МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент В.А. Крыжук ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель С.Ш. Палферова ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант Е.Ю. Аношина ____________________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ______________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«_____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения решению иррациональных уравнений в основной школе и составление наборов заданий по теме исследования.

Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Одним из сложных разделов алгебры, изучаемых в школьной программе, являются иррациональные уравнения, так как в школе им уделяют достаточно мало внимания. Умение решать уравнения является обязательным компонентом при проведении итоговой аттестации учащихся. Поэтому иррациональные уравнения очень часто встречаются на выпускных экзаменах.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Введение содержит в себе такие основные характеристики исследования как: актуальность, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению иррациональных уравнений. Раскрыто понятие иррационального уравнения, рассмотрены основные методы решения иррационального уравнения. Представлены цели обучения и основные требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме. Выполнен анализ теоретического и задачного материала по теме исследования в учебниках разных авторов основной школы.

Глава II посвящена методическим аспектам обучения темы иррациональные уравнения. Сформулированы методические рекомендации по обучению иррациональным уравнениям в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены задачи ЕГЭ по теме исследования. Разработаны наборы задач по обучению данной темы.

Список литературы содержит 42 наименования.

Объем работы составляет 60 страниц.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Teaching methods for the solution of irrational equations in a course on algebra of the Secondary school".

Training material connected with the equations is a significant part of the school course of mathematics. One of the most complex sections of algebra which is studied in the school curriculum is irrational equations, but they pay little attention to it in schools. The ability to solve equations is an obligatory component for final assessment of students. Students whose ability to solve irrational equations is in an insufficient degree admit mistakes in them.

The aim of the bachelor's thesis is to reveal the methodological features of teaching the solution of irrational equations in the secondary school and to develop a set of problems on the research topic.

The bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion and a list of 42 references, including 5 foreign sources, and appendixes.

The first chapter is devoted to the theoretical basics of teaching students how to solve irrational equations. The concept of irrational equation is disclosed, the basic methods for solving the irrational equation are considered. The objectives of the teaching and the basic requirements for the knowledge and skills of students on this topic are presented. Theoretical and problem material on the research topic of the textbooks of different authors for the secondary school is analyzed.

The second chapter presents the methodological aspects of teaching the topic of irrational equations. Methodological recommendations for teaching irrational equations in a course on algebra of the Secondary school are proposed. EGE (unified state exam) problems on the research topic are considered. Set of problems for teaching this topic have been developed.

The volume of work is 60 pages.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Более двадцати веков тому назад математики Древней Греции пришли к выводу, что для выражения длины отрезка квадрата из площади нужны новые числа, так как целых и дробных не хватает. Так появились новые числа и назвали их *иррациональными*. Латинская приставка *ir* означает отрицание: это числа, не являющиеся рациональными. История возникновения иррациональных чисел продолжилась в XVII веке. Математик Леонард Эйлер внес свой большой вклад в их развитие. В XIX веке иррациональные числа уже подразделялись на алгебраические и трансцендентные. Многие математики того времени работали над *теориями иррациональных чисел*. Наибольший вклад в **историю возникновения иррациональных чисел** внес математик Вейерштрасс. Он обосновал и доказал свойства и *методы применения иррациональных чисел* [8, С. 18].

Вместе с этим, материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Одним из сложных разделов алгебры, изучаемых в школьной программе, являются иррациональные уравнения, так как в школе им уделяют достаточно мало внимания. Умение решать уравнения является обязательным компонентом при проведении итоговой аттестации учащихся. Поэтому иррациональные уравнения очень часто встречаются на выпускных экзаменах (ЕГЭ и др.). Учащиеся в недостаточной степени овладевшие умением решать иррациональные уравнения, допускают в них ошибки.

В начале изучения раздела «Иррациональные уравнения» в основной школе вводятся понятия иррационального числа, арифметического корня. Первые представления о числе появляются еще у детей дошкольного возраста. В процессе обучения математике у учащихся формируется понятие числа и развиваются вычислительные навыки, необходимые в практической деятельности. Понятие иррационального числа завершает процесс формирования понятия числа в основной школе и получает развитие в старшей школе. Понятие иррационального числа не является для обучающегося очевидным, поддающимся логике и вызывает ряд затруднений. В связи с этим работа с понятием иррационального числа требует тщательно продуманной методической системы, включающей не только формализованные действия с ним, но и формирование образов, ассоциированных с иррациональными числами, связей между разными числовыми множествами, а также обогащение опыта обучающихся новыми приемами преобразования числовых выражений [41].

Задания по теме «Иррациональные уравнения» включены в единый государственный экзамен: задание № 7 базового уровня (раздел «Простейшие уравнения») задание № 5 профильный уровень (раздел «Простейшие уравнения»).

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Иррациональные уравнения» на уроках алгебры основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы и составить наборы заданий, ориентированные на базовый уровень знаний и умений учащихся и подготовку их к итоговой аттестации по математике.

Задачи исследования:

1. Изучить понятия темы «Иррациональные уравнения».

2. Представить основные методы решения иррациональных уравнений в курсе алгебры основной школы.

3. Выделить основные цели обучения теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы.

4. Проанализировать содержание темы «Иррациональные уравнения» в учебниках алгебры основной школы.

5. Представить методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы.

6. Рассмотреть задачи ЕГЭ по теме исследования.

7. Составить наборы заданий по обучению учащихся основной школы решению иррациональных уравнений.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ методической литературы; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней составлены наборы заданий, ориентированные на базовый уровень знаний и умений учащихся и подготовку их к итоговой аттестации по математике, и раскрыты методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносится:

1. Методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы.

2. Наборы заданий, ориентированные на базовый уровень знаний и умений учащихся и подготовку их к итоговой аттестации по математике.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы раскрывает теоретические основы обучения теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы. Определено понятие иррационального уравнения. Рассмотрены основные методы решения иррационального уравнения. Выявлены основные цели и задачи обучения данной теме в курсе математики основной школы, определены требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме. Выполнен анализ содержания темы «Иррациональные уравнения» в учебниках алгебры основной школы.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы. Представлены методические рекомендации по обучению данной теме. Проанализированы задачи ЕГЭ по теме исследования. Составлены наборы задачи по теме исследования, ориентированные на базовый уровень знаний и умений в курсе алгебры основной школы.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 42 наименований.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятия темы «Иррациональные уравнения»

Уравнения занимают большое место в школьном курсе математики. Они имеют не только важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Изучение программного материала, связанного с уравнениями, дает возможность учащимся получить представление об уравнениях как математическом аппарате решения разнообразных задач из математики, смежных областей знаний, практики; освоить основные приемы решения различных типов уравнений, а так же решать текстовые задачи с помощью уравнений [42].

Знакомство учащихся с иррациональными уравнениями происходит в 9 классе.

Определение 1 [15, С. 230]: «Уравнение с одной переменной $f(x) = g(x)$ называют *иррациональным*, если хотя бы одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ содержит переменную *x* под знаком радикала».

Основные методы решения иррациональных уравнений, изучаемые в 9 классе: 1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень; 2) метод введения новых переменных.

Рассмотрим уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$, где $f(x)$ – рациональное выражение и a – некоторое число.

Теорема 1 [15, С. 230]: «Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при четном n и $a < 0$ не имеет корней, при $a \geq 0$ оно равносильно уравнению $f(x) = a^n$».

Это следует из определения арифметического корня нечетной степени.

Пример 1. Решим уравнение $\sqrt[4]{x^2 + 9x + 29} = 3$.

Возведем обе части уравнения в четвертую степень и получим квадратное уравнение $x^2+9x+29=81$, $x^2+9x-52=0$

Решим полученное квадратное уравнение: $x^2+9x-52=0$,

$$D=81-4\ \ -52\ \ =289, \qquad \overline{D}=17.$$

$$x_1=\frac{-9-17}{2}=-13,\ x_2=\frac{-9+17}{2}=4.$$

Сделаем проверку, подставив полученные корни в уравнение $^4\ \overline{x^2+9x+29}=3$.

Ответ: $x_1=-13$, $x_2=4$.

Теорема 2 [15, С. 231]: «Уравнение $^n\ \overline{f(x)}=a$ при нечетном n и любом a равносильно уравнению $f\ \ x\ \ =a^n$».

Это следует из определения корня нечетной степени.

Пример 2. Решим уравнение $^3\ \overline{2x^2-x-7}=2$.

Возведем обе части уравнения в третью степень $2x^2-x-7=8$, $2x^2-x-15=0$.

Решим полученное квадратное уравнение: $2x^2-x-15=0$,

$$D=1-8\ \ -15\ \ =121, \qquad \overline{D}=11.$$

$$x_1=\frac{1-11}{4}=-2{,}5,\ \ x_2=\frac{1+11}{4}=3.$$

Ответ: $x_1=-2{,}5$, $x_2=3$.

Рассмотрим уравнение вида $^n\ \overline{f(x)}=g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения.

Теорема 3 [15, С. 231]: «Уравнение $^n\ \overline{f(x)}=g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения и n - четное число, равносильно системе

$$\begin{matrix} f\ \ x\ \ =g^n(x) \\ g(x)\geq 0 \end{matrix}$$

».

Доказательство: «Пусть x_1 – корень уравнения $^n\ \overline{f(x)}=g(x)$. Тогда верно равенство $^n\ \overline{f(x_1)}=g(x_1)$. Так как при четном n число $^n\ \overline{f(x_1)}$ неотрицательное, то и равное ему число $g(x_1)$ неотрицательное.

Следовательно, если уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ имеет корень $x = x_1$, то это число удовлетворяет и системе $\begin{cases} f(x) = g^n(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$.

Верно и обратное. Пусть x_2 – число, которое удовлетворяет системе $\begin{cases} f(x) = g^n(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, т.е. $f(x_2) = g(x_2)$ – верное равенство и $g(x_2) \geq 0$ – верное неравенство. Тогда по определению корня четной степени верно равенство $\sqrt[n]{f(x_2)} = g(x_2)$.

Значит, каждое решение уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ является решением системы $\begin{cases} f(x) = g^n(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, и наоборот, каждое решение системы является решением уравнения. А это значит, что уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ и система $\begin{cases} f(x) = g^n(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ равносильны» [15, С. 231].

Пример 3. Решим уравнение $\sqrt{2x-3} = 4 - x$.

Уравнение будет равносильно системе $\begin{cases} 2x - 3 = (4-x)^2 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases}$.

Преобразуем первое уравнение системы $x^2 - 10x + 19 = 0$, решим его.

$$D = 100 - 4 \cdot 19 = 24, \qquad \sqrt{D} = 2\sqrt{6}.$$

$$x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{6}}{2} = 5 - \sqrt{6}, \quad x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{6}}{2} = 5 + \sqrt{6}.$$

Первый корень уравнения удовлетворяет неравенству $4 - x \geq 0$, а второй – не удовлетворяет ему. Значит, уравнение $\sqrt{2x-3} = 4 - x$ имеет единственный корень - число $5 - \sqrt{6}$.

Ответ: $x_1 = 5 - \sqrt{6}$.

Теорема 4 [15, С. 232]: «Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения и n- нечетное число, больше 1, равносильно уравнению $f(x) = g^n(x)$».

Доказательство: «Пусть x_1 – корень уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$. Тогда верно равенство $\sqrt[n]{f(x_1)} = g(x_1)$. Возведем левую и правую части этого равенства в n-ю степень. Получим верное равенство $f(x_1) = g^n(x_1)$. Значит, x_1- корень уравнения $f(x) = g^n(x)$.

Верно и обратное. Пусть x_2 – корень уравнения $f(x) = g^n(x)$, то верно равенство $f(x_2) = g^n(x_2)$. Тогда по определению корня нечетной степени верно равенство $\sqrt[n]{f(x_2)} = g(x_2)$, т.е. x_2 – корень уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$.

Значит, уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ и $f(x) = g^n(x)$ равносильны» [15, С. 232].

Пример 3. Решим уравнение $\sqrt[3]{3x^2 + 6x - 25} = 1 - x$.

Возведем обе части уравнения в куб и приведем полученное уравнение к стандартному виду:

$$3x^2 + 6x - 25 = (1 - x)^3,$$

$$3x^2 + 6x - 25 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3, \quad x^3 + 9x - 26 = 0.$$

Число 2 является делителем свободного члена кубического уравнения и обращает его левую часть в нуль, значит, 2- корень этого уравнения. Других корней данное уравнение не имеет.

Ответ: 2.

Подробнее решение различных типов иррациональных уравнений рассмотрены в параграфе 2 «Основные методы решения иррациональных уравнений».

§2. Основные методы решения Иррациональных уравнений

Учебный материал, связанный с решением уравнений и неравенств, представляет собой значительную часть школьного курса математики, а его изучение выделено в отдельную содержательно - методическую линию. «На изучение уравнений отводится времени больше, чем на любую другую тему школьного курса математики. Кроме того, при изучении любой темы уравнения могут быть использованы как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических знаний» [40].

Основными *методами решения иррациональных* уравнений принято считать: «метод нахождения ОДЗ; метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень (метод равносильных преобразований); метод замены переменной» [36].

1. ***Метод нахождения ОДЗ***

Определение 1 [35, С. 2]: «Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения есть множество значений переменной, при которых обе части данного уравнения имеют смысл».

В некоторых иррациональных уравнениях достаточно посмотреть на ОДЗ, до применения каких либо приемов.

Пример 1 [35, С. 2]. Решим уравнение $\sqrt{5x-10}=2-x$.

Решение: Найдем ОДЗ, $5x-10\geq 0, x\geq 2$. При значении $x\geq 2$ правая часть уравнения неположительна, а левая неотрицательна. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части обращаются в нуль одновременно, то есть при $x=2$.

Пример 2 [35, С. 2]. Решим уравнение $\sqrt{6x-x^2-8}+\sqrt{x-4}=x^2-7x+12$.

Решение: Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 6x-x^2-8\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{cases}.$$

Найдем с помощью т. Виета корни уравнения $x^2-6x+8=0$.

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1\cdot x_2=8 \end{cases}, \text{ следует, что } x_1=2, x_2=4.$$

Значит, система имеет решение:

$$\begin{cases} 6x-x^2-8\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\leq x\leq 4 \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Таким образом, ОДЗ состоит из одной точки, проверим ее. Подставив $x = 4$ в уравнение $\sqrt{6x - x^2 - 8} + \sqrt{x - 4} = x^2 - 7x + 12$, мы видим, что данное число действительно является корнем.

2. ***Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.***

А.Н. Марасанов [17], выделяет общий алгоритм использования метода возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень:

1) «нахождение области допустимых значений (ОДЗ) уравнения;

2) возведение обеих частей уравнения (возможно неоднократное) в одну и ту же степень и решение получившегося при этом рационального уравнения;

3) выполнение проверки:

а) найденные значения переменной проверяют на принадлежность к ОДЗ уравнения;

б) значения переменной, входящие в ОДЗ, подставляют в само уравнение: те из которых обращают данное уравнение в верное числовое равенство, являются корнями исходного уравнения; в противном случае значение переменной является посторонним корнем» [17].

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень применим для различных типов уравнений.

Пусть имеется уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ некоторые выражения, содержащие переменную. Тогда, во – первых, подкоренные выражения должны быть равны: $f(x) = g(x)$. Во – вторых, оба подкоренных выражения должны быть неотрицательными, но в силу их равенства достаточна не отрицательность одного из них.

Таким образом, получается, что

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Пример 3 [29, С. 795]. Решим уравнение $\sqrt{3x^2-3x-11}=\sqrt{2x^2-4x-5}$.

Решение: Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2-3x-11=2x^2-4x-5 \\ 2x^2-4x-5\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ 2x^2-4x-5\geq 0 \end{cases}$$

Уравнение $x^2+x-6=0$ имеет корни $x_1=2$ и $x_2=-3$. Проверяем полученные корни, $x_1=2$ не удовлетворяет неравенству системы, а $x_2=-3$ удовлетворяем ему. Следовательно, только $x_2=-3$ является корнем исходного уравнения.

Рассмотри уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$. По определению арифметического квадратного корня, $\sqrt{a}$ есть такое число $b\geq 0$, что $a=b^2$. Поэтому уравнение $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ равносильно уравнению $f(x)=g^n(x)$, если n- четно, при дополнительном условии неотрицательности $g(x)$:

$$\sqrt[n]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^n(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

Пример 4 [23, С. 4]. Решим уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

Решение: Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 6-4x-x^2=(x+4)^2 \\ x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5=0 \\ x\geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x\geq -4 \end{cases}$$

Решением данного уравнения является значение $x=-1$.

Рассмотрим уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=a$. Наличие двух радикалов в уравнениях $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=a$ приводит к необходимости двухкратного возведения в квадрат.

Пример 5 [36, С. 4]. Решим уравнение $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.

Решение: Перепишем уравнение в виде $\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{4-x}$ и возведем в квадрат обе части уравнения $(\sqrt{3x-5})^2=(1+\sqrt{4-x})^2$, после преобразований получили уравнение $\sqrt{4-x}=2x-5$.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 4-x=(2x-5)^2 \\ 2x-5\geq 0 \end{cases}$

Уравнение данной системы $4 - x = (2x - 5)^2$ приводим к виду $4x^2 - 19x + 21 = 0$, корни уравнения $x_1 = 3, x_2 = \frac{7}{4}$. Проверим полученные корни, неравенству системы удовлетворяет лишь корень $x_1 = 3$.

3. *Метод замены переменной.*

В некоторых задачах бывает полезно сделать замену переменной, обозначив новой буквой имеющийся корень из некоторого выражения.

Пример 6 [30, С. 795]. Решим уравнение $2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33, x \in R$.

Пусть $t = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, t \geq 0,$ тогда исходное уравнение примет вид: $t^2 + t - 42 = 0$, корни этого уравнения $t_1 = 6, t_2 = -7$, t_2 не входит в условие $t \geq 0$.

Решим уравнение $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6,$ решаем путем возведения обоих частей уравнения в квадрат, приводим подобные члены и получаем уравнение $2x^2 + 3x - 27 = 0$. Кори этого уравнения $x_1 = 3, x_2 = -4{,}5$.

Характерной особенностью данного способа является отсечение лишних корней еще «на тапе переменной t»: корень t_2 оказался лишним, будучи отрицательным.

Приведенные выше примеры наглядно подтверждают необходимость изучения различных методов решения иррациональных уравнений. Но нельзя выработать общие рекомендации по поводу того, в каких случаях какой из вышеизложенных методов следует использовать при решении предложенного иррационального уравнения.

§3. Цели обучения теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы

В *федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования* утверждается [32], что изучение предметной области математика должно обеспечить:

1) осознание значения математики в повседневной жизни человека;

2)формирование представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математической науки;

3)формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

В результате изучения предметной области «Математика» обучающиеся развивают логическое и математическое мышление, получают представление о математических моделях; овладевают математическими рассуждениями; учатся применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты; овладевают умениями решения учебных задач; развивают математическую интуицию.

Предметные результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

4) овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат.

В книге « Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики» Ю.Н. Колягин [10] определяет следующие общие цели обучения математике в основной школе.

Общеобразовательные цели:

1) «овладение учащимися математическими методами познания реальной действительности;

2) обучение устной и письменной математической речи, со всеми присущими ей качествами (простота, ясность, лаконичность.)

3) овладение минимумом математических сведений, нужных для того, чтобы применять имеющиеся у них знания, навыки и умения для активной познавательной деятельности в процессе обучения и самообразования».

Воспитательные цели:

1) «воспитание диалектико-материалистического мировоззрения;

2) воспитание устойчивого интереса к обучению математики;

3) развитие математического мышления и воспитание математической культуры».

Практические цели:

1) «умение применять полученные знания для решения простейших задач жизненной практики, в изучении других учебных предметов;

2) умение самостоятельно добывать знания (работа с учебной литературой)».

Описывая современные подходы к изучению уравнений в курсе математики, А.П. Тарасова [31] выделила следующие цели обучения уравнениям в школе:

1) сформировать представление об уравнении как об истинном равенстве, содержащем неизвестное число;

2) сформировать умение использовать терминологию (уравнение, решение уравнения, корень уравнения и т.д.);

3) сформировать умение решать различные типы уравнений, используя соответствующие методы решения.

Л.Р. Авхатова [1] пишет, что «основной целью обучения теме «Иррациональные уравнения» является: формирование умения классифицировать иррациональные уравнения; применение правильного алгоритма решения иррациональных уравнений; развитие математического кругозора у учащихся».

В примерной программе основного общего образования [27] утверждается, что в ходе изучения темы «Иррациональные уравнения» в 7 – 9 классах для применения в обыденной жизни, при изучении других предметов и обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *базовом уровне* учащиеся должны научиться:

1. «Оперировать на базовом уровне понятиями: арифметический квадратный корень, равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения;

2. Проверять справедливость числовых равенств;

3. Проверять, является ли данное число решением уравнения».

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *базовом и углубленном уровнях:*

1. «Оперировать понятиями: уравнение, корень уравнения, решение уравнения, равносильные уравнения, область определения уравнения;

2. Решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью преобразований;

3. Решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью преобразований;

4. Решать простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$, $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$;

5. Решать уравнения способом разложения на множители с помощью замены переменной».

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для благополучного продолжения образования на *углубленном уровне*, а также для применения в житейских ситуациях и решения проблем различных предметных областей:

1. «Свободно оперировать понятиями: уравнение, равносильные уравнения, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, равносильные преобразования уравнений;

2. Решать разные виды уравнений, уравнения 3 и 4 степени, дробно-рациональные и иррациональные;

3. Владеть разными методами решения уравнений, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор».

В сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистрова [5] определяет следующие требования к знаниям и умениям учащихся, которые они должны получить при изучении темы «Иррациональные уравнения»:

1. «Решать основные виды уравнений с одной переменной;

2. Понимать уравнение как важнейшую математическую модель для описания и изучения разнообразных реальных ситуаций;

3. Овладеть специальными приемами решения уравнений, уверенно применять аппарат уравнений для решения разнообразных задач из математики, смежных предметов, практики».

В методических рекомендациях к учебнику алгебры для 9 класса Ю.М. Колягина [12] содержится указание, что для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углублённом уровнях (выделено *курсивом*) выпускник должен в содержательной линии уравнения научиться:

1) «оперировать понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, *равносильные уравнения, область определения уравнения;*

2) проверять справедливость числовых равенств;

3) решать линейные уравнения и *уравнения, сводимые к линейным*, с

помощью тождественных преобразований;

4) проверять является ли данное число решением уравнения;

5) *решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным, с помощью тождественных преобразований;*

6) *решать простейшие иррациональные уравнения вида* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$;

7) *решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной*».

В статье «Иррациональные уравнения» И.А. Берговина [4] говорит, что в результате овладения содержанием модуля иррациональные уравнения учащиеся должны уметь:

1. «Решать простейшие уравнения по заданному алгоритму;

2. Решать иррациональные уравнения, самостоятельно выбирая метод решения;

3. Применять полученные знания в нестандартных ситуациях;

4. Выделять альтернативные способы достижения цели и выбирать наиболее эффективные способы решения».

Таким образом, можно выделить следующие основные *цели обучения теме*:

1. Формирование у учащихся понятия иррационального уравнения;

2. Формирование навыков решения иррациональных уравнений по заданному алгоритму;

3. Владение различными методами решения иррациональных уравнений;

4. Формирование умения выбирать метод решения и обосновывать свой выбор.

§4.Анализ содержания обучения теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы

4.1 Анализ содержания теоретического материала темы «Иррациональные уравнения» в учебниках алгебры основной школы

В данном параграфе представим анализ содержания теоретического материала темы «Иррациональные уравнения» в учебниках разных авторов основной школы. Приведем базовые и вводимые знания по данной теме.

Базовые знания (известные из школьного курса математики 5-6 классов):

- понятие буквенного выражения;
- понятие уравнения; корень уравнения;
- решение уравнения;
- понятие подобные слагаемые.

Базовые знания (известные из школьного курса алгебры 7-8 классов):

- понятие тождества; понятие тождественного преобразования выражения;
- область определения уравнения; область значений уравнения;
- понятие функции и ее свойства;
- понятие иррационального числа;
- понятие арифметического квадратного корня; свойства арифметических квадратных корней;
- внесение множителя под знак корня;
- вынесение множителя из под знака корня;
- действия, выполняемые с квадратными корнями;
- понятие равносильных уравнений;
- понятие постороннего корня уравнения;
- решение рациональных уравнений.

Вводимые (новые) знания:

- преобразование иррациональных выражений;

- понятие иррационального уравнения;

- виды иррациональных уравнений;

- методы решения иррациональных уравнений.

Рассмотрим теперь, как вводится понятие «Иррациональное уравнение» в курсе алгебры 9 класса. Анализ общеобразовательных учебников представлен в Таблице 1.

Таблица 1

Анализ содержания теоретического материала темы «Иррациональные уравнения» в общеобразовательных учебниках 9-ого класса

Авторы учебника	**Содержание учебного материала**
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. [11]	Понятие иррационального уравнения. Решение иррациональных уравнений, сводимых к квадратному уравнению. Решение иррациональных уравнений путем возведения частей уравнения в одну степень.
Ю.Н. Макарычев и др. [15]	Тема «Иррациональные уравнения» в учебнике не рассматривается.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. [22]	Понятие корня n - ой степени. Понятие арифметического корня n - ой степени из a. Решение иррационального уравнения путем возведения частей уравнения в одну степень.
С. М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. [25]	Понятие иррационального уравнения. Понятие равносильных уравнений. Понятие уравнения – следствия. Решение иррациональных уравнений путем возведения частей уравнения в одну степень. Решение иррациональных уравнений с помощью введения новой переменной.

В учебнике Ю.М. Колягина [11] после рассмотрения в первой главе арифметического корня натуральной степени и его свойств, вводится понятие «Иррациональные уравнения» во второй главе учебника в параграфе « Неравенства и уравнения, содержащие степень».

В учебнике Ю.Н. Макарычева [16] в первой главе рассматривается тема корень n-й степени, но понятие «Иррациональные уравнения» не вводится.

В учебнике Г.К. Муравина [22] понятие «Иррациональные уравнения» вводится в третей главе в теме понятие корня n-й степени.

В учебнике С. М. Никольского [25] во второй главе при изучении темы корень степени n выделен отдельный пункт на изучение темы «Иррациональные уравнения».

Учебник Н. Я. Виленкина [6] предназначен для классов с углубленным изучением математики и в 10 главе учебника выделен параграф на тему «Иррациональные уравнения и неравенства».

Также учебник Ю.Н. Макарычева [15] для углубленного изучения математики вводит понятие «Иррациональные уравнения» в 5 главе учебника, после рассмотрения темы корни n-й степени.

Рассмотрим подробнее содержание темы «Иррациональные уравнения» на базе учебников 9 классов общеобразовательного уровня.

В учебнике С.М. Никольского [25, С.104] отдельно выделен параграф «Иррациональные уравнения» после рассмотрения темы «Понятие корня степени *n*».

Начинается рассмотрение темы с введения новых понятий.

Определение 1 [25, С.104]: «Уравнение, в котором хотя бы один член содержит неизвестное под знаком корня, называется *иррациональным уравнением*».

Приводятся примеры *иррациональных* и *не иррациональных уравнений*.

Автор говорит, что при решении иррациональных уравнений часто применяют *метод перехода к уравнению - следствию*.

Определение 2 [25, С.104]: «Если любой корень $\boldsymbol{f_1}\ x = \boldsymbol{g_1}(x)$ уравнения является корнем уравнения, $f_2\ x = g_2(x)$ то уравнение $f_2\ x = g_2(x)$ называют *следствием уравнения* $\boldsymbol{f_1}\ x = \boldsymbol{g_1}(x)$».

С.М. Никольский говорит, что «при переходе исходного уравнения к уравнению - следствию возможно появление корней, не являющихся корнями исходного уравнения, эти *корни* называют *посторонними»* [25, С.104].

Определение 3 [25, С.105]: «Если при решении уравнения был выполнен переход к уравнению - следствию, то необходимо проверить, каждый ли корень уравнения – следствия является корнем исходного уравнения».

Дальше пишут, что «при возведении уравнения в четную степень получается *уравнение* - *следствие исходного уравнения»*.

После этого даются примеры решения иррациональных уравнений, которые решаются *путем возведения в четную степень* [16, С. 105-106].

Пример 1. $x-2=\sqrt{3x-2}$, данное уравнение решают возведением обоих частей уравнения во вторую степень. После решения уравнения, проверяют являются ли числа корнями уравнения.

Пример 2. $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt{x+1}$, каждую часть данного уравнения возводят в четвертую степень. Также после решения уравнения проверяют каждый получившийся корень.

Пример 3. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=\sqrt{3x+16}$, для решения этого уравнения нужно возвести в квадрат обе части, привести подобные слагаемые и после возвести в квадрат еще раз.

Автор учебника говорит, что «уравнения могут содержать *неизвестные под знаком корня нечетной степени*, это значит, что при возведении уравнения в нечетную степень получается уравнение, *равносильное исходному уравнению»*.

После этого даются примеры решения иррациональных уравнений, которые решаются путем возведения в нечетную степень.

Пример 4. $\sqrt[3]{7x+1}=x+1$, данное уравнение возводят в третью степень. Так как, возведя в третью степень, получают равносильные уравнения, то корни не проверяют.

Пример 5. $\sqrt[7]{x^2+2x+3}=\sqrt[7]{2x^2+3x+1}$, возводят обе части в седьмую степень.

Пример 6. $\sqrt{x^2+2x+10}+\sqrt{2x^2+4x+18}=7$, данное уравнение решают методом введения новой переменной. Вводят новое неизвестное $t=\sqrt{x^2+2x+10}$. Решают получившееся уравнение $\sqrt{2t^2-2}=7-t$ путем возведения обоих частей в квадрат, после проверяют корни.

Далее С.М. Никольский рассматривает уравнения вида $f(x)g(x)=0$, где хотя бы одна из функций $f(x)$ и $g(x)$ содержит неизвестное под знаком корня.

В учебнике приведен алгоритм решения такого уравнения:

Во первых, решается уравнение $f(x)=0$ и отбираются из его корней те, для которых имеет смысл функция $g(x)$.

Во вторых, решают уравнение $g(x)=0$ и отбираются из его корней те, для которых имеет смысл функция $f(x)$.

В третьих, объединяют найденные корни, они и будут составлять множество всех корней уравнения.

После *алгоритма решения иррационального уравнения* вида $f(x)g(x)=0$ на примере показано его использование.

Пример 7. $(x^2-4)(\sqrt{x-1}-2)=0$, для начала решают уравнение $x^2-4=0$, находят его корни и для проверки подставляют во второе выражение $\sqrt{x-1}-2$. Потом решают уравнение $\sqrt{x-1}-2=0$ и для проверки подставляют его корни в первое выражение x^2-4.

Далее в учебнике начинается отработка изученного материала путем решения различных иррациональных уравнений.

Рассмотрим подробнее как раскрывается содержание темы «Иррациональные уравнения» на базе учебников 9 классов для углубленного изучения математики. Анализ учебников углубленного уровня представлен в Таблице 2.

Таблица 2

Анализ содержания теоретического материала темы «Иррациональные уравнения» в учебниках углубленного уровня 9-ого класса

Авторы учебника	**Содержание учебного материала**
Н. Я. Виленкин. [6]	Понятие иррационального уравнения. Понятие уравнения – следствия. Решение иррациональных уравнений путем возведения частей уравнения в одну степень. Решение иррациональных уравнений с помощью введения новой переменной.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. [16]	Понятие иррационального уравнения. Понятие равносильных уравнений. Понятие уравнения – следствия. Решение иррациональных уравнений путем возведения частей уравнения в одну степень. Решение иррациональных уравнений с помощью введения новой переменной.

Рассмотрим подробнее содержание темы «Иррациональные уравнения» на базе учебников 9 классов углубленного уровня.

В учебник Н.Я. Виленкина [6] понятие иррационального уравнения вводится путем рассмотрения задачи.

***Рассмотрим задачу*:** «Найдите длины сторон прямоугольника, если известно, что длина его диагонали равна 25 см, а его периметр равен 70 см» [6, С. 204].

Решение задачи. Длину одной стороны прямоугольника обозначают за x, по теореме Пифагора находят длину второй стороны, получится $\sqrt{625-x^2}$. По условию задачи сказано, что периметр прямоугольника равен 70 см. Тогда составляют уравнение $2x + 2\sqrt{625 - x^2} = 70$.

Н.Я. Виленкин говорит, что данное уравнение содержит переменную x под знаком корня и что такие уравнения называются *иррациональными*.

Для примера, автор приводит иррациональные уравнения $\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1} = 5$, $\frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}$ и уравнение, не являющееся иррациональным, хотя оно и содержит в записи знак радикала $\sqrt{5}x^2 + 3x - \sqrt{a^2 + b^2} = 0$.

Далее автор сообщает, что для решения иррациональных уравнений используются «тождественные преобразования иррациональных выражений, метод разложения на множители и введения новой переменной. Так же, применяют метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень».

Теорема: «Если возвести обе части уравнения $f(x) = g(x)$ в натуральную степень n, то полученное уравнение $f^n(x) = g^n(x)$ является следствием уравнения $f(x) = g(x)$» [6, С. 205].

В ходе решения иррационального уравнения $f(x) = g(x)$, которое возводят в четную степень, появляются посторонние корни. Чтобы определить их, следует проверять найденные корни, подставляя их в исходное уравнение.

Дальше Н.Я. Виленкин на примерах показывает решения иррациональных уравнений.

Пример 1. $2x + 2\sqrt{625 - x^2} = 70$, уединяют радикал $\sqrt{625 - x^2}$ в левой части: $\sqrt{625 - x^2} = 35 - x$.

Возводят обе части уравнения в квадрат и получают уравнение - следствие $625 - x^2 = (35 - x)^2$. Решают это уравнение и находят корни $x_1=15$, $x_2=20$. Подставляют числа в исходное уравнение, проверяют, есть ли посторонние корни.

Пример 2. $\sqrt{3+x}=3-x$, это уравнение записывают в виде системы $\begin{cases} 3+x=(3-x)^2 \\ 3-x\geq 0 \end{cases}$.

Корнями уравнения $3+x=(3-x)^2$ являются числа x_1=1, x_2=6. Проверяют полученные корни, число x_2=6- посторонний корень.

Пример 3. $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{3x+5}$, чтобы избавиться от иррациональности, возводят обе части уравнения в шестую степень. Получают уравнение – следствие $(x+3)^3=(3x+5)^2$.

Возводят в степени и переносят все члены в левую часть, получают $x^3-3x+2=0$. Левую часть уравнения раскладывают на множители $(x-1)(x^2+x-2)=0$. Находят корни этого уравнения, подставляют найденные числа в исходное уравнение для проверки.

Пример 4. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$, обе части уравнения возводят в третью степень, получают равносильное уравнение:

$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1.$

Выражение в скобках является левой частью исходного уравнения, поэтому заменяем его числом 1, получаем уравнение – следствие:

$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1$, приводим подобные слагаемые и возводим уравнение в третью степень, получаем равносильное ему уравнение

$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3$.

Решая это уравнение, находят корни. Так как в процессе решения был переход к уравнению – следствию, то возможно появление посторонних корней, поэтому все корни проверяют.

Пример 5. $\sqrt[3]{x+2}+2\sqrt[6]{x+2}=3$, это уравнение решают другим способом. Используют метод введения новой переменной. Вводят переменную $y=\sqrt[6]{x+2}$, тогда $y^2=\sqrt[3]{x+2}$. Выполняют подстановку в исходное уравнение и получают уравнение $y^2+2y-3=0$. Решают данное уравнение, находят его корни. Корни этого уравнения y_1=-3, y_2= 1.

Так как $y = \sqrt[6]{x+2} \geq 0$, то берут только значение $y_2 = 1$. Теперь решают уравнение $\sqrt[6]{x+2} = 1$, откуда x = -1.

Пример 6. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$, данное уравнение решают путем введения новых переменных.

Вводят переменные $u = \sqrt[3]{2x-1}$, $v = \sqrt[3]{x-1}$.

Тогда $u^3 - 2v^3 = 1$, а по условию $u + v = 1$. Получают систему из двух уравнений $\begin{cases} u^3 - 2v^3 = 1 \\ u + v = 1 \end{cases}$.

Систему решают методом подстановки, выражают u из второго уравнения и подставляют в первое.

Получают уравнение $3v\,(v^2 - v + 1) = 0$. Решают уравнение, дискриминант у квадратного уравнения отрицательный, поэтому корень только один $v = 0$. Находят u из уравнения $u + v = 1$.

Теперь решают совокупность уравнений $\sqrt[3]{x-1} = 0$ и $\sqrt[3]{2x-1} = 1$. Оба уравнения имеют единственный корень $x = 1$.

После рассмотрения различных примеров на решение иррационального уравнения переходят к практической части.

В заключение проведенного анализа, можно сказать, что нет четкой структуры изучения данного раздела: в учебнике Ю.Н. Макарычева для общеобразовательного уровня в 9-м классе не изучается тема «Иррациональные уравнения»; в учебниках Ю.М. Колягина и Г.К. Муравина при изучении темы «Квадратные корни» было дано определение иррационального числа и проанализирован способ решения иррационального уравнения методом возведения обоих частей уравнения в одну и ту же степень; учебник С.М. Никольского изучает тему «Иррациональные уравнения» в отдельном пункте и на изучение темы выделено 2 ч, С.М. Никольский вводит определение понятия, рассматривает различные методы решения иррационального уравнения (метод замены переменной, метод возведения в степень).

Таким образом, в учебниках Н.Я. Виленкина и Ю.Н. Макарычева углубленного уровня дано больше материала для изучения, более подробно изучены методы решения иррациональных уравнений, рассматриваются уравнения более высокого уровня сложности. Поэтому, можно сделать вывод, что в общеобразовательных учениках не раскрывают данную тему, не приводятся виды иррациональных уравнений, не показывают различные методы работы с ними. Следовательно, материала в общеобразовательных учениках недостаточно для успешного и глубокого изучения данного раздела.

4.2 Анализ задачного материала по теме «Иррациональные уравнения» в учебниках разных авторов основной школы

Проанализировав задачный материал в учебниках алгебры для общеобразовательных классов основной школы, выделим основные *типы задач* по данной теме:

1. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$;

2. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$;

3. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$;

4. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = a$;

5. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}g(x) = 0$;

6. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{q(x)}$;

7. Решение уравнений путем введения новой переменной.

Анализ задачного материала общеобразовательных учебников представлен в Таблице 3 в Приложении 1.

Приведем примеры упражнений на *типы задач* из учебников алгебры для общеобразовательных классов основной школы Ю.М. Колягина, С. М. Никольского, Г.К. Муравина для 9 класса.

Первый тип задач: решение простейших иррациональных уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$, где возможны случаи, когда n – четное (нечетное) число и a- некоторое число.

Задача 1 [22, С. 141]. Решить иррациональное уравнение: *а)* $\sqrt[5]{x} = \frac{1}{2}$;

б) $\sqrt{2x-3} = -2$.

Решение:

а) $\sqrt[5]{x} = \frac{1}{2}$,**возведем обе части уравнения в пятую степень** $x = \frac{1}{32}$.

б) $\sqrt{2x-3} = -2$, уравнение не имеет корней, так как n – четно и $a < 0$.

Второй тип задач: решение иррациональных уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – рациональные выражения с переменной x, а n – четное (нечетное) число.

Задача 2 [25, С. 109] Решить уравнение *а)* $\sqrt{3x+13} = x+3$;

б) $\sqrt[3]{x-1} = x-1$.

Решение: *а)* $\sqrt{3x+13} = x+3$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+13 = (x+3)^2 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}.$$

$$3x+13 = x^2+6x+9 => x^2+3x-4 = 0,$$

$$D=25, \quad \sqrt{D} = 5.$$

$$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1, \qquad x_2 = \frac{3+5}{2} = 4.$$

Подставим найденные корни в неравенство системы $x+3 \geq 0$, $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$ удовлетворяют неравенству, а значит, являются корнями уравнения.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

б) $\sqrt[3]{x-1} = x-1$, уравнение равносильно уравнению $x-1 = (x-1)^3$.

$$x-1 = x^3-3x^2+3x-1 => x^3-3x^2+2x = 0 => x(x^2-3x+2) = 0,$$

$$x_1 = 0\,, x_2 = \frac{3-1}{2} = 1, x_3 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$

Третий тип задач: решение иррациональных уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, где $f(x)$, $g(x)$ – рациональные выражения с переменной x, а n – четное число.

Задача 3 [11, С. 72] Решить уравнение $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$.

Решение: $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 = 2x-3 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}.$$

$$x+1 = 2x-3 => x-4 = 0 => x = 4.$$

Проверим полученный корень $x = 4$, подставив в неравенство системы $x+1 \geq 0, x = 4$ является корнем уравнения.

***Ответ*:** $x = 4$.

Четвертый тип задач: решение иррациональных уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = a,$ где $f(x)$, $g(x)$ – рациональные выражения с переменной x, n – четное число, а a – некоторое число.

Задача 4 [11, С. 72] Решить уравнение $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 3$.

Решение: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 3$, перенесем $\sqrt{3x+4}$ в правую часть уравнения и возведем в квадрат обе части равенства.

$$\sqrt{2x+1} = 3 - \sqrt{3x+4} => 2x+1 = 9 - 6\sqrt{3x+4} + 3x + 4,$$

$$6\sqrt{3x+4} = x + 12 => 36(3x+4) = x^2 + 24x + 144,$$

$$x^2 - 84x = 0, \qquad x(x-84) = 0,$$

$$x_1 = 0 \text{ или } x - 84 = 0,\ x_2 = 84.$$

Сделав проверку, видим, что $x_1 = 0$ является корнем уравнения, а $x_2 = 84$ не является.

Ответ: $x_1 = 0$.

Пятый тип задач: решение иррациональных уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\,g(x) = 0,$ где $f(x)$, $g(x)$ – рациональные выражения с переменной x, n – четное число.

Задача 5 [22, С. 141] Решить уравнение $\sqrt[4]{x-2}\,(21x^2 - 14x - 35) = 0$.

Решение: Решим первое уравнение $\sqrt[4]{x-2}=0$,

$$x-2=0 => \ x=2.$$

Проверим полученный корень $x=2$, подставив во второе уравнение $21x^2-14x-35=0$, $x=2$ не удовлетворяет уравнению. Решим второе уравнение $21x^2-14x-35=0$, поделим уравнение на 7.

$$3x^2-2x-5=0,\ D=64,\quad \sqrt{D}=8.$$

$$x_1=\frac{2-8}{6}=-1;\ x_2=\frac{2+8}{6}=1\frac{4}{6}.$$

Проверим полученные корни $x_1=-1$ и $x_2=1\frac{4}{6}$, подставив в первое уравнение $\sqrt[4]{x-2}=0$, $x_1=-1$ и $x_2=1\frac{4}{6}$ не удовлетворяет уравнению.

***Ответ*:** нет корней.

Шестой тип задач: решение иррациональных уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=\sqrt[n]{q(x)}$, где $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$ – рациональные выражения с переменной *x*, *n* – четное число.

Задача 6 [25, С. 110] Решить уравнение $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+4}=\sqrt{6x+10}$.

Решение:

Возведем обе части уравнения $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+4}=\sqrt{6x+10}$ в одну степень

$\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+4}\right)^2=6x+10 => 2x-1+2\sqrt{(2x-1)(2x+4)}+2x+4=6x+10 => 2\sqrt{4x^2+6x-4}=2x+7 => 4(4x^2+6x-4)=4x^2+28x+49 => 12x^2-4x-65=0 =>$ D=3136, $\sqrt{D}=56$.

$$x_1=\frac{4-56}{24}=-\frac{52}{24},\qquad x_2=\frac{4+56}{24}=2{,}5.$$

Проверим полученные корни $x_1=-\frac{52}{24}$ и $x_2=2{,}5$, подставив в первое уравнение $\sqrt[4]{x-2}=0$, $x_1=-\frac{52}{24}$ не удовлетворяет уравнению, а $x_2=2{,}5$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x_2=2{,}5$.

Седьмой тип задач: решение иррационального уравнения путем замены переменной. В учебниках для общеобразовательных классов, такой метод решения встречается довольно редко и на него не акцентируют внимание.

Задача *7* [25, С. 109] Подберите подходящую замену переменной *а)* $\sqrt{x^2+2x+10}+\sqrt{x^2+2x+17}=7$.

Пусть $t=\sqrt{x^2+2x+10}$, тогда $t^2=x^2+2x+10$. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{t^2+7}=7-t$,

$$t^2+7=49-14t+t^2 \Rightarrow 14t=42 \Rightarrow t=3.$$

Тогда $\sqrt{x^2+2x+10}=3$, решим это уравнение $x^2+2x+10=9$,

$$x^2+2x+1=0,\ D=0,\ x_1=\frac{-2}{2}=-1.$$

Проверим полученный корень $x_1=-1$, подставив в уравнение $\sqrt{x^2+2x+10}+\sqrt{x^2+2x+17}=7$.

Ответ: $x_1=-1$.

Проанализировав задачный материал в учебниках алгебры углубленного уровня основной школы, выделим основные *типы задач* по данной теме:

1. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=a$;
2. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$;
3. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$;
4. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=a$;
5. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[m]{g(x)}=a$;
6. Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}g(x)=0$;
7. Уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=\sqrt[n]{q(x)}$;
8. Решение уравнений путем введения новой переменной;
9. Решение иррациональных уравнений с параметром.

Анализ задачного материала учебников для углубленного изучения математики представлен в Таблице 4 в Приложении 2.

В учебниках углубленного уровня рассматриваются разнообразные задачи, уделяют больше внимания некоторым типам уравнений.

Рассмотрим некоторые задачи из учебников алгебры углубленного уровня для 9 класса Н.Я. Виленкина, Ю.Н. Макарычева, которые не встречались в учебниках для общеобразовательных классов.

Например, задача на *второй тип*, решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$.

Задача 8 [15, С. 233]. Решить уравнение $\sqrt{4+x\sqrt{x^2+40}} = x+2$:

Решение: Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 4+x\sqrt{x^2+40} = (x+2)^2 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$.

$$4+x\sqrt{x^2+40} = x^2+4x+4, => x\sqrt{x^2+40} = x^2+4x, \quad \sqrt{x^2+40} = x+4,$$

Возведем в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x^2+40} = x+4$, при этом $x+4 \geq 0$. $x^2+40 = x^2+8x+16 => 8x = 24, => x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

В учебниках углубленного уровня представлены задачи на *пятый тип*, решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[m]{g(x)} = a$, данные уравнения решаются методом введения новой переменной.

Задача 9 [15, С. 233]. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-6} + \sqrt{7-x} = 1$

Решение: Пусть $\sqrt[3]{x-6} = u$, $\sqrt{7-x} = v$, тогда $u^3 = x-6, v^2 = 7-x$, причем $v \geq 0$. Получим систему из трех уравнений $\begin{cases} x-6 = u^3 \\ 7-x = v^2 \\ u+v = 1 \end{cases}$, складываем первое и второй уравнение системы $u^3+v^2 = 1$.

Получим систему $\begin{cases} u^3+v^2 = 1 \\ u+v = 1 \end{cases}$, выразим v из второго уравнения и подставим в первое уравнение системы.

$$u^3 + (1-u)^2 = 1 => u^3+u^2-2u = 0 => u(u^2+u-2) = 0,$$

$$u_1 = 0 \text{ или } u^2+u-2 = 0, \; D=9, \; \sqrt{D} = 3.$$

$$u_2 = \frac{-1-3}{2} = -2,\ u_3 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Подставим значения u_1, u_2, u_3 в уравнение $u + v = 1$ и найдем v_1, v_2, v_3, $v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 0,$ **они удовлетворяют условию** $v \geq 0$.

Найдем x_1, x_2, x_3 из уравнения $x - 6 = u^3$, $x_1 = 6, x_2 = -2, x_3 = 7$.

Ответ: $x_1 = 6, x_2 = -2, x_3 = 7$.

Рассмотри *восьмой тип* задач в учебниках углубленного уровня на отработку метода введения новой переменной.

Задача 10 [6, С. 209] Решить уравнение, применив подходящую замену переменной $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2} + \frac{\sqrt[3]{x}+3}{5} = 2$:

Решение: Пусть $t = \sqrt[3]{x}$, тогда уравнение примет вид: $\frac{4}{t+2} + \frac{t+3}{5} = 2$,

$$\frac{20+(t+2)(t+3)}{5(t+2)} = \frac{10(t+2)}{5(t+2)}, \text{ ОДЗ: } t + 2 \neq 0, t \neq -2.$$

$$20 + t^2 + 5t + 6 = 10t + 20,\ \ t^2 - 5t + 6 = 0, D=1,$$

$$t_1 = \frac{5-1}{2} = 2,\ t_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

$$\sqrt[3]{x} = 2 \text{ и } \sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x_1 = 8, x_2 = 27.$$

Ответ: $x_1 = 8, x_2 = 27$.

Следующие задачи, которые рассматриваются в учебниках углубленного уровня это решение иррациональных уравнений с параметром.

Задача 11 [6, С. 210]. Решить уравнение с параметром a. $\sqrt{x^2 + 4ax + 4a^2} + 1 = a$.

Решение: Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 + 4ax + 4a^2 = (a-1)^2 \\ a - 1 \geq 0 \end{cases}$.

При $a \in (-\infty; 1)$, уравнение корней не имеет.

При $a \in [1; +\infty)$, решим уравнение $x^2 + 4ax + 4a^2 = (a-1)^2$.

$$x^2 + 4ax + 4a^2 = a^2 - 2a + 1, x^2 + 4ax + 3a^2 - 1 = 0,$$

$$D=16a^2 - 4(3a^2 - 1) = 4a^2 + 4,$$

$$x_1 = \frac{-6a-2}{2} = -3a - 1;\ x_2 = \frac{-2a+2}{2} = -a + 1.$$

При $a \in [1;+\infty)$, уравнение имеет корни $\{-3a-1;-a+1\}$.

При $a = 0$, уравнение корней не имеет.

Ответ: $a \in (-\infty;1)$, $\emptyset$. $a \in \ 1;+\infty\ $, $\{-3a-1;-a+1\}$. $a=0, \emptyset$.

Таким образом, анализ задачного материала показал, что, не смотря на некоторые различия в содержании и распределении материла по теме «Иррациональные уравнения», в большинстве рассматриваемых учебников особое внимание уделяют изучению решения иррациональных уравнений путем возведения обоих частей уравнения в одну степень.

Задачный материал общеобразовательных учебников условно разделили на *7 типов задач*, описанных выше. Анализ задачного материала показал, что в учебнике Г.К. Муравина из выделенных типов задач представлены только 3 типа, рассматривается решение простейших иррациональных уравнений. В учебниках Ю.М. Колягина и С.М. Никольского представлены все типы задач, решаются как простейшие иррациональные уравнения, так и уравнения более высокого уровня сложности. Основной упор в учебниках делается на отработку метода возведения в одну степень. Но в учебнике С.М. Никольского присутствует задание, отмеченное в учебнике как упражнение повышенной трудности, которое дается на отработку метода введения новой переменной. Таким образом, можно сказать, что в общеобразовательных учебниках делается упор на отработку метода равносильных преобразований и учат решать элементарные иррациональные уравнения. Что поможет ученикам в сдаче базовой части ЕГЭ.

Задачный материал учебников углубленного уровня условно разделили на 9 типов задач, описанных выше. Анализ задачного материала показал, что в учебниках Н.Я. Виленкина и Ю.Н. Макарычева представлено много упражнений на выделенные типы задач, отрабатывается решения различных видов иррациональных уравнений, в отличие от общеобразовательных учебников уравнения представлены более сложные и разнообразные.

Учебники углубленного уровня рассматривают метод введения новой переменной.

Выводы по первой главе

1. Изучено понятие темы «Иррациональные уравнения», приведены основные теоремы, связанные с иррациональными уравнениями.

2.Разобраны основные методы решения иррациональных уравнений. Выделены трудности, возникающие у обучающегося при изучении темы « Иррациональные уравнения». Определено, что необходимо изучение различных методов решения иррациональных уравнений, но нельзя выработать общие рекомендации по поводу того, в каких случаях какой из методов следует использовать при решении предложенного иррационального уравнения.

3. Выявлены основные цели обучения теме «Иррациональные уравнения» в курсе математики основной школы. Определено, что при изучении темы «Иррациональные уравнения» обучающиеся развивают логическое и математическое мышление; овладевают математическими рассуждениями; учатся применять математические знания при решении различных типов уравнений и оценивать полученные результаты; развивают математическую интуицию.

4. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала данной темы в учебниках алгебры основной школы. Определено, что, не смотря на некоторые различия в содержании и распределении материла по теме «Иррациональные уравнения», в большинстве рассматриваемых учебников особое внимание уделяют изучению решения иррациональных уравнений путем возведения обоих частей уравнения в одну степень. Выделены основные типы задач по общеобразовательным учебникам и учебникам углубленного уровня по теме «Иррациональные уравнения», приведены примеры задач каждого типа.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры основной школы

М.Э. Григорян, П.Б. Болдыревский и др. [9] в статье «Теория и методика обучения школьников решению уравнений» сформулировали этапы обучения школьников решению уравнений:

1. «Вводится определение конкретного вида уравнений.

2. Решаются простейшие уравнения данного вида.

3. Анализируются действия, необходимые для их решения.

4. Выводится алгоритм решения простейших уравнений.

5. Решаются несложные уравнения данного вида, не являющиеся простейшими.

6. Анализируются действия, необходимые для их решения.

7. Применяются общие методы решения уравнений к данному виду уравнений.

8. Выводится алгоритм решения данного вида уравнений общими методами решения.

9. Формулируются частные методы решения уравнений, которые подходят только к данному виду уравнений.

10. Выводится алгоритм решения уравнений частными методами.

11. Анализируются полученные частные приемы, выделяются в их составе общие действия.

12. Формулируется обобщенный прием решения уравнений».

В статье, авторы акцентируют внимание на том, что для сформирования умения решать уравнения, необходимо обучить способам решения уравнений. Так как каждый способ решения уравнений состоит из отдельных действий, следовательно, нужно формировать умения у школьников выполнять действия, адекватные поиску способа решения и решению уравнения.

А.А. Чугунова, А.С Рванова [34] выделяют ряд трудностей возникающих при изучении иррациональных уравнений: «отсутствие единого алгоритма решения иррациональных уравнений; использование при решении иррациональных уравнений преобразований, приводящих первоначальное уравнение к не равносильному уравнению, что может привести к ошибке при решении, так как могут появиться посторонние корни» [34, С. 281].

В.И. Мишин [19] в методических рекомендациях по обучению математике в средней школе выделяет следующие трудности, возникающие у учеников при обучении темы «Иррациональные уравнения». Они заключаются в том, что «даже в начале изучения простейшего класса иррациональных уравнений учащимся приходится преодолевать трудности, связанные с освоением специфической символики, в частности узнавать новые формы записи чисел. Значительно чаще, чем в предшествующих изученных уравнениях, используются неравносильные преобразования и подстановки» [19, С.134]. Поэтому В.И. Мишин говорит о том, что «весь материал, связанный с иррациональными уравнениями требует в еще большей мере достаточной логической грамотности учащихся» [19, С.134].

В.И. Мишин [19] определяет специфику иррациональных уравнений, она заключается в том, что «при решении иррациональных уравнений применяется характерное преобразование – освобождение неизвестного из-под знака корня, обычно состоящее в возведении обеих частей уравнения в одинаковую степень. Необходимо донести до учащихся причины возможного появления посторонних корней. Они появляются при возведении в четную степень, так как получаемое при этом уравнение – логическое следствие данного, но может быть и не равносильно ему» [19, С. 135].

А.Г. Мордкович [20] в пособии для учителей «Беседы с учителями математики» затрагивает вопросы, связанные с решением иррациональных уравнений: «что такое равносильные уравнения, какие преобразования являются равносильными, а какие – нет, когда надо делать проверку корней и как ее делать, какие преобразования уравнений могут привести к потере корней» [20, С. 152].

Перед началом решения иррациональных уравнений А.Г. Мордкович рекомендует начать с основных определений темы.

Определение 1 [20, С. 152]: «Уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют *равносильными*, если они имеют одни и те же корни».

Определение 2 [20, С. 152]: «Уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ называют *следствием уравнения* $f_1(x) = g_1(x)$, если каждый корень уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ является одновременно и корнем уравнения $f_2(x) = g_2(x)$».

А.Г. Мордкович приводит следующий план работы при решении уравнений:

1. «*Техническая часть*, процесс преобразования уравнения: $(1) \to (2) \to (3) \to \cdots$. Значит, что заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое по сравнению с уравнением (1); уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое по сравнению с уравнением (2) и так далее. В итоге находим корни последнего (самого простого) уравнения этой цепочки.

2. *Анализ решения*, получение ответа на вопрос, все ли преобразования были равносильны.

3. *Проверка найденных корней* последнего уравнения цепочки их постановкой в исходное уравнение в случае, если анализ, проведенный на втором шаге, покажет, что не все преобразования были равносильными».

Далее А.Г. Мордкович отвечает на вопрос, какие же преобразования являются равносильными. Для решения вопроса, вводится теорема.

Теорема 1 [20]. «Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному» [20, С. 154].

Таким образом, если на каком- либо этапе решения уравнения мы возвели обе части уравнения в одну четную степень, то проверка обязательна.

Так же, *расширение области определения* является важной причиной перехода к уравнению - следствию.

Для иррационального уравнения это, использование формулы $(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x)$ для четного n.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5.$

***Решение*:**

1. *Техническая часть*. Решая уравнение, последовательно имеем:

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5 \Rightarrow \left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+5}\right)^2,$$

$$5x-6=25-10\sqrt{2x+5}+2x+5 \Rightarrow 10\sqrt{2x+5}=36-3x,$$

$$\left(10\sqrt{2x+5}\right)^2 = (36-3x)^2 \Rightarrow 100(2x+5) = 1296-216x+9x^2,$$

$$9x^2-416x+796=0,$$

$$x_1=2, \qquad x_2=\frac{398}{9}.$$

2. *Анализ решения*. В процессе решения уравнения в результате преобразований расширилась область определения и два раза применялась неравносильная операция – возведение обоих частей уравнения во вторую степень. Значит, в итоге получено уравнение – следствие. В этом случае проверка обязательна.

3. *Проверка найденных корней*. Подставим $x_1=2$ в первоначальное уравнение: $\sqrt{9}+\sqrt{4}=5-$ **получено** верное равенство. Подставив $x_2=\frac{398}{9}$ в исходное уравнение, видим, что $\sqrt{2\frac{398}{9}+5}$ уже больше 5, таким образом, x_2 не удовлетворяет заданному уравнению. x_2 – посторонний корень.

Ответ: 2.

А.Г. Мордкович обращает внимание на то, что каждый раз при решении уравнения необязательно выделять три части - техническую, аналитическую и проверочную. Но ученик всегда должен понимать следующее: если анализ показал, что проверка обязательна, а он ее не сделал, то уравнение считается нерешенным.

Е.П. Нелин [23], при изучении темы иррациональные уравнения, также рекомендует обращать внимание учащихся на понятия равносильных преобразований и уравнений – следствий.

А.Н. Бакаревич [3], в книге «Уравнения в школьном курсе математики» предлагает изложение нового материала начинать с рассмотрения задачи, приводящей к иррациональному уравнению.

Задача [3]. «Гипотенуза прямоугольного треугольника на *2 см* больше катета, периметр его равен *12 м.* Определить стороны треугольника».

Решение. Принимая длину одного из катетов за *x* метров, учащиеся должны получить уравнение

$$2\sqrt{x+1}+x+(x+2)=12.$$

После этого рекомендуется формулировать определение иррационального уравнения.

Затем учащиеся переходят непосредственно к решению полученного уравнения $2\sqrt{x+1}+x+(x+2)=12$. Учащиеся самостоятельно могут привести уравнение к виду: $\sqrt{x+1}=5-x$.

Если учащиеся затрудняются дальше продолжить решение, то А.Н. Бакаревич предлагает обсудить с учащимися такие вопросы: не нарушится ли равенство, если обе части уравнения возвести в квадрат? Можно ли применять такое преобразование уравнения? Как пишет А.Н. Бакаревич, учащиеся обычно отвечают, что равенство не нарушится, а следовательно, такое преобразование применять можно. Дальнейшее решение иррационального уравнения затруднений не вызывает, решив полученное квадратное уравнение, учащиеся получат корни $x_1 = 8, x_2 = 3$.

После этого предлагается сделать проверку. Вначале она выполняется по условию задачи: раз катет равен 8, то гипотенуза составит 10. Сразу видно, что это значение x не является ответом на вопрос задачи. Второе значение x удовлетворяет условию задачи и является ответом на вопрос задачи. Далее, нужно проверить найденные значения подстановкой в уравнение $2\sqrt{x+1}+x+\sqrt{x+2}=12$. Учащиеся убеждаются, что $x_1 = 8$ не удовлетворяет не только условию задачи, но и составленному уравнению.

После проведенной совместной проверки корней уравнения А.Н. Бакаревич вводит понятие постороннего корня. Учащиеся, выясняют, что посторонний корень появляется в результате возведения обоих частей уравнения в квадрат. В качестве иллюстрации сравнивают решения уравнений $x+1=2$ и $x^2+2x+1=4$ и убеждаются, что $x=-3$ является посторонним для первого уравнения.

Рассмотрим *методику обучения* теме «Иррациональные уравнения» в школьном учебнике С.М. Никольского для девятого класса [26].

Изучается данная тема во 2 главе учебника «Степень числа», на обучение теме в общеобразовательном классе отводится 1 час, а в классе с углубленным изучением математики 2 часа.

Перед началом изучения темы, автор рекомендует использовать дополнительные задания с конца учебника.

Упражнение 1. Подберите число х, удовлетворяющее равенству, если это возможно: *а)* $\sqrt{x+1}=5$; *б)* $\sqrt{x+3}=1$; *в)* $\sqrt{2x-1}=3$; *г)* $\sqrt{3x-2}=4$; *д)* $\sqrt[3]{x}=-1$; *е)* $\sqrt[4]{x}=2$; *ж)* $\sqrt{x}=-3$; *з)* $\sqrt{-x}=3$.

Далее, вводится понятие иррационального уравнения и напоминается понятие уравнения-следствия, на конкретных примерах показывается решение иррациональных уравнений переходом к уравнению - следствию, объясняется, что требуется проверить, все ли корни уравнения-следствия являются корнями исходного уравнения.

Упражнение 2. Решите уравнение $\sqrt{5x+11}=x+1$.

Решение. Решают уравнение путем возведения обоих частей уравнения в квадрат $5x+11=x^2+2x+1$. Решают квадратное уравнение, получают корни: $x_1=5$ и $x_2=-2$. Выполняется проверка.

Ответ: 5.

Упражнение 3. Решите уравнение $\sqrt{3x-7}=\sqrt{2x-5}$.

Решение. Решают уравнение путем возведения обоих частей уравнения во вторую степень, получают уравнение – следствие: $3x-7=2x-5$. Находят корни и делают проверку.

Ответ: Нет корней.

Упражнение 4. Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+7}$.

Решение. Решают уравнение путем возведения обоих частей уравнения во вторую степень, получают уравнение - следствие: $x-2+2\sqrt{x-2}\sqrt{x+3}+x+3=3x+7$, $2\sqrt{x-2}\sqrt{x+3}=x+6$. Возводят уравнение еще раз во вторую степень, получают уравнение-следствие: $4x^2+4x-24=x^2+12x+36$.

Решают квадратное уравнение, получают корни: $x_1=6$ и $x_2=-\frac{10}{3}$.

Ответ: 6.

Упражнение 5. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-1}=x-1$.

Решение. Решают уравнение путем возведения обоих частей уравнения в третью степень, получают равносильное уравнение: $x-1=(x-1)^3$, $(x-1)\left((x-1)^2-1\right)=0$. Решив полученные уравнения, получают корни: $x_1=0, x_2=1,$ и $x_3=2$.

Ответ: $0;1;2$.

Упражнение 6. Решите уравнение $\sqrt{x^2+2x+10}+\sqrt{x^2+2x+17}=7$.

Решение. Решают уравнение методом возведения в одну и ту же степень, при решении переходят к уравнению – следствию. Один из корней уравнения переносят в правую часть: $\sqrt{x^2+2x+17} = 7 - \sqrt{x^2+2x+10}$, возводят уравнение во вторую степень. Получают уравнение вида $\sqrt{x^2+x+10} = 3$. Возводят уравнение во вторую степень, получают следствие исходного уравнения: $x^2+x+10 = 9$.

Полученное квадратное уравнение имеет корень: $x_1 = -1$. Делают проверку.

Ответ: -1.

Так же, С.М. Никольский рекомендует обратить внимание на второй способ решения уравнения $\sqrt{x^2+2x+10} + \sqrt{x^2+2x+17} = 7$, путем замены переменной.

Упражнение *7*. Решите уравнение $x^2-4 \quad \sqrt{x+1}-2 \quad = 0$.

Решение. Уравнение $x^2-4=0$, имеет корни: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Из них только при подстановке в уравнение x_1, выражение имеет смысл второй множитель. Значит, x_1 - корень первоначального уравнения, а x_2 нет.

Уравнение $\sqrt{x+1}-2=0$ имеет корень: $x_3 = 3$. При подстановке в уравнение, второй множитель имеет смысл, а значит, x_3- корень уравнения.

Ответ: $2;3$.

После рассмотрения с учащимися решения основных типов иррациональных уравнений, рекомендуется проверить полученные знания с помощью промежуточного контроля. В дидактических рекомендациях к учебнику С.М. Никольского, приведены следующие иррациональные уравнения для самостоятельного решения.

Всего в самостоятельной работе 4 варианта, в каждом варианте по 2 задания. В первом задании проверяется умение решать иррациональные уравнения, а второе задание направлено на проверку умения решать иррациональные неравенства. Рассмотрим иррациональные уравнения первого варианта.

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2-7x+21}=3$; *б)* $\sqrt{x-1}=3x-7$; *в)* $\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x-4}=1$.

Решение. а) $\sqrt{x^2-7x+21}=3$, решают уравнение путем возведения обоих частей в квадрат, получают уравнение – следствие исходного уравнения, решают полученное уравнение и проверяют его корни.

$$x^2-7x+21=9, x^2-7x+12=0.$$

Уравнение имеет корни: $x_1=3, x_2=4$. Проверкой убеждаемся, что x_1 **и** x_2 являются так же и корнями исходного уравнения.

б) $\sqrt{x-1}=3x-7$, решают уравнение путем возведения обоих частей в квадрат, получают уравнение – следствие исходного уравнения, решают полученное уравнение и проверяют его корни.

$$x-1=(3x-7)^2,\ x-1=9x^2-42x+49, 9x^2-43x-50=0.$$

Уравнение имеет корни: $x_1=2, x_2=\frac{50}{18}$. Проверкой убеждаемся, что x_1 **и** x_2 не являются корнями исходного уравнения.

в) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x-4}=1$, переносят один из корней уравнения в правую часть, решают уравнение путем возведения обоих частей уравнения в квадрат: $\sqrt{5x-1}=1+\sqrt{4x-4}$, $5x-1=1+2\sqrt{4x-4}+4x-4$,

$$2\sqrt{4x-4}=3+x, 16x-16=x^2+6x+9,\ x^2-10x+25=0.$$

Уравнение имеет корень: $x_1=5$. Проверкой убеждаемся, что x_1 не является корнем исходного уравнения.

Таким образом, проанализировав методические рекомендации к данной теме и методику обучения данной теме, можно сделать вывод, что при введении понятия иррационального уравнения следует учитывать трудности, возникающие у учеников в процессе обучения: «специфическая форма записи числа, использование неравносильных преобразований и подстановок, отсутствие единого алгоритма решения иррациональных уравнений, потеря или приобретение посторонних корней в процессе решения».

При обучении иррациональных уравнений целесообразно обсудить с учащимися вопросы, связанные с решением иррациональных уравнений: «что такое равносильные уравнения, какие преобразования являются равносильными, а какие – нет, когда надо делать проверку корней и как ее делать, какие преобразования уравнений могут привести к потере корней». Нужно обучить способам решения иррациональных уравнений, формировать умения у школьников выполнять действия, адекватные поиску способа решения и решению уравнения.

§6. Анализ задач ЕГЭ по теме «Иррациональные уравнения»

В ОГЭ не содержатся задания на решение иррациональных уравнений, так как в ОГЭ проверяются умения учеников работать с иррациональными числами, умения упрощать выражение содержащее иррациональное число или находить значение иррационального выражения. ЕГЭ же содержит задания, проверяющие умение решать иррациональное уравнение, задание присутствует как в базовой части, так и в профильной части ЕГЭ.

Представим основные задачи на решение иррациональных уравнений, используемые в заданиях ЕГЭ. Данные виды задач используются в базовом уровне ЕГЭ части 1, задание № 7 (раздел «Простейшие уравнения»), в профильном уровне ЕГЭ части 1, задание № 5 (раздел «Простейшие уравнения»).

Задания были составлены из источников [33; 36].

Приведем различные виды *задания 5(7) части 1 ЕГЭ*. Ответы и указания к решению задач представлены в Приложении 3.

Пример 1. Найдите корень уравнения $\sqrt{25+3x}=4$.

Пример 2. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{7x+41}{17}}=3$.

Пример 3. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$.

Пример 4. Найдите корень уравнения $\sqrt{-72-17x}=-x$.

Пример 5. Найдите корень уравнения $\sqrt{6+5x}=x$.

Пример 6. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-3}=2$.

Пример 7. Найдите корень уравнения $\sqrt[5]{x-3}=-2$.

Пример 8. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{1}{15-4x}}=0{,}2$.

Пример 9. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+2}=-2$.

Проанализировав задания ЕГЭ, мы видим, что проверяются знания учеников в умении решать простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=a$. В следующем параграфе представлены наборы заданий на решение иррациональных уравнений для учащихся девятых классов.

§7. Наборы задач по обучению учащихся основной школы решению иррациональных уравнений

В параграфе представлены наборы заданий на решение семи основных типов иррациональных уравнений. Ответы и указания к решению задач представлены в Приложении 4.

Задания были составлены из источников [6; 7; 11; 15; 23; 25].

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=a$

Задание 1. Решить уравнение $\sqrt[4]{x}=\frac{2}{3}$.

Задание 2. Решить уравнение $\sqrt{3+2x}=4$.

Задание 3. Решить уравнение $\sqrt{2x-3}=-2$.

Задание 4. Решить уравнение $\sqrt[3]{2-5x}=-0{,}6$.

Задание 5. Решить уравнение $\sqrt[4]{x^2+17}=3$.

Задание 6. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$

Задание 7. Решить уравнение $\sqrt{14-5x}=x$.

Задание 8. Решить уравнение $\sqrt{x^2+x+10}=2x$.

Задание 9. Решить уравнение $\sqrt{6x^2+x+7}=1-3x$.

Задание 10. Решить уравнение $\sqrt{5+\sqrt{x-2}}=1-x$.

Задание 11. Решить уравнение $\sqrt{3x+1}=2x-1$

Задание 12. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1}=x-1$.

Задание 13. Решить уравнение $\sqrt[3]{28-23x-x^3}=3-x$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$

Задание 14. Решить уравнение $\sqrt{2x-5}=\sqrt{x+1}$.

Задание 15. Решить уравнение $\sqrt[5]{7x+4}=\sqrt[5]{5x-2}$.

Задание 16. Решить уравнение $\sqrt{14+\sqrt{x}}=\sqrt{x^2-16}$.

Задание 17. Решить уравнение $\sqrt[7]{x^2+5x-5}=\sqrt[7]{2x^2-x}$.

Задание 18. Решить уравнение $\sqrt[4]{2x+1}=\sqrt{2x-1}$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=a$

Задание 19. Решить уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$.

Задание 20. Решить уравнение $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$.

Задание 21. Решить уравнение $\sqrt{x^2+2x+10}+\sqrt{x^2+2x+17}=7$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\,g(x)=0$

Задание 22. Решить уравнение $\sqrt[4]{x-2}\,(21x^2-14x-35)=0$.

Задание 23. Решить уравнение $(x^2-4)(\sqrt{x+1}-2)=0$.

Задание 24. Решить уравнение $(x^2+2x-15)(\sqrt{x+4}-1)=0$.

Задание 25. Решить уравнение $(\sqrt[6]{2x^2-7}+\sqrt[3]{x-3})(\sqrt[4]{x^2-2x-2}-1)=0$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=\sqrt[n]{q(x)}$

Задание 26. Решить уравнение $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+1}$.

Задание 27. Решить уравнение $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+4}=\sqrt{6x+10}$.

Решение уравнений путем введения новой переменной

Задание 28. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $x-\sqrt{x}=30$.

Задание 29. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=3$.

Задание 30. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$.

Задание 31. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $\sqrt{x^2-3x+7}=3x+(x-3)^2-22$.

Задание 32. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

В итоге, были разработаны наборы заданий на решение иррациональных уравнений для девятого класса, задания могут быть использованы при составлении контрольных и самостоятельных работ.

Выводы по второй главе

1. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные уравнения». Установлено, что «целесообразно обсудить с учащимися вопросы, связанные с решением иррациональных уравнений: что такое равносильные уравнения, какие преобразования являются равносильными, а какие – нет, когда надо делать проверку корней и как ее делать, какие преобразования уравнений могут привести к потере корней».

2. Проанализированы задачи ЕГЭ на тему «Иррациональные уравнения». Разобраны решения основных видов иррациональных уравнений, встречающихся на экзамене.

3. Разработаны наборы задач для учащихся девятых классов по теме исследования. Задания могут быть использованы при составлении контрольных и самостоятельных работ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Изучено понятие темы «Иррациональные уравнения», приведены основные теоремы, связанные с иррациональными уравнениями.

2.Разобраны основные методы решения иррациональных уравнений. Выделены трудности, возникающие у обучающегося при изучении темы «Иррациональные уравнения». Определено, что необходимо изучение различных методов решения иррациональных уравнений, но нельзя выработать общие рекомендации по поводу того, в каких случаях какой из методов следует использовать при решении предложенного иррационального уравнения.

3. Выявлены основные цели обучения теме «Иррациональные уравнения» в курсе математики основной школы. Определено, что при изучении темы «Иррациональные уравнения» обучающиеся развивают логическое и математическое мышление; овладевают математическими рассуждениями; учатся применять математические знания при решении различных типов уравнений и оценивать полученные результаты; развивают математическую интуицию.

4. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материала данной темы в учебниках алгебры основной школы. Определено, что, не смотря на некоторые различия в содержании и распределении матерila по теме «Иррациональные уравнения», в большинстве рассматриваемых учебников особое внимание уделяют изучению решения иррациональных уравнений путем возведения обоих частей уравнения в одну степень. Выделены основные типы задач по общеобразовательным учебникам и учебникам углубленного уровня по теме «Иррациональные уравнения», приведены примеры задач каждого типа.

5. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Иррациональные уравнения». Установлено, что целесообразно обсудить с учащимися вопросы: «что такое равносильные уравнения, какие преобразования являются равносильными, а какие – нет, когда надо делать проверку корней и как ее делать, какие преобразования уравнений могут привести к потере корней».

6. Проанализированы задачи ЕГЭ на тему «Иррациональные уравнения». Разобраны решения основных видов иррациональных уравнений встречающихся на экзамене.

7. Разработаны наборы задач для учащихся девятых классов по теме исследования. Задания могут быть использованы при составлении контрольных и самостоятельных работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авхатова, Л.Р. Методическая разработка открытого урока «решение иррациональных уранений» [Электронный ресурс]/ Л.Р. Авхатова //сайт «Мультиурок». – 2018. – Режим доступа: https://multiurok.ru/files/mietodichieskaia-razrabotka-otkrytogho-uroka-po-ma.html.
2. Аммосова, Н.В. Реализация преемственности в обучении математике в основной и средней школе (на примере изучения уравнений) [Электронный ресурс]/ Н.В. Аммосова, Г.Г. Краснова // Сибирский педагогический журнал. – 2012. №3. – С. 252 – 256. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=17865838.
3. Бакаревич А.Н. Уравнения в школьном курсе математики [Текст]: учеб. -метод. пособие/ А.Н. Бакаревич. – М.: Издательство «Народная Асвета», 1968. – 152 с.
4. Берговина, И.А. Методическая разработка открытого урока «Иррациональные уравнения» [Электронный ресурс]/ И.А. Берговина //сайт «Копилка уроков». – 2018. – Режим доступа: https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/otkrytyi-urok-po-tiemie-irratsional-nyie-uravnieniia .
5. Бурмистров, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразоват. учреждений/ Т.А. Бурмистров. – М.: Просвещение, 2011. – 96 с.
6. Виленкин, Н.Я. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. с углубленным изучением математики/ Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2006. - 368 с.
7. Галицкий, М.Л. Сборник задач по алгебре [Текст]:учеб. пособие для 8-9 кл. с углубл. изучением математики/ М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – М.: Просвещение, 2001. – 271 с.

8. Глейзер, Г.И. История математики в школе IV–VI кл. [Текст]: пособие для учителей/ Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1981. – 239 с.
9. Григорян, М.Э. Теория и методика обучения школьников решению уравнений [Электронный ресурс]/ М.Э. Григорян, П.Б. Болдыревский, М.Л. Залесский, Р.В. Троицкий // Международный журнал экспериментального образования. – 2017. №8. – С. 28 – 33. – Режим доступа: http://elibrary.ru/item.asp?id=30514190.
10. Колягин, Ю.М. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2013. – 336 с.
11. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций/ Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.
12. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс. Методические рекомендации/ Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2017 – 159 с.
13. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс. Методические рекомендации/ Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2017 – 159 с.
14. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. ин-тов/ Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканин, Е.Л. Мокрушин, В. А. Оганесян и др. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.
15. Макарычев, Ю.Н. Алгебра [Текст]: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – 15-е изд., дораб. –М.: Просвещение, 2007. – 271 с.
16. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. с углубленным изучением математики/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков – М.: Просвещение, 2017. - 400 с.

17. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.
18. Марасанов, А.Н. О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений [Электронный ресурс]/ А.Н. Марасанов // Вестник чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. – 2010. №3. – С. 127 – 134. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=15281989.
19. Миндюк, Н.Г. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс [Текст]: учеб. пособие для общеобразоват. организаций/ Н.Г. Миндюк, И.С. Шлыкова. – М.: Просвещение, 2017. – 239 с.
20. Мишин, В.И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: учеб. пособин для студентов пед. ин-тов по физ. – мат. спец./ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
21. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики [Текст]: учеб. -метод. пособие/ А.Г. Мордкович. – 2-е изд., доп. и прераб. – М.: ООО Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО Издательство «Мир и Образование», 2005. – 336 с.
22. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.
23. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд. стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.
24. Нелин Е.П. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. / Е.П. Нелин, А.А. Лазарев. – М.: Илекса, 2011, – 480 с.

25. Никольский, С.М. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.
26. Никольский, С.М. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.
27. Потапов, М.К. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс [Текст]: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ М.К. Потапов, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2015. – 191 с.
28. Примерные программы основного общего образования. Математика. – М: Просвещение, 2009 –96с.
29. Севрюков, П.Ф. Иррациональные уравнения: об ошибках при решении иррациональных уравнений/ П.Ф. Севрюков // Математика в школе. – 2002. – № 7. – С. 37 -38.
30. Селезнева, К.О. Иррациональные уравнения, неравенства и их системы [Электронный ресурс]/ К.О. Селезнева // VII Международная студенческая научно-практическая интернет-конференция «Энергия науки» : матер. конф. – Ханты – Мансийск: Изд-во. Югорского гос. ун-та. 2017. – С. 794 – 798. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=30090020.
31. Смоляков, А.Н. Иррациональные уравнения: нетрадиционные способы решения иррациональных уравнений/ А.Н. Смоляков // Математика в школе. – 2002. – №7. – С. 35 -36.
32. Тарасова, А.П. Современные подходы к изучению уравнений в курсе математики в школе [Электронный ресурс]/ А.П. Тарасова // сборник статей Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы психологии и педагогики»: матер. конф. – Пенза: Изд-во. «Наука и Просвещение». 2016. – С. 41 – 47. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26335945.

33. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010г. No1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938.
34. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.fipi.ru/.
35. Чугунова, А.А. Развитие аналитико-синтетической деятельности при обучении решению иррациональных уравнений [Электронный ресурс]/ А.А. Чугунова, А.С. Рванова // Вектор науки тольяттинского государственного университета. Серия: педагогика, психология. – 2013. №12. – С. 280 – 283. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=18934479.
36. Яковлев, И.В. Иррациональные уравнения и системы: материалы по математике [Электронный ресурс]/ И.В. Яковлев //сайт «MathUs». – 2018. – Режим доступа: http://mathus.ru/math/irrurs.pdf.
37. Ященко И.В. ЕГЭ 2018. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ/ И.В. Ященко, М.А. Волчкаревич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин и др.; – М.: Издательство «Экзамен», 2018. – 263 с.
38. Buya S.B. Radical Solution of the General Sextic Equation [Text]/ S.B. Buya // International Journal of Applied Science – Research and Review, 2017. – PP. 1-7.
39. Caprioara D. Problem Solving – Purpose And Means Of Learning Mathematics In School [Text]/ D. Caprioara // Procedia – Social and Behavioral Sciences, 2015. – PP. 1859-1864.
40. Daniel J. Brahier. Teaching Secondary and Middle School Mathematics [Text]/ J. Brahier. Daniel // The Teaching of Number Sense, 2016. – PP. 235-244.
41. Kidron I. Understanding irrational numbers by means of their representation as non-repeating decimals [Text]/ I. Kidron // First conference of

International Network for Didactic Research in University Mathematics, 2016. – PP. 1-11.

42. Unal M. Preferences of Teaching Methods and Techniques in Mathematics with Reasons [Text] / M. Unal // Universal Journal of Educational Research, 2017. – PP. 194-202.

Приложение 1

Типы задач по теме «Иррациональные уравнения» в общеобразовательных учебниках алгебры 9 класса Ю.М. Колягина, С. М. Никольского, Г.К. Муравина

Таблица 3

Типы задач, 9 класс

Авторы / **Типы заданий**	Ю.М. Колягин и др.	Г.К. Муравин и др.	С. М. Никольский и др.
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$	№134,135, 136.	№294	№361
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$	№138,139,142.	-	№362,365
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$	№137.	№295	№363,365
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = a$	№143,144.	-	№366,368
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}g(x) = 0$	-	№298	№367
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{q(x)}$	-	-	№364
Решение уравнений путем введения новой переменной	-	№325	№366

Приложение 2

Типы задач по теме «Иррациональные уравнения» в учебниках алгебры углубленного уровня 9 класса Н.Я. Виленкина и Ю.Н. Макарычева

Таблица 4

Типы задач, 9 класс

Авторы **Типы заданий**	Н.Я. Виленкин и др.	Ю.Н. Макарычев и др.
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$	№96	№958,971
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$	№96,97	№959,960,964, 969
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$	№96,97	-
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = a$	№98	№960,961,963, 966,971
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[m]{g(x)} = a$	№96	№963
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}g(x) = 0$	-	№970
Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{q(x)}$	№98	-
Решение уравнений путем введения новой переменной	№99	№966
Решение уравнений с параметром	№100	-

Приложение 3

Ответы и указания к решению задач из п. 6. «Анализ задач ЕГЭ по теме «Иррациональные уравнения»»

Пример 1. Найдите корень уравнения $\sqrt{25+3x}=4$.

Решение.

Возведем в квадрат: $\sqrt{25+3x}=4 \Rightarrow 25+3x=16 \Rightarrow 3x=-9 \Rightarrow x=-3$.

Ответ: -3.

Пример 2. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{7x+41}{17}}=3$.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{7x+41}{17}}=3 \Rightarrow \frac{7x+41}{17}=9 \Rightarrow 7x+41=153 \Rightarrow 7x=112 \Rightarrow x=16.$$

Ответ: 16.

Пример 3. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7} \Rightarrow \frac{6}{4x-54}=\frac{1}{49} \Rightarrow 4x-54=294 \Rightarrow 4x=348 \Rightarrow x=87.$$

Ответ: 87.

Пример 4. Найдите корень уравнения $\sqrt{-72-17x}=-x$.

Решение.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} -72-17x = -x^{2} \\ -x \geq 0 \end{cases}$,

$$\begin{cases} x^2+17x+72=0 \\ x \leq 0 \end{cases},$$

$$x^2+17x+72=0 \Rightarrow x_1=-9, x_2=-8.$$

Ответ: -9.

Пример 5. Найдите корень уравнения $\sqrt{6+5x}=x$.

Решение.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 6+5x=x^2 \\ x\geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x^2-6-5x=0 \\ x\geq 0 \end{cases}$,

$$x^2-6-5x=0 => x_1=-1, x_2=6.$$

Ответ: 6.

Пример 6. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-3}=2$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в третью степень $\sqrt[3]{x-3}=2 => x-3=8 => x=11$.

Ответ: 11.

Пример 7. Найдите корень уравнения $\sqrt[5]{x-3}=-2$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в пятую степень $\sqrt[5]{x-3}=-2 => x-3=-32 => x=-29$.

Ответ: -29.

Пример 8. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{1}{15-4x}}=0{,}2$.

Решение.

Возведем в квадрат $\sqrt{\frac{1}{15-4x}}=\frac{1}{5} => \frac{1}{15-4x}=\frac{1}{25} => 15-4x=25 => x=-2{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$.

Пример 9. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+2}=-2$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в третью степень $\sqrt[3]{x+2}=-2 => x+2=-8 => x=-10$.

Ответ: -10.

Приложение 4

Ответы и указания к решению задач из п. 7.
«Анализ задач ЕГЭ по теме «Иррациональные уравнения»»

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$

Задание 1. Решить уравнение $\sqrt[4]{x} = \frac{2}{3}$.

Решение. $\sqrt[4]{x} = \frac{2}{3} => x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 => x = \frac{16}{81}$.

Ответ: $\frac{16}{81}$.

Задание 2. Решить уравнение $\sqrt{3 + 2x} = 4$.

Решение. $3 + 2x = 16 => x = 6{,}5$.

Ответ: $6{,}5$.

Задание 3. Решить уравнение $\sqrt{2x - 3} = -2$.

Решение. Уравнение решений не имеет.

Задание 4. Решить уравнение $\sqrt[3]{2 - 5x} = -0{,}6$.

Решение. $2 - 5x = -0{,}216 => x = 0{,}4432$.

Ответ: $0{,}4432$.

Задание 5. Решить уравнение $\sqrt[4]{x^2 + 17} = 3$.

Решение. $x^2 + 17 = 81 => x^2 = 64 => x = 8$.

Ответ: 8.

Задание 6. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 50} = 3$.

Решение. $x^2 + 4x - 50 = 27 => x^2 + 4x - 77 = 0 => x_1 = -11; x_2 = 7$.

Ответ: $-11; 7$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

Задание 7. Решить уравнение $\sqrt{14 - 5x} = x$.

Решение.

$$\begin{cases} 14 - 5x = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases},$$

$$x^2+5x-14=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-7.$$

x_2 —не является корнем уравнения.

Ответ: 2.

Задание 8. Решить уравнение $\sqrt{x^2+x+10}=2x$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2+x+10=4x^2 \\ x\geq 0 \end{cases},$$

$$3x^2-x-10=0 \Rightarrow x_1=-\frac{5}{3};\ x_2=2.$$

x_1 —не является корнем уравнения.

Ответ: 2.

Задание 9. Решить уравнение $\sqrt{3x+1}=2x-1$.

Решение.

$$\begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ \sqrt{3x+1}=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq\frac{1}{2} \\ \sqrt{3x+1}=2x-1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x+1=(2x-1)^2 \\ x\geq\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$3x+1=4x^2-4x+1 \Rightarrow 4x^2-7x=0 \Rightarrow x(4x-7)=0,$$

$$x_1=0,\qquad x_2=\frac{7}{4}=1{,}75.$$

x_1 —не является корнем уравнения.

$$\begin{cases} 2x-1<0 \\ \sqrt{3x+1}=1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ \sqrt{3x+1}=1-2x \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x+1=(1-2x)^2 \\ x\leq\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$3x+1=4x^2-4x+1 \Rightarrow 4x^2-7x=0 \Rightarrow x(4x-7)=0,$$

$$x_1=0,\qquad x_2=\frac{7}{4}=1{,}75.$$

x_2 —не является корнем уравнения.

Ответ: 0.

Задание 10. Решить уравнение $\sqrt{5+|x-2|}=1-x$.

Решение.

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ \sqrt{5+x-2}=1-x \end{cases} => \begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 1 \\ x+3=(1-x)^2 \end{cases},$$

Уравнение решений не имеет.

$$\begin{cases} x-2\leq 0 \\ \sqrt{5-x+2}=1-x \end{cases} => \begin{cases} x\leq 2 \\ x\leq 1 \\ -x+7=(1-x)^2 \end{cases},$$

$$-x+7=x^2-2x+1,$$

$$x^2-x-6=0 => x_1=-2;\ x_2=3.$$

x_2 —не является корнем уравнения.

Ответ: -2.

Задание 11. Решить уравнение $\sqrt{6x^2+x+7}=1-3x$.

Решение.

$$\begin{cases} 6x^2+x+7=(1-3x)^2 \\ 1-3x\geq 0 \end{cases} => \begin{cases} 6x^2+x+7=(1-3x)^2 \\ x\leq \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$6x^2+x+7=9x^2-6x+1 => 3x^2-7x-6=0,$$

$$x_1=-\frac{2}{3}, x_2=3.$$

x_2 —не является корнем уравнения.

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

Задание 12. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1}=x-1$.

Решение. $x-1=\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 => x-1=x^3-3x^2+3x-1 => x^3-3x^2+2x=0 => x\left(x^2-3x+2\right)=0 => x^2-3x+2=0 => x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=0$.

Ответ: $2;3;0$.

Задание 13. Решить уравнение $\sqrt[3]{28-23x-x^3}=3-x$.

Решение. $28-23x-x^3=(3-x)^3 \Rightarrow 28-23x-x^3=27-27x+9x^2-x^3 \Rightarrow 9x^2-4x-1=0,$

$$x_1=\frac{2-\sqrt{13}}{9},\ x_2=\frac{2+\sqrt{13}}{9}.$$

Ответ: $\frac{2-\sqrt{13}}{9};\frac{2+\sqrt{13}}{9}.$

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$

Задание 14. Решить уравнение $\sqrt{2x-5}=\sqrt{x+1}$.

Решение.

$$\begin{cases}2x-5=x+1\\ x+1\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-5=x+1\\ x\ge -1\end{cases},$$

$$x-6=0 \Rightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

Задание 15. Решить уравнение $\sqrt[4]{2x+1}=\sqrt{2x-1}$.

Решение.

$$\begin{cases}2x+1=(2x-1)^2\\ 2x-1\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+1=(2x-1)^2\\ x\ge \dfrac{1}{2}\end{cases},$$

$$2x+1=4x^2-4x+1 \Rightarrow 4x^2-6x=0 \Rightarrow x(4x-6)=0,$$

$$x_1=0,\qquad x_2=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Задание 16. Решить уравнение $\sqrt{14+|x|}=\sqrt{x^2-16}$.

Решение.

$$\begin{cases}\sqrt{14+x}=\sqrt{x^2-16}\\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}14+x=x^2-16\\ x\ge -14\end{cases},$$

$$x^2-x-30=0 \Rightarrow x_1=-5;\ x_2=6.$$

$$\begin{cases}\sqrt{14-x}=\sqrt{x^2-16}\\ x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}14-x=x^2-16\\ x\le 14\end{cases},$$

$$x^2+x-30=0 \Rightarrow x_1=-6;\ x_2=5.$$

Ответ: При $x\ge 0$, $x_1=-5;\ x_2=6.$ При $x<0, x_1=-6;\ x_2=5.$

Задание 17. Решить уравнение $\sqrt[5]{7x+4} = \sqrt[5]{5x-2}$.

Решение. $7x + 4 = 5x - 2 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$.

Ответ: -3.

Задание 18. Решить уравнение $\sqrt[7]{x^2+5x-5} = \sqrt[7]{2x^2-x}$.

Решение. $x^2 + 5x - 5 = 2x^2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 5$.

Ответ: $1;\ 5$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = a$

Задание 19. Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$.

Решение.

Способ 1. Использование метода возведения в одну степень.

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x + 5 = 25 - 10\sqrt{x} + x \Rightarrow 10\sqrt{x} = 20 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4.$$

Способ 2. Использование метода замены переменной.

Пусть $t = \sqrt{x}$, тогда $t^2 = x$.

$$t + \sqrt{t^2+5} = 5 \Rightarrow \sqrt{t^2+5} = 5 - t \Rightarrow t^2 + 5 = 25 - 10t + t^2,$$

$$t = 2, \Rightarrow t = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

Задание 20. Решить уравнение $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x+4} = 4$.

Решение.

$$\left(\sqrt{4x-3}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{5x+4}\right)^2 \Rightarrow 4x - 3 = 16 - 8\sqrt{5x+4} + 5x + 4,$$

$$8\sqrt{5x+4} = 23 + x \Rightarrow 64(5x+4) = x^2 + 46x + 529,$$

$$x^2 - 274x + 273 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 273.$$

x_2 –не является корнем уравнения.

Ответ: 1.

Задание 21. Решить уравнение $\sqrt{x^2+2x+10} + \sqrt{x^2+2x+17} = 7$.

Решение.

Пусть $t = \sqrt{x^2+2x+10}$, тогда $t^2 = x^2 + 2x + 10$.

$$t+\sqrt{t^2+7}=7 => \sqrt{t^2+7}=7-t => t^2+7=49-14t+t^2,$$

$$14t=42 => t=3,$$

$$\sqrt{x^2+2x+10}=3 => x^2+2x+10=9 => x^2+2x+1=0,$$

$$x_1=-1.$$

Ответ: -1.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\,g(x)=0$

Задание 22. Решить уравнение $\sqrt[4]{x-2}\,(21x^2-14x-35)=0$.

Решение. *ОДЗ* ≥ 2.

$$\sqrt[4]{x-2}=0 => x-2=0 => x=2.$$

$$21x^2-14x-35=0$$

$$x_1=-1, x_2=\frac{5}{3}.$$

x_1, x_2 —не являются корнями уравнения.

Ответ: 2.

Задание 23. Решить уравнение $(x^2-4)\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0$.

Решение. *ОДЗ* $x\geq -1$.

$$\sqrt{x+1}-2=0 => \sqrt{x+1}=2 => x+1=4 => x=3.$$

$$x^2-4=0 => x^2=4 => x=\pm 2.$$

Ответ: 2; 3.

Задание 24. Решить уравнение $(x^2+2x-15)\left(\sqrt{x+4}-1\right)=0$.

Решение. *ОДЗ* $x\geq -4$.

$$\sqrt{x+4}-1=0 => x+4=1 => x=-3.$$

$$x^2+2x-15=0 => x_1=-5;\ x_2=3.$$

Ответ: -3; 3.

Задание 25. Решить уравнение $\left(\sqrt[6]{2x^2-7}+\sqrt[3]{x-3}\right)\left(\sqrt[4]{x^2-2x-2}-1\right)=0$.

Решение.

$$\sqrt[6]{2x^2-7}+\sqrt[3]{x-3}=0 => \sqrt[6]{2x^2-7}=-\sqrt[3]{x-3}.$$

$$2x^2-7=x^2-6x+9 => x^2+6x-16=0 => x_1=-8;\ x_2=2.$$

$$\sqrt[4]{x^2-2x-2}-1=0 => x^2-2x-2=1 => x^2-2x-3=0,$$

$$x_1=-1;\ x_2=3.$$

Ответ: $-8;\ 3$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{q(x)}$

Задание 26. Решить уравнение $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+1}$.

Решение.

$$x-4+2\sqrt{x-4}\sqrt{x+1}+x+1=3x+1 => 2\sqrt{x^2-3x-4}=x+4,$$

$$4x^2-12x-16=x^2+8x+16 => 3x^2-20x-32=0,$$

$$x_1=8;\ x_2=-\frac{4}{3}.$$

x_2 –не является корнем уравнения.

Ответ: 8.

Задание 27. Решить уравнение $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+4}=\sqrt{6x+10}$.

Решение.

$$(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+4})^2=6x+10 => 2x-1+2\sqrt{(2x-1)(2x+4)}+2x+4$$
$$=6x+10 => 2\sqrt{4x^2+6x-4}=2x+7,$$

$$4(4x^2+6x-4)=4x^2+28x+49 => 12x^2-4x-65=0,$$

$$x_1=-\frac{52}{24}, x_2=2{,}5.$$

Ответ: $2{,}5$.

Решение уравнений путем введения новой переменной

Задание 28. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $x-\sqrt{x}=30$.

Решение.

Пусть $t=\sqrt{x}$, тогда $t^2=x$.

$$t^2-t-30=0 => t_1=-5; t_2=6.$$

$$\sqrt{x}\neq -5.$$

$$\sqrt{x} = 6 => x = 36.$$

Ответ: 36.

Задание 29. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} = 3$.

Решение.

Пусть $t = \sqrt[6]{x}$, тогда $t^2 = \sqrt[3]{x}$.

$$t^2 + 2t - 3 = 0 => t_1 = -3; t_2 = 1.$$

$$\sqrt[6]{x} \neq -3,$$

$$\sqrt[6]{x} = 1 => x = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 30. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2 - 2} = 0$.

Решение.

Пусть $t = \sqrt{x^2 - 2}$, тогда $t^2 = x^2 - 2$.

$$t^2 - 5t + 6 = 0 => t_1 = 2; t_2 = 3 => \sqrt{x^2 - 2} = 2,$$

$$x^2 = 6 => x = \pm\sqrt{6}.$$

$$\sqrt{x^2 - 2} = 3 => x^2 = 11 => x = \pm\sqrt{11}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{11}$.

Задание 31. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $\sqrt{x^2 - 3x + 7} = 3x + (x - 3)^2 - 22$.

Решение.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 7} = x^2 - 3x - 13.$$

Пусть $t = \sqrt{x^2 - 3x + 7}$, тогда $t^2 = x^2 - 3x + 7$.

$$t^2 - t - 20 = 0 => t_1 = -4; t_2 = 5.$$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 7} = 5 => x^2 - 3x - 18 = 0 => x_1 = -3; x_2 = 6.$$

Ответ: 6.

Задание 32. Решить уравнение, используя подходящую замену переменной $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2.$

Пусть $t=\sqrt[3]{x}$,

$$\frac{4}{t+2}+\frac{t+3}{5}=2 => \frac{20+(t+3)(t+2)-10(t+2)}{5t+10}=0,$$

$$\frac{t^2-5t+6}{5t+10}=0 => t\neq-2.$$

$$t^2-5t+6=0 => t_1=2; t_2=3.$$

$$\sqrt[3]{x}=2 => x=8.$$

$$\sqrt[3]{x}=3 => x=27.$$

Ответ: $8;27.$