. $Z = \{4; 6; 8\}$ не является подмножеством множества $Y = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$.

9. $B = \{30; 35; 40; 45; \dots\}$ и $C = \{50; 55; 60; 65; \dots\}$.

10. Каждый равносторонний треугольник является равноугольным, т.е. $A \subset B$. Верно, что и всякий равноугольный треугольник является равносторонним, т.е. $B \subset A$.

5.Задачи на пересечение и объединение множеств

1. Опишите множество, которое является пересечением множеств A и B, если: 1) A – множество простых чисел, B – множество четных чисел; 2) A – множество делителей числа 15, B–множество делителей числа 45.

2. Запишите числа, входящих в пересечение множеств C и D: 1) C – множество четных чисел, D – множество чисел кратных 3; 2) C – множество чисел, кратных 5, D–множество четных чисел.

3. Из каких элементов состоит множество C, если известно, что: A– множество учащихся 6 класса, В – множество всех мальчиков вашей школы и $C = A \cap B$?

4. Найдите пересечение множеств A и B, если: 1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $B = \{b, e, f, k, l\}$; 2) $A = \{26; 39; 5; 58; 17; 81\}$и $B = \{17; 26; 58\}$; 3) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$ и $B = \{2, 6, 9, 1, 7\}$.

5. Пусть A – множество цифр, входящих в число 5425109, B– множество цифр, входящих в число 8874183. Найдите объединение.

6. Пусть A – множество цифр, входящих в число 5425109, B– множество цифр, входящих в число 8874183. Найдите пересечение.

7. Даны два множества. В одном из них шесть элементов. Известно, что данные множества не пересекаются, а в их объединение 57 элементов. Сколько элементов во втором множестве?

8. Пусть $A = \{-4;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2\}$, $C = \{x | -4 \leq x < 5\}$.Запишите следующие множества: $A \cup B, A \cap B, A \cup C, A \cap C, B \cup C$.

9. Пусть A – множество простых чисел, B – множество положительных четных чисел. Найти пересечение этих множеств.

10. Пусть A – множество всех правильных многоугольников, B – множество всех треугольников. Опишите множество $A \cap B$.

Ответы:

1. 1)$\{\emptyset\}$; 2) $\{90; 135; 180; \dots\}$.

2. 1)18, 24, 36, …; 2) 30, 60, 120, … .

3. Множество C состоит из множества мальчиков в 6 классе.

4. 1)$A \cap B = \{b.e\}$; 2) $A \cap B = \{26; 58\}$; 3) $A \cap B = \{\emptyset\}$.

5. $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$.

6. $A \cap B = \{1; 4\}$;

7. 51 элемент во втором множестве.

8. $A \cup B = \{-4;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; $A \cap B = \{0; 1; 2\}$; $A \cup C = \{-4;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; $A \cap C = \{-4;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2\}$.

9. $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; \dots\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10; \dots\}$. $A \cap B = \{2\}$ - пересечение множеств A и B.

10. $A \cap B$ = {Равносторонний треугольник}

6. Задачи на иллюстрацию отношений между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна

1. Из 40 учащихся шестого класса 32 занимаются в математическом кружке, 21 – в спортивной секции, 15 учащихся – и в кружке, и в спортивной секции. Сколько учащихся не занимаются ни в математическом кружке, ни в спортивной секции? Решение показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

2. Из 38 учащихся шестого класса изостудии посещают 28 человек, а 17 – лыжную секцию. Сколько «лыжников» посещают изостудию, если в классе нет учащихся, которые не посещают изостудию или лыжную секцию? Решение показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

3. Из 38 учащихся шестого класса изостудию посещают 28 человек, а 17 – лыжную секцию. Сколько «лыжников» посещают изостудию, если 4 человека в классе не посещают ни лыжную секцию, ни изостудию? Решение показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

4. Учащемуся поручено написать заметку в стенную газету об успеваемости класса, в котором 40 человек, за первое полугодие. Он взял журнал, сделал следующие выводы: из 40 учащихся не имеет троек: по русскому языку – 25 человек, по математике – 28 человек, по русскому языку и математике – 16 человек, по физике – 31 человек, по физике и

математике – 22 человека, по физике и русскому языку – 16 человек. Кроме того, 12 человек учатся без троек по всем предметам. Редактор, прочитав заметку и подумав, сказал: «Ты ошибся в счете, твои выводы явно не верные». Составьте схему Эйлера и объясните, почему это так. Решение показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

5. Из 12 учащихся шестого класса 8 занимаются в спортивной секции, 9 человек – в математическом кружке. Сколько человек занимается в двух кружках, если известно, что каждый занимается хотя бы в одном кружке? Сколько человек занимается в одном кружке? Решение показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

6. В классе 35 человек. Все в этом классе занимаются спортом: 25 человек – волейболом, 19 – футболом. Во всех трех секциях занимаются 4 человека, волейболом и баскетболом – 10 человек, баскетболом и футболом – 7 человек, волейболом и футболом – 11 человек. Сколько человек занимаются только в одной секции и в какой именно? Решение показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

7. Все 80 учащихся шестых классов изучают хотя бы один иностранный язык: 40 человек – английский, 33 – французский, 15 – немецкий. Двое изучают все три языка, трое – английский и немецкий, четверо – немецкий и французский, пятеро – английский и французский. Верно ли составлена задача? Решение показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

8. В классе 35 человек. Из них занимаются в математическом кружке 20 человек, 11 человек – в кружке «Умелые руки», 10 ребят в эти кружки не ходят. Сколько «математиков» занимаются в кружке «умелые руки»? Решение показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

9. В трех седьмых классах 70 ребят. Из них 27 занимаются танцами, 32 поют в хоре, 22 спортсмены. На танцы ходят 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, 3 ученика занимаются и спортом, и танцами и

поют в хоре. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются ни спортом, ни танцами? Сколько ребят заняты только спортом?

10. На полке стояло 26 волшебных книг по заклинаниям, все они были прочитаны. Из них 4 прочитал и Гарри Поттер, и Рон. Гермиона прочитала 7 книг, которых не читали ни Гарри Поттер, ни Рон, и две книги, которые читал Гарри Поттер. Всего Гарри Поттер прочитал 11 книг. Сколько книг прочитал только Рон?

Ответы:

1. 40– кол-во учащихся в шестом классе; 32– кол-во учащихся, занимающихся в математическом кружке; 21– кол-во учащихся, занимающихся в спортивной секции; 15 – кол-во учащихся, занимающихся и в кружке, и в спортивной секции; 1) 32+21-15=38 – кол-во учащихся, которые чем-то занимаются; 2) 40-38= 2 – кол-во учащихся, которые не занимаются не в математическом кружке ни с спортивной секции (рис. 6).

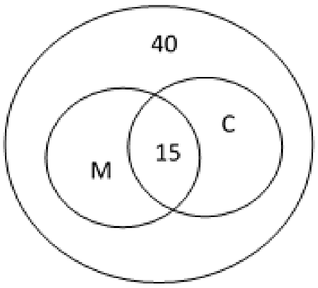


Рис. 6.

2. 38 – кол-во учащихся всего в шестом классе, 28 учащихся занимаются ИЗО, а 17 ходят на лыжную секцию. $38 = 28 + 17 - x$; $x = 7$. Ответ: 7 – лыжников посещают ИЗО (рисунок 7).

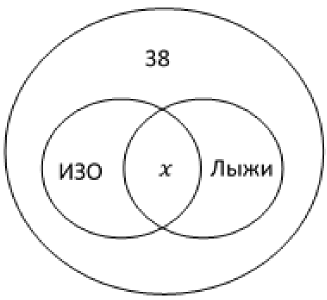


Рис. 7.

3. 28+17=45 – кол-во мест в изостудии и в лыжной секции; 2) 38-4=34 – кол-во мест, которые посещают изостудию и лыжную секцию; 3) 45-34=11 – лыжников посещают изостудию (рисунок 8).

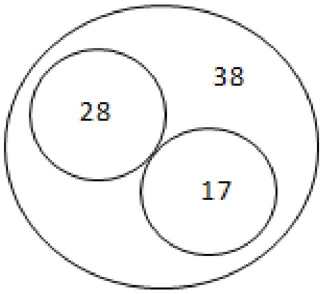


Рис. 8.

4. Выводы построены не верно, так как $40 = 25 + 28 + 31 - 16 - 16 - 22 + 12 + x, x = -2$ (рисунок 9).

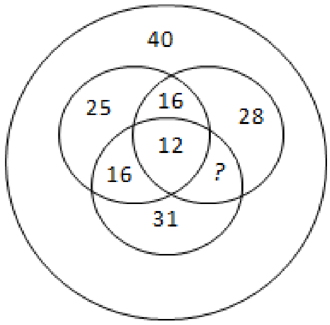


Рис. 9.

5. 12 – всего учащихся в шестом классе. $12 = 8 + 9 - x$; $x = 5$; $8 - 5 = 3$ – занимается спортом; $9 - 5 = 4$ – занимаются математикой; $3 + 4 = 7$ – занимаются и там и там. (рисунок 10).

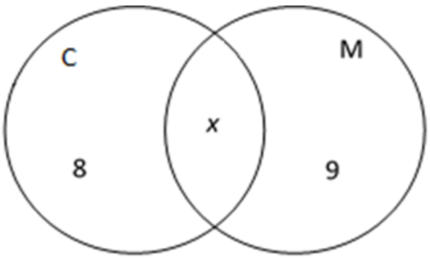


Рис. 10.

6. 35=25+15+19-10-11-7+4; x=25-10-11+4; x=8; y=15-10-11+4; y=2; z=19-11-7+4; z=5. 8 – занимаются волейболом, 5- занимаются футболом, 2 – занимаются баскетболом. (рисунок 11).

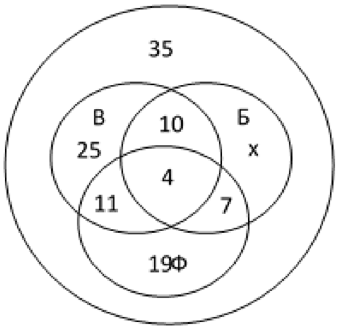


Рис. 11.

7. Нет, не верно, так как $80 \neq 40 + 33 + 15 - 5 - 4 - 3 + 2$ или $80 \neq 78$. (рисунок 12).

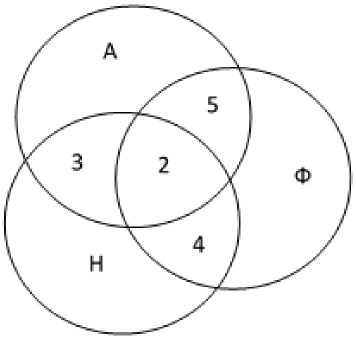


Рис. 12.

8. $35 = 20 + 11 + 10 - x;\ 35 = 41 - x;\ x = 6$ – математиков занимаются в кружке «Умелые руки». (рисунок 13).

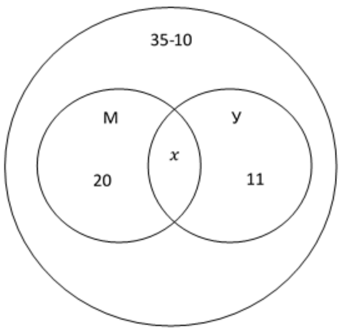


Рис. 13.

9. 22 – (5 + 3 + 3) = 11 занимаются только спортом;
70 – (11 + 12 + 19 + 7 + 3 + 3 + 5) = 10 – не поют в хоре, не занимаются в драмкружке, не увлекаются спортом. (рисунок 14)

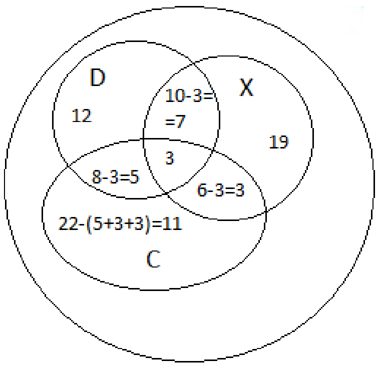


Рис. 14.

10. Учитывая условия задачи, чертеж будет таков: Так как Гарри Поттер (Н) всего прочитал 11 книг, из них 4 книги читал Рон (R) и 2 книги – Гермиона (G), то 11 – 4 – 2 = 5 – книг прочитал только Гарри. Следовательно, 26 – 7 – 2 – 5 – 4 = 8 – книг прочитал только Рон. (рисунок 15).

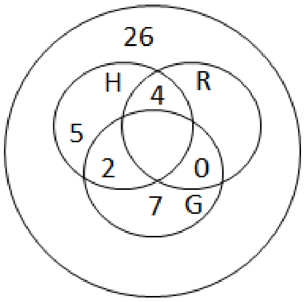


Рис. 15.

Таким образом, составлена система упражнений на формирование основных понятий по изучению основных вопросов темы, с приведенными к ним решениям.

4.2.Системы заданий по теме «Элементы теории множеств» в 7- 9 классах средней школы

Отметим, что представленная система упражнений соответствует требованиям по формированию математических понятий Г.И. Саранцева [51, С. 129].

Система упражнений включает в себя:

1) устные задачи на понятие множества;

2) задачи на понятие элемента множества;

3) задачи на задание множеств перечислением элементов характеристическим свойством;

4) задачи на пересечение и объединение множеств;

5) задачи на понятие разности множеств;

6) задачи на понятие мощность множества;

7) задачи на иллюстрацию отношений между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Процесс решения таких задач соответствует описанной схеме.

1.Устные задачи на понятие множества

1. Назовите известные вам названия множества городов.

2. Запишите множество всех цифр.

3. Пусть А – множество делителей числа 60. Верна ли запись: $7 \in A; 10 \in A; 20 \notin A$?

4. Даны числа: 325; 0; -17; -3,8; 7. Установите, какие из них принадлежат множеству: 1) натуральных чисел; 2) целых чисел; 3) рациональных чисел; 4) действительных чисел.

5. Найдите множество корней уравнения $(x-1)(x-3)(x+5)=0$.

6. {5; 9; 8; 7; 6} – множество цифр A, {1; 0; 3; 4} – множество цифр числа B. Можно ли утверждать, что число A меньше числа B?

7. Среди множеств $A=\{x|x\in Z, x^2\le 25\}$, $B=\{x|x\in Z, -3\le x\le 5\}$, $C=\{x|x\in Z, |x|\le 5\}$, $D=\{x|x\in Z, |x-1|\le 4\}$ выделите равные множества.

8. Найдите множество натуральных делителей числа 128.

9. Найдите множество решений системы уравнений: $\begin{cases}(x+1)^2-(x-2)^2=9\\(y+1)^2-(y-1)^2=4y\end{cases}$;

10. Пусть A – множество всех многочленов от одной переменной x, все коэффициенты которых целые. Верна ли запись: $x^2-15x+6\in A$?

Ответ:

1. Самара, Жигулевск, Калининград, Москва.

2. ∞ множество.

3. $7 \notin A$; $10 \in A$;$20 \in A$;

1) $7 \in N, 325 \in N$; 2) $-17 \in Z,\ 7 \in Z,\ 325 \in Z$; 3) $-3{,}8 \in Q$; 4)$7 \in R; 325 \in R$.

4. $\{1; 3; -5\}$.

5. Нет, так как множество A содержит меньше элементов, чем множество B.

6. $A = \{x|x \in Z, x^2 \leq 25\}$ и $C = \{x|x \in Z, |x| \leq 5\}$ являются равными.

7. $B = \{x|x \in Z, -3 \leq x \leq 5\}$ и $D = \{x|x \in Z, |x-1| \leq 4\}$ являются равными.

8. $\{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$.

9. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$; (3; 1).

10. $x^2 - 15x + 6 \in A$ верно.

2.Задачи на понятие элемента множества

1. Назовите известные вам элементы множества.

2. Запишите путем перечисления элементов: *а)* множество простых чисел первого десятка; *б)* множество букв в слове «транспортир»; *в)* множество корней уравнения $x = 2$.

3. Пусть A – множество всех существ, умеющих летать, B – множество всех насекомых, C – множество всех птиц. Назовите два элемента множества B, не являющихся элементами множества A, и существуют ли элементы, принадлежащие всем трем множествам?

4. A– множество всех делителей числа 40. Перечислите элементы этого множества. Верна ли запись: $9 \in A$; $10 \in A$; $-8 \in A$; $4 \notin A$; $0 \in A$; $0 \notin A$?

5. Запишите путем перечисления элементов множества: *а)* $A = \{x|x \in N, x < 12\}$; *б)* $B = \{x|x \in Z, |x| < 5\}$.

6. Сколько элементов содержит множество простых двузначных чисел?

7. Пусть M – множество всех натуральных чисел, для которых справедливо неравенство $m < 7$. Назовите элементы данного множества. Перечислите натуральные числа, не принадлежащие данному множеству.

8. Выпишите элементы множества натуральных чисел, которые являются решением неравенства, левая часть которого – неправильная дробь: $\frac{5}{x} < x$.

9. Среди данных множеств выделите равные.

$A = \{x|x \in Z, x^2 \leq 25$; $B = \{x|x \in Z, -3 \leq x \leq 5\}$

$C = \{x|x \in Z, |x| \leq 5\}$; $D = \{x|x \in Z, |x-1| \leq 4\}$

10. Найдите множество корней уравнения:

а) $2(3x-7) = 6x+1$; *б)* $5x-7 = 3x+19$

Ответ:

1. Например, букет – это множество цветов, а цветок – это элемент множества.

2. *а)* $\{1; 3; 5; 7\}$; *б)* {т ; р; а; н; с; п; о; и }; *в)* 2.

3. Не существуют такие элементы, принадлежащие всем трем данным множествам. Например, муравьи и кузнечики относятся к множеству В.

4. A={1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40}. $9 \notin A; 10 \in A; -8 \in A; 4 \in A; 0 \notin A$.

5. *а)* $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$;

б) $B = \{-5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

6. 21 – элемент содержит множество простых двузначных чисел.

7. $M \in \{1, 2, 3, 4, 5, \}$; $M \notin \{7, 8, 9, \dots.\}$

8. $x \in \{5\}$.

9. Множество В ={-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5} равно множеству D.

10. *а)* $6x - 6x = 1 + 14$; $x \in \{\emptyset\}$

б) $2x = 26$ *;* $x \in \{13\}$

3.Задачи на задание множеств перечислением элементов характеристическим свойством

1. В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им. *а)* {сумма; разность; множитель; частное}; *б)* {4; 16; 22; 27; 30; 34}; *в)* {1; 15; 16; 25; 64; 121}; *г)* {синий; красный; круглый; бежевый; зеленый}; *д)* {4; 6; 12; 81; 441; 1113}; *е)* {Обь; Иртыш; Волга; Байкал; Ангара; Амур}

2. Задайте характеристическим свойством множества: а) всех правильных многоугольников; б) параллельных прямых; в) всех натуральных чисел, кратных 5.

3. Запишите с помощью знака равенства и фигурных скобок предложения: 1) X – множество чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5; 2) Y – множество букв в слове «математика».

4. Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.

5. Укажите характеристическое свойство элементов множества: 1) {а, е, ё, и, о, у, э, ю, я, ы}; 2) {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}.

6. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством: $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$.

7. Дано множество $A = \{n^2 + 1 | n \in N\}$. Указать три элемента из этого множества.

8. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства (x – действительное число): 1) $x > 5,3$; 2) $x \leq -3{,}8$.

9. А – множество двузначных чисел, запись которых оканчивается цифрой 1. Принадлежат ли этому множеству числа 28, 31, 321, 61?

10. Исследуйте, принадлежит ли число $\frac{5}{6}$ множеству $A = \{\frac{n^2+1}{n^2+4} | n \in N\}$?

Ответ:

1. *а)* результаты арифметических действий; множитель; *б)* четные числа; 27; *в)* квадраты чисел; 15; *г)* прилагательные, определяющие цвет; круглый; *д)* кратны трем; 4; *е)* реки; Байкал;

2. *а)* многоугольники с равными сторонами и равными углами; *б)* прямые, не имеющие общих точек; *в)* $\{5n \mid n \in N\}$.

3. *а)* $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; *б)* $y \in \{м; а; т; е; и; к\}$.

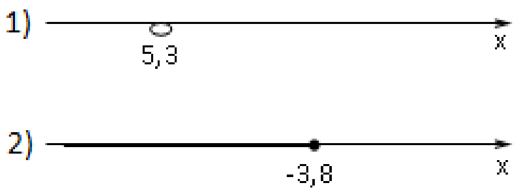
4. Множество N натуральных чисел – бесконечное множество; множество N положительных чисел, не больших 100 – это конечное множество.

5. гласные буквы алфавита; 2) A={11n,n<9|n∈N}.

6. $\{3; 5\}$.

7. $1, 2, 3.$

8.



9. $28 \notin A; 31 \in A; 321 \notin A; 61 \in A.$

10. Нет, так как $\frac{61}{169} \notin N$.

4.Задачи на пересечение и объединение множеств

1. Приведите свои примеры применения в реальной жизни операции пересечения множеств.

2. Найти наибольший общий делитель чисел 54 и 72.

3. Пусть A – множество цифр числа 234375, а B – множество цифр, которые использовались для записи числа 125582. Найти объединение множеств A и B.

4. Существуют ли два угла, такие, чтобы их пересечением (как множество точек) мог служить развернутый угол?

5. Даны два множества. В одном из них 6 элементов. Известно, что данные множества не пересекаются, а в их объединении 57 элементов? Сколько элементов во втором множестве?

6. Решить системы уравнений *а)* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$

7. Найти множество корней уравнения $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$.

8. Выпишите и изобразите пересечение множеств A и B, если: $A = [-4; 6]; B = [5; 11)$.

9. Найти множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 4x + 3 > 0$.

10. Множество K состоит из k элементов, а множество B – из b элементов. Известно, что $K \cap B$ состоит из s элементов. Чему равно число элементов m в множестве $K \cup B$?

Ответ:

1. Пересечение дорог, пересечение отрезков.

2. Множество наибольших общих делителей является число 18.

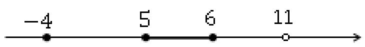
3. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

4. Нет, не существует.

5. 57-6=51 элемент во втором множестве.

6. *а)* (3; 4) и (6; 1); *б)* (2; 5) и (5; 2)

7. {-3; -2; 2; 3} – множество корней уравнения.

8. $A \cap B = [5; 6]$ 

9. $x \in (-\infty;\ -1) \cup (3;\ +\infty)$.

10. Сумма элементов множества K и элементов множества B.

5.Задачи на разность множеств

1. Из каких элементов состоит множество C, если известно, что A – множество учащихся вашего класса, B – множество мальчиков вашего класса и $C = A \backslash B$?

2. Найдите элементы множество K, если $K = M \backslash P$ и кроме того: M – множество натуральных чисел, меньших 10, P – множество четных чисел;

3. Пусть A – множество цифр числа 701263557, B – множество цифр числа 1765230. Найдите элементы следующих множеств: $A \backslash B$; $B \backslash A$.

4. Найдите $A \backslash B$: а) $\mathrm{A} = \{3k \mid k \in Z\}, B = \{6m \mid m \in Z\}$;
б) $\mathrm{A} = \{2k \mid k \in Z\}, B = \{4m + 2 \mid m \in Z\}$.

5. В библиотеке имеются книги по искусству и разным отраслям науки. Обозначим множество всех книг в библиотеке A, а множество всех математических книг (не только в данной библиотеке) B. Охарактеризуйте множество $A \backslash B$.

6. Найдите множество $A \backslash B$, если A – множество корней уравнения $-y - (-3,17) = 1,09$; B – множество корней уравнения $|2x| = 4,16$.

7. Пусть $A = [1;4], B = [2;6]$. Найдите множества $A \backslash B$.

8. Пусть $A = \{x|x = 2m - 1, m -$ целое число$\}$,
$B = \{x|x = 4n + 1, n -$ целое число$\}$. Опишите множество $A \backslash B$.

9. Пусть $A = [1;4], B = [2;6]$. Найдите множества $A \backslash B$ и $B \backslash A$. Чему равно множество $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$?

10. Пусть $\mathrm{A} = \{x|x = 2m - 1, m \in Z\}, B = \{x|x = 4n + 1, m \in Z\}$. Опишите множество $A \backslash B$.

Ответ:

1. Множество девочек.

2. K – множество нечетных чисел.

3. $A \backslash B = 57$; $B \backslash A = \emptyset$

4. *а)* $A \backslash B = \{6k + 3 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$; *б)* $A \backslash B = \{4k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$.

5. $A \backslash B$ – множество всех остальных книг.

6. $A \backslash B = -2{,}08 - 2{,}08 = -4{,}16$; $A \backslash B = -2{,}08 + 2{,}08 = \emptyset$.

7. $A \backslash B = [1;2] \cup [4;6]$.

8. $A \backslash B = \{4m + 1|m -$ целое число$\}$.

9. $A\backslash B$=[1; 2] ; $B\backslash A$ =[4; 6] ; $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = [1;2] \cup [4;6]$

10. $A\backslash B = \{x|x = 4k + 3, k \in Z\}$

6.Задачи на мощность множества

Задачи на мощность множеств в учебниках Н.Я. Виленкина [8, С.31] и Ю.Н. Макарычева [30, С. 21-22] в основном в виде опросника Да/Нет:

1. Пусть А – множество всех окружностей на плоскости, В-множество всех квадратов на плоскости со сторонами, параллельными осями координат. Каждому квадрату становится в соответствие вписанная в него окружность. Является ли это соответствие взаимно однозначным?
2. Пусть А- множество всех окружностей на плоскости и В-множество всех правильных треугольников на этой плоскости. Каждому треугольнику ставится в соответствие вписанная в него окружность. Является ли это соответствие взаимно однозначным?
3. Пусть А- множество всех окружностей на плоскости В-множество всех точек этой плоскости. Каждой окружности ставится в соответствие ее центр. Является ли это соответствие взаимно однозначным?
4. Каждой прямой, не параллельной оси ординат, ставится в соответствие уравнение $y = kx + b$. Будет ли это соответствие взаимно однозначным?
5. Устанавливает ли функция $y = 4x + 3$ взаимно однозначное соответствие между отрезками [2; 4] и [5; 13] ?
6. Каждому целому числу поставили в соответствие его модуль. Является ли установленное соответствие между множеством целых чисел и множеством их модулей взаимно однозначным?
7. Каждому числу ставится в соответствие его квадрат, установлено ли тем самым взаимно однозначное соответствие между: *а)* множеством

натуральных чисел и множеством их квадратов*; б)* множеством целых чисел и множеством их квадратов?

8. Каждому числу ставится в соответствие его куб, установлено ли тем самым взаимно однозначное соответствие между: *а)* множеством натуральных чисел и множеством их кубов*; б)* множеством целых чисел и множеством их кубов?

9. Каждой окружности на плоскости поставили в соответствие ее центр. Установлено ли тем самым взаимно однозначное соответствие между множеством окружностей и множеством точек плоскости?

10. Каждому целому числу m ставится в соответствие целое число p. Является ли взаимно однозначным соответствие между множеством Z и множеством чисел p, если: *а)p= 2m; б)p= 2m; в)*$p = m^2$*; г)*$p = m^2 - m$?

Ответ:

1. Да; 2.Нет; 3.Нет; 4.Да; 5.Да; 6.Нет; 7.*а)* Да, *б)* Нет; 8. *а)* Да, *б)* Да; 9.Нет; 10. *а)* Да, *б)*Да, *в)* Нет, *г)* Нет;

7.Задачи на иллюстрацию отношений между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна

1. Найдите $A \cap B$, если *а)* $A = (-3; 7), B = (1; 8)$; *б)* $A = [0; 5]$, $B == [5; 8]$; *в)* $A = (-\infty; +\infty)$, $B = (-1;\ 9)$; *г)* A — множество простых чисел, B — множество положительных четных чисел; *д*) A — множество всех прямоугольников, B— множество всех ромбов; *е)* $\text{A} = \{x\ |x \in N, x \geq \geq 10\}$, $B = \{x \mid x \in N, x \leq 16\}$; *ж)* $\text{A} = \{x \mid n \in N, x = n^2\}, B = \{x \mid x \in N, x \leq 40\}$

2. Множество A состоит из целых чисел, делящихся на 4, множество B — из целых чисел, оканчивающихся нулем и множество C — из целых чисел, делящихся на 75. Из каких чисел состоит множество $A \cap B \cap C$.

3. Пусть заданы множества A, B и C такие, что $A \cap B = \{2;\ 3\}$, $A \cup B = \ =\{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 8\}$, $A \cap C = \{1\}$, $C \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$. Найдите множества A, B и C.

4. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$, если а) $A = \{x \mid x^4 - 13x^2 + 36 = 0\}$, $\mathrm{B} = \{x \mid x^4 - 8x^2 + 9 = 0\}$; б) $\mathrm{A} = \{x \mid 3x - < 0\}$, $\mathrm{B} = \{x \mid x^2 + 6 > 0\}$.

5. Какое заключение можно сделать об отношении между фигурами, расположенными так, что их пересечением и их объединением служит одна и та же фигура?

6. Найдите $A \setminus B$: а) $A = \{3k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}, B = \{6m \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$;

б) $A = \{2k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}, B = \{4m + 2 \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$.

7. Запишите с помощью формул заштрихованное множество на рисунке 16:

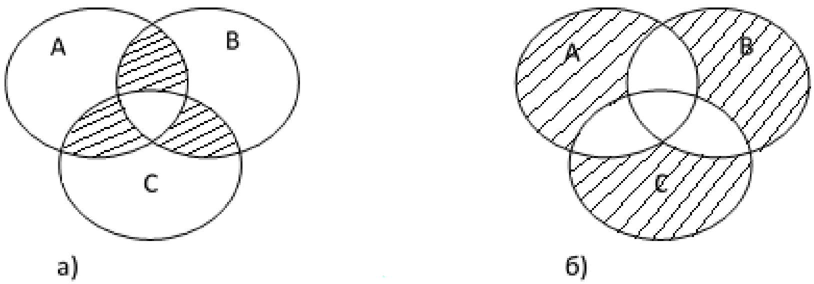


Рис. 16.

8. Покажите с помощью диаграмм Эйлера–Венна, что $[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] = [(A \cap B) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)]$.

9. Из 100 школьников английский знают 42, немецкий — 30, французский — 28, английский и немецкий — 5, английский и французский — 10, немецкий и французский — 8, английский, немецкий и французский — 3 школьника. Сколько школьников не знают ни одного языка?

10. В международной конференции участвовало 120 человек. Из них 60 владеют русским языком, 48 – английским, 32 – немецким, 21 – русским и английским, 19 – английским и немецким, 15 – русским и

немецким, а 10 человек владеют всеми тремя языками. Сколько участников конференции не владеют ни одним из трех языков [30, С. 19]?

Ответ:

1. а) $(1;\ 7)$; б) $\{5\}$; в) $(-1;\ 9)$; г) $\{2\}$;
д) множество квадратов; е)$\{10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16\}$;
ж) $\{1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25; 36\}$. (Рисунок 17)

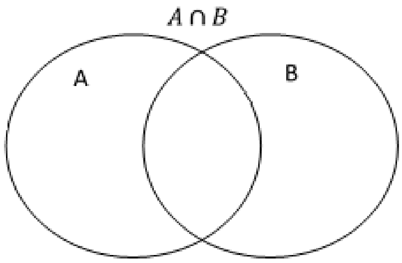


Рис. 17.

2. $A \cap B \cap C = \{300n \mid n \in Z\}$. (Рисунок 18)

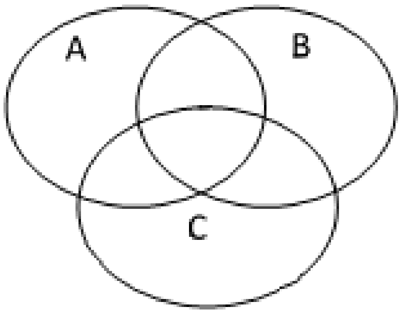


Рис. 18.

3. Например, $\mathrm{A} = \{1;\ 2;\ 3\}$;
$\mathrm{B} = \{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 8\}$; $\mathrm{C} = \{1;\ 6;\ 7;\ 8\}$. (Рисунок 19)

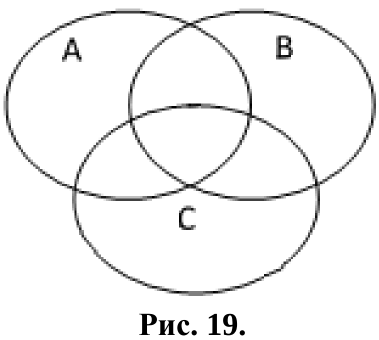


Рис. 19.

4. а) $A \cup B = \{-1;\ -2;\ -3;\ 1;\ 2;\ 3\}, A \cap B = \{-3;\ 3\}$; б) $A \cup B = R, A \cap B = (-3;\ 3)$. (Рисунок 20)

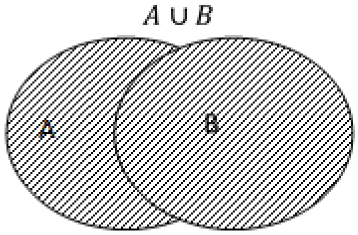


Рис. 20.

5. Они равны.

6. а) $A \setminus B = \{6k + 3 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$; б) $A \setminus B = \{4k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$.

(Рисунок 21)

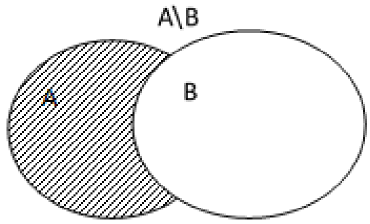


Рис. 21.

7. Ввиду неоднозначности записи ответы приводятся примерные: *а)* [(A ∩ B) \ C] ∪ [(B ∩ C) \ A] ∪ [(A ∩ C) \ B] или [(A ∩ B) ∪ (B ∩ C) ∪ (A ∩ ∩C)] \ [A ∩ B ∩ C]; *б)* [A \ (B ∪ C)] ∪ [B\ (A ∪ C)] ∪ [A ∩ B ∩ C].

8. Обозначим через A — множество школьников, знающих английский язык; N — множество школьников, знающих немецкий язык; F — множество школьников, знающих французский язык.

Тогда n (A) = 42, n (N) = 30, n (F) = 28, n (A ∩ N) = 5, n (A ∩ F) = 10, n (N ∩ F) = 8, n (A ∩ N ∩ F) = 3.

Найдем с помощью формулы включений и исключений количество школьников, знающих хотя бы один из перечисленных иностранных языков.

$$n(A \cup N \cup F) = n(A) + n(N) + n(F) =$$
$$= n(A \cap N) - n(A \cap F) - n(N \cap F) + n(A \cap N \cap F) =$$
$$= 42 + 30 + 28 - 5 - 10 - 8 + 3 = 80.$$

Следовательно, не знают ни одного иностранного языка: 100 – 80 = 20 школьников. Эту же задачу можно решить с помощью диаграммы Эйлера–Венна.

Так как 3 языка знают 3 школьника, то английский и немецкий знают 5 – 3 = 2, английский и французский — 10 – 3 = 7, немецкий и французский — 8 – 3 = 5 школьников. Только английский знают 42 – (2 + 3 + 7) = 30, только немецкий — 30 – (2 + 3 + 5) = 20, только французский — 28 – (3 + 5 + 7) = 13 школьников. Ни одного языка не знают 100 – (2 + 3 + 5 + 7 + 13 + 20 + 30) = 20 школьников (Рисунок 22) [28, с. 6].

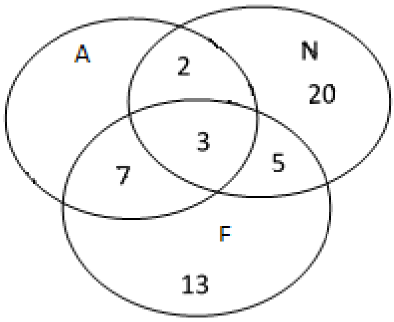


Рис. 22.

9. Ответим на вопрос: сколько элементов попало в множество A и не попало ни в какие другие множества?

Рассмотрим диаграмму (рисунок 23). Отметим количественные показатели в соответствующих областях в следующем порядке:

$n(A \cap B \cap C) = 3, n(A \cap B \cap D) = 1,$

$n(A \cap B) - 3 - 1 = 11, n(A \cap C) - 3 = 6,$

$n(A \cap D) - 1 = 3,$

$n(A) - 3 - 1 - 11 - 3 - 6 = 45 - 24 = 21.$

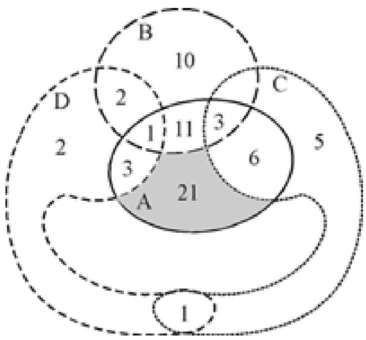


Рис. 23.

10. Решение этой задачи сводится к нескольким простым действиям. Сначала находим, сколько человек знает только два языка: 5 – русский и

немецкий, 9 – немецкий и английский, 11 – русский и английский. Затем нужно найти сколько человек знают только один язык:

1) 60 – 5 – 10 – 11 = 34 – человека знают только русский;

2) 48 – 11 – 10 – 9 = 18 – человек знают только английский;

3) 32 – 9 – 10 – 5 = 8 – человек знают только немецкий.

И последним действием находим, сколько человек не знают ни одного из трех языков. 4) 120 – 8 – 9 – 18 – 5 – 10 – 11 – 34 = 25 – человек не знают ни одного из трех языков. (рисунок 24)

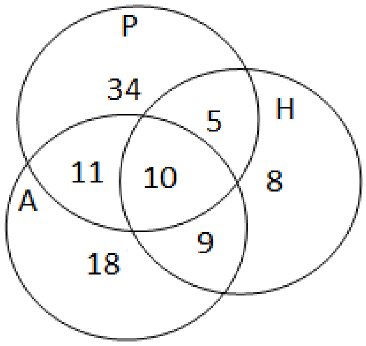


Рис. 24.

Таким образом, только во множестве A (т.е. четных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 11) находится 21 число.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования были получены следующие выводы и результаты:

1. Выделены основные понятия теории множеств. К ним относятся числовые множества, операции над множествами, отношения между множествами и мощность множества.

2. Анализ литературы показывает, что вопросы связанные с изучением операции над множествами, отношением включения множеств и числовые множества вызывают у учащихся некоторые сложности.

3. Методические особенности обучения элементам теории множеств заключаются в развитии логического и абстрактного мышления.

4. Разработана система заданий, которая включает в себя: устные задачи на понятия числового множества, пустого множества и элемента множества; задачи на задание множеств перечислением элементов характеристическим свойством, на пересечение и объединение множеств, на понятие разности множеств и на иллюстрацию отношений между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что поставленные задачи решены, а цель исследования достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь- справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп.- М.: Издательство ЛКИ, 2007.- 248с.

2. Акимова Н. Изучение множеств в младших классах средней школы // Я иду на урок математики: 6 класс: Книга для учителя (под общ. ред. И.Л. Соловейчик). – М.: Издательство «Первое сентября», 2002. – С.247 – 268.

3. Алимов Ш.А. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 287 с.

4. Величко, М.В. Алгебра. 9 – 11 классы: проектная деятельность учащихся. /М.В. Величко. – 2-е изд., стереотип. – Волгоград: Учитель, 2008. – 123 с.

5. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Сурвилло Г.С. и др.: Алгебра для 9 класса с углуб. изучением. математики; под. ред. Н.Я. Виленкина.- 2- е изд..- М: Просвещение, 1998.- 384 с.

6. Виноградова Л.В. Методика преподавания алгебры в средней школе: учеб.пособие.- Ростов н/Д.: Феникс, 2013.-252 с. (серия «Здравствуй, школа!»).

7. Газета «1 сентября»: архив материалов по математике Материалы по проведению уроков математики в старшей школе. URL: http://archive.1september.ru/mat – PRESS, 2013. – 280 с.

8. Гастева С.А., Крельштейн Б.И., Ляпин С.Е., Шидловская М.М. Методика преподавания алгебры в восьмилетней школе. – М.: Просвещение, 1965. – с. 744.

9. Гельфман Э.Г., Холодная М.А. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся. СПб.: Питер, 2012. 384с.

10. Глейзер Г.И. История математики в школе 9-10 классов. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1853. – 351 с.

11. Глейзер Г.И. История математики в средней школе. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1970, с.215-222

12. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. – М., 2014. – 136 с.

13. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей. – М., 2014.- 95 с.

14. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя алгебры: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2014. – 224 с.

15. Грушевская Л.А., Кубышева М.А., Петерсон Л.Г., Рогатова М., Математика. 6 класс. Методические рекомендации. ФГОС.

16. Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении алгебре: Кн. для уч-ля. – М.: Просвещение, 2014. – 80 с.

17. Дорофеев Г.В., Шарыгина И.Ф. Учебный комплект «Математика-6»// Я иду на урок математики: 6 класс: Книга для учителя (под общ. ред. И.Л. Соловейчик). – М.: Издательство «Первое сентября», 2002.– С.3 – 53.

18. Задачи по математике: задачник «Кванта». Архив задач по математике. Решения задач приводятся отдельно по номерам. URL : http://kvant.mccme.ru/index.htm

19. Задачи по стереометрии. Панфёров В.С., Алексеев В.Б., Галкин В.Я., Сергеев В.И. в журнале АЛГЕБРА. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября», № 6

20. Зорин В.В., Фискович Т. Т. Пособие по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие для подготовительных отделений вузов. – М.: Высш. школа, 1980.-287 с.,ил.

21. Иванова Т.А. Гуманитаризация общего математического образования: Монография.– Нижний Новгород: Изд-во НГПУ,2014.-206 с.

22. Квадратный корень из многочлена степени не выше второй Панфёров В.С., Галкин В.Я. в журнале АЛГЕБРА. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября», № 16, С. 33-48

23. Кисилев, Г.М. Информационные технологии в педагогическом образовании: учебник для бакалавров. /Г.М. Кисилев, Р.В. Бочкова. – М.: Дашков и К°, 2012. – 306 с.

24. Колягин Ю.М. и Луканкин Г.Л. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. Под. ред. А. И. Меркушевича. М., «Просвещение», 1974г. 382с.

25. Колягин Ю.М., Г.Л. Луканкин Методика преподавания математики в средней школе/ Мокрушин Е.Л., Саннинский В.Я., Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультета педагогических институтов. – М., Просвещение, 1977. – 480 с.

26. Куратовский К., Мостовский А.Теория множеств. М.: Мир, 1970, с. 176

27. Курс лекций. Элементы дискретной математики. М.: 2004. Под. ред. Показеева В.В. URL: http://vuz.exponenta.ru/

28. Лабораторные и практические работы по методике преподавания алгебры: Учеб. пособие для студентов физ.-мат.спец.пед.ин-тов /Под ред. Е.И. Лященко. - М.: Просвещение, 2014. - 223 с.

29. Ляпин С.Е. Методика преподавания алгебры. – М.: Москва, 2014. – 451с.

30. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра: Доп. Главы к шк. учеб. 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. Математики/ Под. ред. Г.В. Дорофеева. – 5-е изд.- М.: Просвещение, 2003. - 207с.

31. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока алгебры. Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 2014. - 175 с.

32. Методика преподавания алгебры в средней школе. Общая методика: учеб.пособие для ст. пед.ин-тов /Сост. Р.С. Черкасов, А.А.Столяр.- М.: Просвещение, 2013.-336 с.

33. Мордкович А.Г. Беседы с учителями алгебры. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2013. – 336 с.

34. Мордкович А.Г., Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. – 4-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2001. – 160с.

35. Мордкович А.Г., Алгебра. 8 класс: В 2ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев – 8-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2012. – 239с.: ил.

36. Мордкович А.Г., Алгебра. 9 класс: В 2ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 5-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 255с.: ил.

37. Мордкович А.Г., Программа курса математики 5-11 классов общеобразовательных учреждений/ И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 3-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2011. – 63 с.

38. Муравин Г.К., Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравина, О.В. Муравина. – 7-е изд., дораб. – М.: Дрофа, 2009. – 286, [2]с.: ил.

39. Муравин Г.К., Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравина, О.В. Муравина. – 11-е изд., дораб. – М.: Дрофа, 2010. – 318, [2]с.

40. Муравин Г.К., Математика. 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – 3-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2008. – 319с.

41. Нешков К. И., В.Н. Рудницкая, А.Д. Семушкин и др.; Под. ред А.И. Маркушевича.- 2-е изд., перераб.- М.: Просвещение, 1982,- 223 с.

42. Никольский С.М., Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 7-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 2010. – 287с.: ил.

43. Нугмонов М. Введение в методику обучения алгебре (методологический аспект). – М.: Прометей, 2014. – 153 с.

44. Онищук В.А. Урок в современной школе: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 2014. - 191 с.

45. Окунев А.А. Спасибо за урок дети!– М.: Просвещение, 2014.– 131с.

46. Попова А. Учебник в руках ученика // Алгебра (приложение к газете «Первое сентября»). 2013. № 5.

47. Рогановский Н.М. Методика преподавания алгебры в средней школе: учеб. пособие для студ.пед.ин-тов по физ-мат. спец..- Мн.: Выс.шк., 2014.- 267 с..

48. Русский перевод — Кантор Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985. — 173 с.

49. Савенкова Н. А. «ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ» // Личность, семья и общество: вопросы педагогики и психологии: сб. ст. по матер. XXII междунар. науч.-практ. конф. Часть II. – Новосибирск: СибАК, 2012.

50. Сагымбекова А.Ю. Преемственность в усвоении теоретико-множественных понятий учащихся./ Преемственность в обучении математике. М.1978.

51. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999.– 208 с.

52. Саранцев Г.И. Сборник упражнений по методике преподавания алгебры в средней школе: учеб. пособие для студ.- заочн.3 - 4 курсов физ-мат. фак. пед.ин-тов. - М.: Просвещение, 2013. - 80 с.

53. Словарь по теории и методике обучения алгебре /Под ред. Г.В.Дорофеева, Г.Е.Сенькиной.- Смоленск: СмолГУ, 2014.- 370 с.

54. Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. ин-тов/ Н.Я. Виленкин, К.И. Дуничев, Л.А. Калужин, А.А. Столяр.- М.: Просвещение, 1980.-240с.

55. Соломоник В.С. Сборник вопросов и задач по математике (для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.- 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Высшая школа, 1978.- 264 с.

56. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. 1. Пособие для учителей/ Под. ред. Н.Я. Виленкина; Сокр. пер. с нем. А. Я. Халамайзера.- М.: Просвещение, 1982.- 208 с.,ил.

57. Хрестоматия по методике алгебры. Пособие для студ., аспир. и преподават. мат. спец. пед.вузов, учит.алгебры общ. шк. /Сост. М.И. Зайкин, С.В. Арюткина. - Арзамас: АГПИ Часть 1. Обучение через задачи, 2013. -300 с.; Часть 2. Методы обучения. 2014.- 286 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 1

Основные определения понятий теории множеств в 6 классе

	6 класс для общеобразовательных классов Г.К. Муравин и др.
множество	Не вводится
элемент множества	Не вводится
пустое множество	Не вводится
подмножество	Множество A называют подмножеством множества B, если каждый элемент множества $A \in B$
объединение	Множество элементов, принадлежащее хотя бы одному из множеств A и B
пересечение	Множество элементов, общих для множеств A и B
разность	Не вводится

Таблица 2

Основные определения понятий теории множеств в 7 классе

	7 класс для общеобразовательных классов			
	Ю.Н. Макарычев	**Г.К. Муравин и др.**	**А.Г. Мордкович**	**Г.В. Дорофеев**
множество	Не вводится	-	-	-
элемент множества	Объекты или предметы, составляющие множество	-	-	-
пустое множество	Множество, не содержащее ни одного элемента	-	-	-
подмножество	Множество B называется подмножеством множестваA, если каждый элемент является элементом множестваA	-	-	-
объединение	Не вводится	-	-	-
пересечение	Не вводится	-	-	-
разность	Не вводится	--	-	-

Основные определения понятий теории множеств в 8 классе

Таблица 3

	8 класс		
	Для общеобразовательных школ	**Для школ с углубленным изучением математики**	
	Ю.Н. Макарычев	**Н.Я. Виленкин**	**доп. главы Ю.Н. Макарычева**
множество	Не вводится	Числовой отрезок с концами a и b таких чисел x, что $a \leq x \leq b$.	Не вводится
элемент множества	Не вводится	Не вводится	Предметы (или объекты), составляющие данное множество
пустое множество	Не вводится	Множество, не содержащее ни одного элемента.	Не вводится
подмножество	Не вводится	Не вводится	Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.
объединение	Множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств	Множество, состоящее из таких чисел x, что x входит хотя бы в одно из множеств A и B.	Множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.
пересечение	Множество, состоящее из всех общих элементов данных множеств	Если A и B – числовые множества, то их общую часть называют пересечением этих множеств	Множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.
разность	Множество состоящее из элементов множестваA,не принадлежащемуB	Не вводится	Не вводится

Основные определения понятий теории множеств в 9 классе

Таблица 4

	9 класс		
	Для общеобразовательных школ		Для школ с углубленным изучением математики
	А.Г. Мордкович	Ш.А. Алимов	Н.Я. Виленкин
множество	Не приводится	≪Понятие множества в математике относится к неопределяемым понятиям (подобно, например, понятиям числа и точки)≫.	Математическое понятие, отражающее объединение некоторых объектов, предметов или понятий в единую совокупность.
элемент множества	Не приводится	Предметы или понятия, из которых состоит множество.	Предметы, объекты, образующие данное множество.
пустое множество	Множество, не содержащее ни одного элемента.	Не приводится	Не приводится
подмножество	Если каждый элемент множества В является элементом множества А, то множество В называют подмножеством множества А.	Не приводится	Не приводится
объединение	Множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств – или множеству A, или множеству B.	Множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств – или множеству A, или множеству B.	Множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств A или B.
пересечение	Множество, состоящее из всех общих элементов множеств A и B, т.е. из всех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.	Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, так и множеству B.	Множество, содержащее те и только те элементы, которые входят одновременно и в множество A, и в множество B.
разность	Не приводится	Множество C, элементы которого являются все элементы множества A, не принадлежащие множеству B, называют разностью множеств A и B	Разностью двух множеств A и B называют такое множество, в которое входят все элементы из множества A, не принадлежащие множеству B.