МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	О.Н. Клыкова (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)
Руководитель	Н.Н. Кошелева (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)
Консультант	С.А. Гудкова (И.О. Фамилия)	____________ (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения учащихся решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы и разработка системы упражнений по теме исследования.

На сегодняшний день задачи на классическое определение вероятности включены в программу ОГЭ. По данным статистики Министерства образования Российской Федерации, только 43% всех выпускников 2017 года справились с задачами такого типа, поэтому проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей решения задач по теме «Классическое определение вероятности» в курсе математики основной школы.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим аспектам обучения решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы. В ней изучены исторические аспекты возникновения и развития понятия функции. Выявлены основные цели и задачи обучения задачам на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов по теме «Классическое определение вероятности» в учебниках математики основной школы.

В Главе II описаны методические особенности обучения решению задач по теме исследования из опыта преподавания учителей общеобразовательной школы. Представлены методические рекомендации по обучению решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы. Разработана система упражнений по теме исследования.

Список литературы содержит 45 наименований.

Объем работы составляет 60 страниц.

ABSTRACT

The aim of the bachelor's work is to reveal the methodological peculiarities of teaching students to solve problems on the classical definition of probability in the course of mathematics of the secondary school and to develop a system of exercises on the topic of research.

Nowadays tasks about the classical probability calculations are included in the Basic State Exam. According to the statistics from the Ministry of Education of the Russian Federation only 43 percent of all graduates of 2017 coped with tasks of this type. The research is directed at identifying methodological features of solving problems on the classical definition of probability and calculation.

Chapter I of the bachelor's work is devoted to theoretical aspects of teaching the solution of problems on the classical definition of the probability in the theory course of mathematics of the secondary school. The historical aspects of the origin and development of the concept of function are studied. The main goals and tasks of teaching problems on the classical definition of probability in the course of mathematics of the main school are revealed. The content of the theoretical and objective materials on the topic "Classical definition of probability" is analyzed in the textbooks of mathematics of the secondary school.

In Chapter II presents the methodological features of teaching the solution of problems on the classical definition of probability in the course of mathematics in the secondary school. The methodical features of learning to solve problems on the topic of research from the experience of teaching teachers of the general education school are described. Methodical recommendations for teaching the solution of problems on the classical definition of probability in the course of mathematics of the basic school are presented. A system of exercises on the research topic has been developed.

References contain 45 items.

The amount of work is 60 pages.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В XVII веке начало создаваться ясное представление о проблематике теории вероятностей и возникли первые математические методы решения вероятностных задач. Не смотря на долгую историю развития теории вероятностей, в обязательную программу школьного курса математики она вошла лишь в 90-е года прошлого века.

В настоящий момент задачи на определение вероятности включены в программу ОГЭ. Однако статистика, предоставленная Министерством образования РФ за 2017 год, утверждает, что лишь 43 процента всех выпускников справляются с данными заданиями [38].

Теория вероятностей имеет большое прикладное значение, в том числе и на бытовом уровне, а также представляет очевидную ценность для общего образования. При изучении теории вероятностей «ученики овладевают умениями анализировать рассматриваемый вопрос, обобщать, находить пути решения установленной задачи. Все это формирует мышление учащихся и способствует их развитию, особенно таких качеств выражения мысли, как порядок, ясность, обоснованность» [35, С. 60]

Кроме того, согласно ФГОС: «изучение учащимися алгебры должно отражать: формирование представлений о простейших вероятностных моделях в реальном мире и о различных способах их изучения; развитие умений использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений» [37].

Все вышесказанное определяет актуальность темы исследования.

Проблема исследования: выявление методических особенностей обучения решению задач на классическое определение вероятности.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методические особенности обучения решению задач на классическое определение вероятности.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы и разработать систему упражнений по теме исследования.

Задачи исследования:

1. Определить исторические аспекты возникновения и развития классического определения вероятности.
2. Выявить основные цели обучения задачам на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы.
3. Выполнить анализ теоретического материала по теме исследования в учебниках математики основной школы.
4. Выполнить анализ задачного материала по теме исследования.
5. Выделить типы задач по теме «Классическое определение вероятности» в учебниках математики 5-9 классов.
6. Рассмотреть опыт работы учителей по теме исследования.
7. Выявить методические рекомендации по обучению решению задач на классическое определение вероятности.
8. Составить систему упражнений на применение классического определения вероятности.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ учебно-методической литературы, работ по истории математики, школьных программ, методических пособий, учебников и учебных пособий, изучение опыта работы отечественной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что выявлены методические рекомендации обучению учащихся решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены типология задач и система упражнений по обучению учащихся решению задач на классическое определение вероятности, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы.

2. Система упражнений на применение классического определения вероятности.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим аспектам обучения решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы. Изучены исторические аспекты возникновения и развития понятия функции. Выявлены основные цели и задачи обучения задачам на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов по теме «Классическое определение вероятности» в учебниках математики основной школы.

Во II Главе представлены методические рекомендации по обучению решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы. Описаны методические особенности обучения решению задач по теме исследования из опыта преподавания учителей общеобразовательной школы. Разработана система упражнений по теме исследования.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 45 наименований.

В приложении представлена таблица с типологией задач в школьных учебниках и проект разработки онлайн-тестирования по теме «Решение задач на классическое определение вероятности».

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Из истории развития классического определения вероятности

Формирование знаний о теории вероятности зародилось ещё в древности. Тогда стало замечено, что существуют явления, у которых есть некая особенность: при малом количестве испытаний, они не имеют никакой закономерности, но по мере увеличения испытаний появляется определенная закономерность. Всё началось с игры в кости. Смысл азартных игр был прост и легко подвергался логике. Известные ученые Джироламо Кардано (1501 – 1576) и Галилео Галилея (1564 – 1642) предприняли первые попытки обозначить схему и логику игр. Но открытие теории, которая позволяет определять случайные величины, сравнивать и производить операции над ними, присваивают двум выдающимися ученым – Блезу Паскалю (1623 – 1662) и Пьеру Ферма (1607-1665) [11].

Турниры по азартным играм были популярны в ту пору среди аристократии, феодалов и дворян. Самой распространенной считалась игра в кости. Игроками было замечено, что при большом количестве бросков кубика произвольное число от 1 до 6 выпадает одинаково часто, выпадение этого числа имеет вероятность 1/6. Следовательно, появление чётного числа очков равна 3/6, так как из шести равновозможных случаев чётное число появляется только в трёх [11].

Разработке основных принципов теории вероятностей послужили частые вопросы и задачи, с которыми обращались заинтересованные люди к Ферма и Паскалю. Большое влияние на развитее теории вероятностей было оказано серьезными практическими и научными потребностями. Страховое дело, которое активно развивалось в 16 веке, стало использовать научные открытия в своей работе. В 17 веке началось страхование судов, домов от пожара, затем учреждались новые страховые компании по всему миру.

Теория вероятностей получила свое современное строение, благодаря аксиоматизации русского ученого А.Н. Колмогорову (1903-1987). Она обрела строгий математический вид и стала восприниматься как раздел математики.

Введение понятия «Классическое определение вероятности» произошло не сразу, а потребовалось много времени для совершенствования формулировки. Классическое определение вероятности впервые появляется у Якоба Бернулли (1655-1705), в его сочинении «Искусство предположений». Я. Бернулли вкладывал в эту формулировку современный смысл, что видно из его слов: «Если полная и безусловная достоверность, обозначаемая нами буквой *a* или 1, будет предположена состоящей из пяти вероятностей, из которых три благоприятствуют существованию или осуществлению какого-либо события, остальные же не благоприятствуют, то будет говориться, что это событие имеет 3a/5 или 3/5 достоверности» [11]. «В дальнейшем он писал об отношении числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных, предполагая эти случаи равновозможными, но, не оговаривая этого. Из его высказываний следует, что Бернулли владел и статистическим понятием вероятности. Им было введено в рассмотрение и использование понятие вероятности случайного события как числа, заключенного между 0 и 1. Достоверному событию приписывалась единица, а невозможному — нуль» [44]. Можно сказать, с этого начинается история теории вероятностей.

Классическое определение вероятности, которое предложил Бернулли, понравилось А. Муавру (1667-1754). Вероятность он определял так: «мы строим дробь, числитель будет числом появления события, а знаменатель - числом всех случаев, при которых это может появиться, такая дробь будет выражать действительную вероятность его появления. Как и Я. Бернулли, он специально не отмечал, что все шансы должны быть равновероятными» [45]. Опубликовал о равновероятности шансов впервые Пьер Лаплас (1749-1827) в его «Аналитической теории вероятностей» (1812).

Делая вывод, можно сказать, что классическая теория вероятности имеет свою большую историю, интересную и удивительную. Долгое время она не выделялась как отдельная тема, но великие математики, поняв всю важность выявленной закономерности, сформулировали определение, выделили свойства. Классическая теория вероятности в настоящее время получила широкое распространение в различных областях науки.

§2. Цели обучения задачам на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы

В 2003 г. было принято постановление о введении элементов теории вероятностей в школьный курс математики общеобразовательной школы. «Принятый Министерством образования документ предусматривал постепенное включение этих разделов в школьные курсы, давая возможность учителям подготовиться к соответствующим изменениям» [13, С. 31].

В 2004–2012 гг. выпускается ряд методических пособий, которые дополняют учебники математики. Это издания Ю.Н. Тюрина [34], И.В. Ященко [40], Ю.Н. Макарычева [26], М.В. Ткачевой [33]. Также были изданы методические пособия в помощь учителям. «В течение ряда лет все эти учебные пособия проходили апробацию в школах. В условиях, когда переходный период внедрения в школьные программы завершился, и разделы статистики и теории вероятностей заняли свое место в учебных планах 7–9 классов, потребовался анализ и осмысление согласованности основных определений и обозначений» [13, С. 32].

Существует обязательный минимум предусмотренный программой ФГОС 2018, а также даны основные требования к степени подготовки выпускников и уровню их знаний. Для основной школы по теме «Вероятность» установлен следующий *обязательный минимум*.

«Учащиеся должны знать: что такое событие, зависимые события, совместные (не совместные) события; определения суммы, произведения событий и противоположного события; в чем отличия между статистическим и классическим подходом к определению вероятности событий; определение вероятности, как вычислять произведение независимых или зависимых

событий. *Учащиеся должны уметь*: рационально решать задачи на классическое определение вероятности, применяя формулы комбинаторики и основные правила вычисления вероятностей» [37].

Требования к уровню подготовки выпускников основной школы:

В результате изучения тем теории вероятностей ученик должен уметь:

– «проводить несложные доказательства, получать простейшие следствия из известных или ранее полученных утверждений, оценивать логическую правильность рассуждений;

– извлекать информацию, представленную в таблицах;

– находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные;

– находить вероятность событий в простейших случаях и применять формулу классического определения вероятности при решении задач» [38].

Приобретенные знания и умения выпускник должен уметь использовать в повседневной и научной деятельности для:

– «выстраивания аргументации при доказательстве;

– распознавания логически некорректных рассуждений;

– сравнения шансов наступления случайных событий, сопоставления модели с реальной ситуацией;

– понимания вероятностных и статистических утверждений;

– решения практических задач в повседневной и профессиональной деятельности» [38].

Рассмотрим задачи, которые требует ФГОС по знаниям математики необходимые для изучения темы «Классическое определение вероятности» раздельно по каждому классу:

Основными задачами при изучении математики в 5 классе для введения темы «Классическое определение вероятности» являются:

— «формирование умений извлекать необходимую информацию;

— формирование умений подсчета объектов, методом перебора;

— формирование представления о том, какое событие является достоверным, какое невозможным;

— формирование у учащихся понимания степени случайности в различных событиях» [37].

Основными задачами при изучении математики в 6 классе для введения темы «Классическое определение вероятности» являются:

— «отработка умений и навыков в подсчете числа наборов;

— показать учащимся как можно решать задачи;

— формирование умений сравнения вероятностей разных событий;

— познакомить с понятиями частоты и вероятности» [37].

Основными задачами при изучении алгебры в 7 классе для введения темы «Классическое определение вероятности» являются:

— «введение понятия перестановки и вывод формулы;

— выработка умений находить основные статистические характеристики в несложных случаях, учащиеся должны понимать их практический смысл в конкретных ситуациях» [37].

Основными задачами при изучении алгебры в 8 классе для введения темы «Классическое определение вероятности» являются:

— «по статистическим данным, представленным в таблице необходимо уметь находить основные характеристики;

— рассмотрение равновероятных событий, и введение классического определения вероятности;

— представление о геометрической вероятности» [37].

Основными задачами при изучении алгебры в 9 классе для введения темы «Классическое определение вероятности» являются:

— «умение применять полученные знания для вероятностного исследования;

— наработать навык решения задач по теме классическое определение вероятности» [37].

Принимая во внимание государственные стандарты образования, опыт работы учителей математики, анализ методической и учебной литературы можно выделить последовательность изложения материала по данной линии.

Материал по теории вероятностей следует изучать во время всего курса математики основной школы, его можно разбить на 2 этапа:

— 1 этап – подготовительный (5-7 классы);

— 2 этап – основной и закрепляющий (8-9 классы).

«На каждом этапе формируются одни и те же виды деятельности, но на разных уровнях и различными средствами. Материал постепенно усложняется, дополняется, отрабатываются ранее полученные и формируются новые умения и навыки» [35, С. 56].

Во-вторых, по программе ФГОС специфика построения материала позволяет вводить изучение понятия «классическое определение вероятности» с 6 касса и решение задач по данной теме в курсе математике основной школы только с 8 класса.

Специфика математического содержания рассматриваемой темы позволяет обозначить основную задачу изучения классического определения вероятности следующим образом.

1. «Продолжить раскрытие содержания теории вероятностей:

— построить систему определений основных понятий;

— выявить дополнительные свойства введенных понятий;

— установить связи введенных и ранее изученных понятий» [1].

2. «Выявить типологию решения задач, раскрыть состав поиска решений задач определенных типов» [1].

3. Путем анализа практической деятельности и теоретических основ организовать условия для осознания и понимаю важности теории вероятностей.

Достижению поставленных образовательных целей будет способствовать решение следующих задач.

1. «Сформировать представление о различных способах определения вероятности и уделить внимание классическому определению вероятности.

2. Сформировать знание основных операций и умения применять их для описания одних событий через другие.

4. Выявить алгоритм нахождения вероятности событий по классическому определению вероятности.

5. Сформировать предписание, позволяющее рационально выбрать тип задачи и алгоритм при решении конкретной задачи» [43].

Выделенные образовательные цели для изучения классического определения вероятности дополним развивающими и воспитательными.

Развивающие цели:

— «формировать устойчивый интерес к предмету, развивать математические способности, видеть логику рассуждений;

— в процессе обучения развивать речь, мышление;

— самостоятельное нахождение учащимися новых способов решения проблем и задач; применение знаний в новых ситуациях и обстоятельствах;

— развивать умение объяснить факты, связи между явлениями;

— учить видеть сходство и различие явлений» [38].

Воспитательные цели:

— «формировать у школьников нравственные и эстетические представления, систему взглядов на мир;

— формировать потребности личности и ценностные ориентации;

— воспитывать личность, способную к самообразованию» [38].

Наряду с основной задачей обучению классическому определению вероятности – обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися системой вероятностных знаний и умений. Обучение решению задач на классическое определение вероятности в основной школе предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей, ориентацию на профессии, существенным образом связанные с математикой.

§3. Анализ содержания теоретического материала по теме «Классическое определение вероятности»

«Классическое определение вероятности исходит из понятия *равновозможности* как объективного свойства изучаемых явлений» [22]. «Равновозможность является неопределяемым понятием и устанавливается из общих соображений симметрии изучаемых явлений. Например, при подбрасывании монетки исходят из того, что в силу предполагаемой симметрии монетки, нет никаких оснований для предпочтения «решки» перед «орлом» или наоборот, то есть выпадение этих сторон можно считать равновозможными» [32, С. 127].

В практической и научной деятельности, в повседневной жизни, мы часто замечаем или проводим определенные опыты, и наблюдаем явления, которые обладают некоторой закономерностью.

«Событие, которое может произойти, а может и не произойти в процессе наблюдения или эксперимента, называют *случайным событием*. Каждое случайное событие — следствие очень многих случайных величин. Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, так как число их велико и законы действия неизвестны» [36, С. 29].

Определение 1. «Закономерности случайных событий изучает специальный раздел математики, который называется *теорией вероятностей»* [34, С. 210].

Теория вероятностей не в силах узнать произойдет событие или нет, но однородные массовые случайные события поддаются вероятностным закономерностям.

Определение 2. «Событие называется *достоверным*, если в результате испытания оно обязательно происходит. *Невозможным* называется событие, которое в результате испытания произойти не может» [34, С. 211].

Определение 3. «Событие называется *возможным*, или *случайным*, если в результате опыта оно может появиться или не появиться» [34, С. 212].

Определение 4. «События называются *равновозможными*, если по условиям испытания ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие» [34, С. 213].

Определение 5. «Случайные события образуют *полную группу*, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними» [34, С. 213].

Определение 6. «Событие может быть *противоположным*, или *дополнительным*. Под противоположным событием A понимается событие, которое обязательно должно произойти, если не наступило некоторое событие А. Противоположные события несовместны и единственно возможны. Они образуют полную группу событий» [34, С. 214].

Определение 7. «Вероятность события А равна отношению числа случаев m, благоприятствующих ему, из общего числа n единственно возможных, равновозможных и несовместных случаев к числу n, т. е.

$$P\ A\ = \frac{m}{n}$$» [28, С. 214].

В учебнике А.Г.Мордковича дается другая формулировка: «Для экспериментов с равновозможными исходами вероятностью случайного события называют отношение числа исходов, благоприятных для этого события, к числу всех возможных исходов эксперимента» [28, С. 202].

Вероятность события неотрицательное число, как видно из формулы, оно может быть в пределах от нуля до единицы:

$$0 \leq m \leq n, 0 \leq P\ A\ \leq 1.$$

Свойства вероятностей:

Свойство 1. «Если все случаи благоприятствуют событию А, то это событие обязательно произойдет. Следовательно, рассматриваемое событие является *достоверным*, а вероятность его появления $P\ A\ = 1$». [39, С. 58].

$$P\ A\ = \frac{m}{n} = 1.$$

*Свойство 2. «*Если нет ни одного случая, благоприятствующего событию А, то это событие в результате опыта произойти не может.

Рассматриваемое событие является *невозможным*, а вероятность его появления $P\ \ A\ = 0$» [39, С. 58]. Так как в этом случае $m=0$.

$$P\ \ A\ = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3. «Вероятность наступления противоположного события А определяется так же, как и вероятность наступления А» [39, С. 59].

$$P\ \ A\ = 1 - P(A).$$

Концепция изучения теории вероятностей в основной школе, предложенная авторами учебников и учебных пособий несколько различна. Авторы пособий по-разному подходят к изучению теории вероятности: на первый план могут выдвигаться вероятностные определения, или статистические, либо понятия рассматриваются раздельно.

Рассмотрим изучение курса «Теория вероятности» в учебниках основной школы и выявим, какой последовательности изучения курса для введения классического определения вероятности придерживаются методисты в различных учебных пособиях.

1) Е.А. Бунимович, В.А. Булычев «Вероятность и статистика» [5].

Начинается учебник с рассмотрения случайных событий и сравнения их вероятности. Потом, опираясь на эксперимент, дается понятие частоты. Затем идет параграф с названием «Куда стремятся частоты?», где дается статистическое, а затем идет пункт «Всегда ли нужно бросать монету?» - там рассматривается *классическое определение вероятности*.

В данном учебнике удачным является введение *понятия вероятности*. Порядок изложения вероятностной линии вполне логичен. Последний пункт содержит ряд интересных заданий, непосредственно связанных с жизнью.

2) Г.В. Дорофеев, И.Ш. Шарыгин «Математика 5 класс» [14], *«Математика 6 класс»* [15]; *Г.В. Дорофеев «Математика 7 класс»* [16], *«Математика 8 класс»* [17], *«Математика 9 класс»* [18].

В учебном материале 5 класса рассматриваются комбинаторные задачи, методом перебора возможных вариантов. После чего вводятся определения достоверного, случайного и равновозможного события. Предлагаются в качестве примеров реальные ситуации, позволяющие легче усвоить понятия.

В учебном материале 6 класса идет изучение диаграмм и таблиц. Затем идут два параграфа: «Логика перебора» и «Правило умножения». Последняя глава называется «Вероятность случайных событий». Ученикам предлагается сделать ряд экспериментов, записав результаты в таблицах.

Учебный материал 7 класса начинается с рассмотрения статистических характеристик на примерах из жизни. И в завершении рассматривается частота событий и вероятность.

В 8 классе повторяются статистические характеристики, изученные в материале 7 класса, приводятся задачи, показывающие связь с практикой, описываются жизненные ситуации. В этом учебнике *8* класса *вводится классическое определение вероятности*, которое ввел Лаплас.

В учебнике за 9 класс рассматриваются простые примеры исследований, в которых используются знания о случайных экспериментах, *классического определения вероятности* и статистических характеристиках.

Изучив комплект этих учебников, стоит отметить, что курс рассчитан на 5–9-е классы, в то время как другие учебные пособия предлагают эти темы лишь с 8-го по 9-й класс. Также отличает предложенный в этих учебниках курс от других - параллельное изложение материала.

3) Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк «Алгебра: Элементы стохастики и теории вероятностей» [26]. *Учебное пособие для учащихся 7-9 классов.*

Это учебное пособие дополняет учебники: Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. «Алгебра 7» [24], «Алгебра 8» [25], «Алгебра 9» [27].

Пособие состоит из четырех частей. В каждом пункте рассматриваются теоретические данные и соответствующие упражнения. В завершении пункта приводятся задания для повторения. К каждому пункту даются упражнения более высокого уровня сложности. В материале 8 класса «Статистические исследования» повторяются основные статистические характеристики. Дается понятие эксперимента и вводится *определение вероятности*.

Наибольший материал приходится на 9 класс, это две главы «Элементы комбинаторики» и «Начальные сведения из теории вероятностей». Во втором изложение темы начинается с рассмотрения опыта, затем вводят понятие «случайное событие» и «относительная частота». Вводится *классическое определение вероятности*. Пункт завершается темой «умножение вероятностей». Даются теоремы сложения и умножения вероятностей, вводятся связанные с ними несовместные, противоположные события. Материал рассчитан на учеников, проявляющих интерес и способности к математике.

4) И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович «Математика. 5 класс» [19], *«Математика. 6 класс»* [20], *А.Г. Мордкович «Алгебра. 9 класс»* [28].

В 5 классе последняя часть «Введение в вероятность» содержит изучение достоверных, невозможных и случайных событий. Даны задачи на определение характера события. Рассказывается о статистическом определении вероятности, проводятся опыты на определение числа событий.

В 6 классе авторы в главе «Математика вокруг нас» проводят первое знакомство с понятием *вероятность*. Даны задания на определение вероятности события с опорой на интуицию учащихся. В следующем 39 параграфе вводится *классическое определение вероятности*. Сначала через ситуации, а затем и само определение. Дан большой блок задач для самостоятельно решения. Даются задачи, в которых для вычисления вероятности используют правило умножения.

В учебнике 9 класса в двадцатом параграфе говорится о простейших вероятностных задачах. На примерах объясняются случайные, невозможные и достоверные события. Вводится *классическое определение вероятности*. Впервые встречается «Классическая вероятностная схема» решения задач. Предлагается большое количество разобранных примеров.

В следующем параграфе «Экспериментальные данные и вероятности событий» речь идет об экспериментальных статистических данных, и их связи с вероятностью, дальше вводится статистическая вероятность.

5) Н.Я. Виленкин, Г.С. Суврилло, А.С. Симонов, А.И. Кудрявцев «Алгебра для 8 класса» [7]*, «Алгебра для 9 класса»* [8].

В материале 9 класса есть глава «Элементы комбинаторики и теории вероятностей». В ней говорится о частоте и вероятности, даётся статистическое определение вероятности события. После чего об опытах с конечным числом равновозможных исходов, вводится *классическое определение вероятности*, затем речь идет об исходах и событиях, о подсчёте вероятностей в экспериментах, рассматривается сначала на простых, а затем на комбинаторных задачах.

6) М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова «Элементы статистики и вероятность в курсе математики основной школы» [33].

Первая глава начинает изложение с задачного материала о латинских и магических квадратах. После чего рассматриваются сочетания, перестановки и размещения, но вводить сами понятия не обязательно. Проводятся эксперименты на монетах и кубиках, данные анализируются.

Во второй главе «Случайные события» рассматриваются достоверные, невозможные, совместные и несовместные и равновозможные события. В следующем пункте дается *классическое определение вероятности*, затем рассматривается решение вероятностных задач с применением формул комбинаторики. Как дополнительный пункт вводится геометрическая вероятность. Дается *понятие противоположных событий и их вероятность*. И завершается учебник пунктом - тактика игр.

7) А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Методическое пособие «События, вероятности. Статистическая обработка данных» 7-9 классы [29].

В первых параграфах говорится о комбинаторике. Приводится изложение материала на примерах комбинаторных задач, рассматривается решение задач с помощью таблиц вариантов. Далее — выбор элементов, где рассматриваются сочетания. Сначала выводятся формулы для двух элементов, затем для *n* элементов. Третий параграф о случайных событиях и их вероятности. Вводится *классическое определение вероятности*.

Четвертый параграф о статистике, в нем рассматривается представление информации в виде таблиц, данные которых поддаются сравнению и анализу. Вводится много терминов, и авторы оформили их в виде таблицы, где помимо определений есть еще и описание. В следующем пункте говорится об экспериментальных данных и вероятности событий, здесь рассказывается о связи между вероятностью и статистическими данными.

В этом учебном пособии так же немного внимания уделено теории вероятностей, что напоминает пособие М.В. Ткачевой [33]. В нем сначала дается *классическое определение вероятности* и затем статистическое.

Анализ учебного и методического материала показал, что авторы школьных учебников предлагают начинать изучение теории вероятности в 6 классе и продолжать в течение всего дальнейшего периода обучения.

Рассмотрим примерное количество отведенных часов для обучения данной теме по каждому классу в таблице 1 и таблице 2.

Таблица 1

«Примерное количество отведенных часов для изучения темы по программе»

Название учебника	*5 класс*		*6 класс*	
	Базовое изучение вероятности	Изучение классического определения	Базовое изучение вероятности	Изучение классического определения
Н.Я. Виленкин	2	-	3	-
Г.В. Дорофеев	2	-	4	-
А.Г. Мордкович	4	-	5	2
С.М. Макарычев	4	-	5	-

Таблица 2

«Примерное количество отведенных часов для изучения темы по программе»

Название учебника	*7 класс*		*8 класс*		*9 класс*	
	Базовое изучение вероятности	Изучение классического определения	Базовое изучение вероятности	Изучение классического определения	Базовое изучение вероятности	Изучение классического определения
Г.В. Дорофеев	3	-	9	2	9	2
Ю.Н. Макарычев	4	-	11	1	14	2
А.Г. Мордкович	5	-	10	-	12	2
Н.Я. Виленкин	-	-	9	-	11	3

Рассмотрим содержание материала для каждого этапа обучения.

«В 5-6 классах вводится достоверное, невозможное, случайное событие. Сравнение шансов наступления случайных событий на основе интуитивных соображений, на классической, статистической основах, с помощью геометрических соображений» [30].

«В 7-9 классах рассматриваются комбинаторные правила сложения и произведения. Решение комбинаторных задач. Эксперимент со случайными исходами, случайное событие. Операции над событиями. Вероятность события. Вычисление вероятности наступления случайных событий на классической, статистической, геометрической основах» [30].

Перечисленные темы содержат минимум, который доступен ученикам основной школы, для формирования необходимых знаний о классическом определении вероятности. Задания на классическое определение вероятности входят в материалы для итоговой аттестации по математики выпускников основной школы, поэтому авторы начинают обучение решению задач только с применением комбинаторики.

Таким образом, материал по теме «Классическое определение вероятности» более подробно рассматривается в учебниках Г.В. Дорофеева [17], [18], А.Г.Мордковича [20], [28] и Ю.Н. Макарычева [27]. Г.В. Дорофеев рассматривает тему в 8 и 9 классах, тем самым повторяя и закрепляя изученные знания через год. А.Г.Мордкович начинает изучение темы в учебнике 6 класса, и возвращается к ней в учебнике «Алгебра-9». Учебник Ю.Н. Макарычева за 9 класс содержит хороший наглядный теоретический материал. Авторы этих учебников лучшим образом смогли раскрыть теоретическую часть темы «Классическое определение вероятности» в курсе математике основной школы.

§4. Анализ содержания задачного материала по теме «Классическое определение вероятности»

В статье научного журнала «Международный журнал экспериментального образования» авторы А.В.Бобровская и А.А. Кораблев «выделяют три типа задач на классическое определение вероятности: 1 тип – задачи об опытах на шарах, монетах, кубиках, картах; 2 тип - задачи с использованием чисел; 3 тип – разные задачи» [3, С. 170].

Рассмотрим задачи для каждого типа:

I тип. *Задача 1.* «Подбрасывается два игральных кубика, отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, на обоих кубиках выпало одинаковое число очков» [3, С. 171].

Решение. Нужно подбросить два игральных кубика. Пусть событие А – «одинаковые числа выпали на кубиках». Всего равновозможных элементарных исходов $n=6^2=36$. Выпишем благоприятствующие событию А исходы: *(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)*; $m=6$. Искомая вероятность:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

II тип. *Задача 2.* «В чемпионате принимают участие 16 команд. Способом жеребьевки их нужно поделить на четыре группы по четыре команды. В урне лежат номера групп: *1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.* Капитаны вытягивают по карточке. Найти вероятность того, что во второй группе будет команда из России» [3, С. 172].

Решение. Нужно выбрать число из данного набора чисел. Пусть событие А – «Команда России выбрала 2 группу». Количество элементарных исходов испытания равно количеству чисел на карточках, т.е. $n = 2$. Благоприятствующих исходов 4, $m = 4$. Итак,

$$P(A)=\frac{4}{16}=0{,}25.$$

III тип. *Задача 3.* «На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Голландии и 2 прыгуна из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четырнадцатым будет выступать прыгун из Аргентины» [3, С. 172].

Решение. Нужно выбрать человека на 14 место. Пусть А – «на четырнадцатое место попал прыгун из Аргентины». Количество исходов равно количеству людей, которые могли бы по жеребьевке попасть на данное место, $n = 40$. Количество благоприятствующих исходов равно числу аргентинцев, т.е. $m = 2$. Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{2}{40} = 0,05.$$

Помимо этого задачи на классическое определение вероятности можно разделить на типы по другому принципу – «приемы нахождения неизвестной вероятности». Каждая школьная задача по данной теме предполагает нахождение неизвестного с применением формулы классического определения вероятности, но данные условия всегда различны. Каждый тип является неким методом решения задачи, позволяет видеть - какие данные уже известны, какие предстоит найти и как более рационально можно решить задачу. Данная типология выделяет 6 типов задач, каждый из которых появляется в школьных учебниках постепенно в зависимости от класса.

Таким образом, задачи на классическое определение вероятности, можно разделить по следующим типам, представленным в таблице 3.

Таблица 3

Типология задач по теме «Классическое определение вероятности»

Тип:	В условии задачи:	$P(A) = \frac{m}{n}$, где
1. Известна величина общего числа событий - n, или его легкая возможность подсчета, и известна величина благоприятных событий – m.		$P(A) = \frac{+}{+}$
2. Известна величина общего числа событий, но не известна величина благоприятных событий.		$P(A) = \frac{?}{+}$
3. Известно число благоприятных событий, но не известно общее число событий.		$P(A) = \frac{+}{?}$
4. Не известно общее число событий, и не дано число благоприятных событий, обе величины нужно найти по данным условия.		$P(A) = \frac{?}{?}$
5. Известна величина общего числа событий, или легко ее легкая возможность подсчета, а благоприятные события отсутствуют по данным условия.		$P(A) = \frac{0}{+}$, $P(A) = \frac{0}{?}$
6. Известна величина противоположного исхода событий, или его легкая возможность подсчета.		$P(A) = 1 -$ $P(A) = 1 - \frac{?}{+}$

В 6 классе в учебнике И.И.Зубаревой, А.Г.Мордковича «Математика. 6 класс» [20, С. 254] начинают встречаться только первые три типа задач. Предлагаются сначала более простые, затем задачи повышенного уровня.

Задачный материал 9 класса рассмотренных учебников [18, С. 178-182], [27, С. 202-206], [28, С.131-136], [33, С. 78-82] усложняется тем, что даются задачи только 2-6 типов и имеют более высокий уровень сложности:

— более сложный подсчет количества общих событий;

— более сложное выделение группы благоприятных событий.

Здесь появляется необходимость использования формул комбинаторики. Применяются три основные формулы, представленные в таблице 4. Исходя из условий нахождения классического определения вероятности, путем подстановки формул комбинаторики, четвертый тип задач делится еще на 9 подтипов, которые представлены в таблице 5.

Таблица 4

«Формулы комбинаторики»

Определения	Формулы комбинаторики
1. Сочетания, не учитывается порядок размещения объектов:	$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
2. Перестановки, учитывается порядок размещения объектов, все элементы входят в комбинацию:	$P_n = n!$
3. Размещения, учитывается порядок размещения объектов, но не все элементы входят в комбинацию:	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Таблица 5

«Формулы комбинаторики для решения задач 4 типа»

$P(A) = \frac{m}{n}$	$n = C_n^k$	$n = m!$	$n = A_n^k$
$m = C_n^k$	$P(A) = \frac{C_n^k}{C_n^k}$ (4.1)	$P(A) = \frac{C_n^k}{n!}$ (4.2)	$P(A) = \frac{C_n^k}{A_n^k}$ (4.3)
$m = n!$	$P(A) = \frac{n!}{C_n^k}$ (4.4)	$P(A) = \frac{n!}{n!}$ (4.5)	$P(A) = \frac{n!}{A_n^k}$ (4.6)
$m = A_n^k$	$P(A) = \frac{A_n^k}{C_n^k}$ (4.7)	$P(A) = \frac{A_n^k}{n!}$ (4.8)	$P(A) = \frac{A_n^k}{A_n^k}$ (4.9)

Таким образом, после введения правил комбинаторики, в 9 классе появляются новые типы задач для подсчета сложных комбинаций благоприятных или общих событий, представленные в таблице 6.

Таблица 6

«Использование правил комбинаторики
при решении задач на классическое определение вероятности»

Комбинаторные правила	Формулы
1. Использование правила суммы или умножения для подсчета благоприятных событий:	$P\ A\ =\frac{m}{n}$, где $P\ A\ =\frac{m1*m2}{n}$; $P\ A\ =\frac{m1+m2}{n}$;
2. Использование правила суммы или умножения для подсчета общего числа событий:	$P\ A\ =\frac{m}{n}$, где $P\ A\ =\frac{m}{n1*n2}$; $P\ A\ =\frac{m}{n1+n2}$.
3. Использование правила суммы или умножения для подсчета общего числа событий и для подсчета числа благоприятных событий	$P\ A\ =\frac{m}{n}$, где $P\ A\ =\frac{m1*m2}{n1*n2}$; $P\ A\ =\frac{m1+m2}{n1+n2}$.

Для всех типов задач на классическое определение вероятности свойственны разные уровни сложности. Для более сложных, иногда, необходимо построение схемы.

Проведем поиск решения задач каждого типа, пользуясь материалами ОГЭ и школьных учебников.

I тип. *Задача 4*. «В корзине имеется 4 красных и 6 голубых шара, одинаковых по физическим характеристикам. Какова вероятность, что извлеченный шар окажется голубым» [20, С. 249].

Решение. Пусть событие А – шар оказался голубым. Количество элементарных равновозможных исходов испытания 10. Количество благоприятных исходов для события А – 6. Следовательно:

$$P(A)=\frac{6}{10}=0{,}6.$$

В учебнике «Математика 9 класс» под редакцией Г.В. Дорофеева [18] в параграфе 6.2 «Вероятность равновозможных событий» рассматривается большое количество задач, разделенных на 2 уровня подготовки, и две задачи повышенной сложности со звездочкой. Задачи двух уровней очень схожи по смыслу, но отличаются количеством искомых событий и уровнем подготовки учеников по предыдущим темам. В объяснении решения предложенных задач в теории не применяется сама формула, а лишь дается словесное объяснение.

Задача 5. «Для проведения экзамена приготовили 24 билета. Андрей не выучил один билет и очень боится его вытянуть. Какова вероятность того, что Андрею достанется несчастливый билет?» [18, С. 314].

Решение. Всего у данного эксперимента «вытянуть наугад один билет» 24 равновероятных исхода. У Андрея из 24 билетов вытянуть несчастливый один шанс. Поэтому вероятность несчастливого билета, равна 1/24.

II тип. *Задача 6*. «Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вытянули из нее одну карту. Для каждого из следующих событий найдем его вероятность: А=(вытянули красную масть); В=(вытянули пику)» [18, С. 314].

Решение. «Все пять событий относятся к случайному эксперименту – вытягиванию карты из колоды. Общее число исходов в этом эксперименте равно 36 (по числу разных карт), все они равновозможны, значит $n=36$» [18].

Для А благоприятный исход – любая карта красной масти. В колоде 18 карт красной масти, значит $m = 18$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Для В благоприятный исход – любая пика. Таких исходов 9 (сколько в колоде карт пиковой масти): $m = 9$. Отсюда

$$P(B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

III тип. *Задача 7*. «Какова вероятность выпадения решки, при подбрасывании двух монет» [27, С. 207].

Решение. «При одновременном бросании двух монет равновозможными являются исходы: на обеих монетах выпадет орел; на первой монете выпадет орел, а на второй – решка; на первой монете выпадет решка, а на второй – орел; на обеих монетах выпадет решка» [27, С. 207].

Имеется 4 равновозможных варианты, благоприятным является только один, значит вероятность равна:

$$P\ A=\frac{1}{4}.$$

Указание. «Было бы неправильно считать, что в данном эксперименте есть только три равновероятных события: на обеих монетах выпадет орел; на первой монете выпадет решка, а на второй – орел; на обеих монетах выпадет решка. Отсюда следовал бы неверный вывод, что $P(A)=\frac{1}{3}$» [27, С. 207].

IV тип. *Задача 8*. «Участники игры поочередно бросают в мишень дротики. Мишень представляет собой круг, в котором выделены малый круг и кольцевая зона, причем радиус малого круга вдвое меньше радиуса большого круга. Найдем вероятность того, что при попадании дротика в мишень точка попадания окажется в кольцевой зоне» [27, С. 208].

Решение. «Будем считать, что попадание дротика в любую точку мишени равновероятно и вероятность попадания дротика в любую область прямо пропорциональна площади области. Пусть радиус большого круга мишени, равен R, тогда радиус центрального круга равен $\frac{R}{2}$. Площадь мишени равна πR^2, а площадь центрального круга равно $\pi(\frac{R}{2})^2$, т.е. $\frac{\pi R^2}{4}$.

Значит, площадь кольцевой зоны равна: $\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3\pi R^2}{4}$.

Вероятность попадания дротика равна: $P(A) = \frac{\frac{3\pi R^2}{4}}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$» **[27].**

V-VI типы. *Задача 9*. «Какова вероятность, что произведение двух очков на двух костях будет равно - семи, окажется не менее 20, будет чётным» [18, С. 313].

Решение. 36 способами могут выпасть цифры на 2 кубиках.

а) «Рассмотрим событие А – при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи. Для данного события не существует благоприятствующих исходов» [18, С. 313].

$$P(A)=\frac{0}{36}=0 \text{ т.е. это событие является невозможным.}$$

б) «Рассмотрим событие В – при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20. Данному событию благоприятствуют следующие исходы» [18, С.313].

20 очков: (4,5); (5,4); 24 очка: (4,6); (6,4); 25 очков: (5,5); 30 очков: (5,6); (6,5); 36 очков: (6,6). Итого: 8 исходов.

$$P(B)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}.$$

в) «Рассмотрим противоположные события.

С – произведение очков будет чётным; C – произведение будет нечётным. Перечислим все исходы, благоприятствующие событию C» [18, С. 313].

1 очко: (1,1); 3 очка: (1,3); (3,1); 5 очков: (1,5); (5,1); 9 очков: (3,3); 15 очков: (5,3); (3,5); 25 очков: (5,5). Итого: 9 благоприятствующих исходов.

$$P(C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}.$$

Противоположные события образуют полную группу, поэтому:

$$P(C)=1-P(C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Проанализировав школьные учебники по математике, и банк заданий ОГЭ, был сделан вывод, что выделенная авторами [3] типология задач - больше подходит для банка заданий ОГЭ. Она не является подходящей для обучения решению задач по теме «Классическое определение вероятности» в школе, скорее является помощником наработки навыков решения задач с определенным условием - подготовки к экзаменам.

Выявленная в параграфе типология задач на классическое определение вероятности больше подходит для учителей математики основной школы, так как является основой построения задач по этой теме. Все задачи из школьных учебников основной школы подходят под один из типов, и затем решаются путем применения формулы классического определения вероятности. Поиск решения задач определенного типа будет легко доступен школьникам - это поможет им более ясно видеть условие, находить неизвестные величины и более рационально решать задачи.

Выводы по первой главе

1. Изучены и выделены основные исторические аспекты развития классического определения вероятности. Установлено, что к формулировке данного понятия пришли не сразу, а лишь в 19 веке. В 15 веке некоторая закономерность была замечена во время игры в кости - при большом числе

наблюдений явления имели определенную закономерность. Затем такие ученые как Г.Галилей, П.Ферма, Б.Паскаль стали сравнивать случайные величины и проводить математические операции над ними. В 17 веке теорию вероятности уже стали применять при страховании, а в 18 веке активно использовать в математике и физике. И только в 19 веке П.Лаплас вводит понятие «Классическое определение вероятности».

2. Были выявлены основные цели и задачи обучения решению задач на классическое определение вероятности. Рассмотрен обязательный минимум изучения вероятностной линии в школе и сделан вывод, что знание темы и умение решать задачи на классическое определение вероятности включены в требования к уровню подготовки выпускников основной школы. Выделены обучающие, развивающие цели при обучении теме «Классическое определение вероятности» в курсе математики основной школы.

3. Выполнен анализ теоретического материала по теме «Классическое определение вероятности». Рассмотрены основные определения и свойства, представленные в школьных учебниках, необходимые для обучения решению задач. Рассмотрены методические пособия и учебники, в которых встречается данная тема, и подробно описано содержание вероятностной линии в каждом из них. Сделан вывод, что теоретический материал данной темы лучшим образом представлен в учебниках алгебры А.Г.Мордковича, Ю.Н.Макарычева и Г.В. Дорофеева.

4. Выполнен анализ задачного материала по теме «Классическое определение вероятности». Изучена типология задач, предложенная авторами А.В. Бобровской и А.А.Кораблевым, и решены задачи по данным типам. Затем была выявлена типология задач по учебникам математики основной школы, которая включает в себя 6 основных типов задач на классическое определение вероятности и 9 подтипов. Представлены и разобраны задачи из школьных учебников к каждому типу. Сделан вывод, что данная типология является полезно значимой при обучении решению задач на классическое определение вероятности.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§5. Из опыта обучения решению задач на классическое определение вероятности в курсе математике основной школы

В журналах «Математика в школе» содержатся статьи, в которых рассматриваются вопросы по методике обучения теории вероятности.

О необходимости изучения в школе элементов теории вероятностей речь идет очень давно. И авторы многих статей говорят о необходимости изучения теории вероятностей в основной школе.

В своей статье Е.А. Бунимович отмечает: «нужно научить детей жить в вероятностной ситуации. То есть нужно научить их извлекать, анализировать и обрабатывать информацию, принимать обоснованные решения в разнообразных ситуациях со случайными исходами. Способность жить и работать в современном мире, с неизбежностью требует развития вероятностного мышления у подрастающего поколения. Современная физика, химия, биология, демография, социология, философия, все построено и постоянно развивается на базе вероятности» [5, С. 6].

Е.А. Бунимович также подчеркивает, что подросток очень часто сталкивается с вероятностными ситуациями. «Игра составляет существенную часть жизни ребенка. Проблема выбора наилучшего из нескольких вариантов решения в играх и в реальных жизненных ситуациях – несомненно, находится в сфере реальных интересов подростка. Преподавание теория вероятностей благотворно сказывается на умственном развитии, поскольку развивает навыки логического мышления» [4, С. 84]. «Слушая курс теории вероятностей, учащийся познает, как применять приемы логического мышления в тех случаях, когда приходится иметь дело с неопределенностью. Важен также и прикладной характер изучения теории вероятностей. Современный образованный человек независимо от профессии и рода занятий должен быть знаком с простейшими понятия теории вероятностей. В наши дни, когда прогноз погоды содержит сообщение о вероятности дождя на завтра, каждый должен знать что собственно это означает» [4, С. 86].

Е.А. Бунимович пишет о некоторых методических рекомендациях при рассмотрении вопросов теории вероятностей. «На первом этапе обучения можно отметить, что события достоверные и невозможные лучше не относить к случайным событиям. Опыт преподавания этого материала показал, что ученикам 10-12 лет трудно считать случайными те события, которые происходят всегда, либо не происходят никогда. Понятие случайного события соответственно уточняется на более поздних ступенях обучения. Для того, чтобы доказать, что данное событие – случайное, предлагается привести пример такого исхода, когда событие происходит, и пример такого исхода, когда оно не происходит» [4, С. 16].

«Необходимо развить у учеников понимание случайности различных событий. Качественный анализ вероятности события приходит к тому, что при обсуждении в классе на один и тот же вопрос может быть дано несколько разных ответов, которые могут считаться верными, что непривычно на уроке математики и для ученика и для учителя» [4, С. 17].

При решении таких задач главное – приводимая аргументация, понимание учеником смысла понятий. Если аргументы вполне логичны и разумны, ответ следует считать верным.

О формировании первоначальных вероятностных представлений у учеников средней школы в статье говорит Г.И. Фалин: «5-6 классы являются подготовительным этапом перед изучением классического определения вероятности, здесь идет процесс интуитивных познаний. Как же следует организовать этот процесс? Прежде всего, путем эксперимента, проводимого самими учащимися» [36, С. 29].

Г.И. Фалин отмечает: «при классическом подходе определение вероятности для некоторых событий сводится к более простому понятию – равновозможности элементарных событий. А это понятие основано на интуитивном воображении человеком тех условий испытания, которые достоверно определяют эту равновозможность. Но не каждое испытание поддается такому воображению. Например, не может быть и речи о равновозможных исходах испытания, при котором нарушена физическая симметрия объекта» [36, С. 32].

Из этого вытекает ограничение применения классической вероятности. «Классическое определение вероятности применяется тогда, когда имеется конечное число равновозможных исходов. На практике мы не редко встречаемся с ситуациями, где нет симметрии, предопределяющей равновозможность событий. В таких случаях приходится определять вероятность частотным путем» [3, С. 172].

В статье Е.А. Бунимовича говорится об экспериментах, которые были проведены в гимназиях различных городов. «В них исследовались вероятностные представления учеников профильных классов, которые еще не изучали вероятностный раздел. Результаты исследования показали, что хорошее знание и понимание разделов математики само по себе не обеспечивает развития вероятностного мышления» [5, С. 11]. Также он пишет, что в начальных классах полное представление о мире, случайных событиях еще не сформировалось, недостаточно и математических знаний для объяснения вероятности. Но при этом такие основы как диаграммы и таблицы нужно включать в материал учебников именно для данного возраста. В старших классах начинать изучения комбинаторики и теории вероятностей уже малоэффективно [5, С. 13].

М.В. Ткачевой был проведен эксперимент о готовности учеников к изучению теории вероятности. Результат показал, что у учеников 5 класса высокий уровень логического и комбинаторного мышления, но если прекратить его развитие в 6-7 классах, то навыки по комбинаторике значительно снижаются. Ученики 5-6 классов уже могут воспринимать классическое определение вероятности, поэтому желательно начинать обучение решению задач именно в этом возрасте.

Таким образом, преподавание в основной школе ориентировано на индивидуальности учеников, его склонности и интересы. «Этим определяются критерии отбора содержания, разработка и внедрение новых, интерактивных методик преподавания, изменения в требованиях к математической подготовке ученика» [41]. Знакомство учеников с такой интересной областью математики как теория вероятностей, имеет ряд дополнительных вопросов, как объяснить что между «да» и «нет», есть еще «может быть». «Может быть» поддается логической оценке, устраняет ощущение, что происходящее на уроке математики не связано с жизнью, показывает, как тесно связана теория вероятностей с окружающим миром. Но изучение классического определения вероятности в средней школе практически невозможно без проведения экспериментов, опытов, опоры на жизненный опыт ученика. Это пробуждает интерес к значимости и универсальности предмета «математика».

§6. Методические рекомендации по обучению решению задач на классическое определение вероятности в курсе математике основной школы

Задачи, в процессе обучения математике, имеют практическое, воспитательное, образовательное значение. Также, развивая логическое и алгоритмическое мышление учащихся, формируют практические навыки использования математики в различных сферах деятельности, представляют собой мощное средством развития пространственного мышления и творческого потенциала [13].

В ходе изложения теоретического материала курса задачи способствуют более глубокому разбору понятий, выявлению важных свойств, также позволяют понять взаимосвязи элементов курса между собой.

Решение задач является наиболее эффективной формой развития математической деятельности. «По своему функциональному назначению задачи как средство обучения могут быть направлены на формирование знаний, умений и навыков учащихся (обучающие задачи), на осуществление контроля со стороны учителя уровня знаний, умений и навыков (контролирующие задачи)» [2, С. 285].

Основные цели использования обучающих задач, прежде всего, связаны с оформлением отдельных элементов теоретических знаний и связанных с ними умений в общую систему.

В рамках изучаемого материала, выделяют следующие задачи, направленные на изучение нового понятия:

— обоснование практической значимости, а также роли в дальнейшем образовательном процессе;

— актуализация знаний и умений, необходимых при изучении понятия;

— распознавание понятия;

— определение свойств понятия [2, С. 284].

Задачи, на классическое определение вероятности в частности, имеют следующие основные элементы.

1. Условие — начальные входные данные;
2. Базис решения — теоретическая структура решения;
3. Решение — использование условия задачи и базиса решения для нахождения искомого;
4. Заключение — выходные данные, конечное состояние.

Задача является чисто математической, если все компоненты условия — математические объекты. В случае, когда математическими объектами выступают только отдельные части решения или его базиса, она является прикладной математической задачей.

Неизвестные основные компоненты задачи определяют проблемный характер упражнения, и дают понимание о каком типе задачи идет речь.

Задача является стандартной в случае четко определённого условия, и ясной известности метода решения, а также его обоснования, при этом даны упражнения на воспроизведение известного. В случае если в задаче неизвестен или плохо определен один из основных компонентов, она называется обучающей. При двух неизвестных компонентах, задача является поисковой, а если трех — проблемной [9].

Задачи классифицируются на правильные, стандартные, с лишними данными, с противоречивыми данными, теоретические и практические и т.д.

Основные этапы решения задач:

1. Ознакомление с содержанием задачи.
2. Выдвижение плана решения задачи, иными словами поиск решения.
3. Реализация плана решения.
4. Контрольная проверка решения задачи.

«Задачи на классическое определение вероятности на уроках математики решаются, в основном, фронтальным образом. Фронтальное решение задач — решение одной и той же задачи всеми учениками класса в одно и то же время» [32]. Организация данного метода решения задач может отличаться в зависимости от условий.

Е.И. Лященко, отмечает, что «устное решение задач наиболее распространено в среднем звене общеобразовательной школы, несколько реже в старших классах. Это, прежде всего, выполняемые устно упражнения в вычислениях и задачи-вопросы, истинность ответов на которые подтверждается устными доказательствами. Такое решение задач может проходить в форме пятиминутки устных упражнений. При организации устных фронтальных упражнений следует использовать таблички, компьютер, интерактивную доску и другие средства представления учащимся устной задачи, что значительно экономит время и оживляет урок математики» [23, С. 187].

Письменное решение задач с применением классной доски учителем или учащимися на уроках применяют в следующих случаях:

— «при решении задач, направленных на ознакомление с новыми понятиями и методами;

— при решении задач, с которыми могут справиться не все ученики класса;

— при поиске лучшего алгоритма решения рассматривается несколько различных вариантов проработки одной и той же задачи;

— при разборе часто встречающихся ошибок, допущенных несколькими учениками при самостоятельном решении задач» [35, С. 58].

И.Г. Фалин пишет: «письменное самостоятельное решение задач — наиболее эффективная форма организации решения математических задач, при которой ученики обучаются творчески думать, самостоятельно разбираться в различных вопросах теории математики. Письменное самостоятельное решение задач значительно повышает учебную активность учащихся, возбуждает их интерес к решению задач, стимулирует творческую инициативу» [35, С. 58].

Формы организации самостоятельного решения задач могут быть различными.

Комментирование решения математических задач: всеми учениками самостоятельно производится решение одной задачи, при этом один из них по шагам поясняет решение [31]. Ученик-комментатор обосновывает, на каком основании он применяет те или иные техники решения, проводит рассуждение.

«Вероятность — это мера объективной возможности, степень возможной реализации данного события при данных условиях и при данной закономерности» [13, С. 33].

Один из основных шагов вероятностной линии в школьном курсе является введение классического определения вероятности. Главная задача при этом состоит в том, чтобы ученики осознавали различия между статистическим и классическим определениями вероятности. Необходимо понимание того, что это лишь один из способов вычисления вероятности.

«Сопоставляя определение классической вероятности и относительной частоты, заключаем: определение классической вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же статистической вероятности предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, классическую вероятность вычисляют до опыта, относительную частоту – после опыта» [2, С. 246].

Введение новой темы в курс обучения, ставит преподавателя перед проблемой выбора учебного материала.

В линейке учебников А.Г.Мордковича тема «классическое определение вероятности» рассматривается в 6-ом и 9-ом классах. В 6 классе проводится знакомство с понятием вероятности и равновозможными событиями. В 9 классе тема раскрывается введением понятия классическое определение вероятности, рассматриваются задачи по данной теме, сначала более простые, затем и с применением формул комбинаторики.

6 класс. Рассмотрим методические рекомендации для изучения темы по учебнику математики И.И. Зубаревой, А.Г. Мордкович 6 класс [20].

На уроках первого знакомства с понятием «вероятность» необходимо создать условия для представления учениками случайного события, достоверного и невозможного, равновероятного и стопроцентного.

Планируемые результаты изучения темы:

— *предметные (*знают, что такое достоверное, невозможное, случайное событие, стопроцентная вероятность, равновероятные события);

— *личностные (*проявляют интерес к изучению предмета);

— *познавательные* (ориентируются на разнообразие способов решения задач, умеют добывать информацию по заданной теме);

— к*оммуникативные* (участвуют в диалоге, отстаивают мнение).

«Издавна в России играли в «орлянку»- подбрасывали монету, если надо было решить спорную проблему, у которой не было очевидного решения, или разыгрывали приз. В этих ситуациях прибегали к случаю: одни загадывали выпадение – «орла», другие – «решки». В повседневной жизни, в практической и научной деятельности мы часто наблюдаем те или иные явления, проводим определенные эксперименты» [20, С. 248].

«Случайным называют событие, которое может произойти или не произойти в процессе эксперимента или наблюдения. Теория вероятностей – это специальный раздел математики, который изучает закономерности случайных событий» [22].

Для большего привлечения внимания к теме проведем опыты.

Опыт 1. «Мальчик три раза подбрасывает монету. Все три раза выпадал орел. Возможно ли это. Ответ: да, так как орел и решка выпадают совершенно случайно» [20].

Опыт 2. «Подбросить монету в 1 рубль 50 раз и подсчитать, сколько раз выпадет орел. Записать результаты и подсчитать, сколько было проведено опытов и каково общее число выпадений орла» [20].

Опыт 3. «Если подбросить точно такую же монету 1000 раз. Догадайтесь, может ли все время выпадать орел» [20].

Испытанием называется подбрасывание монеты, а выпадение орла или решки – исходами испытания. Многократно повторяя испытание в одних условиях, полученные данные всех исходов называют статистикой.

Рассмотрим пример подбрасывания игрального кубика. «Будем считать, что этот кубик имеет правильную форму и поэтому при его бросании шансы выпадения на его верхней грани числа очков от 1 до 6 одинаковы» [20, С. 249]. Поэтому равновозможных исходов испытания существует шесть: 1,2,3,4,5, и 6.

Определение 1. «Если событие при рассматриваемых условиях происходит всегда, то оно называется достоверным. Вероятность появления достоверного события равна 1» [20, С. 248].

Определение 2. «Если событие при рассматриваемых условиях не происходит никогда, то оно называется невозможным. Вероятность появления невозможного события равна 0» [20, С. 249].

После того, как определения даны (на это в соответствии с программой ФГОС отводится 2 урока), начинается знакомство с подсчетом вероятности. Решение задач на подсчет вероятности следует начинать с вопросов.

— «Какие имеются варианты исходов того или иного события?

— Являются ли эти исходы равновероятными?

— Сколько существует равновероятных возможностей?

— Сколько из них благоприятны?» [21, С. 54].

Задача 1. «В колоде 36 карт, из них наугад вынимают одну карту. Какова вероятность того, что вытянутая карта: король, масти пики, картинки» [20, С. 251].

Решение. а) В колоде 4 короля. Возможности вытащить карту определенного наименования равновероятны. Поскольку возможностей всего 36, вероятность вытащить короля равна $\frac{4}{36}$, т.е. $\frac{1}{9}$.

б) В колоде 9 карт масти пики. Возможности вытащить карту определенной масти равновероятны. Вероятность вытащить карту масти пики – $\frac{9}{36}$, т.е. $\frac{1}{4}$.

в) «картинка», т.е. валет, дама, король или туз?

Решение. В каждой масти по 4 «картинки», т.е. всего 16 «картинок». Возможности вытащить ту или иную карту (любую) равновероятны, вероятность вытаскивания одной из них – $\frac{1}{36}$. Поскольку «картинок 16, вероятность вытаскивания «картинки»:

$$P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.$$

Замечание: Возможно, у кого-то из учащихся возникает желание рассмотреть два варианта события: «картинка» и «не картинка» - и сделать неверный вывод о том, что вероятность каждого из них – 50%. В этом случае следует убедиться в том, что эти события не являются равновероятными, поскольку «картинок» меньше, чем «не картинок».

Задача 2. «Для участия в лотерее распространили 400 билетов, из которых 50 будут выигрышными. Какова вероятность выигрыша при покупке одного билета» [20, С. 251].

Решение. Зачастую учащиеся здесь дают ошибочный ответ: $\frac{1}{400}$.

В этом случае следует предложить им изменить условие - среди 400 билетов один выигрышный. Какова вероятность приобретения выигрышного билета?

Правильные рассуждения: всего имеется 400 равновероятных исходов, 50 из них благоприятные, значит, вероятность купить выигрышный билет:

$$P\ \mathbf{A} = \frac{50}{400} = \frac{1}{8}.$$

б) «Сколько следует приобрести билетов, чтобы вероятность того, что хотя бы один билет выигрышный, была бы равна 100%» [20, С. 251].

Решение. 100% - это вероятность достоверного события, мы должны быть уверены, что это событие обязательно произойдет, среди купленных билетов хотя бы один будет выигрышным. Из 400 билетов 50 выигрышных. Представим, что купили 350 билетов и среди них не оказалось выигрышного. Покупка следующего, 351-ого, гарантирует, что попался выигрышный, так как невыигрышных билетов больше не осталось. Ответ: 351 билет.

Задача 3. «Сколько двузначных чисел составить из цифр 0,1,2,3,4? Какова вероятность того, что составленное число четное?» [20, С. 252].

Решение. Всего из этих цифр можно составить $4*5=20$ чисел. Всего имеется 20 исходов. Заметим, что все они равновероятны. Благоприятных исход – это выбор числа, у которого цифра единиц или 0, или 2, или 4. Всего таких чисел $4 * 3 = 12$ (первую цифру выбираем четырьмя способами, а вторую тремя). Вероятность того, что составленное число четное:

$$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Задача 4. «В ящике лежало 15 красный, 20 черных и 15 зеленых карандашей. Что вероятнее - карандаш оказался цветным, карандаш оказался зеленым, карандаш оказался черным» [20, С. 252].

Подводя итог: ученики узнали самый первый материал из теории вероятностей – понятие случайного события, статистической частоты, каким образом вычислить вероятность события при равновозможных исходах.

9 класс. В материале учебника А.Г. Мордкович «Алгебра 9класс» [28] видно, что автор начинает изучение темы, не затрагивая изученный материал 6 класса. В §20 «Простейшие вероятностные задачи» даётся классическая вероятностная схема для нахождения вероятности события *A*:

— «найти число *N* всех возможных исходов данного опыта;

— принять предложение о равновероятности всех этих исходов;

— найти количество *N(A)* исходов опыта, в которых наступает *A*;

— найти частное *N(A)/N*, оно равно вероятности события *A*» [28].

Довольно часто классическая вероятностная схема выражается фразой, которая является классическим определением вероятности: «Вероятностью события А называют отношение числа исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех равновозможных между собой исходов этого испытания» [28, С. 200].

Так же водится понятие противоположных событий: «Для нахождения вероятности противоположного события следует из единицы вычесть вероятность самого события: *P(A) = 1 – P(A)*» [28, С. 202].

Задача 5. «В коробке находятся 3 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Одновременно извлекают 6 карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет 2 синих и 2 красных» [28, С. 204].

Решение: «Всего 10 карандашей в коробке.

$C_{10}^{6}=\frac{10!}{4!*6!}=\frac{7*8*9*10}{24}$**=210 способами можно извлечь 6 штук из коробки.**

C_3^2**=3 способами можно извлечь 2 красных карандаша.**

$C_4^2=\frac{4!}{2!*2!}=\frac{24}{4}$**=6 способами можно извлечь 2 красных карандаша.**

C_3^2**=3 способами можно извлечь 2 зеленых карандаша.**

$C_3^2*C_4^2*C_3^2$**=3*6*3=54 способами можно извлечь искомый набор.**

Вероятность того, что среди извлеченных 6 карандашей окажется 2 синих и 2 красных:

$$P\ A\ =\frac{m}{n}=\frac{C_3^2*C_4^2*C_3^2}{C_{10}^{6}}=\frac{54}{210}=\frac{9}{35}$$» [28, С. 204].

Рассмотрим учебник Ю.Н.Макарычева «Алгебра 9» [27]. Учащиеся впервые встречаются с понятием «классическое определение вероятности». Для того чтобы найти вероятность интересующего нас события, необходимо провести достаточно большое число экспериментов или наблюдений, в которых исходы равновозможны.

«Вероятностью события называется отношение числа благоприятных для него исходов испытания к числу всех равновозможных исходов. Такой подход к определению называют классическим. Вероятность обычно обозначают буквой P, используя записи $P(A)$. Это обозначение происходит от французского слова probabilité, что означает - вероятность» [27, С.202].

Главное, что ученики должны запомнить, что классическое определение вероятности следует применять только на тех ситуациях, когда все исходы испытания являются равновозможными исходами. Непонимание этого факта приведет к ошибкам и неправильному вычислению вероятности.

Важно добиться от учащихся четкого понимания темы, основных определений, понятия благоприятного события и понятия равновозможности, а также научить пользоваться основными терминами при решении задач. Необходимо познакомить с достоверными и невозможными событиями, показать эту информацию через жизненные ситуации или эксперименты.

После этого ученикам предлагается решать задания на вычисление вероятностей, где используется формула перестановок №789-806. Для введения достоверного и невозможного события предлагается решить номера №807-808. Ученики приводят примеры таких событий. Затем рассматриваются примеры 3 и 4, после них идет решение более сложных задач в классе. В номерах №809-812 уже применяется формула сочетаний. Также следует остановиться на разборе задачи №813.

Тема вводного урока: «Классическое определение вероятности».

Цели урока: закрепление знания формулы, развитие навыка самостоятельного применения знаний при решении задач.

«Изучение понятия вероятности события обычно начинается с самого простого частного случая, — так называемого классического определения. Оно опирается на понятие равновероятности событий» [26, С. 62].

Опыт 5. В опыте с броском монеты события O=«выпал орел» и P =«выпала решка» очевидно равновероятны. «Это утверждение основано на том, что монета симметрична и однородна. Таким образом, равновероятность событий обычно устанавливается исходя из того, что условия опыта симметричны относительно рассматриваемых событий. При этом симметрия понимается в широком смысле этого слова и геометрическая симметрия, и физическая симметрия» [26, С. 64].

Теперь можно дать классическое определение вероятности.

Определение 3. «Пусть множество исходов опыта состоит из n равновероятных исходов. Если m из них благоприятствуют событию A, то вероятностью события A называется число $P(A) = \frac{m}{n}$» [27, С. 204].

Задача 6. «Какова вероятность того, что при броске игральной кости выпадет четное число очков?» [27, С. 204].

Решение. В опыте «бросок игральной кости» мы имеем 6 равновероятных исходов: события A_1, A_2, …, A_6. Нас интересует вероятность события А четные. Этому событию благоприятствуют три исхода опыта: события A_1, A_2, и A_6. Следовательно, $n = 6$, $m = 3$, а искомая вероятность 0,5.

Задача 7. «Из семи одинаковых билетов один выигрышный. Семь человек по очереди и наугад берут (и не возвращают обратно) по одному билету. Зависит ли вероятность взять выигрышный билет от номера в очереди?» [27, С. 206].

Решение. «Перенумеруем все билеты, начиная с выигрышного. В результате опыта билеты оказываются распределенными между людьми, которые занимали определенные места в очереди. Этим упорядочивается множество из семи билетов: на первом месте оказывается билет, взятый человеком, стоявшим в очереди первым; на втором месте оказывается билет, взятый человеком, стоявшим в очереди вторым, и так далее» [41]. Таким образом, исходом опыта является получение некоторой перестановки из 7 билетов, их число $n=7!$. «Поскольку билеты берутся наугад, то все эти исходы равновероятны. Нас интересует вероятность события A = человек, стоявший в очереди на k-м месте, взял выигрышный билет. Этому событию благоприятствуют исходы, при которых получаются перестановки, имеющие на k-м месте выигрышный билет, а остальные 6 мест заняты произвольной перестановкой из оставшихся шести невыигрышных билетов, их число $m= 6!$» [41]. Следовательно, $P(A) =6!/7! = 1/7$. Видим, что вероятность взять выигрышный билет не зависит от номера очереди.

Далее следует постановка домашнего задания, которое содержит задачу повышенной трудности.

Задача 8. «Бросили две игральные кости и сосчитали сумму выпавших очков. Что вероятнее получить в сумме 7 или 8?» [27, С. 207].

Решение. В этой задаче опыт состоит в том, что бросают две игральные кости и берут сумму выпавших очков. Исходы этого опыта таковы: «в сумме выпало 7», «в сумме выпало 8». «Окрасим кости в разные цвета— красный и синий. Поскольку кости отличаются только цветом, то ясно, что указанные события равновероятны и, кроме того, они образуют множество исходов нашего опыта. Остается подсчитать число всех исходов. Их 36, поскольку каждое из 6 очков, которые могут выпасть на красной кости; может быть в паре с любым из 6 очков, которые могут выпасть на синей» [27, С. 207]. Теперь подсчитаем число благоприятных исходов. Событию «сумма выпавших очков равна семи» = А благоприятствуют следующие 6 исходов: (1; 6), (2; 5),(3; 4), (4; 3), (5; 2) и (6; 1), и P(A)= 6/36 .

Событию «сумма выпавших очков равна 8» благоприятствуют следующие 5 исходов: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2). Следовательно, P(B)=5/36. Сумма очков 7 есть более вероятное событие, чем сумма очков 8.

Таким образом, во время обучения теме «Классическое определение вероятности» важно помочь учащимся правильно осознать действительность, открыть вероятностную природу, рассказать, что в мире случайностей нужно не только хорошо ориентироваться, но и активно действовать. С помощью таких средств как игры, эксперименты со случайными исходами, вероятностные исследования можно организовать первоначальные представления о классической теории вероятности. Можно использовать монеты, кубики, игральные карты и другие подручные средства для проведения экспериментов. Таким образом, можно перейти к статистическому определению вероятности, а затем плавно начать изучение классического определения вероятности.

§7. Система упражнений на применение классического определения вероятности

Система упражнений – это совокупность математических задач, каждый компонент которой необходим, а все вместе они достаточны для формирования у учащегося умения решать задачи того или иного типа.

На основе выделенных методических рекомендаций по обучению решению задач на классическое определение вероятности, изложенных в параграфе 6, можно сделать вывод, что система упражнений является некой технологией обучения, выступает как целостный процесс, которых включает в себя отбор, составление, использование и выполнение задач. Порядок выполнения задач влияет на психологическую и умственную деятельность человека. Задания идут в порядке увеличения сложности, поэтому при составлении упражнений учтены психолого-дидактические особенности.

Система упражнений составлена по 6 типам задач на классическое определение вероятности, которые были выделены в параграфе 4. Задачи подобраны по двум уровням сложности: базового уровня и повышенной сложности. Система упражнений разделена на 7 блоков: 1-6 блоки – задачи по шести типам на изучение и повторение темы, 7 блок – задачи для закрепления темы (повышенной трудности). Данная система представляет собой совокупность задач с ответами, которая является хорошим дополнением к материалам при изучении темы. С помощью данной системы упражнений учителю можно понять, на каких задачах и в какой момент ученик затрудняется с решением, отработать с ним каждый тип задач и дать хороший навык решения задач на классическое определение вероятности при решении ОГЭ.

Тип 1. $P\ A\ = \frac{+}{+}$.

Задача 1. «В урне 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 красных и 6 синих. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется синим?» [28]. Ответ: 0,6.

Задача 2. «Подбрасывается два игральных кубика, отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, на обоих кубиках выпало одинаковое число очков?» [20]. Ответ: 1/6.

Задача 3. «На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Голландии и 2 прыгуна из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четырнадцатым будет выступать прыгун из Аргентины» [28]. Ответ: 1/20.

Задача 4. «В урне 16 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Какова вероятность того, что один извлеченный шар окажется красным» [20]. Ответ: 1/4.

Задача 5. «Для проведения экзамена приготовили 24 билета. Андрей не выучил один билет и очень боится его вытянуть. Какова вероятность того, что Андрею достанется несчастливый билет?» [20]. Ответ: 1/24.

Задача 6. «В лотерее разыгрывается 3 книги. Всего в урне 50 билетов. Какова вероятность того, что билет окажется выигрышным» [27]. Ответ: 0,06.

Задача 7. «Таня забыла последнюю цифру номера телефона знакомой девочки и набрала наугад. Какова вероятность того, что Таня попала к своей знакомой?» [17]. Ответ: 1/10.

Задача 8. «В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?» [20]. Ответ: 0,2.

Тип 2. $P\ A\ = \frac{?}{+}$.

Задача 1. «В чемпионате принимают участие 16 команд. Способом жеребьевки их нужно поделить на четыре группы по четыре команды. В урне лежат номера групп: *1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.* Капитаны вытягивают по карточке. Найти вероятность того, что во второй группе будет команда из России» [3]. Ответ: 0,25.

Задача 2. «Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вытянули из нее одну карту. Найти вероятность того, что вытянули красную масть» [40]. Ответ: 0,5.

Задача 3. «Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вытянули из нее одну карту. Найти вероятность того, что вытянули даму» [40]. Ответ: 1/9.

Задача 4. «В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Какова вероятность, что выбранный холодильник будет без дефекта» [18]. Ответ: 5/6.

Задача 5. «Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет не более четырёх очков» [17]. Ответ: 1/6.

Задача 6. «В фирме такси в данный момент свободно 35 машин: 11 красных, 17 фиолетовых и 7 зеленых. Найти вероятность того, что случайно вызванное такси приедет зеленое» [40]. Ответ: 0,2.

Задача 7. «На трехдневную научную конференцию запланировано 75 докладов — в первый день 27 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Какова вероятность, что доклад профессора останется на последний день конференции» [40]. Ответ: 24/75.

Задача 8. «Автомобиль проезжает мимо светофора два раза, какова вероятность, что хотя бы один раз, будет гореть зеленый?» [10]. Ответ: 5/9.

Тип 3. $P\ A\ = \frac{+}{?}$**.**

Задача 1. «В классе 26 учащихся, среди них два друга – Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом делят на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе» [18]. Ответ: 0,48.

*Задача 2. «*Найти вероятность того, что при подбрасывании двух монет на обеих монетах выпадет решка» [17]. Ответ: 1/4.

Задача 3. «Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20» [28]. Ответ: 2/9.

*Задача 4. «*Найти вероятность того, что на всех 10 подброшенных монетах выпадет орёл» [17]. Ответ: 1/1024.

Задача 5. «Подбрасывается 10 монет. Найти вероятность того, что на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка» [17]. Ответ: 5/512.

Задача 6. «В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу» [27]. Ответ: 0,0625.

Задача7. «За круглый стол на 5 стульев в случай ном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найди те вероятность того, что обе девочки будут си деть рядом» [28]. Ответ: 0,5.

Задача 8. «Автомобиль проезжает мимо светофора два раза, какова вероятность того, что оба раза, будет гореть зеленый?» [10]. Ответ: 1/9.

Тип 4. $\mathbf{P\ A} = \frac{?}{?}$.

Задача 1. «В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков» [27]. Ответ: 15/216.

Задача 2. «Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашистов, среди которых 3 участника из России, в том числе Василий Лукин. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Лукин будет играть с каким-либо шашистом из России?» [10]. Ответ: 2/25.

Задача 3. «В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность, что Вадим и Олег окажутся в одной группе» [40]. Ответ: 6/20.

Задача 4. «Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 6, но не дойдя до отметки 9 часов» [40]. Ответ: 0,25.

Задача 5. «Участники игры поочередно бросают в мишень дротики. Мишень представляет собой круг, в котором выделены малый круг и кольцевая зона, причем радиус малого круга вдвое меньше радиуса большого круга. Найдем вероятность того, что при попадании дротика в мишень точка попадания окажется в кольцевой зоне» [27]. Ответ: 3/4.

Задача 6. «На скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Найти вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом» [28]. Ответ: 2/7.

Задача 7. «Найти вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король» [17]. Ответ: 96/ 935.

Задача 8. «В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Найти вероятность того, что две извлеченные детали будут качественными» [28]. Ответ: 21/38.

Тип 5. $\mathbf{P\ A = \frac{0}{+}}$.

Задача 1. «Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи» [18]. Ответ: 0.

Задача 2. «В фирме такси 6 красных и 6 желтых автомобилей. На вызов уехало 8 машин. Определите вероятность события А - все выбранные машины красные» [18]. Ответ: 0.

Задача 3. «Стандартную колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вытянули из нее одну карту. Какова вероятность, что это будет джокер» [27]. Ответ: 0.

Задача 4. «Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей произведение очков будет равно 7» [27]. Ответ: 0.

Задача 5. «Колоду из 36 карт хорошо перемешали, найдите вероятность, что наугад выбранные 5 карт все окажутся дамами?» [40]. Ответ: 0.

Задача 6. «Из слова Улитка выбирается случайным образом любая буква. Найдите вероятность, что выбранная буква будет буквой О» [10]. Ответ: 0.

Задача 7. «Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей сумма выпавших очков будет равна 1» [40]. Ответ: 0.

Задача 8. «Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей сумма выпавших очков будет равна 3» [27]. Ответ: 0.

Тип 6. $\mathbf{P\ A\ = 1 - P\ A\ = 1 - \frac{+}{+}}$**.**

Задача 1. «Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков будет чётным» [27]. Ответ: 3/4.

Задача 2. «Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет от 3 до 9 очков включительно» [17]. Ответ: 29/39.

Задача 3. «На экзамене 40 вопросов, Коля не выучил 4 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос» [20]. Ответ: 0,9.

Задача 4. «Вычислить вероятность выпадения любой фиксированной цифры от 1 до 6, кроме цифры 3, при подбрасывании игральной кости» [28]. Ответ: 5/6.

Задача 5. «На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным» [27]. Ответ: 0,97.

Задача 6. «Фабрика выпускает шины на автомобиль. В среднем на 100 качественных шин приходится восемь шин со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная шина окажется качественной. Результат округлите до сотых» [27]. Ответ: 0,93.

Задача 7. «В самолете имеется 18 мест за перегородками, 12 с запасными выходами, а остальные являются неудобными для высокого пассажира. Найдите вероятность того, что высокому пассажиру достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест» [10]. Ответ: 0,1.

Задача 8. «Группу туристов в 30 человек вертолетом забрасывают в горы по 6 человек за рейс. Найдите вероятность того, что случайно выбранный турист не полетит первым рейсом вертолёта» [40]. Ответ: 0,8.

Задачи повышенной сложности.

Задача 1. «На пяти одинаковых на ощупь карточках написаны буквы: на двух карточках — буква Л и на трех карточках — буква И. Найти вероятность того, что выложится слово ЛИЛИИ» [40]. Ответ: 0,1.

Задача 2. Ученик сел повторно решать тест на закрепление темы «Классическое определение вероятности». Какова вероятность, что ему повторно выпадут те же самые 8 заданий, что и в первый раз. В базе имеется 70 задач, и выбираются в тест они рандомно компьютером. Ответ: 1/70!.

Задача 3. «Игроку в покер сдаётся 5 карт. Найти вероятность того, что он получит пару десяток и пару валетов из колоды в 52 карты» [10]. Ответ: 0,0006.

Задача 4. «В пенале лежат 3 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Найти вероятность того, что среди извлеченных 6 карандашей будет ровно 2 синих и 2 красных» [28]. Ответ: 9/35.

Задача 5. «Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Чему равна вероятность, что ребенок соберет из кубиков слово кукла» [40]. Ответ: 1/60.

Задача 6. «Шесть книг случайно раскладывают по пяти полкам. Какова вероятность того, что одна полка останется пустой» [40]. Ответ: 5/21.

Задача 7. «На пяти одинаковых карточках напечатана одна из букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Найти вероятность того, что на четырех вынутых карточках можно прочесть слово юрта» [10]. Ответ: 1/120.

Задача 8. «При игре в Спортлото на карточке отмечаются 6 номеров из 49. Во время тиража определяются 6 выигравших номера. Какова при этом вероятность угадать ровно 3 счастливых номера» [40]. Ответ: 0,0176.

Выводы по второй главе

1. Выявлены рекомендации по обучению данной теме из научных статей, в которых учителя математики описывают опыт обучения теории вероятности. Сделаны выводы, что обучение данной теме лучше всего проходит через игровые моменты, ситуации жизненного характера и наработку навыка решения задач. Начинать изучение темы лучше с 10-12 лет, когда у ребенка идет процесс интуитивных познаний, а начинать обучение решению задач на классическое определение вероятности лучше в 14-15 лет, когда ученик осознано в жизненных ситуациях понимает, что такое случайность и равновозможность событий.

2. Выявлены методические рекомендации по обучению решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы. Выделены основные методические особенности решения задач при изучении темы. Рассмотрены цели решения задач, основные компоненты математической задачи и этапы решения задач на классическое определение вероятности. Рассмотрена методика организации обучению решению задач на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы. Составлены методические рекомендации по введению данной темы по учебникам « Математика 6 класс» И.И.Зубаревой, «Алгебра 9 класс» А.Г. Мордковича, «Алгебра 9 класс» Ю.Н. Макарычева. Даны методические рекомендации по разбору и решению задач при изучении данной темы в курсе математики по программе данных учебников.

3. Составлена система упражнений на применение классического определения вероятности в курсе математики основной школы. Система упражнений составлена на основе методических рекомендаций и включает в себя 70 задач с ответами по теме «Классическое определение вероятности». Система задач разделена на 7 блоков, по типам задач, уровням сложности, и является полезно значимой для наработки навыка решения задач и подготовки для решения заданий ОГЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В завершении работы, хочется отметить, что в современном мире классическая теория вероятностей имеет широкое применение не только в математике, но и физике, геометрии, информатике и статистике, что объясняет ее изучение в школьном курсе математики основной школы.

Проведенный анализ задач материалов ОГЭ [40] по теории вероятностей привел к выводу о том, что классическое определение вероятности можно применить для решения примерно трети заданий Открытого банка ОГЭ. При решении задачи важно правильно и четко определить, о каком испытании идет речь, выявить в соответствии с классическим определением вероятности количество равновозможных элементарных исходов, определить число благоприятствующих исходов.

Выявленная в бакалаврской работе типология задач на классическое определение вероятности хорошо подходит для учителей математики основной школы, так как является основой построения задач по этой теме. Все задачи из школьных учебников основной школы подходят под один из выделенных типов, и затем решаются путем применения формулы классического определения вероятности. Поиск решения задачи определенного типа будет легко понятен школьникам, так как это поможет им более ясно видеть условие, находить неизвестные величины и более рационально решать задачи. Составленная система упражнений с выделенными типами задач послужит полезным методическим дополнением при обучении решению задач на классическое определение вероятности.

При выполнении данной бакалаврской работы были решены поставленные задачи и выполнено следующее:

1. Выделены исторические аспекты возникновения и развития классического определения вероятности;

2. Выявлены основные цели обучения задачам на классическое определение вероятности в курсе математики основной школы;

3. Выделены основные понятия и свойства, используемые в работе;

4. Выполнен анализ теоретического материала по теме «Классическое определение вероятности» в курсе математике основной школы;

5. Выполнен анализ задачного материала по теме исследования;

6. Выделены основные типы задач по теме «Классическое определение вероятности» в учебниках математики основной школы;

7. Выявлены методические рекомендации по обучению решению задач на классическое определение вероятности;

8. Составлена система упражнений на применение классического определения вероятности.

Поставленная цель бакалаврской работы достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баландина, И. Стохастическая линия в средней школе: Начнем с анализа / И. Баландина // Математика. –2009. – №14. – 34 с.

2. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: учебное пособие для студентов пед. институтов по физ-мат.спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост.. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 2016. – 416 с.

3. Бобровская, А.В. Классическое определение вероятности в материалах итоговой аттестации в школе [Электронный ресурс] / А.В Бобровская, А.А. Кораблев // Экспериментальный журнал международного образования.- 2016. № 3-2. – С.170-173. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id= 25776848.-Последнее обновление:15.05.2018г.

4. Бунимович, Е.А. Вероятность и статистика. 5-9 классы [Текст]: учебное пособие для общеобразовательных учебных заведений / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. — М.: Дрофа. - 2014. — 160 с.

5. Бунимович, Е.А. О теории вероятностей и статистики в школьном курсе [Электронный ресурс] / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев, Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко // Математика в школе. - 2015. - №7. – С. 3 – 14. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25043080. – Последнее обновление: 12.05.2018г.

6. Васильев, Н. Комбинаторика – вероятность [Электронный ресурс] / Н. Васильев // Квант- 1986. - № 1. – С. 19 – 23. – Режим доступа: http://kvant.mccme.ru/pdf/1986/01.pdf. - Последнее обновление:19.05.2018г.

7. Виленкин, Н.Я. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2016. – 280 с.

8. Виленкин, Н.Я. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С. И. Шварцбург. - 30-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. - 288 с.

9. Высоцкий, И.Р. Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики [Электронный ресурс] / И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко // Математика в школе. - 2014г. - №4. – С. 32-43. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29170960. – Последнее обновление: 14.05.2018г.

10. Гаваза, Т.А «Трудные задачи по теории вероятности в средней школе». Методический аспект [Электронный ресурс] / Т.А. Гаваза // Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки, 2015. -№ 6. - С. 61-68. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25664054.- Последнее обновление: 21.05.2018г.

11. Гнеденко Б.В. очерк по истории теории вероятностей [Текст]: учебное пособие / Б.В. Гнеденко - М.: Эдиториал УРСС. – 2015. – 88 с.

12. Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2014. - 320 с.

13. Делюкова, Я.В. Аспекты изучения теории вероятностей в школьном курсе математики [Электронный ресурс] / Я.В. Делюкова // методическое пособие. 2016. - №2. - С. 31-33. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=27444060 .- Последнее обновление: 20.05.2018г.

14. Дорофеев, Г.В. Математика. 5 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений / Г.В. Дорофеев, И.В. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2013. – 288 с.

15. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2014. – 264 с.

16. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2013. – 282 с.

17. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2014. – 286 с.

18. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2013. – 278 с.

19. Зубарева, И.И. Математика. 5 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 270 с.

20. Зубарева, И.И. Математика. 6 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2014. – 264 с.

21. Кенеева, Д.М. Классическое определение вероятности [Электронный ресурс] / Д.М. Кенеева // Наука и инновационные технологии, 2016.- №1.- С. 53-59. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21165939.- Последнее обновление: 20.05.2018г.

22. Лютикас, В.С. Факультативный курс по математики: Теория вероятностей [Текст]: Учеб. пособие для 9 – 11 кл. средней школы / Лютикас В.С. – 3-е изд., перераб. – М.: Просвещение, - 2016. – 160 с.

23. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов пед. институтов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 2017. – 223 с.

24. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 271 с.

25. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 240 с.

26. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей [Текст]: учебное пособие для учащихся 7-9 классов / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 78 с.

27. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 272 с.

28. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 17-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2013. — 271 с.

29. Мордкович, А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных. Доп. параграфы к курсу алгебры 7-9 кл. [Текст]: учебное пособие / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 5-е изд. - М.: 2011. – 112 с.

30. Примерная образовательная программа основного общего образования / М-во образования РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с.

31. Рурукин, А.Н. Поурочные разработки по алгебре: 9 класс [Текст]: поурочные разработки / Полякова С.А. – М.:ВАКО,- 2015. – 336 с.

32. Студенецкая, В.Н. Статистика и теория вероятностей на пороге основной школы [Электронный ресурс] / В.Н. Студенецкая, О.М. Фадеева // Математика в школе. – 2014. – №6. – С. 127. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25514662.- Последнее обновление 17.05.2018г.

33. Ткачева, М.В. Элементы статистики и вероятность [Текст]: учебное пособие для 7-9 классов / М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова. - 2-е изд. - М.: 2015. - 112 с.

34. Тюрин, Ю.Н. Теория вероятности и статистика [Текст]: учебное пособие для общеобразовательных заведений / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко.- М.: 2008. - 256 с.

35. Фалин, Г.И. Преподавание теории вероятностей в школе. Основные термины теории вероятностей [Электронный ресурс] / Г.И. Фалин

// Математика в школе, 2014. - №3. – С. 55-64. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21348620.- Последнее обновление: 20.05.2018г.

36. Фалин, Г.И. Преподавание теории вероятностей в школе. Часть 2. Предмет теории вероятностей [Электронный ресурс] / методическое пособие // Математика в школе, 2014 - № 2. - С. 28-36.- Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21348621.- Последнее обновление: 20.05.2018г.

37. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / Министерство образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2010. - 50 с.

38. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс] / – Режим доступа: http://fipi.ru/.–Последнее обновление: 17.05.2018г.

39. Шень, А. «Что такое случайность?» [Электронный ресурс] / Шень А. // Квант, 1983. - №7. – С. 57 – 58. – Режим доступа: http://kvant.mccme.ru/1983/07/zadachnika_kvanta_ma.htm.–Последнее обновление: 14.05.2018г.

40. Ященко В.С. Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2017. Математика. [Текст]: Учебное пособие / под ред. И.В. Ященко; Московский центр непрерывного математического образования. – М.: Интеллект – Центр, – 2017. – 112с.

41. Jaynes, E.T. Probability Theory: The Logic Of Science / Cambridge University Press. – 2007. – 759 p.

42. Karr, A. F. Probability/ Springer–Verlag New York. – 2016. – 283p.

43. Fisz, Marek. Probability Theory and Mathematical Statistics / Krieger Pub Co. – 2014 . – 677 p.

44. Lehmann, E.L. Elements of Large – Sample Theory/ Springer. – 2016. – 631 p.

45. Sahoo, Prasanna. Probability Theory and Mathematical Statistics / University of Lousville. – 2013 . – 698 p.

Приложение

Таблица 1

Типы задач по теме «Классическое определение вероятности»

в учебниках математики 5-9 классов разных авторов

	Задачный материал учебника-И.И. Зубаревой	Задачный материал учебника-Г.В. Дорофеев	Задачный материал учебника-Г.В. Дорофеев	Задачный материал учебника-А.Г. Мордкович	Задачный материал учебника-Ю.Н. Макарычев	Задачный материал учебника-Н.Я. Виленкин	Задачный материал учебника-Ш.А. Алимов
Класс:	6	8	9	9	9	9	9
Задачи:	№1103-1114	№ 867-879	№ 771-776	№ 20.1-20.20	№ 798 – 819	№ 42 -57	№ 341-351
Всего задач:	12	13	6	20	22	16	11
$P\ A\ =\frac{+}{+}$	5	1	1	1	-	-	2
$P\ A\ =\frac{?}{+}$	4	2	1	3	3	2	1
$P\ A\ =\frac{+}{?}$	3	4	-	2	1	1	1
$P\ A\ =\frac{?}{?}$	-	3	2	6	9	6	2
$P\ A\ =\frac{0}{+}$	-	-	-	1	1	1	-
$P\ A\ = \ = 1 - P\ A \ = 1 - \frac{+}{+}$	-	1	1	2	4	3	-
Смешанный тип	-	2	1	5	4	3	5

Концепт разработки онлайн-тестирования по теме «Решение задач на классическое определение вероятности»

Онлайн-тестирование по теме «Решение задач на классическое определение вероятности» - это электронный тест, позволяющий осуществлять мини-контроль по знанию темы «Классическое определение вероятности» в школьном курсе математики, систематизировать статистику освоения данной темы и проводить оперативную работу над ошибками.

Актуальность разработки данного проекта обуславливает современное тесное взаимодействие компьютерных технологий и процесса обучения математики в школе. Без применения компьютерных технологий сложно представить жизнь современного человека на работе, дома, и тем более, в процессе обучения. К тому же, электронный язык для будущих выпускников понятен и удобен в использовании. Система тестирования стала основой для выпускных экзаменов в школах, поэтому прохождение дополнительных тестов в процессе обучения будет помощником для получения навыков решения таких заданий. Учителя также смогут отдать предпочтение возможностям электронной обработки данных, так как это более простой сбор информации о результатах и мгновенный вывод статистики. Тестирование дает возможность понять насколько хорошо усвоена тема, узнать какой материал требует работы над ошибками и дополнительного объяснения в классе.

Ниже представлены таблицы к созданию схемы базы данных (Рис. 1 – Рис. 5) и схема базы данных (Рис. 6), которая представляет собой основу реализации данного проекта.

Вопрос | Результаты | Тестирование | Ученик | Учитель

Имя поля	Тип данных
id_Учителя	Счетчик
ФИО	Короткий текст
Логин	Короткий текст
Пароль	Короткий текст

Рис. 1. «Поле Учитель»

Вопрос | Результаты | Тестирование | Ученик | Учитель

Имя поля	Тип данных
id_Вопроса	Счетчик
Тема	Короткий текст
Вопрос	Короткий текст
Ответ	Короткий текст
Вариант 1	Короткий текст
Вариант 2	Короткий текст
Вариант 3	Короткий текст
Вариант 4	Короткий текст

Рис. 2. «Поле Вопрос»

Вопрос | Результаты | Тестирование | Ученик | Учитель

Имя поля	Тип данных
id_Теста	Счетчик
Оценка	Короткий текст
id_Ученика	Короткий текст

Рис. 3. «Поле Результаты»

Вопрос | Результаты | Тестирование | Ученик | Учитель

Имя поля	Тип данных
id_Теста	Числовой
id_Вопроса	Числовой
Ответ ученика	Короткий текст

Рис. 4. «Поле Тестирование»

Вопрос | Результаты | Тестирование | Ученик | Учитель

Имя поля	Тип данных
id_Ученика	Счетчик
ФИО	Короткий текст
Класс	Короткий текст
Пароль	Короткий текст

Рис. 5. «Поле Ученик»

Для доступа к тестированию учитель имеет свои входные данные, и после чего включает в базу пользователей - своих учеников. У них так же существуют свои логины и пароли, логином для входа в систему служит ФИО ученика. База вопросов – задачи из системы упражнений по теме «Классическое определение вероятности», предложенные в §7 бакалаврской работы. Она состоит из 7 типов упражнений, каждый из которых содержит 8 задач на классическое определение вероятности. К каждой задаче предложено 4 варианта ответа и скрытое решение, которое можно посмотреть только после прохождения всего теста. База данных позволяет генерировать каждый раз новый вариант из всего многообразия вопросов.

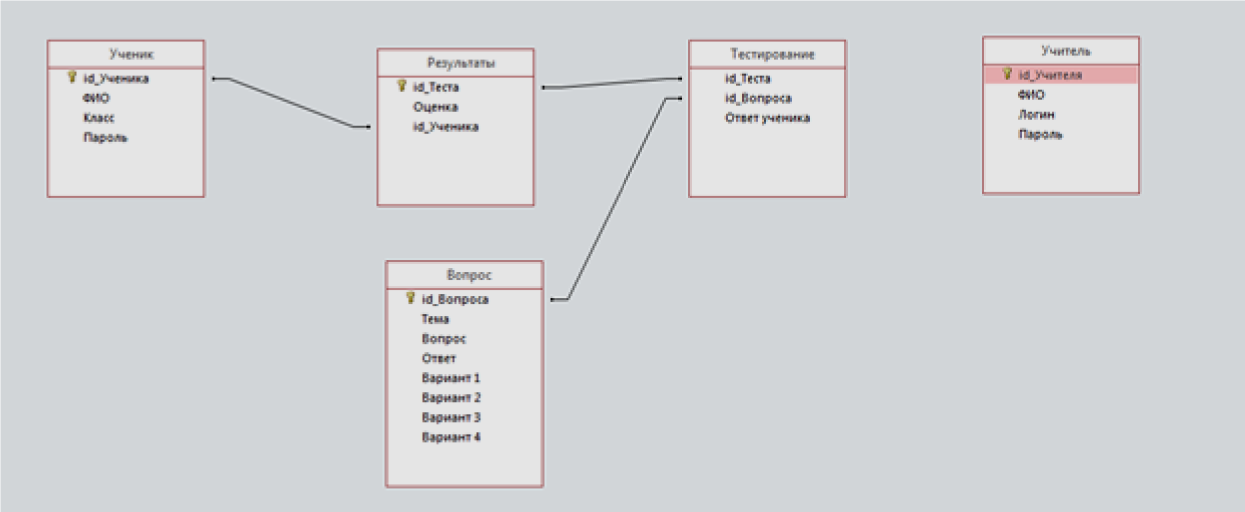

Рис. 6. «Схема базы данных»

Как только ученик начинает тестирование, в таблице «Результаты» создается поле, в которое после прохождения теста запишется оценка, если ученик не закончит тестирование и выйдет, то оценки не будет. Ученик решает задачи и, нажимая на кнопку «Далее», отправляет результат на сервер и больше вернуться к этому варианту не сможет. На сервере каждый ответ приписывается к определенному тесту уникальному при каждом начале тестирования. Если ответ правильный, то ученик получает +1 к переменной «Оценка», если нет, то 0, в конце «Оценка» отправляется на сервер и записывается в таблицу «Результат». Учитель может посмотреть результат каждого ученика, если тестов было много, то можно посмотреть все результаты и вывести на экран статистику. Так же учитель может узнать, в каких вопросах были допущены ошибки, какие ответы давал ученик и затем, отсортировать вопросы с ошибками по типам.

На Рис. 7 – Рис. 10 показан интерфейс онлайн-тестирования и основные этапы прохождения теста в пользовательском режиме.

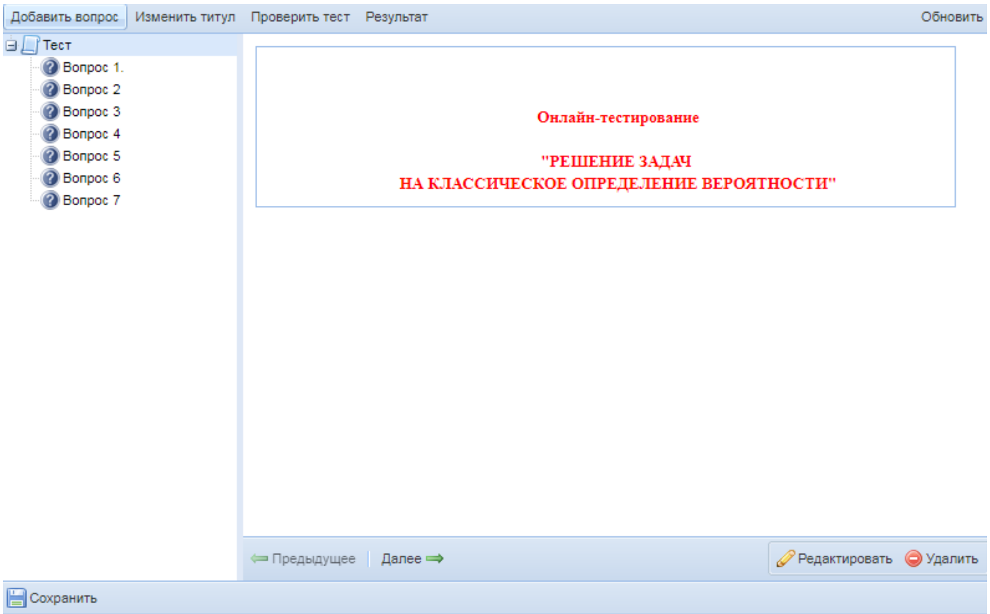

Рис. 7. «Вводная страница»

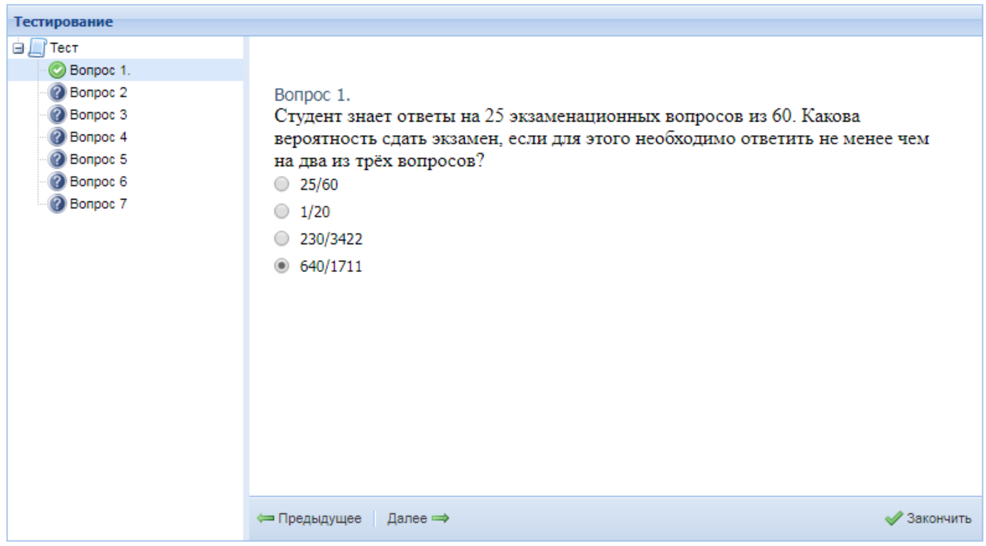

Рис. 8 «Прохождение теста»

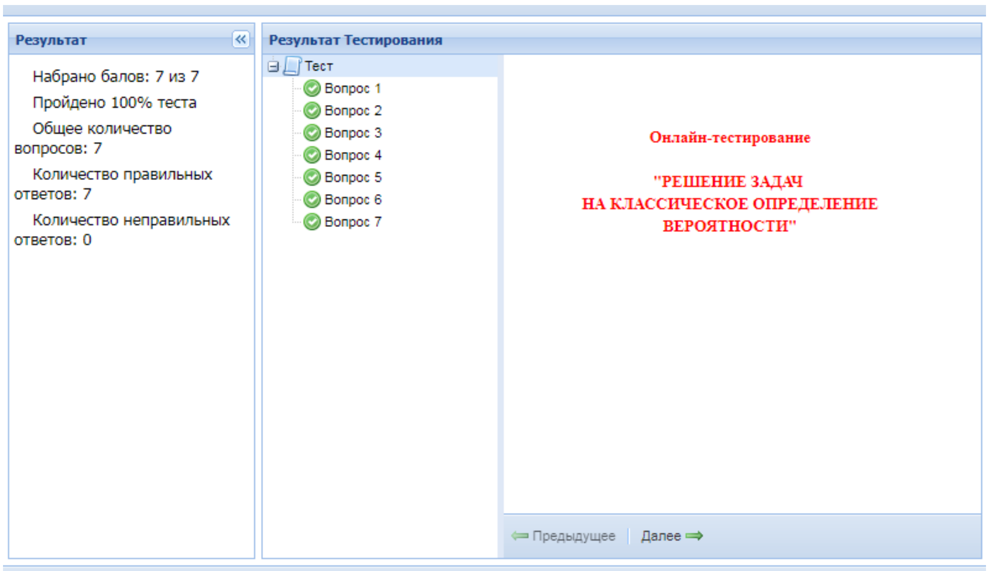

Рис. 9. «Результаты тестирования»

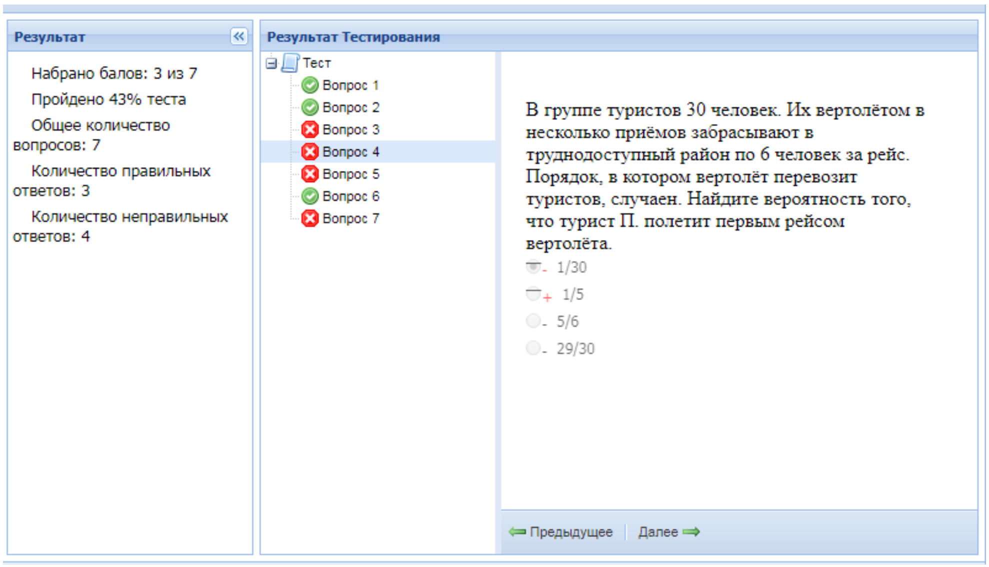

Рис. 10. «Прохождение теста с ошибками»

В окне «Результат тестирования» показано набранное количество баллов, в том числе и в процентном соотношении, общее число вопросов, количество правильных и неправильных ответов.

Данное онлайн-тестирование является значимо полезным проектом, так как представляет собой быструю и качественную проверку знаний по теме. Ученики могут проходить тестирование в классе - в качестве проверочной работы, так и дома - в качестве подготовки к экзаменам. Учитель, в свою очередь, быстро и удобно получать результаты, проводить качественную работу над ошибками и подводить итоги.